数值积分(Numeric Integration)

袁略真
3130103964
生物信息学
浙江大学

2016 年 4 月 8 日

1 数值积分

许多物理量的定义、定理和定律都是用积分形式表示的.例如电势的定义、高斯定理和场强环流定律等均用积分形式表示.在解析法求解积分十分困难的情况下,就要使用数值方法求解.

求解积分的数值法有矩形法、梯形法、辛卜生法、龙贝格积分、高斯-勒让德积分等.梯形法可以看做在线性插值后,对插值函数积分. 辛卜生方法可看做在抛物线插值(二次插值)后,对插值函数积分.

变步长(迭代的)梯形法和辛卜生方法(adaptive Simpson's method)可以逐次加倍等分区间,并检测收敛情况判断何时停止. 它们可以尽可能地使用前一次的计算结果,以减少计算量.

对于积分函数为正态分布密度函数而言,本次实验发现辛卜生方法收敛速度更快.

2 程序流程

2.1 变步长(迭代)辛卜生法

```
Input: ε, A(integrate from -A to A)
Output: Integration result S.
H←4A; RC←0; RP←f(-A)+f(A);
i←0; err← ε+1;
while err> ε do
    H←H/2;
    RP←RP+2*RC;
    RC←0;
    for int k=1;k<= 2^i;k++ do
        RC+=f(-A-H/2+k*H);
    end
    tmp←H/6*(RP+4*RC);
    err←abs(S-tmp);
    S←tmp;
    i++;
end
return S;
```

Algorithm 1: Adaptive Simpson method

2.2 迭代梯形法

Input: ε, A(integrate from -A to A)

Output: Integration result T.

```
H←2A; T←H/2*(f(-A)+f(A));
s=0; tmp=0;
j←0; err← ε+1;
while err> ε do
    j++;
    H←H/2;
    s←0;
    for int k=1;k<= 2^(j-1);k++ do
        s+=f(-A+H*(2*k-1));
    end
    tmp←T/2+s*H;
    err←abs(T-tmp);
    T←tmp;
end
return T;
```

Algorithm 2: Adaptive Trapezoidal method

3 辛卜生法程序结果

对于积分区间为[-50,50],积分函数为正态分布(均值50,标准差15)的概率密度函数.使用变步长的辛卜生法,精确到0.001,结果如下:

```
Numeric Integration
Converge at 4th iteration.
Result: 0.999129
```

4 辛卜生法和梯形法收敛速度比较

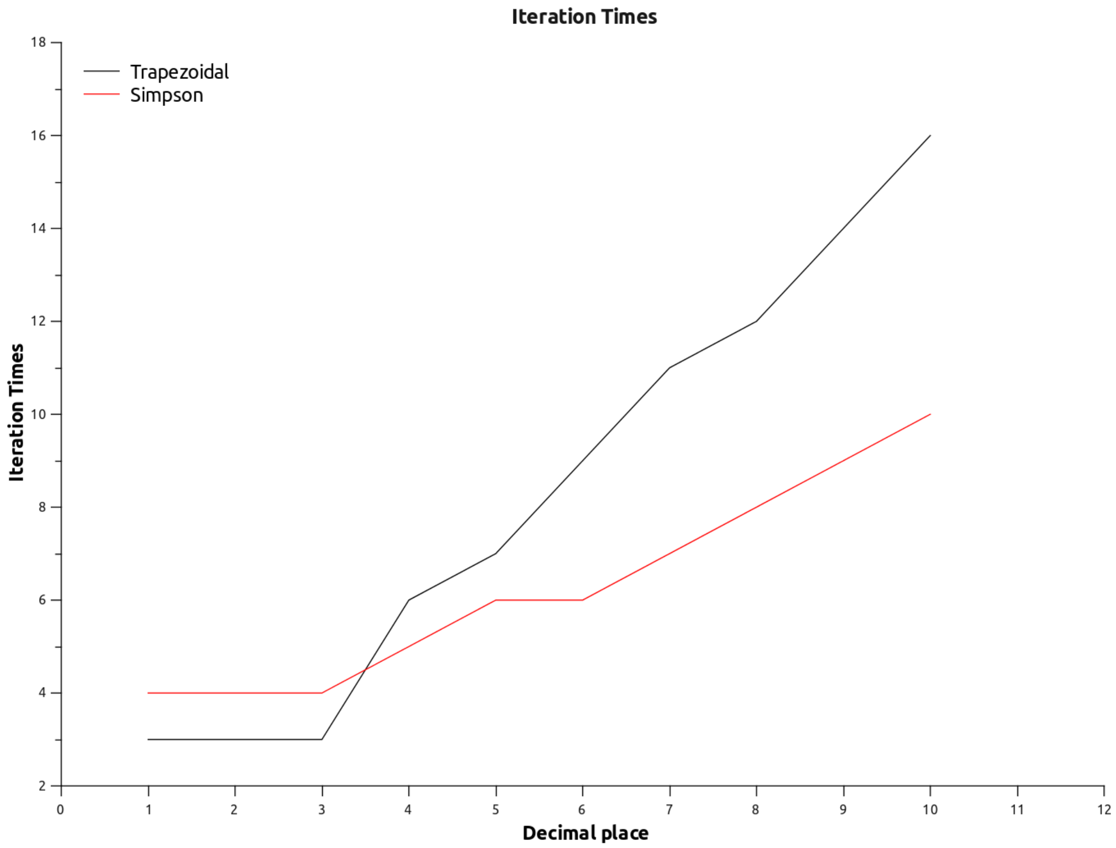

图 1: Simpson法和梯形法收敛速度比较. 横坐标表示精确到的小数点后位数,纵坐标表示迭代次数. 对于i次迭代,需要将[-A,A]区间分2^i个区间. 例如要求精确到小数点后10位时,Simpson法需要将区间划分为1024(2^{10})个区间,而梯形法需要65536(2^{16})个区间才能收敛到同样的精度.