1 Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Esta sección de las notas de clase está organizada de la siguiente forma. Para comenzar con el desarrollo de la teoría del álgebra lineal, se introduce el concepto de vector en el plano Cartesiano y en el espacio. En segundo lugar, se introducen las operaciones básica entre vectores en el plano Cartesiano, a saber, suma, resta, multiplicación por números reales, producto punto, magnitudes y ángulos. Con las operaciones algebraicas a la mano, se abre el panorama, introduciendo la representación geométrica de las operaciones entre vectores. En este punto, se da una extensión del álgebra de vectores al contexto de tres dimensiones y se discuten algunas construcciones vectoriales que son consecuencia de la proyección ortogonal. Finalmente, esta sección cierra introduciendo un concepto que aparecerá más adelante en las notas del curso que se denomina combinación lineal y la escritura de un vector en general.

Cabe mencionar que los vectores son objetos matemáticos que sistematizan varias ideas de la mecánica clásica y de la teoría econométrica. Adicionalmente, los vectores son la abstracción matemática de la idea de la flechas en el sentido amplio de la palabra.

1.1 Definición de vector

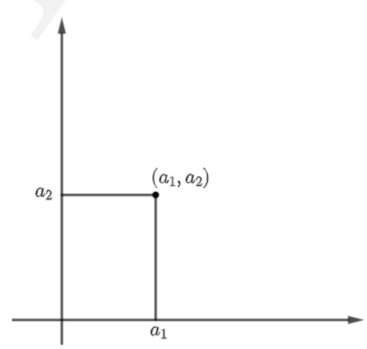
Los vectores que se estudiarán en esta sección son objetos definidos en los espacios euclideanos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Antes de presentar la definición de vector, es preciso aclarar que los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ están definidos como los conjuntos de tuplas ordenadas,

$$\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) : a_i \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) : a_i \in \mathbb{R}\}.$$

El espacio $\mathbb{R}^2$ corresponde al ***plano Cartesiano***, mientras que el espacio $\mathbb{R}^3$ se denomina el ***espacio de tres dimensiones***.

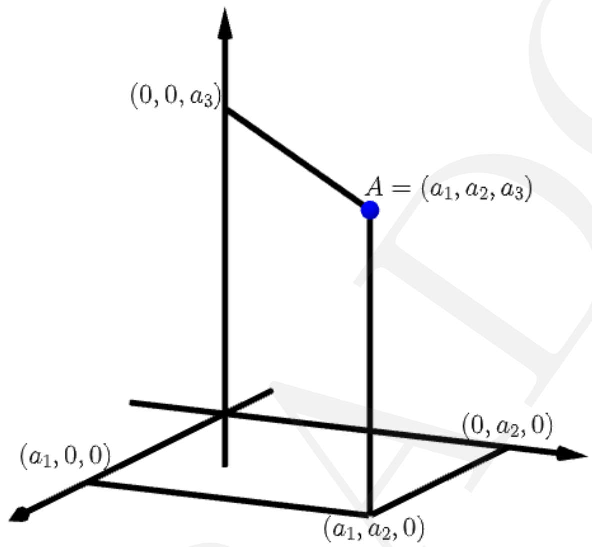
Ejemplo 1.1. El punto (a_1, a_2) de $\mathbb{R}^2$ se representa gráficamente así,



El número a_1 se llama la ***primera coordenada*** de (a_1, a_2). Similarmente a_2 se denomina la ***segunda coordenada*** del punto en cuestión. Note que a_1 representa el movimiento horizontal, mientra que a_2 representa el movimiento vertical.

Ejemplo 1.2. La siguiente es una lista de puntos de $\mathbb{R}^2$, $(1,1)$, $(-3,5)$, $\left(\frac{2}{3},-4\right)$, $(\sqrt{3},0)$ y $(b,2b)$ donde $b \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.3. El punto $A=(a_1,a_2,a_3)$ de $\mathbb{R}^3$ se representa gráficamente así,



El número a_1 se llama la ***primera coordenada*** de A. Similarmente a_2 y a_3 se denominan la ***segunda*** y ***tercera coordenada*** de A. El número a_3 representa la altura del punto A.

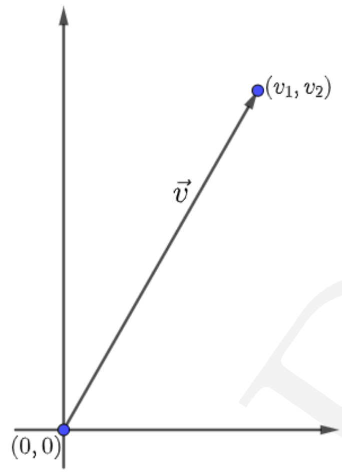
Ejemplo 1.4. La siguiente es una lista de puntos de $\mathbb{R}^3$, $(1,1,2)$, $(11,-3,5)$, $\left(-\frac{7}{17},\frac{2}{3},-4\right)$, $(0,\sqrt{3},0)$ y $(1,b,2b)$ donde $b \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.5. Los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ tienen un punto ***marcado*** que se denomina ***el origen***, el cual está formado por la tupla ordenada que solo tiene ceros. Es decir, $\mathbf{0}=(0,0) \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{0}=(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

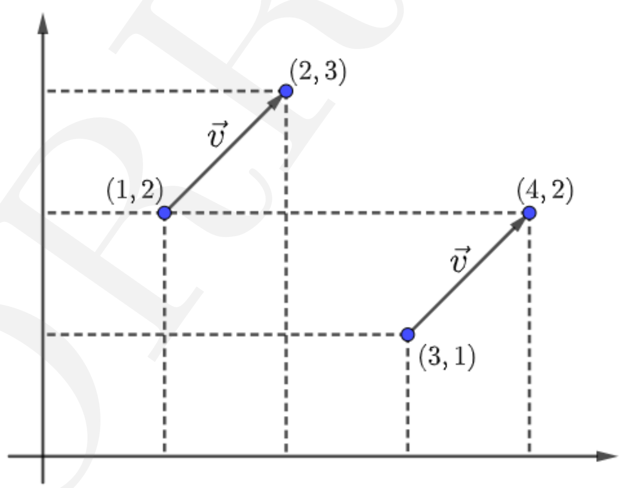
Con los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ a la mano, se procede a dar la definición de vectores. Decimos que ***un vector $\vec{v}$ es una tupla ordenada*** que se escribe de la siguiente manera según sea el caso:

$$\vec{v}=[v_1,v_2] \in \mathbb{R}^2, \text{ con } v_i \in \mathbb{R},$$
$$\vec{v}=[v_1,v_2,v_3] \in \mathbb{R}^3, \text{ con } v_i \in \mathbb{R}.$$

En $\mathbb{R}^2$, el vector $\vec{v}=[v_1,v_2]$ está representado por las coordenadas del punto (v_1,v_2) y el origen **0**. Gráficamente, la situación es la siguiente,

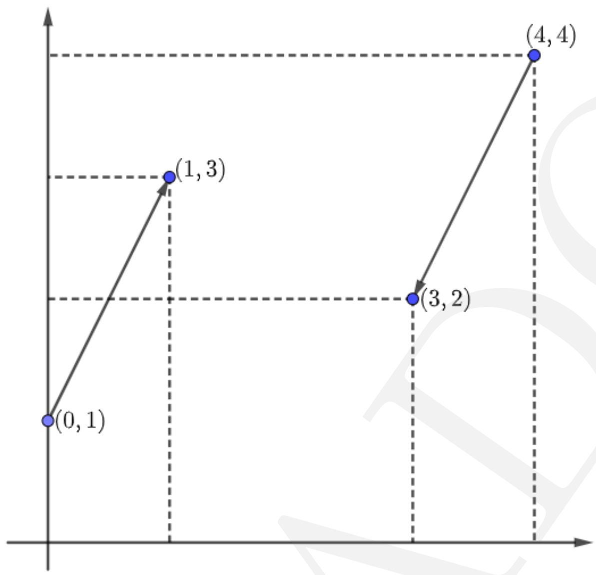


Como se ve en la figura anterior, el vector $\vec{v}$ es el segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es **0** y punto final es (v_1, v_2). Esto no quiere decir que los vectores tienen como punto incial **0**. La siguiente figura presenta dos vectores cuyo punto incial es diferente del origen **0**. Adicionalmente, como los vectores dados son segmentos de recta dirigidos paralelos con la misma dirección y del mismo tamaño, tenemos que estos dos segmentos reresentan el mismo vector.

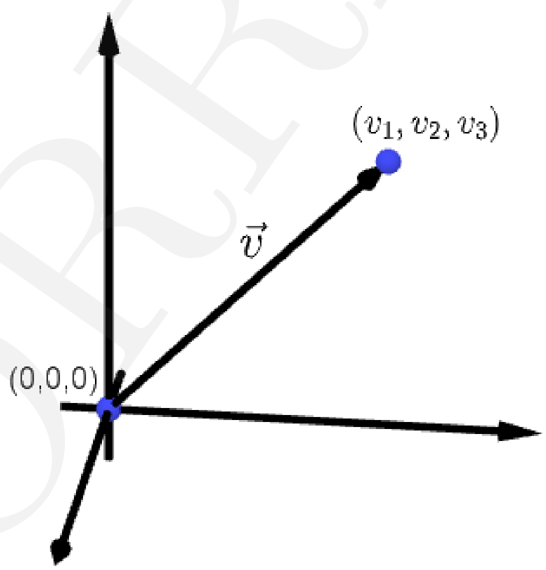


Ejemplo 1.6. Los vectores representados en la figura no tienen la misma dirección pero

tienen el mismo tamaño.

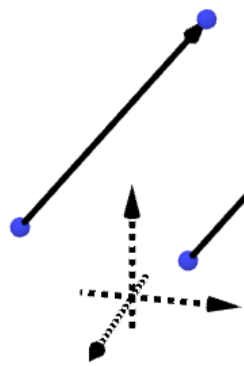


Para el espacio $\mathbb{R}^3$, la situación es completamente análoga a la presentada en $\mathbb{R}^2$. Gráficamente, un vector $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ en $\mathbb{R}^3$ se representa de la siguiente forma,



Al igual que en $\mathbb{R}^2$, en $\mathbb{R}^3$ el punto inicial de un vector no tiene que ser siempre el origen.

Ejemplo 1.7. La siguiente figura muestra dos vectores en $\mathbb{R}^3$ cuyo punto inicial no es el origen $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Adicionalmente, los vectores presentados son segmentos de recta dirigidos que tienen la misma dirección y el mismo tamaño.



Geométricamente, ***un vector $\vec{v}$ es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos paralelos que tienen la misma dirección y de igual tamaño***.

En este punto, se introduce una notación adicional para los vectores que se utilizará a lo largo de estas notas. ***Un vector columna*** $\vec{v}$ se representa de la siguiente forma, (según sea el caso),

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, v_i \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, v_i \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.8. Los siguientes son vectores columna de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -3\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix}, \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.9. La siguiente lista de vectores columna,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{13}{8} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 27 \\ 1+\sqrt{2} \\ -3\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 3a \end{pmatrix}, \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

pertenecen a $\mathbb{R}^3$.

Recapitulando, en $\mathbb{R}^2$ un vector $\vec{v}$ tiene dos presentaciones equivalentes, (***algebraica y geométrica*** respectivamente),

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

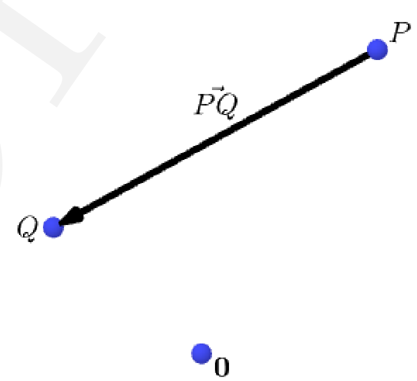
de igual forma para un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ se tienen las representaciones (***algebraica y geométrica*** respectivamente)

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.10. Siguiendo la notación introducida se tiene que, $[2, 4] = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $[0, \frac{1}{4}, -3] = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ -3 \end{pmatrix}$, representan el mismo vector en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

Ahora bien, el contexto de trabajo es el que permite diferenciar si el vector en cuestión tiene como punto inicial el origen $\mathbf{0}$. Explícitamente, las dos situaciones que se necesitan diferenciar son las siguientes: dado un vector $\vec{v}$ su representación gráfica es:

Por otro lado, dados dos puntos P y Q, el vector que va de P a Q se denota por $\vec{PQ}$ y su representación gráfica es:



En este punto, surgen dos preguntas, a saber, ¿cómo calcular el vector $\vec{PQ}$ con P, Q dos puntos dados en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$?, ¿cómo calcular el tamaño de un vector? Para responder a estas preguntas es necesario presentar las operaciones algebraicas vectoriales que se pueden llevar a cabo.

1.2 Álgebra de vectores

En esta sección se presentan las operaciones algebraicas entre vectores. Primeramente, se definirá el álgebra de vectores en $\mathbb{R}^2$, la cual, en un segundo paso, se extenderá de forma natural a $\mathbb{R}^3$. Cabe decir que la justificación de algunas fórmulas se presentará en la siguiente sección.

Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ ***un escalar***, es decir un número real. ***La suma de vectores*** está definida así,

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}, \text{ sumar componente a componente.}$$

La multiplicación por escalar está definida por la fórmula,

$$\alpha\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{pmatrix}, \text{ multiplicar el escalar en cada componente.}$$

Ejemplo 1.11. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $\alpha = 3$ y $\beta = -1$. Entonces

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-4) \\ -3 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\alpha\vec{t} = 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{1}{2} \\ 3 \cdot \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\vec{a} + \beta\vec{b} + \alpha\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ -6 \end{pmatrix}.$$

La resta de vectores se obtiene al combinar la suma de vectores y la multiplicación por -1, es decir,

$$\vec{v} + (-1)\vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w_1 \\ -w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix} = \vec{v} - \vec{w}.$$

Ejercicio 1.1. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Verifique que $\vec{w} - \vec{v} = -(\vec{v} - \vec{w})$.

Para medir el ángulo y el tamaño de un vector en $\mathbb{R}^2$ es preciso definir ***el producto punto de vectores***. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ dos vectores dados. El producto punto de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se denotará $\vec{v} \cdot \vec{w}$ y está definido como sigue

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Ejemplo 1.12. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Entonces

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot 7 = -8 - 21 = -29.$$

Ejercicio 1.2. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Verifique que

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}.$$

Es decir el producto punto es conmutativo.

Ejercicio 1.3. Sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, verifique que

$$\vec{v} \cdot \vec{v} > 0.$$

Además, muestre que $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ si y solo si $\vec{v} = 0$.

Note que el resultado del producto punto entre vectores es un escalar. ***La magnutid*** o ***norma*** (que se había mencionado como tamaño) de un vector se calcula así,

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}.$$

Para los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ el ***coseno del ángulo*** θ ***entre*** $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se calcula por medio de la fórmula:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}||||\vec{w}||}.$$

Ejemplo 1.13. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Entonces,

$$||\vec{a}|| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

De forma similar, se tiene que $||\vec{b}|| = \sqrt{65}$. Así que, si θ es el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}||||\vec{b}||} = \frac{-29}{\sqrt{13}\sqrt{65}}.$$

Ejercicio 1.4. Verique que $||(\vec{v} - \vec{w})||^2 = ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w}$.

Ejemplo 1.14. Para cualquier par de vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ dados, se tiene que

$$||\vec{v} + \vec{w}|| \leq ||\vec{v}|| + ||\vec{w}|| \text{ y } ||\alpha\vec{v}|| = |\alpha|||\vec{v}||,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.
Note que,

$$||\vec{v} + \vec{w}|| \leq ||\vec{v}|| + ||\vec{w}|| \iff ||\vec{v} + \vec{w}||^2 \leq (||\vec{v}|| + ||\vec{w}||)^2.$$

Ahora bien, el lado izquierdo de la desigualdad se reescribe así

$$||\vec{v} + \vec{w}||^2 = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}||^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + ||\vec{w}||^2.$$

A su vez, el lado derecho de la desigualdad se reescribe como sigue,

$$(||\vec{v}|| + ||\vec{w}||)^2 = ||\vec{v}||^2 + 2||\vec{v}||||\vec{w}|| + ||\vec{w}||^2.$$

Comparando el lado izquierdo con el lado derecho, se sigue que la desigualdad es verdadera si y sólo si se cumple lo siguiente

$$2\vec{v} \cdot \vec{w} \leq 2||\vec{v}||||\vec{w}|| \iff \vec{v} \cdot \vec{w} \leq ||\vec{v}||||\vec{w}|| \iff \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}||||\vec{w}||} \leq 1 \iff \cos(\theta) \leq 1$$

donde θ es el ángulo formado entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Un vector $\vec{u}$ se llama ***vector unitario*** si $||\vec{u}|| = 1$.

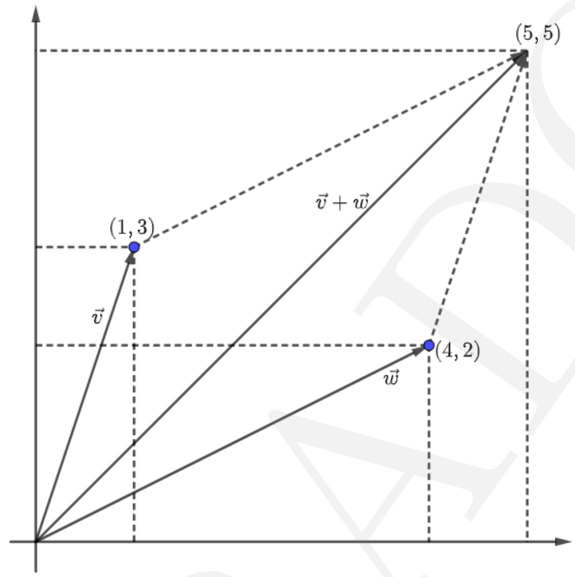
Ejemplo 1.15. El vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ es un vector unitario.

Ejercicio 1.5. Dado $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Verifique que el vector $\vec{b} = \frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}$ es un vector unitario.

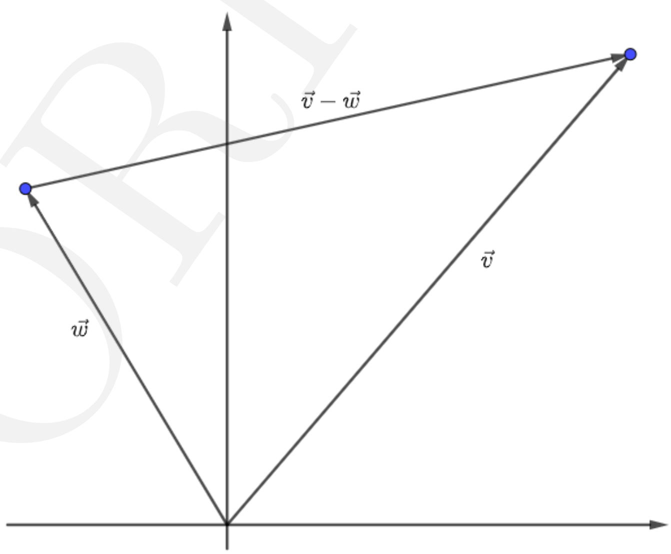
Para justificar las definiciones de magnitud y ángulo entre vectores es útil apoyarse en la respresentación geométrica de los vectores y en la representación geométrica de las operaciones de suma, resta y multiplicación por escalar en $\mathbb{R}^2$.

1.2.1 Representación geométrica de suma, resta y multiplicación por escalar

Las operaciones algebraicas que se acaban de definir tienen una representación geométrica que se presenta a continuación. La suma de vectores $\vec{v} + \vec{w}$ está representada por



Note que $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Gráficamente la resta de vectores $\vec{v} - \vec{w}$ viene dada por

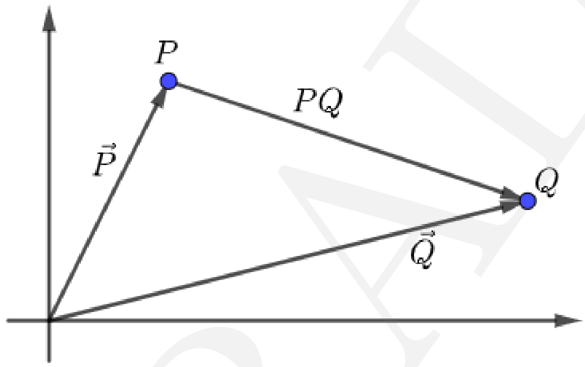


Cabe anotar que, el vector $\vec{v} - \vec{w}$ también está representado por un segmento de recta paralelo, con la misma dirección e igual tamaño, cuyo punto inicial es el origen y su representación geométrica se deja al lector.

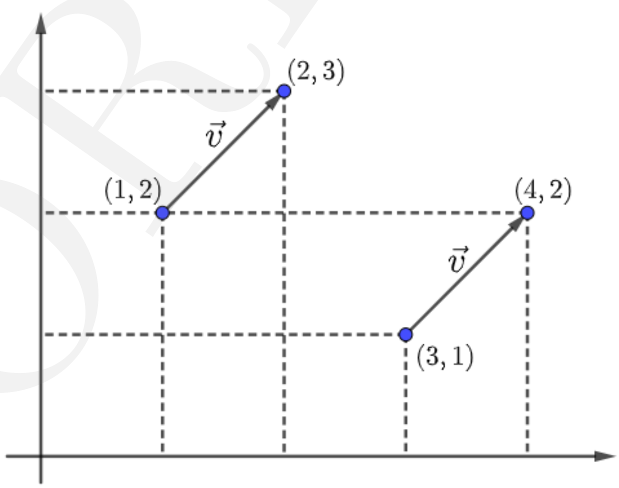
Ejemplo 1.16. Sean $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ dos puntos en $\mathbb{R}^2$. Cada punto determina un vector que se denota por $\vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ y $\vec{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$. Para estos vectores el punto inicial es $\mathbf{0}$ y el punto final es P y Q respectivamente. Así que, el vector que sale del punto P hacia el punto Q está dado por

$$\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}.$$

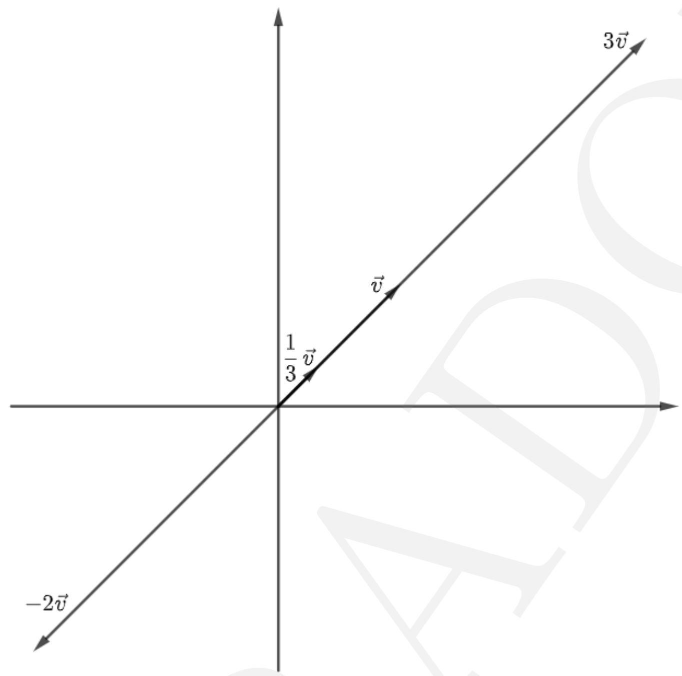
En particular, si $P = (2, 3)$ y $Q = (5, 1)$ entonces el vector $\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.



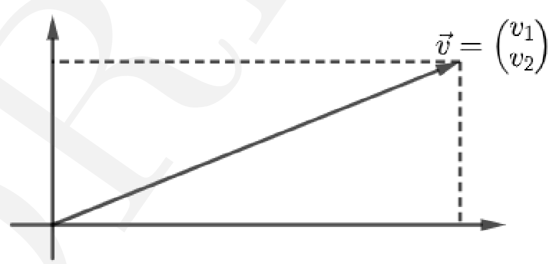
Además, se tiene que que los vectores de la siguiente figura son numéricamente el mismo, a saber, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



La multiplicación por escalar $\alpha\vec{v}$ se representa en la siguiente figura para el caso $\alpha = 3, \frac{1}{3}, -2,$



Dado un vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}$ determina un triángulo rectángulo en $\mathbb{R}^2$. Gráficamente, la situación se puede representar así



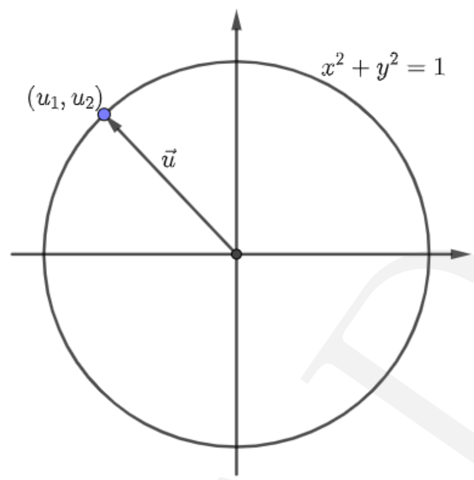
Luego, la magnitud de $\vec{v}$ resulta ser la hipotenusa del triángulo en la figura anterior. Por el teorema de Pitágoras se tiene que,

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}.$$

Suponga que $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ es un vector unitario. Como $||\vec{u}|| = 1$, el siguiente cálculo

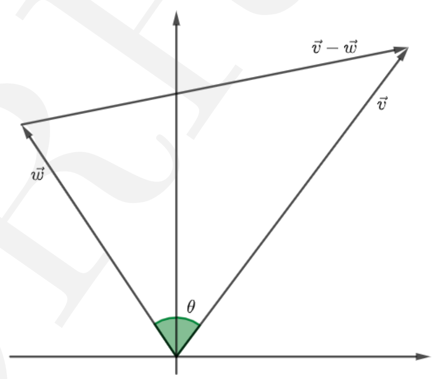
$$||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2 = 1$$

implica que el punto (u_1, u_2) pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con centro $\mathbf{0} = (0, 0)$ y radio 1. Gráficamente,



Ejemplo 1.17. El vector $\vec{\theta} = [\cos(\theta), \sin(\theta)]$ define una familia de vectores unitarios donde $\theta \in [0, 2\pi)$

Para justificar la fórmula que determina el coseno del ángulo θ entre dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, note que esos dos vectores determinan un triángulo escaleno, cuyo tercer lado es $\vec{v} - \vec{w}$. Gráficamente la situación es la siguiente,



La ley del coseno sobre el triángulo con lados, $||\vec{v}||$, $||\vec{w}||$, $||\vec{v} - \vec{w}||$ expresa que,

$$||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2 - 2\cos(\theta)||\vec{v}||||\vec{w}|| = ||\vec{v} - \vec{w}||^2,$$

de lo cual se obtiene que

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}||||\vec{w}||}.$$

El ángulo θ entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ está definido en el intervalo $[0, \pi]$. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ***ortogonales*** (perpendiculares) si y sólo si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Por otro lado los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ***paralelos*** si existe un escalar α tal que $\vec{w} = \alpha\vec{v}$.

Ejemplo 1.18. Los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ son ortogonales ya que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = -6 + 6 = 0.$$

Se deja al lector hacer la representación gráfica.

Ejemplo 1.19. Los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ son paralelos, ya que si $\alpha = \frac{3}{2}$ se tiene que

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \alpha \vec{a}.$$

Se deja al lector hacer la representación gráfica.

Hasta este punto, se han definido operaciones algebraicas entre vectores en $\mathbb{R}^2$, las cuales permite construir vectores a partir de vectores dados y permiten definir las nociones geométricas de magnitud y ángulo.

1.2.2 Álgebra de vectores en el espacio

Con el objetivo definir las operaciones algebraicas en $\mathbb{R}^3$, es suficiente extender las operaciones teniendo en cuenta la tercera coordenada. Explícitamente, sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. ***La suma de vectores*** está dada por

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}.$$

La multiplicación por escalar está definida por

$$\alpha \vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{pmatrix},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un escalar.
La resta de vectores está definida por

$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ v_3 - w_3 \end{pmatrix}.$$

El producto punto está definido por la siguiente fórmula,

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3.$$

De forma similar, ***la magnitud*** $||\vec{v}||$ y ***el ángulo*** θ formado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se calculan por medio de las siguientes fórmulas,

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||||\vec{w}||} \iff \theta = \arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||||\vec{w}||}\right).$$

Ejemplo 1.20. Sean $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{4} \\ 3 \end{pmatrix}$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$. Sea $\alpha = 3$. Entonces

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\left|\left|\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{4} \\ 3 \end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{4} \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{4} \\ 3 \end{pmatrix}} = \sqrt{9 + \frac{9}{16} + 9} = \sqrt{\frac{297}{16}}.$$

El coseno del ángulo θ determinado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ es,

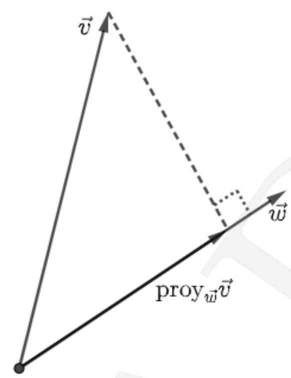
$$\cos(\theta) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}{\left|\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|\right|\left|\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right|\right|} = \frac{-14}{\sqrt{11}\sqrt{20}}.$$

Note que

- si $\vec{v}\cdot\vec{w} > 0$ entonces el ángulo θ entre los vectores cumple $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- si $\vec{v}\cdot\vec{w} < 0$ entonces el ángulo θ entre los vectores cumple $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

1.3 Proyección ortogonal entre vectores

Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$ (o en $\mathbb{R}^3$ respectivamente). En esta sección se quiere calcular cuál es la componente de $\vec{v}$ que es paralela a $\vec{w}$ y vice versa. Gráficamente, la situación viene representada de la siguiente manera:



El vector $\text{proy}_{\vec{w}}\vec{v}$ se denomina la ***proyección ortogonal*** de $\vec{v}$ a lo largo de $\vec{w}$ y está definido por la siguiente expresión,

$$\text{proy}_{\vec{w}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\right)\vec{w}.$$

De la misma forma, la ***proyección ortogonal*** de $\vec{w}$ a lo largo de $\vec{v}$ está dada por

$$\text{proy}_{\vec{v}}\vec{w} = \left(\frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}.$$

Ejemplo 1.21. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$. La proyección ortogonal de $\vec{a}$ a lo largo de $\vec{b}$ es,

$$\text{proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\right)\vec{b} = \left(\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{16}{40}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix} = \left[-\frac{4}{5}, -\frac{12}{5}\right].$$

Se deja al lector calcular la proyección de $\vec{b}$ a lo largo de $\vec{a}$, $\text{proy}_{\vec{a}}\vec{b}$.

Ejercicio 1.6. Sea $\vec{t}$ un vector de dos o tres coordenadas, complete la siguiente igualdad,

$$\text{proy}_{\vec{t}}\vec{t} =$$

Ejemplo 1.22. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. La proyección ortogonal de $\vec{v}_2$ a lo largo de $\vec{v}_1$ es

$$\text{proy}_{\vec{v}_1}\vec{v}_2 = \left(\frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\right)\vec{v}_1 = \left(\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}, \frac{3}{11}\right].$$

Si $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{w}$ entonces $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, por lo tanto $\text{proy}_w\vec{v} = \mathbf{0}$. Note que por definición de la proyección ortogonal entre vectores, el vector $\text{proy}_w\vec{v}$ es paralelo a $\vec{w}$. Adicionalmente, el cálculo

$$(\vec{v} - \text{proy}_w\vec{v}) \cdot \vec{w} = \left(\vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\vec{w}\right) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\vec{w} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 0,$$

muestra que el vector $(\vec{v} - \text{proy}_w\vec{v})$ es ortogonal a $\vec{w}$.

1.4 Combinación lineal

¿Cómo respresentar un número infinito de vectores a partir de un número finito de ellos? La respuesta a esta pregunta viene dada por el concepto de ***combinación lineal***. Antes de dar la definición, considere los siguientes casos. En $\mathbb{R}^2$ considere los vectores $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nótese que $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son vectores unitarios y ortogonales entre sí. Adicionalmente, dado un vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ se tiene que

$$\text{proy}_{\vec{i}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{\vec{i} \cdot \vec{i}}\right)\vec{i} = v_1\vec{i} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{proy}_{\vec{j}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{\vec{j} \cdot \vec{j}}\right)\vec{j} = v_2\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Así pues,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}, \text{ es decir } \vec{v} = \text{proy}_{\vec{i}}\vec{v} + \text{proy}_{\vec{j}}\vec{v}.$$

En otras palabras, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$. Similarmente en $\mathbb{R}^3$ considere los vectores $\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ y $\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Note que $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son vectores unitarios y vectores ortogonales entre sí. Adicionalmente, para cualquier vector $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ se tiene que

$$\text{proy}_{\vec{i}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{\vec{i}\cdot\vec{i}}\right)\vec{i} = v_1\vec{i} = \begin{pmatrix}v_1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\text{proy}_{\vec{j}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{\vec{j}\cdot\vec{j}}\right)\vec{j} = v_2\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\v_2\\0\end{pmatrix},$$

$$\text{proy}_{\vec{k}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{\vec{k}\cdot\vec{k}}\right)\vec{k} = v_3\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\v_3\end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\v_2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\v_3\end{pmatrix}, \text{ es decir } \vec{v} = \text{proy}_{\vec{i}}\vec{v} + \text{proy}_{\vec{j}}\vec{v} + \text{proy}_{\vec{k}}\vec{v}.$$

Así pues, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$. Si se piensa por un momento, las expresiones

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}, \text{ en } \mathbb{R}^2$$

y

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}, \text{ en } \mathbb{R}^3,$$

representan infinitos vectores que se escriben utilizando los conjuntos $\{\vec{i}, \vec{j}\} \subset \mathbb{R}^2$ o $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \subset \mathbb{R}^3$ según sea el caso. Así las cosas, si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ es un conjunto de vectores dado en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, ***una combinación lineal de los vectores*** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$ está definida como la siguiente expresión

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_r\vec{v}_r,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ son escalares. Es claro que la expresión que define a la combinación lineal $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_r\vec{v}_r$ produce un vector. Si $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_r\vec{v}_r$, se dice que $\vec{v}$ ***es una combinación lineal*** de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_r$.

Ejemplo 1.23. En $\mathbb{R}^2$, los siguientes vectores se expresan como combinación lineal de $\{\vec{i}, \vec{j}\}$,

$$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = 2\vec{i} + 5\vec{j}, \ \begin{pmatrix}-8\\10\end{pmatrix} = -8\vec{i} + 10\vec{j}, \ \begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix} = 7\vec{i} - 9\vec{j}.$$

En $\mathbb{R}^3$, los siguientes vectores se expresan como combinación lineal de $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\begin{pmatrix}2\\3\\8\end{pmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}, \ \begin{pmatrix}-1\\4\\-18\end{pmatrix} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 18\vec{k}, \ \begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix} = 2\vec{i} - 5\vec{k}$$

Ejemplo 1.24. Las siguientes son ejemplos de combinaciones lineales con respecto a un subconjunto de vectores dado en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ respectivamente,

$$2\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \text{ con respecto a } \left\{\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$13\begin{pmatrix}-4\\9\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}, \text{ con respecto a } \left\{\begin{pmatrix}-4\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$3\begin{pmatrix}5\\-5\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-8\\-6\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}, \text{ con respecto a } \left\{\begin{pmatrix}5\\-5\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\-6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$5\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}, \text{ con respecto a } \left\{\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Cabe mencionar que tanto en $\mathbb{R}^2$ como en $\mathbb{R}^3$ existen infintas combinaciones lineales. Por otro lado, una combinación lineal es una expresión que involucra suma y multiplicación por escalar que permite reescribir un vector en términos de un conjunto de vectores dados.

1.5 Vectores en $\mathbb{R}^n$

Los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son ejemplos de los ***espacios euclianos*** $\mathbb{R}^n$ donde $n = 2, 3, 4, \ldots$, $n \in \mathbb{N}$. Los espacios $\mathbb{R}^n$ son los conjuntos definidos por n-tuplas ordenadas de números reales.

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}.$$

Los puntos suspensivos en la notación de las n-tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ quiere decir que un punto en $\mathbb{R}^n$ está definido por n números reales. El valor que toma n determina la longitud de la tupla en cuestión.

Ejemplo 1.25. $\mathbb{R}^4 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_i \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^6 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) : a_i \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^{11} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{11}) : a_i \in \mathbb{R}\}$. Luego un punto en $\mathbb{R}^4$ está determinado por 4 números reales; en particular $P = (1, -3, 5, 10)$. En $\mathbb{R}^6$ y en $\mathbb{R}^{11}$ los puntos se denotan de forma análoga, es decir que están determinados por 6 u 11 números reales.

Al igual que para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, en $\mathbb{R}^n$ el ***origen*** se denota por la n-tupla ordenada de sólo ceros, $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. ***Un vector*** corresponde a una n-tupla ordenada que se denota de las siguientes dos formas,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = [v_1, v_2, \ldots, v_n],$$

donde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son números reales. Dado el vector $\vec{v}$ el punto inicial es $\mathbf{0}$ y el punto final es $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. El álgebra de vectores introducida previamente se puede extender a $\mathbb{R}^n$, sin embargo para $n > 3$ no tenemos una representación geométrica.

2 Matrices y su álgebra

Una matriz permitirá organizar información de forma sistemática.

2.1 Definición

Un arreglo rectangular de números reales se denomina ***una matriz con entradas reales***.

Ejemplo 2.1. A continuación se presentan algunas matrices con entradas reales.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -4 \\ 7 & 3 & -5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ \frac{3}{7} & -2 & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{7}{2} & 25 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, la forma de etiquetar los números que determinan una matriz viene dada por ***las filas*** y ***las columnas*** de la matriz en cuestión.

Ejemplo 2.2. La matriz $B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -4 \\ 7 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ tiene 2 filas y 3 columnas que se etiquetan así

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -4 \\ 7 & 3 & -5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} \\ & \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} & \end{array}$$

Dicho de otra forma, las filas de la mtriz B son

$$f_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -4 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

y las columnas de B son

$$c_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ c_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Así, se usará la notación $B_{2\times 3}$ donde el 2 indica el número de filas y el 3 indica el número de columnas de la matriz B. Adicionalmente, cada entrada de la matriz B está ubicada en una única fila y columna. Por ejemplo la entrada $\sqrt{2}$ está en la fila 1 y en la columna 1. La entrada -5 está en la fila 2 y en la columna 3. La notación que se usará para nombrar la entrada de la matriz B que está en la fila i y en la columna j será b_{ij},(note primero va la fila y después va la columna), luego se tiene que

$$b_{11} = \sqrt{2},\ b_{23} = -5.$$

Ejercicio 2.1. Determinar las filas y las columnas para las matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Además identifique las siguientes entradas de A y de Z respectivamente,

$$a_{12},\ a_{21},$$

$$z_{13},\ z_{22},\ z_{34}$$

En general, una matriz A con n filas y p columnas se escribe de las siguientes dos formas.

$$A_{n\times p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$$

Las entradas $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots a_{ii}, \dots$ de la matriz A están en las posiciones donde la fila y la columna de A coinciden. Estas entradas a_{ii} determinan ***la diagonal*** de la matriz A. Explícitamente, las filas f_i y las columnas c_j de $A_{n\times p}$ se indican como sigue,

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \vdots \\ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \\ & \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & \dots & c_p \end{array} & \end{array}$$

La i-ésima fila de $A_{n\times p}$ es

$$f_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix}$$

La j-ésima columna de $A_{n\times p}$ es

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Note que las columnas de una matriz de $n \times p$ corresponden a vectores columna de $\mathbb{R}^n$.

2.2 Operaciones entre matrices

2.2.1 Suma, resta y multiplicación por escalar

Sean $A_{n\times p}$ y $B_{n\times p}$ dos matrices dadas. Note que el número de filas de A es igual al número de filas de B y que el número de columnas de A es igual al número de columnas de B. Luego, la ***suma*** $A+B$ de las matrices A y B está definida por

$$\begin{aligned} A_{n\times p}+B_{n\times p} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2p}+b_{2p} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & \dots & a_{3p}+b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De forma análoga, al utilizar la notación $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq p}$ y $B=(b_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq p}$ la ***suma*** de matrices está definida por

$$\begin{aligned} A+B &= (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq p}+(b_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq p} \\ &= (a_{ij}+b_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq p} \end{aligned}$$

Es decir, la suma de dos matrices está definida por la suma de las respectiva entradas. Similarmente ***la resta*** de dos matrices $A_{n\times p}$ y $B_{n\times p}$ está definida por la resta de las respectivas entradas de las matrices en cuestión. Es decir,

$$\begin{aligned} A_{n\times p}-B_{n\times p} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1p}-b_{1p} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2p}-b_{2p} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & \dots & a_{3p}-b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-b_{n1} & a_{n2}-b_{n2} & \dots & a_{np}-b_{np} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Al utilizar la notación $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq p}$ y $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq p}$ la ***resta*** de matrices está definida por

$$\begin{aligned} A - B &= (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq p} - (b_{ij})_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq p} \\ &= (a_{ij} - b_{ij})_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq p} \end{aligned}$$

Ahora bien, si α es un escalar, ***la multiplicación por escalar*** está definida por

$$\alpha A_{n\times p} = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1p} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2p} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \dots & \alpha a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \dots & \alpha a_{np} \end{pmatrix}$$

es decir que la multiplicación por escalar $\alpha \cdot A$ resulta ser la multplicación de las entradas de la matriz A por el escalar α en cuestión.

Ejemplo 2.3. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 0 & 7 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 8 \\ -4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2$ y $\beta = -3$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 0 & 7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 5-2 & -1-5 \\ 2+0 & -6+7 & 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha C = 2\begin{pmatrix} -4 & 2 & 8 \\ -4 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-4) & 2\cdot 2 & 2\cdot 8 \\ 2\cdot(-4) & 2\cdot(-3) & 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 16 \\ -8 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \beta B - \alpha C &= -3\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 0 & 7 & -6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -4 & 2 & 8 \\ -4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -12+8 & 6-4 & 15-16 \\ 8 & -21+6 & 18-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 8 & -15 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.2. Sea $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ \frac{3}{7} & -2 & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{7}{2} & 25 \end{pmatrix}$. Verifique las siguientes igualdades de matrices.

$$Y + Y = 2Y,\ \ Y + Y + Y = 3Y,\ \ Y - Y = 0,$$

donde $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Antes de seguir, cabe mencionar que existe otra manera para denotar la suma, la resta y la multiplicación por escalar. Suponga que $A_{n\times p} = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq p}$, $B_{n\times p} = (b_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq p}$ son dos matrices y $\alpha \in \mathbb{R}$. La suma de A y B se puede denotar explicitando las entradas ij de la matriz $A + B$ de la siguiente forma,

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

de forma análoga para las matrices $A - B$ y αA se tiene,

$$(A-B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij},$$

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Esta notación será útil para definir la multiplicación entre matrices, la cual se definirá a continuación.

2.2.2 Multiplicación de matrices

Sea $A_{n\times p} = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq p}$ y $B_{p\times m} = (b_{ij})_{1\leq i\leq p,\,1\leq j\leq m}$ dos matrices. Es importante notar que el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Sólo en este caso tiene sentido definir ***la multiplicación*** de A por B, que se denota por AB. La operación de ***multiplicación de las matrices*** AB se define entrada por entrada, es decir,

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}.$$

Dicho de otro modo, la entrada $(AB)_{ij}$ de la matriz AB se obtiene al multiplicar la i-ésima fila de A, f_i, y la j-ésima columna de B, c_j.

$$A = \begin{pmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \\ \\ \end{pmatrix} \leftarrow f_i \;, \quad B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{pj} & \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ c_j \end{array} .$$

Ejemplo 2.4. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$. La segunda fila f_2 de A es $\begin{pmatrix} -4 & 4 \end{pmatrix}$ y la primera columna de B c_1 es $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, entonces la entrada $(AB)_{21}$ que está en la fila 2 y columna 1 de la matriz AB, se obtiene a través del siguiente cálculo

$$(AB)_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = (-4)\cdot 1 + 4 \cdot 5 = 16.$$

Para obtener todas las entradas de la matriz resultante AB se presenta el cálculo

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + (-2)\cdot 5 & 3\cdot 4 + (-2)\cdot(-6) \\ (-4)\cdot 1 + 4\cdot 5 & (-4)\cdot 4 + 4\cdot(-6) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 16 & -40 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.5. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$. Como el número de columnas de A es igual número de filas de B, la multiplicación AB está bien definida. Note que la multiplicación BA no tiene sentido.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+15 & 4+5 & -2+25 & -2-20 \\ -12+12 & -12+4 & 6+20 & 6-16 \\ 4+9 & 4+3 & -2+15 & -2-12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 & 9 & 23 & -22 \\ 0 & -12+4 & 26 & -10 \\ 13 & 7 & 13 & -14 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que $A_{3\times 2}B_{2\times 4} = AB_{3\times 4}$.

En general, dadas dos matrices $A_{n\times p}$ y $B_{p\times m}$, donde $n \neq m$, la matriz que se obtiene al multiplicar A y B es de la fomra $AB_{n\times m}$, es decir AB tiene el mismo número de filas de A y el mismo número de columnas de B,

$$A_{n\times p}B_{p\times m} = AB_{n\times m}.$$

Sin embargo, por la definición de la multiplicación de matrices, la multiplicación $B_{p\times m}A_{n\times p}$ no es posible de calcular ya que el número de columnas de la matriz B no es igual al número de filas de la matriz A. Este fenómeno, sin necesidad de realizar ningún cálculo, muestra que la multiplicación de matrices no es una operación conmutativa, es decir

$$AB \neq BA.$$

Ejemplo 2.6. La ***matriz identidad*** está definida para cada $n = 2, 3, 4\ldots$ y se denota por I_n. Esta matriz está dada por,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ una matriz. Verifique que,

$$I_2A = A = AI_4.$$

2.2.3 Matriz Transpuesta

Dada una matriz A, su ***matriz transpuesta*** A^T se obtiene al intercambiar las filas con las columnas de A.

Ejemplo 2.7. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 7 \\ -7 & 8 & -11 & 0 \end{pmatrix}$ entonces la transpuesta es $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 4 & 8 \\ -5 & -11 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $A_{2\times 4}$ entonces $A^T_{4\times 2}$.

En general, si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq p}$ entonces las entradas de la matriz transpuesta de A son $A^T = (a_{ji})_{1\leq j\leq p,\,1\leq i\leq n}$. Adicionalmente, como $A_{n\times p}$ entonces $A^T_{p\times n}$. Por definición de la transpueta se sigue que

$$(A^T)^T = A.$$

Ejercicio 2.4. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 & 3 \\ -1 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Calular AB, A^T y B^T. Además, verfique que

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Sean $A_{n\times p} = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq p}$ y $B_{n\times p} = (b_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq p}$ dos matrices. Se tiene que $A^T = (a_{ji})_{1\leq j\leq p,\,1\leq i\leq n}$ y $B^T = (b_{ji})_{1\leq j\leq p,\,1\leq i\leq n}$. Además $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq p}$. Luego

$$(A + B)^T = (a_{ji} + b_{ji})_{1\leq j\leq p,\,1\leq i\leq n} = A^T + B^T.$$

Por último, una matriz $A_{n\times n}$ se llama ***matriz simétrica*** si cumple que $A = A^T$.

Ejemplo 2.8. La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 6 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica, ya que $A^T = A$.

Ejercicio 2.5. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Muestre que las matrices $A^T A$ y AA^T son matrices simétricas.

2.3 Reducción de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan será una de las herramientas involucrada en la solución de problemas que se escriben en términos de matrices.

2.3.1 Forma escalonada y forma escalonada reducida

En el estudio de las matrices existen matrices que tienen una forma particular en su presentación. Tales matrices se denominan ***matrices escalonadas***. A continuación se presentan algunos ejemplos de tales matrices.

Ejemplo 2.9.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al observar las características que comparten las matrices del ejemplo anterior, tiene sentido definir la siguiente noción. Una matriz está en ***forma escalonada*** si cumple

- Las filas de solo ceros están en la parte inferior de la matriz.
- El primer elemento diferente de cero de cada fila está a la derecha del primer elemento diferente de cero de la fila anterior. Dicho elemento se llama ***pivote*** de la matriz.

Note que las siguientes matrices no están en forma escalonada,

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; Z = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Adicionalmente, una matriz está en ***forma escalonada reducida*** si la matriz está en forma escalonada y además cumple que:

- Todos los pivotes son 1.
- Arriba y abajo de los pivotes todas las entradas son cero.

Ejemplo 2.10. Lista de matrices que están en forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3.2 Operaciones entre filas

A partir de cada matriz se puede encontrar una matriz en forma escalonada. Es más, a cada matriz le corresponde una única matriz escalonada reducida. Para lograr encontrar una forma escalonada y la forma escalonada reducida de una matriz es necesario utilizar ***las operaciones entre filas***. Las operaciones entre filas son las siguientes,

1. Intercambio de filas: $f_i \longleftrightarrow f_j$.
2. Multiplicar una fila por un escalar no nulo: $f_i \to \alpha f_i$
3. Multiplicar una fila por un escalar no nulo y sumarlo a otra fila: $f_i \to f_i + \alpha f_j$

Ejemplo 2.11. Para la matriz dada, se presenta una forma escalonada usando las operaciones entre filas.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to f_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to (-1) f_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2 + (-6) f_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 23 & 20 \end{pmatrix} \text{ es una forma escalonada de} A.$$

Ejemplo 2.12. Para la matriz B, dada a continuación, encuentre una forma escalonada.

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to f_1 + f_3} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to (-1) f_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2 + (-5) f_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 \\ 0 & 44 & 45 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 + (-2) f_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 \\ 0 & 44 & 45 \\ 0 & 22 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 \\ 0 & 22 & 26 \\ 0 & 44 & 45 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 + (-2) f_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 \\ 0 & 22 & 26 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to \frac{1}{2} f_2} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 \\ 0 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to -\frac{1}{7} f_3} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 \\ 0 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una forma escalonada de B.

Nótese que una matriz tiene varias formas escalonadas, que dependen del orden en que se utilizan las operaciones entre filas. No obstante, toda matriz tiene una única forma escalonada reducida.

Ejemplo 2.13. Calcular la forma escalonada reducida de la matriz $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. Del ejemplo 2.12 se tiene que una forma escalonada de B es $\begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 \\ 0 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Así que, para encontrar la forma escalonada reducida de B se continua utilizando las operaciones entre filas a la forma escalonada en cuestión,

$$\begin{pmatrix}1 & -8 & -9\\ 0 & 11 & 13\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{f_2\to f_2+(-13)f_3} \begin{pmatrix}1 & -8 & -9\\ 0 & 11 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{f_1\to f_1+9f_3} \begin{pmatrix}1 & -8 & 0\\ 0 & 11 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{f_2\to \frac{1}{11}f_2}$$
$$\begin{pmatrix}1 & -8 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{f_1\to f_1+8f_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ es la forma escalonada reducida de } B.$$

Ejemplo 2.14. Calcular la forma escalonada reducida para la matriz $E = \begin{pmatrix}2 & 4 & 6 & 18\\ 4 & 5 & 6 & 24\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

$$E = \begin{pmatrix}2 & 4 & 6 & 18\\ 4 & 5 & 6 & 24\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{f_1\to \frac{1}{2}f_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 9\\ 4 & 5 & 6 & 24\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{f_2\to f_2+(-4)f_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & -3 & -6 & -12\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{f_3\to f_3+(-3)f_1}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & -3 & -6 & -12\\ 0 & -5 & -11 & -23\end{pmatrix} \xrightarrow{f_2\to -\frac{1}{3}f_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & -5 & -11 & -23\end{pmatrix} \xrightarrow{f_3\to f_3+5f_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow{f_3\to -f_3}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{f_2\to f_2+(-2)f_3} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{f_1\to f_1+(-3)f_3} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{f_1\to f_1+(-2)f_2}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.6. Calcular una forma escalonada y la forma escalonada reducida para la matriz $C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 6 & -3 & 0\\ 8 & 5 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Dada una matriz $A_{n\times p}$. ***El método de reducción de Gauss-Jordan*** corresponde al algortimo empleado para encontrar una forma escalonada y la forma escalonada reducida de A.

2.4 Sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales permiten expresar situaciones en varios contextos. Los sistemas lineales se reescriben en términos de matrices y para encontrar, si existe, la solución se utiliza el proceso de reducción de Gauss-Jordan.

Ejemplo 2.15. La siguiente expresión algebraica es un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x + 2y + \ \ z = 9 \\ \qquad\quad y + 4z = 10 \\ -2x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

Los ingredientes que conforman un sistema lineal son los siguientes

- Número de incógnitas o variables: x, y, z, w, x_1, x_2, x_3, x_4, a, b, c, d, $\ldots$.
- Número de ecuaciones lineales.

Note que por ecuación lineal se entiende que las variables presentes en dicha ecuación están elevadas a la potencia de 1 o 0. En general, un sistema de ecuaciones lineales con n ecuaciones y p incógnitas se escribe de la siguiente forma,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \ \ \vdots \ \ + \ \ \vdots \ \ + \vdots + \ \ \vdots \ \ = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n, \end{cases}$$

este sistema de ecuaciones lineales se reescribe así

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, el sistema de ecuaciones lineales en cuestión se puede reescribir como una combinación lineal de los vectores columna de la matriz $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$,

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + x_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.16. El sistema de ecuaciones lineales con 2 ecuaciones y 2 incógnitas

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -5x + 6y = 22, \end{cases}$$

se reescribe en forma matricial así:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.17. El sistema de ecuaciones lineales con 3 ecuaciones y 4 incógnitas

$$\begin{cases} a + 4b - 4c + 5d = 16 \\ 2a + b - c + 4d = 8 \\ a + \qquad c \qquad = 0, \end{cases}$$

se reescribe en forma matricial así

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, dado un sistema de ecuaciones lineales la pregunta que surge es cómo calcular, si existen, los valores de las incógnitas que satisfacen simultáneamente las ecuaciones del sistema. La respuesta se ejemplifica a continuación y será abordada en lo que sigue.

Ejemplo 2.18. Calcular la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(2, 2)$, $(3, 0)$ y $(4, 2)$ en $\mathbb{R}^2$. Es claro que la parábola queda determinada al encontrar los valores de los coeficientes a, b y c. Así que, se reemplan los puntos dados en la ecuación de la parábola y se obtienen las siguientes ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} (2,2) &\rightsquigarrow \quad 4a + 2b + c = 2 \\ (3,0) &\rightsquigarrow \quad 9a + 3b + c = 0 \\ (4,2) &\rightsquigarrow \quad 16a + 4b + c = 2. \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene un sistema de ecuaciones lineales de 3 incógnitas y 3 variabales. La representación matricial del sistema en cuestión es

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, considere la ***matriz aumentada*** asociada al sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Para calcular los valores de a, b, c se reduce la matriz aumentada hasta encontrar su forma escalonada reducida; es decir el método de Gauss-Jordan permite hallar la solución al problema dado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_2 - 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 - 9f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 12 & 10 & 36 \\ 16 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 - 16f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 12 & 10 & 36 \\ 0 & 20 & 17 & 66 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to \frac{1}{12}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} & 3 \\ 0 & 20 & 17 & 66 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to f_3 - 20f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to 3f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 - \frac{5}{6}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1 \to f_1 + f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right).$$

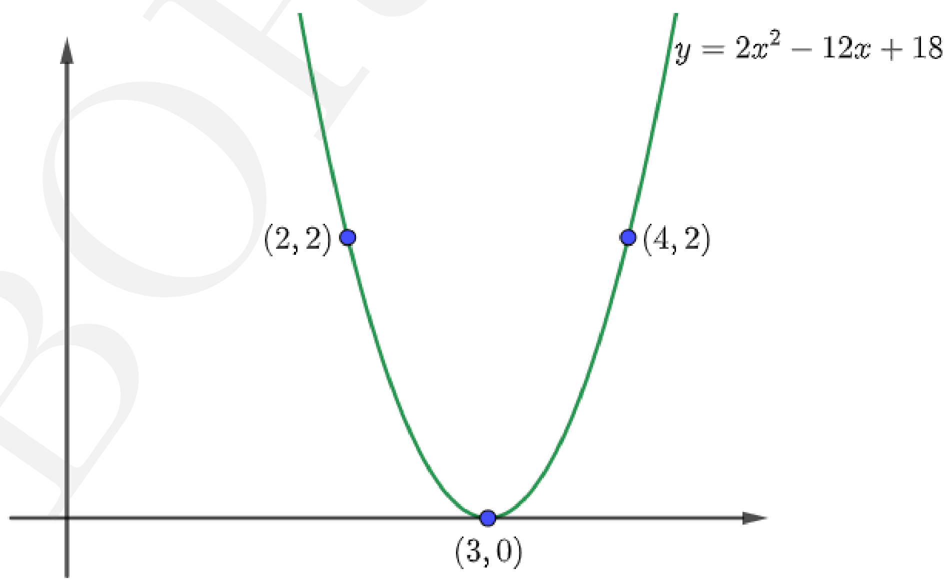
Reescribiendo la forma escalonada reducida de la matriz aumentada se tiene que,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Al multiplicar las matrices, se obtiene la solución buscada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2,\ b = -12,\ c = 18.$$

Por lo tanto, se concluye que la ecuación de la parábola es $y = 2x^2 - 12x + 18$.



Recapitulando, un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \vdots + \quad \vdots \quad = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n, \end{cases}$$

se reescribe en forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

a partir del cual se obtiene ***la matriz aumentada*** asociada al sistema de ecuaciones,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} & b_n \end{array}\right).$$

El método de reducción de matrices de Gauss-Jordan, aplicado a la matriz aumentada, determina si el sistema de ecuaciones lineales dado, tiene o no solución.

Ejercicio 2.7. Para los dos sistemas de ecuaciones lineales dados, escribir la forma matricial $A\vec{x} = \vec{b}$ y determinar (si existe) la solución.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 6 \\ 2x + 2y + 4z = 10 \\ y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$$

2.5 El determinante de una matriz

En esta sección se considerarán únicamente ***matrices cuadradas***, es decir matrices cuyo número de filas es igual al número de columnas . ***El determinante*** de una matriz cuadrada $A_{n\times n}$ es un número real que se define recursivamente y se denota $\det(A)$.

2.5.1 Matrices de 2×2

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz. ***El determinante de*** A se define por la fórmula,

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ejemplo 2.19. Sean $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces,

$$\det(B) = 3 \cdot (-9) - 6 \cdot 4 = -51, \ \det(C) = 2 \cdot 12 - 6 \cdot 4 = 0, \ \det(R) = 10 \cdot 4 - 4 \cdot (-1) = 44.$$

Ejercicio 2.8. Calcular el determinante de B^T, $\det(B^T)$, si $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$. Es correcto afirmar que $\det(B) = \det(B^T)$?

2.5.2 Matrices de 3×3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matriz. La matriz A define 9 submatrices que se denotan $\widetilde{A}_{ij}$ las cuales se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A. Explícitamente,

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{32} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Note que las submatrices $\widetilde{A}_{ij}$ de la matriz A son matrices de 2×2. Así que, ***el determinate*** de la matriz A se define por las siguientes fórmulas equivalentes,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11} \cdot \det(\widetilde{A}_{11}) - a_{12} \cdot \det(\widetilde{A}_{12}) + a_{13} \cdot \det(\widetilde{A}_{13}), \\
\det(A) &= -a_{21} \cdot \det(\widetilde{A}_{21}) + a_{22} \cdot \det(\widetilde{A}_{22}) - a_{23} \cdot \det(\widetilde{A}_{23}), \\
\det(A) &= a_{31} \cdot \det(\widetilde{A}_{31}) - a_{32} \cdot \det(\widetilde{A}_{32}) + a_{33} \cdot \det(\widetilde{A}_{33}), \\
\det(A) &= a_{11} \cdot \det(\widetilde{A}_{11}) - a_{21} \cdot \det(\widetilde{A}_{21}) + a_{31} \cdot \det(\widetilde{A}_{31}), \\
\det(A) &= -a_{12} \cdot \det(\widetilde{A}_{12}) + a_{22} \cdot \det(\widetilde{A}_{22}) - a_{32} \cdot \det(\widetilde{A}_{32}), \\
\det(A) &= a_{13} \cdot \det(\widetilde{A}_{13}) - a_{23} \cdot \det(\widetilde{A}_{23}) + a_{33} \cdot \det(\widetilde{A}_{33}).
\end{aligned}$$

Por definición del determinante, el cálculo de este número no depende de la fila o la columna que se escoja, el resultado siempre es el mismo.

Ejemplo 2.20. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 8 & -7 & 1 \end{pmatrix}$. Las submatrices de A son

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \widetilde{A}_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A al recorrer la fila 1 es igual a

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11} \cdot \det(\widetilde{A}_{11}) - a_{12} \cdot \det(\widetilde{A}_{12}) + a_{13} \cdot \det(\widetilde{A}_{13}) \\
&= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} \\
&= (2 - 14) - 2 \cdot (0 + 16) + (0 - 16) = -12 - 32 - 16 = -60.
\end{aligned}$$

El determinante de A recorriendo la columna 2 es igual a

$$\begin{aligned}
\det(A) &= -a_{12} \cdot \det(\widetilde{A}_{12}) + a_{22} \cdot \det(\widetilde{A}_{22}) - a_{32} \cdot \det(\widetilde{A}_{32}) \\
&= (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} - (-7) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\
&= (-2) \cdot (0 - (-16)) + 2 \cdot (1 - 8) + 7 \cdot (-2 - 0) \\
&= -32 - 14 - 14 = -60.
\end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, no importa la fila o la columna de A que se utilice para calcular el $\det(A)$.

Ejercicio 2.9. Calcular el determinante de la matriz $R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ utilizando la fila 2 y la columna 3 de A respectivamente.

Es importante resaltar que el cálculo del determinante de una matriz de 3×3 está definido en términos de los determinantes de las submatrices de 2×2.

2.5.3 Matrices de $n \times n$

Suponga que $n \in \mathbb{N}$ y $n > 2$. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matriz de n filas y n columnas.

Ejercicio 2.10. Escriba la fila i y la columna j de A.

Al igual que en el caso de matrices de 3×3, la matriz A determina n^2 submatrices $\widetilde{A}_{ij}$ que se obtienen al eliminar la fila i y la columna j de A respectivamente. Por ejemplo, al eliminar la fila 2 y la columna n de A, se obtiene la submatirz $\widetilde{A}_{2n}$

$$\widetilde{A}_{2n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1}\\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1}\end{pmatrix},$$

que tiene $n-1$ filas y $n-1$ columnas. Ahora bien, suponga que los determinantes de las submatrices $\widetilde{A}_{ij}$, $\det(\widetilde{A}_{ij})$, son conocidos. Entonces el determinante de A se calcula, recursivamente, utilizando la fila i, $1\le i\le n$, de A de la siguiente forma

$$\det(A)=(-1)^{i+1}a_{i1}\cdot\det(\widetilde{A}_{i1})+(-1)^{i+2}a_{i2}\cdot\det(\widetilde{A}_{i2})+\ldots+(-1)^{i+n}a_{in}\cdot\det(\widetilde{A}_{in}).$$

Como quedará evidenciado experimentalmente, el determinante de A se puede calcular de igual manera utilizando la columna j, $1\le j\le n$, por medio de la siguiente fórmula

$$\det(A)=(-1)^{1+j}a_{1j}\cdot\det(\widetilde{A}_{1j})+(-1)^{2+j}a_{2j}\cdot\det(\widetilde{A}_{2j})+\ldots+(-1)^{n+j}a_{nj}\cdot\det(\widetilde{A}_{nj}).$$

Ejemplo 2.21. Sea $B_{4\times 4}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & -2 & 3\\ -1 & 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$. Se presenta el cálculo del determinante de B utilizando la fila 3 y la columna 4 respectivamente, con la intención de ilustrar que el cálculo del determinante es independiente de la escogencia de la fila o la columna de la matriz en cuestión. El primer paso es escribir las submatrices de B que se obtienen al fijar la fila 3 y recorrer las columnas,

$$\widetilde{B}_{31}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix},\ \widetilde{B}_{32}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 2\\ -1 & -3 & 0\end{pmatrix},\ \widetilde{B}_{33}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ \widetilde{B}_{34}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

Similarmente se escriben las submatrices de B que se obtienen al fijar la columna 4 y recorrer las filas,

$$\widetilde{B}_{14}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1\\ 0 & -2 & -2\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix},\ \widetilde{B}_{24}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix},\ \widetilde{B}_{34}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix},\ \widetilde{B}_{44}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -1\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

El segundo paso es calcular los determinantes de las submatrices en cuestrión. Note que al ser matrices de 3×3, tales determinantes se saben calcular. El lector puede calcular los determinantes que se reportan a continuación:

$$\det(\widetilde{B}_{31})=2,\ \det(\widetilde{B}_{32})=-14,\ \det(\widetilde{B}_{33})=4,\ \det(\widetilde{B}_{34})=8,$$

$$\det(\widetilde{B}_{14}) = 28,\ \det(\widetilde{B}_{24}) = 10,\ \det(\widetilde{B}_{34}) = 8,\ \det(\widetilde{B}_{44}) = 2.$$

Al utilizar la fila 3, el determinante de B está dado por,

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \\
&= (-1)^{3+1}b_{31}\cdot\det(\widetilde{B}_{31}) + (-1)^{3+2}b_{32}\cdot\det(\widetilde{B}_{32}) + (-1)^{3+3}b_{33}\cdot\det(\widetilde{B}_{33}) + (-1)^{3+4}b_{34}\cdot\det(\widetilde{B}_{34}) \\
&= (-1)^{3+1}0\cdot 2 + (-1)^{3+2}(-2)\cdot(-14) + (-1)^{3+3}(-2)\cdot 4 + (-1)^{3+4}3\cdot 8 \\
&= -60.
\end{aligned}$$

Al utilizar la columna 4 de B se tiene que el determinante de B es:

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \\
&= (-1)^{1+4}b_{14}\cdot\det(\widetilde{B}_{14}) + (-1)^{2+4}b_{24}\cdot\det(\widetilde{B}_{24}) + (-1)^{3+4}b_{34}\cdot\det(\widetilde{B}_{34}) + (-1)^{4+4}b_{44}\cdot\det(\widetilde{B}_{44}) \\
&= -(2)\cdot 28 + 2\cdot 10 - (3)\cdot 8 + 0\cdot 2 \\
&= -60.
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.11. Sea $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Escoger una fila y una columna de P y calcular el determinante de P, $\det(P)$, recorriendo la fila y la columna seleccionada.

2.5.4 Propiedades del determinante

A continuación se enuncian las propiedades del determinante. Suponga que $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$ son dos matrices dadas.

1. Si A tiene una fila o columna de solo ceros, entonces $\det(A) = 0$.
2. El determinante es multiplicativo, $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.
3. Sea $\alpha\in\mathbb{R}$. $\det(\alpha\cdot A) = \alpha^n\cdot\det(A)$.
4. $\det(A^T) = \det(A)$.

Ejercicio 2.12. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. Verificar que

- $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$,
- $\det(A^T) = \det(A)$,
- $\det(A\cdot B)^T = \det(B^T)\cdot\det(A^T)$,
- $\det(2\cdot A\cdot B) = 8\cdot\det(A\cdot B)$.

2.6 La inversa de una matriz

Una matriz $A_{n\times n}$ es ***invertible*** si existe una matriz denotada por $A^{-1}_{n\times n}$ tal que

$$A \cdot A^{-1} = I_n, \;\; A^{-1} \cdot A = I_n$$

donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$, ver ejemplo 2.6. El determinante de A detecta si la matriz inversa A^{-1} existe.

$$A^{-1}\,\text{existe} \iff \det(A) \neq 0.$$

Ejemplo 2.22. Sean $E = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Como $\det(E) = 3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 0$, entonces E^{-1} no existe. Por otro lado, como $\det(R) = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -15 \neq 0$, entonces la matriz inversa R^{-1} si existe.

Con el criterio que determina si la inversa de una matriz dada existe o no, la pregunta que sigue sería cómo calcular dicha matriz. Para calcular la inversa de una matriz se tienen a la mano dos métodos que se exponen a continuación.

2.6.1 Matriz inversa vía Gauss-Jordan

Suponga que $A_{n\times n}$ es una matriz con $\det(A) \neq 0$. Es decir la matriz inversa A^{-1} de A existe. Para calcular A^{-1} se procede así:

1. Se extiende la matriz A con la matriz identidad I_n,
$$\left(\, A \mid I_n \, \right).$$
2. Por medio de las operaciones entre filas se reduce la matriz extendida. Es decir, se utiliza la reducción de Gauss-Jordan.
3. Como $\det(A) \neq 0$, la forma escalonada reducida de A es la matriz identidad I_n. Luego, la matriz inversa A^{-1} corresponde a la matriz que aparece a la derecha en la reducción de la matriz extendida
$$\left(\, A \mid I_n \, \right) \rightsquigarrow \left(\, I_n \mid A^{-1} \, \right).$$

Ejemplo 2.23. Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Primero note que $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$, luego la matriz en cuestión es invertible. Como la matriz dada es una matriz de 2×2 la matriz identidad que se necesita es $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Siguiendo los pasos del algortimo anterior se tiene que:

1. Matriz extendida: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$

2. Operaciones entre filas y forma escalonada reducida de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 - f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 - 3f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(\ I_2 \mid A^{-1} \ \right)$$

3. Por lo tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Note que $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -3+3 \\ 4-4 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Queda al lector verificar que

$$A^{-1} \cdot A = I_2.$$

Ejercicio 2.13. Verifique que las matrices dadas son matrices invertibles y calcule la matriz inversa en cada caso.

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Es importante recalcar que si el determinante de la matriz es cero, entonces la matriz no admite inversa.

2.6.2 Matriz de cofactores, matriz adjunta y matriz inversa

Sea $A_{n\times n}$ una matriz dada. La matriz A determina dos matrices que se construyen a continuación. Para cada $1 \leq i, j \leq n$, ***el menor*** de A, M_{ij}, correspondiente a i, j está definido por

$$\mathrm{M}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\widetilde{A}_{ij}).$$

Adicionalmente, ***la matriz de cofactores*** de A, $\mathrm{Cof}(A)$ está definida por

$$\mathrm{Cof}(A)_{ij} = (\mathrm{M}_{ij})_{n\times n},$$

es decir las entradas de la matriz de cofactores de A corresponden a los menores de A. La matriz transpuesta de la matriz de cofactores se denomina ***la matriz adjunta*** de A, $\mathrm{Adj}(A)$. Explícitamente:

$$\mathrm{Adj}(A) = (\mathrm{Cof}(A))^T$$

A continuación, se enuncia una propiedad que satisface la matriz adjunta de A en la que se da una fórmula matricial para calcular la matriz inversa de A, (si existe).
Suponga que $\det(A) \neq 0$. Luego se tiene que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Adj}(A).$$

Ejemplo 2.24. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Muestre que A es una matriz invertible.
2. Calcular la matriz de cofactores de A, $\mathrm{Cof}(A)$ y la matriz adjunta de A, $\mathrm{Adj}(A)$.
3. Calcular la matriz inversa de A, A^{-1}.

Solución:

1. Es suficiente mostrar que $\det(A) \neq 0$. Se recorre la fila 3 de A y se obtiene lo siguiente,

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{3+1}2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2}0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}(-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot (-6-3) - 2 \cdot (1+4) = -28.\end{aligned}$$

   Como $\det(A) \neq 0$, se tiene que A es una matriz invertible.

2. Para calcular la matriz $\mathrm{Cof}(A)$ se calculan los menores de A ya que éstos son las entradas de $\mathrm{Cof}(A)$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cof}(A)_{11} = (-1)^{1+1}\mathrm{M}_{11} = \det \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Cof}(A)_{12} = (-1)^{1+2}\mathrm{M}_{12} = -\det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \\
&\mathrm{Cof}(A)_{13} = (-1)^{1+3}\mathrm{M}_{13} = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Cof}(A)_{21} = (-1)^{2+1}\mathrm{M}_{21} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \\
&\mathrm{Cof}(A)_{22} = (-1)^{2+2}\mathrm{M}_{22} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Cof}(A)_{23} = (-1)^{2+3}\mathrm{M}_{23} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\mathrm{Cof}(A)_{31} = (-1)^{3+1}\mathrm{M}_{31} = \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Cof}(A)_{32} = (-1)^{3+2}\mathrm{M}_{32} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \\
&\mathrm{Cof}(A)_{33} = (-1)^{3+3}\mathrm{M}_{33} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

   Por lo tanto, la matriz de cofactores de A es

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 20 & -2 \\ -2 & -8 & -2 \\ -9 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

   y la matriz adjunta de A es

$$\mathrm{Adj}(A) = (\mathrm{Cof}(A))^T = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -9 \\ 20 & -8 & 6 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. La matriz inversa de A viene dada por la siguiente fórmula matricial.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Adj}(A) = -\frac{1}{28} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -9 \\ 20 & -8 & 6 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{9}{28} \\ -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{5}{28} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.14. Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Muestre que A es una matriz invertible.
2. Calcular la matriz de cofactores de A, $\mathrm{Cof}(A)$ y la matriz adjunta de A, $\mathrm{Adj}(A)$.
3. Calcular la matriz inversa de A, A^{-1}.

2.6.3 Matriz inversa y sistema de ecuaciones lineales

Todo sistema de ecuaciones lineales se puede escribir en forma matricial. Para ilustrar la relación de la matriz inversa con la solución de un sistema de ecuaciones lineales, es preciso suponer que la matriz asociada al sistema es una matriz cuadrada; es decir se tiene el mismo número de ecuaciones que de variables. Explícitamente, el sistema de ecuaciones lineales es de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \; \vdots + \quad \vdots \quad = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\iff A\vec{x} = \vec{b}.$$

Si $\det(A) \neq 0$, entonces la solución de $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ está dada por

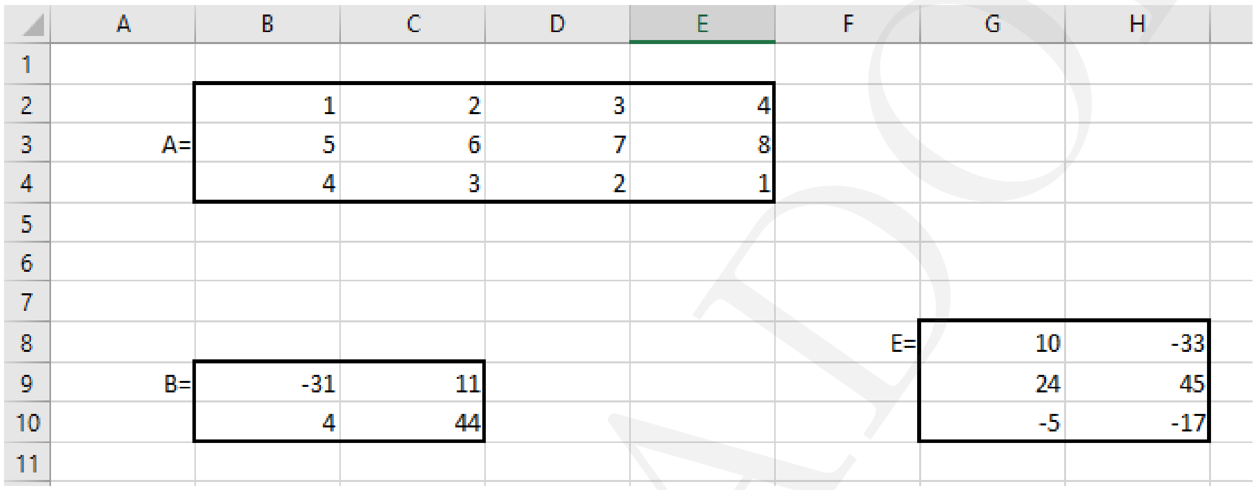
$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

2.7 Álgebra matricial y Microsoft Excel

Las operaciones entre matrices que se han presentado hasta el momento se pueden implementar en cualquier hoja de cálculo de un ordenador. En estas notas seleccionamos la hoja de cálculo de Microsoft Excel para implementar las operaciones entre matrices. La versión de Microsoft Excel que se utiliza en esta sección es la versión que viene con Microsoft Office 365.

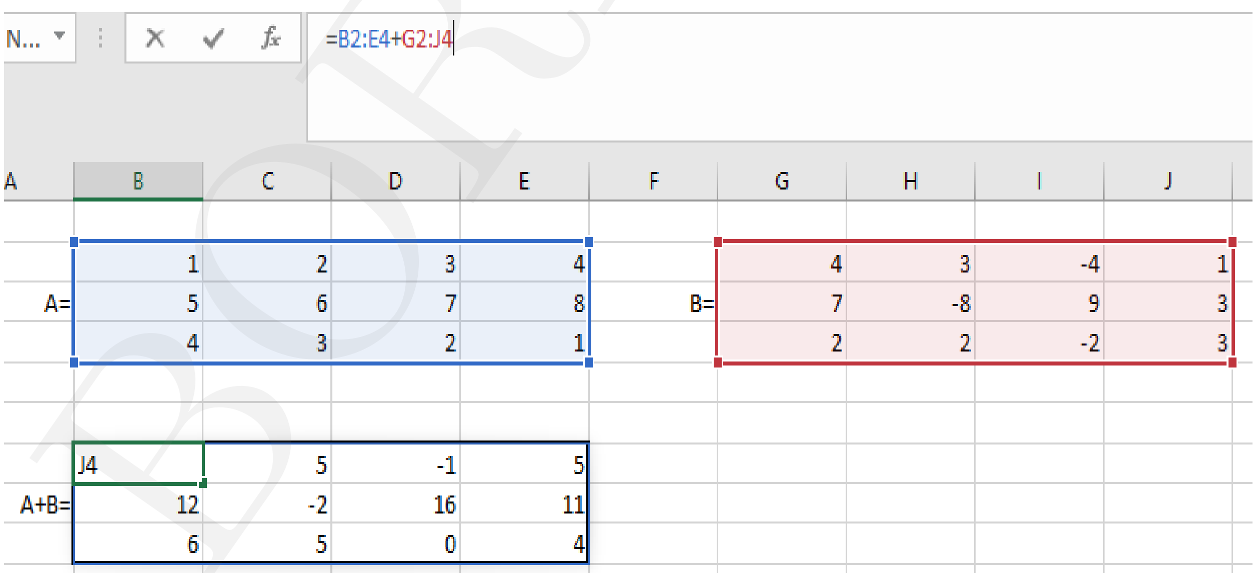
2.7.1 Declaración de una matriz en Excel

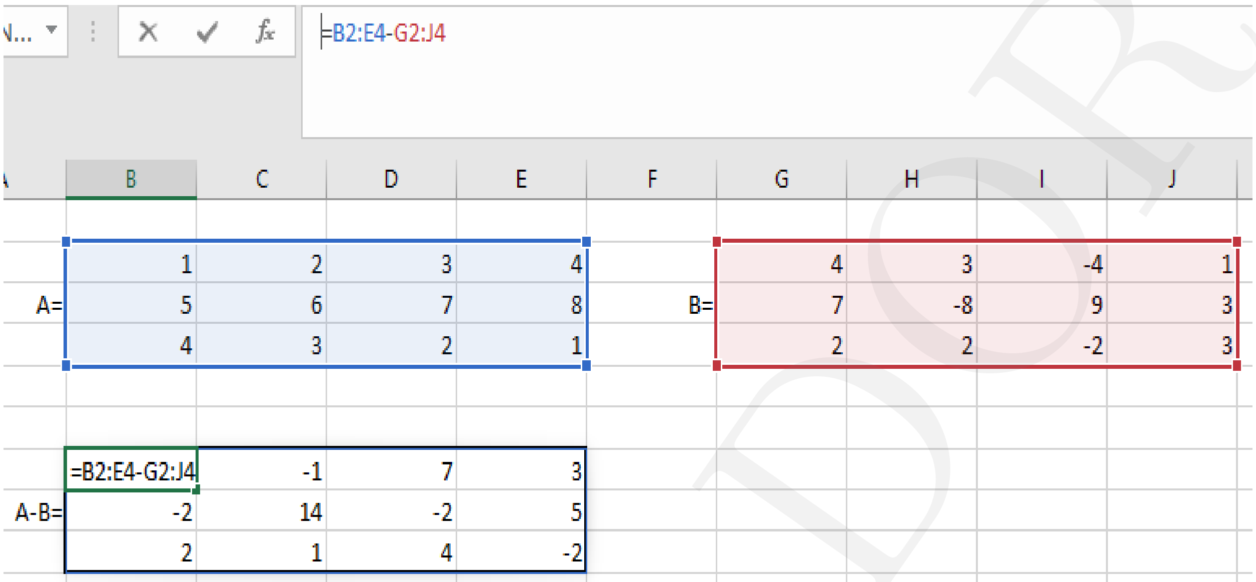
Para declarar una matriz en Excel basta rellenar con números un rectángulo de la hoja de cálculo. A continuación se presentan tres matrices $A_{3\times4}$, $B_{2\times2}$ y $E_{3\times2}$.



2.7.2 Suma y resta de matrices

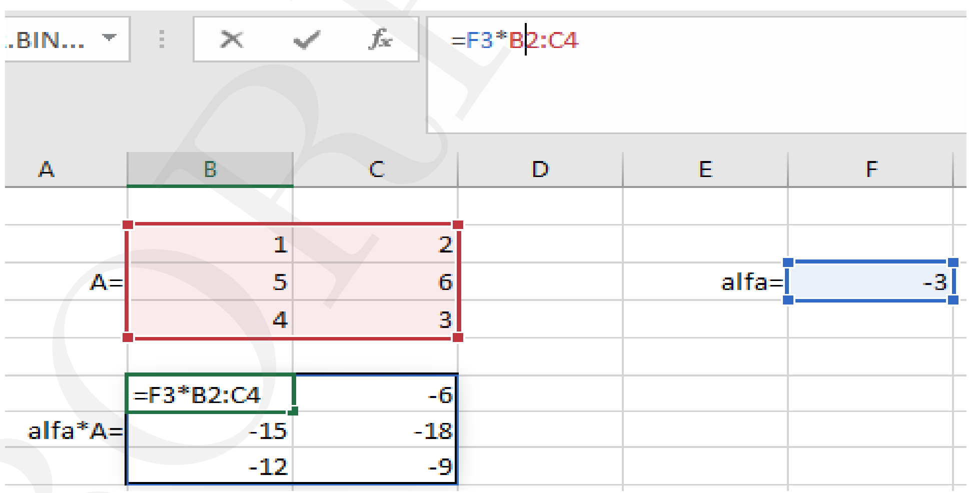
Para obtener la suma y la resta de dos matrices dadas en Excel, éstas se deben sombrear y especificar + o − según sea el caso. Note que en la barra de comando de Excel antes de escribir la fórmula, se utiliza el símbolo de igualdad = para que el software entienda que se usará una función predeterminada. A continuación se presenta la suma y la resta de dos matrices.





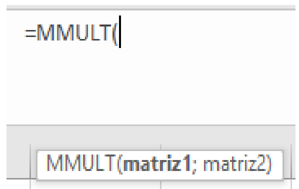
2.7.3 Multiplicación por escalar

Para calcular la multiplicación por escalar se resalta el escalar y la matriz en cuestión y se utiliza el $*$ para que Excel ejecute la multiplicación. No olvidar que para implementar la operación se necesita escribir en la barra de comando el símbolo $=$ antes de escribir la fórmula, ver figura a continuación.

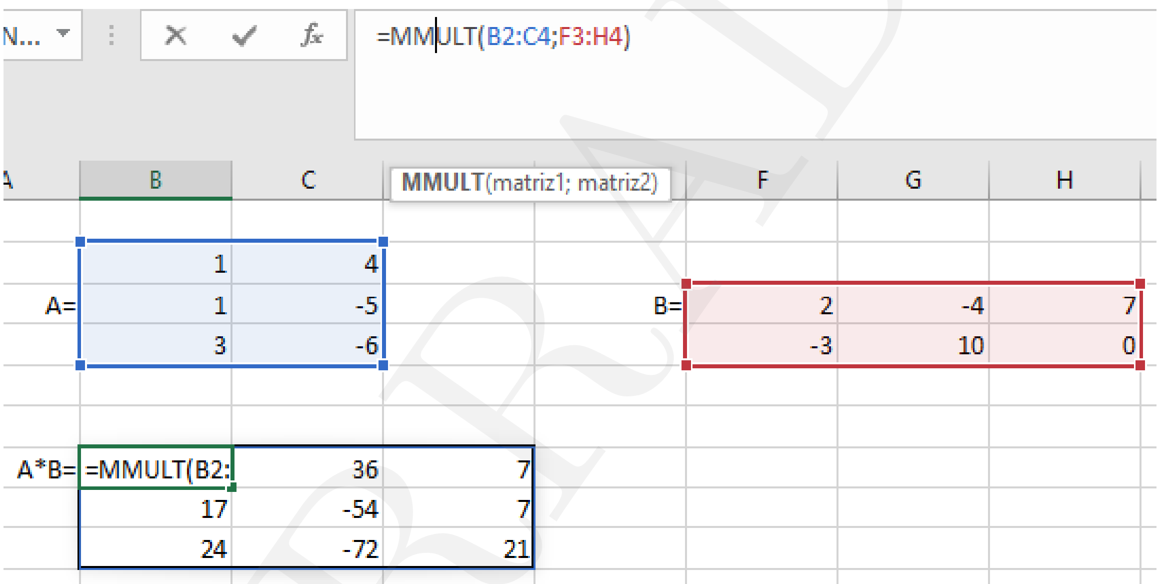


2.7.4 Multiplicación matricial

El comando que se utiliza en Excel para multiplicar dos matrices es el siguiente

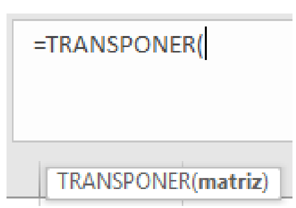


Para utilizar el comando en cuestión, se debe escribir en la barra de comandos "= MMULT" y se deben resaltar las dos matrices que se van a multiplicar.

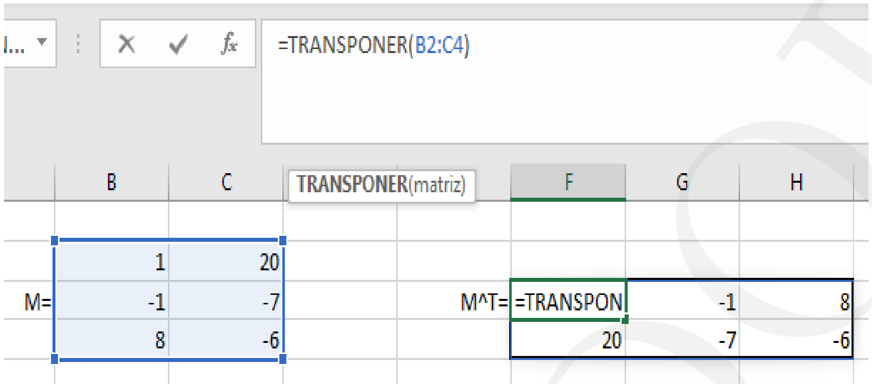


2.7.5 La matriz transpuesta

El comando que se utiliza para transponer una matriz dada es el siguiente

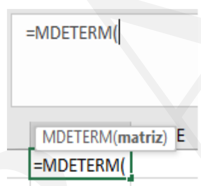


Para utilizar el comando en cuestión, se debe escribir en la barra de comandos "= TRANSPONER" y se debe resaltar la matriz que se va a transponer.

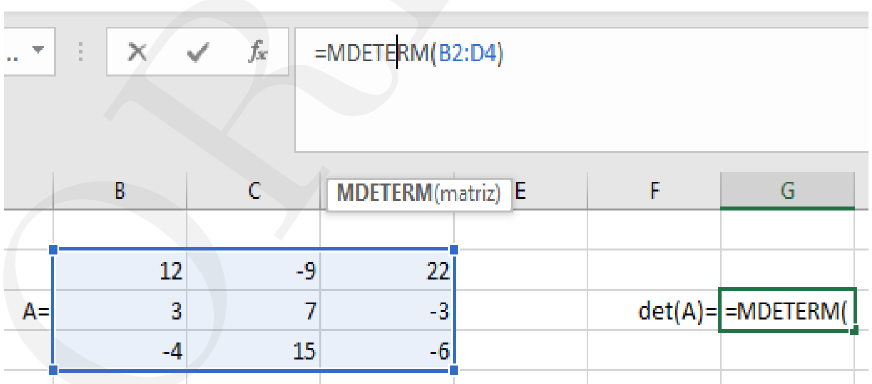


2.7.6 El determinante de una matriz

El comando que se utiliza para calcular el determinante de una matriz dada es el siguiente

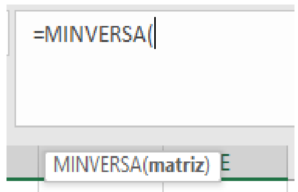


Para utilizar el comando en cuestión, se debe escribir en la barra de comandos "= MDETERM" y se debe resaltar la matriz a la que se le va a calcular el determinante.

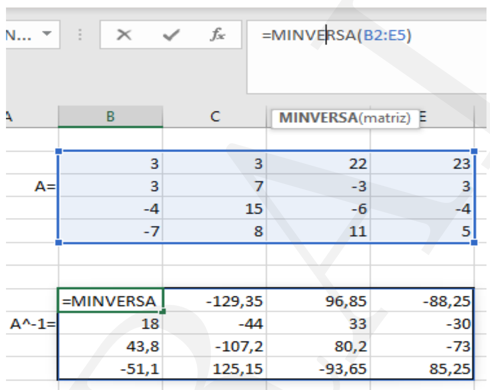


2.7.7 La matriz inversa

El comando que se utiliza para invertir una matriz dada es el siguiente



Para utilizar el comando en cuestión, se debe escribir en la barra de comandos "= MINVERSA" y se debe resaltar la matriz que se va a invertirr.

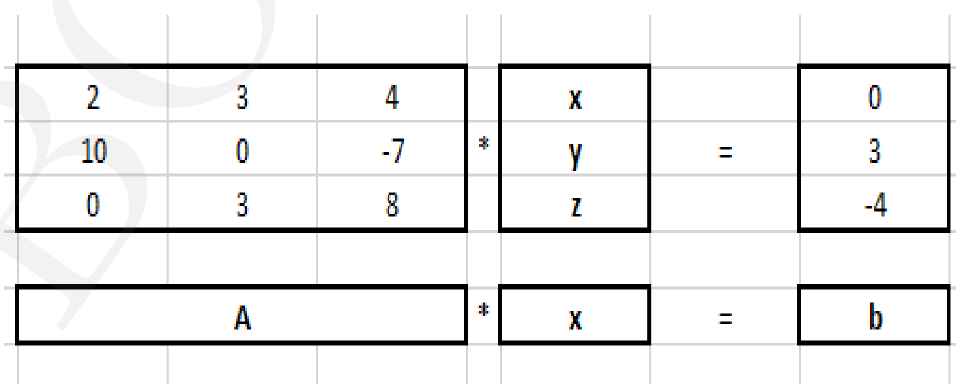


2.7.8 Sistemas de ecuaciones lineales en Excel

Un sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ se puede representar en Excel. A manera de ejemplo, considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ 10x - 7z = 3 \\ 3y + 8z = -4 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 10 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \iff A\vec{x} = \vec{b}.$$

Una representación de este sistema de ecuaciones lineales en Excel viene dada por



2.7.9 Observación sobre sistemas de ecuaciones lineales y Excel

El algoritmo que se utiliza en Excel para obtener la solución a un sistema de ecuaciones lineales tiene dos restricciones que se deben cumplir para obtener el resultado deseado. Suponga que se quiere solucionar el sistema de ecuaciones lienales dado por $A\vec{x} = \vec{b}$. Las dos restricciones necesarias para implementar Excel son las siguientes.

1. La matriz asociada al sistema A debe ser una matriz cuadrada.

2. La matriz A debe ser una matriz invertible.

Si estas dos condiciones se cumplen, entonces la solución $\vec{x}$ al sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ se obtiene al multiplicar A^{-1} y $\vec{b}$,

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

2.8 Aplicaciones

En esta sección se presentarán algunas situaciones en contexto cuya solución se obtiene al reescribir el problema en términos de sistemas de ecuaciones lineales. Adicionalmente, se mostrará cómo el método de reducción de Gauss-Jordan determina el número de soluciones que admite el problema en cuestión.

2.8.1 Ejemplo en finanzas

Una empresa pidió un préstamo de 775000 dólares para ampliar su línea de ropa. Una parte del dinero se prestó al 8%, otra al 9% y otra al 10%. ¿Cuánto dinero pidió prestado la empresa a cada tasa de interés, si el interés anual adeudado fue de 67500 dólares y la cantidad prestada al 8% era cuatro veces la cantidad prestada al 10%?
Solución: Las variables del problema son

$$x = \text{Cantidad de dinero prestada al}\, 8\%,$$
$$y = \text{Cantidad de dinero prestada al}\, 9\%,$$
$$z = \text{Cantidad de dinero prestada al}\, 10\%.$$

Ahora bien, las ecuaciones que representan la información dada en este problema son las siguientes,

$$\begin{cases} x + y + z = 775000, \text{ cantidad de dinero total,} \\ 0,08x + 0,09y + 0,1z = 67500, \text{ interés anual total generado,} \\ x = 4z \Rightarrow x - 4z = 0, \text{ relación entre las cantidades de dinero.} \end{cases}$$

Así, la representación matricial del sistema de ecuaciones lineales es la siguiente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,08 & 0,09 & 0,1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 775000 \\ 67500 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A\vec{x} = \vec{b}.$$

Para encontrar el valor de x, y y z es necesario reducir la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 775000 \\ 0,08 & 0,09 & 0,1 & 67500 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 775000 \\ 0,08 & 0,09 & 0,1 & 67500 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to 100 f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 775000 \\ 8 & 9 & 10 & 6750000 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_1]{f_2 \to f_2 - 8f_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 775000 \\ 0 & 1 & 2 & 550000 \\ 0 & -1 & -5 & -775000 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to f_3 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 775000 \\ 0 & 1 & 2 & 550000 \\ 0 & 0 & -3 & -225000 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to -\frac{1}{3} f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 775000 \\ 0 & 1 & 2 & 550000 \\ 0 & 0 & 1 & 75000 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 \to f_1 - f_3]{f_2 \to f_2 - 2f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 700000 \\ 0 & 1 & 0 & 400000 \\ 0 & 0 & 1 & 75000 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 300000 \\ 0 & 1 & 0 & 400000 \\ 0 & 0 & 1 & 75000 \end{array}\right)$$

reescribiendo la forma escalonada reducida se tiene que,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 300000 \\ 0 & 1 & 0 & 400000 \\ 0 & 0 & 1 & 75000 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300000 \\ 400000 \\ 75000 \end{pmatrix}$$

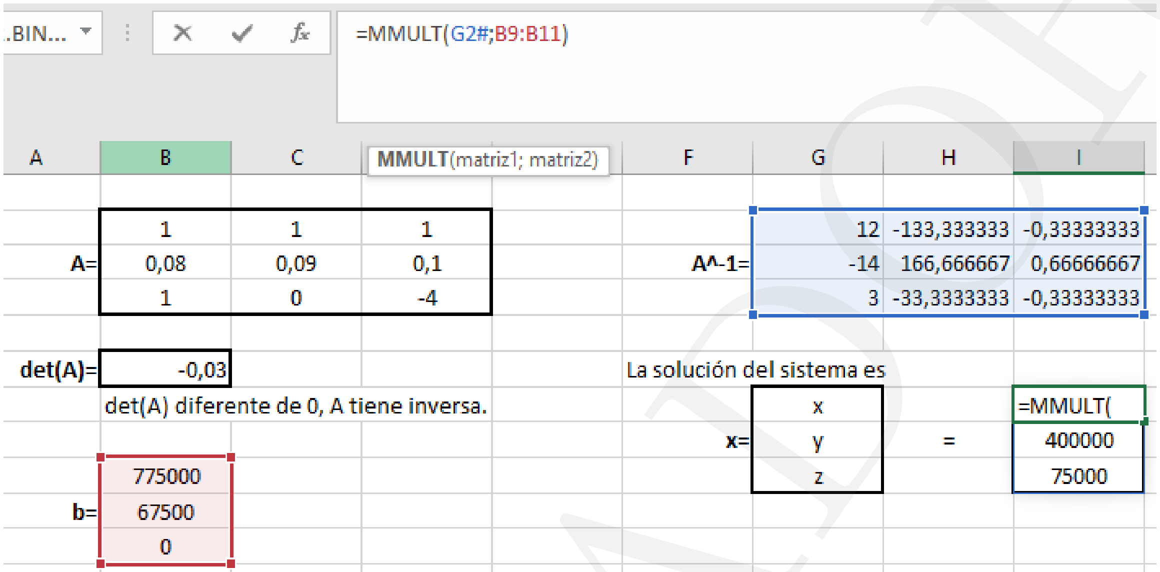
de lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} x &= 300000 \\ y &= 400000 \\ z &= 75000. \end{aligned}$$

Por lo tanto, a la empresa le prestaron 300000 al 8%, 400000 al 9% y 75000 al 10%.
Paralelamente, el sistema de ecuaciones en cuestión se puede resolver en Excel, ya que la matriz asosciada al sistema es una matriz invertible. Recuerde de la sección 2.7.9 que si la matriz A asociada al sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ es tal que $\det(A) \neq 0$ entonces la solución es $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. En este caso, una representación en Excel del sistema de ecuaciones en cuestión es

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		1	1	1	x		775000
3		0,08	0,09	0,1	y	=	67500
4		1	0	-4	z		0
5			A		x		b

A continuación se verifica que la matriz A tiene inversa y se calcula la solución.



2.8.2 Ejemplo de organización de gastos

Un viajero que acaba de regresar de Europa gastó 30 dólares diarios en Inglaterra, 20 dólares diarios en Francia y 20 dólares diarios en España por concepto de hospedaje. En comida gastó 20 dólares diarios en Inglaterra, 30 dólares diarios en Francia y 20 dólares diarios en España. Sus gastos adicionales fueron 10 dólares diarios en cada país. Durante la visita a Inglaterra, Francia y España, el viajero invirtió un total de 340 dólares en hospedaje, 320 dólares en comida y 140 dólares en gastos adicionales. ¿Cuántos días trascurrió en cada país?
Solución: Las variables del problema son

$$I = \text{Días en Inglaterra},$$

$$F = \text{Días en Francia},$$

$$E = \text{Días en España}.$$

El sistema de ecuaciones que representa la información del problema es el siguiente,

$$\begin{cases} 30I + 20F + 20E = 340, \text{ Hospedaje} \\ 20I + 30F + 20E = 320, \text{ Comida} \\ 10I + 10F + 10E = 140, \text{ Adicionales.} \end{cases}$$

La forma matricial del sistema en cuestión es

$$\begin{pmatrix} 30 & 20 & 20 \\ 20 & 30 & 20 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ F \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 340 \\ 320 \\ 140 \end{pmatrix} \iff A\vec{x} = \vec{b}.$$

Para obtener la solución se reduce la matriz aumentada,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 20 & 20 & 340 \\ 20 & 30 & 20 & 320 \\ 10 & 10 & 10 & 140 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \to \frac{1}{10} f_2]{f_1 \to \frac{1}{10} f_1,\, f_3 \to \frac{1}{10} f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 34 \\ 2 & 3 & 2 & 32 \\ 1 & 1 & 1 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \longleftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 32 \\ 3 & 2 & 2 & 34 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 3f_1]{f_2 \to f_2 - 2f_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to f_3 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to -f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right),$$

reescribiendo la forma escalonada reducida se tiene que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ F \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

luego, $I = 6$, $F = 4$ y $E = 5$. Por lo tanto, el viajero estuvo visitando Inglaterra durante 6 días, Francia por 4 días y España por 4 días. A continuación se presenta la solución en Excel. Una posible representación del sistema de ecuaciones es

B	C	D	E	F	G
30	20	20	x		340
20	30	20	y	=	320
10	10	10	z		140
	A		**x**		**b**

Adicionalmente, se verifica que la matriz asociada al sistema es invertible y se calcula la solución.

	A	B	C	MMULT(matriz1; matriz2)	F	G	H	I
1								
2		30	20	20		0,1	0	-0,2
3	A=	20	30	20	A^-1=	6,6613E-18	0,1	-0,2
4		10	10	10		-0,1	-0,1	0,5
5								
6	det(A)=	1000			La solución del sistema es			
7		det(A) diferente de 0, A tiene inversa.				x		=MMULT(
8					x=	y	=	4
9		340				z		4
10	b=	320						
11		140						

2.8.3 Deportes

En el partido de la Final Four Femenina de la NCAA de 2008, las Lady Volunteers de la Universidad de Tennessee derrotaron a las Cardinal de la Universidad de Standford por un resultado de 64 a 49. Las Lady Volunteers ganaron al anotar una combinación de canastas de dos puntos, canastas de tres puntos y tiros libres de un punto que se desea calcular. El número de canastas de dos puntos fue dos más que el número de tiros libres. El número de tiros libres fue dos más que cinco veces el número de canastas de tres puntos. ¿Qué combinación de anotaciones representan los 64 puntos de las Lady Volunteers?
Solución: las variables del problema son

$$\begin{aligned} x &= \text{ número de canastas de 2-puntos} \\ y &= \text{ número de canastas de 3-puntos} \\ z &= \text{ número de canastas de tiro libre.} \end{aligned}$$

Las ecuaciones que representan la información del problema son la siguientes

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 64, \text{ puntaje anotado por las Lady Volunteers} \\ x = 2 + z \Rightarrow x - z = 2, \text{ relación entre canastas de 2-puntos y tiros libres} \\ z = 2 + 5y \Rightarrow -5y + z = 2, \text{ relación entre canastas de 3-puntos y tiros libres} \end{cases}$$

El sistema se reescribe en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff A\vec{x} = \vec{b}.$$

Ejercicio 2.15. Se deja al lector resolver el sistema utilizando el método de Gauss-Jordan y utilizando Excel. La solución que debe obtener es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Así pues, las Lady Volunteers ganaron la final anotando 19 canastas de 2-puntos, 3 canastas de 3-puntos y 17 canastas de tiro libre.

2.8.4 Inversiones en la bolsa de valores

Una inversionista le informa a su corredor de bolsa que todas sus acciones pertenecen a tres compañias: Delta Airlines, Hilton Hotels y McDonald's, y que hace dos días su valor bajó 350 dólares pero que ayer aumentó en 600 dólares. El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones de Delta Airlines bajó 1 dólar mientras que las acciones de Hilton Hotel cayeron 1,50 dólares y que el precio de las acciones de McDonald's subió 0,5 dólares.

También recuerda que ayer el precio de la acciones de Delta Airlines subió 1,5 dólares y que el precio de la acciones de Hilton Hotels bajó 0,5 dólares mientra que el precio de las acciones de McDonald's subió 1 dólar. Muestre que la infomración del corredor de bolsa no es suficiente para calcular el número de acciones que tiene la inversionita en su portafolio. Sin embargo, si se sabe que la inversionista tiene 200 acciones de McDonald's, el corredor puede calcular el número de acciones en Delta Airlines y en Hilton Hotels.
Solución: las variables del problema son

$$\begin{aligned} D &= \text{número de acciones de Delta Airlines}\\ H &= \text{número de acciones de Hilto Hotles}\\ M &= \text{número de acciones de McDonald's,} \end{aligned}$$

luego las ecuaciones que representan la información del problema son las siguientes

$$\begin{cases} -D - 1,5H + 0,5M = -350, \text{ información del precio hace dos días}\\ 1,5D - 0,5H + M = 600, \text{ información del precio ayer.} \end{cases}$$

La representación matricial del sistema de ecuaciones lineales es

$$\begin{pmatrix} -1 & -1,5 & 0,5\\ 1,5 & -0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D\\ H\\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -350\\ 600 \end{pmatrix} \iff A\vec{x} = \vec{b}.$$

Como la matriz asociada al sistema de ecuaciones linelas no es una matriz cuadrada, se debe proceder por reducción de Gauss-Jordan para determinar las soluciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1,5 & 0,5 & -350\\ 1,5 & -0,5 & 1 & 600 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to -f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1,5 & -0,5 & 350\\ 1,5 & -0,5 & 1 & 600 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 - 1,5 f_1}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1,5 & -0,5 & 350\\ 0 & -2,75 & 1,75 & 75 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to -\frac{1}{2,75} f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1,5 & -0,5 & 350\\ 0 & 1 & -0,6363 & -27,2727 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 - 1,5 f_2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0,4545 & 390,9090\\ 0 & 1 & -0,6363 & -27,2727 \end{array}\right)$$

Reesccribiendo la forma escalonada reducida se tiene que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0,4545 & 390,9090\\ 0 & 1 & -0,6363 & -27,2727 \end{array}\right) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,4545\\ 0 & 1 & -0,6363 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D\\ H\\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 390,9090\\ -27,2727 \end{pmatrix},$$

de lo cual se obtienen dos ecuaciones con incógnita ***libre***

$$\begin{cases} D + 0,4545M = 390,9090 \iff D = 390,9090 - 0,4545M\\ H - 0,6363M = -27,2727 \iff H = -27,2727 + 0,6363M\\ M \in \mathbb{R}, \text{ variable libre: toma infintos valores} \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución es igual a

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} D \\ H \\ M \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 390,9090 - 0,4545M \\ -27,2727 + 0,6363M \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 390,9090 \\ -27,2727 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,4545M \\ 0,6363M \\ M \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 390,9090 \\ -27,2727 \\ 0 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} -0,4545 \\ 0,6363 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Es decir el sistema admite un número infinito de soluciones, por lo cual el corredor de bolsa no tiene la información suficiente para saber cuantas acciones tiene la inversionista.
Sin embargo, si $M = 200$ entonces al reemplazar en la solución anterior se tiene que

$$\begin{aligned} D &= 300 \\ H &= 100 \end{aligned}$$

Entonces el portafolio de la inversionista tiene 300 acciones de Delta Airlines y 100 acciones de Hilton Hotels. ¿Cómo cambia el portafolio de la inversionista si M=10? ¿Cuál es el mínimo valor de M para que el portafolio de la inversionista contenga acciones de las tres empresas? En este ejercicio no se implementa la solución en Excel debido a que, (como se mencionó anteriormente), la matriz que representa el sistema de ecuaciones no es una matriz cuadrada y por lo tanto no tiene sentido calcular el determinante ni la matriz inversa.

2.8.5 Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Suponga que $A\vec{x} = \vec{b}$ es un sistema de ecuaciones lineales dado. Como se presentó en la sección de Aplicaciones, el sistema en cuestión puede tener ***única o infinitas*** soluciones. Adicionalmente el sistema de ecuaciones puede no admitir solución. En esta sección se muestra cómo detectar el número de soluciones a $A\vec{x} = \vec{b}$ a través de la reducción de Gauss-Jordan y del determinante de A, cuando éste tenga sentido.

El sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ es un sistema ***consistente*** si el sistema tiene única solución o un número infinito de soluciones. Por otro lado, $A\vec{x} = \vec{b}$ es un sistema ***inconsistente*** si el sistema no tiene solución.

Ejemplo 2.25. Sistemas consistentes: recuerde que al usar la reducción de Gauss-Jordan siempre se obtiene la forma escalonada reducida la matriz aumentada $\left(A \,\middle|\, \vec{b} \right)$

Solución única:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff x = -3,\ y = 2.$$

Infinitas soluciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x-2z \\ y-5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{aligned} & x - 2z = 5 \Rightarrow x = 5 + 2z \\ & y - 5z = 0 \Rightarrow y = 5z \\ & z \text{ es una variable libre, es decir toma infinitos valores.} \end{aligned}$$

La solución es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2z \\ 5z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Note que por cada valor que toma la variable z se tiene un valor para la variable x e y respectivamente.

Ejemplo 2.26. Se presenta un sistema incosistente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - 11z = 3 \\ y + 7z = 20 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

Dado que $0 \neq 3$ el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2.16. Determine y escriba las soluciones al sistema de ecuaciones lineales cuya forma escalonada reducida de la matriz aumentada es la siguiente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{array}\right)$$

Ahora bien, si en el sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ la matriz A es una matriz cuadrada, se tienen dos estrategias para determinar el número de soluciones del mismo.

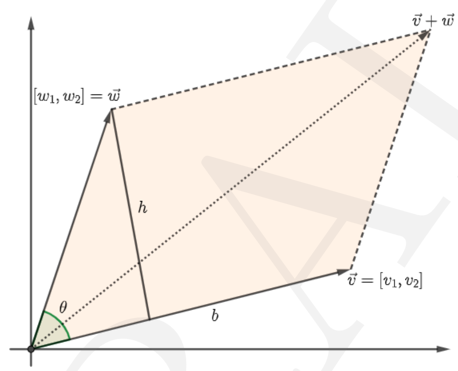
- Si $\det(A) \neq 0$ el sistema es consistente y tiene una única solución dada por $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.
- Si $\det(A) = 0$ se debe proceder con la reducción de Gauss-Jordan y determinar si el sistema tiene infinitas soluciones o no tiene solución.

3 Área, volumen, rectas y planos

En esta sección se presenta una introducción a la geometría plana utilizando vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Cabe mencionar que los cálculos se expresan en términos de el álgebra matricial y las operaciones vectoriales.

3.1 Área en $\mathbb{R}^2$

. Sean $\vec{v} = [v_1, v_2]$ y $\vec{w} = [w_1, w_2]$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$. A partir de la suma vectorial $\vec{v} + \vec{w}$ se obtiene el paralelogramo determinado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$, ver la siguiente figura.



El área, $\mathrm{A}(\vec{v}, \vec{w})$, del paralelogramo en cuestión es $\mathrm{A}(\vec{v}, \vec{w}) = b \cdot h$, donde la base $b = ||\vec{v}||$ y la altura $h = ||\vec{w}||\mathrm{sen}(\theta)$. Por lo tanto, el área del paralelogramo en cuestión está dada por, $\mathrm{A}(\vec{v}, \vec{w}) = ||\vec{v}||||\vec{w}||\mathrm{sen}(\theta)$. Note que, $A(\vec{v}, \vec{w})$ se puede reescribir como se muestra en el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(\vec{v}, \vec{w}) &= ||\vec{v}||||\vec{w}||\sqrt{1 - (\cos(\theta))^2} = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}\sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}\sqrt{1 - (\cos(\theta))^2} \\
&= \sqrt{(\vec{v} \cdot \vec{v})(\vec{w} \cdot \vec{w})(1 - (\cos(\theta))^2)} = \sqrt{(\vec{v} \cdot \vec{v})(\vec{w} \cdot \vec{w}) - (\vec{v} \cdot \vec{v})(\vec{w} \cdot \vec{w})(\cos(\theta))^2)} \\
&= \sqrt{||\vec{v}||^2||\vec{w}||^2 - ||\vec{v}||^2||\vec{w}||^2(\cos(\theta))^2)} = \sqrt{||\vec{v}||^2||\vec{w}||^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2} \\
&= \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2) - (v_1w_1 + v_2w_2)^2} = \sqrt{v_1^2w_2^2 - 2v_1w_1v_2w_2 + v_2^2w_1^2} \\
&= \sqrt{(v_1w_2 - v_2w_1)^2} = |(v_1w_2 - v_2w_1)|.
\end{aligned}$$

Así pues, el área del paralelogramo en cuestión está determinada por la expresión matricial:

$$\mathrm{A}(\vec{v}, \vec{w}) = \left|\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}\right|.$$

Ejemplo 3.1. Sean $\vec{a} = [2, 4]$ y $\vec{b} = [-3, 3]$. El área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es igual a

$$\mathrm{A}(\vec{a}, \vec{b}) = \left|\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\right| = |6 - (-12)| = 18.$$

Adicionalmente, el área del triángulo $\mathrm{A}_{tr}(\vec{v},\vec{w})$ determinado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ corresponde a la mitad del área del paralelogramo determinado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Así que

$$\mathrm{A}_{tr}(\vec{v},\vec{w}) = \frac{1}{2}\mathrm{A}(\vec{v},\vec{w}) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}\right|.$$

Ejercicio 3.1. Realizar una gráfica del área del triángulo determinado por los vectores $\vec{v} = [v_1, v_2]$ y $\vec{w} = [w_1, w_2]$ en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 3.2. El área del triángulo determinado por los vectores $\vec{a} = [2, 4]$ y $\vec{b} = [-3, 3]$ se obtiene al realizar el siguiente cálculo:

$$\mathrm{A}_{tr}(\vec{a},\vec{b}) = \frac{1}{2}\mathrm{A}(\vec{a},\vec{b}) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}(18) = 9.$$

3.2 El producto cruz

En $\mathbb{R}^3$ tiene sentido calcular el área de un paralelogramo y el volumen de un paralelepípedo. Para calcular el área y el volumen en $\mathbb{R}^3$ la herramienta necesaria es ***el producto cruz***. Sean $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ y $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. ***El producto cruz*** $\vec{v} \times \vec{w}$ es un vector que está definido por el siguiente cálculo,

$$\vec{v} \times \vec{w} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.3. Sean $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ y $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$. Entonces,

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}\vec{i} - \det\begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix}\vec{j} + \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}\vec{k} \\ &= (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{i} - (v_1w_3 - v_3w_1)\vec{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{k} \\ &= [v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1].\end{aligned}$$

El cálculo dado a continuación,

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= [v_1, v_2, v_3] \cdot [v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1] \\ &= v_1v_2w_3 - v_1v_3w_2 + v_2v_3w_1 - v_2v_1w_3 + v_3v_1w_2 - v_3v_2w_1 \\ &= 0,\end{aligned}$$

muestra que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{w}$ son ortogonales. Adicionalmente, se tiene que:

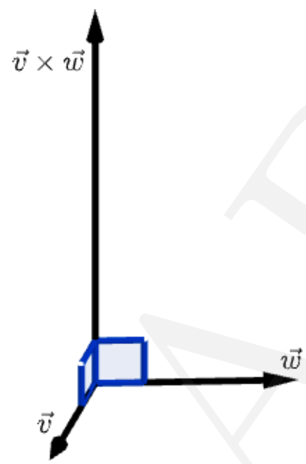
$$\vec{v} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \vec{v}.$$

Ejercicio 3.2. Muestre que los vectores $\vec{w}$ y $\vec{v} \times \vec{w}$ son ortogonales. Además muestre que

$$\vec{w} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{w}).$$

Por lo tanto, $||\vec{w} \times \vec{v}|| = ||\vec{v} \times \vec{w}||$.

Así, dados dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en $\mathbb{R}^3$, el producto cruz $\vec{v} \times \vec{w}$ es un vector que es ortogonal tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{w}$, ver la siguiente figura.



Ejemplo 3.4.

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}.$$

Ejercicio 3.3. Calcular $\vec{j} \times \vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{i}$.

Ejemplo 3.5. Sean $\vec{v} = [1, -2, 3]$ y $\vec{w} = [3, 1, 5]$. El producto cruz viene dado por

$$\begin{aligned}
\vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \vec{i} - \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \vec{j} + \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{k} \\
&= (-13)\vec{i} - (-4)\vec{j} + 7\vec{k} = -13\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k} \\
&= [-13, 4, 7].
\end{aligned}$$

Ahora bien, sean $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$, $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ y $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$. Los siguientes dos cálculos,

$$\begin{aligned}
(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} &= [v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1] \cdot [u_1, u_2, u_3] \\
&= (v_2w_3 - v_3w_2)u_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)u_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)u_3,
\end{aligned}$$

y, (recorriendo la fila tres),

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} &= u_1 \det \begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix} - u_2 \det \begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix} + u_3 \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \\
&= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1),
\end{aligned}$$

muestran que

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.4. Muestre que si $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\vec{v} \times \vec{v} = \mathbf{0}.$$

El producto cruz $\vec{v} \times \vec{w}$ está relacionado con el ángulo $\theta \in [0, \pi]$ determinado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de la siguiente forma:

$$||\vec{v} \times \vec{w}|| = ||\vec{v}||||\vec{w}||\text{sen}(\theta) \iff ||\vec{v} \times \vec{w}||^2 = ||\vec{v}||^2||\vec{w}||^2(\text{sen}(\theta))^2.$$

Una prueba de la igualdad $||\vec{v} \times \vec{w}||^2 = ||\vec{v}||^2||\vec{w}||^2(\text{sen}(\theta))^2$ se da a continuación. El lado izquierdo de la igualdad se reescribe así

$$\begin{aligned} ||\vec{v} \times \vec{w}||^2 &= ||[v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1]||^2 \\ &= (v_2w_3 - v_3w_2)^2 + (v_3w_1 - v_1w_3)^2 + (v_1w_2 - v_2w_1)^2. \end{aligned}$$

El lado derecho de la igualdad se reescribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} ||\vec{v}||^2||\vec{w}||^2(\text{sen}(\theta))^2 &= ||\vec{v}||^2||\vec{w}||^2(1 - (\cos(\theta))^2) = ||\vec{v}||^2||\vec{w}||^2 - ||\vec{v}||^2||\vec{w}||^2(\cos(\theta))^2 \\ &= ||\vec{v}||^2||\vec{w}||^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)^2. \end{aligned}$$

Al expandir, respectivamente, las expresiones de los lados derecho e izquierdo, el lector puede verificar que se obtiene el mismo resultado, por lo tanto se tiene la igualdad deseada.

Ejercicio 3.5. Sean $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$, $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ y $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Demuestre la siguiente igualdad:

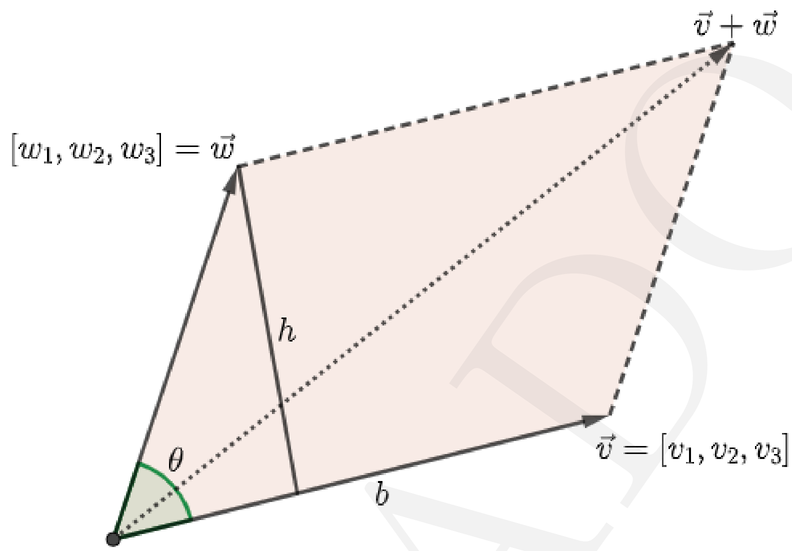
$$\vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}.$$

En otras palabras el producto cruz $\times$ no es una operación asociativa.

3.2.1 Área en $\mathbb{R}^3$

De forma similar que en el caso del plano cartesiano, la suma de dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ determina un paralelogramo cuya área es $\text{A}(\vec{v}, \vec{w}) = b \cdot h$, donde la base $b = ||\vec{v}||$ y la altura

$h = ||\vec{w}||\text{sen}(\theta)$. Gráficamente



Por lo tanto, el área del paralelogramo determinado por $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ y $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ está dada por,

$$\mathrm{A}(\vec{v}, \vec{w}) = ||\vec{v} \times \vec{w}||.$$

Análogamente al caso visto en $\mathbb{R}^2$, el área del triángulo $\mathrm{A}_{tr}(\vec{v}, \vec{w})$, determinado por los vectores $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ y $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ está dada por la fórmula:

$$\mathrm{A}_{tr}(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2}||\vec{v} \times \vec{w}||.$$

Ejemplo 3.6. Sean $\vec{a} = [2, 2, 0]$ y $\vec{b} = [1, -2, 0]$. El área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es

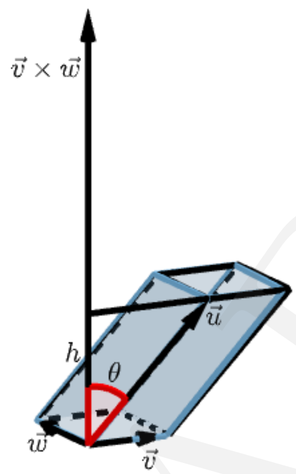
$$\mathrm{A}(\vec{a}, \vec{b}) = ||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||[0, 0, 6]|| = 36.$$

Además, el área del triángulo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es igual a

$$\mathrm{A}_{tr}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}||\vec{a} \times \vec{b}|| = 18.$$

3.2.2 Volumen en $\mathbb{R}^3$

Sean $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$, $\vec{v} = [w_1, w_2, w_3]$ y $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$. Considere la siguiente situación geométrica,



Como se muestra en la figura, los vectores dados $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{u}$ determinan un paralelepípedo, (es decir una caja alabeada). El volumen del paralelepípedo en cuestión es $\mathrm{Vol}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \mathrm{A}(\vec{v}, \vec{w}) \cdot h$, donde $\mathrm{A}(\vec{v}, \vec{w})$ es el área de la base y h es la altura relativa. Como la base del paralelepípedo es un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, se tiene que $\mathrm{A}(\vec{v}, \vec{w}) = ||\vec{v} \times \vec{w}||$. Ahora bien, es preciso reescribir la altura h en términos de operaciones entre $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{u}$. A partir de la figura dada, se tiene que $h = ||\vec{u}|||\cos(\theta)|$, donde θ es el ángulo entre los vectores $(\vec{v} \times \vec{w})$ y $\vec{u}$. Es decir

$$\cos(\theta) = \frac{(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}}{||\vec{v} \times \vec{w}||||\vec{u}||}$$

Por lo tanto, el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{u}$ es igual a:

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) &= \mathrm{A}(\vec{v}, \vec{w}) \cdot h = ||\vec{v} \times \vec{w}||||\vec{u}|| \frac{|(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}|}{||\vec{v} \times \vec{w}||||\vec{u}||} \\ &= |(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}| = \left| \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Note que el orden de los tres vectores en la fórmula del volumen del paralelepípedo no importa, el resultado siempre será el mismo número real.

Ejemplo 3.7. El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a} = [1, 2, 3]$, $\vec{b} = [2, -2, 4]$ y $\vec{c} = [0, 4, 5]$ es

$$\mathrm{Vol}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right| = |(-10 - 16) - 2(10 - 12)| = |-22| = 22.$$

Ejercicio 3.6. Calcular el volumen y el área superficial del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{v} = [2, 2, -4]$, $\vec{w} = [3, -6, 6]$ y $\vec{u} = [8, 0, 10]$. Adicionalmente, presentar una representación gráfica de la situación en cuestión.

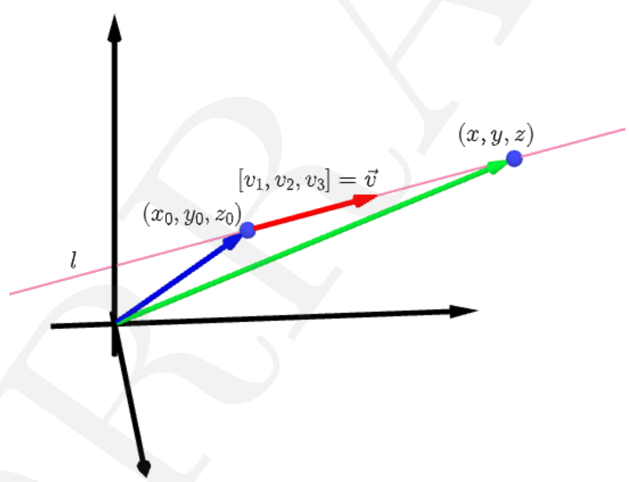
Ejercicio 3.7. Dar la definición del tetrahedro generado por tres vectores $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$ y presentar una representación gráfica del mismo. ¿Cuántos tetrahedros caben en el paralelepípedo generado por los vectores $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$? Muestre que el volumen de paralelepípedo, $\text{Vol}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$, y el volumen del tetrahedro, $\text{Vol}_{\text{tetra}}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$, generado por $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ cumplen la siguiente ecuación,

$$\frac{1}{6}\text{Vol}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \text{Vol}_{\text{tetra}}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}).$$

Profesor Lagrange.

3.3 Rectas en el espacio

Intuitivamente una recta en el espacio es un rayo de luz. La situación geométrica es la siguiente,



Así pues, la recta l está determinada por el punto (x_0, y_0, z_0) y el ***vector director*** $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$. Cualquier otro punto en la recta l, representado por (x, y, z), determina el vector $[x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ el cual es un vector paralelo a $\vec{v}$. Es decir, existe un escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$[x - x_0, y - y_0, z - z_0] = t\vec{v}.$$

Al reescribir esta ecuación anterior se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}[x - x_0, y - y_0, z - z_0] = t\vec{v} \iff [x, y, z] - [x_0, y_0, z_0] &= t\vec{v}\\ [x, y, z] &= [x_0, y_0, z_0] + t\vec{v}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, ***la ecuación vectorial*** de la recta l que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y que está dirigida por el vector $\vec{v}$ es

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

La variable $t \in \mathbb{R}$ recibe el nombre de parámetro de l debido a que cada valor de t determina un único punto en la recta en cuestión.

Ejemplo 3.8. Determine tres puntos que cumplan la ecuación vectorial de la recta l,

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Además determine dos puntos que no cumplan la ecuación vectorial de l.
Reemplazando $t = 0, 1, 2$ en la ecuación vectorial de l, se obtienen los siguientes tres puntos

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Los puntos $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ no pertencen a l, ya que no exiten dos valores de t que correspondan a los puntos dados.

Ejercicio 3.8. Determine tres puntos que cumplan la ecuación vectorial de la recta l,

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix},$$

Además determine dos puntos que no cumplan la ecuación vectorial de l. Presentar una representación gráfica de la situación.

Ejemplo 3.9. La ecuación vectorial de la recta l que pasa por los puntos $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (4, 2, -1)$ se calcula de la siguiente forma. Como punto de referencia se toma alguno de los puntos dados, por ejemplo P. Un vector director de la recta es

$$\vec{v} = \vec{Q} - \vec{P} = [4, 2, -1] - [1, 1, 1] = [3, 1, -2].$$

Por lo tanto, la ecuación vectorial de l es

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{P} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.9. Determinar si los puntos $A = (-1, 20, 14)$ y $B = (1, 11, 6)$ pertenecen a la recta l con ecuación vectorial dada por

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.10. Calcular, si existe, la intersección de las rectas dadas por

$$l_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad l_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si la ecuación vectorial de la recta l es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

entonces ***las ecuaciones paramétricas*** de la recta l son

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \\ z &= z_0 + tv_3, \end{aligned}$$

adicionalmente, si $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0, v_3 \neq 0$ ***las ecuaciones simétricas*** de la recta l están dadas por la siguiente expresión

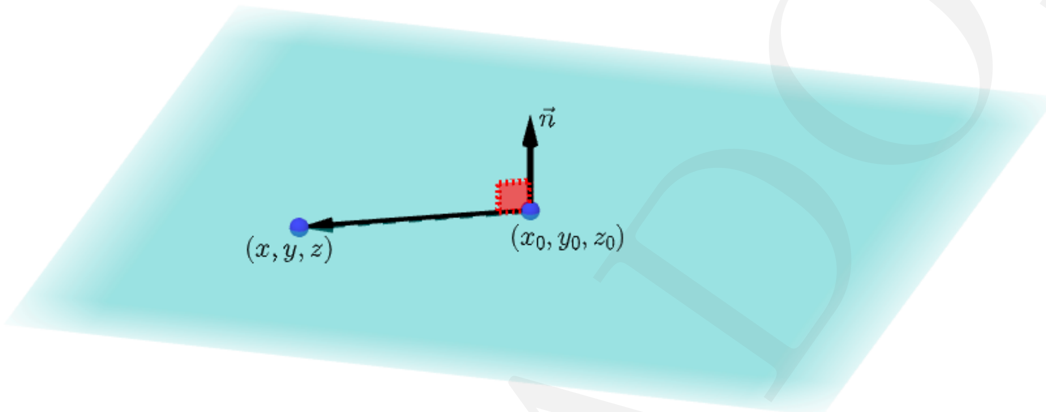
$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

Las ecuaciones simétricas de la recta l se obtiene despejando el parámetro t en las ecuaciones paramétricas e igualándolas.

Ejercicio 3.11. Determinar la ecuación vectorial y paramétrica de la recta l que pasa por el punto $(3, 0, 3)$ y es paralela a la recta cuyas ecuaciones simétricas son $\frac{x+7}{2} = \frac{4-y}{5} = z + 5$.

3.4 Planos en el espacio

Es razonable pensar que un plano es una lámina infinta de algún material con densidad constante y grosor despreciable. Geométricamente la situación se presenta a continuación.



Dado un punto (x_0, y_0, z_0) y un vector $\vec{n} = [a, b, c]$, el conjunto de puntos (x, y, z) que cumplen

$$\vec{n} \cdot [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = 0,$$

definen ***un plano*** en $\mathbb{R}^3$. ***La ecuación cartesiana*** de un plano π se obtiene al expandir la ecuación anterior; es decir:

$$\begin{aligned} \pi : \vec{n} \cdot [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = 0 \iff & [a, b, c] \cdot [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = 0 \\ & a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \end{aligned}$$

El vector $\vec{n}$ se denomina ***vector normal*** al plano π.

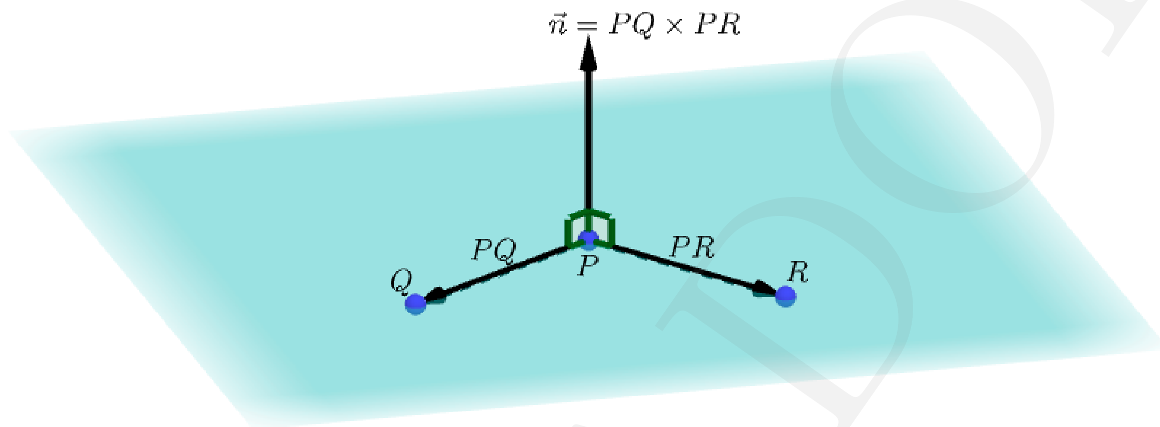
Ejemplo 3.10. La ecuación cartesiana del plano π que contiene a los puntos $P = (0, -3, 2)$, $Q = (-1, 4, 0)$ y $R = (1, 1, 1)$ se puede calcular de la siguiente forma. Por definición de plano, se necesitan un punto en el plano y el vector normal $\vec{n}$. De los tres puntos dados se selecciona el punto P, (se puede seleccionar cualquiera de los otros dos puntos y la ecuación resultante es la misma). Ahora bien, se construyen los vectores $PQ = [1, 4, -1]$ y $PR = [-1, 7, -2]$. El vector normal $\vec{n}$ se obtiene de la siguiente forma,

$$\vec{n} = PQ \times PR = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix} = [-1, 3, 11].$$

Así que, la ecuación del plano está dada por el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = 0 &\iff [-1, 3, 11] \cdot [x - 0, y - (-3), z - 2] = 0 \\ &\iff -x + 3y + 9 + 11z - 22 = 0 \\ &\iff -x + 3y + 11z = 13. \end{aligned}$$

Note que los coeficientes que acompañan a las variables x, y, z corresponden a las entradas del vector normal $\vec{n}$. Gráficamente el cálculo que se realizó se representa en la siguiente figura.



Ejemplo 3.11. El vector normal $\vec{n}$ al plano dado por la ecuación $3x - 4y + 7z = 44$ son los coeficientes que acompañan a las variables x, y y z. Es decir, $\vec{n} = [3, -4, 7]$.

Ejercicio 3.12. Calcular la ecuación del plano que contiene al punto $(3, 2, -6)$ y es paralelo al plano $-x + 5y - 6z = 0$.

Ejercicio 3.13. Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $(-11, 13, 1)$ y que contiene a la recta l dada por

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 + 15t \\ -13 + 27t \\ 6 - 11t \end{pmatrix}.$$

Adicionalmente, presentar una respresentación geométrica de la situación en cuestión.

Ejemplo 3.12. La intersección del plano $70x + 47y - 6z + 55 = 0$ y la recta l cuya ecuación vectorial es $l : [x, y, z] = [-144 - 150t, -91 - 80t, -2 + 5t]$ se obtiene al reemplazar las ecuaciones paramétricas de l en la ecuación del plano. En otras palabras, se reemplaza $x = -144 - 150t$, $y = -91 - 80t$ y $z = -2 + 5t$ en la ecuación $70x + 47y - 6z + 55 = 0$.

$$\begin{aligned} 70(-144 - 150t) + 47(-91 - 80t) - 6(-2 + 5t) + 55 = 0 &\iff -14290t = 14290 \\ &\iff t = -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto de intersección se obtiene al reemplazar el valor $t = -1$ en la ecuación vectorial de l,

$$(x, y, z) = (-144 + 150, -91 + 80, -2 - 5) = (6, -11, -7).$$

Ejemplo 3.13. La intersección de los planos $\pi_1 : x+y-2z=1$ y $\pi_2 : 2x-3y+z=0$ se calcula a través de un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Reducción de Gauss-Jordan,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 - 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to -\frac{1}{5}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \end{array}\right) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-z=\frac{3}{5} \\ y-z=\frac{2}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{3}{5}+z \\ y=\frac{2}{5}+z \end{cases}$$

La solución al sistema lineal es igual a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}+z \\ \frac{2}{5}+z \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que corresponde a la ecuación vectorial de una recta.

4 Espacios y subespaciones vectoriales

A lo largo de estas notas de clase han sido estudiados el conjunto de vectores $\mathbb{R}^n$ y el conjunto de matrices $\mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Estos conjuntos tiene una estructura algebraica común la cuál se definirá a continuación. Adicionalmente se presentarán ejemplos de conjuntos que también poseen la estructura algebraica que se presentará. Cabe mencionar que, la estructura algebraica que se estudiará en esta sección es una pieza central en el desarrollo del álgebra lineal. Por otro lado, se definirán las nociones fundamentales que dan los cimientos de la teoría del álgebra lineal elemental.

4.1 Definición de espacio vectorial y de subespacio vectorial

Un ***espacio vectorial*** V es un conjunto no vacío dotado con dos operaciones denominadas ***suma*** y ***multiplicación por escalar*** que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son elementos de V, entonces $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ es un elemento de V
(cerrado bajo la suma)

(ii) Si $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ son elementos de V, entonces $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$
(propiedad asociativa de la suma)

(iii) Existe un elemento $\mathbf{0}$ en V tal que para todo $\mathbf{x}\in V$, $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{x}$
(el 0 se denomina *vector cero* o *elemento neutro*)

(iv) Para todo elemento $\mathbf{x}$ en V existe un elemento $-\mathbf{x}\in V$ tal que $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$
(el elemento $-\mathbf{x}$ se denomina *inverso aditivo* de $\mathbf{x}$)

(v) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son elementos de V, entonces $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$
(propiedad conmutativa de la suma)

(vi) Si $\mathbf{x}$ es un elemento de V y α es un escalar, entonces $\alpha\mathbf{x}$ es un elemento de V
(cerrado bajo la multiplicación por escalar)

(vii) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son elementos de V y α es un escalar, entonces $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$
(primera propiedad distributiva)

(viii) Si $\mathbf{x}$ es elementos de V y α y β son escalares, entonces $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$
(segunda propiedad distributiva)

(ix) Si $\mathbf{x}$ es elementos de V y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$
(propiedad asociativa de la multiplicación por escalar)

(x) Para todo elemento $\mathbf{x}$ en V, se satisface $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$

Ejemplo 4.1. El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ con la suma y multiplicación usual es un espacio vectorial.

Ejemplo 4.2. El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ con la suma y multiplicación por escalar definidas previamente,

$$\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\\v_3+w_3\end{pmatrix},\quad \alpha\vec{v}=\alpha\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha v_1\\\alpha v_2\\\alpha v_3\end{pmatrix}\quad \alpha\in\mathbb{R},$$

dotan a $\mathbb{R}^3$ con una estructura de espacio vectorial.

Ejemplo 4.3. El conjunto de todas las matrices $n\times p$ con entradas reales, denotado por $M_{n\times p}(\mathbb{R})$, con la suma y multiplicación por escalar definidas previamente,

$$\begin{aligned}A_{n\times p}+B_{n\times p}&=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1p}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2p}\\a_{31}&a_{32}&\dots&a_{3p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{np}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\dots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\dots&b_{2p}\\b_{31}&b_{32}&\dots&b_{3p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\dots&b_{np}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\dots&a_{1p}+b_{1p}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\dots&a_{2p}+b_{2p}\\a_{31}+b_{31}&a_{32}+b_{32}&\dots&a_{3p}+b_{3p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}+b_{n1}&a_{n2}+b_{n2}&\dots&a_{np}+b_{np}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\alpha A_{n\times p}=\alpha\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1p}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2p}\\a_{31}&a_{32}&\dots&a_{3p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{np}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_{11}&\alpha a_{12}&\dots&\alpha a_{1p}\\\alpha a_{21}&\alpha a_{22}&\dots&\alpha a_{2p}\\\alpha a_{31}&\alpha a_{32}&\dots&\alpha a_{3p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\alpha a_{n1}&\alpha a_{n2}&\dots&\alpha a_{np}\end{pmatrix}\quad \alpha\in\mathbb{R},$$

dotan a $M_{n\times p}(\mathbb{R})$ con una estructura de espacio vectorial.

Ejemplo 4.4. Sea $P_{\leq 2}[x]=\{ax^2+bx+c\,|\,a,b,c\in\mathbb{R}\}$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2. Sean $p(x)=a_1x^2+b_1x+c_1$ y $q(x)=a_2x^2+b_2x+c_2$ dos polinomios en $P_{\leq 2}[x]$. La suma de polinomios,

$$p(x)+q(x)=a_1x^2+b_1x+c_1+a_2x^2+b_2x+c_2=(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+c_1+c_2$$

y la multiplicación por escalar,

$$\alpha p(x)=\alpha(a_1x^2+b_1x+c_1)=(\alpha a_1)x^2+(\alpha b_1)x+\alpha c_1\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

dotan a $P_{\leq 2}[x]$ con una estructura de espacio vectorial. En general, el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a n,

$$P_{\leq n}[x]=\{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\,|\,a_i\in\mathbb{R},\,0\leq i\leq n\}$$

es un espacio vectorial. Las operaciones de suma y multiplicación por escalar están definidas de forma análoga al caso de $P_{\leq 2}[x]$.

Note que los ejemplos de espacios vectoriales que se han presentado hasta el momento son estructuras conocidas que aparecen en varios contextos de las matemáticas. Ahora bien, dado un espacio vectorial V la pregunta que surge es cuáles subconjuntos $H \subset V$ heredan la estructura de espacio vectorial de V. Dichos subconjuntos se denominan ***subespacios vectoriales*** de V. Para verificar si un subconjunto $H \subseteq V$ es un subespacio vectorial de V no es necesario verificar las diez condiciones que definen a un espacio vectorial, es suficiente verificar las siguientes dos condiciones:

(i) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son elementos de H, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es un elemento de H.
(cerrado bajo la suma)

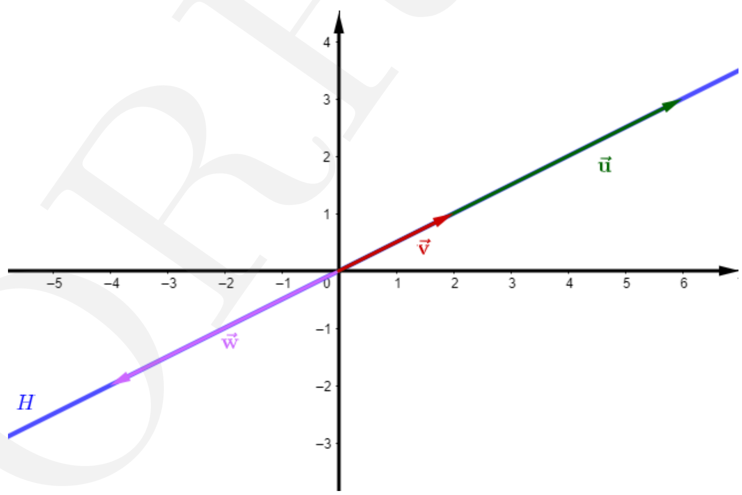
(ii) Si $\mathbf{x}$ es un elemento de H y α es un escalar, entonces $\alpha\mathbf{x}$ es un elemento de H.
(cerrado bajo multiplicación por escalar)

En otras palabras, lo que se tiene que verificar es que las operaciones suma y multiplicación por escalar definidas en V sean cerradas en H.

Ejemplo 4.5. Sea $V = \mathbb{R}^2$ y H el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$H = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = \frac{1}{2}x \right\}.$$

H es una recta que pasa por el origen:



De la gráfica anterior observe que:

- $\mathbf{0} \in H$.
- $[\mathbf{-4}, \mathbf{-2}] + [\mathbf{6}, \mathbf{3}] = [\mathbf{2}, \mathbf{1}] \in H$.
- $-2[\mathbf{2}, \mathbf{1}] = [\mathbf{-4}, \mathbf{-2}] \in H$.

El subconjunto H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, ya que

(i) La suma es cerrada en H:
Sean $\left[\mathbf{a_1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{a_1}\right]$ y $\left[\mathbf{a_2}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{a_2}\right]$ dos elementos de H, entonces

$$\left[\mathbf{a_1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{a_1}\right] + \left[\mathbf{a_2}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{a_2}\right] = \left[\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}\right)\right]$$

es un elemento de H.

(ii) La multiplicación por escalar es cerrada en H:
Sean α un escalar y $\left[\mathbf{a_1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{a_1}\right]$ un elemento de H, entonces

$$\alpha\left[\mathbf{a_1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{a_1}\right] = \left[\alpha\mathbf{a_1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\alpha\mathbf{a_1}\right)\right]$$

es un elemento de H.

Ejemplo 4.6. El subconjunto $H \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$$

no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, ya que, si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1+2 \end{pmatrix} \in H$ y $\begin{pmatrix} a_2 \\ a_2+2 \end{pmatrix} \in H$ entonces la suma de estos dos elementos

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ a_1+a_2+2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ a_1+a_2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_3+4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_3 \\ a_3+2 \end{pmatrix},$$

donde $a_3 = a_1 + a_2$, no pertenece a H, pues no tiene la forma de los elementos que caracterizan al subconjunto H. Además, $\mathbf{0} \notin H$.

Ejemplo 4.7. Sea $V = P_{\leq 2}[x]$. El subconjunto $H \subset P_{\leq 2}[x]$ dado por:

$$H = \{p(x) \in P_{\leq 2}[x] |\, p(0) = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $P_{\leq 2}[x]$, ya que

(i) La suma es cerrada en H:
Sean $p(x) \in H$ y $q(x) \in H$, luego $p(0) = 0$ y $q(0) = 0$. Así, la suma de $p(x)$ y $q(x)$ evaluada en $x = 0$ es igual a,

$$(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0.$$

Por lo tanto $(p+q)(x) \in H$.

(ii) La multiplicación por escalar es cerrada en H:
Sean $p(x) \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Note que $(\alpha p)(x) = \alpha p(x)$. El siguiente cálculo

$$(\alpha p)(0) = \alpha p(0) = \alpha 0 = 0,$$

muestra que $(\alpha p)(x) \in H$

Adicionalmente, los siguientes polinomios de $P_{\leq 2}[x]$ pertenecen al subespacio H.

- El polinomio constante $p(x) = 0$, pues $p(0) = 0$.
- $q(x) = x$ pues $q(0) = 0$.
- $r(x) = x^2$ ya que $r(0) = 0^2 = 0$.
- $s(x) = ax(x - b)$ dado que $s(0) = a0(0 - b) = 0$.

Ejemplo 4.8. En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^2$ el subconjuto H definido por

$$H = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\},$$

no es un subespacio vectorial. En efecto, tome $\vec{u} = [0, 1] \in H$ y $\vec{v} = [0.8, 0] \in H$. Luego, se tiene que

$$\vec{u} + \vec{v} = [0, 1] + [0.8, 0] = [0.8, 1] \notin H$$

ya que $(0.8)^2 + 1^2 > 1$; es decir, $\vec{u} + \vec{v}$ no cumple con la propiedad que caracteriza a los elementos de H.

Una matriz $A_{n\times p}$ es una ***matriz triangular superior*** si debajo de la diagonal de A todas las entradas son cero. Las siguientes matrices son matrices triangulares superiores

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.1. Escribir dos matrices triangulares superiores en el espacio vectorial $M_{3\times 3}$.

Ejemplo 4.9. Sea $V = M_{3\times 3}$. El subconjunto $H \subset M_{3\times 3}$ definido por

$$H = \{A \in M_{3\times 3} |\, A \,\text{es una matriz superior}\},$$

es un subespacio vectorial de $M_{3\times 3}$.

(i) La suma es cerrada en H:
Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \in H$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \in H$. Luego la suma de A y B es igual a

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} \in H,$$

entonces $A + B \in H$.

(ii) La multiplicación por escalar es cerrada en H:
Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ 0 & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ 0 & 0 & \alpha a_{33} \end{pmatrix},$$

entonces $\alpha A \in H$.

Ejemplo 4.10. Sea $A_{n\times p}$ una matriz. La solución al sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \mathbf{0}$ es un espacio vectorial en $\mathbb{R}^p$ que se denomina el ***espacio nulo*** de A. Explícitamente, el conjunto

$$\mathrm{Nu}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^p : A\vec{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^p,$$

corresponde al espacio nulo de A. En efecto, si $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathrm{Nu}(A)$, entonces

$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

por lo tanto $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in \mathrm{Nu}(A)$. Además, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} \in \mathrm{Nu}(A)$, entonces

$$A(\alpha\vec{x}) = \alpha(A\vec{x}) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Así que, $\alpha\vec{x} \in \mathrm{Nu}(A)$.

Ejemplo 4.11. Una recta en $\mathbb{R}^3$ que contenga al origen $\mathbf{0}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. En efecto, sea l la recta en $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación vectorial está dada por

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\vec{v}, \text{ donde } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

A continuación se verifica que l es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(i) La suma es cerrada en l:

Sean $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ dos vectores de l. Por definición de l, se tiene que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = t_1\vec{v} = t_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, t_1 \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = t_2\vec{v} = t_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Al suma estos dos vectores

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &= t_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (t_1 + t_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= t_3 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},\ t_3 = t_1 + t_2 \end{aligned}$$

se sigue que $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in l.$

(ii) La multiplicación por escalar es cerrada en l:

Sean $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in l$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Por definición de l se tiene que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = t_1\vec{v}, t_1 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \alpha t_1\vec{v} = (t_1\alpha)\vec{v} = t_2\vec{v},\ t_2 = t_1\alpha.$$

Así que, $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in l.$

Ejemplo 4.12. Un plano que contiene el origen $\mathbf{0}$ es un subespacio vectorial. En efecto, sea π un plano definido por

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + z = 0 \right\}.$$

Se verifica que π es un espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(i) La suma es cerrada en π:
Sean $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ dos puntos en el plano π, luego que $3x_1-y_1+z_1=0$ y $3x_2-y_2+z_2=0$. Para mostrar que el elemento que se obtiene al sumar, $\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix}$, pertenece al plano π, se verifica que éste cumple la ecuación del plano. Es decir, al reemplazar en la ecuación cartesiana de π se tiene que

$$3(x_1+x_2)-(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=(3x_1-y_1+z_1)+(3x_2-y_2+z_2)=0+0=0.$$

Por lo tanto, $\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} \in \pi$.

(ii) La multiplicación es cerrada en π:
Se deja como ejercicio al lector.

Adicionalmente, los puntos $(1,3,0)$ y $(0,1,1)$ pertencen al plano, ya que estos puntos cumplen la ecuación del plano π. Por otro lado, el punto $(4,4,4)$ no pertenece al plano π ya que este punto no cumple la ecuación cartesiana de π.

4.2 Espacio generado por un conjunto

El concepto de espacio generado está basado con el concepto de combinación lineal que se introdujo en 1.4. En general, si V es un espacio vectorial y $\{v_1, v_2 \ldots, v_k\}$ un conjunto de elementos de V, una ***combinación lineal*** de los elementos $v_1, v_2 \ldots, v_k$ es un elemento $v \in V$ que tiene la siguiente forma:

$$v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_k v_k,$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Note que existen infinitas combinaciones lineales que se pueden formar a partir de los elementos $v_1, v_2 \ldots, v_k$.

Ejemplo 4.13. Sean $V=M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\right\}$. Una combinación lineal de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ está dada por,

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 9 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.14. Sean $V=P_{\leq 2}[x]$ y $\{2+x, 3-x+2x^2, x-4x^2\}$. Una combinación lineal de los polinomios $2+x, 3-x+2x^2, x-4x^2$ está dada por

$$-2+7x-16x^2=2(2+x)-2(3-x+2x^2)+3(x-4x^2).$$

Ejemplo 4.15. Sean $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$. Para cualquier par de escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, una combinación lineal de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 + 2\alpha_2 \\ -3\alpha_1 + 2\alpha_2 & 2\alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, dado un espacio vectorial V y un conjunto de elementos en V, $\{v_1, v_2 \ldots, v_k\}$, ***el espacio generado*** por $\{v_1, v_2 \ldots, v_k\}$, $\text{gen}\{v_1, v_2 \ldots, v_k\}$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\{v_1, v_2 \ldots, v_k\}$, que se denotará $\text{gen}\{v_1, v_2 \ldots, v_k\}$. Explícitamente,

$$\text{gen}\{v_1, v_2 \ldots, v_k\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k : \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

En otras palabras, el espacio $\text{gen}\{v_1, v_2 \ldots, v_k\}$ consta de infinitos elementos de V que se escriben a partir del conjunto finito $\{v_1, v_2 \ldots, v_k\}$ utilizando las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas en V.

Ejemplo 4.16. Un plano que pasa por el origen está generado por dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Sea $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0 \right\}$. La ecuación cartesiana que determina al plano π es, en particular, un sistema de ecuaciones lineales que admite infinitas soluciones. Así que, al despejar una varible y reescribir los puntos que pertencen al plano π se obtine el resultado deseado. El siguiente cálculo,

$$x - 2y + 3z = 0 \iff x = 2y - 3z,\ y = y,\ z = z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

muestra que $\pi = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ejercicio 4.2. Una recta que pasa por el origen es el generado de un vector en $\mathbb{R}^3$. Muestre que la recta l definida por la ecuación vectorial

$$l = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = 2t, y = -t, z = \frac{t}{4} \right\}$$

se reescribe como el espacio generado por un vector.

Ejemplo 4.17. Sean $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $H = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11} + a_{22} = 0 \right\}$.

- H es subespacio vectorial de H. Se debe verificar que H es cerrado bajo suma y multiplicación por escalar de $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Sean $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ dos matrices en H, luego se tiene que $a_{11} + a_{22} = 0$ y $b_{11} + b_{22} = 0$. La suma

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix},$$

  pertenece a H ya que $a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} = (a_{11} + a_{22}) + (b_{11} + b_{22}) = 0 + 0 = 0$. Por lo tanto H es cerrado bajo suma. Queda al lector verificar que H es cerrado bajo multiplicación por escalar.

- Note que el subespacio H está determinado por la ecuación $a_{11} + a_{22} = 0$, o dicho de otra forma $a_{22} = -a_{11}$. Así que, al reemplazar esta última ecuación en un elemento arbitrario de H se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & -a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \\ &= a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.3. Sean $V = P_{\leq 2}[x]$ y $H = \{p(x) \in P_{\leq 2}[x] : p'(0) = 0\}$.

- Encuentre un polinomio $r(x)$ que pertenezca a H.
- Muestre que H es subespacio vectorial de V.
- Encuentre dos polinomios $q_1(x)$ y $q_2(x)$ tales que

$$H = \operatorname{gen}\{q_1(x), q_2(x)\}.$$

  Ayuda: escribir explícitamente la condición que define a los elementos de H.

Ejemplo 4.18. Verificar si

$$16x^3 + 8x^2 - 16x - 14 \in \operatorname{gen}\{-5x^2 + 4x + 1, 2x^3 + x^2 + 2x - 4, -5x^3 + x + 5\}.$$

Por definición de espacio generado, el polinomio $16x^3 + 8x^2 - 16x - 14$ pertenece al espacio generado $\operatorname{gen}\{-5x^2 + 4x + 1, 2x^3 + x^2 + 2x - 4, -5x^3 + x + 5\}$, si $16x^3 + 8x^2 - 16x - 14$ se escribe como una combinación lineal de los polinomios $-5x^2+4x+1, 2x^3+x^2+2x-4, -5x^3+x+5$. Es decir, se debe determinar si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$16x^3+8x^2-16x-14 = \alpha_1(-5x^2+4x+1)+\alpha_2(2x^3+x^2+2x-4)+\alpha_3(-5x^3+x+5).$$

El lado derecho de la igualdad se reescribe utilizando la ley distributiva y factorizando los polinomios x^3, x^2, x y 1. Así, se llega a la siguiente igualdad de polinomios

$$16x^3+8x^2-16x-14 = (2\alpha_2-5\alpha_3)x^3+(-5\alpha_1+\alpha_2)x^2+(4\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)x+(\alpha_1-4\alpha_2+5\alpha_3)1.$$

Al igualar término a término, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2\alpha_2-5\alpha_3=16 \\ -5\alpha_1+\alpha_2=8 \\ 4\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=-16 \\ \alpha_1-4\alpha_2+5\alpha_3=-14 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -16 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Para calcular $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se usa el método de reducción de Gauss-Jordan de la matriz aumentada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -5 & 16 \\ -5 & 1 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & -16 \\ 1 & -4 & 5 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \longleftrightarrow f_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & -14 \\ -5 & 1 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & -5 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3\to f_3-4f_1]{f_2\to f_2+5f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & -14 \\ 0 & -19 & 25 & -62 \\ 0 & 18 & -19 & 40 \\ 0 & 2 & -5 & 16 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2\to f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & -14 \\ 0 & -1 & 6 & -22 \\ 0 & 18 & -19 & 40 \\ 0 & 2 & -5 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2\to -f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & -14 \\ 0 & 1 & -6 & 22 \\ 0 & 18 & -19 & 40 \\ 0 & 2 & -5 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3\to f_3-18f_2]{f_4\to f_4-2f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & -14 \\ 0 & 1 & -6 & 22 \\ 0 & 0 & 89 & -356 \\ 0 & 0 & 7 & -28 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3\to \frac{1}{89}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & -14 \\ 0 & 1 & -6 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -28 \end{array}\right) \xrightarrow{f_4\to f_4-7f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & -14 \\ 0 & 1 & -6 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_1\to f_1-5f_3]{f_2\to f_2+6f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1\to f_1+4f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el polinomio $16x^3+8x^2-16x-14$ pertenece al espacio generado $\text{gen}\{-5x^2+4x+1, 2x^3+x^2+2x-4, -5x^3+x+5\}$.

Ejercicio 4.4. Sea $V = M_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Considere el subconjunto de V

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & 3b \\ -a & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Muestre que S es subespacio vectorial de V.
- Escribir a S como el espacio generado de tres matrices en V.
- Determinar si la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ pertenece a S.

Ejercicio 4.5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular el espacio nulo de A, $\mathrm{Nu}(A)$. Ayuda: ver ejemplo 4.10.

4.3 Conjuntos linealmente independientes

Sean V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un conjunto de elementos en V. El conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ se dice ***conjunto linealmente independiente*** si se cumple que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = \mathbf{0} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

En otras palabras, el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente si la única combinación lineal que genera al elemento $\mathbf{0}$ se obtiene al multiplicar por 0; es decir, si $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$.

Si el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ no es linealmente independiente, entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ se denomina ***conjunto linealmente dependiente***.

Ejemplo 4.19. El conjunto $\{v\} \subset V$ es linealmente independiente si y sólo si $v \neq \mathbf{0}$.

Ejemplo 4.20. En $\mathbb{R}^2$ el conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ejemplo 4.21. En $\mathbb{R}^3$ el conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ejemplo 4.22. El subconjunto $S = \left\{ \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es un conjunto linealmente independiente. En efecto, de la siguiente expresión:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene un sistema de ecuaciones lineales. Al realizar la operaciones matriciales,

$$\begin{aligned}\alpha_1\begin{pmatrix}-5 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & 5\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}3 & 3\\ -3 & -3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-5\alpha_1 & 2\alpha_1\\ -3\alpha_1 & 3\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\alpha_2 & 6\alpha_2\\ \alpha_2 & 5\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\alpha_3 & 3\alpha_3\\ -3\alpha_3 & -3\alpha_3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-5\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3 & 2\alpha_1+6\alpha_2+3\alpha_3\\ -3\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3 & 3\alpha_1+5\alpha_2-3\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

se tienen cuatro ecuaciones lineales,

$$\begin{cases}-5\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=0\\ 2\alpha_1+6\alpha_2+3\alpha_3=0\\ -3\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3=0\\ 3\alpha_1+5\alpha_2-3\alpha_3=0\end{cases} \iff \begin{pmatrix}-5 & 2 & 3\\ 2 & 6 & 3\\ -3 & 1 & -3\\ 3 & 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \left(\begin{array}{ccc|c}-5 & 2 & 3 & 0\\ 2 & 6 & 3 & 0\\ -3 & 1 & -3 & 0\\ 3 & 5 & -3 & 0\end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-5 & 2 & 3 & 0\\ 2 & 6 & 3 & 0\\ -3 & 1 & -3 & 0\\ 3 & 5 & -3 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{f_4\longleftrightarrow f_1} \left(\begin{array}{ccc|c}3 & 5 & -3 & 0\\ 2 & 6 & 3 & 0\\ -3 & 1 & -3 & 0\\ -5 & 2 & 3 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{f_1\to f_1-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -6 & 0\\ 2 & 6 & 3 & 0\\ -3 & 1 & -3 & 0\\ -5 & 2 & 3 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_4\to f_4+5f_1]{f_2\to f_2-2f_1,f_3\to f_3+3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -6 & 0\\ 0 & 8 & 15 & 0\\ 0 & -2 & -21 & 0\\ 0 & -3 & -27 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{f_2\longleftrightarrow f_4} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -6 & 0\\ 0 & -3 & -27 & 0\\ 0 & -2 & -21 & 0\\ 0 & 8 & 15 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{f_2\to -\frac{1}{3}f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -6 & 0\\ 0 & 1 & 9 & 0\\ 0 & -2 & -21 & 0\\ 0 & 8 & 15 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[f_4\to f_4-8f_2]{f_3\to f_3+2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -6 & 0\\ 0 & 1 & 9 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -57 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[f_4\to -\frac{1}{57}f_4]{f_3\to -\frac{1}{3}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -6 & 0\\ 0 & 1 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_4\to f_4-f_3]{f_2\to f_2-9f_3,f_1\to f_1+6f_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{f_1\to f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \iff \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4.6. Muestre que el subconjunto $\left\{\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}\right\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ejercicio 4.7. Muestre que el subconjunto $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ejemplo 4.23. El subconjunto $\{-x, x^2-2x, 3x+5x^2\}\subset P_{\leq 2}[x]$ es un conjunto linealmente dependiente. Se procede por definición. La siguiente igualdad de polinomios

$$\alpha_1(-x)+\alpha_2(x^2-2x)+\alpha_3(3x+5x^2)=0$$

da pie a un sistema de ecuaciones lineales; factorizar los términos x^2 y x en la ecuación anterior e igualar a cero cada coeficiente:

$$(\alpha_2 + 5\alpha_3)x^2 + (-\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3)x = 0,$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

La reducción de la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 \longleftrightarrow f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_1 \to (-1) f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 - 2f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha_1 - 13\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

muestra que el sistema de ecuaciones lineales en cuestión tiene infinitas soluciones parametrizadas así: $\alpha_1 = 13\alpha_3$, $\alpha_2 = -5\alpha_3$ y $\alpha_3 = \alpha_3$ variable libre. Por lo tanto $\{-x, x^2 - 2x, 3x + 5x^2\}$ es linealmente dependiente. El lector puede verificar que al reemplazar $\alpha_1 = 13\alpha_3$ y $\alpha_2 = -5\alpha_3$ en la igualdad de polinomios inicial, se obtiene que

$$13\alpha_3(-x) - 5\alpha_3(x^2 - 2x) + \alpha_3(3x + 5x^2) = 0.$$

Ejemplo 4.24. Sea $A_{n\times p}$ una matriz. El ***espacio columna*** de $A_{n\times p}$, denotado por $\mathrm{Col}(A)$, es el espacio generado por la columnas de A que son linealmente independientes. Para calcular el espacio $\mathrm{Col}(A)$, es suficiente tomar las columnas de A que tienen pivotes al obtener la forma escalonada reducida de A.

Ejercicio 4.8. Calcular el espacio columna para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

4.4 Base y dimensión de un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial. El conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ se denomina ***una base*** para V si se cumple que:

- El conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente.
- El espacio generado de $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es V, es decir,

$$\mathrm{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = V.$$

La ***dimensión*** de V corresponde al número de elementos en una base para V.

4.4.1 Bases canónicas: ejemplos

En esta sección se presentan las ***bases canónicas*** de los espacios vectoriales con los que se trabajará más adelante. Concretamente, los espacios vectoriales que se consideran son los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$, los espacios de matrices $M_{n\times p}(\mathbb{R})$ y los espacios de polinomios $P_{\leq n}[x]$. No sobra decir que, la palabra canónica en este contexto hace referencia a las bases que se obtienen al reescribir un vector, matriz o polinomio, utilizando la suma y multiplicación por escalar definidas en cada espacio vectorial en cuestión.

Ejemplo 4.25. Los espacios $\mathbb{R}^n$.
En $\mathbb{R}^2$, note que todo vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ se escribe de la siguiente forma:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{v} \in \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

es decir

$$\text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2.$$

Además, el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ es linealmente indendiente. Dicho esto, ***la base canónica*** para $\mathbb{R}^2$ es $\mathcal{B}_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

En $\mathbb{R}^3$, note que todo vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ se escribe así:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{v} \in \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

es decir,

$$\text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3.$$

Además, el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ es linealmente indendiente. Dicho esto, ***la base canónica*** para $\mathbb{R}^3$ es $\mathcal{B}_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Un argumento análogo, que se deja al lector, muestra que el conjunto

$$\mathcal{B}_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

es ***la base canónica*** para $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 4.9. Determinar la base canónica para $\mathbb{R}^5$.

Ahora bien, con el objetivo de escribir la base canónica para $\mathbb{R}^n$ se utiliza la siguiente notación. Sea e_i el vector en $\mathbb{R}^n$ cuya i-ésima entrada es igual a 1 y el resto son cero. Entonces, el conjunto $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es la ***base canónica*** para $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 4.26. Los espacios $M_{n\times p}(\mathbb{R})$.
En $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, una matriz $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix}$ se escribe de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix} &\in \operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

es decir,

$$\operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Además el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto linealmente independiente. Así que, el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es ***la base canónica*** para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
El lector puede verificar, por medio de un argumento análogo, que el conjunto

$$\mathcal{B}_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es ***la base canónica*** para $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Adicionalmente, se puede mostrar que ***la base canónica*** para $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ está dada por el siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_c = \Bigg\{ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg\}. \end{aligned}$$

En general, para escribir ***la base canónica*** de $M_{n\times p}(\mathbb{R})$ se denota E_{ij} la matriz de $n \times p$ cuya entrada ij es 1 y el resto son cero. Entonces, el conjunto $\mathcal{B}_c = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, \ldots, E_{ij}, \ldots, E_{np}\}$ es la case canónica de $M_{n\times p}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 4.27. Los espacios $P_{\leq n}[x]$.
En el espacio de polinomios de grado menor o igual a 1, $P_{\leq 1}[x]$, un polinomio $p(x) = a_1x + a_0$ se reescribe así:

$$p(x) = a_1(x) + a_0(1) \Longrightarrow p(x) \in \text{gen}\{x, 1\},$$

es decir

$$P_{\leq 1}[x] = \text{gen}\{x, 1\}.$$

Además, el conjunto $\mathcal{B}_c = \{x, 1\}$ es linealmente independiente. Luego el conjunto $\mathcal{B}_c = \{x, 1\}$ es ***la base canónica*** para $P_{\leq 1}[x]$.
En el espacio $P_{\leq 2}[x]$, un polinomio $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se reescribe

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x^2) + a_1(x) + a_0(1) \Longrightarrow p(x) \in \text{gen}\{x^2, x, 1\},$$

es decir

$$P_{\leq 2}[x] = \text{gen}\{x^2, x, 1\}.$$

Adicionalmente, el conjunto $\{x^2, x, 1\}$ es linealmente independiente. Por lo tanto, ***la base canónica*** para $P_{\leq 2}[x]$ está dada por $\mathcal{B}_c = \{x^2, x, 1\}$. Un argumento análogo muestra que el conjunto $\mathcal{B}_c = \{x^3, x^2, x, 1\}$ es ***la base canónica*** para el espacio $P_{\leq 3}[x]$. En general ***la base canónica*** para el espacio $P_{\leq n}[x]$ está dada por el conjunto de polinomios $\mathcal{B}_c = \{x^n, x^{n-1}, \ldots, x^2, x, 1\}$.

5 Transformaciones lineales

En esta sección se estudian las funciones que son compatibles con la estructura algebraica de los espacios vectoriales.

5.1 Transformaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales. Una ***transformación lineal*** entre V y W es una función $T : V \to W$ que satisface las siguientes condiciones

- $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, donde $v_1, v_2 \in V$.
- $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}, v \in V$.

Ejemplo 5.1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por la regla

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + y \end{pmatrix}.$$

La imagen bajo T de un vector en $\mathbb{R}^2$ se obtiene al evaluar las coordenadas del vector en la regla que define a T. Por ejemplo,

$$T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 2(-1)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2(2)+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Para verificar que T es una transformación lineal se procede por definición. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Los cálculos,

$$T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) \\ 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ 2x_1 + y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - y_2 \\ 2x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 + x_2 - y_2 \\ 2x_1 + y_1 + 2x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

muestran que $T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2)$. Por otro lado, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$T(\alpha\vec{v}) = T\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \alpha y \\ 2(\alpha x) + \alpha y \end{pmatrix}$$

y

$$\alpha T(\vec{v}) = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x - y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x - y) \\ \alpha(2x + y) \end{pmatrix}.$$

De lo cual, se sigue que $T(\alpha\vec{v}) = \alpha T(\vec{v})$. Por lo tanto, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal.

Ejemplo 5.2. Sea $A_{3\times 2}$ una matriz. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por la regla $T(\vec{v}) = A\vec{v}$, donde $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Note que, si $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$T(\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w} = T(\vec{w}) + T(\vec{w}).$$

Adicionalmente, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$T(\alpha\vec{v}) = A(\alpha\vec{v}) = \alpha A\vec{v} = \alpha T(\vec{v}).$$

Por lo tanto, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal.

Ejercicio 5.1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por la regla:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2y - z.$$

1. Calcular $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$.
2. Muestre que $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.
3. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Muestre que $T\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ejemplo 5.3. Sea $T : P_{\leq 2}[x] \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por la regla:

$$T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = \begin{pmatrix} 2a_0 - a_2 & a_2 - 3a_1 \\ a_2 + a_1 & a_2 + a_1 + a_0 \end{pmatrix}.$$

Se calcula la imagen bajo T de algunos polinomios.

$$T(1) = T(0x^2 + 0x + 1) = \begin{pmatrix} 2-0 & 0-0 \\ 0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0).$$

$$T(2x - 3x^2) = \begin{pmatrix} 0-(-3) & -3-6 \\ -3+2 & 0+2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \ (a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = -3).$$

$$T(1 + x + x^2) = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-3 \\ 1+1 & 1+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \ (a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1).$$

Ahora, se verifica que $T : P_{\leq 2}[x] \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es una transformación lineal. Sean $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ y $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ dos polinomios en $P_{\leq 2}[x]$. El cálculo,

$$\begin{aligned} T(p(x)+q(x)) &= T(a_2x^2+a_1x+a_0+b_2x^2+b_1x+b_0) = T((a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)) \\ &= \begin{pmatrix} 2(a_0+b_0)-(a_2+b_2) & (a_2+b_2)-3(a_1+b_1) \\ (a_2+b_2)+(a_1+b_1) & (a_2+b_2)+(a_1+b_1)+(a_0+b_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T(p(x))+T(q(x)) &= T(a_2x^2+a_1x+a_0)+T(b_2x^2+b_1x+b_0) \\ &= \begin{pmatrix} 2a_0-a_2 & a_2-3a_1 \\ a_2+a_1 & a_2+a_1+a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_0-b_2 & b_2-3b_1 \\ b_2+b_1 & b_2+b_1+b_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a_0+2b_0-a_2-b_2 & a_2+b_2-3a_1-3b_1 \\ a_2+b_2+a_1+b_1 & a_2+b_2+a_1+b_1+a_0+b_0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

muestra que $T(p(x)+q(x)) = T(p(x))+T(q(x))$. Por otro lado, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ entonces, por definición de T, se tiene que

$$T(\alpha p(x)) = T(\alpha(a_2x^2+a_1x+a_0)) = T\alpha a_2x^2+\alpha a_1x+\alpha a_0) = \begin{pmatrix} 2\alpha a_0-\alpha a_2 & \alpha a_2-3\alpha a_1 \\ \alpha a_2+\alpha a_1 & \alpha a_2+\alpha a_1+\alpha a_0 \end{pmatrix}$$

y

$$\alpha T(p(x)) = \alpha T(a_2x^2+a_1x+a_0) = \alpha \begin{pmatrix} 2a_0-a_2 & a_2-3a_1 \\ a_2+a_1 & a_2+a_1+a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(2a_0-a_2) & \alpha(a_2-3a_1) \\ \alpha(a_2+a_1) & \alpha(a_2+a_1+a_0) \end{pmatrix},$$

luego $T(\alpha p(x)) = \alpha T(p(x))$. Por lo tanto, $T : P_{\leq 2}[x] \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es una transformación lineal.

Ejercicio 5.2. Verificar que la función $T : \mathbb{R}^3 \to P_{\leq 3}[x]$ definida por la regla

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (5a-3b+c)x^3-(4b+c)x^2-5a+b,$$

es una transformación lineal. Adicionalmente, calcular $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.3. Sea T una transformación lineal tal que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calcular la regla que define a $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

5.1.1 Representación matricial. Espacio nulo y espacio imagen

En esta sección se consideran únicamente las bases canónicas de los espacios vectoriales que se han estudiado hasta el momento, es decir espacios euclideanos $\mathbb{R}^n$, espacios de matrices $M_{n\times p}(\mathbb{R})$, y espacios de polinomios $P_{\leq n}[x]$.
Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre dos espacios vectoriales. Asociada a T, existe una matriz, $[A_T]$, que cumple la siguiente ecuación

$$[T(v)]_W = [A_T][v]_V,$$

donde $[v]_V$ son las coordenadas de $v \in V$ con respecto a la base canónica de V y $[T(v)_W]$ son las coordenadas de $T(v) \in W$ con respecto a la base canónica de W. La matriz $[A_T]$ se denomina la ***matriz que representa a T en bases canónicas***. En otras palabras, estudiar una $T : V \to W$ se traduce en identificar las propiedades de la matriz $[A_T]$ con respecto a las bases canónicas.

Ejemplo 5.4. Sea $V = P_{\leq 2}[x]$. Las coordenadas del polinomio $p(x) = 3x^2 - 5x + 7$ con respecto a la base canónica de $P_{\leq 2}[x]$ son los coeficientes que acompañan a los elementos de la base canónica, $\mathcal{B}_c = \{x^2, x, 1\}$, es decir:

$$p(x) = 3x^2 - 5x + 7 = 3(x^2) + (-5)x + 7(1) \Longrightarrow [p(x)]_{P_{\leq 2}[x]} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Adicionalmente, para el polinomio $q(x) = -4x^2 + 3$, las coordenadas $[q(x)]_{P_{\leq 2}[x]}$ con respecto a la base canónica están dadas por:

$$q(x) = -4x^2 + 3 = -4(x^2) + (0)x + 3(1) \Longrightarrow [q(x)]_{P_{\leq 2}[x]} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En general las coordenadas de un polinomio $r(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ con respecto a la base canónica están dadas por

$$[r(x)]_{P_{\leq 2}[x]} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5.4. Calcular las coordenadas con respecto a la base canónica de los siguientes polinomios en $P_{\leq 3}[x]$.

$$p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 9,\ h(x) = x^3 + x - 1.$$

Ejemplo 5.5. Sea $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Las coordenadas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ con respecto a la base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ corresponden a los coeficientes que acompañana a los elementos de la base canónica $\mathcal{B}_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-4) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow [A]_{M_{2\times 2}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

De forma análoga, las coordenadas de la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ con respecto a la base canónica están dadas por:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-5) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow [B]_{M_{2\times 2}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

En general, las coordenadas de una matriz $E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ con respecto a la base canónica están dadas por:

$$[E]_{M_{2\times 2}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5.5. Calcular las coordenadas con respecto a la base canónica de las siguientes matrices en el respectivo espacio de matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5.6. En los espacios euclideanos las coordenadas de un vector con respecto a la base canónica corresponde al mismo vector.

Ahora bien, para calcular la matriz de representación de $T : V \to W$, $[A_T]$, con respecto a las bases canónicas se sigue el algoritmo a continuación:

1. Evaluar los elementos de la base canónica de V en la regla que define a la transformación.

2. Calcular los vectores coordenada con respecto a la base canónica de W.

3. La matriz $[A_T]$ se ensambla por columnas.

Ejemplo 5.7. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por la regla:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\2x+y\end{pmatrix}.$$

En este caso, $V=\mathbb{R}^2=W$. La base canónica es $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Al implementar el algoritmo para calcualr A_T se obtine que

1. $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
2. $\left[T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^2}=\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^2}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ y $\left[T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^2}=\left[\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^2}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
3. $[A_T]=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$.

Note que

$$[A_T]\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^2}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\2x+y\end{pmatrix}=\left[T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^2}.$$

Ejemplo 5.8. Sea $T:\mathbb{R}^3\to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por la regla:

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a&b+c\\a-b+c&2a+2b\end{pmatrix}.$$

En este caso, $V=\mathbb{R}^3$ y $W=M_{2\times2}(\mathbb{R})$. Para calcular la matriz que representa a T en bases canónicas se implementa el algoritmo. Las bases canónicas son, respectivamente, $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

1. $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.
2. $\left[T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{M_{2\times2}(\mathbb{R})}=\left[\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}\right]_{M_{2\times2}(\mathbb{R})}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\2\end{pmatrix}$,

   $\left[T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{M_{2\times2}(\mathbb{R})}=\left[\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\right]_{M_{2\times2}(\mathbb{R})}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}$ y

$$\left[T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{M_{2\times 2}(\mathbb{R})} = \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right]_{M_{2\times 2}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

3. $[A_T] = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\2 & 2 & 0\end{pmatrix}$

Note que,

$$[A_T]\left[\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^3} = \left[\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right]_{M_{2\times 2}(\mathbb{R})} = \left[\begin{pmatrix}2a\\b+c\\a-b+c\\2a+2b\end{pmatrix}\right]_{M_{2\times 2}(\mathbb{R})} = \left[T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right]_{M_{2\times 2}(\mathbb{R})}.$$

Ejercicio 5.6. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to P_{\leq 2}[x]$ definida por la regla:

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = (a+b)x^2 + (2b-c)x + (a+b+c+d).$$

Calcular la matriz que representa a T en bases canónicas.

Cualquier transformación lineal $T : V \to W$ induce dos subespacios vectoriales. El primero inmerso en V y el segundo inmerso en W. Explícitamente, el conjunto

$$\mathrm{N}(T) = \mathrm{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = \mathbf{0}\} \subset V,$$

se denomina el ***espacio nulo o kernel*** de T. A su vez, el conjunto

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(v) : v \in V\} \subset W,$$

se denomina la ***imagen*** de T.

Ejercicio 5.7. Muestre que para toda $T : V \to W$ transformación lineal. Los conjuntos $\mathrm{Ker}(T) \subset V$ y $\mathrm{Im}(T) \subset W$ tienen estructura de subespacio vectorial.

La ***nulidad*** de T, $\nu(T)$, es la dimensión del kernel de T, $\mathrm{Ker}(T)$. El ***rango*** de T, $\rho(T)$, es la dimensión de la imagen de T, $\mathrm{Im}(T)$.

Es importante notar que, para calcular los dos espacios asociados a una transformación lineal $T : V \to W$, es suficiente calcular la matriz $[A_T]$, ya que $[T(v)]_W = [A_T][v]_V$. Así,

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Nu}([A_T]),\ \mathrm{Im}(T) = \mathrm{Col}([A_T]).$$

Ejemplo 5.9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por la regla:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 3x \\ y \end{pmatrix}.$$

Para calcular $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$, rango y nulidad de T es suficiente calcular la matriz que representa a T en bases canónicas, $[A_T]$.

1. $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. $\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^2} = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\left[T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^2} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\left[T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^2} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. $[A_T] = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Nu}([A_T])$, se soluciona el sistema de ecuaciones lineales $[A_T]\vec{x} = \mathbf{0}$; es decir $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Al reducir la matriz aumentada $[A_T|0]$ se tiene que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to -\frac{1}{3}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 + \frac{1}{3}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0, y = 0, z = z \text{ variable libre.}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Ker}(T).$$

Para determinar el espacio imagen de T, basta identificar las columnas de $[A_T]$ que son linealmente independientes; es decir se necesita identificar cuáles son las columnas que tiene pivote al reducir la matriz $[A_T]$.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to -\frac{1}{3}f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Note que $\nu(T) = 1$ y $\rho(T) = 2$.

Ejercicio 5.8. Calcular el espacio nulo, el espacio imagen, el rango y la nulidad para la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por la regla:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ 2a-2c \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5.10. Sea $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por la regla:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-c+2d \\ 2b-3d \end{pmatrix}.$$

La matriz que representa a T en bases canónicas, $[A_T]$, se obtiene de la siguiente forma:

1.
$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2.
$$\left[T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^3} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \left[T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^3} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\left[T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^3} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \left[T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^3} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

3. $[A_T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$

Ahora bien, para calcular el espacio nulo $\mathrm{Ker}(T)$ y el espacio imagen $\mathrm{Im}(T)$ se procede por definición. El espacio nulo de T, $\mathrm{Ker}(T)$, está determinado por la solución al sistema

$[A_T]\vec{x} = \mathbf{0}$; es decir,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 - f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to -f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 - 2f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to -\frac{1}{2}f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 - f_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{3}{2}w = 0 \\ y - \frac{3}{2}w = 0 \\ z - \frac{1}{2}w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{3}{2}w \\ y = \frac{3}{2}w \\ z = \frac{1}{2}w \\ w = w, \text{libre} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}w \\ \frac{3}{2}w \\ \frac{1}{2}w \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La imagen de T, $\operatorname{Im}(T)$, se puede calcular a partir de la reducción previamente realizada, es decir

$$[A_T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Reducción Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

por lo tanto, $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Por último, se tiene que la nulidad de T, $\nu(T) = 1$ y que el rango de T, $\rho(T) = 3$.

Ejemplo 5.11. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to P_{\leq 2}[x]$ la transformación lineal definida por la regla:

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a+b)x^2 + (b-c)x + a + 2d.$$

En este ejemplo, se calcula la matriz que representa a T en las bases canónicas y se deja al lector determinar los espacios $\operatorname{Ker}(T)$ y $\operatorname{Im}(T)$ y sus respectivas dimensiones. La matriz $[A_T]$ se obtiene mediante los cálculos reportados a continuación:

1.
$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=x^2+1,\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=x^2+x,\ T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=-x,\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=2.$$

2.
$$\left[T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{P_{\leq 2}[x]}=\left[x^2+1\right]_{P_{\leq 2}[x]}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \left[T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{P_{\leq 2}[x]}=\left[x^2+x\right]_{P_{\leq 2}[x]}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$
$$\left[T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{P_{\leq 2}[x]}=\left[-x\right]_{P_{\leq 2}[x]}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\ \left[T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{P_{\leq 2}[x]}=\left[2\right]_{P_{\leq 2}[x]}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}.$$

3. $[A_T]=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&-1&0\\1&0&0&2\end{pmatrix}$.

Como se puede ver en los ejemplos anteriores:

- El número de columnas que no tienen pivotes al reducir la matriz que representa a una transformación lineal en bases canónicas corresponde a la nulidad de dicha transformación.
- El rango de una transformación lineal corresponde al número de pivotes de la matriz que representa a la transformación en bases canónicas.

Ejercicio 5.9. Sea $T: P_{\leq 2}[x]\to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por la regla:
$$T(ax^2+bx+c)=\begin{pmatrix}c-b & 2c-2b+a\\ 3a & b-c+2a\end{pmatrix}$$

1. Calcular la matriz que representa a T en bases canónicas.
2. Calcular $\operatorname{Ker}(T)$.
3. Calcular $\operatorname{Im}(T)$.
4. Calcular la nulidad de T, $\nu(T)$ y el rango de T, $\rho(T)$.

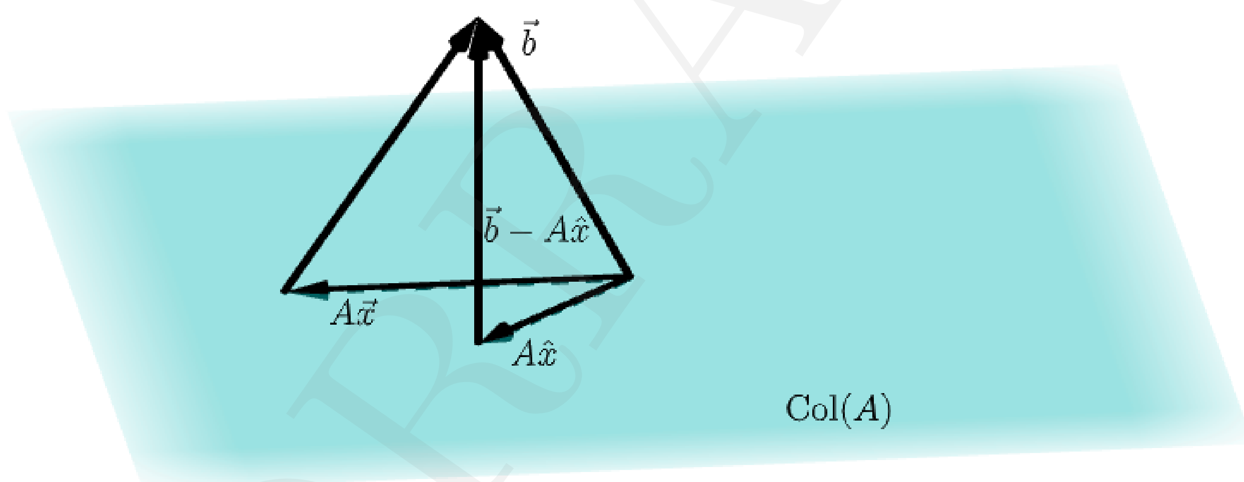
Ayuda: el lector debe obtener que $[A_T]=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-2&2\\3&0&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

6 Mínimos cuadrados

En esta sección se presenta el método de mínimos cuadrados el cual permite describir el comportamiento de un conjunto de datos por medio de una función polinomial, exponencial o logarítmica. Cabe aclarar que en estas notas únicamente se discutirá el método de mínimos cuadrados para conjuntos de datos de la forma $\{(x_i, y_i)\}$, donde x_i representa la variable independiente x, la cual describe el comportamiento de la variable dependiente y, en particular, de los valores y_i dados, $i = 1, \dots, N$.

6.1 El problema a trabajar

Dado un sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ de m ecuaciones y n incógnitas, se requiere encontrar un vector $\hat{x}$ que *minimice* la norma $||\vec{b} - A\vec{x}||$. Si el vector $\hat{x}$ existe, $\hat{x}$ se denomina la ***solución de mínimos cuadrados*** del sistema. El vector $\vec{b} - A\hat{x}$ se denomina el ***vector de error de mínimos cuadrados*** y la norma $||\vec{b} - A\hat{x}||$ es llamada ***error de mínimos cuadrados***. Gráficamente,



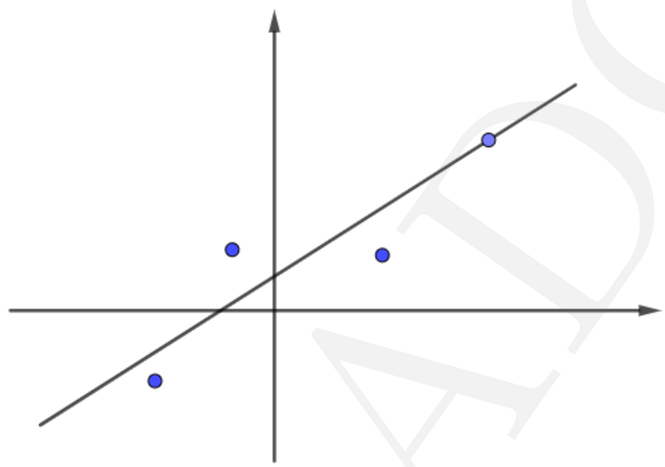
El método de mínimos cuadrados está fundamentado por el siguiente resultado cuya demostración se omite.
Sea $A_{m\times n}$ una matriz cuyas columnas son linealmente independientes. Entonces el sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ admite una única solución $\hat{x}$ de mínimos cuadrados dada por:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}.$$

Cabe mencionar que, dado el sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$, el sistema ***normal asociado*** $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$ es consistente y la solución corresponde a la solución de mínimos cuadrados $\hat{x}$.

6.2 Ajuste lineal

Sea $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ un conjunto de puntos en el plano cartesiano. A partir de $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ se quiere encontrar la recta $y = mx + b$ que mejor se ajusta a los datos dados. Es decir, es necesario calcular el valor de la pendiente, m, y del punto de corte con el eje y, b. Ver la figura a continuación:



Si se reemplazan los puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ en la ecuación de la recta, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + b \\ y_2 = mx_2 + b \\ \vdots \quad = \vdots \quad + \vdots \\ y_N = mx_N + b \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} \iff \vec{y} = A \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix}.$$

Así que, la solución por el método de mínimos cuadrados es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y},$$

donde $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$. Cabe resaltar que el método de mínimos cuadrados, calcula los coeficientes de la recta que mejor se ajusta a los datos dados.

Ejemplo 6.1. Determinar la ecuación de la recta que mejor se ajusta al conjunto de puntos $\{(0, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

Al reemplazar los puntos dados en la ecuación $y = mx + b$ se obtiene el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 1 = 0m + b \\ 3 = m + b \\ 4 = 2m + b \\ 4 = 3m + b \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} \iff \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

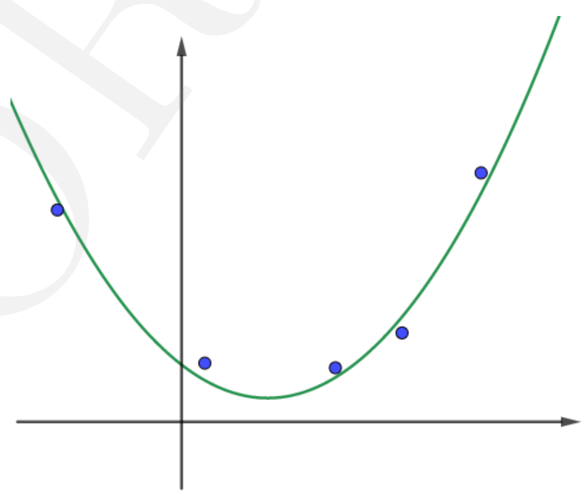
Luego, $A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, La solución de mínimos cuadrados viene dada por el siguiente cálculo:

$$\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la recta que mejor se ajusta al conjunto de datos dados es $y = x + \frac{3}{2}$.

6.3 Ajuste cuadrático

Sea $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ un conjunto de puntos en el plano cartesiano. A partir de $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ se quiere encontrar la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que mejor se ajusta a los datos dados. Es decir, es necesario calcular el valor de los coeficientes, a, b y c. Ver figura a continuación:



Si se reemplazan los puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ en la ecuación de la parábola se obtiene un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ \vdots \quad = \vdots \quad + \vdots \\ y_N = ax_N^2 + bx_N + c \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N^2 & x_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

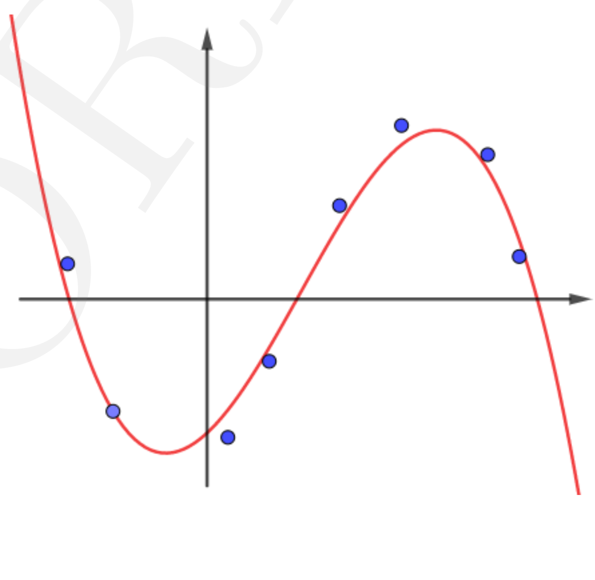
Entonces, la solución de mínimos cuadrados está dada por

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y},$$

donde $A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N^2 & x_N & 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$.

6.4 Ajuste cúbico

Sea $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ un conjunto de puntos en el plano cartesiano. A partir de $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ se quiere encontrar la ecuación de la cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que mejor se ajusta a los datos dados. Es decir, es necesario calcular el valor de los coeficientes, a, b, c y d. Ver la figura:



Si se reemplazan los puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ en la ecuación de la cúbica se obtiene un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d \\ y_2 = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d \\ \vdots \quad = \vdots \quad + \vdots \\ y_N = ax_N^3 + bx_N^2 + cx_N + d \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_N^3 & x_N^2 & x_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

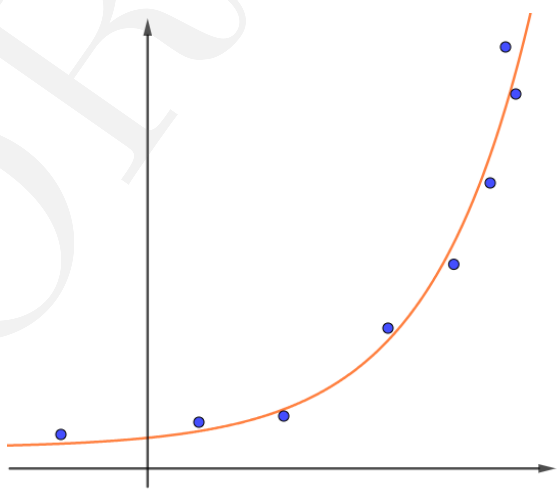
Así pues, la solución de mínimos cuadrados está dada por

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y},$$

donde $A = \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N^3 & x_N^2 & x_N & 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$.

6.5 Ajuste exponencial

Sea $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ un conjunto de puntos en el plano cartesiano. A partir de $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ se quiere encontrar la función exponencial $y = Ke^{mx}$ que mejor se ajusta a los datos dados. Es decir, es necesario calcular el valor de m, y el valor de K. Ver la siguiente figura:



Para determinar los valores de K y m se procede de la siguiente forma:

$$y = Ke^{mx} \iff \ln(y) = \ln(Ke^{mx}) \iff \ln(y) = \ln(K) + mx = mx + \ln(K).$$

Así que, la relación entre las variables x y $\ln(y)$ es una función lineal. Entonces, al aplicar el ajuste lineal para los datos $\{(x_i, \ln(y_i))\}$, $i = 1, \ldots, N$, se tiene que:

$$\begin{cases} \ln(y_1) = mx_1 + \ln(K) \\ \ln(y_2) = mx_2 + \ln(K) \\ \vdots \quad = \vdots \quad + \vdots \\ \ln(y_N) = mx_N + \ln(K) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \ln(y_2) \\ \vdots \\ \ln(y_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ \ln(K) \end{pmatrix}.$$

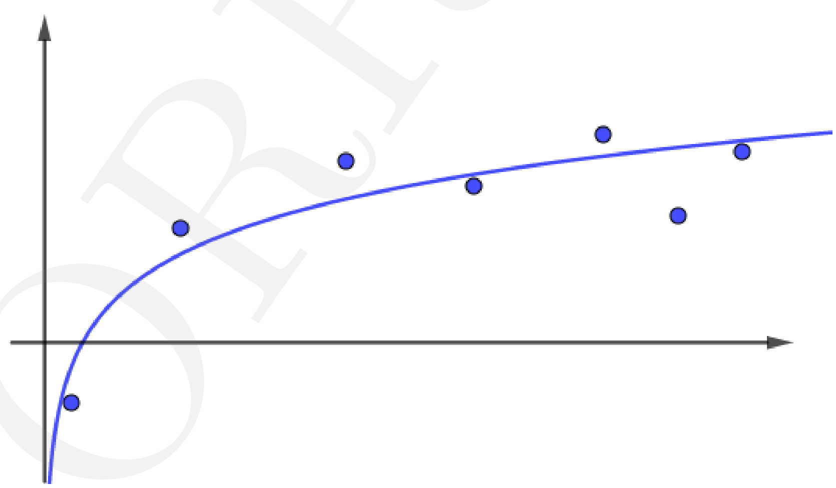
Por lo tanto, la solución por el método de mínimos cuadrados es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} m \\ \ln(K) \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \ln(\vec{y}),$$

donde $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$ e $\ln(\vec{y}) = \begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \ln(y_2) \\ \vdots \\ \ln(y_N) \end{pmatrix}$.

6.6 Ajuste logarítmico

Sea $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ un conjunto de puntos en el plano cartesiano. A partir de $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ se quiere encontrar la función $y = a\ln(x) + b$ que mejor se ajusta a los datos dados. Es decir, es necesario calcular el valor de a, y el valor de b. Ver la siguiente figura:



Si se reemplazan los puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ en la función $y = a\ln(x) + b$ se obtiene un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} y_1 = a\ln(x_1) + b \\ y_2 = a\ln(x_2) + b \\ \vdots \quad = \vdots \quad + \vdots \\ y_N = a\ln(x_N) + b \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(x_1) & 1 \\ \ln(x_2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \ln(x_N) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

donde $A = \begin{pmatrix} \ln(x_1) & 1 \\ \ln(x_2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \ln(x_N) & 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$. Entonces, la solución por el método de mínimos cuadrados es la siguiente

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y}.$$

7 Números complejos

¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$? Es claro que si tal solución o soluciones existen, no son números reales, ya que todo número real elevado al cuadrado es positivo. Así las cosas, se introuduce un *nuevo* número cuyo cuadrado es -1. Tal número se denota por $i = \sqrt{-1} \Longrightarrow i^2 = -1$. Así que:

$$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1 \iff x = \pm\sqrt{-1} \iff x = \pm i.$$

7.1 Números complejos y su álgebra

Se presentan sistemáticamente los números complejos y las operaciones básicas que se necesitarán en la próxima sección de estas notas.

7.1.1 Definiciones

Un ***número complejo*** z es una pareja ordenada de números reales que se escribe de la siguiente forma

$$z = a + bi,$$

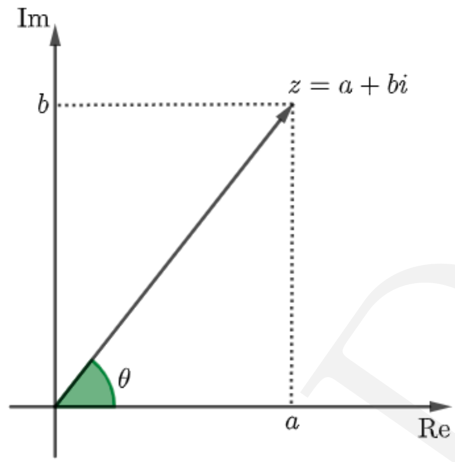
donde $i = \sqrt{-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$. El conjunto de los números complejos se denota así

$$\mathbb{C} = \{a + bi |\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Si $z = a + bi$ entonces ***la parte real*** de z es $\mathrm{Re}(z) = a$ y ***la parte imaginaria*** de z es $\mathrm{Im}(z) = b$. Note que los números reales son los números complejos cuya parte imaginaria es cero, es decir $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Gráficamente, los números complejos se representan por vectores en el plano cartesiano por medio de la siguiente asignación,

$$z = a + bi \mapsto \vec{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Sea $z = a + bi$ en $\mathbb{C}$, el ***conjugado complejo*** de z está dado por $\bar{z} = a - bi$. Adicionalmente, el ***módulo*** de z se define por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y el ***argumento*** de z es el ángulo θ que satisafce que $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$. Ver figura a continuación:



7.1.2 Operaciones entre números complejos

Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ dos números complejos. La ***suma*** en $\mathbb{C}$ está definida por la fórmula

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

La ***resta*** en $\mathbb{C}$ viene dada por la siguiente fórmula,

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

La ***multiplicación*** en $\mathbb{C}$ se define por medio de la ley distributiva, es decir

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Si $z_2 \neq 0$, la ***división*** en $\mathbb{C}$ está definida por la fórmula:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}.$$

7.1.3 Forma polar y fórmula de Euler

Sea $z = a + bi$, entonces z se puede escribir utilizando el módulo, $|z|$, y el argumento, θ, que z define. Explícitamente, la ***forma polar*** de z está dada por

$$z = |z|(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)i).$$

Por otro lado, en $\mathbb{C}$ se tiene la ***fórmula de Euler*** que viene expresada por la siguiente ecuación:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)i.$$

7.1.4 Raíces de polinomios

En $\mathbb{C}$ se pueden obtener *todas* las raíces de un polinomio $p(x)$ dado. Se presentan algunos casos en polinomios de grado 2 y de grado 3.
Las raíces del polinomio $p(x) = x^2 + x + 1$ se obtiene por medio del siguiente cálculo,

$$x^2 + x + 1 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{3}}{2}$$
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo tanto, las raíces son $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ y $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Note que $x_2 = \bar{x_1}$. Además, $p(x)$ admite la siguiente factorización en $\mathbb{C}$,

$$p(x) = x^2 + x + 1 = (x - x_1)(x - x_2) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

Sea $q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ un polinomio de grado 3. En este caso, nótese que $x = -1$ es una raíz del polinomio, luego por división de polinomios o por factorización de $q(x)$ se tiene que $q(x) = (x+1)(x^2+1)$. Adicionalmente, las raíces del polinomio $x^2 + 1$ son $x_{1,2} = \pm i$. Por lo tanto, $q(x)$ admite la siguiente factorización:

$$q(x) = (x+1)(x+i)(x-i).$$

8 Diagonalización de matrices

8.1 Valores y vectores propios

Sea $A_{n\times n}$ una matriz cuadrada. Un vector $\vec{v} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ se denomina ***vector propio*** de A con ***valor propio*** $\lambda \in \mathbb{R}$ si:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Los valores y vectores propios de A determinan el sistema honogéneo $(A-\lambda I)\vec{v} = \mathbf{0}$, ya que

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \mathbf{0} \iff (A-\lambda I)\vec{v} = \mathbf{0},$$

donde I denota la matriz identidad. Como todo sistema homogéneo, o bien, tiene única solución, o bien, tiene infinitas soluciones, para este caso, se requiere que el sistema $(A-\lambda I)\vec{v} = \mathbf{0}$ admita infintas soluciones, dado que los vectores propios son diferentes del vector nulo. Es decir,

$$\det(A-\lambda I) = 0.$$

Con esta ecuación se calculan los valores propios λ de A.
El polinomio $p(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ se llama el ***polinomio caracterítico*** de A y sus raíces corresponden a los valores propios de A.

Ejemplo 8.1. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. A partir del cálculo

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se concluye que: $\lambda = 2$ es un valor propios de A con vector propio $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8.1.1 Proceso para calcular los valores y los vectores propios de una matriz cuadrada

Sea $A_{n\times n}$ una matriz. Para calcular los valores propios y los vectores propios de A se implementa el siguiente esquema.

1. Calcular la matriz $A-\lambda I$, donde I denota la matriz identidad.
2. Calcular el polinomio característico de A, $p(\lambda) = \det(A-\lambda I)$.
3. Determinar las raíces del polinomio característico, $p(\lambda) = 0$. Estos valores son los valores propios λ de A.
4. Los vectores propios de A se obtienen al reemplazar **cada** valor propio λ de A en la matriz $A-\lambda I$ y resolver el sistema homogéneo asociado:

   $$(A-\lambda I)\vec{v} = \mathbf{0}.$$

   Note que siempre se obtendrán infinitas soluciones.

Ejemplo 8.2. Calcular los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Se procede siguiendo los pasos del esquema propuesto.

1. Calcular $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

2. Polinomio característico de A, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -2(2(3-\lambda)-8) - \lambda((3-\lambda)^2 - 16) - 2(2(3-\lambda)-8) \\ &= -4(2(3-\lambda)-8) - \lambda((3-\lambda)^2 - 16) = -4(-2\lambda - 2) - \lambda(9 - 6\lambda + \lambda^2 - 16) \\ &= 8(\lambda+1) - \lambda(\lambda^2 - 6\lambda - 7) = 8(\lambda+1) - \lambda(\lambda-7)(\lambda+1) \\ &= (\lambda+1)(8 - \lambda(\lambda-7)) = (\lambda+1)(8 - \lambda^2 + 7\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 7\lambda - 8) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-8) \\ &= -(\lambda+1)^2(\lambda-8). \end{aligned}$$

$$p(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8).$$

3. Valores propios de A: $p(\lambda) = 0$ (raíces del polinomio).

$$p(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8) = 0 \iff \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 8.$$

4. Vectores propios de A: solución de sistemas homogénos con infinitas soluciones.

   - Para $\lambda_1 = -1$:

$$A - (-1)I = \begin{pmatrix} 3-(-1) & 2 & 4 \\ 2 & -(-1) & 2 \\ 4 & 2 & 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Se resuelve el sistema homogéneo, $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_1]{f_2 \to f_2 - \frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to \frac{1}{4}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$a + \frac{1}{2}b + c = 0 \iff a = -\frac{1}{2}b - c.$$

Luego, la solución al sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b - c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, los vectores propios de A son $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nótese que,

$$A\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1\vec{v}_1,$$

$$A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1\vec{v}_2.$$

- Para $\lambda_2 = 8$:

$$A - 8I = \begin{pmatrix} 3-8 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & 3-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Se resuelve el sistema homogéneo, $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \longleftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -8 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to \frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 - 4f_1]{f_2 \to f_2 + 5f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to f_3 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to -\frac{1}{18}f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 + 4f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} a - c = 0 \\ b - \frac{1}{2}c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = c \\ b = \frac{1}{2}c \end{cases}.$$

Luego, la solución del sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{1}{2}c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A con valor propio $\lambda_2 = 8$. Note que,

$$A\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \vec{v}_3.$$

8.2 Diagonalización

Sean $A_{n\times n}$ una matriz cuadrada y λ un valor propio de A. El conjunto de todos los vectores propios de A con valor propio λ,

$$\mathrm{E}_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : A\vec{v} = \lambda\vec{v}\},$$

se denomina ***subespacio propio con valor propio asociado*** λ. El lector puede verificar que el subconjunto E_λ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Asimismo, si λ_k es un valor propio de A, la cantidad de veces que λ_k es raíz de $p(\lambda)$ corresponde a la ***multiplicidad algebraica*** de λ_k que se denotará mult.alg.(λ_k). La dimensión del subespacio propio E_{λ_k} se denomina la ***multiplicidad geométrica*** de λ_k y se denota por mult.geo.(λ_k).

Si $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{r_k} \dots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$, entonces

$$\text{mult.alg.}(\lambda_k) = r_k,$$

$$\text{mult.geo.}(\lambda_k) = \dim(\mathrm{E}_k) = \text{número de vectores propios para } \lambda_k.$$

Una matriz $A_{n\times n}$ es ***diagonalizable*** si existen una matriz diagonal D y una matriz invertible C, tales que:

$$AC = CD \iff A = CDC^{-1} \iff C^{-1}AC = D.$$

Si para cada valor propio λ de A se tiene que

$$\text{mult.alg.}(\lambda) = \text{mult.geo.}(\lambda),$$

entonces A es una matriz diagonalizable. En efecto, la matriz diagonal D es la matriz de valores propios, (contando multiplicidades), y C es la matriz invertible formada por vectores propios.

Ejemplo 8.3. En el ejemplo (8.2) los valores propios $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 8$ cumplen que

$$\text{mult.alg.}(\lambda_1) = 2 = \text{mult.geo.}(\lambda_1),$$

$$\text{mult.alg.}(\lambda_2) = 1 = \text{mult.geo.}(\lambda_2).$$

Por lo tanto, la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. En efecto, las matrices D y C son:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A su vez, la igualdad $AC = CD$:

$$AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = CD.$$

se cumple.

Ejemplo 8.4. La matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonalizable. En efecto, el polinomio característico $p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \lambda^2(2 - \lambda)$. Así que, los valores propios de B son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$. Adicionalmente, el lector puede verificar que los vectores propios son:

$$\lambda_1 = 0 \Longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 2 \Longrightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De manera que, para $i = 1, 2$:

$$\text{mult.alg.}(\lambda_i) = \text{mult.geo.}(\lambda_i).$$

La matriz diagonal D y la matriz C invertible están dadas por

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El lector puede verificar que $AC = CD$.

Ejemplo 8.5. La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonalizable. En efecto, el polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1)$. Luego, los valores propios de A son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -1$. Además, los vectores propios son

$$\lambda_1 = 0 \Longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 2 \Longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = -1 \Longrightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, para $i = 1, 2, 3$ la igualdad,

$$\text{mult.alg.}(\lambda_i) = \text{mult.geo.}(\lambda_i)$$

se cumple. Por lo tanto, la matriz diagonal D y la matriz C invertible son

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8.1. Determinar si la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. En el caso afirmativo, determinar las matrices C y D tales que $AC = CD$.

Ejercicio 8.2. Determinar si la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable y en dado caso determinar las matrices C y D tales que $AC = CD$.

8.2.1 Valores y vectores propios complejos

Ejemplo 8.6. Calcular los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. El polinomio característico de A es $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 18$. Los valores propios de A se obtienen al utilizar la fórmula cuadrática:

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = 3 \pm 3i.$$

Los siguientes cálculos:

- $\lambda_1 = 3 + 3i \Longrightarrow A - (3+3i)I = \begin{pmatrix} -1-3i & 5 \\ -2 & 1-3i \end{pmatrix}$. Se reduce esta matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1-3i & 5 & 0 \\ -2 & 1-3i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \longleftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1-3i & 0 \\ -1-3i & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to -\frac{1}{2} f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i & 0 \\ -1-3i & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \to f_2 - (-1-3i) f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff a + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) b = 0 \iff a = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) b$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) b \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda_2 = 3-3i \Longrightarrow A-(3-3i)I = \begin{pmatrix} -1+3i & 5 \\ -2 & 1+3i \end{pmatrix}$ y se reduce esta matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1+3i & 5 & 0 \\ -2 & 1+3i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \longleftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1+3i & 0 \\ -1+3i & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to -\frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & 0 \\ -1+3i & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \to (1-3i)f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff a + \left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)b = 0 \Longrightarrow a = \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)b$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)b \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right) \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

arrojan como resultado los vectores propios asociados a cada valor propio. Como se puede ver, cada vector propio se escribe de la siguiente forma:

$$\vec{v}_\lambda = \vec{u}_\lambda + i\vec{w}_\lambda.$$

Se deja al lector que verifique las dos igualdades a continuación:

$$A\vec{v}_1 = (3+3i)\vec{v}_1, \quad A\vec{v}_2 = (3-3i)\vec{v}_2.$$

8.2.2 Diagonalización y transformaciones lineales

Suponga que $T : V \to W$ es una transformación lineal entre dos espacios vectoriales. Si la matriz, $[A_T]$, que representa a la transformación T en bases canónicas es una matriz cuadrada, es razonable preguntar si $[A_T]$ es diagonalizable. La transformación T se dice que es ***diagonalizable*** si la matriz de representación en bases canónicas, $[A_T]$, lo es.

Ejemplo 8.7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por la regla:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ 4a-6b-3c \end{pmatrix}.$$

La matriz que representa a T en bases canónicas es, $[A_T] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}$. Los valores propios asociados a $[A_T]$ son las raíces del polinomio característico de $[A_T]$:

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -6 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2(-3-\lambda).$$

Por lo tanto, hay dos valores propios $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -1$. Además, se tiene que mult.alg.$(\lambda_1) = 1$ y mult.alg.$(\lambda_2) = 2$. Un vector propio asociado a $\lambda_1 = -3$ es $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Los vectores propios para $\lambda_2 = -1$ son $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así pues, mult.geo$(\lambda_1) = 1$ y mult.geo$(\lambda_2) = 2$. Por consiguiente, la matriz $[A_T]$ admite diagonalización. Las matrices D y C son:

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se concluye que la transformación lineal en cuestión es diagonalizable.

9 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales: introducción

Esta sección es una breve introducción a los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales. Para empezar, una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación que involucra una función de una variable y su derivada de primer orden.

Ejemplo 9.1. Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y \iff y' = y \iff y' - y = 0.$$

La solución de la ecuación está dada por la familia de funciones $y(t) = ke^x$, $k \in \mathbf{R}$. Profesor L. Euler.

9.1 Sistemas de ecuaciones diferenciales

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden es un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Adicionalmente el sistema de ecuaciones diferenciales es lineal si las funciones involucradas y sus derivadas son variables lineales.

Ejemplo 9.2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 4x(t) + y(t). \end{cases}$$

La solución está dada por dos funciones $x(t)$ y $y(t)$ cuyas derivadas cumplan las dos ecuaciones en cuestión.

Ejemplo 9.3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = 3x(t) - 5y(t) \\ z'(t) = x(t) - 2y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

La solución consta de tres funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ cuyas derivadas cumplan las ecuaciones del sistema en cuestión.

Ejemplo 9.4. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) + e^{2t} \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) - e^{-t}. \end{cases}$$

La solución es conformada por dos funciones $x(t)$ y $y(t)$ cuyas derivadas cumplan las dos ecuaciones en cuestión.

De ahora en adelante, todos los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarios de primer orden lineales estarán dados por dos ecuaciones y dos incógnitas.

9.2 Representación matricial

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineal, (con coeficientes constantes),

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) + g(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) + h(t), \end{cases}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $g(t), h(t)$ son dos funciones conocidas. ***La representación matricial*** del sistema en cuestión es:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se llama la matriz asociada al sistema dado. En todos los casos considerados en esta sección, la matriz A será una matriz diagonalizable. Antes de calcular la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales, es preciso mencionar algunas características de la solución.

- La solución del sistema, denotada por $(x(t), y(t))$, está caracterizada por los valores y vectores propios de la matriz A.
- Se entiende por ***punto de equilibrio*** del sistema todos los puntos en $\mathbb{R}^2$ para los cuales,
$$x'(t) = 0 = y'(t).$$
- Una solución del sistema $(x(t), y(t))$ es una ***solución estable*** si cuando $t \to \infty$, la solución $(x(t), y(t))$ converge al punto de equilibrio.
- La solución del sistema se presenta en la forma de la ***solución analítica*** del sistema o en forma de la ***solución cualitativa***.

Ejemplo 9.5. Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) + e^{2t} \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) - e^{-t}. \end{cases},$$

la representación matricial es

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

9.3 Solución analítica

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales de la forma:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la matriz asociada al sistema. La solución analítica del sistema en cuestión depende de la naturaleza de los valores propios λ_1, λ_2 de A.

1. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son valores propios reales, entonces la solución analítica es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t},$$

   donde $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente.

   - Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ la solución se llama ***nudo inestable***.
   - Si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ la solución se llama ***nudo estable***.
   - Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ la solución se llama ***punto de ensilladura***.

2. Si los valores propios de A son repetidos, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, la solución analítica es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda t} + c_2\vec{v}_2 e^{\lambda t},$$

   donde $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son los vectores propios asociados a λ; (A es una matriz diagonalizable).

3. Si $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ son números complejos, la solución analítica es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\left(c_1 \cos(\beta t)\vec{v}_1 + c_2 \mathrm{sen}(\beta t)\vec{v}_2\right),$$

   donde $\vec{v}_1 + i\vec{v}_2$ es un vector propio asociado a $\lambda_1 = \alpha + i\beta$.

   - Si $\alpha < 0$ la solución se llama ***foco estable***.
   - Si $\alpha > 0$ la solución se llama ***foco inestable***.
   - Si $\alpha = 0$ la solución se llama ***vértice***.

Ejemplo 9.6. Para el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 4x(t) + y(t), \end{cases}$$

la matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$. Un vector propio para λ_1 es $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, mientras que, un vector propio asociado a λ_2 es $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Así que, la solución analítica es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Note que el punto de equilibrio corresponde al origen $(0,0)$. Adicionalmente, la solución del sistema es un punto de ensilladura, ya que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

9.4 Solución cualitativa: diagrama de fase

La solución cualitativa de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales representa el comportamiento de la solución $(x(t), y(t))$ en $\mathbb{R}^2$. Específicamente, para el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t), \end{cases}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, las ***líneas de fase*** corresponden a las rectas $x'(t) = 0$ e $y'(t) = 0$. Es decir, son los puntos donde no hay movimiento en dirección de los ejes coordenados de $\mathbb{R}^2$. El ***diagrama de fase*** es la representación gráfica del comportamiento de la solución del sistema en cuestión, en el cual, se muestran las trayectorias que convergen al punto de equilibrio y las que no. Es importante resaltar que, para construir el diagrama de fase del sistema en cuestión, es necesario conocer los espacios propios de la matriz asociada al sistema. Con el objetivo de construir el diagrama de fase se propone el siguiente esquema de solución:

- Hallar las ecuaciones de las líneas de fase.
- Analizar el movimiento de la solución $(x(t), y(t))$.
- Determinar los espacios propios de la matriz asociada al sistema.
- Clasificar la solución $(x(t), y(t))$.
- Sintetizar toda la información recopilada en los pasos anteriores en una gráfica en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 9.7. Considere el sistema dado por:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 4x(t) + y(t). \end{cases}$$

- Las líneas de fase para el sistema se obtiene por medio del siguiente cálculo:

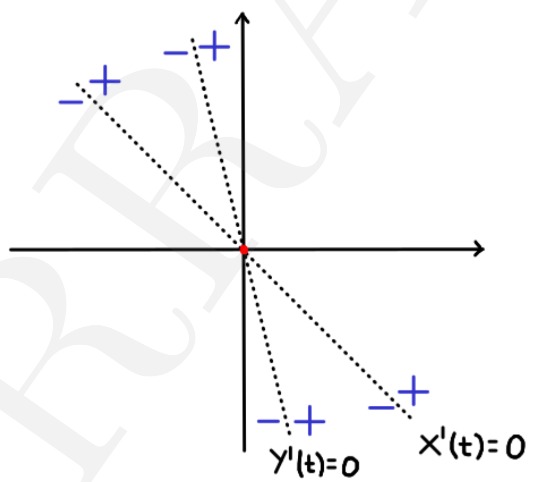
$$x'(t) = 0 \iff x + y = 0 \iff y = -x.$$
$$y'(t) = 0 \iff 4x + y = 0 \iff y = -4x.$$

- Análisis del movimiento de la solución:

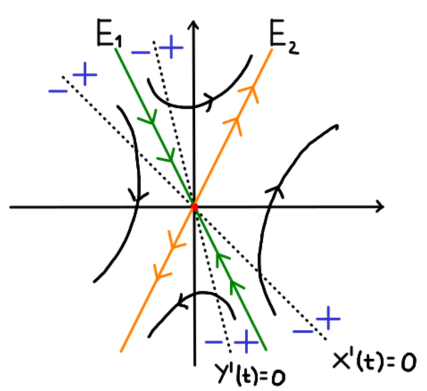
$$x'(t) > 0 \iff y > -x \iff \text{La coordenada } x \text{ aumenta.}$$
$$y'(t) > 0 \iff y > -4x \iff \text{La coordenada } y \text{ aumenta.}$$

- La matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$. Un vector propio para λ_1 es $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, mientras que, un vector propio asociado a λ_2 es $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Los espacios propios (rectas en $\mathbb{R}^2$) son $E_1 = \text{gen}\{\vec{v}_1\}$ y $E_2 = \text{gen}\{\vec{v}_2\}$ respectivamente.

- Las líneas de fase se presentan gráficamente de la siguiente forma:



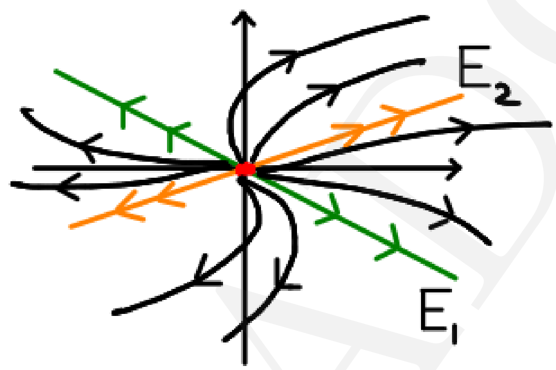
Con lo cual, el diagrama de fase viene dado por la siguiente gráfica:



- Como $\lambda_1 < 0$, el espacio propio E_1 es una trayectoria dinámicamente estable. A su vez, $\lambda_2 > 0$ implica que E_2 es una trayectoria dinámicamente inestable.

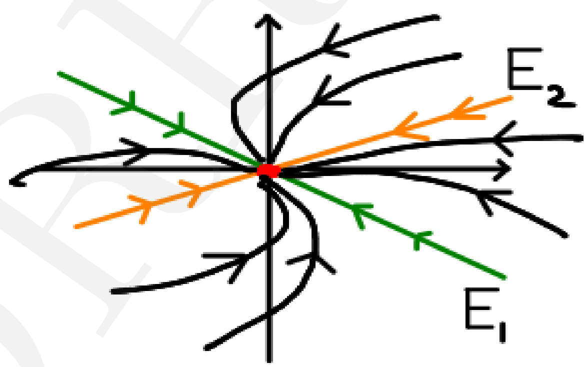
La clasifiacación, cualitativamente hablando, de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales, se presenta a continuación, según sea el caso.

- Nudo inestable:



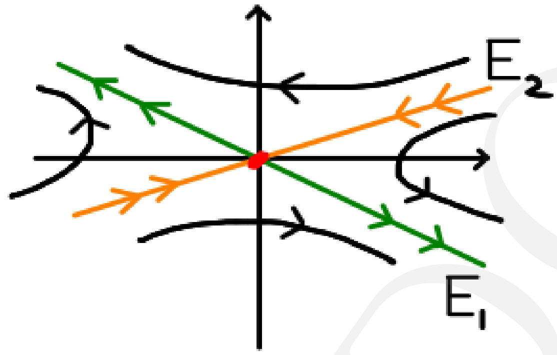
Las trayectorias determinadas por los espacio propios E_1 y E_2 son dinámicamente inestables. Valores propios positivos.

- Nudo estable:



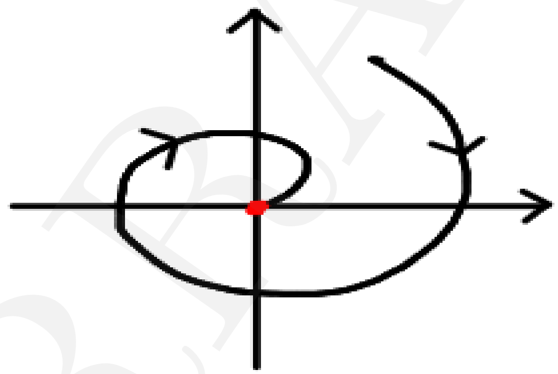
Las trayectorias determinadas por los espacio propios E_1 y E_2 son dinámicamente estables. Valores propios negativos.

- Punto de ensilladura:

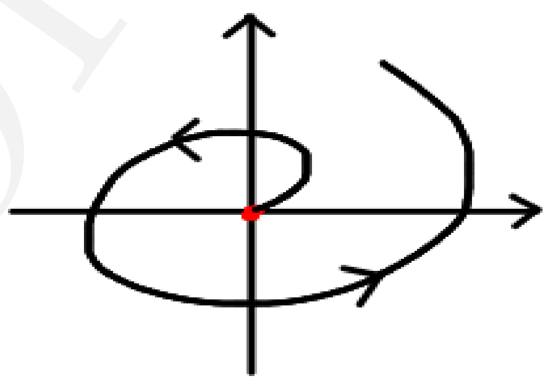


La trayectoria dada por E_1 es dinámicamente inestable y la trayectoria determinada por E_2 es dinámicamente estable. Valores propios con signos opuestos.

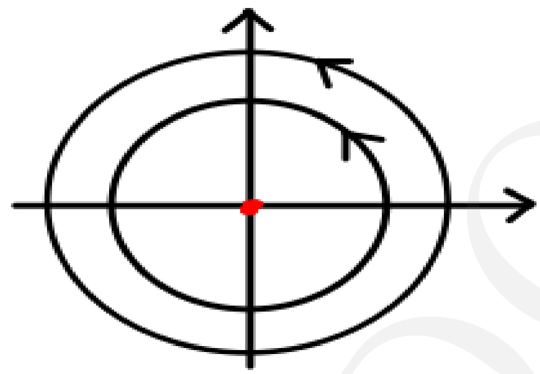
- Foco estable:



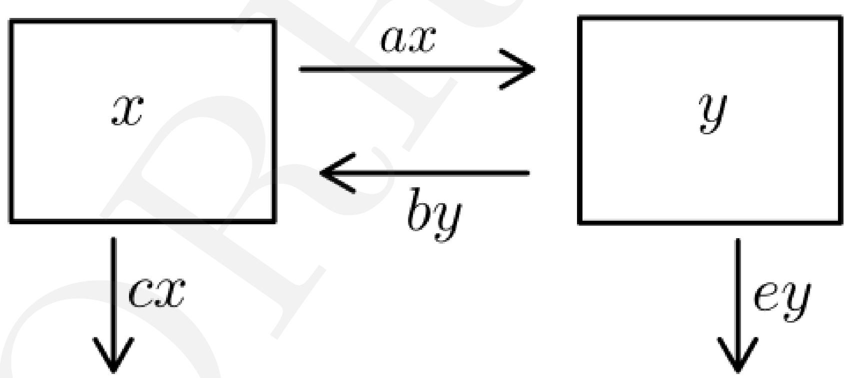
- Foco inestable:



- Vértice:



Ejemplo 9.8. Los modelos de compartimientos acoplados desempeñan un papel importante en diferentes partes de la biología de las poblaciones, la farmacología y la bioquímica. Estos modelos describen la interacción entre varios procesos, como por ejemplo interacciones de poblaciones, reacciones químicas, entre otras. En la figura siguiente se muestra esquemáticamente un modelo de dos compartimentos acoplados. El modelo en cuestión representa dos especies que interactúan, denotadas por x e y. La concentración de la especie x puede cambiar debido a una transición a la especie y, con una tasa de cambio instantánea de ax. Además, la especie x puede morir con una razón de cambio de cx. También existen transiciones similares para la especie y. Las tasas de estos procesos se especifican en la figura:



Por consiguiente, el modelo de interacción entre las especies x e y está descrito a continuación.

- "Variación infinitesimal de x" = "Entra" - "Sale".

$$x'(t) = by(t) - (ax(t) + cx(t)).$$

- "Variación infinitesimal de y" = "Entra" - "Sale".

$$y'(t) = ax(t) - (by(t) + ey(t)).$$

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales que describe el comportamiento del sistema acomplado de x e y es el siguiente:

$$\begin{cases} x'(t) = by(t) - (ax(t) + cx(t)) \\ y'(t) = ax(t) - (by(t) + ey(t)). \end{cases}$$

La forma matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-c & b \\ a & -b-e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Se deja al lector que calcule la solución analítica y el diagrama de fase si se tiene que

$$a = \frac{1}{2},\ b = 2,\ c = \frac{9}{2},\ e = 3.$$

El punto de equilibrio es el origen $(0,0)$, y la solución analítica es una solución estable.

Ejemplo 9.9. El sistema dado por

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

tiene la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Denote por $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ la matriz asociada al sistema.

- Los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$. A su vez, un vector propio asociado a λ_1 es $\vec{v}_1 = [-1, 1]$ y para λ_2 un vector propio es $\vec{v}_2 = [-3, 1]$.
- Los espacios propios correspondientes a λ_1 y λ_2 son respectivamente:

  $$E_1 = \text{gen}\{\vec{v}_1\},\ E_2 = \text{gen}\{\vec{v}_2\}.$$

  En otras palabras, los espacios propios E_1 y E_2 son rectas en $\mathbb{R}^2$ dirigidas por los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, respectivamente.
- Las líneas de fase son las siguientes:

  $$x' = 0 \iff 2x + 3y = 0 \iff y = -\frac{2}{3}x,$$

  $$y' = 0 \iff -x - 2y = 0 \iff y = -\frac{1}{2}x.$$

- Análisis del movimiento.

$$x' > 0 \iff y > -\frac{2}{3}x \iff \text{La coordenada } x \text{ aumenta,}$$

y

$$y' > 0 \iff y < -\frac{1}{2}x \iff \text{La coordenada } y \text{ aumenta.}$$

- El punto de equilibro está dado por la solución de $x' = 0$ e $y' = 0$. Es decir,

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0, y = 0.$$

Por lo tanto, $(0, 0)$ es un punto de equilibrio.

- La solución analítica está dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}.$$

La solución $(x(t), y(t))$ corresponde a un punto de ensilladura, ya que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

- Se deja al lector construir el diagrama de fase.

10 Modelo de insumo-producto abierto de Leontief

El modelo de insumo-producto abierto de Leontief describe la interacción entre industrias en un determinado país junto con la interacción que se ejerce desde el extranjero sobre tales industrias. Para plantear el modelo es necesario representar las siguientes piezas que ensamblan el modelo económico de Leontief.

- El sistema de producción conformado por n industrias.
- La demanda interna: requerimiento de una industria sobre otra.
- La demanda externa: cantidad de producción que se requiere en el extranjero de cada una de las n industrias.

El supuesto del modelo de Leontief es que **la producción de cada industria es igual a la demanda que se ejerce sobre la misma.** Matemáticamente, los ingredientes son:

1. Las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ denotan la producción de cada industria.
2. El número real a_{ij}, representa la cantidad de unidades de la industria i que necesita la industria j para producir una unidad, bien sea en cantidad o en dólares.
3. Los escalares $e_1, e_2, \ldots, e_n$ denotan la demanda externa ejercida sobre cada una de las industrias.

Así, el modelo de Leontief se escribe como un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + e_1 = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + e_2 = x_2 \\ \quad\vdots \quad + \quad \vdots \quad + \ldots + \quad \vdots \quad + \quad \vdots = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + e_n = x_n \end{cases}$$

que se reescribe de la siguiente forma:

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = e_1 \\ -a_{21}x_1 - (1-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = e_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \ldots \qquad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1-a_{nn})x_n = e_n \end{cases} \iff (I-C)\vec{x} = \vec{e},$$

donde $\vec{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es el vector de producción, $\vec{e} = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ es el vector de demanda externa, e I es la matriz identidad.

- La matriz $C = (a_{ij})$ se denomina ***matriz de tecnología***.
- La matriz $I - C$ se llama ***matriz de Leontief***.

Si la matriz de Leontief es una matriz invertible, entonces el sistema de ecuaciones lineales

$$(I - C)\vec{x} = \vec{e}$$

tiene única solución y, por lo tanto, se dice que la ***economía es productiva***.

Ejemplo 10.1. La siguiente tabla contiene los registros de las demandas internas, (en millones de dólares), de la economía de los Estados Unidos para 1958 de los sectores industriales: Metales No Terminados (MNT), Metales Terminados (MT), Metales Básicos (MB), Metales no Básicos (MNB), Energía (E) y Servicio (S).

	MNT	**MT**	**MB**	**MNB**	**E**	**S**
MNT	0.17	0.004	0	0.029	0	0.008
MT	0.003	0.295	0.018	0.002	0.004	0.016
MB	0.025	0.173	0.46	0.007	0.011	0.007
MNB	0.348	0.037	0.021	0.403	0.011	0.048
E	0.007	0.001	0.029	0.025	0.358	0.025
S	0.12	0.074	0.104	0.123	0.173	0.234

Adicionalmente, las demandas externas ejercidas sobre cada sector de la economía de Estados Unidos se reportan a continuación:

MNT	99640
MT	75548
MB	14444
MNB	33501
E	23527
S	263985

Luego, las entradas de la matriz de tecnología C corresponden a las entradas dadas en la tabla de demandas internas.

$$C = \begin{pmatrix} 0.17 & 0.004 & 0 & 0.029 & 0 & 0.008 \\ 0.003 & 0.295 & 0.018 & 0.002 & 0.004 & 0.016 \\ 0.025 & 0.173 & 0.46 & 0.007 & 0.011 & 0.007 \\ 0.348 & 0.037 & 0.021 & 0.403 & 0.011 & 0.048 \\ 0.007 & 0.001 & 0.029 & 0.025 & 0.358 & 0.025 \\ 0.12 & 0.074 & 0.104 & 0.123 & 0.173 & 0.234 \end{pmatrix}.$$

El vector de demandas externas es:

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 99640 \\ 75548 \\ 14444 \\ 33501 \\ 23527 \\ 263985 \end{pmatrix}.$$

La matriz de Leontief $(I - C)$ es la siguiente:

$$I - C = \begin{pmatrix} 0.83 & -0.004 & 0 & -0.029 & 0 & -0.008 \\ -0.003 & 0.705 & -0.018 & -0.002 & -0.004 & -0.016 \\ -0.025 & -0.173 & 0.54 & -0.007 & -0.011 & -0.007 \\ -0.348 & -0.037 & -0.021 & 0.597 & -0.011 & -0.048 \\ -0.007 & -0.001 & -0.029 & -0.025 & 0.642 & -0.025 \\ -0.12 & -0.074 & -0.104 & -0.123 & -0.173 & 0.766 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el nivel de producción de cada sector industrial están dados por:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = (I - C)^{-1}\vec{e} = \begin{pmatrix} 131028.369 \\ 120443.727 \\ 80644.9444 \\ 178679.232 \\ 65657.0183 \\ 431259.17 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz de Leontief es una matriz invertible, la economía de Estados Unidos en 1958 es una economía productiva.

Ejemplo 10.2. Una compañía ofrece tres servicios, a saber, diseño Web, software y networking. Al considerar a la compañía como una economía abierta cuyas demanda interna (en dólares) viene dada en la siguiente tabla:

Insumos requeridos por cada dólar producido

		Diseño Web	**Software**	**Networking**
Proveedor	**Diseño Web**	0.4	0.2	0.45
	Software	0.3	0.35	0.3
	Networking	0.15	0.1	0.2

Adicionalmente, la demanda externa para diseño Web es de 5400 dólares, para software de 2700 dólares y para networking de 900 dólares. Se denota por x_1, la cantidad de dólares que produce el servicio de Diseño Web. Por x_2, se denota la cantidad de dólares que produce el servicio de software, y por x_3, se denota la cantidad de dólares producidos por el servicio de networking. La matriz de tecnología C viene dada por

$$C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.45 \\ 0.3 & 0.35 & 0.3 \\ 0.15 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix},$$

y el vector de demanda externa es el siguiente

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 5400 \\ 2700 \\ 900 \end{pmatrix}.$$

El modelo de Leontief para este sistema de producción es

$$\begin{cases} 0.6x_1 - 0.2x_2 - 0.45x_3 = 5400 \\ -0.3x_1 + 0.65x_2 - 0.3x_3 = 2700 \\ -0.15x_1 - 0.1x_2 + 0.8x_3 = 900 \end{cases} \iff (I - C)\vec{x} = \vec{e}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el nivel de producción de cada servicio de la compañía es:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (I - C)^{-1}\vec{e} = \begin{pmatrix} 19578.2881 \\ 16346.55532 \\ 6839.248434 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 10.3. Considere una economía abierta cuyas demanadas internas vienen dadas en la siguiente tabla:

Insumos requeridos por cada dólar producido

		Vivienda	**Alimentos**	**Servicios públicos**
Proveedor	**Vivienda**	0.1	0.6	0.4
	Alimentos	0.3	0.2	0.3
	Servicios públicos	0.4	0.1	0.2

Adicionalmente, la demanda externa ejercida sobre el sector de vivienda es de 1930 dólares, el sector de alimentos tiene una demanda externa es 3860 dólares, y sobre el sector de servicios públicos existe una demanda externa de 5790 dólares. Se denota por x_1, la cantidad de dólares que produce el sector de vivienda. Por x_2, se denota, la cantidad de dólares que produce el sector de alimentos, y por x_3, se denota la cantidad de dólares producidos por el sector de servicios públicos. La matriz de tecnología C es

$$C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

El lector puede concluir que los niveles de producción para alcanzar una economía productiva son los siguientes:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31500 \\ 26500 \\ 26300 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10.1. La siguiente tabla describe una economía abierta compuesta por 3 sectores: producción de energía eléctrica, extracción de carbón y procesos de manufactura.

Insumos requeridos por cada dólar producido

		Electricidad	**Carbón**	**Manufactura**
Proveedor	**Electricidad**	0.1	0.25	0.2
	Carbón	0.3	0.4	0.5
	Manufactura	0.1	0.15	0.1

Adicionalmente, la demanda externa sobre el sector de electricidad es de 50000 dólares, sobre el sector del carbón es de 75000 dólares y sobre el sector de manufatura es de 1250000 dólares.

1. Explicar brevemente el significado de las variables x_1, x_2, x_3 en el contexto del ejercicio.
2. Calcular la matriz de tecnología C y el vector de demanda externa. $\vec{e}$.
3. Escribir el modelo de Leontief para la economía en cuestión.
4. Argumentar por qué la economía en cuestión, es una economía productiva.
5. Calcular los niveles de producción que se deben alcanzar para tener una economía productiva.