Analisi matematica 1 - 2021/2022

Antonio Pio Caruso

Queste dispense provengono da appunti presi a lezione, e contengono sicuramente qualche svista.

Libro di riferimento

Analisi matematica uno, seconda edizione, G. Di Fazio e P. Zamboni (non fondamentale).

Teoremi

In rosso quelli che hanno meno probabilità di comparire all'esame, in blu alcuni dei più importanti

- Sistemi numerici
  1. Proprietà di Archimede (additiva) 1.1.1
  2. Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ 1.1.1
  3. Disuguaglianza di Bernoulli 1.1.1
  4. Proprietà di Archimede (moltiplicativa) 1.1.1
  5. Unicità della radice n-esima 1.1.1
- Limiti e successioni
  1. Insieme è chiuso se e solo se contiene i suoi punti d'accumulazione 2
  2. Bolzano-Weierstrass 2
  3. Unicità del limite 2.1

4. Teorema di locale limitatezza 2.1
5. Permanenza del segno 2.1
6. $f(x)$ converge a $l \implies |f(x)|$ converge a $|l|$ 2.1
7. Il limite della somma è la somma dei limiti 2.1
8. Teorema del confronto 1 2.1
9. Teorema del confronto 2 2.1
10. Teorema del confronto 3 (carabinieri) 2.1
11. Teorema del limite della funzione composta 2.1
12. Teorema di cambio di variabile 2.1
13. Regolarità di funzione monotona 2.1
14. Principio di sostituzione degli infinitesimi 2.1
15. Principio di sostituzione degli infiniti 2.1
16. Successione convergente $\implies$ limitata 3
17. Teorema di passaggio tra le successioni e funzioni 3
18. Lemma di compattezza 3.2
19. Cauchy $\iff$ convergente 3.2

- Calcolo differenziale
  1. Continuità tramite successioni 4.1
  2. Locale limitatezza di funzione continua 4.1
  3. Permanenza del segno di funzione continua 4.1
  4. Esistenza degli zeri 4.1
  5. Assunzione di valori intermedi 4.2
  6. Teorema di Weierstrass 4.2
  7. Una funzione continua ha come immagine un intervallo 4.2
  8. Funzione lipschitziana $\implies$ uniformemente continua 4.2

9. Funzione derivabile $\implies$ continua 4.3
10. Teorema di derivazione della funzione inversa 4.3
11. Teorema di Fermat 4.4
12. Teorema di Rolle 4.4
13. Teorema di Cauchy 4.4.1
14. Teorema di Lagrange 4.4.2
15. Caratterizzazione di funzione costante mediante derivata 4.4.3
16. Caratterizzazione di una funzione monotone tramite il segno della derivata prima 4.4.3
17. Lemma di convessità 4.4.7

- Integrazione secondo Riemann
  1. Disuguaglianza fondamentale delle somme di Riemann 5
  2. Sup di somme inferiori è minore o uguale di inf di somme superiori 5
  3. Condizione di integrabilità secondo Riemann 5
  4. Proprietà di linearità 5
  5. Proprietà di positività 5
  6. Proprietà di monotonia 5
  7. f integrabile secondo Riemann $\iff$ f^+ e f^- integrabili secondo Riemann 5
  8. f integrabile secondo Riemann $\implies$ $|f|$ integrabile secondo Riemann 5
  9. Teorema della media I 5
  10. Integrabilità di funzioni monotone 5
  11. Integrabilità di funzioni continue 5
  12. Teorema della media II 5
  13. Integrabilità in un sottointervallo 5

14. Proprietà di additività 5
15. La funzione integrale è lipschitziana 5
16. Teorema fondamentale del calcolo integrale 5
17. Teorema della media III 5.1
18. Teorema di Torricelli 5.1
19. Integrazione per parti 5.1
20. Integrazione per sostituzione 5.1
21. Una funzione non negativa è integrabile in s.g. 5.2
22. Linearità integrali generalizzati 5.2
23. Positività di integrali generalizzati 5.2
24. Monotonia di integrali generalizzati 5.2
25. Confronto di integrali generalizzati 5.2
26. $|f|$ sommabile in s.g. $\implies$ f sommabile in f.g. 5.2
27. Una funzione non negativa è integrabile in senso improprio 5.2
28. Confronto di integrali impropri 1 5.2
29. Confronto di integrali impropri 2 5.2

- Serie numeriche
  1. Serie a termini non negativi converge o diverge positivamente 6
  2. Criterio di Cauchy per le serie 6
  3. Condizione necessaria per la convergenza di una serie 6
  4. Teorema del confronto di serie I 6.1
  5. Teorema del confronto di serie II 6.1
  6. Teorema del confronto di serie III 6.1
  7. Teorema della radice 6.1
  8. Criterio della radice 6.1

9. Teorema del rapporto 6.1
10. Criterio del rapporto 6.1
11. Assolutamente convergente implica convergente 6.2
12. Teorema di Leibniz I 6.2
13. Teorema di Leibniz II 6.2

Definizioni

- Sistemi numerici
    1. Insieme limitato superiormente 1.1
    2. Massimo di un insieme 1.1.1
    3. Maggiorante/minorante 1.1
    4. Estremo superiore 1.1.1
    5. Insieme che gode di proprietà del sup 1.1.1
- Limiti e successioni
    1. Intorno di un punto 2
    2. Punto interno 2
    3. Insieme interno 2
    4. Insieme aperto 2
    5. Punto d'accumulazione 2
    6. Insieme derivato 2
    7. Punto di frontiera 2
    8. Parte positiva e negativa di una funzione 2
    9. Definizione di limite 2.1
    10. Definizione di limite per $x \to \infty$ 2.1
    11. Funzione localmente limitata in un punto 2.1
    12. Massimo relativo di una funzione 2.1

13. Infinitesimi e infiniti 2.1
14. Ordine di infinitesimi 2.1
15. o piccolo 2.1
16. Asintoti 2.1
17. Successione numerica 3
18. Limite di successione 3
19. Successione limitata 3
20. Successione estratta 3.1
21. Valore limite 3.2
22. Classe limite 3.2
23. Massimo limite e minimo limite 3.2
24. Successione di Cauchy 3.2

- Calcolo differenziale
  1. Funzione continua in un punto 4.1
  2. Funzione continua in un punto da destra o da sinistra 4.1
  3. Singolarità di una funzione 4.1
  4. Rapporto incrementale 4.3
  5. Funzione uniformemente continua 4.2
  6. Punto critico (punto in cui la derivata prima o è nulla o non esiste)
  7. Funzione lipschitziana 4.2
  8. Funzione derivabile 4.3
  9. Punto a tangente verticale 4.3
  10. Derivata destra e sinistra 4.3
  11. Punto angoloso e cuspide 4.3
  12. Derivate successive alla prima 4.3

13. Funzione differenziabile 4.4
14. Insieme convesso 4.4.6
15. Funzione concava e convessa 4.4.6
16. Punto stazionario 4.4
17. Funzione primitiva 4.4.3
18. Punto di flesso 4.6

- Integrazione secondo Riemann
  1. Decomposizione 5
  2. Somma superiore e inferiore 5
  3. Funzione integrabile secondo Riemann 5
  4. Funzione generalmente continua 5
  5. Funzione integrale 5
  6. Integrale in senso generalizzato 5.2
  7. Funzione sommabile in senso generalizzato 5.2
  8. Funzione assolutamente sommabile in senso generalizzato 5.2
  9. Integrali in senso improprio 5.2
- Serie numeriche
  1. Successione di somme parziali 6
  2. Serie numerica (convergente, divergente positivamente o negativamente, oscillante) 6
  3. Serie telescopica 6
  4. Serie resto 6
  5. Serie assolutamente convergente 6.2
  6. Serie a segni alterni 6.2

Esercizi

È consigliato svolgere molti esercizi prima dell'esame, quelli da saper risolvere bene sono almeno delle seguenti tipologie:

1. Modulo (1.2) e coniugato (1.2) di un numero complesso, equazioni nel campo complesso.
2. Limiti: forme indeterminate, limiti notevoli (2.2), sviluppi in serie di Taylor Mc-Laurin (2.3), limiti con parametro, limiti di successioni ricorsive.
3. Studio di funzione: dominio, immagine, asintoti (2.1), studio della monotonia, punti di massimo e minimo (locali e assoluti)(4.4.5), dimostrazione dell'invertibilità, calcolo della funzione inversa, studio di continuità e di derivabilità, calcolo della derivata (4.3,4.3), grafico qualitativo.
4. Integrali (tutti i metodi di integrazione, 5.3) con o senza parametro, studio di funzione integrale, determinare la sommabilità (con o senza parametro), individuare una specifica primitiva.
5. Determinare il carattere di serie con o senza parametro (guida completa per le serie: 6.3

1 Sistemi numerici

1.1 Insiemi

Relazioni binarie e di equivalenza Dato un insieme $A \neq \emptyset$, chiameremo "relazione binaria", indicata con R, un sottoinsieme del prodotto cartesiano di A.

Facendo un esempio, facciamo corrispondere A con $\mathbb{Q}$, la relazione binaria sarà $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Anziché usare questa notazione, possiamo anche dire "$a\ R\ b$", che significa che a è in relazione con b, e in questo caso la relazione è che entrambi fanno parte di $\mathbb{Q}$.

Vediamo un tipo di relazione, ovvero quella di equivalenza, che indichiamo col simbolo $\sim$. Affinché questa relazione sia valida in un qualunque insieme A, deve soddisfare 3 proprietà:

1. Riflessiva: $a \sim a\ \forall a \in A$, a è in relazione con se stesso.
2. Simmetrica: $a \sim b \implies b \sim a\ \forall a, b \in A$, a è in relazione con b.
3. Transitiva: $a \sim b$ e $b \sim c \implies a \sim c\ \forall a, b, c \in A$, c è in relazione con a e b.

La relazione di equivalenza è utile perchè ci permette di isolare certi elementi di un insieme sulla base di una determinata caratteristica, per esempio se in un insieme di triangoli scegliamo come relazione "triangoli con la stessa area", in questo modo possiamo raggrupparli.

Con il simbolo $[a]$ indichiamo la "classe di equivalenza", ovvero un sottoinsieme di A che contiene elementi che soddisfano una relazione di equivalenza. Sfrutteremo il concetto di classe di equivalenza per definire l'insieme dei numeri interi a partire dai numeri naturali.

L'insieme di tutte le classi di equivalenza è chiamato "insieme quoziente" di A, e si indica con $A/\sim$.

Relazione d'ordine Un'altra relazione binaria altrettanto importante è quella di ordine parziale, espressa dal simbolo $\leq$.

Gode delle stesse proprietà della relazione di equivalenza, tranne per la seconda, che anziché essere "simmetrica" è la "antisimmetrica".

Avremo quindi le proprietà:

1. Riflessiva: $a \leq a$
2. Antisimmetrica: $a \leq b$ e $b \leq a \implies a = b$
3. Transitiva: $a \leq b$ e $b \leq c \implies a \leq c$

Un insieme A che soddisfa queste condizioni sarà chiamato insieme ordinato, e solitamente si indica con $(A, \leq)$. Tutti gli insiemi che conosciamo, tranne $\mathbb{C}$, sono ordinati. In particolare, un insieme in cui, prendendo due elementi qualsiasi a, b, possiamo sempre dire se $a \leq b$ e se $b \leq a$, sarà chiamato "totalmente ordinato".

Insieme limitato e definizione di maggiorante Un insieme $E \subseteq A$ si dirà "limitato superiormente" se:
$\exists\ k \in A : x \leq k\ \forall x \in E$.
k Sarà chiamato "maggiorante" di E.

Indichiamo con E^* l'insieme dei maggioranti di E, ovviamente sarà non vuoto se l'insieme è limitato superiormente.

1.1.1 Massimo

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, $\bar{x}$ è il massimo di A se valgono entrambe queste proposizioni:

1. $\bar{x} \in A$
2. $\forall x \in A \quad \bar{x} \geq x$

Modo alternativo per definirlo:
Se $E \cap E^* \neq \emptyset \implies M \in E \cap E^*$, M sarà chiamato "massimo" dell'insieme E.

Nonostante sia un fatto intuitivo, possiamo dimostrare con un teorema che il massimo è unico (si dimostra negando l'unicità, come la maggior parte dei teoremi di unicità):

Ipotesi: $(A, \leq)$ p.o. (parzialmente ordinato) $E \subseteq A \quad E$ limitato superiormente.
Tesi: il massimo è unico.

Dimostrazione: supponiamo di avere due massimi: m_1 e m_2, entrambi per definizione appartenenti all'insieme E. Si avrà che $m_1 \leq m_2$ e $m_2 \leq m_1$, in quanto sono entrambi massimi. Questo, per la proprietà antisimmetrica, equivale a dire $m_1 = m_2$.

Esistono naturalmente le definizioni analoghe a quelle date, ovvero insieme limitato superiormente, minorante, minimo e unicità del minimo, che funzionano con lo stesso ragionamento. L'insieme dei minoranti di E si indica con E_*.

Sup L'estremo superiore (sup) di un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è quel numero α tale che:

1. $\forall x \in X \quad x \leq \alpha$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ x \in X :\ x + \varepsilon > \alpha$

Si può anche definire come:
$(A, \leq)$ p.o. (parzialmente ordinato) $X \subseteq A\ \ X^* \neq \emptyset$

1. $\alpha \in X^*$
2. $\forall \gamma \in A\ \gamma \leq \alpha \implies \gamma \notin X^*$

Quando X non è limitato superiormente, $\sup X = +\infty$.

Proprietà dell'estremo superiore Un insieme parzialmente ordinato gode di un'importante proprietà detta "dell'estremo superiore" solo se ogni suo sottoinsieme limitato superiormente ha un sup. In termini matematici:

$(A, \leq)$ p.o. (parzialmente ordinato)
Se $\forall E \subseteq A$ limitato superiormente $\implies \exists \sup E$
Allora diremo che A gode della proprietà del sup. Un insieme che gode di questa proprietà gode automaticamente anche di quella dell'inf.

Esistono alcuni insiemi parzialmente ordinati che non godono di questa proprietà, come l'insieme $\mathbb{Q}$, mentre $\mathbb{R}$ ne gode.

Assiomi di Peano Gli assiomi di Peano sono alla base della teoria degli insiemi. Indicando con n^+ il successivo di n, $\forall n \in \mathbb{N}$, e con $\mathbb{N}_0$ l'insieme $\mathbb{N}$ che include lo 0, allora:

1. 0 è un numero
2. $n^+ \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}_0$
3. $n^+ \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$
4. Se $n^+ = m^+ \implies n = m$
5. Se $P \subseteq \mathbb{N}_0 \quad 0, n, n^+ \in P \implies P = \mathbb{N}_0$

Proprietà di Archimede (additiva) L'insieme $\mathbb{R}$ gode della proprietà di Archimede, ovvero vale il seguente teorema:

Ipotesi: $x, y \in \mathbb{R} \quad x > 0$
Tesi: $\exists\ n \in \mathbb{N} : nx > y$

Dimostrazione: per assurdo,
$\forall n \in \mathbb{N} \implies nx \leq y$.
Si considera quindi $E = \{nx\}$ limitato superiormente, con α= sup E.

Per la seconda proprietà del sup, si ha:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ nx \in E : nx > \alpha - \varepsilon$.
Poniamo $\varepsilon = x$ e otteniamo $nx + x > \alpha$, ovvero $x(n+1) > \alpha$.

$x(n+1)$ è tuttavia un elemento di E, per cui non può essere maggiore di α: l'errore sta nel supporre che $nx \leq y$

Proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ Vedremo in che modo il concetto di "densità" è utile quando faremo la chiusura di un insieme (2).

Ipotesi: $x, y \in \mathbb{R} \qquad x < y$
Tesi: $\exists\ q \in \mathbb{Q} : x < q < y$

Dimostrazione: dall'ipotesi $x < y$ otteniamo $y - x > 0$.

1° utilizzo di Archimede (tra $y - x$ e 1): $\quad \exists\ n \in \mathbb{N} : n(y - x) > 1$, ovvero $ny > 1 + nx$.
2° utilizzo di Archimede (tra 1 e nx) : $\ \exists\ m_1 \in \mathbb{N} : m_1 > nx$.
3° utilizzo di Archimede (tra 1 e $-nx$): $\exists\ m_2 \in \mathbb{N} : m_2 > -nx$.

Mettiamo insieme queste ultime 2 disequazioni per ottenere $-m_2 < nx < m_1$, ovvero la quantità nx è sicuramente compresa tra due numeri interi. Possiamo riscrivere quest'affermazione come:

$\exists\ m \in \mathbb{Z} : m - 1 \leq nx < m$, ovvero $nx < m \leq nx + 1$. Tuttavia sappiamo che $nx + 1 < ny$, per il primo utilizzo di Archimede.

Abbiamo dunque $nx < m < ny$, dividiamo tutto per n per ottenere $x < \frac{m}{n} < y$. La dimostrazione è finita, in quanto $\frac{m}{n}$ è q, ovvero un qualsiasi numero razionale.

Disuguaglianza di Bernoulli pg. 33

Ipotesi: $x \in \mathbb{R} \quad x > -1$
Tesi: $(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dimostriamo attraverso il metodo induttivo, servendoci del quinto postulato di Peano: un sottoinsieme di N che ha come elementi $0, n$ e $n + 1$, coincide con $\mathbb{N}$

Passo 1: per $n = 0 \implies 1 \geq 1$ è vero.

Passo n: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ supponiamo sia vero: basta sostituire n con qualsiasi numero naturale per vederlo.

Passo n+1: dobbiamo dimostrare che $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. Ci arriviamo in questo modo:
$(1 + x)^n(1 + x) \geq 1 + nx(1 + x)$
$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + x + nx + nx^2$
Dato che nx^2 è una quantità certamente positiva:
$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + x + nx$
$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + x(n + 1)$, c.v.d.

Abbiamo dimostrato che la tesi vale per n e per $n + 1$, quindi se vale quando n è 0 (dimostrato), varrà anche per 1, e in tal caso varrà anche per 2, e così via per tutti i numeri naturali.

Proprietà di Archimede (moltiplicativa) Questa proprietà non è altro che una conseguenza della proprietà di Archimede che abbiamo dimostrato, per distinguerle possiamo chiamare la prima "additiva".

Ipotesi: $t, a \in \mathbb{R} \quad t > 1$
Tesi: $\exists\ n \in \mathbb{N} : t^n > a$

Dimostrazione: dalle ipotesi sappiamo che $t - 1 > 0$, per cui è un valore sul quale è possibile applicare la proprietà di Archimede additiva:

$\exists\ n \in \mathbb{N} : n(t-1) > a-1$

$$t-1 > \frac{a-1}{n}$$

$$t > 1 + \frac{a-1}{n}$$

Questa disequazione è un confronto tra due quantità positive, per cui possiamo elevare entrambe a n:

$$t^n > \left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n$$

Applichiamo la disuguaglianza di Bernoulli al secondo membro:

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{a-1}{n} n$$

ovvero:

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geq a$$

Ricapitolando, abbiamo:

$$t^n > \left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geq a$$

togliendo il termine centrale, che non ci interessa, vediamo che la tesi è confermata: $t^n > a$

Unicità della radice n-esima Ipotesi:
$b \in \mathbb{R} \quad b > 0 \quad n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2$
Tesi: $\exists_1\ x \in \mathbb{R} \quad x > 0 : x^n = b$

Dimostrazione dell'unicità: supponiamo per assurdo che:
$\exists\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2 \quad x_1, x_2 > 0 \quad x_1 < x_2 : x_1^n = b = x_2^n$
Allora, per la monotonia della funzione esponenziale, avremo che:
$x_1 < x_2 \implies x_1^n < x_2^n \implies b < b$, che è assurdo. L'errore sta nel supporre che la radice n-esima non sia unica.

1.2 Numeri complessi

L'insieme $\mathbb{R}$ è l'unico campo ordinato che gode della proprietà dell'estremo superiore, tuttavia presenta un problema: non gode sempre della possibilità di estrarre una radice: le radici a indice pari sono possibili solo per quantità maggiori di 0.

Per superare questo problema, definiamo l'insieme $\mathbb{R}^2$ e le sue operazioni di somma e prodotto, in modo da renderlo un campo:

Per ogni $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ poniamo

1. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
2. $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

La prima operazione è intuitiva, in quanto la somma è definita componente per componente. Per dimostrare il prodotto, invece, basta verificare che valgano le sue proprietà.

L'insieme così definito è chiamato campo complesso, e si denota con $\mathbb{C}$. L'insieme $\mathbb{C}_0 = \{(a, b) \in \mathbb{C} : b = 0\}$ è isomorfo a $\mathbb{R}$, per cui d'ora in poi scriveremo "a" al posto di "(a,0)".

Poniamo $i = (0, 1)$. Questo numero complesso si chiama "unità immaginaria", e il suo quadrato è pari a $i^2 = -1$. Per dimostrare questa affermazione, applichiamo l'operazione di prodotto definita poc'anzi:
$(0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = -1$

Per ogni $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ si ha $z = a + ib$, dimostriamolo:

$z = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib.$

Coniugato e proprietà Se $z = a+ib$ diremo che il numero z è espresso in forma algebrica: chiameremo il numero reale a la "parte reale" di z, mentre il numero reale b sarà il coefficiente dell'unità immaginaria di z. Per ogni $z = a+ib$ esiste un numero $\bar{z} = a-ib$, detto "coniugato" di z, che gode delle proprietà elencate qui sotto, di immediata verifica:

Per ogni $z \in \mathbb{C} \quad z = a + ib$

1. $z + \bar{z} = 2a, \quad z - \bar{z} = 2ib$
2. $\bar{\bar{z}} = z$

3.

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

Se $z \neq 0$.

Per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ si ha:

4. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
5. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Modulo e proprietà Chiameremo "modulo" di z il numero reale non negativo $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, ovvero $\sqrt{a^2 - (ib)^2}$, e dato che i^2 è -1, otteniamo $\sqrt{a^2 + b^2}$, un valore sempre positivo. Come già sappiamo, per un numero reale il modulo è pari al valore assoluto.

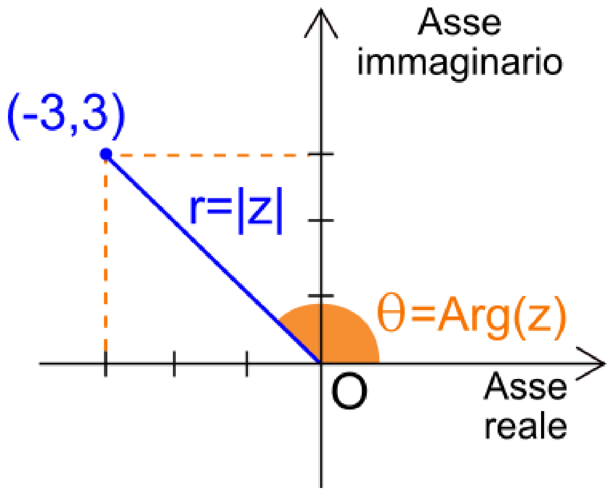
Valgono le seguenti proprietà:

1. $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$
2. $|Rez|, |Imz| \leq |z| \leq |Rez| + |Imz|, \forall z \in \mathbb{C}$
3. $|\bar{z}| = |z|, \forall z \in \mathbb{C}$
4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
5. $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}, \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0$
6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
7. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
8. Se $x \in \mathbb{R}$, allora $-x, x \leq |x|$
9. Se $x, a \in \mathbb{R}$, allora $|x| \leq a$ se e soltanto se $-a \leq x \leq a$

Piano complesso Possiamo rappresentare un numero complesso su un piano cartesiano (che in ambito complesso è detto piano di Argand-Gauss o piano complesso), dove il coefficiente della parte reale si piazza sull'asse delle ascisse e il coefficiente della parte immaginaria su quello delle ordinate, dando luogo a un punto.

Dal punto di vista geometrico, il modulo, solitamente indicato con ρ è la distanza tra il punto rappresentato da z e l'origine, mentre il coniugato è il simmetrico del punto rispetto all'asse delle ascisse.

Argomento Un altro valore importante da conoscere riguardo un numero complesso è il suo argomento, indicato con θ, che non è altro che l'angolo che genera il numero complesso nel piano, come vediamo dalla rappresentazione del numero $z = -3 + 3i$:



Se si conoscono gli angoli, basta guardare il disegno, i valori a, b e ρ per farsi un'idea di quanto misuri θ, considerando anche che $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$ e $\sin\theta = \frac{b}{\rho}$

Forma esponenziale e trigonometrica Grazie all'argomento e al modulo possiamo scrivere un numero complesso in forma esponenziale:

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Questa è utilissima ed è consigliato utilizzarla quando si devono compiere moltiplicazioni e divisioni tra numeri complessi. In alternativa, a volte è utile scrivere il numero complesso in forma trigonometrica:

$$z = \rho(cos\theta + i\sin\theta)$$

Radici e potenze di numeri complessi Rispettivamente per la forma esponenziale e per quella trigonometrica, valgono le formule:

- $$z^n = \rho^n e^{i\theta n}$$

- $$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

- $$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta 2k\pi}{n}\right)} \ \forall k \in \mathbb{Z} : 0 \leq k < n$$

- $$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \ \forall k \in \mathbb{Z} : 0 < k < n$$

2 Limiti di funzioni reali

Una funzione f(x)=y è definita come una terna di elementi: f,X,Y, i quali saranno rispettivamente chiamati "legge", "dominio" e "codominio" della funzione.

Il dominio non è altro che l'insieme dove la funzione è definita, il codominio è l'insieme dove essa può assumere valori (quasi sempre $\mathbb{R}$). È necessario specificare la differenza tra codominio e immagine, suo sottoinsieme. Quest'ultimo può essere utile da conoscere, in quanto è costituito dai punti effettivamente assunti dalla funzione. Graficamente è la proiezione della curva sull'asse delle ordinate. Per fare un esempio di quanto detto finora, osserviamo la funzione $f(x) = e^x$. Il dominio sarà $\mathbb{R}$, così come il codominio, ma l'immagine sarà la semiretta positiva. Se cambiassimo anche solo uno tra questi elementi, avremmo un'altra funzione.

Restrizione e prolungamento Le funzioni:

1. $f : [0, \pi] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x$

possiedono la stessa legge ma dominio diverso. Chiameremo la funzione 1 "restrizione" della funzione 2, e la funzione 2 "prolungamento" della funzione 1.

La formulazione matematica di queste definizioni è:
Dati $g(x) : G \to \mathbb{R} \quad f(x) : F \to \mathbb{R}$

- f è restrizione di g se: $F \subseteq G \ \wedge \ \forall x \in G \implies f(x) = g(x)$
- f è prolungamento di f se: $F \supseteq G \ \wedge \ \forall x \in G \implies f(x) = g(x)$

Tipi di intervalli Una funzione può essere definita in diversi tipi di intervalli:

- Limitati
  1. $[a, b]$, ovvero $a \leq x \leq b$
  2. $]a, b[$, ovvero $a < x < b$
  3. $[a, b[$, ovvero $a \leq x < b$
  4. $]a, b]$, ovvero $a < x \leq b$
- Non limitati
  1. $[a, +\infty[$, ovvero $x \geq a$
  2. $]a, +\infty[$, ovvero $x > a$
  3. $]-\infty, a]$, ovvero $x \leq a$
  4. $]-\infty, a[$, ovvero $x < a$
  5. $]-\infty, +\infty[$, ovvero $\mathbb{R}$ se la funzione è definita in $\mathbb{R}$

Spesso potremmo semplicemente riferirci a un intervallo limitato senza specificarne il tipo, quindi scriveremo (a, b).

Funzioni iniettive, suriettive e inverse Il concetto di iniettiva è molto importante, quello di suriettiva un po' meno.

Una funzione è **iniettiva** quando $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

Una funzione è suriettiva quando $\forall y \in Y$ (codominio) $\exists \ x \in X$ (dominio) $: y = f(x)$.

Come già detto nella sezione "prerequisiti", se una funzione è iniettiva allora possiamo invertirla: la funzione inversa si scriverà $f^{-1}(x)$, sarà definita nell'insieme immagine di $f(x)$ e avrà valori in X, il dominio.

Funzioni composte Le funzioni possono essere composte tra loro per creare altre funzioni, in questo caso l'immagine di una deve essere necessariamente contenuta nel dominio dell'altra.

In realtà, la maggior parte delle funzioni che studiamo sono composte, per esempio $\sin x^2$ è la composizione delle funzioni $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2$, e la indichiamo con "$f \circ g$".

Intorno di un punto e punto interno Un concetto fondamentale per comprendere i limiti è quello di "intorno".

Un intorno di x_0 è un insieme μ tale che, preso un $\delta > 0$ (detto raggio), si ha che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq \mu$. Chiameremo l'insieme $]x_0, x_0 + \delta[$ intorno destro e l'insieme $]x_0 - \delta, x_0[$ intorno sinistro di x_0.

Grazie a queste informazioni possiamo dare l'importante definizione di "punto interno":

$X \subseteq \mathbb{R} \quad x_0 \in X$
x_0 Sarà chiamato "punto interno" di X se $\exists\ \delta :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq X$, ovvero se x_0 possiede un intorno compreso nell'insieme.

Insieme interno e insieme aperto L'insieme dei punti interni di X si chiama "interno" di X, e si indica con $\mathring{X}$. Quando X coincide con il suo interno, allora X è detto "insieme aperto". Diremo invece che un insieme è "chiuso" quando il suo complementare è aperto.

Per capire se un insieme non limitato è aperto, bisogna osservare se comprende la parte limitata o no, per esempio:

$]a, \infty[$ è aperto
$[a, \infty[$ è chiuso (in quanto il suo complementare, $]-\infty, a[$, è aperto)
$[a, b[$ non è né aperto, né chiuso.

Esercizio In base a quanto detto, un insieme costituito da un solo punto, ovvero $X = \{x_0\}$ è aperto, chiuso o nessuno dei due?

Soluzione Dato che il suo complementare, $]-\infty, x_0[\cup]x_0, \infty[$, è aperto, l'insieme sarà chiuso.

Gli unici due insiemi sia aperti che chiusi sono $\mathbb{R}$ e $\emptyset$.

Punti di accumulazione x_0 È punto d'accumulazione per $X \subseteq \mathbb{R}$ se in ogni suo intorno cadono punti (se ne cade uno, ne cadono infiniti) di X diversi da x_0. Possiamo scrivere:

$\forall \sigma > 0 \quad \exists\ x_\sigma \in X, \quad x_\sigma \neq x_0 : \quad x_\sigma \in]x_0 - \sigma, x_0 + \sigma[$

Una volta detto ciò, facilmente si può immaginare la definizione di un punto x_0 d'accumulazione dalla destra, ovvero:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$.

Insieme derivato Indichiamo con DX^+ l'insieme di tutti i punti di accumulazione destri, con DX^- l'insieme dei punti di accumulazione sinistri e con DX l'insieme dei punti di accumulazione, che sarà chiamato "insieme derivato".

Un insieme finito, ovvero con un numero finito di elementi, non avrà punti di accumulazione. Per quanto riguarda gli insiemi infiniti, non è detto che abbiano punti di accumulazione, basti guardare $\mathbb{N}$.

Oltre a quello che abbiamo già visto, esiste anche un altro modo per stabilire se un insieme è chiuso, ovvero il seguente teorema:

Teorema $X \subseteq \mathbb{R}, X$ è chiuso $\iff DX \subseteq X$.

Dimostriamo prima l'implicazione verso destra, ovvero:
Ipotesi= X è chiuso
Tesi= $DX \subseteq X$

Nel caso in cui $DX = \emptyset$, e l'implicazione è automaticamente dimostrata, in quanto ogni insieme contiene $\emptyset$.
Nel caso in cui $DX \neq \emptyset$, allora vuol dire che $\exists\ \bar{x} \in DX$, e dobbiamo dimostrare che $\bar{x} \in X$.

Procediamo per assurdo: neghiamo quest'ultima affermazione, si avrà dunque che $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus X$, il quale, essendo il complementare di un insieme chiuso, è aperto. Avremo dunque che $\bar{x}$ è un punto interno di quest'insieme, ovvero

$[\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta] \cap X = \emptyset$. Avremo dunque l'esistenza di quest'intorno di $\bar{x}$ dove non cadranno punti di X, quindi $\bar{x}$ non sarà un punto di accumulazione di X, il che va contro l'ipotesi scritta poco fa, ovvero che $\exists\ \bar{x} \in DX$.

Ora dimostriamo l'implicazione verso sinistra, ovvero:
Ipotesi: $DX \subseteq X$
Tesi: X è chiuso, che equivale a dire che $\mathbb{R} \setminus X$ è aperto, che è ciò che dimostreremo.

Prendiamo $\tilde{x} \notin X$, quindi $\tilde{x} \notin DX$. Il fatto che non è un punto di accumulazione per X significa che avrà un intorno non contenuto in X, che sarà quindi contenuto in $\mathbb{R} \setminus X$. Questo significa che $\tilde{x}$ è un punto interno di $\mathbb{R} \setminus X$, quindi $\mathbb{R} \setminus X$ è aperto.

Insieme chiusura La chiusura $\bar{X}$ di un insieme è definita come l'unione tra l'insieme e i suoi punti d'accumulazione, ovvero:
$X \subseteq \mathbb{R} \quad \bar{X} = X \cup DX$

In base a quanto detto finora, dato $X \subseteq \mathbb{R}$, il suo insieme interno $\mathring{X}$ è l'insieme aperto più grande in X, mentre l'insieme chiusura $\bar{X}$ sarà il più piccolo insieme chiuso contenente X.
$\mathring{X} \subseteq X \subseteq \bar{X}$

Punti di frontiera Preso un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$, x_0 sarà un suo punto di frontiera se in ogni suo intorno cadono punti sia in X, che in $\mathbb{R} \setminus X$. Scriviamo dunque che:
$\forall \sigma > 0 \quad]x_0 - \sigma, x_0 + \sigma[\ \cap\ X \neq \emptyset$ e
$]x_0 - \sigma, x_0 + \sigma[\ \cap\ \mathbb{R} \setminus X \neq \emptyset$

L'insieme frontiera è quell'insieme che contiene tutti i punti di frontiera di un insieme, si indica mettendo un delta prima del nome dell'insieme, per esempio δX

Dato un qualsiasi insieme $X \subseteq \mathbb{R}$, la sua chiusura coincide con l'unione tra X e l'insieme frontiera. Possiamo scrivere:
$X \subseteq \mathbb{R} \quad \bar{X} = X \cup \delta X$

Facciamo ora un ragionamento. Per un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ Sappiamo che:

se X è finito $\implies DX = \emptyset$
se $DX \neq \emptyset \implies X$ è infinito

siamo allora indotti a pensare che se X è infinito, allora $DX \neq \emptyset$, ma è necessaria un'altra condizione, ovvero l'insieme deve essere anche limitato. Lo vediamo nel teorema:

Teorema di Bolzano-Weierstrass pg. 72

Ipotesi: $X \subseteq \mathbb{R}$ X infinito e limitato
Tesi: $DX \neq \emptyset$

Dimostrazione: $X \subseteq [a, b]$, usiamo il metodo di bisezione. Dividiamo $[a, b]$ a metà, scegliamo l'intervallo che ha infiniti punti di X e chiamiamo i suoi estremi a_1, b_1. Ripetiamo questo passaggio n volte, ottenendo una famiglia di intervalli $[a_n, b_n]$ con le seguenti proprietà:

1. $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$
2. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
3. Ogni intervallo contiene infiniti punti di X
4. $a_1 \leq ...a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_1$

Avremo $A = \{a_n\}$, contenente tutti gli a e $B = \{b_n\}$, contenente tutti i b.

Sappiamo che $a_n \leq \sup A \leq \inf B \leq b_n$, quindi non è sbagliato dire che
$0 \leq \inf B - \sup A \leq b_n - a_n$. Per Archimede moltiplicativo, $2^n > \frac{b-a}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$, ovvero $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \implies b_n - a_n = 0 \implies \inf B = \sup A = c$.

Dimostriamo che $\forall \sigma > 0]c - \sigma, c + \sigma[$ contiene infiniti punti di X, per farlo proviamo che $\exists\ n \in \mathbb{N} : [a_n, b_n] \subseteq]c - \sigma, c + \sigma[$.

Per Archimede moltiplicativo, $2^n > \frac{b-a}{\sigma} \quad \forall \sigma > 0$, quindi:
$\frac{b-a}{2^n} < \sigma$, tesi dimostrata.

Parte positiva e negativa di una funzione

Dati $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$

Chiameremo "parte positiva" di f la funzione definita dalla legge:

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$$

ogni punto di questa funzione è il massimo tra f e 0

Chiameremo "parte negativa" di f la funzione definita dalla legge:

$$f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

ogni punto di questa funzione è il massimo tra $-f$ e 0, per cui la parte negativa è in realtà una funzione con valori maggiori o uguali a 0, nonostante il nome.

È chiaro che il dominio di queste due funzioni è lo stesso di quello di f. Questi concetti saranno fondamentali quando faremo integrazione.

2.1 Limiti

Definizione di limite convergente o divergente

Dati $X \subseteq R \quad f : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in DX \quad l \in \mathbb{R}$

Al tendere di x a x_0, abbiamo 3 possibilità di limite:

1. $$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

   se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 : \forall x \in X \ \ x \neq x_0 \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

2. $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

   se $\forall k > 0 \ \exists \ \delta > 0 : \forall x \in X \ \ x \neq x_0 \ |x - x_0| < \delta \implies f(x) > k$

3. $$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

   se $\forall k > 0 \ \exists \ \delta > 0 : \forall x \in X \ \ x \neq x_0 \ |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -k$

In questi 3 casi, f sarà detta "regolare" ovvero ammette limite. Le funzioni dove il limite non esiste sono dette non regolari o indeterminate.

La funzione di Heaviside, detta "gradino", definita dalla legge:
$f(x) = 1$ se $x \geq 0$
$f(x) = 0$ se $x < 0$
è un esempio di funzione regolare in ogni punto tranne in 0. La funzione $f(x) = \sin x$ non è regolare, il limite varia sempre, per cui non esiste.

Limite per $x \to \infty$ Possiamo definire l'operazione di limite anche quando x tende a infinito, nel seguente modo:

1. $$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

   se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ \delta_\varepsilon > 0 : \forall x > \delta_\varepsilon \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

2.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

se $\forall k > 0 \quad \exists\ \delta_k > 0 : \forall x > \delta_k \implies f(x) > k$

Teorema di unicità del limite Ipotesi:

$$X \subseteq \mathbb{R} \quad f : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in DX \quad l \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

Tesi: l è unico

Dimostrazione: supponiamo per assurdo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = m$$

con $l > m$. Questo vuol dire che:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \sigma > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ 0 < |x - x_0| < \sigma \implies l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$
e

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon$

Scegliamo $\varepsilon = \frac{l-m}{2}$, avremo che:
$f(x) < m + \frac{l-m}{2} = \frac{l+m}{2}$ e
$f(x) > l - \frac{l-m}{2} = \frac{l+m}{2}$, ovvero:
$f(x) < \frac{l+m}{2} < f(x)$, che è assurdo.

Funzione localmente limitata in un punto Dati:

$$X \subseteq \mathbb{R} \quad f : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in DX \quad h, k \in \mathbb{R} \quad h < k$$

f si dirà localmente limitata in x_0 se:
$\exists\ \sigma > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ |x - x_0| < \sigma \implies h < f(x) < k$

Massimo relativo di una funzione Dati:
$f :]a, b[\to \mathbb{R} \quad x_0 \in]a, b[$
diremo che x_0 è un punto di massimo relativo per f se:
$\exists\ \delta > 0 : \forall x_\delta \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\implies f(x_0) \geq f(x_\delta)$

Teorema di locale limitatezza Ipotesi:

$$X \subseteq \mathbb{R} \quad f : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in DX \quad l, h, k \in \mathbb{R} \quad h < l < k \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Tesi: $\exists\ \sigma > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ |x - x_0| < \sigma \implies h < f(x) < k$

Dimostrazione: per la definizione di limite:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ |x - x_0| < \delta \implies l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

scegliendo $\varepsilon = k - l$, avremo:
$\exists\ \delta_1 > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ |x - x_0| < \delta_1 \implies f(x) < l + k - l$, ovvero $f(x) < k$
scegliendo $\varepsilon = l - h$, avremo:
$\exists\ \delta_2 > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ |x - x_0| < \delta_2 \implies l - l + h < f(x)$, ovvero $f(x) > h$

Prendiamo $\sigma = \min(\delta_1, \delta_2)$ in modo da unire le due condizioni:
$\forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ 0 < |x - x_0| < \sigma \implies h < f(x) < k$

Teorema della permanenza del segno Ipotesi:

$$X \subseteq \mathbb{R} \quad f : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in DX \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad l \neq 0$$

Tesi:

1. se $l > 0 \implies \exists\ \delta > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ |x - x_0| < \delta \implies f(x) > 0$
2. se $l < 0 \implies \exists\ \delta > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ |x - x_0| < \delta \implies f(x) < 0$

Dimostrazione: per il teorema di locale limitatezza (2.1):
$\forall h, k \in \mathbb{R} : h < l < k \implies \exists\ \delta > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ |x - x_0| < \delta \implies h < f(x) < k$
se $l > 0$ scegliamo $h = 0 \implies f(x) > 0$
se $l < 0$ scegliamo $k = 0 \implies f(x) < 0$

$f(x)$ **Converge a** $l \implies |f(x)|$ **converge a** $|l|$ Ipotesi:

$$X \subseteq \mathbb{R} \quad f: X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in DX \quad l \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Tesi:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$$

Dimostrazione: per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 : \forall x \in X \ \ x \neq x_0 \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$, e dobbiamo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 : \forall x \in X \ \ x \neq x_0 \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies ||f(x)| - |l|| < \varepsilon$.

Sappiamo per la disuguaglianza triangolare che $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \varepsilon$, tesi dimostrata.

Il limite della somma è la somma dei limiti :
Ipotesi: $X \subseteq \mathbb{R} \quad f, g : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in DX$
Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = m$$

Tesi:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l + m$$

Dimostrazione: scriviamo le definizioni dei nostri due limiti:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_1 > 0 : \forall x \in X \ \ x \neq x_0 \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \implies l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_2 > 0 : \forall x \in X \ \ x \neq x_0 \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies m - \varepsilon < g(x) < m + \varepsilon$

Sommiamo le due condizioni e scegliamo $\sigma = \min(\delta_1, \delta_2)$ in modo che concordino, avremo:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \sigma > 0 : \forall x \in X \ \ x \neq x_0 \ \ 0 < |x - x_0| < \sigma \implies l + m - 2\varepsilon < f(x) + g(x) < l + m + 2\varepsilon$, tesi dimostrata.

Teorema del confronto 0 Ipotesi:
$X \subseteq \mathbb{R} \quad f, g : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in DX$
Supponiamo che:

1.

$$\exists\ \sigma > 0 : \forall x \in X \quad x \neq x_0 \quad 0 < |x - x_0| < \sigma \implies f(x) \leq g(x)$$

2.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = m$$

Tesi: $l \leq m$

Dimostrazione: sappiamo che $\exists\ \sigma > 0 : \forall x \in X \quad x \neq x_0 \quad 0 < |x - x_0| < \sigma \implies g(x) - f(x) \geq 0$, quindi per il teorema 2.1, $m - l \geq 0$, quindi $m \geq l$, tesi confermata

Teorema del confronto di limiti 1 Ipotesi:
$X \subseteq \mathbb{R} \quad f, g : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in DX$. Supponiamo che:

1.

$$\exists\ \sigma > 0 : \forall x \in X \quad x \neq x_0 \quad |x - x_0| < \sigma \implies f(x) \leq g(x)$$

2.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Tesi:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

Dimostrazione: per ipotesi:
$\forall k > 0\ \exists\ \delta_1 > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ |x - x_0| < \delta_1 \implies f(x) > k$
$\exists\ \sigma > 0 : \forall x \in X \quad x \neq x_0 \quad |x - x_0| < \sigma \implies f(x) \leq g(x)$

Poniamo $\theta = \min(\sigma, \delta_1)$, in modo che valgano entrambe le condizioni. Avremo:

$\forall k > 0\ \exists\ \theta > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ |x - x_0| < \theta \implies g(x) \geq f(x) > k$
che indica che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

c.v.d.

Teorema del confronto di limiti 2 Ipotesi:
$X \subseteq \mathbb{R} \quad f, g : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in DX$. Supponiamo che:

1. $$\exists\ \sigma > 0 : \forall x \in X \quad x \neq x_0 \quad 0 < |x - x_0| < \sigma \implies f(x) \leq g(x)$$

2. $$\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$$

Tesi:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Dimostrazione: per ipotesi:
$\forall k > 0\ \exists\ \delta_1 > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \implies g(x) < -k$
$\exists\ \sigma > 0 : \forall x \in X \quad x \neq x_0 \quad 0 < |x - x_0| < \sigma \implies f(x) \leq g(x)$

Poniamo $\theta = \min(\sigma, \delta_1)$, in modo che valgano entrambe le condizioni.
Avremo:
$\forall k > 0\ \exists\ \theta > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ 0 < |x - x_0| < \theta \implies f(x) \leq g(x) < -k$
c.v.d.

Teorema del confronto di limiti 3 (o dei carabinieri) Ipotesi:
$X \subseteq \mathbb{R} \quad h, f, g : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in DX$
Supponiamo che:

1. $$\exists\ \sigma > 0 : \forall x \in X \quad x \neq x_0 \quad 0 < |x - x_0| < \sigma \implies h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

2. $$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

Tesi:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Dimostrazione: per ipotesi:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_1 > 0 : \forall x \in X \quad x \neq x_0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \implies l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_2 > 0 : \forall x \in X \quad x \neq x_0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$
$\exists \ \sigma > 0 : \forall x \in X \ x \neq x_0 \ 0 < |x - x_0 < \sigma \implies h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

Poniamo $\theta = \min(\sigma, \delta_1, \delta_2)$ in modo che valgano tutte e 3 le disequazioni, avremo
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \theta > 0 : \forall x \in X \ x \neq x_0 \ |x - x_0| < \theta \implies l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$, c.v.d.

Teorema del limite della funzione composta P.94 libro
Ipotesi: $X, Y \subseteq \mathbb{R} \quad f : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in DX \ \ g : Y \to \mathbb{R} \quad y_0 \in DY \ \ f(X) \subseteq Y$
Supponiamo inoltre che:

1. $$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

2. $$\lim_{y \to y_0} g(x) = l$$

3. $$\exists \ \rho > 0 : \forall x \in X \quad x \neq x_0 \quad |x - x_0| < \rho \implies f(x) \neq y_0$$

Tesi:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$$

Dimostrazione: sappiamo che
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ \delta_1 > 0 : \forall y \in Y \quad y \neq y_0 \quad |y - y_0| < \delta_1 \implies |g(y) - l| < \varepsilon$
ricordiamo che
$\forall \sigma > 0 \quad \exists \ \delta_2 > 0 : \forall x \in X \quad x \neq x_0 \quad |x - x_0| < \delta_2 \implies |f(x) - y_0| < \sigma$

Poniamo $\sigma = \delta_1$, in modo che le condizioni che valgono per y valgano anche per $f(x)$:
$\forall x \in X \quad x \neq x_0 \quad |x - x_0| < \delta_2 \implies |f(x) - y_0| < \sigma$

poniamo $\delta = \min(\rho, \delta_2)$, in modo che valga anche l'ipotesi 3, avremo:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 : \forall x \in X \ \ x \neq x_0 \ |x - x_0| < \delta \implies |g(f(x)) - l| < \varepsilon$, tesi dimostrata.

Teorema di cambio variabile Ipotesi:
$X, Y \subseteq \mathbb{R} \ \ f : X \to \mathbb{R} \ \ \varphi : Y \to \mathbb{R}$ iniettiva, $x_0 \in Dx \ \ y_0 \in DY \ \ l \in \mathbb{R}$
Supponiamo che :

1. $$\varphi(X) = Y$$

2. $$\lim_{y \to y_0} \varphi(x) = x_0 \quad \lim_{x \to x_0} \varphi^{-1}(x) = y_0$$

Tesi:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \exists \lim_{y \to y_0} f(x(\varphi))$$

e in tal caso sono uguali.

Dimostrazione: entrambe le implicazioni si dimostrano mediante il teorema di limite di funzione composta 2.1.

Regolarità di funzione monotona crescente Ogni funzione monotona è regolare. Esiste anche la versione di questo teorema con funzione decrescente, basta invertire sup e inf.
Ipotesi: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ crescente,$x_0 \in (a, b)$
Tesi:

1. $$a < x_0 \leq b \implies \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{]a, x_0[} f$$

2.

$$a \leq x_0 < b \implies \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{]x_0, b[} f$$

Dimostriamo solo la tesi 1, la 2 è analoga.

Ipotizziamo che

$$\sup_{]a, x_0[} = L$$

dobbiamo dimostrare che:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

ovvero che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 : x_0 - \delta < x < x_0 \implies L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

Per le 2 proprietà del sup:

1. $\forall x \in]a, x_0[\implies f(x) \leq L < L + \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \bar{x} \in]a, x_0[: L - \varepsilon < f(\bar{x})$

Dato che la funzione è monotona crescente, possiamo prendere $x \in]a, x_0[$: $f(x) \geq f(\bar{x})$. Mettendo insieme queste condizioni avremo:
$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, metà tesi dimostrata.

Vediamo ora il caso in cui

$$\sup_{]a, x_0[} f = +\infty$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

ovvero che $\forall k > 0 \ \exists \ \delta > 0 : x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) > k$.

Per ipotesi la funzione non è limitata superiormente, ovvero:
$\forall k > 0 \exists \ \bar{x} \in]a, x_0[: f(\bar{x}) > k$. Dato che la funzione è monotona crescente, possiamo prendere un $x \in]a, x_0[: f(x) \geq f(\bar{x})$, quindi:
$k < f(\bar{x}) \leq f(x)$, tesi dimostrata.

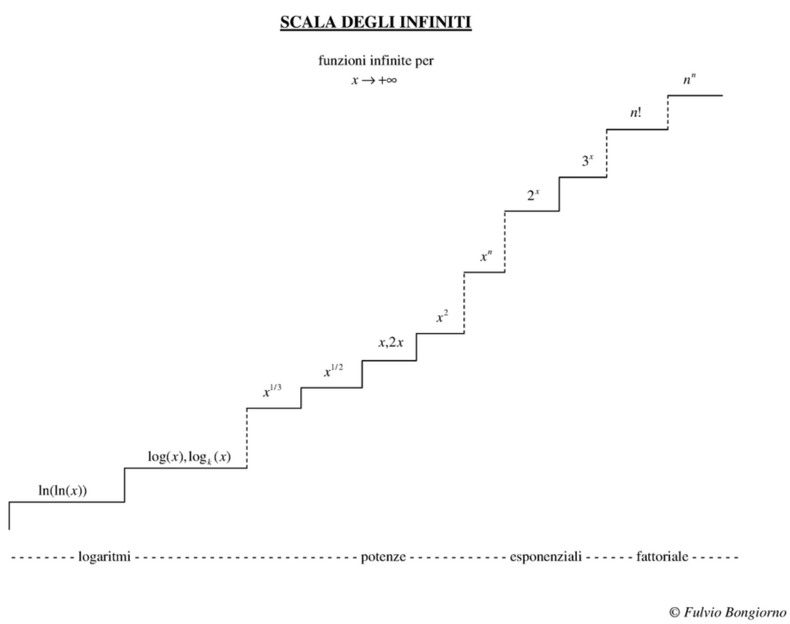
Infinitesimo e infinito Dati:
$X \subseteq \mathbb{R} \quad x_0 \in X \quad f : X \to \mathbb{R}$
Diremo che f è una funzione "infinitesima", o un infinitesimo al tendere di x a x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Diremo che f è una funzione "infinita", o un infinito al tendere di x a x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Due infinitesimi o infiniti possono essere di ordine uguale o diverso, in base alla seguente scala:



Ordini di infinitesimi Dati:

$$X \subseteq \mathbb{R} \quad f, \sigma, g : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in DX \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$\exists\ \rho > 0 : \forall x \in X |x - x_0| < \rho \implies f(x) = \sigma(x) \cdot g(x)$$

Se:

1.

$$\lim_{x \to x_0} \sigma(x) = l \neq 0$$

allora f e g sono infinitesimi dello stesso ordine. In particolare, se $l = 1$, f, g sono asintotici.

2.

$$\lim_{x \to x_0} \sigma(x) = 0$$

allora f è infinitesimo di ordine superiore di g

3.

$$\lim_{x \to x_0} |\sigma(x)| = +\infty$$

allora f è infinitesimo di ordine inferiore di g

Quando un infinito è di ordine superiore a un altro significa che, confrontandoli, quello di ordine superiore arriva prima a $\pm\infty$, decidendo il risultato. Per esempio, nel limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x}$$

il risultato è $+\infty$, dato che l'infinito al numeratore è di ordine superiore a quello del denominatore. Se fosse successo il contrario, il risultato sarebbe stato $\frac{1}{\infty}$, ovvero 0.

O piccolo Dati:

$$X \subseteq \mathbb{R} \quad x_0 \in DX \quad f, g : X \to \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$\exists\ \theta > 0 : \forall x \in X |x - x_0| < \theta \implies g(x) \neq 0$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

scriveremo $f = \mathrm{o}(g)$, che si legge "f è un o piccolo di g". L'o piccolo è un simbolo di Landau

Principio di sostituzione di infinitesimi Gli infinitesimi che determinano il limite sono quelli di ordine inferiore.
Dati $X \subseteq \mathbb{R} \quad x_0 \in DX \quad f, f_1, g, g_1 : X \to \mathbb{R}$ infinitesimi, con f di ordine superiore a f_1 e g di ordine superiore a g_1
Tesi:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f_1(x)}{g(x) - g_1(x)} \iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

e, in tal caso, i limiti sono uguali.

Dimostrazione: Dati σ_1, σ_2 infinitesimi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1 \cdot \sigma_1 + f_1}{g_1 \cdot \sigma_2 + g_1} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(\sigma_1 + 1)}{g_1(\sigma_2 + 1)}$$

Dato che il rapporto

$$\frac{\sigma_1 + 1}{\sigma_2 + 1}$$

tende a 1, il limite che rimane è:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Principio di sostituzione di infiniti Gli infiniti che determinano il limite sono quelli di ordine superiore.
Dati:$X \subseteq \mathbb{R} \quad x_0 \in DX \quad f, f_1, g, g_1 : X \to \mathbb{R}$ infiniti, con f di ordine superiore a f_1 e g di ordine superiore a g_1
Tesi:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f_1(x)}{g(x) - g_1(x)} \iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e, in tal caso, i limiti sono uguali.

Asintoti Dati:
$X \subseteq \mathbb{R} \quad x_0 \in DX^+ \quad f : X \to \mathbb{R}$
Se:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

Chiameremo la retta $x = x_0$ "asintoto verticale destro"

Dati:
$X \subseteq \mathbb{R} \quad f : (a, +\infty[\to \mathbb{R}$
Se:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$$

Chiameremo la retta $y = y_0$ "asintoto orizzontale destro"

Dati:
$X \subseteq \mathbb{R} \quad f : (a, +\infty[\to \mathbb{R}$
Se:

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

   con $m \neq 0$

2. $$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q$$

Chiameremo la retta $y = mx + q$ "asintoto obliquo destro"

2.2 Limiti Notevoli

Si ringrazia il mitico Ariosto per questa tabella

Limiti per $x \to 0$ di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \alpha \neq 0 \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1 \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0 \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \tag{6}$$

Funzioni logaritmiche:

$$\lim_{x\to 0^+} x^b \log x = 0 \quad \forall b > 0 \tag{7}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \tag{8}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} \tag{9}$$

Funzioni trigonometriche:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{10}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{11}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \tag{12}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \tag{13}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \tag{14}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \tag{15}$$

Limiti per $x \to \infty$ di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{16}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty \quad \forall a > 1, b > 0 \tag{17}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x |x|^b = 0 \quad \forall a > 1, b > 0 \tag{18}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1 \tag{19}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^b} = \infty \tag{20}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0 \quad \forall b > 0 \tag{21}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{e^x} = 0 \tag{22}$$

Forme indeterminate:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad (\pm\infty)^0, \quad +\infty-\infty.$$

Confronto di infiniti e infinitesimi:

Se

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$$

Allora:

$$\log_a n \leq n^b \leq c^n \leq n! \leq n^n \quad con \;\; a, b, c > 1$$

Se

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

Allora:

$$\frac{1}{\log_a n} \geq \frac{1}{n^b} \geq \frac{1}{c^n} \geq \frac{1}{n!} \geq \frac{1}{n^n} \quad con \;\; a, b, c > 1$$

Inoltre:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^k - 1\right] = k \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{\lambda}{x}\right)^x = e^\lambda$$

2.3 Sviluppi in serie di Taylor-Mc Laurin

Sono validi quando x tende a 0, si ottengono con la formula:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}(x)^k + o(x^n)$$

1.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$$

2.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

3.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

4.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

5.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

6.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

7.

$$\sqrt[3]{1+x} = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3)$$

8.
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

9.
$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^6)$$

10.
$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^7)$$

11.
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 + o(x^7)$$

12.
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$$

3 Successioni numeriche

Definizione di successione Una successione numerica è una funzione definita in $\mathbb{N}$ o in un suo sottoinsieme non limitato superiormente.

Possiamo indicare una successione con $\{a_n\}$, o semplicemente a_n. L'unico limite che possiamo fare di una successione è per $n \to \infty$, in quanto $\mathbb{N}$ non possiede punti di accumulazione.

Limiti di successioni I tre casi di limite di una successione sono:

1. Limite= $l \in \mathbb{R}$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \implies |a_n - l| < \varepsilon$
2. Limite=$+\infty$ $\quad \forall k > 0 \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \implies a_n > k$
3. Limite=$-\infty$ $\quad \forall k > 0 \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \implies a_n < -k$

Per le funzioni avevamo usato l'avverbio "localmente" per riferirci a quantità prossime a x_0. Nelle successioni usiamo invece l'avverbio "definitivamente" quando una successione acquista una certa proprietà da un n_0 in poi. Per esempio la successione $a_n = 2n - 3$ è definitivamente positiva, in quanto da $n = 2$ in poi, la successione avrà sempre valore maggiore di 0

Successioni limitate :
a_n si dice limitata superiormente se $\exists\ M \in \mathbb{R} : M \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
a_n si dice limitata inferiormente se $\exists\ m \in \mathbb{R} : m \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
a_n si dice limitata se è limitata sia superiormente che inferiormente, quindi $\exists\ M, m \in \mathbb{R} : m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Possiamo anche scrivere $|a_n| \leq M$.

Teorema successione convergente $\Longrightarrow$ limitata Ipotesi:

$$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = l$$

Tesi: $\exists\ M \in \mathbb{R} : |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione: sappiamo che $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \implies |a_n - l| < \varepsilon$.
$|a_n| = |a_n + l - l| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$, quindi a_n è limitata $\forall n > \nu$.

Per tutti gli altri casi poniamo $L = \max\{|a_1|, |a_2| ... |a_\nu|\}$. Avremo che $|a_i| \leq L$ per $i = (1, 2 ... \nu)$.

Concludiamo che $|a_n| \leq max(\varepsilon + |l|, L) = M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, c.v.d.

Teorema di passaggio tra successioni e funzioni :
Ipotesi:

$$X \subseteq \mathbb{R} \quad x_0 \in DX \quad f : X \to \mathbb{R}$$

Tesi:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall x_n \in X \quad x_n \neq x_0 \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$$

Dimostrazione implicazione verso destra: $f(x_n)$ è composizione di 2 funzioni:

1. $f : X \to \mathbb{R}$
2. $\varphi : N \to \mathbb{R}$

Sappiamo che $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq X$, quindi vale il teorema del limite di funzione composta (2.1), e la tesi è confermata.

Dimostriamo l'implicazione verso sinistra per assurdo:
$\exists\ \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \quad \exists\ x_\delta \in X \ |x_\delta - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| \geq \varepsilon$.
Scegliamo $\delta = \frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$, avremo:
$\exists\ x_n \in X \quad 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \implies |f(x_n) - l| \geq \varepsilon$.

Ma questo va contro la nostra ipotesi, perchè avremo una successione $x_n \in X \quad x_n \neq x_0$ con limite, quando n tende a infinito, tendente a x_0 (in quanto $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$), che tuttavia non converge a l.

3.1 Successioni estratte

A partire da una successione a_n, immaginiamo un'altra successione k_n, la cui immagine deve essere contenuta nel dominio di a_n.
La successione estratta, indicata con a_{k_n}, non sarà altro che la funzione composta tra le due successioni, ovvero $a(k(n))$

Per il teorema del limite della funzione composta (2.1), una successione ha limite se e solo se tutte le sue estratte hanno limite, e in tal caso sarà la stessa quantità.

3.2 Valori limite e classe limite

Valore limite $\quad l \in \bar{\mathbb{R}}$ Si definisce "valore limite" per a_n se esiste un'estratta che converge a l, ovvero $\exists\ a_{k_n} \to l$. È chiaro che questo concetto acquista valore solo quando a_n non ha limite, poiché in tal caso ci permette almeno di considerare il limite delle estratte.

Prendendo in esempio la successione $a_n = (-1)^n$, ci accorgiamo che non ha limite, ma i suoi valori limite sono 1 e -1.

Classe limite La classe limite della successione a_n, rappresentata dal simbolo $L(\{a_n\})$, è l'insieme costituito dai valori limite. Esempi:

$$L\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \{0\} \qquad L(\{(-1)^n\}) = \{1, -1\}$$

La classe limite ha 2 proprietà

1. Non è mai un insieme vuoto (non lo dimostreremo): la classe limite di successioni regolari ha un solo elemento, negli altri casi ne ha più di uno.
2. È un insieme chiuso in $\bar{\mathbb{R}}$

Da queste due considerazioni possiamo dedurre:

1. È un insieme limitato, in quanto è chiuso in $\bar{\mathbb{R}}$.
2. Dato che non è un insieme vuoto, ha diritto a inf e sup.
3. Dato che è un insieme chiuso, inf e sup sono rispettivamente minimo e massimo: appartengono all'insieme.

Da quest'ultimo punto possiamo dare altre definizioni:

Massimo e minimo limite Chiameremo:

$$\max \lim_{n\to\infty} = \max L(\{a_n\})$$

Ovvero il più grande dei limiti delle estratte di a_n

$$\min \lim_{n\to\infty} = \min L(\{a_n\})$$

ovvero il più piccolo dei limiti delle estratte di a_n

Lemma di compattezza :
Ipotesi: a_n limitata
Tesi:

$$\exists\ a_{k_n} : \lim_{n\to\infty} a_{k_n} = l \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione: dato che a_n è limitata,

$$\max \lim_{n\to\infty} a_n < \infty \qquad \min \lim_{n\to\infty} a_n > -\infty$$

ovvero:

$$\max \lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$$

tesi dimostrata.

Successione di Cauchy Una successione è chiamata "di Cauchy" quando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m > \nu \implies \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Successione convergente $\iff$ di Cauchy Teorema molto importante. Dimostriamo la prima parte:

Ipotesi: $a_n \to l$
Tesi: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m > \nu \implies \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$

Dimostrazione verso destra: riscriviamo l'ipotesi mediante la definizione di limite:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \nu \in \mathbb{N} : \forall n > 0 \quad |a_n - l| < \varepsilon.$

Prendiamo dall'ipotesi $n, m > \nu$ e vediamo che succede a $|a_n - a_m|$. Riscriviamolo aggiungendo e sottraendo una stessa quantità:
$|a_n - l + l - a_m|$.
Per la disuguaglianza triangolare abbiamo che:
$|a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m|$.
Sappiamo per ipotesi che questi ultimi 2 moduli sono minori di ε, quindi sappiamo che $|a_n - l + l - a_m| < \varepsilon$, togliendo il limite che abbiamo aggiunto, ci accorgiamo che $|a_n - a_m| < \varepsilon$, ovvero la serie è di Cauchy.

Dimostrazione verso sinistra: Questa operazione va fatta in 2 passaggi:

1. a_n è di Cauchy $\implies$ a_n è limitata.
   Ipotesi: $\varepsilon = 1, \quad \exists\ \nu \in \mathbb{N} : \ n, m > \nu \implies \quad |a_n - a_m| < 1$. Scegliamo che $m = \nu + 1$, possiamo farlo in quanto $\nu + 1$ è certamente maggiore di ν.
   Riscriviamo a_n come $|a_n - a_{\nu+1} + a_{\nu+1}|$. Sappiamo, per la disequazione triangolare, che:
   $|a_n - a_{\nu+1} + a_{\nu+1}| \leq |a_n - a_{\nu+1}| + |a_{\nu+1}|$.
   Questo vuol dire che sicuramente $|a_n| < 1 + |a_{\nu+1}|$, la successione a_n è dunque limitata per tutti i valori di $n > \nu$.

   Naturalmente lo è anche per i valori inferiori a ν. Prendendo infatti il numero $L = \max(|a_1|, |a_2|, ...|a_\nu|)$, vedremo che $a_i \leq L$, dove $i = 1, 2, ...\nu$.

2. Per il lemma di compattezza: a_n limitata $\implies$ $a_{k_n} \to l$.

Mettiamo insieme i 2 risultati per concludere il teorema.

$\varepsilon > 0$
$\exists\ \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m > \nu \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$
$\exists\ \bar{\nu} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{\nu} \implies |a_{k_n} - l| < \varepsilon$

Tesi: $a_n \to l$, ovvero $|a_n - l| < \varepsilon$.

Per dimostrarlo, usiamo lo stesso trucco di prima: aggiungiamo e sottraiamo una stessa quantità alla nostra successione e poi facciamo la disuguaglianza triangolare:
$|a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - l| \le |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - l|$.
Sappiamo, grazie alle nostre ipotesi, che questi ultimi 2 moduli sono inferiori di ε, per cui $|a_n - l| < \varepsilon$ e la tesi è dimostrata.

4 Calcolo differenziale

Il calcolo differenziale studia le variazioni infinitesimali di una funzione, una delle principali operazioni è la derivazione.

4.1 Funzioni continue

Definizione di funzione continua in un punto Dati:
$X \subseteq \mathbb{R} \quad f : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in X$
Diremo che f è continua in x_0 se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 : \forall x \in X \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

x_0 Può anche non essere un punto di accumulazione, quindi sarà un punto isolato: esisterà un suo intorno dove non cadranno altri punti di X. Questo significa che, nei punti isolati, tutte le funzioni sono continue.

Inoltre, quando x_0 è punto d'accumulazione, secondo la definizione di continuità che abbiamo dato, vengono rispettate le condizioni affinché $f(x)$ abbia limite, per cui:
$x_0 \in X \cap DX$, f sarà continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Continuità dalla destra o dalla sinistra Dati:
$X \subseteq \mathbb{R} \quad f : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in X$
Diremo che f è continua in x_0 dalla destra se:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 : \forall x \in X \ x_0 \le x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Nelle stesse condizioni, diremo che f è continua in x_0 dalla sinistra se:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 : \forall x \in X \ x_0 - \delta < x \le x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

In entrambi i casi, se x_0 è anche punto di accumulazione, allora esisteranno il limite destro e sinistro.

Teorema di continuità tramite successione :
Ipotesi: $X \subseteq \mathbb{R} \quad f : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in X \cap DX$
Tesi:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \forall x_n \in X \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Questo teorema non è altro che il teorema che abbiamo già visto del passaggio tra successioni e funzioni (3), si dimostra allo stesso modo.

Singolarità di una funzione Per singolarità di una funzione indichiamo un punto dove essa non è continua. Dati:
$X \subseteq \mathbb{R} \quad f : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in DX^+ \cap DX^-$
ciò che andremo a considerare sono i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

in diversi scenari:

1. Almeno uno dei due non esiste $\implies$ x_0 è chiamato "punto singolare" per f
2. Esistono entrambi, ma almeno uno dei due tende a $\pm\infty$ $\implies$ x_0 è chiamato "punto d'infinito"
3. Esistono e sono finiti, ma diversi $\implies$ x_0 è chiamato "punto di salto". L'ampiezza del salto è $f(x_0^+) - f(x_0^-)$, nella funzione di Heaviside è 1.
4. Esistono finiti e sono uguali, quindi esiste il limite. Distinguiamo tra 2 sotto-casi:

4.1 $x_0 \notin DX$, oppure

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

In questo caso x_0 è detto punto di singolarità fittizia o eliminabile, in quanto la singolarità si risolve definendo una funzione $g : X \to \mathbb{R}$ tale che:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

4.2

$$x_0 \in X \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

x_0 è detto punto di continuità.

Teorema di locale limitatezza di funzione continua Ipotesi: $X \subseteq \mathbb{R},\ f : X \to \mathbb{R},\ x_0 \in X \cap DX$. Supponiamo esista:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \text{ e inoltre } h, k \in \mathbb{R} : h < f(x_0) < k$$

Tesi: $\exists\ \sigma > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ |x - x_0| < \sigma \implies h < f(x) < k$

Si tratta del teorema di locale limitatezza già visto (2.1), si dimostra allo stesso modo.

Teorema della permanenza del segno funzione continua Ipotesi:

$$X \subseteq \mathbb{R} \quad f : X \to \mathbb{R} \quad x_0 \in X \cap DX \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad f(x_0) \neq 0$$

Tesi:

1. se $f(x_0) > 0 \implies \exists\ \delta > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > 0$
2. se $f(x_0) < 0 \implies \exists\ \delta > 0 : \forall x \in X\ \ x \neq x_0\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < 0$

Dimostrazione: anche questo si dimostra allo stesso modo di 2.1.

Teorema dell'esistenza degli zeri Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, supponiamo che $f(a) \cdot f(b) < 0$
Tesi: $\exists\ c \in [a, b] : f(c) = 0$

Dimostrazione: stabiliamo che $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Usiamo il metodo di bisezione: prendiamo il punto medio m dell'intervallo $[a, b]$. Se $f(m) = 0$, tesi dimostrata, altrimenti consideriamo, dei due intervalli ottenuti ($[a, m], [m, b]$) quello che ha estremi di segno discorde.

Chiamiamo questi estremi a_1, b_1. Possiamo dire che $a_1 < b_1$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ e che $f(a_1) > 0, f(b_1) < 0$. Prendiamo il punto medio m_1 di quest'intervallo, se non è 0 possiamo ripetere il processo.

Ripetuto il processo n volte, avremo:
$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_1$. Potremo affermare che $a_n < b_n$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ e che $f(a_n) > 0, f(b_n) < 0$

Le successioni a_n e b_n sono entrambe convergenti, in quanto rispettivamente crescente e limitata superiormente e decrescente e limitata inferiormente.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n - a_n + a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} + a_n = c$$

c è nel dominio, quindi f è continua in c per ipotesi, quindi possiamo applicare il teorema di continuità tramite successioni 4.1:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Dato che $f(a_n)$ è una successione di valori positivi, per il teorema di permanenza del segno (2.1) $f(c) \geq 0$
Dato che $f(b_n)$ è una successione di valori negativi, per il teorema di permanenza del segno $f(c) \leq 0$
Deduciamo che $f(c)$ è 0, tesi dimostrata.

4.2 Teorema di assunzione di valori intermedi

Ipotesi: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua. Sia:

$$\lambda \in]\inf_{(a,b)} f, \sup_{(a,b)} f[$$

Tesi: $\exists\ c \in (a, b) : f(c) = \lambda$

Dimostrazione quando inf e sup sono finiti: $\inf f = l, \sup f = L$. Sfruttiamo la seconda proprietà di inf e sup:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \bar{x} \in (a,b) : f(\bar{x}) < l + \varepsilon.$
Scegliamo $\varepsilon = \lambda - l \implies \exists\ \bar{x} \in (a,b) : f(\bar{x}) < \lambda$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \bar{\bar{x}} \in (a,b) : f(\bar{x}) > L - \varepsilon.$
Scegliamo $\varepsilon = L - \lambda \implies \exists\ \bar{\bar{x}} \in (a,b) : f(\bar{\bar{x}}) > \lambda$

Supponiamo $\bar{x} < \bar{\bar{x}}$ e prendiamo la funzione continua $g : (\bar{x}, \bar{\bar{x}}) \to \mathbb{R}$
$g(x) = f(x) - \lambda$. Avremo:
$g(\bar{x}) = f(\bar{x}) - \lambda < 0$
$g(\bar{\bar{x}}) = f(\bar{\bar{x}}) - \lambda > 0$

Per il teorema di esistenza degli zeri (4.1), $\exists\ c \in]\bar{x}, \bar{\bar{x}}[\subseteq (a,b) : g(c) = 0$, ovvero $f(c) - \lambda = 0$, quindi $f(c) = \lambda$, c.v.d.

Teorema di Weierstrass :
Ipotesi: $K \subseteq \mathbb{R}$ chiuso e limitato, $f : K \to \mathbb{R}$ continua
Tesi: la funzione ha massimo e minimo, ovvero:

1. $$\exists\ x_1 \in K : f(x_1) = \sup_K f$$

2. $$\exists\ x_2 \in K : f(x_2) = \inf_K f$$

Dimostriamo che esiste il massimo, la dimostrazione del minimo è analoga.

Nel caso in cui

$$\sup_K f = L$$

allora valgono le due proprietà del sup:

1. $\forall x \in K \quad f(x) \leq L$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ x_\varepsilon \in K : f(x_\varepsilon) > L - \varepsilon$

Fissiamo $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, in questo modo nasce una successione, ovvero:
$\exists\ x_n \in K : f(x_n) > L - \frac{1}{n}$. Unendo le due proprietà:

$L-\frac{1}{n} < f(x_n) \leq L$, per il Teorema del confronto di limiti 3 (o dei carabinieri) $f(x_n)$ converge a L.

Se, invece,

$$\sup_K f = +\infty$$

sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ x_\varepsilon \in K : f(x_\varepsilon) > \varepsilon$.
Poniamo $\varepsilon = n \in \mathbb{N} \implies \exists\ x_n \in K : f(x_n) > n$. Per il teorema del confronto, $f(x_n)$ tende a infinito.

Sappiamo che K è limitato, quindi x_n è limitata, quindi, per il lemma di compattezza (3.2), $\exists\ x_{k_n} \to \bar{x}$, che appartiene a K perchè K è chiuso e $\bar{x} \in DX$

Per ipotesi f è continua in $K \implies$ continua in $\bar{x}$. Usiamo quindi il teorema di continuità tramite successione (4.1):

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(\bar{x})$$

Dato che prima avevamo visto che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_K f$$

e ora abbiamo dimostrato che un'estratta di x_n converge a $f(\bar{x})$, allora

$$f(\bar{x}) = \sup_K f$$

Tesi dimostrata.

Una funzione continua ha per immagine un intervallo Conseguenza del teorema di assunzione valori intermedi e del teorema di Weierstrass.
Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua
Tesi: $f([a, b]) = [m, M]$, dove:

$$m = \min_{[a,b]} f \qquad M = \max_{[a,b]} f$$

Teorema di continuità della funzione inversa La funzione inversa di una funzione continua, iniettiva e definita in un intervallo è continua
Ipotesi: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ iniettiva e continua
Tesi: $f^{-1} : f((a, b)) \to (a, b)$ è continua

Funzione uniformemente continua Definizione:
Dati $X \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f : X \to \mathbb{R}$ continua in X
f è detta uniformemente continua in X se:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 : \forall x', x'' \in X \quad |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Teorema di Cantor :
Ipotesi (stesse del teorema di Weierstrass): $K \subseteq \mathbb{R}$ chiuso e limitato
$f : K \to \mathbb{R}$ continua
Tesi: f è uniformemente continua in K

Funzione lipschitziana :
Dati $X \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f : X \to \mathbb{R}$
f è detta "lipschitziana" in X se :
$\exists\ L > 0 : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in X$

Lipschitziana $\implies$ uniformemente continua :
Ipotesi: $X \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f : X \to \mathbb{R}$ lipschitziana
Tesi: f è uniformemente continua.

Dimostrazione: Per ipotesi $\exists\ L > 0 : \forall x, y \in X |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$
dobbiamo dimostrare che $\forall x, y \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Poniamo $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, avremo:
$\forall x, y \in X \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$
c.v.d.

4.3 Derivazione

Rapporto incrementale Dati:
$f :]a, b[\to \mathbb{R} \quad x_0 \in]a, b[\quad h \in \mathbb{R} : \quad 0 < |h| < \min(b - x_0, x_0 - a)$
Chiameremo "rapporto incrementale" il rapporto:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Funzione derivabile e definizione di derivata Dati:
$f :]a, b[\to \mathbb{R} \quad x_0 \in]a, b[\quad h \in \mathbb{R} : \quad 0 < |h| < \min(b - x_0, x_0 - a)$
Una funzione sarà derivabile in x_0 se esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Chiameremo "derivata" di f in x_0 il valore del limite.

Un altro modo per scrivere il limite del rapporto incrementale è attraverso un cambio variabile: se poniamo $x = x_0 + h$ possiamo scrivere:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Punto a tangente verticale Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$

x_0 è detto punto a tangente verticale. Dato che il limite del rapporto incrementale di f in questo punto non è finito, x_0 non ha derivata.

Funzione derivabile $\Longrightarrow$ continua Teorema importantissimo
Ipotesi: $f :]a, b[\to \mathbb{R} \quad x_0 \in]a, b[\quad f$ derivabile in x_0
Tesi: f è continua in x_0

Dimostrazione: dimostriamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Riscriviamo $f(x)$ come:

$$f(x) - f(x_0) + f(x_0) \quad = \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_o) + f(x_0)$$

Facendo il limite per $x \to x_0$, avremo: $f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)$ c.v.d.

Derivata destra e sinistra Siano:
$f :]a, b[\to \mathbb{R} \quad x_0 \in]a, b[$
Se esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

diremo che f è derivabile dalla destra in x_0. Se invece il limite è per 0^-, parliamo di derivata sinistra.

Ora è possibile parlare di derivata anche in una funzione definita in un intervallo chiuso $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. La funzione sarà derivabile in a se esiste la derivata destra di a, sarà derivabile in b se esiste la derivata sinistra in b.

Punto angoloso e cuspide Siano:
$f :]a, b[\to \mathbb{R} \quad x_0 \in]a, b[\quad f$ continua in x_0.
Se i seguenti limiti:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Esistono finiti ma sono diversi, oppure esistono e uno di loro è $\pm\infty$, allora il punto $(x_0, f(x_0))$ si dirà "punto angoloso".

Se invece sono entrambi infiniti, ma di segno opposto, allora il punto $(x_0, f(x_0))$ si dirà "cuspide".

Derivate successive alla prima Dati:
$f :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivabile in $]a, b[$, ovvero $\exists \ f' :]a, b[\to \mathbb{R}$
Se esiste finito:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = f''(x_0)$$

diremo che f è derivabile due volte in x_0. È possibile ripetere questa operazione quante volte si vuole.

Derivate fondamentali

1. $f(x) = k$ $\qquad f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n \ n \in \mathbb{N}$ $\qquad f'(x) = nx^{n-1}$
3. $f(x) = x^\alpha \ \alpha > 0$ $\qquad f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$
4. $f(x) = a^x$ $\qquad f'(x) = a^x \cdot \ln a$
5. $f(x) = \log_a x \ a > 0 \ a \neq 1$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
6. $f(x) = \sin x$ $\qquad f'(x) = \cos x$
7. $f(x) = \cos x$ $\qquad f'(x) = -\sin x$

Formule di derivazione

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

3. Se $f(x_0) \neq 0$, allora:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

4. Se $g(x_0) \neq 0$, allora:

$$\frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Teorema di derivazione della funzione composta Ipotesi:
$f :]a, b[\to \mathbb{R} \quad g :]c, d[\to \mathbb{R} \quad x_0 \in]a, b[\quad y_0 \in]c, d[$
Supponiamo che:

1. f sia derivabile in x_0 e g sia derivabile in y_0
2. $f(]a, b[) \subseteq]c, d[$ e $f(x_0) = y_0$

Tesi:
$F :]a, b[\to \mathbb{R} \quad F(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Teorema di derivazione di funzione inversa Ipotesi:
$f :]a, b[$ continua e iniettiva, $x_0 \in]a, b[$
Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$
Tesi: La funzione inversa di f, ovvero $g : f(]a.b[) \to]a, b[$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e $g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$

Dimostrazione: poniamo $y = f(x)$, possiamo farlo dato che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(y_0)$$

Avremo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$$

e, dato che una funzione è l'inversa dell'altra, potremo riscriverlo come:

$$\lim_{x \to x_0)} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Per ipotesi, f è derivabile in x_0, quindi esiste anche il limite del reciproco e fa $\frac{1}{f'(x_0)}$, c.v.d.

4.4 Funzione differenziabile (linearizzabile)

Dati $f :]a, b[\to \mathbb{R} \quad x_0 \in]a, b[\quad h \in \mathbb{R} : \quad 0 < |h| < \min(b - x_0, x_0 - a)$
f è differenziabile in x_0 se

$$\exists\ A \in \mathbb{R} : \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0$$

Chiameremo il "differenziale" di f nel punto x_0 la funzione lineare
$\mathscr{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \mathscr{L}(h) = Ah$, che si può indicare anche come $df(x_0)(h)$.
In particolare, $A = f'(x_0)$.

Funzione differenziabile $\iff$ funzione derivabile Dimostrazione verso sinistra:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

riscrivendo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0$$

$f'(x_0) = A$, c.v.d.

Teorema di Fermat Se esiste la derivata di un punto di massimo o minimo relativo, questa sarà 0 (il viceversa non è sempre vero, si può verificare nella funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^3$ quando $x = 0$).

Ipotesi:
$f :]a, b[\to \mathbb{R} \quad x_0 \in]a, b[$
Supponiamo che:

1. f sia derivabile in x_0
2. x_0 sia punto di massimo relativo/ minimo relativo per f

Tesi:$f'(x_0) = 0$

Dimostrazione: x_0 è di massimo relativo (il teorema vale in modo analogo quando il punto è di minimo relativo, quindi qua è trattato solo il caso del massimo), ovvero:
$\exists\ \delta > 0 : f(x_\delta) \leq f(x_0)\ \forall x_\delta \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$

f è derivabile in x_0, quindi esiste la derivata sinistra:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

e quella destra:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Dato che una è ≥ 0 e l'altra ≤ 0, la derivata sarà per forza 0.

Punto stazionario Dati $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$ e f derivabile in x_0, diremo che x_0 è punto stazionario per f se $f'(x_0) = 0$

Teorema di Rolle :
Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
Supponiamo che :

1. f sia continua in $[a, b]$
2. f sia derivabile in $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Tesi: ci sarà per forza almeno un punto a tangente orizzontale, ovvero $\exists\ c \in]a, b[: f'(c) = 0$

Dimostrazione: $f : [a, b]$ continua, per il teorema di Weierstrass 4.2 ammette massimo e minimo:
$\exists\ \bar{x} \in [a, b] : f(\bar{x}) = \max f$
$\exists\ \tilde{x} \in [a, b] : f(\tilde{x}) = \min f$

Se i punti a, b sono entrambi sia minimo che massimo, allora la funzione è costante, e in ogni suo punto la derivata sarà 0.

Se la funzione non è costante, almeno uno tra massimo e minimo è punto interno. Scegliamo che $\bar{x}$ sia punto di massimo interno.

Per ipotesi, f è derivabile in tutti i punti interni, per il teorema di Fermat 4.4, $f'(\bar{x}) = 0$

4.4.1 Teorema di Cauchy

Ipotesi: $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che:

1. f, g continue in $[a, b]$
2. f, g derivabili in $]a, b[$

Tesi: $\exists\ c \in]a, b[: [f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$

Dimostrazione: consideriamo $h : [a, b] \to \mathbb{R}$
$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$.
Si tratta di una funzione continua in $[a, b]$, in quanto differenza di funzioni continue. È anche derivabile in $]a, b[$, in quanto somma di funzioni derivabili.

Si può verificare che $h(a) = h(b)$, per cui sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di Rolle 4.4. Applicandolo, abbiamo $h'(c) = 0$, quindi:
$h'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c) - [f(b) - f(a)]g'(c) = 0$
$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$, c.v.d.

Se aggiungiamo alle ipotesi la condizione che $g'(c) \neq 0$, possiamo scrivere la tesi in un'altra forma=

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} : \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

4.4.2 Teorema di Lagrange

Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
Supponiamo che

1. f sia continua in $[a, b]$
2. f sia derivabile in $]a, b[$

Tesi:

$$\exists\ c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Dimostrazione: consideriamo le funzioni
$f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad g : [a, b] \to \mathbb{R} \quad g(x) = x$. Quest'ultima è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ e la sua derivata è 1.

Sono soddisfatte le condizioni del teorema di Cauchy 4.4.1. Applicandolo, abbiamo che $\exists\ c \in]a, b[$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ovvero

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1}$$

c.v.d

Dal teorema di Lagrange seguono due conseguenze importanti: 4.4.3, 4.4.3

4.4.3 Caratterizzazione di funzione costante mediante derivata

Conseguenza del teorema di Lagrange (4.4.2).
Ipotesi: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$
Supponiamo che:

1. f sia continua in (a, b)
2. f sia derivabile in $]a, b[$
3. $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$

Tesi: f sarà costante in (a, b)

Dimostrazione: prendiamo due punti qualsiasi nell'intervallo:
$x, y \in (a, b) \quad x < y$.
La funzione$f : [x, y] \to \mathbb{R}$ rispetta le ipotesi del teorema di Lagrange (4.4.2), in quanto è continua e derivabile in $]x, y[$. Avremo dunque che:

$$\exists\ c \in]x, y[\subseteq (a, b) : \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$$

Dato che $f'(c) = 0$ per ipotesi, il numeratore della frazione deve essere 0, quindi $f(y) = f(x)$, c.v.d.

Due funzioni con la stessa derivata differiscono di una costante
Ipotesi: $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che:

1. f, g siano continue in (a, b)
2. f, g siano derivabili in $]a, b[$
3. $f'(x) = g'(x)$ in $]a, b[$

Tesi: $\exists\ c \in \mathbb{R} : f(x) - g(x) = c$ in (a, b)

Dimostrazione: consideriamo $h : (a, b) \to \mathbb{R} \quad h(x) = f(x) - g(x)$. Soddisfa le condizioni del teorema precedente, 4.4.3, quindi h è una funzione costante. Se scegliamo $h(x) = c \implies f(x) - g(x) = c$, Q.E.D.

Funzione lipschitziana $\Longleftrightarrow$ derivata prima limitata Non lo dimostriamo.
Ipotesi:$f : (a, b) \to \mathbb{R}$
Supponiamo:

1. f continua in (a, b)
2. f derivabile in $]a, b[$

Tesi: f lipschitziana in $(a, b) \iff \exists\ M > 0 : |f'(x)| \leq M$ in $]a, b[$

Caratterizzazione di una funzione monotona mediante segno della derivata Lavoriamo con una funzione monotona crescente, ma se invertiamo il segno della derivata possiamo considerare una funzione decrescente.
Ipotesi: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$
Supponiamo che:

1. f sia continua in (a, b)
2. f sia derivabile in $]a, b[$

Tesi: f monotona crescente $\Longleftrightarrow f'(x) \geq 0$ in $]a, b[$

Dimostrazione implicazione verso destra: f è monotona crescente, per cui, considerando un punto $x_0 \in]a, b[$, abbiamo:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Dimostriamo ora l'implicazione verso sinistra: prendiamo due punti $x, y \in]a, b[\quad x < y$ e consideriamo la funzione $f :]x, y[\to \mathbb{R}$. Questa funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange (4.4.2), per cui

$$\exists\ c \in]a, b[: \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \geq 0$$

c.v.d.

Caratterizzazione di funzione strettamente crescente :
Ipotesi: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua in (a, b), derivabile in $]a, b[$
Tesi: f strettamente crescente in $(a, b) \iff$

1. $f'(x) \geq 0$ in $]a, b[$
2. $Zf' = \{x \in]a, b[: f'(x) = 0\} \quad Zf'$ non ha punti interni

Teorema di Darboux La derivata di una funzione gode della proprietà di assunzione dei valori intermedi (4.2)
Ipotesi: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $]a, b[\quad x_1, x_2 \in]a, b[\quad x_1 < x_2 \quad \lambda \in (f'(x_1), f'(x_2))$
Tesi: $\exists\ c \in]x_1, x_2[: f'(c) = \lambda$

Funzione primitiva Data $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, diremo che $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ è una **primitiva** di f se:

1. F è derivabile in (a, b)
2. $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$

4.4.4 Le primitive di una funzione differiscono di una costante

Ipotesi: $f : (a, b) \to \mathbb{R} \quad F, G$ primitive di f, quindi $F'(x) = f(x) = G'(x) \quad \forall x \in (a, b)$
Tesi: $F(x) = G(x) + c$, dimostrato da 4.4.3

4.4.5 Test di riconoscimento punti stazionari

Ipotesi: $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivabile, $x_0 \in]a, b[\quad f'(x_0) = 0$
Tesi: se $\exists\ \delta > 0 :$

- $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$
- $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$

allora x_0 è punto di massimo relativo.
Se $\exists\ \delta > 0 :$

- $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$
- $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$

allora x_0 è punto di minimo relativo.

Questo vuol dire che, negli esercizi dove viene chiesto di calcolare il minimo relativo, si procede in questo modo:

1. Si calcola la derivata (se si può)
2. Si prendono i punti dove la derivata è 0 (potenziali punti di massimo o minimo)
3. Si effettua questo test di riconoscimento, ovvero si studia il segno della derivata.

Teorema di de L'Hopital $\frac{0}{0}$:
Ipotesi: sia (a, b) un intervallo e x_0 suo punto d'accumulazione. $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ tali che:

1. f, g continue in $(a, b) \setminus \{x_0\}$
2. f, g derivabili in $]a, b[\setminus \{x_0\}$
3. $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$
4. $g'(x) \neq 0$ in $]a, b[\setminus \{x_0\}$

5.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Tesi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Teorema di de L'Hopital $\frac{\infty}{\infty}$ Stesso identico teorema del caso $\frac{0}{0}$, ma cambia l'ipotesi 3.
Ipotesi: sia (a, b) un intervallo e x_0 suo punto d'accumulazione. $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ tali che:

1. f, g continue in $(a, b) \setminus \{x_0\}$
2. f, g derivabili in $]a, b[\setminus\{x_0\}$
3. $$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$$
4. $g'(x) \neq 0$ in $]a, b[\setminus\{x_0\}$
5. $$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Tesi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Formula di Taylor grado 1 :
$f :]a, b[\to \mathbb{R} \quad x_0 \in]a, b[\quad f$ derivabile in x_0, quindi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

possiamo riscriverlo come:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

Questo è un rapporto di funzioni infinitesime, ma il numeratore è di ordine superiore, quindi:
$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$
ovvero:
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

Con la sola informazione che x_0 è derivabile, abbiamo appena riscritto $f(x)$ come un polinomio di primo grado equivalente, che differisce da $f(x)$ per un errore, ovvero $o(x - x_0)$.

Lemma Ipotesi: $x_0 \in]a, b[,\ \ G :]a, b[\to \mathbb{R},\ \ G \in C^n(]a, b[)$, ovvero possiede la derivata n-esima in $]a, b[$, e questa sarà continua.
Tesi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{G(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \iff G(x_0) = G'(x_0) = G^n(x_0) = 0$$

Dimostrazione implicazione verso sinistra: sappiamo che $G(x_0) = G'(x_0) = G^n(x_0) = 0$, facciamo il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{G(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{0}{0}$$

applichiamo de L'Hopital (4.4.5):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{G'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \frac{0}{0}$$

applichiamolo n volte:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{G^n(x)}{n!} = 0$$

quindi, sempre per il teorema di de L'Hopital, i limiti precedenti sono 0, c.v.d.
Il denominatore ha questa forma poiché la derivata n-esima di $(x)^n$ è $n!,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione implicazione verso destra:
per assurdo, $\exists\ k \quad 0 \leq k \leq n : G^k(x_0) \neq 0$. Facciamo il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{G(x)}{(x - x_0)^k}$$

Facendo lo stesso ragionamento di prima (ripetere de L'Hopital), arrivando alla k-esima volta, avremo che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{G^k(x_0)}{k!} \neq 0$$

Rifacciamo invece il limite con l'ipotesi che abbiamo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{G(x)}{(x - x_0)^k} \frac{(x - x_0)^{n-k}}{(x - x_0)^{n-k}}$$

ovvero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{G(x)}{(x - x_0)^n} (x - x_0)^{n-k}$$

Per ipotesi, il primo membro è zero. Quando $x \to x_0$, il secondo membro è 0, quindi il limite è 0, e questo va in contrasto col risultato di poco fa, ovvero che sia diverso da 0. L'errore sta nell'aver fatto la supposizione per assurdo.

Questo lemma può essere utilizzato per misurare l'ordine dello 0 delle funzioni dove non è ovvio (come $\sin x$, $1 - \cos x$, $e^x - 1$, ecc.). Basta fare la derivata della funzione n volte: la prima derivata diversa da 0 indica l'ordine dello 0.

Grazie a ciò, sappiamo per esempio che $\sin x$ è di ordine 1, mentre $1 - \cos x$ di ordine 2, e ancora $e^x - 1$ di ordine 1, ecc.

4.4.6 Teorema di Taylor

Ipotesi:

$$f \in C^n(]a, b[) \quad x_0 \in]a, b[\quad T_n(x; y_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Tesi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x; y_0)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Dimostrazione: sfruttiamo un generico polinomio di grado n:
$P_n(x) = a_n(x-x_0)^n + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + ... + a_1(x-x_0) + a_0$
dimostriamo che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

possiamo dimostrarlo col lemma 4.4.5, se il numeratore soddisfa le condizioni:
$f(x_0) - P(x_0) = 0 \quad f(x_0) - a_0 = 0 \implies a_0 = f(x_0)$
$f'(x_0) - P'(x_0) = 0 \quad f'(x_0) - a_1 = 0 \implies a_1 = f(x_0)$
$f''(x_0) - P''(x_0) = 0 \quad f''(x_0) - 2a_2 = 0 \implies a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$
$\vdots$
$f^{(n)}(x_0) - P^{(n)}(x_0) = 0 \quad f^{(n)}(x_0) - n!\, a_n \implies a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Se le soddisfa, è possibile riscrivere $P(x)$ come:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Possiamo chiamarlo $T_n(x; x_0)$, per indicare che è il polinomio di Taylor di grado n e di centro x_0 di f, c.v.d.

Sappiamo che il numeratore della tesi è infinitesimo di ordine superiore del numeratore, quindi possiamo riscrivere:
$f(x) = T_n(x; x_0) + o[(x-x_0)^n]$, che è la formula di Taylor con resto di Peano. Si tratta della Formula di Taylor grado 1 che avevamo fatto, ma stavolta generalizzata con un polinomio di grado n.

Quando $x_0 = 0$, si parla di formula di Mc Laurin, ovvero:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}(x)^k + o(x^n).$$

Formula di Taylor con resto di Lagrange

Siano $f :]a, b[\to \mathbb{R}, \;\; f \in C^{n+1}(]a, b[), \;\; x, x_0 \in]a, b[,$

allora:

$$\exists \; c \in I(x, x_0) : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

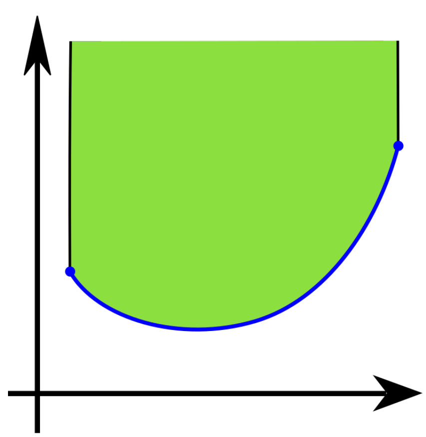
Secondo test di riconoscimento di punti stazionari Sia:
$f :]a, b[\to \mathbb{R} \quad f \in C^{(n)}(]a, b[)$
Sia $x_0 \in]a, b[$ tale che:
$f'(x_0) = 0 = f''(x_0) = f^{(n-1)(x_0)} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$
allora:

1. se n è dispari, x_0 non è né punto di massimo, né di minimo
2. se n è pari e $f^{(n)(x_0)} > 0 \implies x_0$ è punto di minimo
3. se n è pari e $f^{(n)(x_0)} < 0 \implies x_0$ è punto di massimo

Insieme convesso Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ è convesso se, presi due punti qualsiasi appartenenti ad esso, il segmento che li congiunge è contenuto nell'insieme. Scriviamo:
$E \subseteq \mathbb{R}^2$ è convesso se $\forall P_1, P_2 \in E$, dove $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, allora $s(P_1, P_2) \subseteq E$

Tutti i punti del segmento $s(t)$ sono individuabili dall'equazione parametrica: $s(t) = (x_1 t + x_2(1-t), y_1 t + y_2(1-t))$, con t che varia in $[0, 1]$.

Funzione convessa e concava Dati:
$f : (a, b) \to \mathbb{R} \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b) \quad y \geq f(x)\}$
Per rappresentare meglio, E è tutta la parte verde, ovvero l'insieme sopra il grafico della funzione.



Diremo che f è convessa se E è convesso. Ma questa definizione può essere migliorata. Prendiamo due punti qualsiasi nella funzione:

$x, y \in (a,b)\ \ x \neq y \quad (x, f(x)) \quad (y, f(y))$

Consideriamo il segmento s unente questi due punti, scrivendo l'equazione di prima, ovvero:
$s(t) = (xt + y(1-t),\ f(x)t + f(y)(1-t)) \quad t \in [0,1]$
Esso deve essere contenuto in E, quindi deve succedere che:

$$f(xt + y(1-t)) \leq f(x)t + f(y)(1-t),$$

ed è proprio questa la **definizione** di funzione convessa.
Graficamente, il grafico della funzione tra le ascisse x, y si trova sotto la retta congiungente i punti $(x, f(x)),\ (y, f(y))$.

Una funzione f si dice **concava** se $-f$ è convessa.

$f : (a,b) \to \mathbb{R} \quad x, y \in (a,b) \quad x < y \quad z = xt + y(1-t)$, ovvero $x < z < y$. Da questo possiamo ricavare t, ovvero:
$t = \frac{z-y}{x-y}$. Sostituiamo questo valore nella definizione di funzione convessa:
$f(z) \leq f(x) - f(y) \cdot \frac{z-y}{x-y} + f(y)$, possiamo riscriverla come:

$$f(z) \leq f(x)f(y) + \frac{f(x) - f(y)}{x - y}(z - y)$$

che è un'altra definizione di funzione convessa, $\forall x, y, z \in (a,b) : \ x < z < y$.
Da questa segue un'ulteriore definizione:

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

il verso della disequazione è cambiato perchè $z - y$ è negativo.

4.4.7 Lemma di convessità

Pagina 188 del libro.

Data $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x, y \in (a,b)$, poniamo:

$$\Phi(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Ovvero il rapporto incrementale della funzione f in $[x, y]$.

Diciamo che f è convessa in (a, b) se e solo se:
$\Phi(x, z) \leq \Phi(x, y) \leq \Phi(z, y) \quad \forall x, y, z \in (a, b) : \quad x < z < y.$

Il ragionamento dietro questa disuguaglianza consiste nel fissare una variabile e verificare le variabili non fissate. Nella prima disuguaglianza blocchiamo x, nella seconda y.

Bisogna tener conto che scrivere $\Phi(x, y)$ o $\Phi(y, x)$ è la stessa cosa.

f Convessa $\implies$ continua in un intervallo e derivabile da destra e sinistra :
Ipotesi: $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ convessa, $x_0 \in]a, b[$
Tesi:

1. $\exists^{no}$ finite $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$
2. f è continua in x_0

Dimostrazione 1: dobbiamo dimostrare che esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

consideriamo un punto $y > x_0$, possiamo farlo in quanto x_0 è punto interno di $]a, b[$. Per il lemma di convessità (4.4.7), avremo:
$\Phi(x, x_0) \leq \Phi(y, x_0)$

$\Phi(x, x_0)$ è il rapporto incrementale della tesi. È una funzione monotona crescente e, come abbiamo appena visto, limitata superiormente, quindi, per il teorema 2.1, ammette limite. Per dimostrare il limite dalla destra si procede allo stesso modo, quindi la tesi 1 è dimostrata.

La tesi 2 è dimostrata automaticamente a partire dalla 1, in quanto se esistono derivata destra e sinistra, la funzione è continua da destra e sinistra, quindi è continua in x_0.

4.4.8 Condizione di convessità

Pagina 190 libro.

Ipotesi: $f :]a, b[$ derivabile in $]a, b[$
Tesi: f è convessa in $(a, b) \iff \forall x, y \in]a, b[\quad f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$, ovvero la retta tangente al grafico sta sempre sotto la funzione.

Dimostrazione verso destra: Supponiamo di prendere 3 punti $x < z < y$, per il Lemma di convessità avremo che $\Phi(x, y) \leq \Phi(z, y)$, quindi:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Facciamo il limite per $z \to y$ di questa disuguaglianza (possiamo farlo in quanto la funzione è derivabile), avremo:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'(y)$$

ovvero

$$f(x) - f(y) \geq f'(y)(x - y) \implies f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$$

il segno cambia in quanto abbiamo moltiplicato per una quantità negativa; la tesi è dimostrata.

Dimostrazione verso sinistra: prendiamo $x < z < y$, possiamo scrivere:
$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z)$
dato che la formula funziona con due due punti qualsiasi, è corretto anche dire:
$f(y) \geq f(z) + f'(z)(y - z)$

trasformiamo queste due formule, ottenendo rispettivamente:

$$f'(z) \geq \frac{f(x) - f(z)}{x - z}$$

e

$$f'(z) \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

mettiamo insieme:

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq f'(z) \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

quindi:

$$\Phi(x, z) \leq \Phi(y, z)$$

per il lemma di convessità, la funzione è convessa, c.v.d.

Corollario $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivabile e convessa, $x_0 \in]a, b[: f'(x_0) = 0$
Tesi: x_0 è punto di minimo assoluto per f.

Dimostrazione: dobbiamo dimostrare che $\forall x \in]a, b[\implies f(x) \geq f(x_0)$.
Essendo la funzione convessa, prendendo $x, x_0 \in]a, b[$, si ha che:
$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. La derivata è 0, la tesi è confermata.

4.4.9 Una funzione derivabile e convessa ha la derivata prima monotona crescente

Ipotesi: $f :]a, b[$ derivabile
Tesi: f convessa in $]a, b[\iff f'$ monotona crescente

Dimostrazione verso destra: prendiamo due punti $x, y \in]a, b[$, usiamo la formula che conosciamo (4.4.8):
$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$
$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$

Sommando queste condizioni, entrambe valide, otteniamo:
$f(x) + f(y) \geq f(y) + f(x) + [f'(y) - f'(x)](x - y)$, quindi:
$[f'(y) - f'(x)](x - y) \leq 0$, che posso scrivere come:
$[f'(y) - f'(x)](y - x) \geq 0$

Da queste due espressioni si deduce che se $x < y \implies f'(x) \leq f'(y)$, c.v.d.

Dimostrazione verso sinistra: prendiamo $x, y \in]a, b[\quad x < y$ e valutiamo l'intervallo $[x, y]$.
f È derivabile in quest'intervallo, quindi possiamo applicare Lagrange:

$$\exists\ c \in]x, y[: \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$$

dato che la funzione è crescente e $c < y$, abbiamo che $f'(c) \leq f'(y)$, quindi:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'(y)$$

che diventa:

$$f(x) - f(y) \geq f'(y)(x - y), \text{ c.v.d.}$$

4.5 Teorema

Ipotesi: $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ 2 volte derivabile in $]a, b[$
Tesi: f convessa in $]a, b[\iff f''(x) \geq 0$ in $]a, b[$

4.6 Punto di flesso

Dati $f:]a, b[\to \mathbb{R}, \quad x_0 \in]a, b[\quad f$ derivabile in x_0 oppure x_0 a tangente verticale.
x_0 È detto punto di flesso per f se:
$\exists\ \sigma > 0$ tale che f sia convessa in $]x_0 - \sigma, x_0[$ e concava in $]x_0, x_0 + \sigma[$, o viceversa.

4.7 La derivata seconda di un punto di flesso è nulla

Ipotesi: $f:]a, b[\to \mathbb{R}, \quad x_0 \in]a, b[$, supponiamo che:

1. x_0= punto di flesso
2. $f''(x_0)$ esista

Tesi: $f''(x_0) = 0$

Dimostrazione: dato che esiste $f''(x_0)$, allora esiste la derivata prima in un intorno di x_0, quindi possiamo dire:

$$\exists \delta > 0 : \exists f':]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$$

Per ipotesi x_0 è punto di flesso. Supponiamo che a sinistra di x_0 la funzione sia convessa e a destra concava (il teorema è ugualmente valido se invertiamo), avremo:
f' crescente a sinistra di x_0
f' decrescente a destra di x_0.
Questo vuol dire che x_0 è punto di massimo per f', e per il Teorema di Fermat $f''(x_0) = 0$

4.7.1 Teorema

Ipotesi: $f:]a, b[\to \mathbb{R} \quad f \in C^n(]a, b[)$
Sia $x_0 \in]a, b[$ tale che $f''(x_0) = 0 = f'''(x_0) = ...f^{(n-1)}(x_0), \quad f^{(n)} \neq 0$

Tesi:

1. Se n è dispari, x_0 è punto di flesso
2. Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, f è convessa in un intorno di x_0
3. Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, f è concava in un intorno di x_0

Dimostrazione: Per Taylor, $\forall x, x_0 \in]a, b[$ si ha:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

espandendo, si ha:

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\ldots\frac{f^{(n)}x_0}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

Per ipotesi, tutte le derivate dalla 2 alla $n-1$ sono 0, quindi abbiamo:

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

Riscriviamo il secondo membro dell'uguaglianza come:

$$(x-x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}\right]$$

Quando il primo membro dell'uguaglianza è > 0, f è convessa, altrimenti è concava. Il segno dipende dal secondo membro:

- se n è dispari, $(x-x_0)^n$ cambia segno se siamo a destra o a sinistra di x_0. Questo rende la funzione da un lato concava e dall'altro convessa, quindi x_0 è punto di flesso, c.v.d.
- se n è pari, il segno dipende da ciò che sta nelle parentesi quadre (non contando l'o piccolo poiché va a 0): se $f^{(n)}(x_0) > 0$, la funzione è convessa, altrimenti è concava, c.v.d.

Funzione ricorrente Dati:
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua, $f((a, b)) \subseteq (a, b)$ $\quad \lambda \in (a, b)$
Chiamiamo "successione definita per ricorrenza" la successione definita nel seguente modo:

$$\begin{cases} a_{(n+1)} = f(a_n) \\ a_1 = \lambda \end{cases}$$

Punto fisso Dati:
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ è detto "punto fisso per f" se $f(x_0) = x_0$

Osservazione 1: se a_n fosse convergente, l è punto fisso, in quanto:
$a_{n+1} = f(a_n)$ e, dato che f è continua e $a_n \to l$ vale il teorema (4.1), quindi:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(l)$$

ovvero $f(l) = l$, che rispecchia la definizione di punto fisso.

Osservazione 2: affinché a_n possa divergere a $+\infty$ deve accadere che

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = +\infty$$

discorso analogo per $-\infty$

5 Integrazione secondo Riemann

Decomposizione Dato un intervallo $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, chiameremo "decomposizione" o "suddivisione" di $[a, b]$ l'insieme:
$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tale che $a \equiv x_0 < x_1 < \cdots < x_n \equiv b$

Volendo caratterizzare delle decomposizioni D', D'' di $[a, b]$, diremo che D' è "più fine" di $[D'']$ se $D'' \subseteq D'$. È chiaro che Questo confronto può esser fatto solo se le decomposizioni sono tra loro confrontabili, ovvero se una ha almeno tutti i punti dell'altra, più altri.

Somma superiore e inferiore Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, poniamo:

$$M = \sup_{[a,b]} f \quad m = \inf_{[a,b]} f$$

Prendiamo $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ decomposizione di $[a, b]$, e

$$\inf_{[x_i, x_{i+1}]} f = m_i \quad \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f = M_i$$

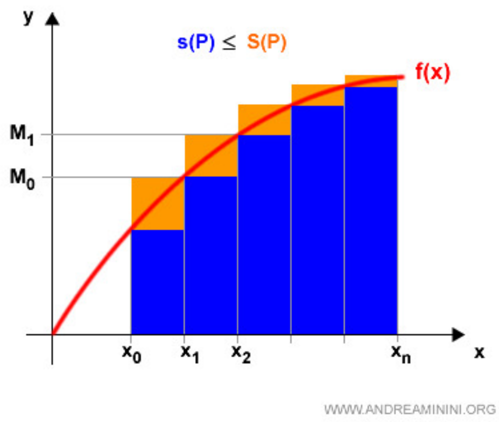
Chiameremo "somma inferiore" relativa alla decomposizione di f e f la seguente somma:

$$s(D, f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

Chiameremo "somma superiore" relativa a D e f la seguente somma:

$$S(D, f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

Per avere le idee più chiare, queste somme rappresentano le aree di rettangoli, dove la base è in entrambi i casi la differenza tra x_i e x_{i+1}, mentre l'altezza è m_i nella somma inferiore e M_i in quella superiore. In quest'immagine, le aree in blu sono le somme inferiori, mentre quelle blu + arancione sono le somme superiori.



Come vediamo, $s(D, f) \leq S(D, f)$.

Al variare di D (si aggiungono o tolgono punti), si può considerare l'insieme di tutte le somme inferiori ottenibili, lo indichiamo con $\{s(D, f), D\}$.
Allo stesso modo, l'insieme di tutte le somme superiori ottenibili al variare di D si indica con $\{S(D, f), D\}$.

Disuguaglianza fondamentale delle somme di Riemann Prese due decomposizioni qualsiasi di uno stesso intervallo, la somma inferiore di una sarà sempre minore o uguale della somma superiore dell'altra, ovvero:
$\forall D_1, D_2$ di $[a, b] \implies s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$

Dimostriamo questo teorema servendoci di due lemmi.
Lemma 1: sia D una decomposizione di [a,b] e sia D' una decomposizione dello stesso intervallo, tale che $D' \equiv D \cup \{\beta\}$, quindi D' è più fine di D.
Proviamo che $s(D, f) \leq s(D', f)$ e $S(D, f) \geq S(D', f)$.

Supponiamo che β sia nell'intervallo $[x_0, x_1]$. Valutiamo $s(D', f) - s(D, f)$, il nostro obiettivo è dimostrare che questa differenza sia ≥ 0. Basta riscrivere il primo termine come:

$$\inf_{[x_0,\beta]} f \cdot (\beta - x_0) + \inf_{[\beta,x_1]} f \cdot (x_1 - \beta) + \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

e il secondo come:

$$\inf_{[x_0,x_1]} f \cdot (x_1 - x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

eliminando le sommatorie, che sono uguali, la differenza si riduce a:

$$\inf_{[x_0,\beta]} f(\beta - x_0) + \inf_{[\beta,x_1]} f(x_1 - \beta) - \inf_{[x_0,x_1]} f(x_1 - x_0)$$

Se dentro l'ultima parentesi aggiungiamo e sottraiamo un beta, possiamo riscrivere il tutto come:

$$\inf_{[x_0,\beta]} f(\beta - x_0) + \inf_{[\beta,x_1]} f(x_1 - \beta) - \inf_{[x_0,x_1]} f(x_1 - \beta) - \inf_{[x_0,x_1]} f(\beta - x_0)$$

ovvero:

$$(\inf_{[x_0,\beta]} f - \inf_{[x_0,x_1]} f)(\beta - x_0) + (\inf_{[\beta,x_1]} f - \inf_{[x_0,x_1]} f)(x_1 - \beta)$$

$(\beta - x_0)$ e $(x_1 - \beta)$ sono entrambe quantità positive, quindi non rimane che determinare il segno delle altre sottrazioni. Sappiamo che, presi due insiemi $A \subseteq B \implies \inf A \geq \inf B$

Applicando questa situazione al nostro caso,

$$[x_0, \beta] \subseteq [x_0, x_1] \implies \inf_{[x_0,\beta]} f \geq \inf_{x_0,x_1} f$$

stesso discorso per gli altri due insiemi. La tesi è dimostrata, dato che il risultato finale è ≥ 0.

Lo stesso conto si può fare con le somme superiori, tenendo conto che $A \subseteq B \implies \sup a \leq \sup B$, quindi il risultato sarà ≤ 0.

Lemma 2: sia D una decomposizione di $[a, b]$. Sia $D' \equiv D \cup \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s\}$ allora $s(D, f) \leq s(D', f)$ e $S(D, f) \geq S(D', f)$

In pratica, quello che accadeva nel lemma 1 (nell'aggiungere un punto alla decomposizione) vale anche aggiungendo più punti. Questo dimostra che più una decomposizione è fine, più la sua somma inferiore aumenta e diminuisce quella superiore.

Questo secondo lemma si dimostra col primo. Avremo infatti che:
$s(D, f) \leq s(D \cup \{\beta\}, f) \leq s(D \cup \{\beta, \beta_1\}, f)$, per quanti siano i β. Discorso analogo per le somme superiori.

Uniamo ora i lemmi per dimostrare il teorema. Sia D composizione di $[a, b]$ tale che $D = D_1 \cup D_2$

Per i lemmi, $s(D_1, f) \leq s(D, f) \leq S(D, f) \leq S(D_2, f)$, tesi dimostrata.

Sup di somme inferiori è minore o uguale di inf di somme superiori
Conseguenza di quanto detto finora.
Ipotesi: $f : [a, b]$ limitata, D decomposizione di $[a, b]$
Tesi:

$$\sup_D s(D, f) \leq \inf_D S(D, f)$$

Dimostrazione: prendiamo un'altra decomposizione D', avremo che:
$s(D, f) \leq S(D', f) \quad \forall D$ di $[a, b]$

Questo vuol dire che $S(D', f)$ è un maggiorante per l'insieme delle somme inferiori al variare di D. È $\geq$ del sup, in quanto il sup è per definizione il più piccolo dei maggioranti. Per questo motivo il sup è minorante dell'insieme delle somme superiori. Per questo motivo, è $\leq$ dell'inf delle somme superiori, c.v.d.

Funzione integrabile secondo Riemann Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e D una decomposizione di $[a, b]$. Chiameremo f "integrabile secondo Riemann" in $[a, b]$ se:

$$\sup_D s(D, f) = \inf_D S(D, f)$$

In tal caso, questa quantità prende il nome di "integrale di Riemann" di f esteso all'intervallo $[a, b]$, e si indica con:

$$\int_{[a,b]} f(x) \mathrm{d}x$$

Condizione di integrabilità secondo Riemann Ipotesi:
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata.
Tesi: f integrabile secondo Riemann in $[a,b] \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\ D_\varepsilon$ decomposizione di $[a,b] : S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon$

Dimostrazione verso destra: sappiamo per ipotesi che:

$$\sup_D s(D,f) = \inf_D S(D,f) = I$$

Per proprietà di sup e inf:
$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\ D'_\varepsilon$ di $[a,b] : s(D'_\varepsilon, f) > I - \varepsilon$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\ D''_\varepsilon$ di $[a,b] : S(D''_\varepsilon, f) < I + \varepsilon$

Scegliamo $D_\varepsilon = D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon$, quindi avremo che:
$s(D_\varepsilon, f) \geq s(D'_\varepsilon, f) > I - \varepsilon$
$S(D_\varepsilon, f) \leq S(D''_\varepsilon, f) < I + \varepsilon$

Cambiamo di segno la prima di queste due disequazioni per ottenere:
$-s(D_\varepsilon, f) < -I + \varepsilon$
sommandola con l'altra, abbiamo infine:
$S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < 2\varepsilon$, c.v.d.

Dimostrazione verso sinistra: sappiamo che:

$$s(D,f) \leq \sup_D s(D,f) \leq \inf_D S(D,f) \leq S(D,f)$$

Il che, nel nostro caso, è equivalente a dire:

$$0 \leq \inf_D S(D,f) - \sup_D s(D,f) \leq S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Il minore di ε deriva dall'ipotesi. Ne consegue che la differenza tra l'inf delle somme superiori e il sup di quelle inferiori è 0, c.v.d.

Proprietà di linearità Date $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitate e integrabili secondo Riemann in $[a,b]$, $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora:
Tesi:

1. $\alpha f + \beta g$ è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$
2. $$\int_{[a,b]} [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_{[a,b]} g(x)\mathrm{d}x$$

Non lo dimostriamo, in quanto sarebbe un po' complesso.

Proprietà di positività Ipotesi:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Integrabile secondo Riemann in $[a, b], f(x) \geq 0$ in $[a, b]$

$$\text{Tesi: } \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

Dimostrazione: consideriamo $D = \{x_i, \ldots, x_n\}$ decomposizione di $[a, b]$ e

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \sup_D s(D, f) \geq s(D, f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \geq 0$$

Proprietà di monotonia Date $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili secondo Riemann in $[a, b]$, con $f(x) \leq g(x)$ in $[a, b]$, si ha che:

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{[a,b]} g(x)\mathrm{d}x$$

Dimostrazione: consideriamo $h(x) = g(x) - f(x)$ (integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ per linearità), avremo che $h(x) \geq 0$ in $[a, b]$. Quindi:

$$0 \leq \int_{[a,b]} h(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} g(x)\mathrm{d}x - \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$$

Dato che questa differenza è maggiore di zero, la tesi è dimostrata.

f **integrabile secondo Riemann** $\iff$ f^+ **e** f^- **integrabili secondo Riemann** Teorema importante.
Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata
Tesi: f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ $\iff$ lo sono f^+ e f^-

Dimostrazione verso sinistra: $f = f^+ - f^-$, per cui, per la proprietà di linearità, f è integrabile.

Dimostrazione verso destra: scegliamo di dimostrare che:
f integrabile secondo Riemann $\implies$ f^+ integrabile secondo Riemann, in questo modo per linearità lo sarà anche f^-, in quanto:
$f^- = f^+ - f$.

Riscriviamo la nostra ipotesi usando la Condizione di integrabilità secondo Riemann:
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; D_\varepsilon : S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon$

Dobbiamo dimostrare che:
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; D'_\varepsilon : S(D'_\varepsilon, f^+) - s(D'_\varepsilon, f^+) < \varepsilon$

Per farlo, dimostriamo che:
$S(D'_\varepsilon, f^+) - s(D'_\varepsilon, f^+) \leq S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f)$

Riscriviamola:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M'_i - m'_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$$

ovvero $M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$
Come dimostriamo questa disequazione? Quando f è positiva si ha che $f = f^+$, quindi la disequazione è soddisfatta. Quando invece $f \leq 0$, il primo membro sarà una differenza tra zeri, mentre il secondo membro sarà nullo (quando $M_i = m_i$) o positivo (quando $M_i > m_i$), c.v.d.

f integrabile secondo Riemann $\implies$ $|f|$ integrabile secondo Riemann :
Ipotesi: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a,b]$
Tesi: $|f|$ integrabile secondo Riemann in $[a,b]$, e inoltre:

$$\left|\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_{[a,b]} |f(x)|\mathrm{d}x \quad \forall x \in [a,b]$$

Dimostrazione: per il teorema 5, sappiamo che f^+ e f^- sono integrabili in $[a,b]$, quindi la loro somma, ovvero $|f|$, è integrabile per linearità.

Dimostriamo ora la stima: riscriviamo il primo membro come:

$$\left|\int_{[a,b]} f^+(x) - f^-(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{[a,b]} f^+(x)\mathrm{d}x - \int_{[a,b]} f^-(x)\mathrm{d}x\right|$$

per disuguaglianza triangolare:

$$\left|\int_{[a,b]} f^+(x)\mathrm{d}x - \int_{[a,b]} f^-(x)\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_{[a,b]} f^+(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{[a,b]} f^-(x)\mathrm{d}x\right|$$

il secondo membro equivale a $\displaystyle\int_{[a,b]} f^+(x)\mathrm{d}x + \int_{[a,b]} f^-(x)\mathrm{d}x$

Ovvero a $\displaystyle\int_{[a,b]} f^+(x) + f^-(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} |f(x)|\mathrm{d}x$ c.v.d.

Teorema della media I pg. 251
Ipotesi: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.
Tesi:

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

Dimostrazione: dato che la funzione è integrabile:

$$s(D,f) \leq \sup_{[a,b]} s(D,f) = \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \inf_{[a,b]} S(D,f) \leq S(D,f)$$

Considerando $D = \{a, b\}$ avremo che, come volevasi dimostrare:

$$s(D, f) = \inf_{[a,b]} f(b-a) \leq \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \leq \sup_{[a,b]} f(b-a) = S(D, f)$$

Dimostrazione alternativa:

$$\text{poniamo } \inf_{[a,b]} f = m \quad \sup_{[a,b]} f = M$$

Avremo che $m \leq f(x) \leq M$. Queste due sono funzioni costanti, quindi integrabili secondo Riemann, e il loro integrale è la costante moltiplicata per l'intervallo. Sfruttando la proprietà di monotonia abbiamo quindi, come volevasi dimostrare:

$$m(b-a) = \int_{[a,b]} m \;\mathrm{d}x \leq \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{[a,b]} M \;\mathrm{d}x = M(b-a)$$

Integrabilità di funzioni monotone Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona e limitata in $[a, b]$
Tesi: f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$

Dimostrazione: usiamo la condizione di Condizione di integrabilità secondo Riemann, quindi dobbiamo dimostrare che:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ D_\varepsilon$ di $[a, b] : S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon$

Supponiamo che f sia monotona crescente. Consideriamo D decomposizione di $[a, b]$, divisa in n parti uguali, con distanza tra un punto e l'altro sempre uguale. Questo vuol dire che la distanza tra un punto e l'altro sarà $\frac{b-a}{n}$.

Relativamente a questa decomposizione, calcoliamo:
$S(D, f) - s(D, f)$, che equivale a:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i), \text{ ovvero } \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Dato che la funzione è monotona crescente, si ha che:

$$M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f = f(x_{i+1}) \quad m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f = f(x_i)$$

sostituendo nella sommatoria, otteniamo:

$$\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+1})-f(x_i)]$$

svolgendo la sommatoria, notiamo che essa si riduce a $f(x_n)-f(x_0)$, quindi l'espressione diventa:

$$\left(\frac{b-a}{n}\right)[f(b)-f(a)]$$

Per la Proprietà di Archimede (additiva):
$\exists\ n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > (b-a)[f(b)-f(a)]$
dividendo per n, la tesi è dimostrata.

Integrabilità di funzione continua Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua
Tesi: f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

Dimostrazione: usiamo anche qua la Condizione di integrabilità secondo Riemann, quindi dobbiamo dimostrare che:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ D_\varepsilon$ di $[a, b] : S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon$

Per il Teorema di Cantor f è uniformemente continua, ovvero:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 : \forall x', x'' \in X \quad |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$

Consideriamo D decomposizione di $[a, b]$, dove ogni intervallo ha ampiezza minore di δ, ovvero $x_{i+1} - x_i < \delta$.

$$\text{Calcoliamo la somma } S(D, f) - s(D, f) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$$

f è continua in $[x_i, x_{i+1}]$, quindi, per il Teorema di Weierstrass:

$$\exists^{no} x_i', x_i'' \in [x_i, x_{i+1}] : f(x_i') = \max_{[x_i, x_{i+1}]} f \text{ e } f(x_i'') = \min_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

$$\text{Riscriviamo quindi la somma come } \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i') - f(x_i'')](x_{i+1} - x_i)$$

dato che $|x_i' - x_i''| < \delta$ e la funzione è uniformemente continua, allora:
$|f(x_i') - f(x_i'')| < \varepsilon$, quindi:

$$\sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i') - f(x_i'')](x_{i+1} - x_i) < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} - x_i \text{ c.v.d.}$$

Teorema della media II (media integrale) Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua (per il teorema precedente è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$)

$$\text{Tesi: } \exists c \in [a, b] : f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$$

questa quantità è chiamata "media integrale di f in $[a, b]$.

Dimostrazione: dato che f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$, vale il teorema della media I:

$$\min_{[a,b]} f(b-a) \leq \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \leq \max_{[a,b]} f(b-a)$$

dividendo tutto per $b - a$ otteniamo:

$$\min_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \leq \max_{[a,b]} f$$

Per il teorema di assunzione dei valori intermedi (4.2):

$$\exists\ c \in [a, b] : f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \text{ c.v.d.}$$

Funzione generalmente continua e localmente Sia $[a, b]$ un intervallo e $x_1, \dots, x_p \in [a, b]$. Una funzione f definita e continua in $[a, b] \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$ si dice **generalmente continua** in $[a, b]$.

Questa definizione presuppone che f sia definita in uno specifico intervallo, ma se f è definita in $\mathbb{R}$ e ha valori in $\mathbb{R}$, diremo che è localmente generalmente continua se è generalmente continua in ogni intervallo $[a, b]$, per esempio la funzione di Heaviside.
La funzione di Dirichlet, espressa dalla legge:

$$X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

è una funzione particolare, un esempio di funzione non localmente generalmente continua in alcun intervallo.

Teorema di integrabilità di funzioni generalmente continue :
Ipotesi: f generalmente continua, definita e limitata in $[a, b]$
Tesi: f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ (dimostrazione non richiesta).

Significato geometrico dell'integrale Data una funzione del tipo $f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad f(x) > 0$ in $[a, b]$, f integrabile secondo Riemann in $[a, b]$
L'integrale secondo Riemann di f in $[a, b]$ è l'area sottesa alla sua retta nel grafico.

Per dare senso a questa definizione abbiamo bisogno di introdurre delle definizioni, servendoci della teoria della misura (che studieremo in analisi II per gli integrali multipli).

Ci troviamo in $\mathbb{R}^2$, ovvero $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
Abbiamo bisogno di introdurre un po' di topologia di $\mathbb{R}^2$, un po' come abbiamo fatto per $\mathbb{R}$ quando abbiamo introdotto insiemi, punti, punti interni, punti d'accumulazione e così via. Tutto ciò è stato possibile grazie all'aver dichiarato il concetto di "intorno", che si è appunto rivelato utile nel definire gli altri. Definiamo dunque un intorno in $\mathbb{R}^2$.

Intorno in $\mathbb{R}^2$ Data la coppia ordinata (x_0, y_0) e il numero $r > 0$, chiamiamo "intorno del punto di raggio r" (o disco o cerchio) l'insieme delle coppie (x_0, y_0) la cui distanza è minore di r, ovvero:
$\{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\} = B_r(x_0, y_0)$
dove la lettera B sta per "ball".

Da qui possiamo definire un **punto interno** di un insieme E:
quel punto (x_0, y_0) per cui $\exists\ r > 0$ tale che:
$B_r(x_0, y_0) \subseteq E$
oppure un **punto d'accumulazione**: $B_r(x_0, y_0) \cap (E \setminus \{x_0, y_0\}) \neq \emptyset$. Allo stesso modo si potrebbe andare avanti, viene fatto in analisi II.

Possiamo affermare che $E \subseteq \mathbb{R}^2$ è limitato se
$\exists\ B_r(x_0, y_0) : E \subseteq B_r(x_0, y_0)$, o più semplicemente se è interamente contenuto all'interno di una figura.

Misura di insiemi in $\mathbb{R}^2$ Consideriamo l'insieme più facile in $\mathbb{R}^2$, ovvero un rettangolo, definito come $\triangle = [a, b] \times [c, d]$

Chiameremo "misura" di questa figura quantità:
$m(\triangle) = (b-a)(d-c)$, ovvero base per altezza.

Consideriamo ora una figura più complessa, il plurirettangolo: unione di un numero finito di rettangoli a 2 a 2 privi di punti interni comuni.

Questa figura si indica con π, ed è definita nel seguente modo:
$\pi = \bigcup_{i=1}^{P} \triangle_i$

Uno stesso plurirettangolo può essere visto come unione di rettangoli diversi, ovvero:
$\pi = \triangle_1 \cup \triangle_2$, ma anche $\pi = \triangle_1' \cup \triangle_2' \cup \triangle_3$

In questo caso le misure delle aree totali di questi rettangoli devono coincidere, quindi si deve avere:
$m(\triangle_1) + m(\triangle_2) = m(\triangle_1') + m(\triangle_2') + m(\triangle_3)$

$$\text{Quindi, generalizzando, } m(\pi) = \sum_{i=1}^{P} m(\triangle_i)$$

ovvero la misura del plurirettangolo è la somma delle misure dei rettangoli costituenti.

Misura di Peano-Jordan Definiamo ora la misurabilità e la misura di un insieme qualunque. Consideriamo $E \subseteq \mathbb{R}^2$, avremo 3 casi:

1. E limitato e $\mathring{E} \neq \emptyset$
2. E limitato e $\mathring{E} = \emptyset$
3. E non limitato

Dove $\mathring{E}$ è l'insieme dei punti interni di E.

Caso 1 Analizziamo il primo caso: consideriamo l'insieme dei plurirettangoli contenuti in E:
$\pi_E = \{\pi : \pi \subseteq E\}$

Indichiamo con E_* l'insieme delle loro misure:
$E_* = \{m(\pi) : \pi \subseteq E\}$

E_* è limitato superiormente (in quanto E è limitato), il suo sup è un numero: $\sup E_* \in \mathbb{R}$.

Consideriamo ora l'insieme
$\pi^E = \{\pi : E \subseteq \pi\}$, ovvero l'insieme dei plurirettangoli che contengono E. Facendo lo stesso ragionamento di prima, scriviamo l'insieme delle misure di questi plurirettangoli:
$E^* = \{m(\pi) : E \subseteq \pi\}$

Questo insieme è limitato inferiormente (possiamo prendere un plurirettangolo interno a E, sarà certamente minore di ogni plurirettangolo che contiene E). Possiamo scrivere che:
$\inf E^* \in \mathbb{R}$

Ci ritroviamo ora con questi due numeri, sup e inf, tra i quali esiste certamente questa relazione:

$$\sup_{\pi \subseteq E} m(\pi) \leq \inf_{E \subseteq \pi} m(\pi)$$

Diremo che E è misurabile secondo Peano-Jordan se vale l'uguale, e questa quantità quantità sarà chiamata $m(E)$, la misura di E. In alcuni insiemi non vale l'uguale ma solo il minore: non sono misurabili, ovvero non hanno diritto a un'area.

Caso 2 Consideriamo l'insieme:
$\pi^E = \{\pi : E \subseteq \pi\}$, ovvero l'insieme dei plurirettangoli contenenti E, e scriviamo l'insieme delle loro misure:
$E^* = \{m(\pi) : E \subseteq \pi\}$

Diremo che E è misurabile secondo Peano-Jordan se:

$$\inf_{\pi \supseteq E} m(\pi) = 0$$

in tal caso si pone

$$m(E) = \inf_{\pi \supseteq E} m(\pi) = 0$$

Quindi questo tipo di insiemi (limitati ma con interno vuoto) o non sono misurabili, o la loro misura è 0. Un esempio è un segmento, una retta (misura 0, lo vedremo in analisi II).

Caso 3 Diremo che E è misurabile secondo Peano-Jordan se $\forall T \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile $\implies E \cap T$ è misurabile, e la misura si calcola in questo modo:

$$\sup_T m(E \cap T) = m(E)$$

L'integrale è un rettangoloide Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad f(x) > 0 \quad f$ integrabile secondo Riemann in $[a, b]$. Definiamo $R_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$. Questa figura sarà chiamata "rettangoloide", ovvero il sottografico della funzione f.
Tesi: R_f è misurabile e

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = m(R_f)$$

Dimostrazione: intanto sapiamo che R_f è limitato, poiché $R_f = [a, b] \times [0, M]$, dove

$$M = \sup_{[a,b]} f$$

Certamente R_f ha insieme interno non vuoto, perché $f(x) \geq 0$.

Sappiamo che f è integrabile secondo Riemann, quindi:

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \sup_D s(D, f) = \inf_D S(D, f)$$

Ma ogni somma inferiore non è altro che l'area di un plurirettangolo sotto il grafico della funzione, mentre ogni somma superiore non è altro che l'area di un plurirettangolo che va sopra il grafico. Dato che queste due quantità coincidono e il loro valore è l'integrale, l'integrale è a tutti gli effetti l'area che va fino al grafico della funzione.

Integrabilità in un sottointervallo Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ $[c, d] \subseteq [a, b]$
Tesi: f è integrabile secondo Riemann in $[c, d]$.

Dimostrazione: per ipotesi, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ D_\varepsilon$ di $[a, b] : S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon$.

Non è restrittivo supporre che $[c, d] \in D_\varepsilon$, poiché nel caso contrario potremmo considerare una decomposizione $\bar{D}_\varepsilon$ che li contiene, vediamo come. Consideriamo:
$D_\varepsilon \cup \{c, d\} = \bar{D}_\varepsilon$, si ha che $D\varepsilon \subseteq \bar{D}_\varepsilon$, quindi valgono queste affermazioni:
$s(D_\varepsilon, f) \leq s(\bar{D}_\varepsilon, f)$
$S(D_\varepsilon, f) \geq S(\bar{D}_\varepsilon, f)$

Moltiplichiamo la prima per -1 e otteniamo:
$-s(D_\varepsilon, f) \geq -s(\bar{D}_\varepsilon, f)$
ora sommiamo tra loro queste ultime due condizioni:
$S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) \geq S(\bar{D}_\varepsilon, f) - s(\bar{D}_\varepsilon, f)$

Dato che per ipotesi sappiamo che $\varepsilon > S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f)$, allora:
$\varepsilon > S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) \geq S(\bar{D}_\varepsilon, f) - s(\bar{D}_\varepsilon, f)$
quindi la decomposizione $\bar{D}_\varepsilon$ può tranquillamente essere la D_ε dell'ipotesi.

Dobbiamo ora dimostrare la tesi, ovvero che:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ D'_\varepsilon$ di $[a, b] : S(D'_\varepsilon, f) - s(D'_\varepsilon, f) < \varepsilon$
$D'_\varepsilon = D_\varepsilon \cap [c, d]$

Se consideriamo la differenza $S(D'_\varepsilon, f) - s(D'_\varepsilon, f)$ notiamo che è sicuramente $\leq$ di $S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f)$, poiché contiene meno punti; la tesi è dunque dimostrata.

Integrabilità nei sottointervalli Può essere considerato come una generalizzazione del teorema appena scritto.
Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Sia $c \in [a, b]$
Tesi: f è integrabile secondo Riemann in $[a, b] \iff f$ è integrabile in $[a, c]$ e in $[c, b]$, e in tal caso:

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,c]} f(x)\mathrm{d}x + \int_{[c,b]} f(x)\mathrm{d}x$$

Dimostrazione verso destra: per il teorema di prima, la tesi è dimostrata.

Dimostrazione verso sinistra: sappiamo che:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \quad D'_\varepsilon$ di $[a, c] : S(D'_\varepsilon, f) - s(D'_\varepsilon, f) < \varepsilon$, inoltre:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ D''_\varepsilon$ di $[c, b] : S(D''_\varepsilon, f) - s(D''_\varepsilon, f) < \varepsilon$. È evidente che $D_\varepsilon = D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon$, ed è una decomposizione di $[a, b]$. Dato che è unione delle due precedenti, abbiamo che:
$S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon) = S(D'_\varepsilon, f) - s(D'_\varepsilon, f) + S(D''_\varepsilon, f) - s(D''_\varepsilon, f) < 2\varepsilon$
c.v.d.

Dimostrazione della formula: vogliamo dimostrare che:

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \equiv \sup_{D \text{ decomposizione di } [a,b]} s(D, f) = \int_{[a,c]} f(x)\mathrm{d}x + \int_{[c,b]} f(x)\mathrm{d}x$$

Poniamo:

$$\int_{[a,c]} f(x)\mathrm{d}x + \int_{[c,b]} f(x)\mathrm{d}x = L$$

Per essere l'estremo superiore, L deve soddisfare le due proprietà del sup (1.1.1), ovvero:

1. $s(D, f) \leq L \quad \forall D$ decomposizione di $[a, b]$
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ D_\varepsilon$ di $[a, b] : s(D_\varepsilon, f) > L - \varepsilon$

Dimostriamo la prima. Sia D una decomposizione di $[a, b]$, non è restrittivo supporre che $c \in D$. Possiamo scomporre questa decomposizione in D', che va da a a c, e D'', che va da c a b. Avremo:
$s(D, f) = s(D', f) + s(D'', f)$
Queste ultime due somme inferiori sono certamente $\leq$ degli ultimi due integrali della tesi, in quanto essi sono i sup delle somme inferiori. Avremo:

$$s(D, f) = s(D', f) + s(D'', f) \leq \int_{[a,c]} f(x)\mathrm{d}x + \int_{[c,b]} f(x)\mathrm{d}x = L$$

Dimostriamo ora che L soddisfi anche la seconda proprietà del sup: per ipotesi,

$$\int_{[a,c]} f(x)\mathrm{d}x = \sup_{D[a,c]} s(D, f) \text{ e } \int_{[c,b]} f(x)\mathrm{d}x = \sup_{D[c,d]} s(D, f)$$

Per la seconda proprietà del sup:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \quad D'_\varepsilon \text{ di } [a, c] \text{ tale che } s(D'_\varepsilon, f) > \int_{[a,c]} f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists \quad D''_\varepsilon \text{ di } [c,b] \text{ tale che } s(D''_\varepsilon, f) > \int_{[c,b]} f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon$$

Consideriamo ora $D_\varepsilon = D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon$, è una decomposizione di $[a,b]$. Dato che è unione delle due precedenti, abbiamo che:
$s(D_\varepsilon, f) = s(D'_\varepsilon, f) + s(D''_\varepsilon, f)$.

Dato che queste ultime due somme inferiori, come abbiamo appena visto, sono maggiori degli integrali, abbiamo che:

$$s(D_\varepsilon, f) > \int_{[a,c]} f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon + \int_{[c,b]} f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon$$

c.v.d.

Integrale definito Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a,b]$, siano $\alpha, \beta \in [a,b]$. Per definizione:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_{[\alpha,\beta]} f(x)\mathrm{d}x & \text{se } \alpha < \beta \\ 0 & \text{se } \beta = \alpha \\ -\int_{[\beta,\alpha]} f(x)\mathrm{d}x & \text{se } \beta < \alpha \end{cases}$$

Questa scrittura si legge "integrale tra alfa e beta", chiameremo alfa "primo estremo d'integrazione" e beta "secondo estremo d'integrazione".

Proprietà di additività Ipotesi: sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a,b]$. Siano $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$, danno origine a 3 intervalli.
Tesi:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\gamma f(x)\mathrm{d}x + \int_\gamma^\beta f(x)\mathrm{d}x$$

Esempio di applicazione di questa proprietà:

$$\int_0^3 e^x \mathrm{d}x = \int_0^{-17} e^x \mathrm{d}x + \int_{-17}^3 e^x \mathrm{d}x$$

Disuguaglianza del valore assoluto nella funzione integranda Teorema figlio del seguente: 5.
Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a, b]$, siano $\alpha, \beta \in [a, b]$.
Tesi:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| \mathrm{d}x \right|$$

Dimostrazione: Riscriviamo l'integrale:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \mathrm{d}x \right| = \begin{cases} \left| \int_{[\alpha,\beta]} f(x) \mathrm{d}x \right| & \text{se } \alpha < \beta \\ \left| - \int_{[\beta,\alpha]} f(x) \mathrm{d}x \right| & \text{se } \beta < \alpha \end{cases}$$

Per il teorema 5, nel primo caso abbiamo:

$$\left| \int_{[\alpha,\beta]} f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int_{[\alpha,\beta]} |f(x)| \mathrm{d}x \equiv \left| \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| \mathrm{d}x \right|$$

c.v.d.
Nel secondo caso abbiamo, similmente:

$$\left| - \int_{[\beta,\alpha]} f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int_{[\beta,\alpha]} |f(x)| \mathrm{d}x \equiv \left| - \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| \mathrm{d}x \right|$$

Tesi confermata. Abbiamo aggiunto il valore assoluto perchè la quantità:

$$\int_{[\beta,\alpha]} |f(x)| \mathrm{d}x$$

è sempre una quantità ≥ 0, per la proprietà di positività.

Funzione integrale Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e sia $x_0 \in [a, b]$. Allora $\forall x \in [a, b]$, possiamo considerare la funzione:

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t) dt$$

Questa funzione sarà chiamata "funzione integrale di f di punto iniziale x_0" e $f(t)$ sarà chiamata "funzione integranda".
Importante: se f è continua, F sarà la sua primitiva, come dice il Teorema fondamentale del calcolo integrale, quindi $F'(x) = f(x)$.

La funzione integrale è lipschitziana Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a, b]$, sia $x_0 \in [a, b]$.
Tesi:

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

è lipschitziana in $[a, b]$

Dimostrazione: valutiamo la sottrazione $F(x) - F(y)$, ovvero:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{y} f(t)dt$$

Per la proprietà di additività (5):

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{y} f(x)\mathrm{d}x + \int_{y}^{x} f(x)\mathrm{d}x$$

per cui, sostituendo nella nostra sottrazione, otteniamo che:

$$F(x) - F(y) = \int_{y}^{x} f(x)\mathrm{d}x$$

Dato che vogliamo verificare se la funzione è lipschitziana, consideriamo il valore assoluto:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_{y}^{x} f(x)\mathrm{d}x \right|$$

e, per il teorema 5,

$$\left| \int_{y}^{x} f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \left| \int_{y}^{x} |f(x)|\mathrm{d}x \right|$$

che equivale a:

$$\begin{cases} \left| \int_{[x,y]} |f(x)|\mathrm{d}x \right| & \text{se } x < y \\ \left| \int_{[y,x]} |f(x)|\mathrm{d}x \right| & \text{se } x > y \end{cases}$$

Questi valori assoluti sono superflui per proprietà di positività (5), in quanto si tratta di integrali di funzioni ≥ 0. Riscriviamo dunque, tenendo conto del teorema della media (5):

$$\begin{cases} \int_{[x,y]} |f(x)| \mathrm{d}x \leq \sup_{[a,b]} |f|(y-x) \\ \int_{[y,x]} |f(x)| \mathrm{d}x \leq \sup_{[a,b]} |f|(x-y) \end{cases}$$

uniformiamo le due scritture del sup in questo modo:

$$\sup_{[a,b]} |f||x-y|$$

Se poniamo:

$$\sup_{[a,b]} |f| = L$$

la tesi è dimostrata.

Teorema fondamentale del calcolo integrale Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Sia $x_0 \in [a, b]$ e sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita dalla legge:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

Tesi: $F \in C^1([a, b])$ e $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$
Ricordiamo che sono in $C^1([a, b])$ le funzioni con derivata continua in $[a, b]$.

Dimostrazione: sia $x' \in [a, b]$ e proviamo che $F'(x') = f(x')$, quindi dobbiamo provare che:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x' + h) - F(x')}{h} = f(x') \qquad \text{con } h \in \mathbb{R} : x' + h \in [a, b]$$

Per ipotesi f è continua in x', quindi:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall x \in [a, b]\ |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon \tag{1}$$

A partire da questo, proviamo che:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \sigma > 0 : \forall h\ 0 < |h| < \sigma \implies \left| \frac{F(x' + h) - F(x')}{h} - f(x') \right| < \varepsilon$$

Calcoliamo l'espressione:

$$\frac{F(x' + h) - F(x')}{h}, \text{ ovvero } \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x'+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x'} f(t)dt \right)$$

Usiamo la Proprietà di additività sul primo integrale, ottenendo:

$$\frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x'} f(t)dt + \int_{x'}^{x'+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x'} f(t)dt \right) = \frac{1}{h} \left(\int_{x'}^{x'+h} f(t)dt \right)$$

$$\text{che equivale a } \frac{1}{h} \int_{[x', x'+h]} f(t)dt \text{ se } h > 0 \text{ o } -\frac{1}{h} \int_{[x'+h, x']} f(t)dt \text{ se } h < 0$$

Per il teorema della media II (5), queste quantità equivalgono alla media integrale, e quindi $\exists\ c \in I(x', x' + h)$ tale che esse equivalgono a $f(c)$.

Torniamo all'inizio, scegliendo $\sigma = \delta$, quindi $0 < |h| < \delta$, cioè $0 < |c - x'| < \delta$

$$\text{Per 1, } |f(c) - f(x')|, \text{ ovvero } \left| \frac{F(x' + h) - F(x')}{h} - f(x') \right| < \varepsilon \text{ c.v.d.}$$

5.1 Teorema della media III

Ultima versione: si tratta letteralmente solo di applicare il teorema di Lagrange alla funzione integrale.
Rispetto al teorema della media 2 cambia che nella tesi, in questo teorema, l'intervallo è aperto.
Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua.
Tesi: $\exists\ c \in]a, b[$ tale che:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f(x)dx$$

Dimostrazione: dato che f è continua, vale il teorema precedente, quindi: $x_0 \in [a, b]$, $\quad F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, $x \in [a, b]$ tale che $F \in C^1([a, b])$ e $F'(x) = f(x)$.

Dato che $F \in C^1([a, b])$, soddisfa le condizioni del Teorema di Lagrange, quindi:

$$\exists\ c \in]a, b[\ : \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(c)$$

Riscriviamo:

$$\frac{1}{b-a}\left\{\int_{x_0}^{b} f(x)dx - \int_{x_0}^{a} f(x)dx\right\} = f(c)$$

Usiamo la Proprietà di additività sul primo integrale:

$$\frac{1}{b-a}\left\{\int_{x_0}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx - \int_{x_0}^{a} f(x)dx\right\} = f(c)$$

Rimaniamo con:

$$\frac{1}{b-a}\left\{\int_{a}^{b} f(x)dx\right\} = f(c)$$

ovvero:

$$\frac{1}{b-a}\left\{\int_{[a,b]} f(x)dx\right\} = f(c)$$

c.v.d.

Integrale indefinito Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. L'insieme (eventualmente vuoto) di tutte le primitive di f in $[a, b]$ si chiama integrale indefinito di f, e lo si denota col seguente simbolo:

$$\int f(x)dx$$

Teorema di Torricelli Il metodo standard per calcolare integrali definiti.
Ipotesi: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e sia $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f. Siano $\alpha, \beta \in [a, b]$.
Tesi:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

Dimostrazione: il teorema fondamentale del calcolo integrale (5) ci dice che $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita dalla legge:

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

è una primitiva di f. Poiché siamo in un intervallo $[a, b]$, le primitive F e G differiscono per una costante per il teorema (4.4.3), quindi:

$$F(x) = G(x) + k \quad \forall x \in [a, b]. \tag{2}$$

Quindi, se $x = \alpha \implies F(\alpha) = G(\alpha) + k$. Ma $F(\alpha)$ è $\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt$, ovvero 0.

Ne deduciamo che che $k = -G(\alpha)$. Tenendo conto di questo, la relazione 2 diventa $F(x) = G(x) - G(\alpha) \quad \forall x \in [a, b]$

La consideriamo quindi per $x = \beta$, ottenendo:

$$F(\beta) = G(\beta) - G(\alpha) \quad \forall x \in [a, b]$$

La tesi è dimostrata, dato che che $F(\beta) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$

Vediamo ora i due metodi di integrazione più famosi: per parti e per sostituzione.

Integrazione per parti Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R};\ \ f, g \in C^1([a, b])$
Tesi:

$$\forall \alpha, \beta \in [a, b] \implies \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$$

$$\text{Per integrale indefinito:} \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx,$$

o più compattamente:

$$\int g\, df = fg - \int f\, dg.$$

Questo metodo è utile quando l'integrale del secondo membro è più facile di quello del primo membro, per esempio se abbiamo da integrare un logaritmo. È possibile scrivere $[f(x)g(x)]_\alpha^\beta$ anche come $f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha)$.

Dimostrazione per integrale definito: utilizziamo il teorema di derivazione del prodotto:
$[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
le funzioni così ottenute sono certamente continue, quindi possiamo passare agli integrali di entrambi i membri:

$$\int_\alpha^\beta [f(x)g(x)]'dx = \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$$

$$[f(x)g(x)]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$$

$$\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$$

Per l'integrale indefinito il procedimento è identico, ma senza gli estremi di integrazione.

Integrazione per sostituzione Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\alpha, \beta \in [a,b]$. Sia $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1([c,d])$, $\varphi'(t) > 0 \in [c,d]$. Supponiamo inoltre che $\varphi([c,d]) = [a,b]$.

Tesi:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

dove quell'uguale sottintende $x = \varphi(t)$.

Dimostrazione: f è continua in $[a,b]$, quindi per il Teorema fondamentale del calcolo integrale ha primitiva in $[a,b]$, chiamiamola F:
$F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F \in C^1([a,b])$ e $F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in [a,b]$.

Per il Teorema di derivazione della funzione composta:
$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \forall t \in [c,d]$

Consideriamo l'integrale definito di ambo i membri:

$$\int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} [F(\varphi(t)]'dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Usando Torricelli sul primo membro si ottiene $F(\varphi(\varphi^{-1}(\beta))) - F(\varphi(\varphi^{-1}(\alpha)))$, ovvero $F(\beta) - F(\alpha)$, che è uguale a:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \text{ tesi dimostrata.}$$

5.2 Integrali in senso generalizzato e improprio

Integrali in senso generalizzato Finora abbiamo considerato integrali di funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitate. Prendiamo adesso in esame funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ non limitate: possiamo imbatterci in 4 diverse situazioni.

1. $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ non limitata in un intorno sinistro di b e integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a, b-\varepsilon]$, con $0 < \varepsilon < b-a$. In tal caso:

   $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

   f è integrabile in senso generalizzato (s.g.) in $[a,b]$ se questo limite esiste.

   Se il limite è finito, diremo che f è sommabile in s.g.

2. $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ non limitata in un intorno destro di a e integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a+\varepsilon, b]$, con $0 < \varepsilon < b-a$. In tal caso:

   $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

   f è integrabile in s.g. in $[a,b]$ se questo limite esiste.

   Se il limite è finito, diremo che f è sommabile in s.g.

3. $c \in]a,b[, \quad f : [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ non limitata in un intorno di c e integrabile secondo Riemann in ogni intervallo chiuso contenuto in $[a,b] \setminus \{c\}$. f è sommabile in s.g. in $[a,b]$ se lo è in $[a,c]$ e in $[c,b]$, e in tal caso porremo:

   $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Ultimo caso: siano $c_2, c_2 \in [a,b], \quad c_1 < c_2. \quad f : [a,b] \setminus \{c_1, c_2\} \to \mathbb{R}$ non limitata in un intorno di c_1 e c_2 e integrabile secondo Riemann in ogni intervallo chiuso contenuto in $[a,b] \setminus \{c_1, c_2\}$.

   Sia $\tilde{c} \in]c_1, c_2[$. Diremo che f è sommabile in s.g. in $[a,b]$ se lo è nei 4 intervalli:

$[a, c_1]; [c_1, \tilde{c}]; [\tilde{c}, c_2]; [c_2, b]$. In tal caso:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{\tilde{c}} f(x)dx + \int_{\tilde{c}}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^b f(x)dx$$

Tutti i teoremi successivi saranno enunciati nel caso 1 di 4.

Funzione di confronto per determinare la sommabilità in s.g. La useremo anche per determinare il carattere delle serie, quindi una funzione importante. Si tratta della seguente:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Una funzione non negativa è integrabile in s.g. Uno dei teoremi più importanti.
Ipotesi: $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ non limitata in un intorno sinistro di b e integrabile secondo Riemann in $[a, b - \varepsilon]$, con $0 < \varepsilon < b - a$.
Supponiamo che $f(x) \geq 0$ in $[a, b]$

Tesi: f è integrabile in s.g., cioè esiste il $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \displaystyle\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

Dimostrazione: chiamiamo $F(\varepsilon)$ l'integrale $\displaystyle\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

Ovvero una funzione in ε, definita in $]0, b - a[\to \mathbb{R}$. Per dimostrare che ha limite, ci possiamo servire del teorema di regolarità di funzione monotona (2.1), quindi dobbiamo semplicemente provare che $F(\varepsilon)$ è monotona decrescente, ovvero:
$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \implies F(\varepsilon_1) \geq F(\varepsilon_2)$.

Prendo $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ e valuto $F(\varepsilon_1) - F(\varepsilon_2)$, quindi:

$$\int_a^{b-\varepsilon_1} f(x)dx - \int_a^{b-\varepsilon_2} f(x)dx = \int_a^{b-\varepsilon_2} f(x)dx + \int_{b-\varepsilon_2}^{b-\varepsilon_1} f(x)dx - \int_a^{b-\varepsilon_2} f(x)dx$$

Rimaniamo dunque solo con l'integrale

$$\int_{b-\varepsilon_2}^{b-\varepsilon_1} f(x)dx$$

Per proprietà di positività (5), un'integrale di Riemann di una funzione ≥ 0 è ≥ 0. Questo vuol dire che $F(\varepsilon_1) - F(\varepsilon_2) \geq 0$, c.v.d.

Osservazione Questo teorema ci dice che le funzioni positive hanno limite:

- se è finito, la funzione è sommabile
- se è infinito, la funzione non è sommabile

Capiremo se un limite del genere è finito o infinito attraverso il confronto.

Linearità di integrali generalizzati Teorema che avevamo invece visto solo per gli integrali di Riemann.

Ipotesi: $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ non limitate in un intorno sinistro di b e integrabili secondo Riemann in $[a, b-\varepsilon]$, con $0 < \varepsilon < b - a$. Siano α, β costanti reali.

Tesi: f e g sono sommabili in s.g. in $[a, b] \implies \alpha f + \beta g$ è sommabile in s.g. in $[a, b]$ e vale:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Dimostrazione:
Sia $\varepsilon \in [0, b-a]$. Per linearità di integrali di Riemann:

$$\int_a^{b-\varepsilon} [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^{b-\varepsilon} f(x) + \beta \int_a^{b-\varepsilon} g(x)dx$$

La tesi si ottiene passando al limite per ε che tende a 0^+.

Positività di integrali generalizzati Ipotesi: $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ non limitate in un intorno sinistro di b e integrabili secondo Riemann in $[a, b-\varepsilon]$, con $0 < \varepsilon < b - a$.
Supponiamo che $f(x) \geq 0$ in $[a, b[$

Tesi: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Dimostrazione: per il Teorema della permanenza del segno, il seguente limite:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

non può essere negativo, in quanto è limite di una funzione non negativa. Tesi dimostrata.

Monotonia di integrali generalizzati Ipotesi: $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ non limitate in un intorno sinistro di b e integrabili secondo Riemann in $[a, b-\varepsilon]$, con $0 < \varepsilon < b - a$.
Supponiamo che :

1. f, g siano integrabili in s.g. in $[a, b]$
2. $f(x) \leq g(x)$ in $[a, b]$

   Tesi: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Teorema del confronto di integrali generalizzati Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ non limitate in un intorno sinistro di b e integrabili secondo Riemann in $[a, b-\varepsilon]$, con $0 < \varepsilon < b - a$.

Supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in $[a, b[$

Tesi:

1. g sommabile in s.g. in $[a, b] \implies f$ sommabile in s.g. in $[a, b]$
2. f non sommabile in s.g. in $[a, b] \implies g$ non sommabile in s.g. in $[a, b]$

Dimostriamo la tesi 1: dato che le funzioni sono non negative in $[a, b[$, per il teorema 5.2 sono integrabili in s.g. in $[a, b]$ e i loro integrali sono decrescenti. Per la monotonia dell'integrale di Riemann:

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \leq \int_a^{b-\varepsilon} g(x)dx \quad \forall \varepsilon \in]0, b-a[$$

L'integrale di g è una funzione limitata superiormente, dato che g è sommabile in senso generalizzato in $[a, b]$, e limitata inferiormente dato che è ≥ 0.

Dato che ha limite finito, anche la funzione a sinistra deve avere limite finito. Possiamo quindi affermare, come volevasi dimostrare, che:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} g(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Allo stesso modo si dimostra la tesi 2.

Teorema per determinare la sommabilità in s.g. :
Ipotesi: $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ non limitate in un intorno sinistro di b e integrabili secondo Riemann in $[a, b-\varepsilon]$, con $0 < \varepsilon < b - a$.

Supponiamo che esista:

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l > 0 & \\ 0 & f < g \\ +\infty & f > g \end{cases}$$

Tesi:
Nel primo caso f e g hanno lo stesso comportamento (f sommabile $\iff$ g

lo è).
Nel secondo caso $f < g$, quindi se g è sommabile, f è sommabile; se f non è sommabile, g non è sommabile.
Nel terzo caso, l'opposto.

Un esempio di g buona, in quanto ne conosciamo il comportamento, è:

$$g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$$

Sappiamo che:

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \begin{cases} +\infty & \alpha \geq 1 \\ \text{una quantità finita l, ovvero } -\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha < 1 \end{cases}$$

Usando questa funzione come prototipo, possiamo determinare la sommabilità di f in questo modo:

$$\lim_{x \to b^-} f(x)(b-x)^\alpha = \begin{cases} l > 0 & f \text{ somm. } \iff \alpha < 1, \text{ non somm. } \iff \alpha \geq 1 \\ 0 & f \text{ è sommabile se } \alpha < 1 \\ +\infty & f \text{ non è sommabile se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Funzione assolutamente sommabile in s.g. Se volessimo stabilire la sommabilità della funzione

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$$

ci imbatteremmo in un problema: non soddisfa l'ipotesi di essere ≤ 0 (è oscillante), quindi non possiamo usare il teorema del confronto. Per casi come questo, introduciamo il concetto di assoluta sommabilità in s.g.

Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ non limitata in un intorno sinistro di b e integrabile secondo Riemann in $[a, b-\varepsilon]$, con $0 < \varepsilon < b-a$.

f si dirà "assolutamente sommabile in s.g. in $[a, b]$" se $|f|$ è sommabile in s.g.

f **assolutamente sommabile in s.g.** $\Longrightarrow$ f **sommabile in s.g.** Ipotesi: $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ non limitata in un intorno sinistro di b e integrabile secondo Riemann in $[a, b - \varepsilon]$, con $0 < \varepsilon < b - a$.

Tesi: f assolutamente sommabile in s.g. $\Longrightarrow$ f sommabile in s.g. e in tal caso:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

il quale è l'opposto di un teorema che avevamo visto, ovvero f integrabile secondo Riemann $\Longrightarrow$ $|f|$ integrabile secondo Riemann.

Dimostrazione: $0 \leq f^+ \leq |f|$ e $0 \leq f^- \leq |f|$.
Dato che f^+ e f^- sono entrambe positive e le stiamo maggiorando con una funzione sommabile, allora per il teorema del confronto sono sommabili.

Per il teorema di linearità, la somma di due funzioni sommabili è sommabile in senso generalizzato, quindi $f^+ - f^- = f$ è sommabile in s.g.
c.v.d.

Dimostriamo ora la disuguaglianza degli integrali: riscriviamo l'integrale

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b f^+(x)dx \right| - \left| \int_a^b f^-(x)dx \right|$$

per disuguaglianza triangolare, questa quantità è $\leq$ di:

$$\left| \int_a^b f^+(x)dx \right| + \left| \int_a^b f^-(x)dx \right|$$

che possiamo riscrivere senza il valore assoluto, dato che gli integrali di funzioni positive sono positivi (proprietà di positività):

$$\int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx$$

il che equivale a

$$\int_a^b f^+(x) + f^-(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

c.v.d.

Integrali in senso improprio Si tratta di integrali definiti in intervalli non limitati, i quali si distinguono i 3 tipi:

1. $]-\infty, a]$
2. $[a, +\infty[$
3. $]-\infty, +\infty[$

Primo tipo $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in un intervallo $[a, T]$ per ogni $T > a$ si dirà integrabile in senso improprio (s.i.) in $[a, +\infty[$ se esiste:

$$\lim_{T \to \infty} \int_a^T f(x)dx$$

in tal caso, porremo:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{T \to \infty} \int_a^T f(x)dx$$

Diremo che f è sommabile in senso improprio in $[a, +\infty[$ se il limite è finito.

Secondo tipo $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in un intervallo $[T, a]$ per ogni $T < a$ si dirà integrabile in senso improprio in $]-\infty, a]$ se esiste:

$$\lim_{T \to -\infty} \int_T^a f(x)dx$$

in tal caso, porremo:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{T \to -\infty} \int_T^a f(x)dx$$

Diremo che f è sommabile in senso improprio in $]-\infty, a]$ se il limite è finito.

Terzo tipo $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in ogni intervallo limitato, si dirà integrabile in senso improprio in $]-\infty, +\infty[$ se esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{T \to -\infty} \int_T^0 f(x)dx \text{ e } \lim_{T \to \infty} \int_0^T f(x)dx$$

Diremo che f è sommabile in senso improprio in $]-\infty, +\infty[$ se lo è in $]-\infty, 0]$ e $[0, +\infty[$ (quindi al posto di 0 possiamo mettere qualsiasi numero). In tal caso, porremo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

Una funzione non negativa è integrabile in s.i. Ipotesi: $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a, T]$ con $T > a$. Supponiamo che $f(x) \geq 0$ in $[a, +\infty[$.

Tesi: f è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$.

Dimostrazione: la stessa del teorema del teorema 5.2:

Chiamiamo

$$\int_{a}^{T} f(x)dx = F(T)$$

Questa è la funzione integrale di f, dimostriamo che sia monotona crescente, ovvero che $T_1 \leq T_2 \implies F(T_1) \leq F(T_2)$. Procediamo dunque a calcolare la differenza:

$$F(T_2) - F(T_1) = \int_{a}^{T_2} f(x)dx - \int_{a}^{T_1} f(x)dx$$

$$\text{Che riscriviamo come } \int_{a}^{T_1} f(x)dx + \int_{T_1}^{T_2} f(x)dx - \int_{a}^{T_1} f(x)dx$$

Rimaniamo con

$$\int_{T_1}^{T_2} f(x)dx$$

Si tratta di un integrale di Riemann di una funzione ≥ 0, quindi per proprietà di positività è ≥ 0, c.v.d.

Linearità, positività, additività e monotonia di integrali impropri Queste proprietà valgono normalmente per integrali impropri (dimostrazione analoga al caso di integrali generalizzati).

Teorema del confronto di integrali impropri 1 Ipotesi:
$f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrabili secondo Riemann in $[a, T]$ per ogni $T > a$. Supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in $[a, +\infty[$.

Tesi:

1. se g è sommabile in s.i. in $[a, +\infty[$, f lo è.
2. se f non è sommabile in s.i. in $[a, +\infty[$, g non lo è.

Dimostrazione: analoga a quella del Teorema del confronto di integrali generalizzati

Nella pratica, per vedere quale è maggiore tra f e g, facciamo il limite del rapporto, che vediamo nel seguente teorema

Teorema del confronto di integrali impropri 2 In realtà corollario del teorema precedente.
Ipotesi: $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a, T]$ con $T > a$. Supponiamo che $f, g > 0$ in $[a, +\infty[$.

Tesi:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \\ 0 \\ +\infty \end{cases}$$

Nel primo caso, f e g hanno lo stesso comportamento (se una è sommabile, l'altra lo è; se una non è sommabile, l'altra non lo è.)
Nel secondo caso, g sommabile $\implies$ f sommabile e f non sommabile $\implies$ g non sommabile.
Nel terzo caso, f sommabile $\implies$ g sommabile e g non sommabile $\implies$ f non sommabile.

Una volta scelta una funzione che conosciamo bene, ovvero:

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

possiamo ricavare la sommabilità di una f:

$$\lim_{x \to \infty} x^\alpha f(x) = \begin{cases} l & f \text{ è sommabile se } \alpha > 1\text{, non sommabile se } \alpha \leq 1 \\ 0 & f \text{ è sommabile se } \alpha > 1 \\ +\infty & f \text{ non è sommabile se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Assoluta sommabilità di integrale improprio Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a, T]$ con $T > a$. Diremo che f è assolutamente sommabile in senso improprio in $[a, +\infty[$ se $|f|$ è sommabile in s.i. in $[a, +\infty[$

Assoluta sommabilità in s.i. implica sommabilità in s.i. Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a, T]$ con $T > a$.

Tesi: se f è assolutamente sommabile in s.i. in $[a, +\infty[$, allora è anche sommabile in s.i. in $[a, +\infty[$, e in tal caso:

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

Dimostrazione analoga ..

5.3 Come calcolare integrali

La procedura da applicare per risolvere un integrale varia in base alla situazione in cui ci troviamo. In generale il problema dell'integrazione è risolto dal teorema di Torricelli (5.1): data una funzione f si trova una sua primitiva F. Si calcolano poi $F(b)$ e $F(a)$: la loro differenza è pari all'integrale definito di f tra a e b:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \iff F'(x) = f(x).$$

Formulario degli integrali indefiniti:
`https://www.math.it/formulario/integrali.htm`

Vediamo alcuni metodi di integrazione.

1. Integrazione di una funzione costante k:

   $$\int_a^b kdx = (b - a) \cdot k$$

   es:

   $$\int_1^5 6dx = (5 - 1) \cdot 6 \quad = \quad 30 - 6 = 24$$

2. Integrazione per parti (5.1)

3. Integrazione per sostituzione (5.1)
4. Integrazione di funzioni razionali $f(x)$, cioè frazioni tra polinomi:

$$\int f(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Ogni funzione razionale è continua, quindi per il teorema fondamentale del calcolo integrale ammette primitive; cerchiamo di capire come trovarle.
Il grado del polinomio al numeratore deve essere **strettamente** minore di quello del denominatore; se così non è, possiamo effettuare la divisione tra polinomi per ottenere:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left[q(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\right] dx = \int q(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx,$$

dove q e R sono polinomi e il grado di R è minore di quello di Q.
A questo punto si può procedere tramite **fratti semplici**:

   (a) Si fattorizza il denominatore (si può usare il metodo di Ruffini, di somma e prodotto, o quello che si preferisce)

   (b) Si decompone la frazione in fratti semplici, ovvero frazioni semplici da integrare.

   (c) Si integrano le piccole funzioni e si sommano i risultati.

5. Integrazione di una funzione non razionale riconducendola a una funzione razionale, per esempio

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R} : ad - bc \neq 0$. L'integrale:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

Si può risolvere sostituendo l'intero radicale con un'altra variabile, secondo il teorema di integrazione per sostituzione:

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Torna utile conoscere la tecnica del completamento del quadrato.

6.

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}dx$$

Si può risolvere con il completamento del quadrato, in modo da ricondursi al caso 7

7.

$$\int \frac{1}{(x+a)^k}dx$$

se $k = 1$, il risultato è immediato, ovvero $\ln|x+a| + c$
se $k \geq 2$, si riscrive $\dfrac{1}{(x+a)^k}$ come $(x+a)^{-k}$ e si usa la regola di derivata di una potenza.

8. I più complessi:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx.$$

Si distinguono i due casi:

$a > 0$: Si pone $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x+t)$ e si svolgono i calcoli.

$a < 0$: Si raccoglie:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a(x-\alpha)(x-\beta),$$

con $\alpha < x < \beta$, radici del polinomio. Segue:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}(x-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}.$$

Di conseguenza:

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R\left(x, \frac{\beta-x}{x-\alpha}\right),$$

e quindi l'integrale si riconduce al tipo 5.

9. Tre tipi di funzione:

$$\int R(x, \sqrt{x^2+1})dx \quad \int R(x, \sqrt{x^2-1})dx \quad \int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$$

Il primo caso si risolve ponendo $x = \sinh t$, con $t \in \mathbb{R}$.
Il secondo caso si risolve ponendo $x = \cosh t$, con $t \in [0, +\infty[$.
Nel terzo caso si deve ricordare che $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ è la derivata di $\arcsin x$. Si può anche sostituire $1 - x^2 = y$.

10. I più facili di tutti:

$$\int R(e^x)dx$$

ovvero funzioni razionali dove i polinomi del numeratore e denominatore dipendono da e^x, per esempio:

$$\int \frac{1}{e^{2x}-1}dx$$

Si risolvono ponendo $e^x = t$, quindi $x = \ln t$

A questo punto ci siamo ricondotti a:

$$\int R(t)\frac{1}{t}dt,$$

che si risolve con i metodi elencati sopra.

11. Integrali con sinh e cosh (potenze di queste funzioni e somme), si possono ricondurre a integrali di $R(e^x)$, tranne se prima ci si accorge che sono più "semplici", cioè risolvibili con formule note o sostituzioni.

12.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

In questo caso (sempre se non ci accorgiamo di metodi migliori per risolverli) si usano le formule parametriche su seno e coseno, poi si pone $\tan \frac{x}{2} = t$, da cui si ricava che $x = 2 \arctan t$.

13. Integrali in senso generalizzato e in senso improprio: prima si calcola l'integrale definito con Torricelli, poi si fa il limite che tende a 0 (o a infinito).

14. Determinare la sommabilità di f in senso generalizzato (5.2) e in senso improprio (5.2).

5.3.1 Formule varie

Parametriche:

- $$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

- $$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

  con $t = \tan \frac{x}{2}$ e $x \neq \pi + k\pi$

Funzioni iperboliche Per l'orale: sapere almeno il dominio, le immagini e il grafico delle funzioni sinh (funzione dispari) e cosh (funzione pari).

- $$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

- $$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

6 Serie numeriche

Una seria numerica è una somma di infiniti addendi. Non è detto che il risultato di una somma del genere sia necessariamente infinito: una serie può essere infatti convergente (risultato finito), divergente positivamente ($+\infty$), negativamente ($-\infty$) oppure oscillante (senza risultato); questo "comportamento" viene chiamato **carattere** della serie, e vedremo come individuarlo.

Successione di somme parziali Data una successione numerica $\{a_n\}$, con $a_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, chiamiamo **successione di somme parziali** la successione $\{s_n\}$ tale che:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Per visualizzarla meglio, $s_n = a_1 + \cdots + a_n$.

Serie numerica Chiamiamo la coppia ordinata $(\{a_n\},\{s_n\})$ **serie numerica** di **termine generale** $\{a_n\}$ e successione delle somme parziali $\{s_n\}$.

La esprimiamo nel seguente modo: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Serie convergente, divergente, oscillante Unendo la definizione di serie con quella di successione di somme parziali, scopriamo che

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Quindi, per determinare il carattere della serie, basta esaminare quel limite.

Se esiste ed è finito (chiamiamolo s), la serie si dice convergente:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \implies |s_n - s| < \varepsilon$.

Se esiste e fa $+\infty$, la serie si dice divergente:
$\forall T > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \implies s_n > T$

Se esiste e fa $-\infty$, la serie diverge negativamente:
$\forall T > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \implies s_n < -T$

Se invece non esiste, la serie è detta oscillante.

Serie geometrica Con gli strumenti di ora possiamo calcolare solo poche serie, per esempio la serie geometrica: $q \in \mathbb{R}$, $\{q^{n-1}\}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n+1}$$

q viene chiamato "ragione" della serie geometrica. Studiamo il carattere della serie: per $q = 1$, essa diverge a $+\infty$; studiamo il caso $q \neq 1$:
$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$
$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n - q^n$
$s_n = 1 + q + \cdots + q^n - q^n$
$s_n = 1 + q(1 + q + \cdots + q^{n-1}) - q^n$. La quantità dentro parentesi non è altro che s_n, quindi:
$s_n = 1 + qs_n - q^n$
$s_n - qs_n = 1 - q^n$
$s_n(1 - q) = 1 - q^n$
infine, concludiamo che:

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Per cui:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & -1 < q < 1 \\ +\infty & q \geq 1 \\ \nexists \text{ (oscillante)} & q \leq -1 \end{cases}$$

Serie di Mengoli Un altro esempio di serie particolare che possiamo già calcolare è la cosiddetta serie di Mengoli, ovvero:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

studiamo il suo carattere attraverso la successione di somme parziali. È possibile riscrivere:

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x(x+1)} = \sum_{x=1}^{n} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$$

se svolgiamo ora la sommatoria, otteniamo s_n, ovvero:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

come vediamo, tutti i termini ad eccezione del primo e dell'ultimo si tagliano:

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

per capire il carattere della serie, facciamo il limite:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

La serie è quindi convergente e ha somma 1.

Serie telescopica La serie precedente fa parte di una famiglia di serie dette telescopiche, ovvero serie per le quali esiste una successione $\{b_n\}$ tale che $a_n = b_n - b_{n+1}$ per ogni n. In tal caso:
$s_n = a_1 + \cdots + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$.

Una serie a termini non negativi converge o diverge positivamente
Definiamo una serie "a termini non negativi" una serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad a_n \geq 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

Dato che essa non oscilla, è regolare. Dimostrazione: basta osservare che s_n è monotona crescente, cioè $s_n \leq s_{n+1}$, e questo lo vediamo dato che $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$ c.v.d.

Serie armonica Un esempio di serie a termini non negativi è quella armonica.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Sappiamo che è regolare per il teorema di sopra, resta ora da capire se è divergente o convergente. Per provare che diverge, mostriamo che un'estratta di s_n è divergente. Si ha:

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

scriviamo delle parentesi che raggruppano questi termini, fermandoci quando ai denominatori incontriamo potenze del due:

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots \frac{1}{8}\right) + \dots \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots \frac{1}{2^n}\right)$$

la prima parentesi contiene 2 elementi, la seconda 2^2, e così via; l'ultima ne contiene 2^{n-1}. Questa serie di somme è sicuramente maggiore di:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{1}{8}\right) + \dots \left(\frac{1}{2^n} + \dots \frac{1}{2^n}\right)$$

se si svolgono i calcoli, si vede che dentro ogni parentesi non c'è altro che $\frac{1}{2}$, quindi la somma è:

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

ovvero $1 + \frac{n}{2}$, che diverge a $+\infty$. Dato che avevamo detto che l'estratta è maggiore, allora anche essa diverge a $+\infty$, quindi deduciamo che anche s_n ha lo stesso comportamento.

Prodotto e somma di serie Date due serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Supponiamo siano regolari. Possiamo dire che:

1. Se

   $$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n \text{ ha lo stesso carattere di } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

   $$\text{ed è uguale a } \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

2. Se le serie non divergono a $+\infty$ e $-\infty$ contemporaneamente (es: se la prima diverge a $+\infty$ e la seconda a $-\infty$ o viceversa), allora la serie somma è pari alla somma delle serie:

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Criterio di Cauchy per le serie Questo criterio afferma che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge } \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : \forall p \in \mathbb{N} \ |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Dimostrazione verso destra:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge } \iff s_n \text{ converge } \iff s_n \text{è una Successione di Cauchy}$$

Questo significa che:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m > \nu \quad |s_m - s_n| < \varepsilon$

Possiamo semplificare la sottrazione nella scrittura (es: $s_4 - s_3 = a_4$): Poniamo $m > n > \nu$, scegliamo che $m - n = p \in \mathbb{N}$, quindi $m = n + p$.
A questo punto, vediamo che $|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}|$; possiamo riscrivere la condizione:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : \forall p \in \mathbb{N} \ |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$, c.v.d.

Dimostrazione verso sinistra: possiamo riscrivere la condizione come:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m > \nu \quad |s_m - s_n| < \varepsilon$, quindi la successione $\{s_n\}$ converge, quindi la serie converge, c.v.d.

Dal punto di vista pratico, non lo useremo mai per determinare il carattere di una serie; piuttosto, useremo altri teoremi e criteri, tra cui il seguente:

Condizione necessaria per la convergenza di una serie Conseguenza del criterio di Cauchy

Ipotesi: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

Tesi: $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Dimostrazione: se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\implies$ vale il criterio di Cauchy, ovvero:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n \in \mathbb{N} : \forall p \in \mathbb{N} \ |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$. Scegliendo $p = 1$, avremo:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n \in \mathbb{N} : |a_{n+1}| < \varepsilon, \text{ ovvero } \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Non vale il viceversa (es: serie armonica), ma questo è un utile strumento, perchè afferma che **se una serie converge, allora il termine generale tende a 0.**

Serie resto

Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

chiameremo "resto $k-$esimo" la serie $\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$

ovvero la serie che si ottiene togliendo dall'originale i primi k termini generali.

Si dimostra (non lo facciamo in quanto è intuitivo) che una serie ha lo stesso carattere di tutti i suoi resti.

Per esempio, se abbiamo una serie dove i primi k termini sono alcuni positivi e altri negativi, ma poi dal termine $k+1$ sono tutti positivi, allora possiamo affermare che la serie è regolare, dato che il resto è a termini non negativi e dunque regolare.

6.1 Serie a termini non negativi

Trattiamo ora di teoremi che riguardano le serie a termini non negativi (e, nei casi in cui abbiamo denominatori in gioco, serie a termini positivi). Come abbiamo già detto, queste serie sono regolari, ma dobbiamo capire se convergono o divergono.

Teorema del confronto di serie 1

$$\text{Date le serie } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ (P.S. si può anche usare $\forall n > \nu$, in quanto ci riferiremmo ai resti $\nu-$esimi, e questo vale anche per altri teoremi che seguono).

Tesi:

1. $$\text{Se } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ è convergente } \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ lo è.}$$

2. $$\text{Se } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ è divergente } \implies \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ lo è.}$$

Dimostrazione della tesi 1: analoga a quella dei teoremi di confronto di integrali impropri e generalizzati. Detta s_n la successione di somme parziali della prima serie e t_n della seconda, sappiamo che $s_n \leq t_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sono successioni monotone crescenti per loro definizione, ed essendo t_n anche limitata superiormente, allora converge. Per questo motivo, anche s_n è limitata e dunque convergente $\implies$ la serie di a_n converge, c.v.d.

Dimostrazione tesi 2: s_n non è limitata superiormente, quindi nemmeno t_n (dato che è $\geq s_n$). Questo vuol dire che entrambe le serie divergono positivamente, c.v.d.

Teorema del confronto di serie 2 Siano

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

serie numeriche a termini positivi.

Supponiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} l > 0 \\ 0 \\ +\infty \end{cases}$$

Tesi:
Nel primo caso, le due serie hanno lo stesso carattere
Nel secondo caso, $a_n < b_n$, quindi

- Se la prima serie diverge, la seconda diverge
- Se la seconda serie converge, la prima converge

Nel terzo caso, siamo nel caso 2 ma invertito.

Dimostrazione 1: dato che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

vuol dire che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \quad l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$

Scegliamo $\varepsilon = \frac{l}{2}$, quindi:

$$\frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} l$$

ovvero $\frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} l b_n$

Da qua, si vede che la tesi è dimostrata.

Dimostrazione 2: si procede similmente, ma, essendo $\frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$, scegliamo $\varepsilon = 1 \implies a_n < b_n$.

Dimostrazione 3: come nel caso 2, ma otteniamo $a_n > b_n$.

Come abbiamo fatto per gli integrali, scegliamo una serie prototipo, ovvero la cosiddetta serie armonica generalizzata (non possiamo dimostrare i risultati adesso, ma solo più avanti):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{Diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \text{converge a } l & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Questi risultati sono da tenere a mente per capire la tesi del teorema successivo:

Teorema del confronto di serie 3 Ovvero al posto di b_n usiamo $\frac{1}{n^\alpha}$.

$$\text{Sia } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ una serie numerica a termini non negativi}$$

$$\text{Supponiamo che } \lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = \begin{cases} l > 0 \\ 0 \\ +\infty \end{cases}$$

Tesi:
Nel primo caso, le due serie avranno lo stesso carattere.
Nel secondo caso, la prima serie è convergente se $\alpha > 1$, poiché $a_n < \frac{1}{n^\alpha}$
Nel terzo caso, la prima serie è divergente se $\alpha \leq 1$, perchè $a_n > \frac{1}{n^\alpha}$

Teorema della radice

$$\text{Sia} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ con } a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 < h < 1$$

Tesi:

1. Se $\sqrt[n]{a_n} \leq h \ \forall n \in \mathbb{N}$, allora la serie converge
2. Se esistono infiniti $n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} \geq 1$, la serie diverge.

Dimostrazione della tesi 1: $\sqrt[n]{a_n} \leq h \ \forall n \in \mathbb{N} \implies a_n \leq h^n \ \forall n \in \mathbb{N}$, dove h^n è il termine generale della successione geometrica con ragione compresa tra 0 e 1, ovvero una serie che converge. Per confronto, anche la serie di a_n converge.

Dimostrazione della tesi 2: per infiniti $n \in \mathbb{N}$ succede che $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, ovvero $a_n \geq 1$. La successione non può convergere a 0, quindi la serie non può che divergere.

Questo teorema è poco pratico, lo rendiamo utilizzabile col seguente criterio:

Criterio della radice Disclaimer per la pratica: se, usando il criterio del rapporto, si vede che il limite tende a 1, allora anche il criterio della radice avrà limite 1, quindi saranno entrambi inefficaci (si deve provare con confronto, Raabe o condensazione).

$$\text{Sia } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e sia } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty]$$

Tesi:
Se $l < 1 \implies$ la serie converge
Se $l > 1 \implies$ la serie diverge

Dimostrazione prima tesi: per ipotesi:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \ \ l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$.

Scegliamo $\varepsilon = h - l > 0 \implies \sqrt[n]{a_n} < h \implies$ per il teorema della radice, tesi dimostrata.

Dimostrazione seconda tesi: scegliamo $\varepsilon = l - 1 \implies l - l + 1 < \sqrt[n]{a_n} \implies 1 < \sqrt[n]{a_n} \implies$ per il teorema della radice, tesi dimostrata.

Teorema della radice con massimo limite Teorema che non useremo nella pratica, ma ritroveremo in analisi 2 per le serie di potenze.

Si tratta letteralmente del teorema precedente, con la sola modifica che consideriamo il massimo limite (3.2) al posto del limite. Ha senso perchè ci consente di applicare il teorema della radice anche a quelle successioni che non hanno un limite.

Teorema del rapporto

$$\text{Data la serie } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \text{ con } a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{ e } 0 < h < 1$$

Tesi:

1. Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq h \ \forall n \in \mathbb{N} \implies$ la serie converge
2. Se invece $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies$ la serie diverge.

P.S. La differenza col teorema della radice è che qui è richiesta una condizione per ogni n, mentre lì per infiniti $n > \nu$.

Dimostrazione della prima tesi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq h \implies a_{n+1} \leq h a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

ripetendo questo processo più volte, si ottiene:
$a_{n+1} \leq h a_n \leq h^2 a_{n-1} \leq \cdots \leq h^n a_1$

Essendo h^n il termine generale della serie geometrica di ragione $h < 1$ (serie convergente), per il teorema del confronto la nostra tesi è confermata.

Dimostrazione della seconda tesi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies a_{n+1} \geq a_n$$

Quindi a_n è una successione monotona crescente di termini tutti positivi, per cui non può tendere a 0 $\implies$ concludiamo che la serie può solo divergere.

Criterio del rapporto Disclaimer per la pratica: se, usando il criterio della radice, si vede che il limite tende a 1, allora anche il criterio del rapporto avrà limite 1, quindi saranno entrambi inefficaci (si deve provare con confronto, Raabe o condensazione)

Sia

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{supponiamo esista } \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty]$$

Tesi:
Se $l < 1 \implies$ la serie converge.
Se $l > 1 \implies$ la serie diverge.

Dimostrazione: per ipotesi,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \quad l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$$

Se $l < 1$, consideriamo un h tale che $l < h < 1$, quindi $h - l > 0$. Poniamo $\varepsilon = h - l$ e avremo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} < h \ \forall n > \nu$, quindi la serie converge per il Teorema del rapporto.

Se $l > 1$, scegliamo:

$$\varepsilon = l - 1 \implies 1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \forall n > \nu$$

Quindi, per il Teorema del rapporto, la serie diverge.

Criterio del rapporto con massimo limite Riguardo il criterio appena visto, nei casi in cui non esiste il limite dell'ipotesi è possibile considerare il massimo limite (che esiste sicuramente). Il teorema avrà però solo la prima tesi, mentre per $l > 1$, non sappiamo nulla.

Pro tip: quando incontriamo una serie col fattoriale, il nostro primo approccio dovrebbe essere il criterio del rapporto, dato che possiamo esprimere $n!$ come $n(n-1)!$ e quindi andare a semplificare.

Criterio di Raabe

$$\text{Data la serie } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Supponiamo esista:

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = l \in [-\infty, +\infty]$$

(notare che il rapporto è al contrario rispetto al criterio del rapporto, così come la tesi è invertita)
Tesi:

1. Se $l < 1 \implies$ la serie diverge (positivamente)
2. Se $l > 1 \implies$ la serie converge
3. Se $l = 1$, questo criterio non ci aiuta.

Teorema (criterio) di condensazione Non lo dimostriamo.

$$\text{Sia } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Supponiamo che $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$, ovvero che sia monotona decrescente.

Tesi: le seguenti serie hanno lo stesso carattere:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ e } \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$$

Se applichiamo questo teorema alla serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$

otteniamo un'altra buona serie di confronto, in quanto:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \begin{cases} \text{Converge} & \text{se } \alpha > 1 \text{ o } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ \text{Diverge} & \text{se } \alpha \leq 1 \text{ o } \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1 \end{cases}$$

6.2 Altri tipi di serie

Serie assolutamente convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ è detta assolutamente convergente se } \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ converge}$$

Serie assolutamente convergente $\Longrightarrow$ serie convergente Questo teorema afferma che serie assolutamente convergente $\Longrightarrow$ serie convergente, e in tal caso:

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

Dimostrazione: dato che una successione è una funzione, esistono la sua parte positiva e negativa (2):

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \text{ e } a_n^- = \frac{|a_n - a_n|}{2}$$

Inoltre valgono:
$0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$
$0 \leq a_n^- \leq |a_n|$
$a_n^+ + a_n^- = |a_n|$
$a_n^+ - a_n^- = a_n$

Per ipotesi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge, quindi, per le due diseguaglianze scritte, queste serie convergono:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$$

Per linearità è convergente anche la serie differenza:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - a_n^- \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ c.v.d.}$$

Dimostrazione della stima:

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - a_n^- \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ \right| + \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- \right|$$

possiamo togliere questi ultimi due valori assoluti in quanto si tratta già di funzioni non negative:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ + a_n^- = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

c.v.d.

Serie a segni alterni Data una successione di termini positivi a_n, si chiama **serie a segni alterni** la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

Possiamo studiare le serie di questo tipo con la convergenza assoluta; se non funziona, si passa al seguente risultato.

Teorema di Leibniz I Sia assegnata la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ con } a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Se $a_n \geq a_{n+1}$ (monotona decrescente) $\implies$ la serie non può divergere.
2. Se inoltre (oltre alla condizione 1) a_n tende a 0, allora la serie converge, e si ha $|s - s_n| \leq a_{n+1}$, dove s è il risultato della serie e s_n il risultato che si ottiene sommando i primi n termini della serie.

Dimostrazione tesi 1: considero s_{2n+1}, ovvero una somma parziale di posto dispari. Abbiamo:
$s_{2n+1} - s_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n+1}$ (a_{2n+1} è negativo, per questo viene messo il meno e non il +) ≥ 0, dato che per ipotesi a_n è monotona decrescente. Questo vuol dire che s_{2n+1} è monotona crescente, quindi non può divergere a $-\infty$.

Facciamo ora la stessa cosa, ma con le somme dei termini di posto pari:
$s_{2n+2} - s_{2n} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0 \implies s_{2n+2} \leq s_{2n}$.
La successione delle somme parziali è quindi monotona decrescente, dunque non può divergere a $+\infty$.

Dimostrazione tesi 2: si può notare che le somme parziali pari sono sempre maggiori di quelle dispari, infatti:
$s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} > 0 \implies s_{2n} > s_{2n-1} \forall n \in \mathbb{N}$.

Quindi, fissato un $n \in \mathbb{N}$, abbiamo:
$s_1 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_{2n-1} < s_{2n} \leq s_{2n-2} \leq \cdots \leq s_4 \leq s_2$

Chiamiamo $\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = s$

Anche le somme di posizione pari tendono allo stesso limite, dato che abbiamo:
$|s_{2n} - s_{2n-1}| = a_{2n}$, il quale tende a 0, quindi i due termini nella differenza sono uguali.

Proviamo ora la stima

$$|s - s_n| = \begin{cases} s_n - s \leq s_n - s_{n+1} = a_{n+1} & n \text{ pari} \\ s - s_n \leq s_{n+1} - s_n = a_{n+1} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Teorema di Leibniz II

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \quad a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (monotona crescente), allora la serie oscilla.

Dimostrazione: come per il teorema precedente, tranne che stavolta s_{2n} è crescente, mentre s_{2n+1} decrescente. Da ciò segue che le due estratte sono divergenti a $+\infty$ e $-\infty$, c.v.d.

Proprietà associativa per serie Data la serie regolare $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e la successione k_n di interi positivi strettamente crescente, consideriamo la successione:

$$b_1 = \sum_{i=1}^{k_1} a_i, \ldots, b_n = \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} a_i$$

Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ gode della proprietà associativa se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è regolare e ha la stessa somma, per ogni scelta della successione $\{k_n\}$.

Per le serie regolari, questa proprietà vale sempre.

Riordinamento di una serie

Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e la funzione $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biettiva

e detto inoltre $b_n = a_{j_n}$, chiamiamo "ordinamento" la serie

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ se $\forall j_n$ le due serie hanno lo stesso carattere.

Proprietà commutativa

Una serie convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

gode della proprietà commutativa se

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{j_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ogni riordinamento j_n

Ogni serie assolutamente convergente gode di questa proprietà.

Serie prodotto

Date $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

chiameremo "serie prodotto secondo Cauchy" la serie

$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, dove $c_n = \sum_{k=\infty}^{n} a_k b_{n-k}$

Se la prima serie converge ad A e la seconda a B, non è detto che la serie prodotto converga a AB.
Questa interessante proprietà si verifica solo se le serie sono entrambe convergenti, con almeno una delle due assolutamente convergente.

Se entrambe sono assolutamente convergenti, anche la serie prodotto è assolutamente convergente al prodotto.

6.3 Come verificare il carattere di una serie

Premesse:

1. Per questi esercizi è fondamentale conoscere limiti notevoli, limiti (in generale), ordini di infinito ed equivalenze asintotiche.
2. Prima di utilizzare criteri e metodi vari per studiare il carattere di una serie, è bene avere già una mezza idea di come essa si comporta. I criteri e i metodi elencati servono solo a dimostrare quello che si pensa inizialmente (o a smentirlo, se si pensava male).

Se la serie è a termini positivi possiamo usare:

- Criterio della radice (spesso efficace quando si incontra una qualsiasi quantità elevata a n)
- Criterio del rapporto (spesso efficace quando c'è un fattoriale)
- Confronto con le serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{Diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \text{converge a } l & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \begin{cases} \text{Converge} & \text{se } \alpha > 1 \text{ o } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ \text{Diverge} & \text{se } \alpha \leq 1 \text{ o } \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1 \end{cases}$$

- Se notiamo che a_n non tende a 0, la serie non può convergere (quindi diverge positivamente)
- Raabe e condensazione (rari)

Se la serie è a segni alterni:

- Si vede prima di tutto se converge assolutamente, ovvero:

Se abbiamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$, per prima cosa vediamo se converge $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

  con i metodi elencati sopra. Se la risposta è affermativa, la serie di partenza è detta assolutamente convergente, il che implica che sia convergente.

  N.B. quando si studia l'assoluta convergenza, non si può dire proprio nulla sulla divergenza.

- Se si scopre che la serie non è assolutamente convergente, allora per stabilire il suo carattere si deve ricorrere a Leibniz 1 e 2. È necessario dunque verificare la monotonia di a_n, si può fare attraverso:

  - Derivata prima di a_n: se è positiva, a_n è monotona crescente; se è negativa, a_n è monotona decrescente.

  - Si studia il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$: se è > 1, allora a_n è monotona crescente, se risulta $< 1, a_n$ è monotona decrescente.

  - Si può notare "ad occhio" la monotonia di a_n e giustificarla in qualche modo corretto (per temerari).

- Se la serie ha un parametro x elevato a n, si può procedere nel seguente ordine:

  - Si verifica l'assoluta convergenza. Si può fare studiando la serie che ha $|x|$ anziché x. In questo modo si trovano 2 valori di x; per tutti i valori compresi tra questi, la serie converge

  - Si verifica il comportamento della serie in quei due valori, semplicemente sostituendoli alla x nella serie originale.

  - Si studia il comportamento della serie a destra (solitamente controllando se a_n tende a 0) e sinistra (solitamente con Leibniz) di quei valori.