Fisica 1

Antonio Pio Caruso

Basato sulle lezioni di Maria Letizia Pumo.

Queste dispense provengono da appunti presi a lezione, e dunque possono contenere delle sviste.
Se ne trovate, potete mandarle a CRSNNP02L04C351I@studium.unict.it.

Contents

1 Introduzione

Prerequisiti Conoscenze base di algebra e analisi (calcolo differenziale e integrale)

Libro consigliato P.Mazzoldi, M.Nigro, C.Voci - Elementi di Fisica, Meccanica e Termodinamica - Terza Edizione.

1.1 Cos'è la fisica

La fisica è la scienza che studia i fenomeni naturali, misura le loro proprietà e stabilisce relazioni matematiche tra essi, tutto attraverso il metodo scientifico (o sperimentale).

Esso è un metodo:

- induttivo, in quanto osservando il particolare (fenomeno) risale al generale (legge), attraverso 4 fasi: osservazione, ipotesi, sperimentazione e formulazione di una legge (leggi che regolano un certo gruppo di fenomeni sono riunite in teorie, es: elettromagnetismo)
- deduttivo, in quanto dallo studio di una legge (generale) fornisce la possibilità di dedurre l'esistenza di specifici fenomeni (particolare). Se vengono poi riscontrati nella realtà, la legge è corretta, altrimenti è sbagliata.

Una caratteristica fondamentale del metodo scientifico è la ripetibilità degli esperimenti.

1.2 Misure e grandezze

Descrivere un fenomeno significa compiere una misura delle sue proprietà. Queste sono di due tipi:

- Misura diretta (definizione operativa), per esempio la lunghezza.
- Misura indiretta (definizione costitutiva), ottenuta mediante formule applicate a grandezze ottenute operativamente. Per esempio nel calcolare l'area di un tavolo non misuriamo direttamente la superficie, ma solo i lati e, attraverso una formula, otteniamo la misura dell'area.

È fondamentale nel calcolo delle misure svolgere un controllo dimensionale per verificare di aver svolto calcoli corretti. Per esempio, se sappiamo che il nostro risultato deve essere una velocità, ci aspettiamo un'unità di misura del tipo $\frac{spostamento}{tempo}$, quindi se troviamo altre unità di misura sappiamo di aver sbagliato qualcosa.

Le grandezze fisiche fondamentali sono chiamate **dimensioni**, e le loro combinazioni lineari generano tutte le altre grandezze. In meccanica avremo a che fare con solo 3 dimensioni: lunghezza, tempo, massa, quindi ogni altra grandezza sarà esprimibile in questo modo:

$$[x_i] = [l^\alpha] \cdot [t^\beta] \cdot [m^\gamma] \tag{1}$$

Per esempio:

$$[v] = [l^1] \cdot [t^{-1}] \cdot [m^0] \tag{2}$$

In generale, per descrivere un fenomeno utilizziamo le 7 unità fondamentali del sistema internazionale (SI):

1. metro, m (lunghezza)
2. chilogrammo, kg (massa)
3. candela, cd (luminosità)
4. secondo, s (tempo)
5. mole, mol (quantità)
6. Kelvin, K (temperatura)
7. Ampere, A (corrente elettrica)

Le definizioni di queste unità di misura sono diventate sempre più precise col passare degli anni. In passato, il metro era definito in base alle dimensioni della terra, mentre oggi (2022) è definito in base alla velocità delle o.e.m. (onde elettromagnetiche) nel vuoto.

Possiamo utilizzare le unità di misura anche per fenomeni molto grandi o molto piccoli, attraverso i prefissi:

Prefissi del Sistema Internazionale

10^n	Prefisso	Simbolo	Nome	Equivalente decimale
10^{24}	yotta	Y	Quadrilione	1 000 000 000 000 000 000 000 000
10^{21}	zetta	Z	Triliardo	1 000 000 000 000 000 000 000
10^{18}	exa	E	Trilione	1 000 000 000 000 000 000
10^{15}	peta	P	Biliardo	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	Bilione	1 000 000 000 000
10^{9}	giga	G	Miliardo	1 000 000 000
10^{6}	mega	M	Milione	1 000 000
10^{3}	chilo	k	Mille	1 000
10^{2}	hecto	h	Cento	100
10^{1}	deca	da	Dieci	10
10^{0}			Uno	1
10^{-1}	deci	d	Decimo	0,1
10^{-2}	centi	c	Centesimo	0,01
10^{-3}	milli	m	Millesimo	0,001
10^{-6}	micro	µ	Milionesimo	0,000 001
10^{-9}	nano	n	Miliardesimo	0,000 000 001
10^{-12}	pico	p	Bilionesimo	0,000 000 000 001
10^{-15}	femto	f	Biliardesimo	0,000 000 000 000 001
10^{-18}	atto	a	Trilionesimo	0,000 000 000 000 000 001
10^{-21}	zepto	z	Triliardesimo	0,000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	yocto	y	Quadrilionesimo	0,000 000 000 000 000 000 000 001

La fisica attuale non è in grado di descrivere comportamenti di oggetti inferiori alla lunghezza di Planck $\approx 1,616252 \cdot 10^{-35} m$.

Alcuni esempi di unità di misura che non fanno parte del SI ma sono utilizzate:

- Angstrom, Å, pari a $10^{-10} m$
- Unità di massa atomica, amu, $\frac{1}{12}$ della massa del ^{12}C, $\approx 1.66 \cdot 10^{-27} kg$
- Unità astronomica, UA, distanza Terra-Sole, $\approx 1.496 \cdot 10^{11} m$ ($\approx$ 150 milioni di km)

Conversioni tra unità Date $[Q]$ e $[Q^*]$, due unità di misura, per convertire una grandezza q (misurata in $[Q]$) in q* (espressa in $[Q^*]$), ci serviamo di un fattore di conversione c, ottenuto come rapporto di unità delle misura:

$$c = \frac{[Q^*]}{[Q]}$$

q nella nuova unità di misura è dunque:
$\{q^*\} = c \cdot \{q\}$.
Le lettere in parentesi quadre sono unità di misura, mentre quelle in parentesi graffe sono numeri puri. Facciamo un esempio pratico per capire:

$$q = 5m \quad q^* = 500cm \quad [Q] = m \quad [Q^*] = cm \quad \{q\} = 5 \quad \{q^*\} = 500 \quad c = 100$$

Alcune unità di misura derivate dal SI (combinazioni lineari di MKS, ovvero metri, kilogrammi e secondi) hanno una corrispondente unità derivata da CGS (centimetri, grammi, secondi, sistema utilizzato anche in diversi software importanti), per esempio 1 Newton equivale a 10^5 dine.

1.2.1 Errore

Nelle misure in fisica, l'errore è una componente inevitabile. Può essere di due tipi:

- Sistematico (influisce su accuratezza): dovuto per esempio a uno strumento tarato male (come bilancia). Questi errori hanno segni uguali e entità uguali, quindi si ha sempre una sottostima o sempre una sovrastima
- Casuale o accidentale (influisce su precisione): dovuto a cause random (come il misuratore che sbaglia leggermente), descrive in termini probabilistici (curva di Gauss). Questi errori hanno segni diversi ed entità diverse.

Se misuro la lunghezza del tavolo ottengo un valore $L \pm \Delta L$, dove la prima componente è la misura effettiva che registro e la seconda è l'errore.

L'accuratezza migliore esiste quando L si avvicina quanto più possibile a L_0, ovvero il reale valore della grandezza che proviamo a misurare.
La precisione migliore invece avviene quando l'errore è più piccolo possibile.

Per far fronte agli errori di precisione e ottenere misure più precise possibili, l'approccio è di ripetere la misura un gran numero di volte (assumendo accuratezza massima). In questo modo le sovrastime si bilanciano con le sottostime e ci avviciniamo sempre di più a L_0. Questo valore ha infatti il $\sim 68.27\%$ di probabilità di trovarsi tra i seguenti valori:

$$L_{medio} \pm \frac{\sigma}{(n)^{\frac{1}{2}}}$$

dove n è il numero di misure effettuate e σ lo scarto quadratico medio, ottenuto nel seguente modo:

$$\sigma = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{(L_i - L_{medio})^2}{n}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Propagazione dell'errore su misure indirette Come si riflette l'errore sul calcolo delle misure indirette? Facendo un esempio, se dobbiamo calcolare la lunghezza di una linea spezzata composta da 10 segmenti e ogni segmento viene misurato con ± 1 cm di errore, l'errore massimo sarà chiaramente di 10 cm. Tuttavia questa è probabilmente una sovrastima, in quanto gli errori non avvengono tutti nello stesso senso.

Per calcolare dunque l'errore più probabile, la formula da applicare è quella della somma in quadratura:

$$\Delta L_{tot} = \left[\sum_{i=1}^{n} \Delta L_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Questa sarà minore o uguale alla somma diretta degli errori. Generalizzando ulteriormente, esiste una formula per calcolare la propagazione dell'errore in tutti i casi, anche quando abbiamo molteplici variabili:

$$\Delta Q = \left\{\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial X_i}\right) \cdot X_i\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Dove Q = grandezza fisica funzione delle grandezze X_i, quindi $Q = Q(X_i)$. Quando abbiamo un'unica variabile, il rapporto delle derivate parziali è 1, quindi la formula di sopra non è altro che un caso specifico di questa formula generale.

Cifre significative e approssimazione L'ultima cifra scritta riportando una misura è la prima cifra di incertezza. Si arrotonda in questo modo, considerando che la successiva è la prima cifra influenzata dall'errore:

- cifra successiva $> 5 \implies$ la cifra viene incrementata di 1 (arrotondamento per eccesso)
- cifra successiva $< 5 \implies$ la cifra rimane la stessa (arrotondamento per difetto)
- cifra successiva$= 5 \implies$ la cifra viene arrotondata alla cifra pari più vicina (se è già pari, rimane la stessa)

esempio 1: 45.67 m $\pm$ 0.1 m $= 45.7 \pm 0.1$m
esempio 2: $2.94\,\mathrm{m} \pm 0.1\,\mathrm{m} = 2.9\,\mathrm{m} \pm 0.1$ m
esempio 3: 3.65 m $\pm$ 0.1 m $= 3.6$ m $\pm$ 0.1 m
esempio 4: 3.75 m $\pm$ 0.1 m $= 3.8$ m $\pm$ 0.1 m

Le cifre significative sono le cifre certe e la prima cifra incerta, quindi, in questi esempi, dopo l'uguale sono state inserite solo cifre significative nelle misure (senza considerare l'errore). Le cifre significative ci danno informazioni sull'ordine della grandezza del valore.

In generale (non solo fisica, ma anche matematica, informatica, ecc.), le regole per trovare le cifre significative sono le seguenti:

1. La cifra non nulla più a sinistra è la cifra più significativa (MSD, MSB nel caso di Most Significative Bit)
2. Se non è presente il punto decimale, l'ultima cifra non nulla è la meno significativa (LSD, LSB nel caso di Less Significative Bit)
3. Se c'è il punto decimale, la cifra più a destra è significativa, anche se 0
4. Tutte le cifre tra MSD e LSD sono significative

Se non si riporta l'errore quando si scrive una grandezza, si possono comunque avere informazioni su di esso:

Scrivere $144\,\mathrm{cm}$ equivale a scrivere $144\,\mathrm{cm} \pm 1$ cm, in quanto è l'ultima cifra significativa a variare.

Il valore $\frac{\Delta Q}{Q}$ è detto "errore relativo", ed è un numero adimensionato (a differenza dell'errore assoluto, che ha la stessa unità di misura della misurazione), espresso in percentuale. Minore è l'errore relativo e più è precisa la misurazione.

1.2.2 Sistemi di riferimento

1.2.3 Sistema di riferimento inerziale

Ogni misurazione va compiuta in riferimento a un sistema per essere ritenuta oggettiva. Il sistema di riferimento inerziale è il più semplice. In esso vale il principio di inerzia: i corpi che ricevono una forza risultante nulla rimangono in quiete o in moto rettilineo uniforme.

Se consideriamo un oggetto che si muove a velocità minori di 250 km/h e possiede dimensioni trascurabili rispetto alla terra, possiamo scegliere il pianeta stesso come sistema di riferimento, in quanto apparirà sufficientemente inerziale. Se l'oggetto da studiare si muove più velocemente, o possiede dimensioni più elevate, la terra non è più un buon sistema di riferimento, in quanto ci accorgiamo che è rotante e che varia la sua velocità e tutta una serie di caratteristiche: non è inerziale.

Per far fronte a questo problema, possiamo prendere come sistema di riferimento tre "stelle fisse", ovvero corpi celesti così lontani da sembrare fermi nel cielo. Ognuno di loro indicherà un asse del nostro sistema, che risulterà "abbastanza" inerziale, ovvero approssimativamente inerziale. Qualsiasi altro sistema che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al sistema delle stelle fisse può essere chiamato "inerziale".

Scegliere le coordinate Dopo aver scelto il sistema di riferimento, vanno scelte le coordinate. Le più popolari sono quelle cartesiane ortogonali (le più semplici), ma in determinati casi vanno scelte altre coordinate più opportune.

In un piano con coordinate cartesiane abbiamo 3 assi (x,y,z), ognuno dei quali definisce un angolo di 90° con gli altri due. Possiamo rappresentare univocamente la posizione di qualsiasi corpo mediante 3 numeri. Chiaramente se vogliamo l'osservatore più semplice, basta porlo all'origine degli assi. Nel calcolo del moto di un punto P in un sistema cartesiano, il nostro obiettivo è calcolare P(t), cioè la variazione della posizione di P nel tempo, quindi x(t), y(t) e z(t).

Se P si muove lungo un piano, possiamo posizionare due assi del nostro

sistema sul piano in questione. In tal modo, potremmo studiare il fenomeno con sole due variabili, al posto di tre.
Se P si muove lungo una retta, possiamo far coincidere uno degli assi del nostro sistema con la retta in questione, potendo studiare dunque il problema con una solo variabile.

A volte ciò che complica un problema non è il sistema di riferimento, ma le coordinate scelte. Per esempio, se vogliamo rappresentare i moti di punti di un cerchio tramite delle coordinate cartesiane ortogonali (x,y) che variano del tempo, avremo bisogno di due valori. Se scegliamo invece coordinate polari, possiamo descrivere il sistema univocamente con solo una variabile $\varphi(t)$, in quanto r(t), l'altra variabile che determina la posizione del punto, è costante.

Se al posto di un cerchio vogliamo rappresentare una sfera, usiamo un sistema detto polare sferico, dove r sarà costante e ciò che varia sono θ e φ. Per passare da un sistema a coordinate polari sferiche a uno con coordinate cartesiane, basta sfruttare alcune semplici formule trigonometriche, vedendo r come ipotenusa di un triangolo. Avremo quindi:
$x = r \sin\theta \cos\varphi \quad y = r \sin\theta \sin\varphi \quad z = r \cos\theta$

le coordinate polari cilindriche sono un altro possibile sistema di coordinate, spesso poco utili in fisica 1, ma apprezzate in fisica 2. In questo sistema ρ è un segmento costante e si studiano le variazioni dell'angolo θ e dell'altezza z.

1.3 Vettori

In fisica distinguiamo tra due tipi di grandezze:

1. Scalari, esprimibili tramite un numero e un'unità di misura e gestite dall'algebra scalare, quella a cui siamo abituati sin dalle scuole elementari.

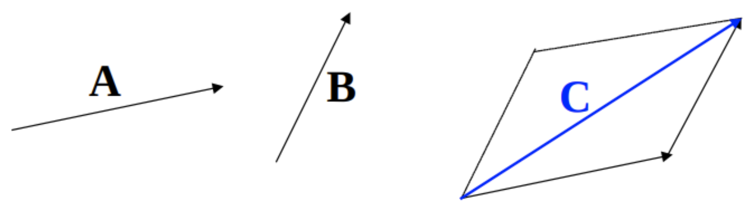
2. Vettoriali, esprimibili tramite un numero (modulo), un'unità di misura, ma anche direzione e verso; gestite dall'algebra vettoriale.

Direzione e verso sono infatti necessari per descrivere in modo esaustivo determinati fenomeni. Per esempio, non basta dire "la macchina si è spostata di 500 m" o "il vento soffia a 30 km/h", ma bisogna anche specificare verso dove sono avvenuti questi eventi. Detto ciò, il vettore spostamento (nel caso della macchina) non è da confondersi con l'esatto tragitto (percorso) compiuto dalla macchina, ma si tratta semplicemente della linea retta (con verso) che va dalla posizione iniziale a quella finale.

Simboli per indicare il vettore: $\mathbf{V}$, $\underline{\mathbf{V}}$, $\vec{V}$, quest'ultimo sicuramente più diffuso.
Simboli per indicare il modulo: V, $\mid V \mid$.

1.3.1 Somma vettoriale

Nell'algebra vettoriale la somma può essere immaginata con la regola del parallelogramma: volendo sommare due vettori, $\vec{A}$ e $\vec{B}$, posizioniamo la coda di $\vec{B}$ sulla punta di $\vec{A}$ mediante traslazione rigida. Il vettore che collega la coda di $\vec{A}$ con la punta di $\vec{B}$ sarà il vettore risultato $\vec{C}$. Per capire meglio:



Quest'operazione gode di proprietà commutativa, associativa ed esistenza dell'opposto

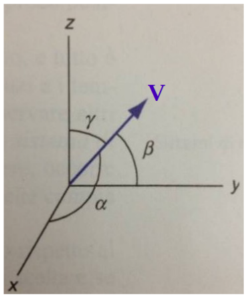
1.3.2 Versore

Definiamo un versore come un vettore di modulo unitario. Considerando per esempio un vettore $\vec{v}$ di modulo 500 metri, il suo versore $\vec{\mu}$ sarà un vettore di modulo 1 m, con stesso verso e direzione di $\vec{v}$.

Rappresentando un vettore in un sistema cartesiano ortogonale siamo in grado di svolgere i calcoli con l'algebra scalare, con lo svantaggio che i risultati dipendono dal sistema scelto.

1.3.3 Coseni direttori

Considerando un vettore $\vec{V}$ rappresentato in un sistema di riferimento cartesiano:



Possiamo scrivere le componenti di $\vec{V}$ in modo sintetico sfruttando quelli che vengono chiamati "coseni direttori", ovvero i coseni dei tre angoli.

$$\begin{cases} \vec{V_x} = |V| \cos\alpha \\ \vec{V_y} = |V| \cos\beta \\ \vec{V_z} = |V| \cos\gamma \end{cases} \tag{3}$$

In questo sistema vale anche la relazione:
$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$, facilmente dimostrabile con le formule scritte sopra. Lo svantaggio del sistema dei coseni direttori è che serve necessariamente individuare 3 angoli.

1.3.4 Prodotti tra vettori

Il prodotto con i vettori è di diversi tipi, prima di elencarli bisogna però ricordare che se si moltiplicano due quantità **dimensionate**, la dimensione risultato sarà il prodotto delle dimensioni (es: in $F = ma$, la dimensione di F sarà prodotto della dimensione di m (ovvero $[kg]$) e quella di a (ovvero $[ms^{-2}]$), quindi $[kg \cdot m \cdot s^{-2}] \equiv [N]$.

Prodotto esterno Il caso di prodotto più semplice è quello esterno, ovvero tra un vettore e uno scalare k. Il risultato è un vettore che avrà la stessa direzione del vettore iniziale e modulo prodotto tra quello del vettore iniziale e k. Il verso sarà :

1. Lo stesso del vettore iniziale se $k > 0$
2. Opposto a quello del vettore iniziale se $k < 0$

Vale la proprietà distributiva rispetto alla somma, quindi:

$$5(\vec{A} + \vec{B}) = 5\vec{A} + 5\vec{B}$$

Per quanto riguarda invece il prodotto tra due vettori, ne abbiamo due tipi: scalare e vettoriale.

Prodotto scalare Il prodotto scalare (o interno) tra 2 vettori ha questa forma:
$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta = A_{\|}B = B_{\|}A$
dove θ è l'angolo tra i due vettori e il simbolo $\|$ si legge "parallelo".

Questa operazione gode di proprietà commutativa e distributiva e fornisce come risultato uno scalare.

Prodotto vettoriale L'altro tipo di prodotto tra vettori è detto prodotto vettoriale, fornisce come risultato un vettore perpendicolare al piano, che può essere di verso entrante o uscente (regola della mano destra).

La formula è $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{C}$, dove:
$|C| = AB \cdot \sin\alpha$, con α angolo tra A e B. In pratica il modulo del vettore risultato è l'area di un parallelogramma.

Quest'operazione gode di proprietà distributiva e anticommutativa, ovvero invertendo l'ordine degli addendi il prodotto cambia di segno. Se ci si muove da un vettore all'altro in modo orario, il segno è positivo, altrimenti è negativo.

Volendo svolgere il prodotto vettoriale con le componenti cartesiane, possiamo agire in questo modo:
$\vec{A}\wedge\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)i - (A_xB_z - A_zB_x)j + (A_xB_y - A_yB_x)k$

Oppure calcolando il determinante della seguente matrice:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{4}$$

1.3.5 Teorema del coseno e teorema del seno

Se si costruisce un triangolo avente due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ come cateti, la loro somma vettoriale $\vec{c}$ è l'ipotenusa. Chiamando β l' angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{c}$ e γ l' angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$, valgono i seguenti risultati:

- **Teorema del coseno**, ottenuto tramite applicazione del prodotto scalare: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
  Non è altro che una generalizzazione del teorema di Pitagora, valida per tutti i triangoli.
- **Teorema del seno**, ottenuto tramite applicazione del prodotto vettoriale:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$$

1.3.6 Derivate di vettori

È possibile svolgere l'operazione di derivazione di un vettore.
Sia $\vec{v} = \vec{v}(t)$, ovvero una funzione di variabile scalare t. Questo vuol dire che modulo, direzione e verso della funzione possono cambiare al variare di t. Costruiamo il seguente rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{[\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)]}{\Delta t}$$

Si definisce **derivata** del vettore $\vec{v}$ rispetto alla variabile t la seguente quantità:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{[\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)]}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Proprietà:

- È un vettore, in quanto prodotto del vettore $d\vec{v}$ per lo scalare $\frac{1}{dt}$
- In generale non è parallelo a $\vec{v}$.

Valgono le usuali regole di derivazione:

- $$\frac{d(\vec{a}+\vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$$
- $$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \text{ se m è costante}$$

- $$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt}m \text{ se m è una funzione } m(t)$$

- $$\frac{d(\vec{a}\cdot\vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \frac{d\vec{b}}{dt}\cdot\vec{a}$$

- $$\frac{d(\vec{a}\wedge\vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt}\wedge\vec{b} + \frac{d\vec{b}}{dt}\wedge\vec{a}$$

Componenti cartesiane del vettore derivato In un sistema cartesiano dove:
$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ e $a = a(t)$ funzione vettoriale di t, quindi valgono:
$a_x = a_x(t),\ \ a_y = a_y(t),\ \ a_z = a_z(t)$

È possibile considerare il vettore $\vec{b}$ derivato di $\vec{a}$:

$$\vec{b} = \frac{d\vec{a}}{dt}, \text{ ovvero somma delle sue componenti cartesiane } \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z$$

Che non sono altro che le derivate delle componenti cartesiane di $\vec{a}$, quindi:

$$\vec{b}_x = \frac{d\vec{a}_x}{dt}\vec{i} \quad \vec{b}_y = \frac{d\vec{a}_y}{dt}\vec{j} \quad \vec{b}_z = \frac{d\vec{a}_z}{dt}\vec{k}$$

Come già detto, il vantaggio di usare il sistema cartesiano è la semplicità di queste formule; lo svantaggio è che i risultati dipendono dal sistema scelto.

Possiamo vedere la velocità come la derivata prima dello spostamento rispetto al tempo (in quanto misura la variazione dello spostamento al variare del tempo) e l'accelerazione come la derivata seconda dello spostamento rispetto al tempo (quindi derivata prima della velocità). Quindi scriviamo:

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

1.3.7 Integrali di vettori

Sia il vettore $\vec{a} = \vec{a}(t)$ funzione vettoriale definita in un intervallo Δt; dividiamo questo intervallo in sottointervalli Δt_i, nei quali la funzione assume un valore $\vec{a}(t_i)$. Consideriamo i vettori $\vec{a}(t_i)\Delta t_i$, e facciamone la somma:

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(t_i)\Delta t_i$$

È un vettore che unisce l'origine di $\vec{a}(t_1)\Delta t_1$ con l'estremo di $\vec{a}(t_n)\Delta t_n$.

Si definisce integrale di $\vec{a}_t$ il vettore $\vec{V}$ a cui tende questa somma quando tutti i Δt_i tendono a 0:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(t_i)\Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$$

In componenti cartesiane:

$$\vec{V} = \left(\int_{t_1}^{t_2} a_x(t)dt\right) i + \left(\int_{t_1}^{t_2} a_y(t)dt\right) j + \left(\int_{t_1}^{t_2} a_z(t)dt\right) k$$

Per chi non ha ancora familiarità con questi concetti: può sempre essere utile considerare l'integrazione come l'operazione inversa della derivazione e viceversa.

Variazione infinitesima e finita Data la funzione vettoriale $\vec{v}(t)$ e $\vec{A}$ sua derivata, valgono le seguenti relazioni:

$$d\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt}dt = \vec{A}dt \text{ per la variazione infinitesima di } \vec{v}$$

$$\Delta\vec{v} = \int_{t_0}^{t} d(\vec{v}) = \int_{t_0}^{t} \vec{A}dt \text{ per la variazione finita di } \vec{v}$$

1.4 Formule

Legenda:

- $[Q]$ = unità di misura (es: m)

- q = misura espressa in $[Q]$ (es: 50 m)
- $\{q\}$ = numero puro di una misura in $[Q]$ (es: 50)
- N = numero di misurazioni
- σ = scarto quadratico medio
- L = misurazione
- L_0 = valore reale che vorremmo misurare
- L_{medio} = media tra tutte le misurazioni effettuate
- ΔL = errore
- Q = grandezza fisica funzione delle grandezze X_i, quindi $Q = Q(X_i)$

Formule

- $q = \{q\} \cdot [Q]$
- $\{q^*\} = c \cdot \{q\}$
- $$c = \frac{[Q^*]}{[Q]}$$
- $$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(L_i - L_{medio})^2}{N}}$$
- Errore: al 68.27% L_0 è contenuta tra:
  $$L_{medio} \pm \frac{\sigma}{(N)^{\frac{1}{2}}}$$
- Errore in misure indirette tramite somma in quadratura
  $$\Delta L_{tot} = \left[\sum_{i=1}^{N} \Delta L_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

- Errore in misure indirette: formula generale

$$\Delta Q = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial X_i} \right) \cdot X_i \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

2 Cinematica

La cinematica è lo studio del moto indipendentemente dalle cause che lo riguardano (in quel caso si parla di dinamica). In particolare, trattiamo per ora la cinematica della particella (o punto materiale), quindi approssimando l'oggetto di cui si vuole studiare il moto a un semplice punto, invece di considerarlo un corpo esteso. Quest'approssimazione è possibile quando le dimensioni dell'oggetto sono trascurabili rispetto a quelle del sistema di riferimento scelto: possiamo approssimare una macchina ad un puntino quando la mettiamo in relazione a un'autostrada che collega due città distanti; non possiamo approssimarla a un punto quando studiamo i suoi movimenti all'interno di un garage.

Se sappiamo posizione, velocità e accelerazione di una particella, abbiamo completamente risolto il problema da un punto di vista cinematico.

2.1 Posizione, velocità, accelerazione

Iniziamo a prendere familiarità con i termini. Per "percorso" si intende la strada che percorre il punto durante i vari istanti di tempo, mentre con "spostamento" indichiamo il segmento che va dal punto di posizione iniziale a quello finale.

Per velocità media intendiamo la rapidità dello spostamento nell'intervallo di tempo considerato, si calcola nel seguente modo:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Per velocità istantanea intendiamo la rapidità dello spostamento nell'istante considerato, si calcola nel seguente modo:

$$\vec{v}(t_0) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ricordiamo che la velocità è un vettore con dimensioni lunghezza fratto tempo, quindi $[ms^{-1}]$

Per accelerazione media intendiamo la rapidità del cambiamento di velocità nell'intervallo di tempo considerato, si calcola nel seguente modo:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Per accelerazione istantanea intendiamo la rapidità del cambiamento di velocità nell'istante considerato, si calcola nel seguente modo:

$$\vec{a}(t_0) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

L'accelerazione è un vettore con dimensioni $[ms^{-2}]$.

2.2 Moto rettilineo uniforme

Si tratta di un moto dove l'accelerazione è pari a 0, quindi la velocità non varia: o è costante o è nulla. Il moto è una retta, quindi possiamo rappresentarlo su un sistema ortogonale servendoci di una sola variabile, la x.

2.3 Moto uniformemente accelerato

Nello studio di questo moto, il caso più comune è quando esso è rappresentato da una retta, il che avviene quando l'accelerazione $a(t) \equiv a_0$ è parallela al vettore velocità iniziale $v(t_0) \equiv v_0$.

Un caso particolare di questo moto è la caduta libera, dove l'accelerazione, a patto di trascurare l'attrito con l'aria, è $g = 9.81\frac{m}{s^2}$

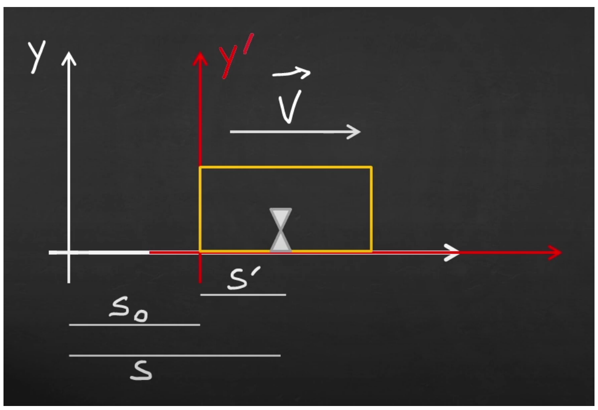
2.4 Moto parabolico

Il moto parabolico, detto anche moto del proiettile, è una combinazione di caduta libera lungo l'asse delle y e moto uniforme (velocità costante) lungo l'asse delle x.

2.5 Moto relativo e relatività di Galileo

La velocità di un oggetto non è una sua proprietà assoluta: dipende dall'osservatore. Il primo a formalizzare il concetto di relatività fu Galileo Galilei; secoli dopo, Albert Einstein contribuì a espandere l'argomento, studiando la relatività di sistemi che si muovono con velocità prossime a quelle della luce.

Esempio di trasformazione di Galileo per la posizione: immaginiamo una clessidra ferma su un treno, supponendo che la sua posizione nel sistema di riferimento del treno sia $s' = 9m$. Dopo che il treno si sarà spostato di una quantità $s_o = 13m$, la posizione finale della clessidra, per un osservatore (sistema di riferimento) esterno, sarà $s = s' + s_o = 22m$. Disegno per visualizzare:



Esempio di trasformazione di Galileo per la velocità: una persona su un treno che si muove di moto rettilineo uniforme cammina di velocità $v' = 1.2\frac{m}{s}$, nella stessa direzione e verso del vettore velocità del treno, che supponiamo essere $v_T = 28.8\frac{m}{s}$. Per un osservatore fermo in stazione, la velocità della persona sul treno sarà $v = v' + v_T = 30\frac{m}{s}$.

2.6 Formule

2.6.1 Moto rettilineo uniforme:

- $x(t) = x(t_0) + v_0(t - t_0)$
- $$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

2.6.2 Moto uniformemente accelerato:

- $v(t) = v_0 + a(t - t_0)$
-
$$x(t) = x(t_0) + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$
-
$$a = \frac{v(t)^2 - v_0^2}{2\Delta x}$$
- Le altre formule (es: quella per t) si ricavano da quelle già scritte.

2.6.3 Moto parabolico:

-
$$y_M = \text{ altezza massima } = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$
-
$$x_G = \text{ gittata } = \frac{2v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$
-
$$t_G = \text{ tempo di volo } = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$
- x_M = coordinata x dove l'altezza y è massima = $\frac{1}{2}x_G$

2.6.4 Trasformazioni di Galileo:

- $s = s' + s_x$
- $v = v' + v_x$

3 Dinamica

3.1 Leggi di Newton

Chiamati anche ”principi della dinamica”

1. Se un corpo è soggetto a una risultante di forze nulla, allora esso rimarrà in quiete (se originariamente fermo), oppure in moto rettilineo uniforme (se originariamente in moto).

2. Se un corpo è soggetto a una risultante di forze non nulla, allora la sua accelerazione è $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, con $\vec{F}$ risultante delle forze e m massa inerziale (ovvero esprime l'inerzia della particella, ovvero la sua resistenza a variare stato di moto).

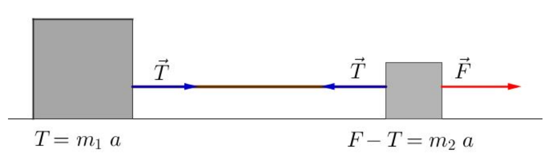
   Forma generale del secondo principio:

   $$\text{Dato che } \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{ allora } \vec{F} = m\vec{a} \equiv m\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \frac{d(m\vec{v})}{dt} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ con } m \neq m(t)$$

3. Ad ogni forza agente su un corpo ne corrisponde una uguale e opposta esercitata dal corpo stesso.

3.2 Tensione

Una fune estesa con dei corpi attaccati alle estremità trasmette una certa forza, chiamata tensione, a entrambi i corpi. Il seguente è un disegnino generalmente valido per ogni situazione fisica del suo genere (due corpi su un piano non inclinato e senza attrito):



Come si vede, la tensione applicata a entrambi i corpi è uguale in modulo, ma opposta in verso; inoltre l'accelerazione è la stessa per entrambi i corpi, dato che sono collegati da una fune estesa. Se l'esercizio prevede forze d'attrito o piano inclinato, bisogna modificare adeguatamente le equazioni del moto dei corpi.

3.2.1 Fune, carrucola e bacchetta ideale

La fune solitamente trattata negli esercizi è ideale, ovvero inestensibile (lunghezza costante) e di massa trascurabile.

Può capitare che la fune scorra attraverso una carrucola per cambiare la direzione della forza; se questo oggetto non provoca caduta di tensione, rimangono invariate tutte le proprietà descritte finora per la fune. Una carrucola ideale ha anch'essa massa trascurabile ed è priva di attrito.

Infine, è possibile anche imbattersi in esercizi con bacchette che trasmettono tensione. L'approccio è lo stesso di quello da utilizzare per la tensione dei fili (scrivere le equazioni delle forze in gioco), ma bisogna tener conto che la bacchetta, a differenza della fune, può essere compressa. Anche in questo caso, una bacchetta ideale non cambia lunghezza (inestensibile) e ha massa trascurabile.

3.3 Quantità di moto

La derivata temporale (rispetto al tempo) della forza è pari a

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = m\frac{d\vec{a}}{dt} = m\vec{v}, \text{ ovvero } \vec{p}, \text{ chiamata quantità di moto.}$$

3.3.1 Conservazione della quantità di moto

Se la risultante delle forze (esterne nel caso di sistemi multiparticella) è nulla e la massa costante, allora la quantità di moto si conserva.

Dimostrazione:

$$F_{tot} = \frac{dp}{dt}, \text{ ovvero variazione infinitesima di quantità di moto}$$

dato che è nulla, allora p è costante, c.v.d.

3.4 Formule

- $F = ma$
- $p = mv$. Se $F = 0$, p è costante (legge di conservazione della quantità di moto), altrimenti varia.

3.4.1 Reazioni vincolari

Legenda:

- μ = coefficiente di attrito dinamico, [numero puro]
- N = Componente, equivale a mg
- $\vec{u}_v$ = versore della velocità.

Formule:

- Attrito: $\vec{F}_a = -\mu N \vec{u}_v$
- Reazione vincolare globale $\vec{R} = \sqrt{N^2 + F_a^2}$

3.4.2 Piano inclinato

- $a = g \cdot \sin\theta$
- $a = g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)$

3.4.3 Forza elastica

Legenda:

- ω = pulsazione; velocità con cui viene eseguita un'oscillazione completa, $[\frac{rad}{s}]$
- k = costante elastica, $[\frac{N}{m}]$
- T = periodo; tempo necessario per compiere un'oscillazione completa.
- f = frequenza; numero di oscillazioni al secondo, $[\frac{1}{s}]$

Formule:

- $a = -\omega^2 x$
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- $F = -kx$
- $f = \frac{1}{T}$

4 Energia, lavoro, potenza

Definiamo il lavoro come trasferimento di energia da un sistema fisico a un altro tramite un moto ordinato, mentre il calore (approfondito in termodinamica) è il trasferimento di energia da un sistema fisico a un altro tramite un moto disordinato.

L'energia cinetica e potenziale sono forme fondamentali di energia, ovvero non composte da altre forme di energia.
Possiamo calcolare una variazione infinitesima di lavoro come:

$$dW = F \cdot ds = ma \cdot ds = m\frac{dv}{dt}ds = m\frac{ds}{dt}dv = mvdv \tag{5}$$

4.1 Teorema dell'energia cinetica

Detto anche "teorema delle forze vive". Qualunque sia la forza che agisce nello spostamento di un punto di massa m dalla posizione A a quella B, il lavoro della suddetta forza è pari alla variazione di energia cinetica ΔK di m.

Dimostrazione:

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{s} = m \int_A^B \vec{a} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 = \Delta K$$

4.2 Forze conservative

Possiamo dare 3 definizioni diverse ma equivalenti. Una forza si dice "conservativa" se:

1. Il lavoro da essa eseguito per spostare un punto materiale è indipendente dal percorso (dipende solo da punto iniziale e finale)
2. Il lavoro da essa eseguito per spostare un punto materiale lungo un percorso chiuso è nullo
3. L'energia del punto materiale su cui essa agisce torna ad assumere il valore iniziale alla fine di ogni percorso chiuso

Esempi di forze conservative sono la forza peso e quella elastica, mentre un esempio di forza non conservativa (dipende dal percorso) è la forza d'attrito.

In una forza conservativa è da tenere a mente che $W = -\Delta U$.

4.3 Energia meccanica

L'energia meccanica è definita come somma di energia potenziale e cinetica: $E_m = U + K$.
Essa è costante in presenza di forze conservative, mentre in presenza di forze non conservative, la sua variazione è pari al lavoro di tali forze.

4.3.1 Principio di conservazione dell'energia meccanica

Enunciato L'energia meccanica di un punto materiale si conserva (resta costante) in presenza di forze conservative.

In presenza di forze non conservative (dissipative) essa non si conserva, e la sua variazione è pari al lavoro di queste forze.

Dimostrazione Dato che F è conservativa, sappiamo che:
$W = \Delta U \equiv -(U_f - U_i) \equiv U_i - U_f$.
Vale anche $W = \Delta K \equiv K_f - K_i$. Eguagliando le due espressioni abbiamo:
$U_i - U_f = K_f - K_i \implies U_i + K_i = U_f + K_f$, che sono rispettivamente E_m iniziale e finale, c.v.d.

4.4 Formule

Legenda

- W= lavoro, [J]
- P = potenza, [W]
- K= Energia cinetica, [J]
- U= energia potenziale
- U_{el} = energia potenziale elastica
- E_m = energia meccanica

- L_{nc} = lavoro di una forza non conservativa

Formule

- $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} \equiv F\Delta s \cos\theta$
- $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, nonché $\frac{dW}{dt}$
- $K = \frac{1}{2}mv^2$
- $E_m = U + K$
- $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$
- $L_{nc} = \Delta E_m$

5 Moti vari

5.1 Impulso di una forza

Data una forza F, l'impulso di F è un vettore J avente stessa direzione e verso di F. Se F è costante, allora $J = F\Delta t$.

5.1.1 Teorema dell'impulso

L'impulso di una forza applicata a un punto provoca la variazione della sua quantità di moto. Generalmente è infatti possibile definire l'impulso come:

$$J = \int_{t_0}^{t} F dt. \text{ Sappiamo però che } F = \frac{dp}{dt} \implies dp = F dt$$

Quindi possiamo riscrivere l'integrale come:

$$\int_{p_0}^{p} dp = \Delta p = m\Delta v \text{ se } m = \text{const}$$

Che non è altro che la forma integrale della seconda legge di Newton, che ci mostra che l'impulso non è altro che variazione di quantità di moto.

5.2 Momento angolare

Preso un punto P, un polo O e una distanza $PO = r$, il momento angolare L è definito come $\vec{L} = r \times \vec{p}$, ovvero $r \times m\vec{v}$.

Se si passa a un altro polo O', allora $\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + OO' \times m\vec{v}$

Momento della forza Il momento della forza è definito come $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

5.2.1 Teorema del momento angolare

Se il polo O è fisso o coincidente con il CM, l'evoluzione nel tempo del momento angolare totale $\vec{L}$ del sistema è determinata dal momento delle forze esterne $\vec{\tau}^E$, in particolare:

$$\vec{\tau}^E = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Questo implica la **Conservazione del momento angolare**, ovvero se il momento delle forze esterne è nullo, il momento angolare totale si conserva.

Dimostrazione del teorema: ricordiamo che

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

la sua derivata rispetto al tempo è dunque (regola di derivazione del prodotto)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) \tag{6}$$

il termine $\frac{d\vec{r}_i}{dt}$ dà la variazione di posizione di P_i rispetto a O, ed entrambi possono essere in movimento, quindi possiamo scrivere $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_O$

Inoltre, essendo il sistema di riferimento inerziale:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^E = \vec{F}_i^I$$

Sostituendo nell'equazione 6, otteniamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left[(\vec{v}_i - \vec{v}_O) \times m_i \vec{v}_i \right] + \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \times (\vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I) \right] \text{, quindi:}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i) - \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_O \times m_i \vec{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^E) + \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^I)$$

Che è uguale a $-\vec{V}_O \times m\vec{v}_{CM} + \vec{\tau}^E + \vec{\tau}^I$

Infatti la prima sommatoria è risultata nulla poiché ogni addendo era un prodotto vettoriale di vettori paralleli. Si dimostra inoltre che $\vec{\tau}^I$, il momento delle forze interne rispetto al polo O, è nullo per lo stesso motivo.

In conclusione, $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^E - \vec{V}_O \times m\vec{v}_{CM}$

e se il secondo termine è nullo, si ha la tesi, c.v.d.

Questo avviene nei seguenti casi:

- Il polo O è fisso, quindi $\vec{v}_O = 0$
- Il centro di massa è in quiete nel sistema di riferimento inerziale, quindi $\vec{v}_{CM} = 0$
- Il polo O coincide con il centro di massa, per cui $\vec{v}_O = \vec{v}_{CM} \implies \vec{v}_O \times \vec{v}_{CM} = 0$
- $\vec{v}_{CM}$ è parallelo a $\vec{v}_O$

5.2.2 Principio di conservazione del momento angolare

Se il momento delle forze esterne $\vec{\tau}^E$ è nullo, il momento angolare totale $\vec{L}$ si conserva.

Dimostrazione: basta sapere che per il teorema del momento angolare:

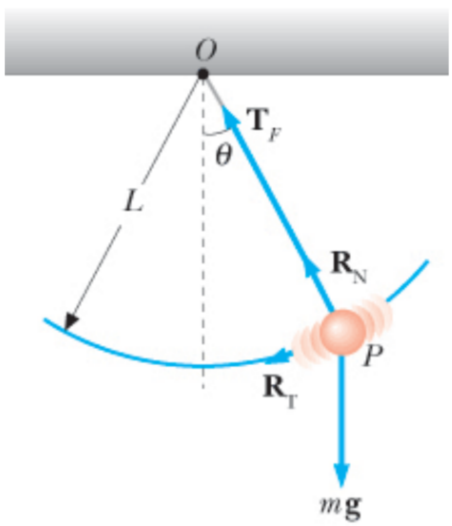
$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^E$. Dato che è una quantità nulla, $\vec{L}$ è costante, c.v.d.

5.3 Pendolo semplice

Un pendolo semplice consiste in un corpo di massa m appeso a un filo ideale, ovvero inestensibile e di massa trascurabile. Le forze agenti sono la forza peso e la tensione del filo, e la posizione di equilibrio è la verticale passante per il punto O al cui è attaccato il filo.

Se il punto si sposta dalla verticale, inizia ad oscillare tracciando degli archi di circonferenza (di raggio l pari ala lunghezza del filo).
L'equazione del moto è piuttosto semplice: $mg + T = ma \implies R = ma$, con

R risultante delle forze e T diretta verso O.
Lungo la traiettoria abbiamo $R_T = -mg \sin\theta = ma_T$, dove R_T si oppone allo spostamento e fa tendere il corpo a tornare allo stato di equilibrio, quindi è detta **forza di richiamo**.
Ortogonalmente alla traiettoria $R_N = T - mg \cos\theta = ma_N$.



Un moto periodico viene detto "armonico" se la forza di richiamo è proporzionale allo spostamento, ma in direzione opposta (molla, piccole oscillazioni del pendolo, ecc.); quando invece questo non accade, possiamo avere un moto periodico, ovvero che si ripete sempre dopo un periodo uguale T funzione dell'ampiezza, ma non armonico (pendolo con grandi oscillazioni).

Sappiamo che la tensione del filo è massima quanto il corpo P passa per la verticale, mentre è minima quando si trova agli estremi delle oscillazioni e il moto si inverte. Allo stesso modo, possiamo fare considerazioni energetiche: l'energia cinetica sarà massima quando P si trova sulla verticale, mentre sarà nulla agli estremi; l'energia potenziale, al contrario, sarà massima agli estremi e nulla sulla verticale.

5.3.1 Oscillatore armonico smorzato

Si tratta di un oscillatore armonico (es: sistema massa-molla o pendolo) frenato da forze di attrito. Possiamo distinguere queste forze in:

- Attrito radente, nel caso in cui l'ampiezza diminuisce fino a diventare nulla
- Attrito viscoso $F = -\lambda v$, con $\lambda =$ coefficiente di smorzamento. Questo tipo di smorzamento può essere a sua volta:
    1. Forte, se non ci sono oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.
    2. Critico, se non ci sono oscillazioni, ma il punto tende più rapidamente alla posizione di equilibrio
    3. Debole, se le oscillazioni sono di ampiezza decrescente, fino a 0.

In natura, ogni oscillazione è smorzata, quindi per mantenere il moto senza arrestarsi ha bisogno del sostegno di una forza: si parla dunque di oscillatore armonico forzato. La forza in questione deve essere sinusoidale, del tipo $F = F_0 \sin(\theta t)$

5.3.2 Risonanza

La risonanza è un fenomeno che si verifica quando un oscillatore forzato è sottoposto a sollecitazione periodica avente la stessa frequenza del sistema: ciò che accade è una progressiva amplificazione dell'oscillazione. Fu proprio un fenomeno di risonanza a causare il crollo del ponte di Tacoma nel 1940.

5.4 Formule

Moto rettilineo smorzato esponenzialmente:

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

Attrito viscoso:

$$F = -bv \qquad b = mk \left[\frac{kg}{s}\right]$$

$v(t) = gt(1 - e^{-kt})$

Impulso: $\vec{J} = \Delta p$, ovvero Δvm se m è costante.

Moto circolare uniforme:

Legenda

- ω= velocità angolare
- v= velocità
- r = raggio
- a = accelerazione centripeta

Formule:

- $\omega = \frac{v}{r} = \frac{2pi}{T}$
- $v = \omega r$
- $a = \omega^2 r$, oppure $\frac{v^2}{r}$
- F centripeta= $\frac{mv^2}{r}$, oppure $m\omega^2 r$
- $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$

6 Sistemi di punti

Centro di massa Il centro di massa è il punto geometrico individuato dal vettore:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \cdots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + \cdots + m_n}$$

Le cui componenti sono:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + \cdots + m_n} \quad y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + \cdots + m_n}$$

$$z_{cm} = \frac{m_1 z_1 + \cdots + m_n z_n}{m_1 + \cdots + m_n}$$

Individuare il centro di massa è molto utile, in quanto (ovviamente in modo approssimato) ci consente di trattare l'intero sistema come un unico punto.

6.1 Urti

L'urto in fisica è un'interazione violenta tra due corpi, di durata trascurabile rispetto al tempo di osservazione del sistema. Questo rende possibile dividere il sistema in due fasi: "prima" e "dopo" l'urto.

In un urto si considerano le forze esterne trascurabili, e quindi le uniche forze in gioco sono quelle interne di tipo impulsivo. Una forza impulsiva (forza che genera un impulso) è caratterizzata da una durata molto minore al tempo di osservazione e da un valore medio molto elevato.

Urto elastico e anelastico In un urto elastico, oltre alla quantità di moto, si conserva l'energia cinetica totale del sistema. Negli urti anelastici, invece, l'energia cinetica finale sarà diversa da quella iniziale.

Abbiamo un tipo particolare di urto anelastico: quello **completamente anelastico**, che avviene quando le due particelle dopo l'urto rimangono attaccate tra loro. In questo caso, l'energia cinetica delle particelle è $E_{k,CM}$, e la loro posizione coincide con quella del centro di massa.

Le forze d'interazione sono di tipo impulsivo e non ci sono forze esterne che agiscono sul sistema, quindi si conserva la quantità di moto del sistema tra prima l'urto e dopo.

6.2 Teoremi di Konig

6.2.1 Teorema di Konig del momento angolare

Libro pg 130

Il momento angolare L nel sistema di riferimento dell'osservatore è pari alla somma tra momento angolare del centro di massa e momento angolare rispetto al centro di massa, ovvero:

$$L = L_{cm} + L'$$

Dimostrazione: Per semplicità assumiamo come polo l'origine del nostro sistema di riferimento inerziale. Avremo:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

con $\vec{r}_i$ vettore posizione del generico punto P_i.

Dato che, indicate con gli apici le grandezze relative al sistema di riferimento del centro di massa, valgono le relazioni $\vec{r}_i = \vec{r'}_i + \vec{r}_{CM}$ e $\vec{v}_i = \vec{v'}_i + \vec{v}_{CM}$, si ottiene:

$$L = \sum_{i=1}^{n} [(\vec{r'}_i + \vec{r}_{CM}) \times m_i(\vec{v'}_i + \vec{v}_{CM})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{r'}_i \times m_i \vec{v'}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\vec{r'}_i \times m_i \vec{v}_{CM}) + \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v'}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM}) =$$

$$\vec{L}' + \sum_{i=1}^{n} (m_i \vec{r'}_i) \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v'}_i + \vec{L}_{CM} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM}, \text{ c.v.d.}$$

Infatti le due sommatorie finali sono nulle, in quanto la somma dei $\vec{r'}_i$ e dei $\vec{v'}_i$ ci dà rispettivamente $\vec{r'}_{CM}$ e $\vec{v'}_{CM}$, ovvero posizione e velocità del centro di massa misurate nel sistema di riferimento del CM, quindi nulle.

6.2.2 Teorema di Konig dell'energia cinetica

Proprio come per il teorema del momento angolare:

$$E_k = E_{k,cm} + E'_k$$

Dimostrazione esattamente analoga a quella per il momento angolare.

6.3 Teorema dell'energia cinetica in un sistema di punti

Dato un sistema di punti materiali, il lavoro complessivo svolto dalle forze interne ed esterne è pari alla variazione di energia cinetica tra una configurazione iniziale A a una finale B.

Dimostrazione: si considera ciò che succede a ogni particella, e poi si sommano i risultati.
Il lavoro compiuto dalle forze esterne e interne su una singola particella per uno spostamento dr è:

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = (\vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I) \cdot d\vec{r}_i = dW_i^E + dW_i^I = m_i v_i dv_i$$

per la relazione espressa nell'equazione 5. Integrando otteniamo

$$W_i = W_i^E + W_i^I = \frac{1}{2}m_i v_{B,i}^2 - \frac{1}{2}m_i v_{A,i}^2 = E_{i,k,B} - E_{i,k,A} = \Delta E_{i,k}$$

Infine, sommando per ogni particella:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i v_{B,i}^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i v_{A,i}^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

c.v.d.

6.4 Forze conservative e non conservative in un sistema di punti

Il lavoro delle forze interne $W^I = \sum_{i=0}^{n} W_i^I$, è diverso da 0 solo quando le particelle che compongono il sistema si spostano, mentre è uguale a 0 quando le particelle sono ferme l'una rispetto all'altra (es: corpo rigido). Un esempio di W^I è il lavoro interno che avviene in una stella, dovuto al movimento dei suoi atomi/molecole. Può diventare talmente grande da far esplodere la stella, dando origine a una supernova.

6.4.1 Energia meccanica in un sistema di punti

In presenza di forze conservative, l'energia meccanica $E = E_k + E_p$ si conserva.

Dimostrazione: dato che le forze sono conservative
$W^E = -\Delta E_p^E$ e $W^I = -\Delta E_p^I$ quindi $W = -(E_p^E + E_p^I) = -\Delta E_p$. Sostituendo nell'espressione del lavoro, $W = \Delta E_k = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B}$

Riscrivendo i termini, $E_B = E_{k,B} + E_{p,B} = E_{k,A} + E_{p,A} = E_A \implies E$ è costante, c.v.d.

6.5 Formule

Legenda:

- $\vec{P}$= quantità di moto
- $\vec{\tau}^E$= momento delle forze esterne

- $\vec{L}$ = momento angolare totale
- F^E = forze esterne, F^i= forze interne
- F_i = somma di tutte le forze agenti sul sistema
- R^E= risultante delle forze esterne, R^i= risultante delle forze interne
- P = quantità di moto

Per risolvere esercizi su sistemi di punti, si vede se valgono le leggi di conservazione, ovvero:

- $\vec{R}^E = 0 \implies \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \implies P =$ costante.
- $\vec{\tau}^E = 0 \implies \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \implies \vec{L} =$ costante.
- Conservazione di E_m = si conserva se tutte le forze esterne sono conservative

Formule:

- $m_{cm}a = R^E$
- $L = rp$, con r = distanza dal polo.
- Per un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso: $L = \omega I$

Urto elastico:

- $$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,in} + 2m_2v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$
- $$v_{2,fin} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,in} + 2m_1v_{1,in}}{m_1 + m_2}$$

Urto completamente anelastico:

- $$v_{CM} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

7 Corpo rigido

Un corpo rigido è un oggetto materiale per il quale, per ogni coppia di punti A e B, la distanza tra essi non può cambiare.

Formalmente si dice che ogni parte del corpo rigido è soggetta a un vincolo di rigidità, per cui sia quando il corpo è fermo sia quando si muove, non si deforma mai.

7.1 Momento d'inerzia

Così come la massa inerziale è la grandezza che quantifica la tendenza di un corpo ad opporsi a una traslazione, il momento d'inerzia è la grandezza fisica che quantifica la tendenza di un corpo ad opporsi a una rotazione. Possiamo definirlo il corrispettivo rotazionale della massa.

Detto k il raggio giratore (o raggio giratore o raggio d'inerzia), ovvero la distanza tra il corpo di massa m e l'asse di rotazione, il momento d'inerzia di un punto materiale si calcola come $I = mk^2$.

Di conseguenza, se vogliamo sapere il momento d'inerzia di un corpo rigido possiamo usare:

- $$\sum_{i=1}^{n} m_i k_i^2 \text{ per un corpo discreto}$$

- $$\int_V k^2 dm \text{ per un corpo continuo}$$

Possiamo anche esprimere il momento d'inerzia come $I = fml^2$, dove f è un fattore numerico legato alla struttura del sistema (forma del corpo e asse di rotazione) e l è una lunghezza significativa, per esempio il raggio per una sfera, o la lunghezza per un'asta.

7.2 Densità e corpo omogeneo

In un corpo continuo, possiamo considerare quantità infinitesime dV come punti materiali: saranno piccoli in scala macroscopica, dato che potrebbero essere cubetti di spigolo $10^{-6}m$, ma grandi in scala microscopica, dato che le dimensioni lineari degli atomi sono anche dell'ordine di $10^{-10}m$.

Ognuno di questi dV possiede una sua massa, chiaramente anch'essa infinitesimale, quindi dm. Definiamo la densità come $\rho = \frac{dm}{dV}$, espressa quindi in $[\frac{kg}{m^3}]$. Otteniamo la massa dell'intero corpo continuo come:

$$m = \int dm = \int_V \rho dV, \text{ per la relazione di sopra.}$$

Per corpo "omogeneo" si intende un corpo con densità ρ costante in ogni sua zona: in questo caso, le due equazioni diventano $\rho = \frac{m}{V}$ e $m = \rho V$. Nei corpi non omogenei, si definisce comunque una densità media $\bar{\rho} = \frac{m}{V}$.

Se un corpo omogeneo è simmetrico rispetto a un punto, asse o piano, allora il centro di massa sarà rispettivamente il centro, un punto sull'asse, o un punto sul piano.

In casi particolari la massa è distribuita non in un volume, ma su una superficie S, come per avviene per dischi, membrane, bolle di sapone; oppure lungo una linea l, come avviene per fili sottili. Si introducono quindi i concetti di densità superficiale e densità lineare:

$$\rho_s = \frac{dm}{dS} \implies m = \int dm = \int_S \rho_S dS \qquad \rho_l = \frac{dm}{dl} \implies m = \int dm = \int_l \rho_l dl$$

7.3 Puro rotolamento

pg 160 libro

Analizziamo un particolare tipo di rototraslazione (ogni spostamento infinitesimo è somma di traslazione infinitesima e rotazione infinitesima, rispettivamente individuate da $\vec{v}$ e $\vec{\omega}$). Immaginiamo un corpo rigido di forma cilindrica o sferica che rotola su un piano: il punto con cui tocca il terreno è detto **punto di contatto** e lo indichiamo con C. Quando la velocità di questo punto è non nulla, si dice che il corpo **rotola e striscia**, mentre se essa risulta nulla, si ha il cosiddetto moto di **puro rotolamento**, il più semplice moto di rototraslazione.

In tal caso, la velocità di ogni punto del corpo dipende dalla distanza del punto da C, in particolare il modulo è $v_p = \omega|PC|$, mentre la direzione è perpendicolare alla linea CP.

L'asse di rotazione è passante per il centro di massa e perpendicolare al piano. Esso non è fisso, ma si sposta insieme al corpo rigido: possiamo considerarlo fisso in un periodo di tempo dt. Allo stesso modo, il punto di contatto C non sarà sempre lo stesso, ma cambierà dopo ogni intervallo di tempo infinitesimo, quindi avremo C, C', e così via.

Condizione di puro rotolamento Dato che C è fermo, $v_C = 0 = v_{CM} + v'(C) = v_{CM} + \omega \wedge r \implies v_{CM} = -\omega \wedge r$. Ma dato che $\omega \perp r$, in modulo $v_{CM} = \omega r$, quindi $a_{CM} = \alpha r$, dove α è l'accelerazione angolare $\frac{\omega}{t}$

È evidente che agiscono delle forze per tenere fermo il punto C, in particolare si tratta di attrito statico, che agisce su un punto fermo, per cui lo spostamento è nullo ed è quindi nullo il suo lavoro. Questo implicherebbe che in teoria il moto di puro rotolamento non incontri forze dissipative, tuttavia l'osservazione empirica ci dimostra che gli oggetti che rotolano si arrestano dopo un certo tempo. Ciò è dovuto a un tipo diverso di attrito, detto **attrito volvente**, che origina dalla deformazione del piano e del corpo rigido ed è un momento pari a $M_v = hmg$, dove h è il coefficiente.

In generale, le forze di attrito dinamico sono molto maggiori dei corrispondenti momenti di attriti volventi, di almeno un fattore di 1000; questo è il motivo per cui trasportare carichi mediante ruote è più efficace di trascinarli sul terreno.

Possiamo analizzare tre tipi diversi di rotolamento

1. Causato da una forza orizzontale e costante applicata all'asse di rotazione.
2. Causato da un momento costante τ applicato all'asse di rotazione.
3. Combinazione dei due casi precedenti: sistema sottoposto sia a una forza che a un momento.

7.3.1 Rotolamento causato da una forza

Le forze agenti sul sistema sono:

1. Forza peso $F_p = mg$ applicata al CM.
2. Forza orizzontale F costante applicata all'asse di rotazione nel centro di massa

3. Forza di reazione del piano $R = N + f$, dove N è la componente normale di modulo mg e f è la forza di attrito statico in verso opposta a F: fa in modo che C non si muova sotto l'azione di F.

La legge del moto del sistema è quindi $F + R + mg = ma_{CM}$, che possiamo proiettare sugli assi x e y per avere:

$$\begin{cases} F - f = ma_{CM} \\ N - mg = 0 \end{cases}$$

Per il teorema del momento angolare (polo $O \equiv CM$):

$$\tau = r \wedge f = I\alpha \implies rf = I\alpha = I\frac{a_{CM}}{r}$$

Mettendo a sistema quest'equazione e quella del moto lungo l'asse x si ricavano le due incognite a_{CM} e f:

$$a_{CM} = \frac{F}{m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \qquad f = \frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}}$$

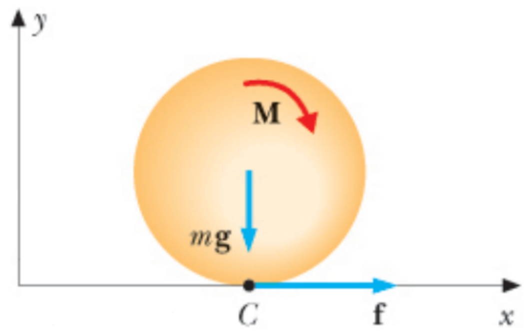
Dato che f deve essere $\leq \mu_s mg$ (massima forza di attrito statico), possiamo individuare una F limite, oltre la quale non si ha più puro rotolamento (dato che f non potrebbe bilanciare):

$$F \leq \mu_s mg \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) = F_{lim}$$

7.3.2 Rotolamento causato da un momento

Le forze e i momenti agenti sul sistema sono:

1. Forza peso $F_p = mg$ applicata al CM.
2. Momento costante applicato all'asse di rotazione, per esempio tramite un motore (pensiamo alle ruote di un'automobile).
3. Forza di reazione del piano $R = N + f$, dove N è la componente normale di modulo mg e f è la forza di attrito statico rivolta verso destra: fa in modo che C non si muova verso sinistra sotto l'azione di $\tau = M$, lo vediamo dall'immagine:



Stavolta l'equazione del moto è descritta sia da forze che da momenti, quindi:

$$R + mg = ma_{CM} \implies \text{sugli assi x e y:} \begin{cases} f = ma_{CM} \\ N - mg = 0 \end{cases}$$

Per il teorema del momento angolare, $M + r \wedge f = I\alpha$, e considerando i moduli, $M - rf = I\alpha = I\frac{a_{CM}}{r}$. Mettendo quest'equazione a sistema con quella del moto sull'asse x otteniamo le incognite a_{CM} e f:

$$a_{CM} = \frac{M}{mr(1 + \frac{I}{mr^2})} \qquad f = \frac{M}{r(1 + \frac{I}{mr^2})}$$

Anche qua bisogna verificare che $f \leq \mu_s mg$, ovvero che il momento

$$M \leq \mu_s mgr \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) = M_{lim}$$

Mentre sotto l'azione della forza F la reazione tangente f si opponeva al moto, qua è invece responsabile del moto stesso. Quando un motore fa girare una ruota, è l'attrito col suolo che la spinge avanti.

7.3.3 Rotolamento causato da una forza e un momento

Il caso più generale possibile di puro rotolamento. Non possiamo decidere a priori il verso della forza d'attrito f, lo ricaviamo dal segno della soluzione, dopo il calcolo. Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} F + f = ma_{CM} \\ M - rf = I\frac{a_{CM}}{r} \end{cases}$$

$$a_{CM} = \frac{1}{m}\frac{F + \frac{M}{r}}{1 + \frac{I}{mr^2}} \qquad f = \frac{\frac{M}{r} - \frac{I}{mr^2}F}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

Con $|f| \leq \mu_s mg$

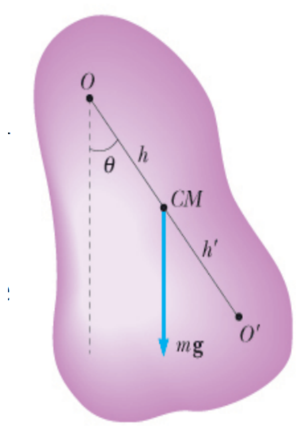
Conclusioni sul puro rotolamento Le equazioni viste dimostrano che è possibile, con opportuni valori delle forze e dei momenti esterni, realizzare le condizioni per cui la reazione del piano tiene fermo il punto di contatto e avere dunque un puro rotolamento senza strisciamento. Questa è la situazione che si cerca sempre di ottenere quando un corpo deve rotolare, per esempio le ruote di un qualsiasi veicolo, anche nella fase di frenata.

7.4 Pendolo composto

pagina 164 libro.

Un pendolo che oscilla in un piano verticale attraverso un asse orizzontale non passante per il centro di massa è detto "composto", o "pendolo fisico". Ogni oggetto fissato a un punto di sospensione e soggetto alla gravità costituisce un pendolo fisico: il pendolo semplice non è altro che un caso particolare.

In figura vediamo una sezione di pendolo rigido contenente informazioni interessanti, come il centro di massa CM, la traccia dell'asse di rotazione O e la distanza del centro di massa da O, ovvero h.



La condizione di equilibrio statico si verifica quando il centro di massa è fermo sulla diagonale passante per O. Se il sistema si sposta da questa posizione, inizia ad oscillare intorno ad essa, e ogni punto traccerà archi di circonferenza. Il momento della forza peso agirà da momento di richiamo (fa tendere il corpo a tornare alla posizione di equilibrio) e vale $\tau = -mgh \sin\theta$. L'equazione del moto, se consideriamo trascurabili i piccoli momenti d'attrito, è:

$$\frac{dL}{dt} = I_z\alpha = I_z\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau \implies \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\sin\theta = 0$$

Nel caso di piccole oscillazioni (piccola ampiezza) possiamo approssimare $\sin\theta \approx \theta$, quindi l'equazione del moto diventa:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\theta = 0, \text{ con soluzione } \theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi)$$

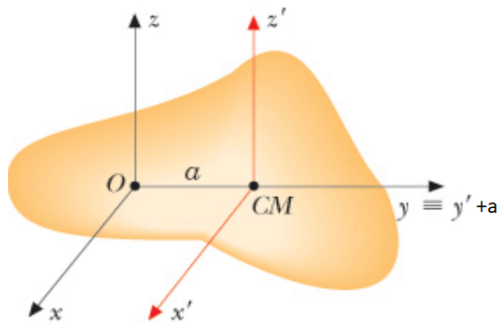
Dove $\Omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}}$ è la pulsazione, e il periodo vale $T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, dove $l = \dfrac{I_z}{mh}$ è detta "lunghezza ridotta", ovvero lunghezza che dovrebbe avere un pendolo semplice per oscillare con lo stesso periodo di uno composto, dato che a parità di lunghezza il periodo del pendolo semplice è maggiore.

7.5 Teorema degli assi paralleli

Chiamato anche "teorema di Huygens-Steiner".

Il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto a un asse che si trova a distanza a dal centro di massa è dato dalla relazione $I = I_{CM} + ma^2$, dove I_{CM} è il momento d'inerzia del corpo rispetto a un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.

Dimostrazione: consideriamo per il corpo due sistemi di riferimento come in figura



Le relazioni tra le coordinate sono $x = x'; \quad y = y' + a; \quad z = z'$. Il momento d'inerzia di un punto generico del sistema è $I_i = m_i(x_i^2 + y_i^2)$. Sommando su tutti i punti del sistema e usando la relazione precedente si ottiene:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i[x_i'^2 + (y_i' + a)^2]$$

svolgendo il quadrato:

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + \sum_{i=1}^{n} m_i a^2 + 2a \sum_{i=1}^{n} m_i y_i' = I_{CM} + ma^2 \text{ c.v.d.}$$

Questo accade poiché $\sum_{i=1}^{n} m_i y_i' = m y_{CM}' = 0$

è un termine nullo dato che y_{CM}' è una coordinata nulla, essendo la coordinata del centro di massa nel sistema di riferimento del centro di massa.

7.6 Teorema di Huygens-Steiner e Konig

L'energia cinetica di un corpo rigido in moto di rotazione attorno a un asse z può essere calcolata con:

$$E_k = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

Dove $I_{z'}$ è il momento d'inerzia del corpo rispetto a un asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse z.

Dimostrazione: sappiamo che l'energia cinetica di un corpo a struttura discreta vale:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} E_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i R_i \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Inoltre, per il teorema degli assi paralleli, $I_z = I_z' + ma^2$, dove a è la distanza tra il centro di massa e l'asse z. Otteniamo dunque:

$$E_k = \frac{1}{2}(I_{z'} + ma^2)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2$$

Dato che $a\omega$ è la velocità v_{CM} del centro di massa che percorre una traiettoria circolare di raggio a rispetto all'asse z, si ha:

$$E_k = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2, \text{ C.V.D.}$$

7.7 Impulso angolare

Detto anche "impulso del momento".

Come per le altre quantità, è possibile considerare l'equivalente rotazionale dell'impulso, ovvero l'impulso angolare. Detto τ il momento applicato a un sistema e L momento angolare, definiamo l'impulso angolare come:

$$\int_{t_0}^{t} \tau dt = \int_{L_0}^{L} dL = L - L_0 = \Delta L$$

Per produrre una variazione di momento angolare L in un corpo rigido occorre dunque un momento di una forza applicato per un certo intervallo di tempo a un punto del corpo.

7.7.1 Teorema del momento dell'impulso

Se il momento della forza τ agisce in un intervallo di tempo Δt sufficientemente breve, si ha una forza impulsiva F che agisce a distanza r da un punto di rotazione fisso O, e dunque:

$$\int_{0}^{t} \tau dt = \int_{0}^{t} (r \times F) dt = r \times \int_{0}^{t} F dt = r \times J = \Delta L \tag{7}$$

Con $J, r \times J$ e ΔL detti rispettivamente impulso di F, momento dell'impulso di F e impulso angolare (o del momento).

È lo stesso concetto e teorema dell'impulso per i corpi puntiformi, con poche differenze:

- Nella catena di equazioni 7 non compaiono né le forze di reazione del vincolo (dato che hanno momento angolare nullo in quanto applicate al vincolo O), né la forza peso (perchè il suo impulso angolare si assume trascurabile rispetto a quello di F).
- $\vec{\tau}$ può essere non nullo anche se la risultante delle forze $\vec{R} = 0$.

Equilibrio statico del corpo rigido In generale, se in un corpo puntiforme la risultante delle forze è nulla, allora esso è fermo o in equilibrio dinamico. Nei corpi estesi, invece, c'è la possibilità che il corpo sia fermo ma roteante. Per assicurarsi che il corpo sia fermo, si deve verificare che sia nullo anche il risultante dei momenti.

Immaginiamo un corpo rigido appeso a un chiodo (centro di sospensione). Esso può trovarsi in 3 equilibri statici differenti:

- Stabile: il centro di massa è sotto il centro di sospensione
- Instabile: il centro di massa è sopra il centro di sospensione
- Indifferente: il centro di massa coincide col centro di sospensione.

Deformazione dei corpi solidi non in programma.

8 Gravitazione

8.1 Forze centrali

La fora di gravitazione, così come quella di Coulomb, è una "forza centrale", ovvero presenta le seguenti caratteristiche:

1. Ovunque sia il punto P sul quale essa agisce, la direzione della forza passa sempre per un punto O, detto centro della forza.
2. Il modulo della forza è funzione della distanza da O.

3. Detto $\vec{u}$ il versore della direzione OP e r la direzione, si ha che $\vec{F} = F(r)\vec{u}$. È una quantità positiva se la forza è repulsiva, negativa se attrattiva.

La presenza di una massa nello spazio costituisce una modifica dello spazio stesso, dando vita a ciò che è chiamato **campo di forza gravitazionale**, del quale possiamo misurare l'effetto tramite una particella di prova.

Conservazione momento angolare Una particella sottoposta a forze centrali ha momento angolare costante, dato che $\vec{\tau}$ è prodotto vettoriale di due vettori paralleli, infatti:

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d(r \times mv)}{dt} = \frac{r \times d(mv)}{dt} = r \times ma = r \times F = 0$$

Possiamo considerare la **velocità areale**, ovvero velocità alla quale viene attraversata l'area dal raggio vettore che unisce pianeta e sole. :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}$$

dove L è il momento angolare, e dato che risulta costante, anche la velocità areale sarà costante (seconda legge di Keplero).

Se la traiettoria è chiusa (moto dei pianeti, $E_m < 0$), la velocità areale si può esprimere come $\frac{A}{T}$ dove T è il periodo.

8.1.1 Le forze centrali sono conservative

Dimostrazione: detto W il lavoro eseguito da una forza centrale, abbiamo

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r)\vec{u}_r \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r)\cos\theta d\vec{s} = \int_A^B F(r)dr$$

Quest'integrale è pari a $= -[U(r_B) - U(r_A)]$, ovvero $-\Delta U$. Dato che $W = \Delta U$, la forza è conservativa

8.2 Leggi di Keplero

1. I pianeti percorrono orbite ellittiche attorno al sole, che è uno dei due fuochi. Il punto dell'orbita più lontano dal sole è detto afelio, il più vicino perielio.

2. La velocità areale relativa all'area spazzata dal raggio vettore che unisce il sole e un pianeta è costante.

3. Il quadrato del periodo è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse: $T^2 = ka^3$. La costante di proporzionalità k è diversa per ogni pianeta.

Queste tre leggi non sono altro che una descrizione cinematica del fenomeno, formalizzate tra il 1600 e il 1620. La descrizione dinamica (che descrive le forze e che dà origine alla teoria della gravitazione universale) fu invece scoperta da Isaac Newton nel 1666 e pubblicata nel 1687. Grazie ad essa sappiamo anche che k si calcola come:

$$k = \frac{4\pi^2}{M_{sole} M_{pianeta} G}$$

8.3 Legge di gravitazione universale

Considerando le leggi di Keplero e approssimando l'orbita ellittica a una circonferenza, si ha un moto circolare uniforme, per cui:

$$F = m\omega^2 r = m\frac{(2\pi)^2}{T^2} r$$

Per la terza legge di Keplero sappiamo che $T^2 = kr^3$, quindi

$$F = m\frac{4\pi^2}{kr^2}$$

Se questo è vero, il modulo della forza che il sole esercita sulla terra è

$$F_{ST} = m_T \frac{4\pi^2}{k_T r^2}$$

e il modulo della forza che la terra esercita sul sole è

$$F_{TS} = m_S \frac{4\pi^2}{k_S r^2}.$$

Per il terzo principio della dinamica, essi si equivalgono, quindi

$$F_{ST} = m_T \frac{4\pi^2}{k_T r^2} = F_{TS} = m_S \frac{4\pi^2}{k_S r^2} \implies \frac{m_T}{k_T} = \frac{m_S}{k_S} \implies m_T k_S = m_S k_T$$

Quindi semplicemente ponendo $G = \frac{4\pi^2}{m_s k_T}$, il modulo della forza sole-terra diventa la famosa formula:

$$F = G\frac{m_S m_T}{r^2}, \text{ con } G = const \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \tag{8}$$

8.3.1 Masse gravitazionali e masse inerziali

Nella formula 8, le masse sono dette "gravitazionali", e misurano la tendenza di un corpo ad attrarre gli altri corpi in modo gravitazionale.

In linea di principio, la massa gravitazionale è diversa da quella inerziale, che invece misura la tendenza di un corpo a mantenere lo stato d'inerzia (ovvero a opporsi a un moto). Tuttavia, consideriamo due corpi sulla superficie terrestre e osserviamo le forze agenti:

$$m_{i,1} \cdot g = G\frac{m_{G,1}m_{G,T}}{r^2} \qquad m_{i,2} \cdot g = G\frac{m_{G,2}m_{G,T}}{r^2}$$

con $m_{i,j}$ massa inerziale del corpo $j-$esimo e $m_{G,j}$ massa gravitazionale del corpo $j-$esimo. Si verifica sperimentalmente che, dato che g (proporzionale a $\frac{m_{G,j}}{m_{i,j}}$) è indipendente dai corpi, allora il rapporto fra massa gravitazionale e quella inerziale deve essere costante, per cui la massa gravitazionale e quella inerziale sono direttamente proporzionali, e si sceglie il valore di proporzionalità pari a 1, quindi $m_G = m_i$.

Nell'800 prove sperimentali mostravano che $\frac{m_{G,j}}{m_{i,j}} = 1$ è vera fino a 10^{-6}, oggi (2022) si è arrivati fino a 10^{-12}. Per concludere, nonostante il valore numerico tra massa gravitazionale e inerziale possa risultare uguale, non bisogna dimenticare che esse esprimono due fenomeni fisici diversi.

8.4 Campo gravitazionale

Sappiamo che, secondo la legge di gravitazione:

$$F = \frac{-Gm_2}{r^2}m_1. \qquad \text{Il termine } \frac{-Gm_2}{r^2}$$

non è altro che il campo gravitazionale generato dalla massa m_2. Esso è un vettore con le stesse dimensioni di un'accelerazione, di direzione e verso concordi a quelli della forza. Se abbiamo diverse masse e vogliamo scoprire il campo generato da esse, sappiamo che si ottiene come somma vettoriale dei singoli campi.

8.5 Lavoro gravitazionale

Dette r_A la distanza iniziale e r_B quella finale, il lavoro di forze gravitazionali è pari a:

$$-Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

Dipende dunque solo dalla posizione iniziale e quella finale, dato che la forza in questione è conservativa.

Per distanze finite questo lavoro è positivo, quindi $\Delta U < 0$.

Satellite geostazionario Un satellite è detto **geostazionario** quando il suo periodo di rivoluzione coincide con quello della terra attorno al proprio asse, ovvero $T = 24h \equiv 86400s$.

8.6 Formule

Legenda

- G= costante di gravitazione universale
- k= costante di Boltzmann
- M= massa della terra
- r= distanza tra due centri di massa

Formule

- Velocità di un satellite:

  $$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \text{ si trova uguagliando forza centripeta}$$

  e gravitazionale

- Legge di gravitazione universale:

  $$F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

- Energia potenziale di un satellite:

$$-G\frac{mM}{r}$$

- In orbita circolare, accelerazione centripeta $a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$
- In orbita circolare, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$

9 Termodinamica

La termodinamica in fisica è una branchia che si occupa dello studio di trasformazioni di sistemi, detti "sistemi termodinamici", misurando la variazione di alcuni parametri, detti "variabili termodinamiche".

Distinguiamo le variabili in:

- Intensive, ovvero indipendenti dalla dimensione del sistema (es: temperatura, densità, pressione) e descriventi proprietà "locali", cioè che possono variare di punto in punto.
- Estensive, se invece si modificano al variare delle dimensioni del sistema, e sono perciò additive (es: mole, volume, massa).

Definiamo "universo" la somma di sistema che stiamo studiando + ambiente esterno.

9.1 Equilibrio termodinamico

Un sistema termodinamico è detto in equilibrio se valgono:

1. Equilibrio meccanico, ovvero risultante delle forze nulla e momento delle forze nullo.
2. Equilibrio chimico, ovvero nessun fenomeno di diffusione (atomi o molecole che si spostano, ammassandosi più in certe zone e meno in altre), quindi la composizione chimica è costante nel tempo e per ogni punto del sistema.
3. Equilibrio termico, ovvero nessun gradiente (spostamento) di temperatura, in modo che la temperatura sia costante per ogni punto del sistema

Se avviene una trasformazione termodinamica troppo veloce, le variabili termodinamiche non sono misurabili e non c'è equilibrio; se procede lentamente, le variabili sono misurabili e quindi possiamo affermare che raggiunge un equilibrio.

L'equilibrio termico può essere raggiunto solo se il sistema presenta almeno una parete diatermica (ovvero che permette lo scambio di calore), mentre non viene raggiunto se il sistema ha solo pareti adiabatiche (ovvero che bloccano lo scambio di calore). Nella realtà, una parete perfettamente adiabatica non esiste, tuttavia con buona approssimazione è possibile avvicinarsi ad essa.

9.1.1 Principio dell'equilibrio termico

Chiamato anche "principio zero della termodinamica": se due sistemi A e B sono in equilibrio termico con un terzo sistema C, allora sono in equilibrio termico tra loro:
$T_A = T_C \wedge T_B = T_C \implies T_A = T_B$, che ricorda la proprietà transitiva della logica.

9.2 Temperatura

Libro pg 279.

Per dare una definizione operativa (1.2) della temperatura devono essere verificate due condizioni:

1. Deve esistere una grandezza X, chiamata **caratteristica termometrica**, che caratterizza un fenomeno fisico e che varia con la temperatura. In tal modo possiamo stabilire una **funzione termometrica** di X, ovvero $\theta(X)$, detta **temperatura**. Il dispositivo in cui avviene il fenomeno e che fornisce il valore della caratteristica termometrica è chiamato **termometro**. Può essere di diversi tipi: per esempio, in un termometro a liquido, il fenomeno è l'espansione del liquido e la caratteristica termometrica è la lunghezza della colonna di liquido.

2. Deve esistere un **punto fisso**, ovvero un sistema in equilibrio, definito in modo preciso e riproducibile con facilità, con un valore arbitrario di temperatura. Un esempio è il punto triplo dell'acqua, stato dove coesistono in equilibrio ghiaccio, acqua liquida e vapor acqueo, alla

temperatura di 273.16 K. Altri esempi sono i punti di fusione e di ebollizione.

9.2.1 Scale termometriche

Una scala termometrica, nota anche come "scala di temperatura", è una scala graduata utilizzata per misurare la temperatura. Viene definita a partire da due punti fissi che fungono da valori di riferimento. Le principali scale termometriche sono tre:

1. Scala Celsius, utilizzata molto frequentemente in ambito scientifico e in quasi tutto il mondo, ad eccezione degli Stati Uniti. I suoi punti fissi sono:

    - Punto di fusione dell'$H_2O = 0$°C
    - Punto fisso dell'$H_2O = 0.01$°C
    - Punto di ebollizione dell'$H_2O = 100$°C.

    1 grado °C è $\frac{1}{100}$ dell'intervallo tra i due punti.

2. Scala Fahrenheit, diffusa principalmente negli Stati Uniti, dove il sistema metrico decimale è meno utilizzato. Punti fissi:

    - Punto di fusione dell'$H_2O = 32$°F
    - Punto di ebollizione dell'$H_2O = 212$°F

    1 grado Fahrenheit è $\frac{1}{180}$ dell'intervallo, ovvero $\frac{5}{9}$ di 1°C.

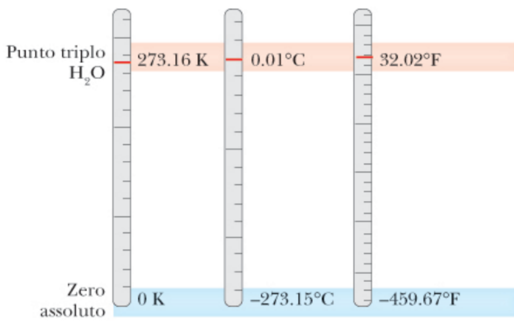
3. Scala Kelvin, utilizzata in ambito scientifico e ufficiale unità di misura della temperatura nel sistema internazionale. Il suo fondatore, fisico e ingegnere William Thomson, noto anche come barone Kelvin, stabilì i due punti fissi:

    - Zero assoluto pari a -273.15°C, a cui fu assegnata la temperatura di $0K$
    - Punto triplo dell'H_2O che corrisponde a $273.16K$.

Come si nota, la differenza di temperatura tra il punto fisso dell'H_2O e lo zero assoluto è la stessa sia nella scala Kelvin che in quella Celsius, segue quindi che un aumento di un'unità nella scala Kelvin corrisponda allo stesso aumento di un'unità nella scala Celsius, e viceversa.

La scala Celsius è più comoda da un punto di vista umano, in quanto definita in base alla temperatura di fusione del ghiaccio e quella di ebollizione dell'acqua, due eventi pratici nella vita quotidiana; la scala Kelvin è più rigorosa, ma più adatta a livello tecnico-scientifico per diversi motivi.

Disegnino per capire le scale:



9.3 Esperienza di Joule

Verso la metà del 19° secolo, Joule condusse una serie di esperimenti fondamentali sugli effetti termici del lavoro meccanico. Il più famoso è certamente l'inserimento di un mulinello in un contenitore a pareti adiabatiche pieno d'acqua: con la rotazione del mulinello, ovvero un lavoro W, si osserva un aumento di temperatura ΔT, che corrisponde allo stesso aumento di temperatura che si avrebbe se venisse scambiata una quantità di calore Q.

In particolare, l'equivalenza tra calore e lavoro fu stabilita tale che
1 cal= 4.186 J.
Ad oggi il Sistema Internazionale adotta il Joule come unità di misura per il calore, ma viene comunemente utilizzata anche la caloria, originariamente definita come la quantità di calore da cedere a 1 g (oggi in alcuni ambiti viene usato 1 kg, ecco perché viene usata sia cal che kcal) di acqua per aumentare la sua temperatura da $14.5°C$ a $15.5°C$.

Joule notò che anche quando il lavoro proveniva da altre fonti (es: un conduttore elettrico percorso da corrente e immerso in acqua), esso provocava la

stessa variazione ΔT. Questo significa (è stato successivamente dimostrato da altri esperimenti) che il lavoro in processi adiabatici dipende unicamente dagli stati iniziali e finali del sistema, ovvero è una funzione di stato:
$W_{ad} = -\Delta U = U_{in} - U_{fin}$, dove U è una funzione di stato detta energia interna.
Joule ha mostrato l'equivalenza tra calore e lavoro, ma per convenzione di segni scegliamo $Q = -W_{ad}$. Questo implica che sia il calore che il lavoro siano scambi di energia (interna).

9.4 Primo principio della termodinamica

Se un sistema compie una trasformazione da uno stato A a uno B scambiando Q e W con l'ambiente, si ha che Q e W dipendono dal tipo di trasformazione, mentre $Q-W$ è indipendente dal tipo di trasformazione e vale $\Delta U = Q-W$.

In particolare, in un ciclo $\Delta U = 0 \implies Q = W$, mentre in trasformazioni infinitesime $dU = dQ - dW$.

9.4.1 Sistema aperto, chiuso o isolato

Un sistema termodinamico può essere:

1. Aperto, se permette uno scambio di materia ed energia con l'ambiente.
2. Chiuso, se permette uno scambio di energia ma non di materia con l'ambiente.
3. Isolato, se non permette scambi né di materia né di energia con l'ambiente.

9.4.2 Calore specifico, capacità termica, calore latente

Il calore specifico di una sostanza è la quantità di calore che 1 kg della sostanza deve ricevere per aumentare la sua temperatura di 1°C.

Inizialmente si pensava che il calore specifico fosse lo stesso per tutti i solidi. Successivamente, fu individuata T_D, la temperatura di Debye: per la legge di Dulong-Petit, a temperature molto maggiori di T_D, il calore specifico molare dei solidi tende a una costante, ovvero circa 25 J mol^{-1}K^{-1}.

A temperature basse, invece, i reticoli cristallini possono vibrare, causando lo scambio di fononi, che alterano il calore specifico.

Detta T_E la temperatura d'equilibrio c il calore specifico, la quantità di calore massimo che una massa m_A di acqua può cedere è $Q_{A,max} = m_A c_A (T_e - T_{i,A})$.

Il valore ottenuto dal calcolo è sempre minore di 0, dato che si tratta di calore ceduto. Il termine $mc = C$ è detto "**capacità termica**": misura il calore necessario per far variare di 1°C il corpo di massa m.

La quantità massima di calore che il ghiaccio assorbe in una trasformazione si trova con la formula:
$|Q_{A,max}| = Q_{1,G} + Q_{2,G} + Q_{3,G}$, dove:

- $Q_{1,G}$= $m_G c_G (0 - T_{i,G})$, dove $T_{i,G}$ è la temperatura iniziale del ghiaccio. Il risultato è una quantità positiva: si tratta del calore assorbito fino al raggiungimento di 0°C.
- $Q_{2,G} = m_G \lambda$, calore latente, ovvero calore utilizzato puramente per far avvenire il passaggio di fase solido-liquido. La temperatura rimane costante, ed è di 0°C.
- $Q_{3,G} = m_G c_A (T_e - 0)$, ovvero calore necessario ad aumentare la temperatura del ghiaccio ormai fuso (quindi dell'acqua, ecco perché c_A) da 0°C fino alla temperatura d'equilibrio.

9.4.3 Sorgenti di calore

Si definisce "sorgente di calore" o "serbatoio" un corpo con una capacità termica infinita, quindi in grado di scambiare calore rimanendo a temperatura costante.

Si tratta naturalmente di un concetto ideale; nella realtà, possiamo considerare buone sorgenti delle masse d'acqua o aria sufficientemente elevate. Qualsiasi corpo può essere considerato una sorgente per un intervallo di tempo limitato, superato il quale sarà necessario fornire calore: in questo senso, un forno o un frigorifero riescono a mantenere la stessa temperatura, ma solo grazie al fatto che richiedono del calore.

9.5 Modalità di trasmissione di calore

1. Conduzione: ovvero trasmissione di calore all'interno di un corpo, ma anche tra due corpi a contatto, dalle zone a temperatura maggiore a quelle a temperatura minore, secondo la legge fenomenologica di Fourier:

   $$dQ = -k\frac{dT}{dn}dSdt, \text{ dove:}$$

   - dQ = calore che passa perpendicolarmente attraverso l'area dS nel tempo dt.
   - $\frac{dT}{dn}$ modulo del gradiente di T, perpendicolare a dS.
   - k = conducibilità (o conduttività) termica del materiale, funzione di T.

2. Convezione: trasferimento di energia e materia assente nei solidi e trascurabile per fluidi molto viscosi, causato da un gradiente di temperatura e forza di gravità, e caratterizzato da moti di circolazione macroscopici

3. Irraggiamento: trasferimento di energia per mezzo di onde elettromagnetiche, che avviene secondo la legge di Stefan-Boltzmann: $\varepsilon = \sigma e T^4$, dove ε è la quantità di energia emessa per unità di tempo (s) e di superficie (m^2), $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\frac{J}{m^2 s K^4}$ ed e emissività, che va da 0 a 1.

9.6 Gas ideale

L'espressione "gas ideale" fa riferimento a un gas rarefatto (densità sufficientemente bassa, dimensioni delle molecole molto inferiori delle dimensioni del contenitore) e a temperatura elevata (molto maggiore di quella a cui si avrebbe la condensazione alla pressione del sistema). Queste proprietà implicano le seguenti caratteristiche:

1. Le molecole del gas sono approssimabili a particelle puntiformi
2. Non ci sono interazioni a distanza di tipo potenziale (energia potenziale =0)
3. Ogni urto è perfettamente elastico

Per un gas ideale, valgono inoltre le seguenti leggi.

9.6.1 Legge di Boyle

Per un gas ideale vale la legge di Boyle: se T è costante, PV è costante e direttamente proporzionale alla temperatura. Preso un contenitore contenente del gas, con un pistone posizionato al di sopra, possiamo dimostrare la legge di Boyle aggiungendo dei granellini di sabbia sul pistone (aumento infinitesimo di pressione del gas), dato che si noterà che il volume andrà a diminuire in proporzione, in modo che PV rimarrà costante.

9.6.2 Leggi di Volta-Gay Lussac

Detti V_0 e p_0 il volume e la pressione a $0°C$, abbiamo che:

- in condizioni isobare, il volume varia linearmente con la temperatura, ovvero $V = V_0(1 + \alpha T_{\circ C})$.
- In condizioni isocore, la pressione varia linearmente con la temperatura, ovvero $p = p_0(1 + \beta T_{\circ C})$.

Dove α (coefficiente di dilatazione termica) e β sono costanti indipendenti dal tipo di gas. Per un gas ideale, si osserva che $\alpha = \beta = \frac{1}{273.15°C}$, quindi le due relazioni diventano:

$$V = V_0(1+\alpha T_{\circ C}) = V_0\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + T_{\circ C}\right) = V_0\alpha(273.15°C + T_{\circ C}) = V_0\alpha(T_K)$$

$$p = p_0(1+\alpha T_{\circ C}) = p_0\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + T_{\circ C}\right) = p_0\alpha(273.15°C + T_{\circ C}) = p_0\alpha(T_K)$$

9.6.3 Legge di Avogadro

Volumi uguali di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione contengono lo stesso numero di molecole.

Questo vuol dire che in ogni gas in condizioni standard ($p = 101325Pa$ e $T = 273.15K$) una mole occupa un volume (detto volume molare) pari a 22.414 litri.

Mole La mole è definita come la quantità di materia che contiene esattamente $N_A = 6,02214076 \cdot 10^{23}$ entità elementari.

Unendo le 3 leggi più quella di Avogadro, ricaviamo l'equazione dei gas ideali $pV = nRT$. In forma implicita, l'equazione di un gas è $f(p, V, T) = 0$, mentre in forma esplicita possiamo dire $p = p(V, T), T = T(V, p)$ e $V = V(T, p)$.

9.6.4 Energia interna

L'energia interna di un gas ideale è una quantità definita come $U = nc_vT$, e indica l'energia totale del gas, quindi somma di K (energia cinetica) e E_{pot}. Tuttavia, l'energia potenziale nei gas ideali è pari a 0, quindi l'energia interna è pari all'energia cinetica totale, ovvero la somma dell'energia cinetica di ogni particella.

La variazione di energia interna è $\Delta U = Q - W = nc_v\Delta T$, con Q calore assorbito e W lavoro compiuto.

Per tutti i gas, l'energia interna è funzione di due variabili: $U = U(p, V)$; tuttavia, dato che nei gas ideali $pV = nRT$, l'energia interna diventa $U(p * V) = U(T)$, funzione della sola temperatura.

9.6.5 Funzione di stato

Una funzione di stato è una funzione i cui valori dipendono unicamente dallo stato del sistema, che in termodinamica è descritto dalle tre variabili di stato p, V e T.

Se vogliamo calcolare una variazione di una funzione di stato, per esempio una variazione di energia interna ΔU avendo un sistema che passa dallo stato A allo stato B, essa dipende solo da stato iniziale e stato finale del sistema, in particolare:

$$\Delta U = U(B) - U(A)$$

Va da sé che quando lo stato iniziale e finale coincidono, una funzione di stato ha variazione nulla.

Dilatazione termica Nei solidi e liquidi a pressione costante, il volume aumenta all'aumentare della temperatura.

Trasformazione reversibile e non In una trasformazione reversibile possiamo descrivere anche gli stati intermedi, in quanto saranno in equilibrio, e non solo quello iniziale e finale. Inoltre, come suggerisce il nome della trasformazione, non ci saranno cambiamenti permanenti, quindi, se la trasformazione va dallo stato A allo stato B, per tornare al punto A basta ripercorrerla in senso inverso.

Quando una trasformazione si discosta dallo stato di equilibrio, allora è detta irreversibile. In questo caso, non si può tornare allo stato A senza alterare l'ambiente esterno.

Possiamo ulteriormente dividere le trasformazioni in

- Isobara (pressione costante)
- Isoterma (temperatura costante)
- Isocora (volume costante)

Se una trasformazione è reversibile, può essere solo di un tipo; se è irreversibile, può essere sia adiabatica che isotermica.

Entalpia L'entalpia è una grandezza definita come $H = U + pV$. È una funzione di stato, dato che sia U che pV sono funzioni di stato, in particolare funzioni della sola variabile di stato T.

Per una trasformazione infinitesima:

$$dH = dU + d(pV) = nc_v dT + d(nRT) = nc_v dT + nRdT \equiv nc_p dT$$

Per una qualsiasi trasformazione finita con c_p costante:

$$\Delta H = nc_p \Delta T = nc_p(T_B - T_A)$$

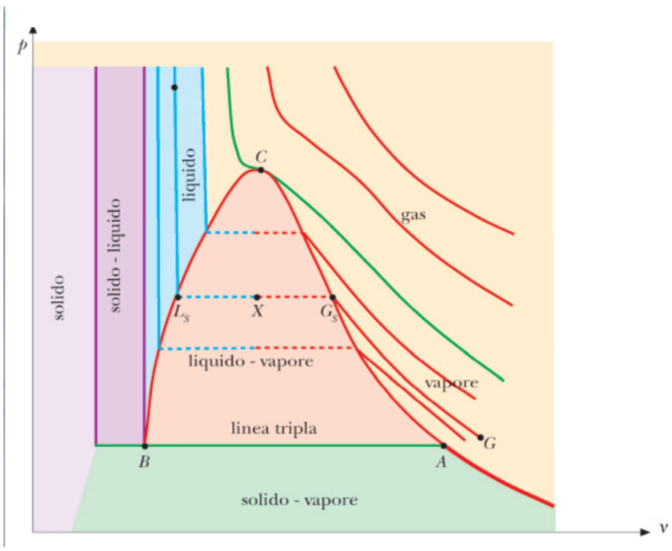
Gas reali Per i gas reali non valgono due comode approssimazioni tipiche di quelli ideali: le molecole del gas non sono assimilabili a particelle puntiformi ed esistono interazioni a distanza di tipo potenziale. Questo implica che nei gas reali:

1. In condizioni isoterme $pV \neq$ const.
2. Il rapporto $\frac{pV}{RT} \neq$ const, e tende a R solo per $p \to 0$.
3. L'energia interna U è funzione di p e T.

L'equazione di stato che descrive il loro comportamento è quella semiempirica di Van der Waals:

$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$, dove a e b sono coefficienti caratteristici del gas. In particolare, il termine $a\frac{n^2}{V^2}$ è detto "pressione interna" e il termine b "covolume", ovvero volume occupato da ogni molecola. Il termine $V - nb$ è dunque una differenza tra volume che occupa il gas e volume occupato da tutte le sue molecole.

Come ultimo dettaglio, ma non per importanza, un gas reale non ammette solo la fase gassosa: esistono valori delle variabili termodinamiche per i quali avvengono passaggi di fase. Osserviamo nel piano pv (con $v = \frac{V}{m}$ volume specifico):



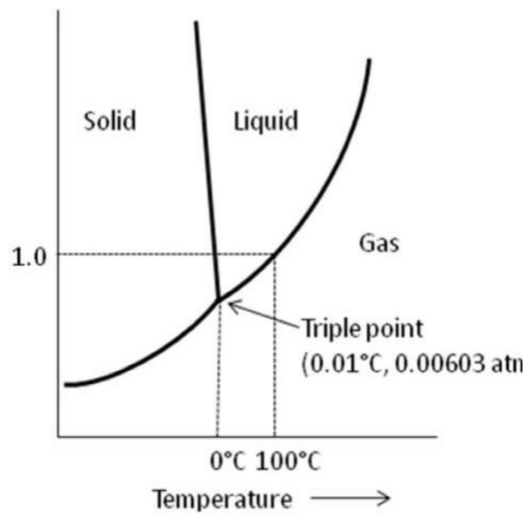
A temperatura costante tale che $T < T_C$, riducendo il volume si arriva allo stato G_s, dove avviene la condensazione (in questa zona il vapore è detto saturo, ovvero è in equilibrio col liquido). Il tratto rettilineo $G_s - L_s$ è sia isobaro che isotermo, e indica il cambiamento di fase vapore-liquido, caratterizzato da una pressione detta "pressione di vapore".

Il punto C è detto "critico", in quanto il tratto rettilineo $G_s - L_s$ si riduce a un punto, nel quale osserviamo un flesso per la curva isoterma (verde).

La differenza tra gas e vapore: il gas è una specie chimica con $T > T_C$ non liquefabile per compressione; il vapore è una specie chimica con $T < T_C$ liquefabile per compressione.

La linea AB è detta linea tripla, ed è un luogo dove coesistono le 3 fasi della materia. I suoi punti sono detti punti tripli.

Rappresentazione in piani pT Rappresentando un gas reale in un diagramma pT (p = ordinate, T= ascisse), notiamo che tutti gli stati di equilibrio in cui coesistono due fasi si trovano su 3 curve, chiamate linea di fusione, di evaporazione e di sublimazione. Esse si incontrano nel punto triplo. In figura è rappresentato il diagramma dell'acqua, che ha il punto triplo ai valori indicati di p e T.



Per $T > T_{critica}$, non esiste coesistenza di fasi, ma abbiamo solo gas.

Formula di Clapeyron La variazione di pressione con la temperatura lungo le curve di equilibrio tra due fasi di una stessa sostanza è pari a:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_2 - v_1}$$

con v = volume specifico e λ = calore latente.

Trasformazioni di un gas In una trasformazione ciclica (che sarà quindi reversibile se e solo se ogni trasformazione del ciclo è reversibile), il lavoro è positivo se il verso è orario; negativo se il verso è antiorario.

In una trasformazione adiabatica, vale $pV^\gamma = \text{const}$.
$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$, dove c_V è il calore specifico a volume costante (vale $\frac{3}{2}R$ in gas monoatomico e $\frac{5}{2}R$ in biatomico), e c_p il calore specifico a pressione costante (vale $\frac{5}{2}R$ in gas monoatomico e $\frac{7}{2}R$ in biatomico)

9.7 Ciclo di Carnot

Si tratta di un ciclo costituito dalle seguenti trasformazioni:

1. AB espansione isoterma, dove viene assorbito il calore Q_A e compiuto il lavoro $W_{AB} = nR \ln \frac{V_B}{V_A}$. $\Delta U = 0$, quindi $Q_A = W_{AB}$
2. BC espansione adiabatica: viene compiuto il lavoro $W_{BC} = -\Delta U \equiv nc_V \Delta T$.
   Dato che in B abbiamo p_B, V_B, T_2 e in C p_C, V_C, T_1, allora $T_2(V_B)^{\gamma-1} = T_1(V_C)^{\gamma-1}$
3. CD compressione isoterma: viene ceduto il calore Q_C e subito il lavoro $W_{CD} = nR \ln \frac{V_D}{V_C}$. $\Delta U = 0 \implies Q_C = W_{CD}$
4. DA compressione adiabatica: viene subito il lavoro $W_{DA} \equiv -\Delta U_{DA} = nc_V(T_2 - T_1) \equiv -W_{BC}$.
   Dato che in D abbiamo p_D, V_D, T_1 e in A p_A, V_A, T_2, allora $T_1(V_D)^{\gamma-1} = T_2(V_A)^{\gamma-1}$

Conclusioni:

- Calore scambiato complessivamente: Q_A (assorbito) $+Q_C$ (ceduto)
- Lavoro scambiato complessivamente: $W = W_{AB} + W_{BC}$ (compiuto) $+W_{CD} + W_{DA}$ (subito) $= W_{AB} + W_{CD}$ (perchè $W_{BC} = -W_{DA}$)
- Per le due adiabatiche abbiamo detto che $T_2(V_B)^{\gamma-1} = T_1(V_C)^{\gamma-1}$ e che $T_1(V_D)^{\gamma-1} = T_2(V_A)^{\gamma-1}$. Da questo ricaviamo:

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \implies \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

- Ora possiamo fare un'ultima (importante) osservazione: il rendimento del ciclo di Carnot dipende solo dalle temperature a cui avvengono gli scambi di calore. Infatti:

$$\eta = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} \equiv 1 + \frac{nRT_1 \ln \frac{V_C}{V_D}}{nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}} \equiv 1 - \frac{T_1}{T_2}, \text{ dato che } \ln \frac{V_B}{V_A} < 0$$

9.7.1 Ciclo di Carnot inverso

Se percorriamo il ciclo di Carnot all'inverso (partendo da D), otteniamo un ciclo frigorifero reversibile. Il sistema in questione:

1. Assorbe calore $Q_0 = nRT_1 \ln \frac{V_C}{V_D}$ dalla sorgente T_1
2. Cede calore $Q_C = nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_B}$ alla sorgente T_2
3. Subisce un lavoro $W = Q_0 + Q_C$

L'efficienza è:

$$\xi = \frac{Q_0}{|W|} \equiv \frac{Q_0}{|Q_0 + Q_C|} \equiv \frac{nRT_1 \ln \frac{V_C}{V_D}}{nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_B} - nRT_1 \ln \frac{V_C}{V_D}} \equiv \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

9.8 Relazione di Mayer

Per i gas specifici vale la seguente relazione, detta "di Mayer": $c_p - c_v = R$.

Dimostrazione: consideriamo una trasformazione isobara infinitesima: $dQ = nc_p dT$ e $dW = pdV$. Per il primo principio della termodinamica,

$$dU = dQ - dW, \text{ ovvero } nc_v dT = nc_p dT - pdV \tag{9}$$

Differenziando ora l'equazione di stato dei gas ideali, otteniamo $pdV + Vdp = nRdT$, ma dato che la trasformazione è isobara, allora $dp = 0$, quindi $pdV = nRdT$.

Sostituendo nell'equazione 9, otteniamo $nc_v dT = nc_p dT - nRdT$. Dividendo ambo i membri per ndT, otteniamo $c_v = c_p - R$, c.v.d.

Conseguenze della relazione di Mayer Dato che c_v dipende unicamente dall'energia interna, allora dipende unicamente dalla temperatura. A sua volta, per la relazione di Mayer, c_p dipenderà solo dalla temperatura.

9.9 Teoria cinetica dei gas

Leghiamo le tre variabili termodinamiche a informazioni cinematiche. Per questa sezione, le nostre ipotesi saranno:

1. Molecole del gas tutte uguale, moto continuo e disordinato
2. Dimensioni delle molecole trascurabili
3. No forze interne
4. Tutti gli urti sono elastici

Sotto queste ipotesi, con N molecole in un volume V abbiamo l'equazione di Joule-Clausius-Kronig:

$$PV = \frac{1}{3}Nmv^2$$

v^2 viene detta "velocità quadratica media", non dimostriamo questa formula.

L'energia cinetica media di traslazione è pari a $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.

Servendoci di ciò, possiamo riscrivere l'equazione di Joule-Clausius-Kronig come:

$$PV = \frac{2}{3}NE_k, \text{ e quindi anche } nRT = \frac{2}{3}NE_k$$

questo mostra che aumentando la temperatura aumenta E_k.

In base ai gradi di libertà di un gas, la sua E_k cambia. Detta $E_i = \frac{1}{2}k_BT$ l'energia relativa a un grado di libertà e k_B la costante di Boltzmann, avremo:

- Gas monoatomico: 3 gradi di libertà (x,y,z) $\implies E_k = 3E_i$.
- Gas biatomico: 5 gradi di libertà (può anche ruotare) $\implies E_k = 5E_i$.
- Gas biatomico con vibrazione: 7 gradi di libertà $\implies E_k = 7E_i$.

Queste differenze implicano una diversità nel calore specifico al variare del tipo di gas.

Dato che l'energia cinetica in un gas ideale l'unica forma di energia, per una mole di gas abbiamo che, detti l i gradi di libertà:
$U = N_AE_k$, uguale a $\frac{l}{2}N_Ak_bT$ ovvero $\frac{l}{2}RT$.

Miscele Nelle miscele di gas, la pressione totale è la somma delle pressioni parziali, ovvero:

$$p_{tot} = \sum_{i=0}^{k} p_i = \frac{RT}{V} \sum_{i=0}^{k} n_i \text{ per la legge dei gas ideali}$$

Questo enunciato è conosciuto anche come "legge di Dalton" o "legge delle proporzioni multiple".

9.10 Secondo principio della termodinamica

Questo principio afferma che, sebbene il lavoro sia interamente trasformabile in calore, non vale il viceversa. Inoltre, il calore passa spontaneamente solo da un colpo caldo a uno più freddo. Formalmente, i due enunciati sono i seguenti:

Enunciato di Kelvin-Planck Non è possibile costruire una macchina avente come unico risultato la trasformazione di calore in lavoro.

Enunciato di Clausius Non è possibile costruire una macchina avente come unico risultato il passaggio di calore da un corpo freddo a uno più caldo.

Equivalenza dei due enunciati pg. 344

Si dimostra per assurdo che ognuno dei due enunciati vale se e solo se vale anche l'altro.

Negazione Kelvin-Planck $\Longrightarrow$ Negazione Clausius: ipotizziamo di avere due macchine e due sorgenti: una fredda T_1 e una calda T_2. La macchina 1 assorbe calore Q_A da T_2 e lo trasforma **interamente** in lavoro W (viola il principio di Kelvin-Planck), quindi $Q_A = W$; la macchina 2 è una normale macchina frigorifera: mediante il lavoro W fornito dalla macchina 1, assorbe Q_1 da T_1 e cede Q_2 a T_2.
Sulla base del 1° principio della termodinamica, il bilancio della macchina 2 è $Q_1 + Q_2 = -W$. La macchina complessiva (1+2) assorbe Q_1 da T_1 e scambia a T_2 il calore $Q_A + Q_2$, ovvero $W + Q_2 = -Q_1$. Questo vuol dire che Q_1 è assorbito e $-Q_1$ è ceduto, senza alcuno scambio con l'ambiente esterno: è

stata realizzata una macchina che spontaneamente trasferisce calore da una sorgente fredda a una calda, c.v.d.

Negazione Clausius $\Longrightarrow$ negazione Kelvin-Planck: con le stesse sorgenti di prima, supponiamo di poter realizzare una macchina 1 che assorba $-Q$ da T_1 e ceda Q a T_2 (nega il principio di Clausius); la macchina 2 è invece una normale macchina termica che assorbe Q_2 da T_2: in parte lo converte in W e cede il resto (Q_1) a T_1.
Tariamo la seconda macchina in modo che $Q_1 = Q$, per far sì che che il calore complessivamente scambiato con la sorgente fredda sia 0. Il calore assorbito da quella calda è invece Q_2+Q, che è una quantità positiva dato che $Q_2 > |Q|$. Questo calore è pari a W, dato che $W = Q_2 + Q_1 = Q_2 + Q$. Abbiamo quindi realizzato una macchina che ha come unico effetto la conversione di calore in lavoro, c.v.d.

Teorema di Carnot La macchina di Carnot è la macchina con rendimento maggiore per coppia di sorgenti. Questo implica che ogni macchina reversibile che lavora tra 2 sorgenti uguali ha lo stesso rendimento, qualsiasi altra macchina ha rendimento minore.

Dimostrazione: supponiamo di avere 2 macchine: X (irreversibile) e R (reversibile), operanti tra le stesse sorgenti e generanti lo stesso lavoro W, i rendimenti sono:

$$\eta_X = \frac{W}{Q_2} \qquad \eta_R = \frac{W}{Q_2'}$$

Per il primo principio della termodinamica:

$$Q_2 + Q_1 = W = Q_2' + Q_1' \tag{10}$$

Supponiamo per assurdo che:

$$\eta_X > \eta_R \implies \frac{W}{Q_2} > \frac{W}{Q_2'} \implies Q_2' > Q_2 \implies Q_2' - Q_2 > 0$$

Usando la relazione 10 otteniamo $Q_1 - Q_1' > 0$. Consideriamo ora una macchina globale $X + R$ dove R compie un lavoro frigorifero (assorbe W e $-Q_1'$ e cede $-Q_2'$), abbiamo che la macchina complessiva:

- Assorbe $Q = Q_1 - Q_1' > 0$ dalla sorgente T_1.

- Non scambia lavoro con l'ambiente esterno
- Cede il calore $-Q = Q_2 - Q_2'$ a T_2

Questo significa che globalmente si ha solo un trasferimento di calore da una sorgente fredda a una calda, che è un assurdo nato dall'aver supposto che $\eta_X > \eta_R$, c.v.d.

9.10.1 Teorema di Clausius

Se un sistema subisce una trasformazione ciclica in cui scambia calore con n sorgenti, vale la disuguaglianza:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{T_j} \leq 0$$

dove Q_j è il calore scambiato con la sorgente j e T_j la sua temperatura assoluta. Se $n \to +\infty$ e si scompone il ciclo in una serie di trasformazioni infinitesime, la sommatoria diventa un integrale detto "ciclico":

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

dove dQ è il calore scambiato in una trasformazione infinitesima e T la temperatura della sorgente.
In entrambe le formule, l'uguaglianza vale solo nel caso di una trasformazione reversibile.

Dimostrazione: si suddivide il ciclo in una serie di cicli di Carnot (quindi reversibili) contigui, operanti tra le sorgenti T_1 e T_2, tra le sorgenti T_2 e T_3, e così via, fino alle sorgenti T_{2n-1} e T_{2n}.

Dal teorema di Carnot, per ognuno di questi cicli vale la relazione

$$\frac{Q_{2i}}{T_{2i}} + \frac{Q_{2i-1}}{T_{2i-1}} = 0, \text{ con } i = 1, \ldots, n$$

Sommando tutti i cicli si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{Q_{2i}}{T_{2i}} + \frac{Q_{2i-1}}{T_{2i-1}} \right) = 0, \text{ c.v.d.}$$

Se gli scambi avvengono invece in maniera irreversibile, ipotizziamo per assurdo che valga:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{T_j} \geq 0 \tag{11}$$

Questa relazione, scritta per una macchina irreversibile che opera tra le sorgenti T_1 e $T_2(> T_1)$, diventerebbe:

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \geq 0, \text{ ma dato che } Q_1 \text{ è calore ceduto (negativo), scriviamo:}$$

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{|Q_1|}{T_1} \geq 0 \implies \frac{|Q_1|}{Q_2} \leq \frac{T_1}{T_2}$$

Quindi il rendimento di questa macchina reversibile risulterebbe $\geq$ del rendimento di una macchina reversibile che opera tra le stesse temperature, infatti:

$$\eta_{irr} = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2} \geq 1 - \frac{T_1}{T_2} \equiv \eta_{rev}$$

E questo è un assurdo in quanto nega il teorema di Carnot, quindi 11 deve essere < 0 per macchine irreversibili, e $= 0$ per reversibili.

9.11 Entropia

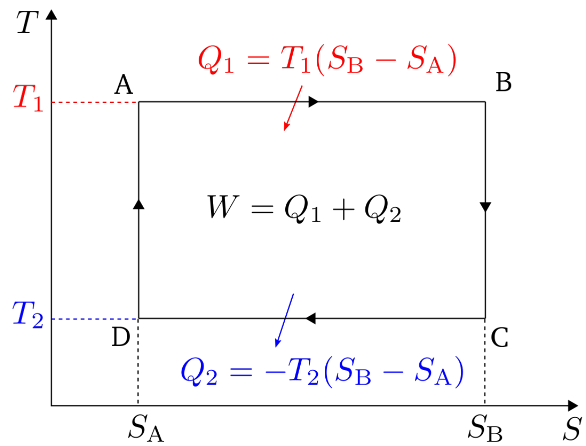
L'entropia è una funzione di stato definita a meno di una costante additiva (varia al variare del sistema di riferimento scelto), per cui ci limitiamo a calcolare la sua variazione:

$$\Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev}$$

Sappiamo che si tratta di una funzione di stato dal momento che nei cicli reversibili è pari a 0; viene misurata in $\frac{J}{K}$.

In una trasformazione isoterma reversibile, la formula è semplificata: $\Delta S = \frac{Q}{T}$; in una adiabatica reversibile abbiamo $dQ = 0 \implies \Delta S = 0$

9.11.1 Ciclo di Carnot in un diagramma TS

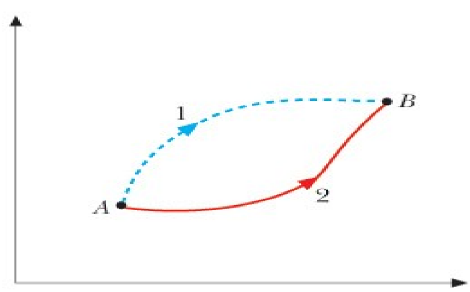


9.11.2 Aumento dell'entropia

L'entropia di un sistema isolato non può diminuire:

- Se avvengono trasformazioni reversibili, essa rimane costante.
- Se avvengono trasformazioni irreversibili, essa aumenta.

Dimostrazione: consideriamo due trasformazioni che vanno da uno stato A a uno B:



La prima è irreversibile e la seconda reversibile. Il ciclo che si ottiene percorrendo queste trasformazioni è dunque irreversibile, quindi per il teorema di Clausius possiamo affermare che:

$$\oint \frac{dQ}{T} \equiv \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 + \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_2 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr} - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} < 0$$

L'ultimo membro è la variazione di entropia, quindi:

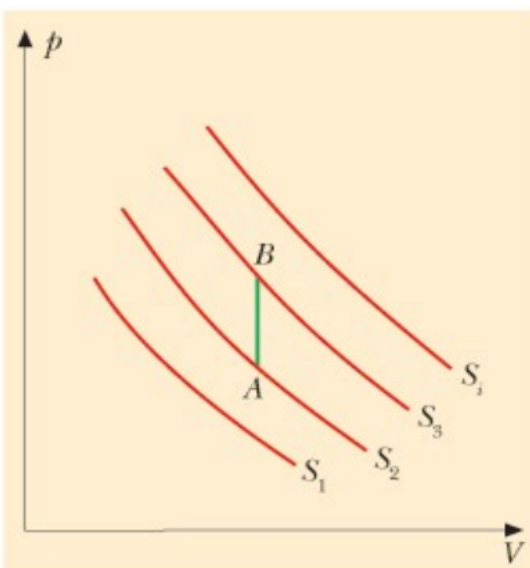
$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr} \tag{12}$$

dato che il sistema è isolato, non avviene scambio di calore con l'esterno, quindi $dQ = 0$, quindi:

- In una trasformazione reversibile $dQ_{rev} = 0$, quindi la disequazione 12 diventa $S_B - S_A = 0$
- In una trasformazione irreversibile $dQ_{irr} = 0$, quindi la disequazione 12 diventa $S_B - S_A > 0$

In generale, $dS \geq 0$, che è la formulazione matematica del secondo principio della termodinamica.

Curva isoentropica In un piano pV, la curva pV^γ =const, detta isoentropica, è il luogo geometrico dei punti del piano tali che il sistema evolve a entropia costante. Questo fenomeno può avvenire solo nelle trasformazioni adiabatiche reversibili.



Se si calcola la variazione di entropia dal punto A al punto B, ovvero $nc_v \ln \frac{p_B}{p_A}$ si vede che è > 0, dato che $p_B > p_A$. Le curve sono quindi in ordine crescente di entropia: $S_1 < S_2 < \cdots < S_i$.

Degradazione di energia I processi irreversibili (quindi quelli che causano un aumento dell'entropia dell'universo) sono responsabili della degradazione dell'energia, ovvero "sprecano" una parte di energia, che non verrebbe sprecata se il processo fosse reversibile. Quest'energia, detta "inutilizzabile", è calcolabile con la seguente formula:

$$E_{in} = T_0 \Delta S_{univ}$$

dove ΔS_{univ} è la variazione di entropia dell'universo causata dalla reazione e T_0 la temperatura più bassa tra quelle disponibili nell'ambiente.

Per capire meglio, l'energia inutilizzabile è pari al lavoro supplementare che bisognerebbe spendere per riportare in modo reversibile il sistema complessivo allo stato iniziale.

9.12 Formule

Legenda

- R = costante dei gas, pari a circa:

$$8.314 \frac{J}{K \cdot mol}, \text{ ovvero } \frac{Pa \cdot m^3}{K \cdot mol}, \text{ ovvero } \frac{kPa \cdot l}{K \cdot mol}$$

- T= temperatura
- p= pressione
- V= volume
- W = lavoro
- c_v e c_p= calore specifico a volume costante e pressione costante.
- S = entropia
- U = energia interna
- $\vec{F}$ = forza
- $\delta \vec{s}$ = spostamento

Formule:

- $pV = nRT$

- $\Delta U = nc_v \Delta T$, quindi $dU = nc_v dT$
- $dW = pdV$
- Primo principio della termodinamica $\Delta U = Q - W$ (W= lavoro compiuto dal gas, Q= calore ottenuto dal gas, U= energia interna al gas)
- Calore:
  1. $nc_v \Delta T$ in isocora
  2. $Q = W$ in isoterma
  3. 0 in adiabatica
  4. $nc_p \Delta T$ in isobara
- Lavoro:
  1. 0 in trasformazione isocora
  2. $-Q$ in isoterma
  3. $-nCv\Delta T$ in adiabatica, ma anche $\vec{F}\Delta\vec{s}$
  4. $p\Delta V$ isobara
-
$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dU + dW}{T} = \int_A^B \frac{nc_v dT}{T} + \int_A^B \frac{pdV}{T}$$
- ΔS di un gas in un ciclo $= 0$
- Se ambiente = solidi o liquidi: $dQ = mc_p dT$. Se invece si tratta di gas, si usano le formule del calore viste sopra.
-
$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_{fredda}}{T_{calda}}$$
-
$$\eta_{irr} = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}}$$

10 Preparazione per esame orale

- Differenza tra prodotto scalare e vettoriale

Prodotto	Scalare	Vettoriale
Notazione	$\vec{A} \bullet \vec{B}$	$\vec{A} \times \vec{B}$ o $\vec{A} \wedge \vec{B}$
Risultato	Scalare	Vettore
Modulo risultato	$AB \cos\theta$	$AB \sin\theta$
Proprietà	Distrib. e comm.	Distrib. e anticomm.

- Enunci e dimostri il principio di conservazione dell'energia meccanica

  Riposta: 4.3.1

- Quando una forza si dice conservativa?

  Risposta: 4.2

- Dimostri che una forza centrale è conservativa

  Risposta: 8.1.1

- Presenti e discuta le 3 leggi della dinamica

  Risposta: 3.1

- Dimostri come la seconda legge della dinamica di Newton permette di risolvere il problema generale della meccanica

  Risposta: il problema generale della meccanica è studiare il moto dei corpi. Il secondo principio della dinamica ci aiuta, in quanto ci fornisce informazioni su forza, velocità, posizione e massa, infatti:

$$F = ma \equiv m\frac{dv}{dt} \equiv m\frac{d^2x}{dt^2}$$

- Enunci e dimostri il principio di conservazione della quantità di moto

  Risposta: 3.3.1

- Nota l'energia meccanica, posso sapere l'orbita di un corpo?

  Sì:

  1. $E_m < 0 \implies$ orbita chiusa ellittica

2. $E_m = 0 \implies$ orbita aperta parabolica
3. $E_m > 0 \implies$ orbita aperta iperbolica

- Elenchi tutti i principi di conservazione che abbiamo studiato.

  Risposta:

  1. Principio di conservazione del momento angolare: 5.2.2
  2. Principio di conservazione della quantità di moto: 3.3.1
  3. Principio di conservazione dell'energia. Sottocasi:
     (a) Legge di conservazione dell'energia meccanica: 4.3.1
     (b) Legge di conservazione dell'energia cinetica (urti elastici)

- Mi parli della dinamica di un corpo rigido: gradi di libertà, equazioni del moto, leggi di conservazione.

  Riposta: un corpo rigido ha 6 gradi di libertà: 3 di tipo traslazionale e 3 di tipo rotazionale. Le equazioni del moto sono:

  Moto di traslazione: $\vec{R}^E \equiv \vec{R} = m\vec{a}_{CM}$

  Moto di rotazione: $\vec{\tau}^E = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$. Se $\vec{L} = I_z\vec{\omega}$, allora:

  $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_z\vec{\omega})}{dt} \equiv I_z\frac{d\vec{\omega}}{dt} \equiv \frac{1}{2}I_z\vec{\omega}^2$$

  Le leggi di conservazione rilevanti all'argomento sono quelle di energia meccanica, quantità di moto e momento angolare.

- Mi parli dell'equilibrio termodinamico e del principio dell'equilibrio termico

  Risposta: 9.1 e 9.1.1

- Com'è definita l'efficienza della macchina termica?

  Una macchina termica è efficiente se produce molto lavoro W assorbendo poco calore. La sua efficienza (rendimento η) è un numero compreso tra 0 e 1, che si ottiene come:

  $$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} \equiv \frac{Q_{ass} + Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}}$$

Nel caso della macchina frigorifera, invece:

$$\xi = \frac{Q_{ass}}{W} \equiv \frac{Q_{ass}}{Q_{ass} + Q_{ced}} = 1 + \frac{Q_{ass}}{Q_{ced}}$$

- Che differenza c'è tra una macchina termica reversibile e una irreversibile?

  Risposte in ordine di importanza:

Macchina	Reversibile	Irreversibile
Rendimento (teor. di Carnot)	$\eta_{rev} > \eta_{irr}$	$\eta_{irr} < \eta_{rev}$
ΔS_{univ} (teor. aum. entropia)	$= 0$	> 0
Si può tornare allo stato A?	Sì	Modificando l'univ.
Stati di eq./forze dissipative?	Sì/No	No/Sì, Sì/Sì, No/No

  Per definizione di "reversibilità", la macchina reversibile attraverserà sempre stati di equilibrio e non incontrerà forze dissipative (cioè non conservative), mentre quella irreversibile attraverserà fasi di non equilibrio, oppure incontrerà forze dissipative, oppure entrambe le cose insieme.

- Mi parli del ciclo di Carnot e lo rappresenti in un diagramma TS

  Riposta: 9.7 e 9.11.1

- Reciti gli enunciati del secondo principio della termodinamica e ne dimostri l'equivalenza

  Risposta: 9.10

- Valuti l'energia interna di un gas ideale monoatomico e di un gas ideale biatomico

  Risposta: 9.6.4. Risposta breve:

  $$U = nc_vT \implies U_{monoatomico} = n\frac{3}{2}RT \quad U_{biatomico} = n\frac{5}{2}RT$$

- Enunci e dimostri la relazione di Mayer

  Risposta: 9.8

- Enunci e dimostri il principio di aumento dell'entropia dell'universo

  Risposta: 9.11.2

- Dica cosa si intende per energia inutilizzabile (pg 365) e la calcoli per una trasformazione a sua scelta

  Risposta: 9.11.2.

- Dica cosa s'intende per funzione termodinamica di stato

  Risposta: 9.6.5