

Fisica 2

Antonio Pio Caruso

Basato sulle lezioni del professore Marco Ruggieri.

Queste dispense provengono da appunti presi a lezione, e dunque possono contenere delle sviste.

One of the best ways to learn physics is to write about it.

- Leonard Susskind

Argomenti

1	Introduzione	3
1.1	Generalità	3
1.1.1	4 Interazioni fondamentali	3
1.1.2	Equazioni di Maxwell	4
2	Elettrostatica	5
2.1	Campo elettrico	7
2.2	Moto della carica	10
2.3	Flusso del campo elettrico	12
2.3.1	Campo generato da un disco	12
2.3.2	Campo generato da un piano infinito	13
2.3.3	Definizione di flusso	14
2.3.4	Teorema di Gauss	14
2.4	Potenziale elettrico	16
2.5	Conduttori	19
2.5.1	Capacità elettrica	21
2.5.2	Condensatori	21
2.5.3	Condensatori connessi	22
2.5.4	Energia in un condensatore	24
2.5.5	Dielettrico posto tra le armature di un condensatore . .	26
2.6	Introduzione alle equazioni di Maxwell	27
2.6.1	Divergenza	28
2.6.2	Rotore	29
3	Elettrodinamica	31
3.1	Corrente elettrica	31
3.1.1	Modello di Drude	32
3.2	Legge di Ohm	34
3.2.1	Effetto Joule	35
3.3	Leggi di Kirchhoff	38
3.4	Spostamento elettrico	41
4	Magnetismo	45
4.1	Introduzione	45
4.2	Legge di Biot-Savart	49
4.3	Solenoide	53

4.4	Seconda equazione di Maxwell	54
5	Induzione elettromagnetica	59
5.1	Equazioni di Maxwell nel vuoto, caso non stazionario	77
5.2	Equazioni di Maxwell nella materia	80
6	Onde elettromagnetiche	81
6.1	Dalle equazioni di Maxwell alle onde	81
6.2	Relazione di dispersione	82
6.3	Applicazione di onde al campo elettrico	83
7	Pratica	86
7.1	Costanti	86
7.2	Formulario	86
7.2.1	Elettrostatica	86
7.2.2	Elettrodinamica	88
7.2.3	Magnetismo	89
7.2.4	Induzione elettromagnetica	91
7.2.5	Onde elettromagnetiche	92
7.2.6	Formule varie	92
8	Esame Orale	94
8.1	Raccolta domande del prof. Ruggieri	94
8.2	Raccolta domande del prof. Mirabella	95
8.3	Raccolta domande del prof. Plumari	96

1 Introduzione

Informazioni sul corso

- **Libri** Vanno bene diversi libri:
 - Serway and Jewett fisica 2, quinta edizione: libro che seguiremo.
 - Mencuccini e Silvestrini fisica 2: consiglio del prof.
 - Picasso, lezioni di fisica 2
 - D.J. Griffith, introduction to electrodynamics: il miglior libro, ma solo in inglese.
 - Francesco Lacava, classical electrodynamics.
 - Problemi e soluzioni di fisica 2, Mirabella e Plumari: ottimo libro economico per esercizi (contiene alcuni errori).
 - Classical theory of fields, Landau and Lifshits: più avanzato e complesso, ottimo per chi vuole approfondire.
- **Prerequisiti:** Qualche nozione di fisica 1, soprattutto il concetto di energia. Familiarità con concetti di analisi 1 e 2 quali derivate, integrali, trigonometria, approssimazioni di Taylor.
- **Frequenza delle lezioni:** Per le prove in itinere è obbligatoria al 65% (in realtà facoltativa).
- **Esame:** Sono previste due prove in itinere scritte (per chi non partecipa è previsto un unico esame scritto) e successivamente un esame orale.

1.1 Generalità

1.1.1 4 Interazioni fondamentali

Tutto ciò che avviene in fisica è riconducibile a 4 forze (o "interazioni") fondamentali:

1. Forza gravitazionale
2. Forza elettromagnetica
3. Interazione forte

4. Interazione debole

La gravitazione è stata trattata in fisica 1, le interazioni forti e deboli (presenti nei nuclei atomici) non saranno trattate in questo corso, mentre invece approfondiremo la forza elettromagnetica.

Forza elettrodebole Subito dopo il Big Bang l'interazione elettromagnetica e quella debole erano unite in un'unica forza, detta **elettrodebole**. Durante la quark epoch, col calare delle temperature sotto i $10^{15} K$ (ad oggi l'uomo è riuscito al massimo a raggiungere l'ordine di 10^{12} , con acceleratori di particelle), la forza elettrodebole si separò nelle due forze che sperimentiamo oggi.

1.1.2 Equazioni di Maxwell

Elettricità e magnetismo sono due concetti **strettamente collegati**, come mostrano le 4 equazioni di Maxwell:

$$1. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$2. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$3. \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$4. \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dove ∇ si legge "nabla", \vec{E} è il campo elettrico e \vec{B} quello magnetico.

La prima equazione mostra che il campo elettrico è generato da cariche, mentre la seconda ci dice che per un campo magnetico non esistono cariche, infatti non è mai possibile separare i due poli di una calamita.

La terza e la quarta mostrano che per generare un campo elettrico basta un campo magnetico, e viceversa.

Se uniamo queste quattro equazioni alla forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.1)$$

Siamo in grado di descrivere ogni singolo fenomeno elettromagnetico della fisica classica, per esempio:

- Interazioni tra atomi e tra molecole
- L'aurora boreale (interazione tra gli elettroni provenienti dal sole e l'atmosfera)
- Perché il cielo è blu
- Pianeti giganti gassosi (Giove), che hanno temperature e pressioni interne altissime.

Avremo modo di parlare nel dettaglio di leggi di Maxwell e altro.

2 Elettrostatica

Si osserva sperimentalmente che strofinando alcuni oggetti con un panno di lana, si manifesta una leggera forza che può attrarre o respingere piccoli oggetti, come pezzettini di carta.

Si tratta naturalmente della **forza elettrostatica**: strofinando una penna carichiamo quest'ultima elettricamente, ovvero depositiamo su essa delle cariche elettriche, che possono essere di due diversi tipi: per convenzione le chiamiamo carica **positiva** o **negativa**.

Conservazione della carica La carica è una grandezza sempre **conservativa**: se parto da due bacchette neutre e le strofino tra loro, una bacchetta finirà per avere una carica q mentre l'altra avrà una carica $-q$ esattamente opposta, in modo che la loro somma algebrica sia 0.

Questo mostra che le cariche non sono mai create; ciò che avviene è semplicemente un **trasferimento di elettroni**.

Quando connettiamo un corpo al suolo si parla di **messa a terra**, e si indica col simbolo \perp . In questo caso il corpo tenderà a diventare neutro, trasferendo tutta la sua carica verso il suolo.

Quantizzazione della carica Sperimentalmente si è osservato che qualsiasi carica è sempre multiplo intero di una carica elementare e , pari alla carica

di un protone, ovvero l'opposto della carica di un elettrone, pari a:

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19}C, \quad (2.1)$$

dove C è l'unità di misura della carica nel SI, il Coulomb.

In alcuni libri e indica la carica di un elettrone, ovvero $e = -1.6 \cdot 10^{-19}$. In ogni caso, per non confondersi basta ricordare che la carica dell'elettrone è negativa e quella del protone positiva.

Formalmente diciamo quindi che la carica è **quantizzata**, ovvero non scorre in modo continuo, ma in quantità definite.

Possiamo esprimere qualsiasi carica come $q = \pm ne$, con $n \in \mathbb{N}$.

Partendo dalla 2.1:

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19}C \implies C = \frac{e}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 6.02 \cdot 10^{18}e,$$

ovvero $1C$ esprime la carica di $6.2 \cdot 10^{18}$ elettroni.

La massa di un protone è circa $10^{-27}kg$, quella di un elettrone circa $10^{-31}kg$.

Isolanti e conduttori Esistono due tipi di sistemi fisici che possiamo caricare elettricamente:

- Conduttori, dove gli elettroni possono muoversi piuttosto liberamente.
- Isolanti, dove gli elettroni sono più strettamente legati ai loro nuclei atomici, e quindi hanno meno libertà di movimento.

Polarizzazione Se avviciniamo una carica a un isolante, in esso avviene una separazione delle cariche positive da quelle negative, ovvero una **polarizzazione**.

Anche se la carica dell'isolante rimane nulla, osserviamo una ridistribuzione delle sue cariche, ovvero la formazione dei cosiddetti **dipoli**: uno dove sono raccolte tutte le cariche positive, e uno dove sono raccolte quelle negative.

Legge di Coulomb Prendiamo due cariche puntiformi (dimensioni trascurabili) q_1 e q_2 ; allora la forza elettrica su di esse è descritta dalla famosa legge di Coulomb:

$$|F_{12}| = |F_{21}| = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2.2)$$

Dove k è la costante di Coulomb, nel sistema internazionale pari a:

$$k = 8,987 \cdot 10^9 Nm^2C^{-2},$$

e r la distanza tra le due cariche.

Se $q_1 \cdot q_2 > 0$ (le cariche hanno lo stesso segno), la forza di Coulomb risulta $F > 0$ e dunque **repulsiva**.

Se $q_1 \cdot q_2 < 0$ (le cariche hanno segno opposto), la forza di Coulomb risulta $F < 0$ e dunque **attrattiva**.

Principio di sovrapposizione Se abbiamo n cariche puntiformi, la forza \vec{F}_i che agisce sulla carica i -esima sarà data dalla somma vettoriale delle $n-1$ forze di Coulomb che si sviluppano tra essa e le altre:

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ji}. \quad (2.3)$$

2.1 Campo elettrico

Se abbiamo una carica di prova q posta a distanza r da una carica Q , allora il campo elettrico (o elettrostatico) generato da Q sarà il vettore:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = k \frac{Qq}{r^2} \frac{1}{q} \hat{r} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}. \quad (2.4)$$

Come si nota dall'espressione finale, si tratta di una quantità fisica che esiste indipendentemente dalla carica di prova q , la quale serve solo a misurare l'intensità del campo.

Possiamo affermare che \vec{E} esercita su q una forza \vec{F}_e .

Dato che la legge di sovrapposizione vale per la forza di Coulomb, allora vale anche per il campo, essendo esso $E = \frac{F}{q}$.

Se abbiamo n cariche Q_i , ognuna generante un campo \vec{E}_i , per la legge di sovrapposizione il campo risultante in un punto sarà la somma vettoriale dei singoli campi generati dalle cariche, ovvero:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = k \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (2.5)$$

dove r_i è la distanza tra la carica i -esima e il punto dove si sta calcolando il campo elettrico.

Come vedremo, il campo elettrico è indispensabile per definire la configurazione di energia elettrostatica nello spazio, e nel caso di sorgenti mobili il campo descrive la propagazione di energia nello spazio.

Gli effetti prodotti da cariche sorgenti possono manifestarsi anche a grandi distanze, eventualmente con un leggero ritardo, che è il tempo che il campo impiega per propagarsi.

Campo uscente o entrante Per convenzione:

- Se una carica **positiva** q_1 genera un campo, esso è **uscente** da q_1
- Se una carica **negativa** q_2 genera un campo, esso sarà **entrante** in q_2 .

Dipolo elettrico Due cariche uguali in modulo ma opposte in segno, poste a una distanza costante, costituiscono un sistema detto **dipolo**.

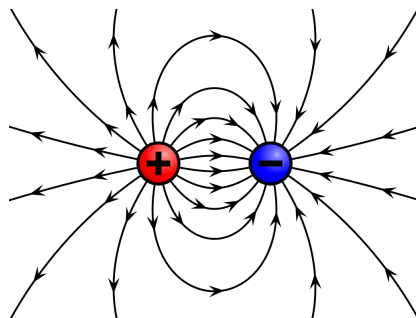
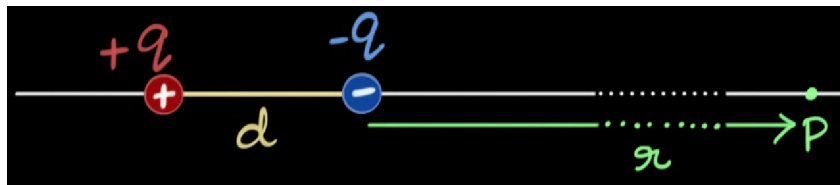


Figure 1: Dipolo elettrico e suo campo

Campo di un dipolo Calcoliamo il campo prodotto dal dipolo su un punto P che sta sulla retta congiungente le due cariche, distante r dalla carica negativa e dunque $r + d$ da quella positiva, come in figura:



Il campo elettrico prodotto dalla carica positiva avrà modulo $E_1 = \frac{kq}{(r+d)^2}$ e sarà rivolto verso l'esterno, mentre il campo elettrico prodotto dalla carica negativa avrà modulo $E_2 = \frac{kq}{r^2}$ e sarà rivolto verso essa.

È evidente che $E_2 > E_1$, quindi il campo risultante sarà rivolto verso il dipolo. Per il principio di sovrapposizione, il modulo del campo in P è:

$$E = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2| = E_2 - E_1 = \frac{kq}{r^2} - \frac{kq}{(r+d)^2} = kq \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+d)^2} \right] =$$

$$= kq \frac{(r+d)^2 - r^2}{r^2(r+d)^2} = kq \frac{d^2 + 2rd}{r^2(r+d)^2} = E.$$

Se introduciamo l'ipotesi che $r \gg d$, possiamo studiare il comportamento del campo a grandi distanze dal dipolo. Si otterrebbe:

$$E \approx kq \frac{2rd}{r^4} = \frac{2kqd}{r^3}.$$

Otteniamo quindi che l'intensità del campo prodotto da un dipolo decresce col **cubo** della distanza dal dipolo. Per un campo prodotto da una carica puntiforme il decremento è quadratico, ma il campo di un dipolo risente di un ulteriore contributo dato dalla carica di segno opposto, quindi il risultato ottenuto ha senso.

Linea di campo Una linea di campo, detta anche linea di forza, è una linea **immaginaria** sempre parallela alla direzione di un campo elettrico, e ci permette di visualizzare la distribuzione del campo nello spazio. È da notare che le linee di campo non hanno nulla a che vedere con l'effettivo moto delle particelle, che studieremo nella sezione successiva.

Come già accennato, per un campo generato da una distribuzione di carica q , avremo:

- Se $q > 0$, le linee di campo sono uscenti.
- Se $q < 0$, le linee di campo sono entranti.

Più ci avviciniamo alla carica in questione, più le linee di campo saranno dense, e questo indica che il campo sarà più intenso.

2.2 Moto della carica

La seconda legge di Newton afferma:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}; \quad (2.6)$$

in particolare $\vec{F} = m\vec{a}$ se la massa è costante nel tempo. Nel caso di forza elettrostatica:

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \implies \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (2.7)$$

Quando \vec{E} è costante, l'accelerazione sarà costante e avremo dunque un moto uniformemente accelerato, quindi sappiamo dalla meccanica che la legge oraria è:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad (2.8)$$

quindi nel nostro caso:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2. \quad (2.9)$$

Nel caso di un dipolo con $E_x = E$ e $E_y = 0$ si avrebbe un moto parabolico, in quanto avremmo:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0,x} t + \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0,y} t \end{cases} \quad (2.10)$$

Infatti la coordinata x varierebbe col quadrato del tempo, mentre la y linearmente. Questo avviene ogni volta che una carica entra in un campo perpendicolarmente alle linee di forza, in quanto una componente del campo risulterà nulla, andando ad annullare il termine in t^2 per la relativa coordinata.

Dalla 2.9 si ricava la velocità:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 + \frac{qE}{m} t$$

Sempre dalla 2.9, se supponiamo $x_0 = v_0 = 0$, ricaviamo una formula per conoscere il tempo t impiegato dalla carica per percorrere una distanza h :

$$x(t) = h = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \implies \boxed{t = \sqrt{\frac{2mh}{qE}}}.$$

Possiamo dire di più. Il **teorema dell'energia cinetica** afferma che $W = \Delta K$.

Nel caso della forza elettrica, $W = F_e h = qEh$, e il teorema diventa, supponendo che $v_0 = 0$:

$$qEh = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.11)$$

Da questa equazione ricaviamo la velocità di una particella carica che si trova a distanza h dal campo E :

$$v = \sqrt{\frac{2qEh}{m}}.$$

Distribuzione continua di carica Finora abbiamo trattato il caso in cui un campo elettrico è somma di n campi distinti. Supponiamo ora che $n \rightarrow \infty$, per cui scegliendo una qualsiasi regione di spazio arbitrariamente piccola, ci sarà sempre una carica.

Il principio di sovrapposizione non sarebbe più pratico, in quanto sarebbe una somma di infiniti termini, tuttavia ovviamente continua a valere. Questo problema si risolve introducendo l'integrale al posto della sommatoria:

$$\vec{E} = k \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}. \quad (2.12)$$

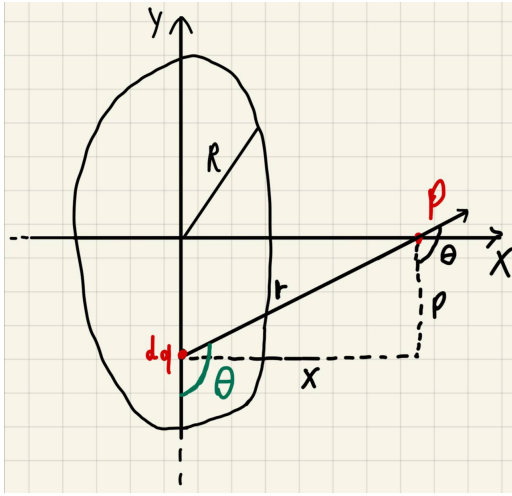
Densità di carica Possiamo considerare le tre seguenti densità di carica:

- Lineare (anelli, fili, ecc): $\lambda = \frac{dq}{dl}$, misurata in $\frac{C}{m}$.
- Superficiale (lastre, finestre, ecc): $\sigma = \frac{dq}{dA}$, misurata in $\frac{C}{m^2}$.
- Volumetrica (sfere, solidi): $\rho = \frac{dq}{dV}$, misurata in $\frac{C}{m^3}$.

2.3 Flusso del campo elettrico

2.3.1 Campo generato da un disco

Dato un disco di raggio R carico uniformemente con densità di carica superficiale σ , ci poniamo il problema di calcolare il campo elettrico in un punto appartenente all'asse del disco, distante x dal suo centro.



Il campo risultante sarà diretto lungo l'asse delle x , in quanto ogni contributo verticale positivo ha una controparte negativa, vista la simmetria del disco. Resta dunque da calcolare il modulo $E = E_x$.

Ogni carica infinitesimale dq sul disco genera un campo la cui componente sull'asse delle ascisse è $dE_x = \frac{k dq}{r^2} \cos \theta = \frac{k \sigma dA}{r^2} \cos \theta$.

Facciamo ora delle considerazioni:

- $r = \sqrt{x^2 + \rho^2}$ per il teorema di Pitagora.
- Passando a coordinate polari: $dA = \rho d\rho d\phi$.
- $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \rho^2}}$.

A questo punto possiamo riscrivere:

$$dE_x = k\sigma \frac{x}{\sqrt{x^2 + \rho^2}} \cdot \frac{1}{x^2 + \rho^2} \rho d\rho d\phi = k\sigma x \frac{\rho}{(x^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho d\phi.$$

Per ottenere il campo basta integrare lungo tutto il disco, ovvero risolvere

l'integrale doppio:

$$E_x = k\sigma x \int_0^R \frac{\rho}{(x^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi = k\sigma 2\pi x \int_0^R \frac{\rho}{(x^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= k\sigma 2\pi x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \boxed{k\sigma 2\pi \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = E_x = E}.$$

Consideriamo ora due casi limite:

1. $x \ll R \implies \frac{x}{R} \ll 1 \implies \frac{x}{R} \rightarrow 0$, quindi possiamo fare l'approssimazione:

$$1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} = 1 - \frac{x}{R\sqrt{\frac{x^2}{R^2} + 1}} \approx 1 \implies \boxed{E \approx 2k\pi\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

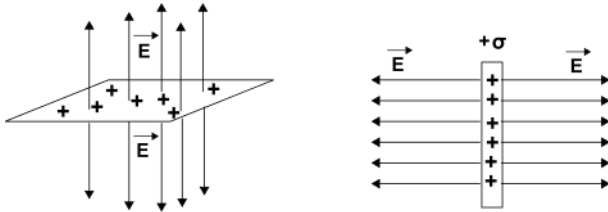
Si tratta di un campo uniforme e indipendente da x .

2. $x \gg R$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \approx 1 - \frac{R^2}{2x^2} \implies E \approx 2\pi k\sigma \left(\frac{R^2}{2x^2} \right) = \frac{k\pi R^2\sigma}{x^2} = \frac{kA\sigma}{x^2} = \boxed{\frac{kQ}{x^2} \approx E}$$

2.3.2 Campo generato da un piano infinito

Consideriamo il campo elettrico \vec{E} generato da un piano infinito caricato elettricamente. Esso avrà verso e direzione come in figura:



Inoltre il modulo è $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, proprio come il campo prodotto da un disco calcolato su un punto molto vicino al suo centro, come visto precedentemente.

Se abbiamo due piani infiniti con cariche uguali ma opposte:

- Ogni particella posta tra di loro risiede in un campo che ha modulo:

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \boxed{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E}$$

Perché ricordiamo che tale campo è indipendente dalla distanza della particella dal piano. Questo è il campo presente all'interno di un **condensatore piano**, come vedremo più avanti.

- Ogni carica posta nello spazio esterno a questi piani, risentirà dell'azione di un campo nullo, infatti:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i} = 0.$$

2.3.3 Definizione di flusso

Possiamo chiamare **flusso** di un campo elettrico \vec{E} attraverso una superficie A il numero di linee che attraversano A ; una definizione più rigorosa è:

$$\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A},$$

dove dA è una delle infinitesimali aree che costituiscono A .

Se il campo \vec{E} è omogeneo e perpendicolare all'area, allora $\phi_E = EA$.

2.3.4 Teorema di Gauss

Chiamato anche "teorema del flusso". Il flusso di un campo elettrico \vec{E} nel vuoto attraverso una superficie chiusa S è indipendente dalla distanza, e vale:

$$\Phi_E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{2.13}$$

Dove Q_{int} è la carica interna alla superficie S : eventuali cariche esterne a S non portano alcun contributo al flusso.

Proof. Supponiamo per semplicità che la superficie sia sferica e con centro coincidente con una carica $q > 0$ e raggio a ; il flusso sarebbe:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = k \frac{q}{a^2} \oint \hat{a} \cdot d\vec{A}.$$

Si tratta di integrale ciclico, ovvero esteso a tutta la superficie chiusa.

Il versore \hat{a} è sempre perpendicolare alla superficie sferica, quindi:

$\hat{a} \parallel d\vec{A} \implies \hat{a} \cdot d\vec{A} = |\hat{a}| dA = dA$, quindi:

$$\Phi_E = k \frac{q}{a^2} \oint dA = k \frac{q}{a^2} A = k \frac{q}{a^2} 4\pi a^2 = kq4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}; \text{ c.v.d.}$$

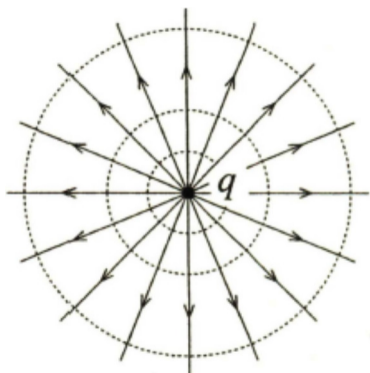
L'equazione $\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$ vale per ogni generica superficie chiusa Σ contenente una carica q , dato che si avrebbero le stesse linee di campo che attraversano una sfera contenente Σ . Supponendo invece q_1 esterna a Σ , per ogni linea del campo \vec{E}_1 entrante nella figura ce ne sarebbe una uscente \implies il flusso totale dovuto a q_1 è 0. \square

Nella pratica talvolta può essere usato questo teorema per calcolare facilmente il campo elettrico. Una superficie chiusa (non necessariamente reale, ma anche immaginaria, costruita ad hoc) attraversata da un flusso viene detta anche "**gaussiana**" quando si usa il teorema di Gauss per calcolare il flusso che la attraversa.

Principio di sovrapposizione del flusso Il principio di sovrapposizione vale anche nel flusso: se ho n cariche e una superficie A , il flusso totale degli n campi su A sarà la somma algebrica degli n flussi.

Questa è una diretta conseguenza del principio di sovrapposizione del campo elettrico.

Simmetria sferica Una sfera carica con densità uniforme ρ gode della **simmetria sferica** del campo: $|\vec{E}| = |\vec{E}'|$, dove \vec{E}' è il vettore del campo elettrico orientato in un qualsiasi modo diverso da \vec{E} :



Questo implica che il campo è **radiale**, ovvero:

- Tutte le linee del campo escono o entrano dal centro.
- La sua intensità dipende unicamente dalla distanza tra il centro e P .
- È orientato dal vettore congiungente il centro e P .

Il campo elettrico emesso da una sfera ha un andamento simile al campo gravitazionale che emetterebbe la sfera: dalla superficie verso l'esterno esso decresce **col quadrato** della distanza, mentre dalla superficie verso il centro cresce **linearmente** con la distanza.

2.4 Potenziale elettrico

Quando una carica q_2 si sposta da un punto A a un punto B muovendosi attraverso il campo elettrico generato da una carica q_1 , il lavoro compiuto da q_1 su q_2 è:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_E \cdot d\vec{s} = \int_A^B k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{s} = k q_1 q_2 \int_A^B \frac{dr}{r^2} = k q_1 q_2 \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}$$

Il lavoro compiuto da un generico campo \vec{E} è invece:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_E \cdot d\vec{s} = \boxed{q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\Delta U} = -(U_B - U_A)$$

Dove ΔU è la **variazione di energia potenziale elettrica**.

Da queste due osservazioni segue che la forza determinata dalla legge di Coulomb è **conservativa** e quindi non dipende dal percorso effettuato, ma solo dal punto iniziale e finale.

Si definisce **potenziale elettrico** di una carica q avente un'energia potenziale U il rapporto scalare:

$$\boxed{V = \frac{U}{q}}, \text{ di unità di misura Volt: } 1V = \frac{1J}{1C}$$

Quindi la **differenza** di potenziale elettrico tra un punto A e un punto B sarà definita come:

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} = \boxed{-\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Delta V}$$

da cui si ottiene:

$$\Delta U = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = q\Delta V$$

Se q è positiva, allora l'energia potenziale U è più alta nei punti in cui il potenziale V è più alto. Ma, se q è negativa, come nel caso degli elettroni, U è più bassa nei punti in cui V è più alto, e viceversa. Questo è il motivo per cui gli elettroni si muovono spontaneamente dal polo negativo (U alta) al polo positivo (U bassa).

Potenziale definito in un punto P Immaginiamo una carica q che genera un campo \vec{E} ; allora è possibile definire il potenziale elettrico in un generico punto P . Per farlo, stabiliamo che il potenziale sia nullo quando ci si pone a una distanza infinita da q :

$$V_\infty = 0 \implies V_P - V_\infty = \boxed{V_P = -\int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

ovvero V_P è pari al lavoro per unità di carica necessario per spostare la carica dall'infinito fino al punto P .

Ricavare il campo dalla differenza di potenziale

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \implies dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -E(r)\hat{u}_r \cdot d\vec{s} = -E(r) dr,$$

quindi:

$$E(r) = -\frac{dV}{dr} \implies \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \text{ dove } \nabla = \hat{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Campo perpendicolare a una superficie Dato un campo elettrico perpendicolare a una superficie e presi due punti qualsiasi A e B su tale superficie, allora la differenza di potenziale tra essi sarà nulla. Infatti il campo sarà perpendicolare al vettore spostamento $d\vec{s}$, e quindi:

$$V_B - V_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Una superficie è detta **equipotenziale** se:

$$\forall A, B \text{ punti della superficie} \implies \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Calcolo del potenziale Una carica che si muove da un punto A a un punto B attraverso un campo \vec{E} generato da una carica q subisce una variazione di potenziale elettrico:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -kq \int_A^B \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s} = -kq \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Sovrapposizione Anche per il potenziale elettrico vale la legge di sovrapposizione. Supponendo di avere n cariche, il potenziale elettrico in P sarà pari alla somma dei potenziali generati da ciascuna carica in tale posizione:

$$V(P) = \sum_{i=1}^n V_i(P) = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{|r_i - r_P|}$$

Segue che in un dipolo, il potenziale in un punto P sull'asse di simmetria sarà pari a 0.

Osserviamo che il potenziale elettrico generato da una carica puntiforme decade linearmente con la distanza da essa, mentre il potenziale generato da un dipolo elettrico calcolato in un punto P sulla retta passante per le due cariche tende a decadere col **quadrato** della distanza dal dipolo, e ha lo stesso segno della carica alla quale è più vicino.

La sovrapposizione vale anche quando la distribuzione di cariche è continua e non discreta; in tal caso la formula è un integrale:

$$V(P) = k \int \frac{dq}{|\vec{r}|},$$

dove \vec{r} è funzione delle coordinate dei punti.

2.5 Conduttori

Studieremo conduttori in **equilibrio** elettrostatico, ovvero dove ogni carica sarà ferma e non in moto.

Affinché si mantenga l'equilibrio, il campo elettrico interno al conduttore deve essere nullo, altrimenti le cariche si muoverebbero.

Questo deve quindi accadere sia quando il conduttore è isolato, sia quando è in presenza di un altro campo elettrico.

Dato che il campo interno al conduttore è nullo, la carica interna sarà nulla, infatti per il teorema di Gauss il flusso elettrico lungo una qualsiasi superficie interna Σ del conduttore è:

$$\Phi(\Sigma)_{\vec{E}} = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \implies Q_{int} = 0.$$

Campo vicino alla superficie di un conduttore Il campo elettrico in prossimità della superficie di un conduttore è sempre perpendicolare a essa, e il suo modulo è $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, dove σ è la densità superficiale di carica.

Proof. Ogni carica q in prossimità della superficie risente di una forza $\vec{F} = q\vec{E}$. Se questa forza non fosse perpendicolare, sposterebbe le cariche lungo la superficie, quindi esse si muoverebbero e dunque non ci sarebbe **equilibrio**.

Dimostriamo la formula: consideriamo il flusso passante per un corpo cilindrico posto sul conduttore. Possiamo dividere tale flusso in:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{basesup} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{baseinf} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{baselat} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Quello della base inferiore (posta all'interno del conduttore) è 0, dato che il campo è 0.

Quello nella base laterale è 0 perché nella parte interna al conduttore $\vec{E} = 0$, mentre nella parte esterna il campo è perpendicolare alla superficie, quindi $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$.

Quello della base superiore A è:

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_A E dA = E \int_A dA = EA,$$

e per il teorema di Gauss otteniamo $EA = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \implies E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. □

La superficie di un conduttore in equilibrio è equipotenziale Considerando due punti A e B sulla superficie di un conduttore in equilibrio, ottengo che $V_B - V_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, dato che \vec{E} è sempre ortogonale a $d\vec{s} \implies V_B = V_A$.

Allo stesso tempo, considerando due punti interni avremo:

$$V_{B'} - V_{A'} = \int_{A'}^{B'} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \implies V_{B'} = V_{A'}$$

poiché il campo interno è nullo.

Campo interno a una cavità di un conduttore Supponiamo di avere una cavità all'interno di un conduttore: quanto vale il campo \vec{E} al suo interno?

Prendendo due punti A e B sulla superficie della cavità, deve valere che $V_B - V_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ per ogni traiettoria, dato che A e B sono anche punti del conduttore. Affinché questo avvenga, \vec{E} deve essere 0, e quindi q sulla superficie della cavità sarà 0.

Dopo queste osservazioni possiamo dedurre che man mano che un conduttore si muove verso l'equilibrio, le sue cariche andranno a distribuirsi sulla superficie esterna. Nel caso di una sfera, all'equilibrio le cariche saranno **uniformemente** distribuite, per via della simmetria sferica, ma che succede se il conduttore ha altre forme, per esempio spigoli o punte?

Effetto punta Le cariche elettriche distribuite sulla superficie di un conduttore si **concentrano** nelle parti che presentano un raggio di curvatura minore, cioè quelle più appuntite.

Questo si può dimostrare prendendo due sfere conduttrici con raggio diverso $a \neq b$ e collegandole tra loro, in modo da renderle equipotenziali. Dopo aver raggiunto l'equilibrio, sulle superfici delle sfere i potenziali elettrici saranno:

$$V_1 = k \frac{Q_1}{a} = V_2 = k \frac{Q_2}{b} \implies \frac{Q_1}{a} = \frac{Q_2}{b}.$$

Affinché quest'equazione sia sempre valida, quando a è piccolo allora Q_1 deve essere grande, ovvero minore è il raggio di una delle sfere e maggiore sarà

la carica distribuita sulla sua superficie: questo avviene nelle "punte" dei conduttori, che hanno un raggio di curvatura minore.

Per lo stesso effetto, il **campo elettrico** sarà maggiore presso le punte:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1 b^2}{Q_2 a^2} \implies \boxed{E_1 \propto \frac{1}{a}}.$$

2.5.1 Capacità elettrica

Concetto molto importante per i conduttori.

Se abbiamo due conduttori aventi una carica rispettivamente Q e $-Q$, esisterà un campo elettrico che va da Q a $-Q$. Per questo motivo esisterà una differenza di potenziale ΔV tra i due conduttori.

Si osserva sperimentalmente (ma si può anche dimostrare) che $|Q| = C|\Delta V|$,

dove $\boxed{C = \frac{|Q|}{|\Delta V|}}$ è detta **capacità elettrica** del sistema di conduttori, e si

misura in **Farad**: $1F = \frac{1C}{1V}$

In due conduttori piani Se abbiamo due conduttori piani di superficie A posti a distanza d tale che $d^2 \ll A$, avremo:

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B E ds = -E \int_A^B ds = -E d,$$

quindi:

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{|Q|}{|E|d} = \frac{|\sigma|A}{\underset{\varepsilon_0}{|E|}d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}.$$

Questa è esattamente la capacità che si ha tra le armature piane di un **condensatore**.

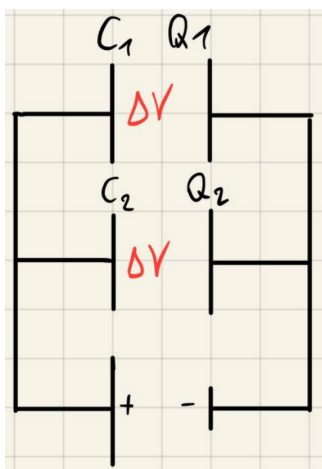
2.5.2 Condensatori

Un condensatore è un componente elettrico formato da due oggetti conduttori detti "**armature**", separati da materiale isolante. La funzione di un condensatore è accumulare carica elettrica.

2.5.3 Condensatori connessi

Due (o più) condensatori si possono connettere:

- In parallelo:

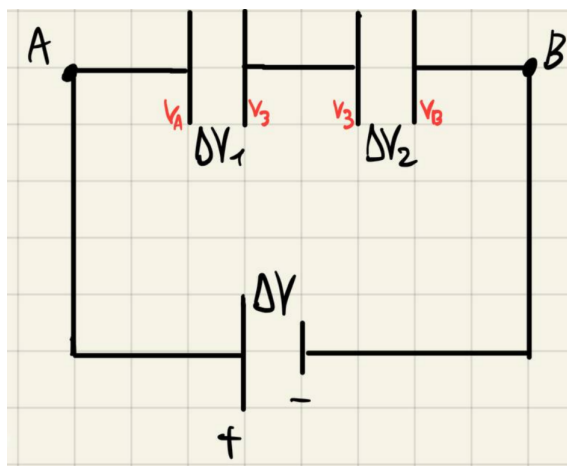


In tal caso:

- La differenza di potenziale ΔV sarà la stessa in ogni condensatore.
- La carica totale nel sistema sarà $Q_{tot} = Q_1 + Q_2 = C_1\Delta V + C_2\Delta V$.
- La capacità totale del sistema sarà la somma delle 2 capacità:

$$C_{tot} = \frac{Q_{tot}}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V} = \frac{Q_1}{\Delta V} + \frac{Q_2}{\Delta V} = C_1 + C_2.$$

- In serie, ovvero collegati in sequenza da un filo:



Osserviamo che:

- Il potenziale V_3 è lo stesso nell'armatura destra del primo condensatore e sinistra del secondo, perché esse sono tra loro in equilibrio.
- $Q_{tot} = 0$: il primo condensatore contiene Q e il secondo $-Q$.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{C_{eq}} > \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_{eq}} > \frac{1}{C_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{eq} < C_1 \\ C_{eq} < C_2 \end{cases}$$

dove C_{eq} è detta "capacità **equivalente**": capacità che avrebbe un **unico** condensatore con ΔV_{tot} e Q , equivalente al sistema.

- La differenza di potenziale totale è:

$$\Delta V_{tot} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C_{eq}}.$$

Distinzione Per distinguere facilmente se due componenti elettrici (es: condensatori) sono collegati in serie o in parallelo, basta ricordare:

- Sono collegati in serie se attraversati da una **corrente** (3.1) di uguale intensità.
- Sono collegati in parallelo se risentono della stessa differenza di potenziale, o **tensione**.

In un circuito il **generatore** di forza elettromotrice è la componente che fornisce e mantiene una certa tensione elettrica. Essa è la "forza" (termine usato in modo improprio) che determina il movimento processionale degli elettroni

Rottura del condensatore Se in un condensatore il modulo del campo elettrico \vec{E} tra le due armature supera un certo valore, detto **rigidità dielettrica** E^* , allora nel condensatore si osserva una scintilla con conseguente rottura, ovvero la carica passa liberamente da un'armatura all'altra e non si accumula.

Dato che la differenza di potenziale ai capi di un condensatore è $\Delta V = Ed$, la condizione di scintilla è data da $\boxed{\Delta V^* = E^*d}$.

2.5.4 Energia in un condensatore

In un circuito il generatore produrrà cariche, le quali andranno a depositarsi sulle armature del condensatore: in un periodo di tempo dt avremo $+dq$ su un'armatura e $-dq$ sull'altra. Per questo motivo, come abbiamo visto, nel condensatore si va a formare un campo elettrico, quindi ogni quantità infinitesimale di carica dq compie un lavoro pari all'energia potenziale utilizzata per arrivare al condensatore:

$$dW = dU_E = dq\Delta V = dq\frac{q}{C},$$

dove q è la quantità di carica già presente nel condensatore.

Il lavoro totale svolto dalle cariche sarà:

$$W = \oint dW = \int_0^Q dq\frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \Delta U,$$

dove Q è la carica totale del condensatore carico.

Il modulo del lavoro è pari all'energia potenziale. In effetti, data l'equazione $Q = \Delta VC$, possiamo riscrivere quest'energia potenziale in 3 modi equivalenti:

$$U = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2.$$

Densità di energia

$$U = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 AdE^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 VE^2,$$

dove V è il volume contenuto tra le due armature del condensatore. In questo modo esprimiamo l'energia potenziale in termini del campo elettrico, per mostrare chiaramente che il campo porta con sé una certa energia.

Dato il volume V permeato da un campo elettrico uniforme, definiamo "densità di energia del campo elettrico" la grandezza:

$$u_E = \frac{U_E}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Possiamo interpretarla in 2 modi:

1. Energia immagazzinata nelle cariche
2. Energia immagazzinata nel campo elettrico

Momento di dipolo elettrico Dato un dipolo elettrico composto da due cariche q e $-q$ distanti d , il suo **momento** sarà:

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

dove \vec{d} è orientato dalla carica negativa a quella positiva.

Momento meccanico di un dipolo Come sappiamo dalla fisica 1, anche se la risultante delle forze su un corpo è nulla, ciò non implica che il corpo sia fermo: il corpo sarà fermo se sono nulle sia la risultante delle forze che la risultante dei **momenti delle forze**. Calcoliamo dunque il momento della forza (o **momento meccanico**) totale τ del dipolo: esso sarà dato dalla somma tra il momento meccanico della carica $-q$ e il momento meccanico della carica q :

$$|\vec{\tau}| = |\vec{\tau}^q + \vec{\tau}^{-q}| = F\frac{d}{2}\sin\theta + F\frac{d}{2}\sin\theta = Fd\sin\theta = Eqd\sin\theta = Ep\sin\theta,$$

quindi $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$. Se $\vec{\tau} \neq 0$, allora il dipolo sarà in rotazione.

Energia di un dipolo In un dipolo $dW = dU = \tau d\theta = pE \sin \theta d\theta$, quindi:

$$\Delta U = \int_{\theta_i}^{\theta_f} pE \sin \theta d\theta = pE \int_{\theta_i}^{\theta_f} \sin \theta d\theta = -pE(\cos \theta_f - \cos \theta_i) = U_f - U_i.$$

Dato che U è definita a meno di una costante arbitraria, possiamo scegliere $\theta_i = \frac{\pi}{2}$ in modo da avere $U_i = 0 \implies U = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.

2.5.5 Dielettrico posto tra le armature di un condensatore

Usiamo il termine "**dielettrico**" per riferirci a una sostanza isolante.

Dato un condensatore con una differenza di potenziale tra le lastre ΔV_0 , avremo un certo campo E_0 , una capacità C_0 e un'energia potenziale U_0 .

Se tra le due armature è presente invece un dielettrico, esso interferirà nel sistema. Detta $k > 1$ la sua **costante dielettrica** del dielettrico, variante in base al materiale, avremo:

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{k}, \quad E = \frac{E_0}{k}, \quad C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Qk}{\Delta V_0} = C_0 k, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C_0 k} = \frac{U_0}{k}.$$

Quindi $E < E_0$, $\Delta V < \Delta V_0$, $U < U_0$, $C > C_0$, ovvero il campo elettrico, la differenza di potenziale e l'energia potenziale diminuiscono con l'inserimento di un dielettrico, mentre la capacità elettrica aumenta.

Possiamo dimostrare che $E < E_0$, infatti per effetto del campo E_0 , all'interno del dielettrico si formeranno diversi dipoli (avviene sia per molecole polari che non), che dopo un certo tempo saranno orientati lungo la stessa direzione del campo.

Questo vuol dire che la loro distribuzione sarà tale da riuscire a generare un campo indotto \vec{E}_{ind} , di verso opposto a \vec{E}_0 .

Avremo che $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ind} = E_0 - E_{ind}$, quindi $E < E_0$.

Ma quanto è intenso il campo indotto? per rispondere, calcoliamo σ_{ind} , la densità di carica superficiale corrispondente. Abbiamo:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad E_{ind} = \frac{\sigma_{ind}}{\varepsilon_0} \implies E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{ind}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma_{ind}}{\varepsilon_0}$$

Ricordando che $E = \frac{\sigma}{k\varepsilon_0}$, possiamo moltiplicare tutto per ε_0 per ottenere:

$$\frac{\sigma}{k} = \sigma - \sigma_{ind} \implies \sigma_{ind} = \sigma \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sigma \frac{k-1}{k}$$

Dato che $k > 1$, allora $\frac{k-1}{k} < 1$, e quindi $\sigma_{ind} < \sigma$.

Se al posto di un dielettrico avessimo inserito un **conduttore** tra le due armature, avremmo avuto:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{ind} = 0 \implies \sigma_{ind} = \sigma \implies k = \infty.$$

Come detto precedentemente, se il campo \vec{E}_0 è **particolarmente intenso**, romperà il dielettrico e passerà comunque, come se il dielettrico non esistesse.

2.6 Introduzione alle equazioni di Maxwell

Ricordiamo due proprietà fondamentali del campo:

1. $\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$, teorema di Gauss.
2. $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, conservatività del campo elettrico.

Si tratta di proprietà **globali**, ovvero valide ovunque, non definite in un punto.

In alcuni casi fa però comodo avere informazioni specifiche su un punto, per cui ci chiediamo se esiste una versione **locale** di queste equazioni, e la risposta è positiva: si tratta delle due **equazioni di Maxwell** sul campo elettrico.

Operatore nabla Introduciamo l'operatore **nabla**:

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Ne faremo uso applicandolo a funzioni. Chiameremo "gradiente" della funzione f il vettore:

$$\vec{\nabla} f = \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Per il **teorema di Stokes**, dato un qualsiasi percorso γ da A a B sappiamo che:

$$\int_{\gamma} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A).$$

Si tratta della generalizzazione a più dimensioni del teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_A^B \frac{df}{dx} dx = f(B) - f(A).$$

2.6.1 Divergenza

Il prodotto scalare tra l'operatore nabla e il campo elettrico viene chiamato "**divergenza**" del campo:

$$\text{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

N.B: i versori \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} presenti nell'introduzione dell'operatore nabla sono diventati "1" in quanto è avvenuto un prodotto scalare: la divergenza è uno scalare e non un vettore.

Possiamo vedere la divergenza come **densità di flusso**, ovvero la quantità di flusso che entra in (o esce da) un volume infinitesimo, ovvero un punto.

In particolare, il flusso del campo \vec{E} attraverso un volume infinitesimo $dxdydz$ sarà:

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dxdydz.$$

integrando lungo un volume V si ottiene il flusso entrante nella (o uscente dalla) superficie S che racchiude V :

$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

Questo risultato prende il nome di "**teorema della divergenza**", o "teorema di Ostrogradskij": il flusso di un generico vettore \vec{E} attraverso una superficie S è pari all'integrale della divergenza di \vec{E} calcolato sul volume τ racchiuso da S .

Il teorema della divergenza ci permette di interpretare la divergenza in un punto P . Sappiamo che il flusso attraverso un volume V è:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV.$$

Se ci interessa il flusso attraverso un punto P (ovvero $V \rightarrow 0$), allora:

$$\Phi_P(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(P) \int_V dv = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(P)V \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(P) = \frac{\Phi(P)}{V}$$

A che serve la divergenza La divergenza comunica se in un dato punto è presente una carica, infatti:

- Se è presente una carica q , sarà presente un flusso

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \neq 0 \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{V} \Phi(E) \neq 0.$$
- Se non abbiamo cariche, allora $\Phi = 0 \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0.$

Tali eventuali cariche sono dette ”**sorgenti**” del campo elettrico. In particolare:

- Una divergenza positiva in un punto indica che da quel punto escono linee di campo.
- Una divergenza negativa in un punto indica che in quel punto entrano linee di campo.

Prima equazione di Maxwell Applichiamo il teorema della divergenza al teorema di Gauss. Detta ∂V la superficie del volume V :

$$\frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV.$$

Esprimendo $\frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ come $\int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$, si ottiene:

$$\int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \implies \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

conosciuta come ”prima equazione di **Maxwell**”. Essa mostra che laddove la divergenza è diversa da 0, la densità di carica sarà diversa da 0, a conferma del fatto che la carica è fonte del campo elettrico.

Come detto in precedenza, si tratta di una proprietà **locale**, dato che ρ o $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ possono variare punto per punto.

2.6.2 Rotore

Sappiamo che la circuitazione del campo elettrico è nulla:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Per esprimere questa proprietà in maniera locale, introduciamo il concetto di **rotore** del campo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \hat{i}(\partial_y E_z - \partial_z E_y) + \hat{j}(\partial_z E_x - \partial_x E_z) + \hat{k}(\partial_x E_y - \partial_y E_x).$$

Teorema del rotore Detto anche "teorema di Kelvin-Stokes", caso particolare del teorema di Stokes.

Data una superficie Σ di bordo γ :

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{\Sigma}$$

Significato del rotore Dato un punto $P \in \Sigma$ molto vicino al bordo γ , avremo:

$$\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \approx \vec{\nabla} \times \vec{E}(P) \int_{\Sigma} d\vec{\Sigma} = \vec{\nabla} \times \vec{E}(P) \cdot \vec{\Sigma} = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

per il teorema del rotore. Questo implica che:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \iff \vec{\nabla} \times \vec{E}(P) = 0$$

quindi il rotore calcolato in P misura il valore della circuitazione del campo \vec{E} lungo la curva γ che contiene P .

Dato che il campo elettrico è conservativo la circuitazione è nulla, e dunque il rotore del campo elettrico è nullo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Questo avviene sempre **purché** non sia presente un campo **magnetico** che varia nel tempo, come vedremo successivamente.

Divergenza in dielettrici Vediamo come varia la prima equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

quando siamo in presenza di dielettrici. Sappiamo che un campo elettrico \vec{E} induce dei dipoli in un dielettrico, che si dispongono in modo da avere una **densità di carica di polarizzazione** ρ_p .

Detto \vec{p} il momento di dipolo, introduciamo il vettore **densità di momento di dipolo** \vec{P} , detto anche "vettore di polarizzazione elettrica" o "vettore di intensità di polarizzazione": $d\vec{p} = \vec{P} dV$ (come dire $dq = \rho dV$ per la carica o $dm = \rho dV$ per la massa).

Si dimostra che la densità di carica di polarizzazione all'interno del dielettrico è $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$.

3 Elettrodinamica

3.1 Corrente elettrica

Supponiamo di avere un cilindro carico elettricamente in prossimità di un campo $\vec{E} \neq 0$.

Il campo eserciterà una forza sul cilindro, quindi che le cariche nel cilindro si muoveranno con velocità \vec{v} . Supponiamo per semplicità che si muovano solo le cariche positive, e che $\vec{v} \parallel d\vec{A}$, dove $d\vec{A}$ è il vettore perpendicolare all'area sezione A del cilindro.

Definiamo la corrente che attraversa il cilindro come:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

ovvero la quantità di carica che attraversa A in una quantità di tempo Δt .

La sua unità di misura è l'**Ampere**: $1A = \frac{1C}{1s}$.

Definiamo la corrente **istantanea** come:

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

La velocità media delle cariche sarà $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$, quella istantanea $\vec{v}_{ist} = \frac{d\vec{x}}{dt}$.

Una corrente I di intensità costante nel tempo e che fluisce sempre nella stessa direzione è detta ”**stazionaria**”, o ”corrente a regime stazionario”.

3.1.1 Modello di Drude

Il modello su cui ci baseremo nello studio dell'elettrodinamica è chiamato **modello di Drude**, ed è valido finché le temperature non sono troppo basse, come vedremo.

Un elettrone si muove in modo ”randomico”, ovvero cambia sempre **traiettoria** a causa delle varie forze che subisce e degli urti con altre particelle. La sua velocità in tanti istanti t_1, t_2, \dots, t_n sarà dunque probabilmente $\vec{v}(t_1) \neq \vec{v}(t_2) \neq \dots \neq \vec{v}(t_n)$, tuttavia si osserva che quando non è applicato un campo elettrico, questa velocità è **uniformemente distribuita**, ovvero $\vec{v}(t_1) + \dots + \vec{v}(t_n) = \vec{0}$, quindi in media l'elettrone rimane fermo e la carica non si sposta.

Velocità di deriva Applicando un campo \vec{E} , noteremo che il moto random dell'elettrone viene modificato, ed esso avrà infine una velocità media detta ”velocità di **deriva**” v_d , che è quella con cui si muovono le cariche nella formula $I = \frac{dQ}{dt}$. Andiamo a calcolarla.

Consideriamo un cilindro di lunghezza $l = v_d \Delta t$ con $\vec{v}_d \parallel d\vec{l}$, carica $q = -e$, sezione A e densità n misurata in:

$$\frac{\text{numero di elettroni liberi}}{\text{volume}}.$$

Avremo:

$$\Delta Q = qnAl = qnAv_d \Delta t \implies \frac{\Delta Q}{\Delta t} = I = qnv_d A.$$

L'accelerazione (dovuta al campo elettrico applicato) di una carica q tra due urti è:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m} = \frac{q\vec{E}}{m_e},$$

dove m_e è la massa dell'elettrone. Questa accelerazione è costante, dato che \vec{E} è costante \implies abbiamo un moto uniformemente accelerato; inoltre ogni elettrone avrà una velocità:

$$\vec{v}_i(t) = \vec{v}_{0,i} + \vec{a}t = \vec{v}_{0,i} + \frac{q\vec{E}}{m_e}t,$$

dove $\vec{v}_{0,i}$ è la velocità randomica dopo l'urto, ovvero quella uniformemente distribuita:

$$\sum_{i=1}^N \vec{v}_{0,i} = 0.$$

Sommando le velocità degli N elettroni di conduzione si ottiene:

$$\sum_{i=1}^N \vec{v}_i(t) = \sum_{i=1}^N \vec{v}_{0,i} + \sum_{i=1}^N \frac{q\vec{E}}{m_e}t. \quad (3.1)$$

La velocità media \vec{v}_d si ottiene dividendo la somma 3.1 per il numero di elettroni, ovvero N :

$$\vec{v}_d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_{0,i} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{q\vec{E}}{m_e}t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{q\vec{E}}{m_e}t.$$

Chiamiamo $\tau = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N t$ **tempo libero medio**, ovvero il tempo **medio** tra due urti consecutivi.

La velocità media sarà dunque:

$$\boxed{\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m_e}\tau}$$

Densità di corrente Unendo le due formule:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnAv_d; \quad \vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m_e}\tau,$$

otteniamo:

$$I = qnA \frac{qE}{m_e} \tau.$$

Introducendo la **densità di corrente** $\vec{J} = \frac{I}{A} \hat{l}$, ricaviamo:

$$\vec{J} = \frac{q\vec{E}}{m_e} \tau q n = \frac{q^2 \vec{E} \tau n}{m_e}.$$

3.2 Legge di Ohm

Chiamando $\sigma = \frac{J}{E} = \frac{q^2 \tau n}{m_e}$ **conducibilità elettrica**, otteniamo la formulazione **microscopia** della legge di Ohm: $\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$.

Essa mostra che il campo elettrico è direttamente proporzionale alla densità di corrente \vec{J} . La legge di Ohm è meglio nota quando scritta in altri termini, ma per farlo dobbiamo introdurre il concetto di **resistenza**.

Resistenza Supponiamo di avere un conduttore di lunghezza l attraversato da un campo elettrico uniforme \vec{E} . La differenza di potenziale sarà $\Delta V = El$ perché il campo è omogeneo, quindi $E = \frac{\Delta V}{l}$.

Per la legge di Ohm: $\sigma E = \sigma \frac{\Delta V}{l} = J = \frac{I}{A} \implies \Delta V = I \left(\frac{1}{\sigma} \frac{l}{A} \right)$.

Chiamiamo $\rho = \frac{1}{\sigma}$ **resistività** e $R = \rho \frac{l}{A}$ **resistenza**.

Notiamo che così facendo, la legge di Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ si può scrivere in modo equivalente (formulazione **macroscopica**): $\boxed{\Delta V = RI}$.

Da questa si può ricavare facilmente la resistenza $R = \frac{\Delta V}{I}$, misurata in

Ohm: $1\Omega = \frac{1V}{1A}$.

La resistività aumenta all'aumentare della temperatura, infatti nel modello di Drude abbiamo:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e}{q^2 \tau n}$$

All'aumentare della temperatura, tra tutte le variabili abbiamo solo una diminuzione di τ (tempo tra un urto e un altro), con conseguente aumento di ρ .

Resistori Nei circuiti elettrici gli oggetti che introducono una resistenza sono chiamati **resistori**, ma sono spesso detti impropriamente "resistenze" per metonimia.

3.2.1 Effetto Joule

Ogni volta che una corrente stazionaria incontra un resistore avvengono degli urti anelastici a livello atomico tra gli elettroni liberi della corrente e i reticoli cristallini della resistenza.

Di conseguenza si osserva un trasferimento di energia verso tali reticoli. Poiché il fenomeno è stazionario, tale energia non può trasformarsi né in energia cinetica, né potenziale, e dunque si trasforma in energia termica: si riscontra un aumento di temperatura nel resistore, che dissiperà dunque una potenza pari a:

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}Q\Delta V = \Delta V \frac{dQ}{dt} = \boxed{\Delta V I = RI^2 = P}$$

Circuito aperto Un circuito si dice **aperto** se la sua resistenza elettrica tende all'infinito, pertanto è attraversato da una corrente nulla indipendentemente dalla tensione applicata ai suoi terminali.

Forza elettromotrice Abbiamo già accennato ai generatori di forza elettromotrice in un circuito, e parleremo più approfonditamente della forza elettromotrice nella sezione dell'induzione elettromagnetica.

Si definisce "forza elettromotrice (f.e.m.)" di un generatore la quantità:

$$\varepsilon = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

In un circuito aperto, la f.e.m. coincide con la differenza di potenziale ΔV misurata ai poli del generatore, mentre in un circuito chiuso ΔV risulta sempre leggermente inferiore alla forza elettromotrice, per effetto della resistenza interna R_i del generatore stesso:

$$\Delta V = \varepsilon - R_i.$$

Fortunatamente in questo corso avremo sempre a che fare con generatori **ideali**, ovvero con resistenza interna nulla.

Corrente non perpendicolare a una superficie Nell'introdurre la [Velocità di deriva](#) e concetti associati, avevamo usato le formule:

$$I = qnv_d A = \frac{\Delta Q}{\Delta t}; \quad \Delta Q = qnV = qn(Av_d \Delta t); \quad J = \frac{I}{A} = qnv_d.$$

Consideriamo ora una superficie A e un versore \hat{n} perpendicolare a essa. Se delle cariche passano attraverso dA con una velocità \vec{v}_d non parallela a \hat{n} , allora il calcolo della corrente è leggermente diverso. Avremo:

$$\vec{v}_d \cdot \hat{n} = v_d \cos \theta \implies \Delta Q = qn (dA v_d \cos \theta \Delta t).$$

dove ΔQ è la carica che passa attraverso dA nel tempo Δt . Segue che:

$$I = qnv_d dA \cos \theta \implies \vec{J} = qn\vec{v}_d \implies I = \vec{J} \cdot d\vec{A},$$

dove $d\vec{A} = dA\hat{n}$. Dunque la corrente che attraversa la superficie A sarà:

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}.$$

Equazione di continuità Si consideri un corpo di volume V avente una carica Q_V . Se chiamiamo Q_{ext} la carica esterna al corpo, avremo che la carica totale del sistema "corpo + ambiente esterno" è $Q = Q_V + Q_{ext}$.

Se deriviamo ambo i membri otteniamo:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}Q_V + \frac{d}{dt}Q_{ext} \implies \frac{dQ_V}{dt} = -\frac{dQ_{ext}}{dt},$$

quindi a ogni variazione di carica nel corpo corrisponderà una variazione uguale ma opposta della carica esterna, il che è un risultato atteso. Ricordiamo che la derivata della carica rispetto al tempo è una corrente, quindi possiamo scrivere

$$\frac{dQ_V}{dt} = -I_{\partial V},$$

dove $I_{\partial V}$ è la corrente che attraversa la superficie del volume V dall'interno verso l'esterno. Si tratta di un'equazione globale, dato che interessa l'intera superficie del corpo. Ci poniamo ora l'obiettivo di esprimerla in modo **locale**.

$$I_{\partial V} = \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{A} \implies \frac{dQ_V}{dt} = - \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{A} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d^3x,$$

per il teorema di divergenza, dove $d^3x = dV$. Sappiamo inoltre che per definizione di densità di carica, possiamo esprimere Q_V come $\int_V \rho d^3x$, per cui abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3x = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d^3x.$$

Siamo autorizzati, come quasi sempre accade in fisica, ad affermare che in questo caso la derivata dell'integrale è pari all'integrale della derivata, quindi:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d^3x \implies \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}}.$$

Questo risultato è chiamato **equazione della continuità** della carica, e mostra che la variazione di densità di carica in un punto è opposta alla divergenza della densità di corrente, quindi ogni volta che la densità di carica in un punto aumenta, significa che c'è stato un afflusso di corrente elettrica verso tale punto.

L'equazione della continuità esprime localmente la conservazione della carica. Per capire la sua importanza: l'affermazione "in un sistema isolato la carica si conserva **localmente**" è ancora più forte di dire "in un sistema isolato la carica si conserva".

Dopo queste recenti considerazioni possiamo riscrivere la condizione di **stazionarietà** per una corrente ($I = \text{const}$) come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ o } \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0.$$

In tal caso la divergenza di \vec{J} sarà nulla, quindi non ci saranno punti dove nascono delle immaginarie "linee di corrente", o punti in cui esse convergono, per cui deduciamo che le correnti stazionarie sono **curve chiuse**.

Noteremo una dinamica di questo tipo anche nel campo magnetico, che ha solo linee di campo chiuse: $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$.

Resistenze connesse in serie e in parallelo Immaginiamo un circuito con tensione ε e due resistenze R_1 e R_2 collegate in serie. Per la legge di Ohm abbiamo che $\Delta V = RI$, quindi nel nostro caso:

$$\varepsilon = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \implies \frac{\varepsilon}{I} = R_1 + R_2 = R_{eq},$$

dove R_{eq} è la **resistenza equivalente**: la singola resistenza che avrebbe un circuito per essere equivalente a quello che stiamo considerando.
 Connettendo resistenze in serie, la resistenza equivalente è la somma di tutte le resistenze.

Se invece colleghiamo tali resistenze **in parallelo**, a un certo punto I si sdoppia in due correnti I_1 e I_2 , e per la conservazione di carica sappiamo che:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} = \varepsilon \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\varepsilon}{R_{eq}},$$

quindi connettendo resistenze in parallelo:

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} .}$$

Calcolare le correnti Quando abbiamo resistenze connesse in parallelo, in generale la corrente non si divide in modo equo nei vari tratti del circuito, infatti sappiamo che:

$$\varepsilon = R_1 I_1 = R_2 I_2 \implies \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} .$$

Unendo le due equazioni:

$$\begin{cases} R_1 I_1 = R_2 I_2 \\ I = I_1 + I_2 \end{cases} \quad \text{otteniamo:}$$

$$\begin{aligned} I_2 = I - I_1 &\implies R_1 I_1 = R_2 (I - I_1) \implies R_1 I_1 = R_2 I - R_2 I_1 \implies \\ \implies I_1 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} I . \end{aligned}$$

Ripetendo passaggi identici ma rispetto all'altra corrente:

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I .$$

3.3 Leggi di Kirchhoff

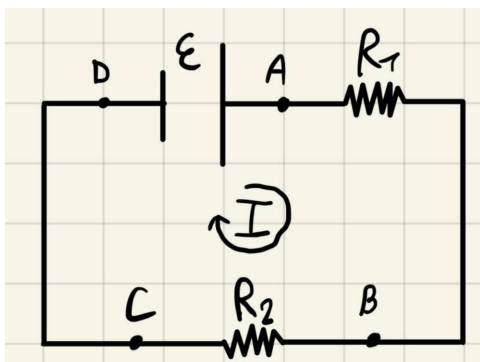
Possiamo definire le seguenti parti per un circuito elettrico:

- Ramo: segmento di circuito (con eventuale resistenza inclusa).
- Nodo: punto dove confluiscono almeno 3 rami.
- Maglia: un qualsiasi percorso **chiuso** nel circuito.

Grazie a queste classificazioni possiamo fare importanti considerazioni come le due leggi di **Kirchoff**, che permettono di calcolare correnti e tensioni in ogni punto del circuito:

1. Legge dei nodi: per ogni nodo $I_{entr} = I_{usc}$.
2. Legge delle maglie: in ogni maglia la somma di tutte le tensioni è 0.

Dimostrazione legge delle maglie. Consideriamo un circuito come in figura:



Dove ε è la f.e.m. generata da un generatore ideale. Sappiamo che:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

ma tale integrale è nullo lungo un percorso chiuso (e una maglia risulta esserlo) per la conservatività del campo elettrico. Possiamo dunque scrivere:

$$0 = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.2)$$

Ogni integrale è il contributo del corrispettivo ramo alla differenza di potenziale, ovvero rispettivamente:

$$(V_B - V_A) + (V_C - V_B) + (V_D - V_C) + (V_A - V_D).$$

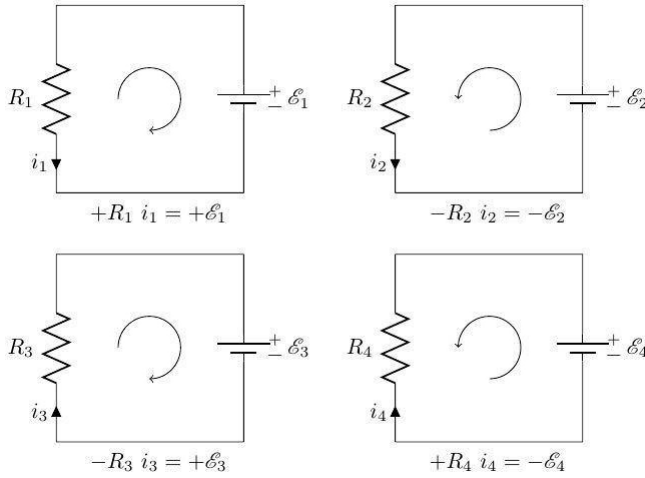
Chiamiamo ΔV_1 e ΔV_2 le differenze di potenziale ai capi delle resistenze R_1 e $R_2 \implies V_1 = R_1 I = V_A - V_B$, $V_2 = R_2 I = V_B - V_C$.

Otteniamo che l'equazione 3.2 diventa:

$$0 = -V_1 - V_2 + 0 + \varepsilon,$$

che è verificata per definizione di f.e.m. □

Convenzione sui segni In una generica maglia, negli esercizi, possiamo scegliere arbitrariamente il verso della corrente elettrica, tenendo conto che se la corrente fluisce dal terminale negativo a quello positivo del circuito, allora la f.e.m. ε è negativa; se la corrente fluisce dal terminale positivo a quello negativo, allora la f.e.m. ε è positiva. Per capire meglio:



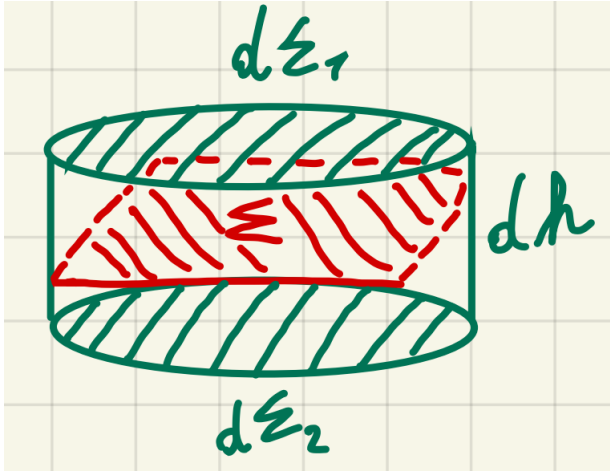
3.4 Spostamento elettrico

Dato un materiale immerso in un campo \vec{E} , introduciamo il vettore di **spostamento elettrico** $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, dove \vec{P} è il vettore di polarizzazione elettrica che si genera nel materiale, e la D sta per **displacement** (spostamento).

Condizioni al contorno del campo elettrico Possiamo dimostrare che la componente normale del vettore \vec{D} è discontinua ogni volta che il nostro materiale attraversa una densità di carica σ , mentre la componente tangente è costante.

In altre parole, quando un campo elettrico attraversa due mezzi diversi la sua componente normale varia, mentre quella tangente rimane costante.

Dimostrazione componente normale. Consideriamo un corpo con densità di carica superficiale σ e prendiamo una sua porzione di superficie Σ talmente piccola da considerarla piana. Costruiamo attorno ad essa un cilindro:



Dalla prima legge di Maxwell, sfruttando il teorema della divergenza, si ricava:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \implies \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0},$$

quindi per lo spostamento elettrico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \implies \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = q_{int}.$$

Nel nostro caso:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{d\Sigma_1} \vec{D} \cdot d\vec{\Sigma}_1 + \int_{d\Sigma_2} \vec{D} \cdot d\vec{\Sigma}_2 + \Phi_{LAT}(D) = q_{int}.$$

Scriviamo:

$$\vec{D} \cdot \vec{\Sigma}_1 = D_{n_1} d\Sigma_1; \quad \vec{D} \cdot \vec{\Sigma}_2 = -D_{n_2} d\Sigma_2,$$

per cui si ha:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = \int_{d\Sigma_1} D_{n_1} d\Sigma_1 - \int_{d\Sigma_2} D_{n_2} d\Sigma_2 + \Phi_{LAT}(D).$$

Dato che per ipotesi le superfici sono molto piccole, assumiamo il campo elettrico costante, per cui possiamo portare \vec{D} fuori dall'integrale:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = D_{n_1} \int_{d\Sigma_1} d\Sigma_1 - D_{n_2} \int_{d\Sigma_2} d\Sigma_2 + \Phi_{LAT}(D) =$$

$$= D_{n_1}\Sigma_1 - D_{n_2}d\Sigma_2 + \Phi_{LAT}(D) = (D_{n_1} - D_{n_2})d\Sigma + \Phi_{LAT}(D)$$

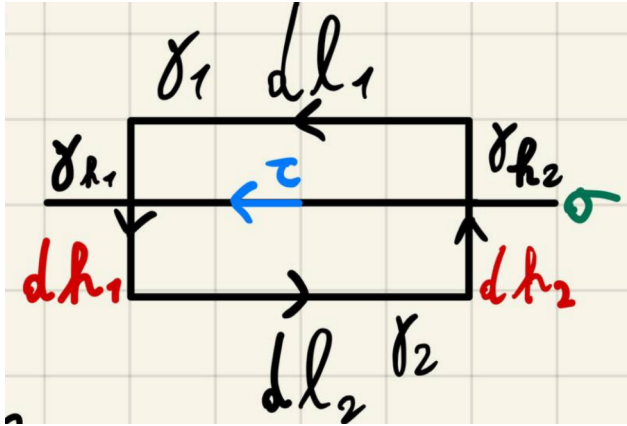
Dato che $dh \ll R$, il raggio della circonferenza alla base del cilindro, possiamo trascurare il flusso laterale, ottenendo:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = (D_{n_1} - D_{n_2})d\Sigma = q_{int} = \sigma d\Sigma \implies \boxed{(D_{n_1} - D_{n_2}) = \sigma.}$$

□

In generale, in elettromagnetismo, una componente discontinua si verifica quando una o più delle proprietà del campo (densità di carica, corrente, ecc.) cambiano bruscamente in un punto specifico, in modo non continuo.

Dimostrazione componente tangente. Consideriamo il percorso infinitesimo:



dove la linea nera al centro è un piano con densità di carica superficiale σ . Ricordiamo che, per la conservazione della carica elettrica:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \implies \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = \int_{\gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 + \int_{\gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}_2 + \int_{\gamma_{h_1}} \vec{E} \cdot d\vec{h}_1 + \int_{\gamma_{h_2}} \vec{E} \cdot d\vec{h}_2.$$

Scriviamo:

$$\vec{E} \cdot d\vec{l}_1 = E_{t_1} dl_1; \quad \vec{E} \cdot d\vec{l}_2 = -E_{t_2} dl_2,$$

per cui si ha:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\gamma_1} E_{t_1} dl_1 - \int_{\gamma_2} E_{t_2} dl_2 + \int_{\gamma_{h_1} + \gamma_{h_2}} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Considerando che per ipotesi le lunghezze sono piccole, approssimiamo \vec{E} come costante, quindi:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{t_1} \int_{\gamma_1} dl_1 - E_{t_2} \int_{\gamma_2} dl_2 + \int_{\gamma_{h_1} + \gamma_{h_2}} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Trascuriamo il contributo del terzo addendo in quanto $h \ll dl$, e otteniamo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{t_1} l_1 - E_{t_2} l_2 = 0 \implies (E_{t_1} - E_{t_2})l = 0 \implies \boxed{E_{t_1} = E_{t_2}}$$

Quindi la componente tangente di \vec{E} è continua. □

La rifrazione della luce avviene secondo questa legge, che prende infatti il nome di **legge di rifrazione**. Da essa si ricava la **legge di Snell**, che descrive la relazione tra gli angoli di incisione e di rifrazione quando la luce attraversa una sostanza.

4 Magnetismo

4.1 Introduzione

Un magnete è un corpo che genera un **campo magnetico**, ovvero un vettore che descrive la distribuzione di forze magnetiche nello spazio.

Per ogni magnete possiamo considerare un **polo nord** e un **polo sud**.

Se avviciniamo il polo nord di un magnete al polo sud di un altro, ci sarà una forza attrattiva tra essi; se avviciniamo tra loro due poli uguali, se ne avrà una repulsiva.

Questo è uno dei tanti comportamenti dei magneti che ricordano molto ciò che avviene con le cariche.

È da notare tuttavia una differenza fondamentale tra carica e magnetismo: supponendo di avere un dipolo elettrico, è possibile "romperlo" separando le due cariche, ovvero ponendole a una distanza molto grande.

Nel caso di un magnete, invece, non possiamo fare la stessa cosa: se spezzassimo un magnete in due pezzi, ognuno di questi pezzi avrebbe un suo polo nord e un polo sud.

Campo magnetico Un circuito elettrico percorso da una corrente I genera un campo di forze detto **campo magnetico**.

Sappiamo che questo campo ha effetti magnetici perché se avviciniamo un ago metallico, esso risentirà di interazioni simili a quelle che avrebbe con un magnete.

La formulazione empirica della **forza magnetica** è:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (4.1)$$

con \vec{B} campo magnetico e $d\vec{F} \perp d\vec{l}$ e \vec{B} , trattandosi di prodotto vettoriale.

Se invece la corrente I scorre attraverso un cilindretto di lunghezza l e base dS , anziché lungo un filo, abbiamo:

$$I = \int_{dS} \vec{J} \cdot d\vec{s} = J ds,$$

supponendo che I scorra perpendicolare all'area dS e quindi parallela a $d\vec{s}$. Segue che:

$$I d\vec{l} = J ds dl \hat{l} = J d\tau \hat{l} = \vec{J} d\tau \implies d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} d\tau,$$

che è un modo diverso di esprimere la stessa formula, che a volte torna utile.

Forza di Lorentz Dato che sappiamo che $\vec{J} = qn\vec{v}$, sostituendo nella formula precedente abbiamo:

$$d\vec{F} = qn\vec{v} \times \vec{B} d\tau = q\vec{v} \times \vec{B} nd\tau,$$

ma dato che $n = \frac{dn}{d\tau} \implies dn = nd\tau$ (dove dn è il numero di cariche puntiformi q a velocità \vec{v}), otteniamo $d\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} dn$.

Se vogliamo sapere la forza che agisce su una carica, dividiamo per il numero di cariche e otteniamo:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.} \quad (4.2)$$

Tale forza è detta **di Lorentz**, e ogni carica q che si muove con velocità \vec{v} in un campo magnetico \vec{B} ne risente.

Se oltre al campo magnetico è presente anche un campo elettrico, si misura empiricamente che la forza che subisce ogni carica q è:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Il lavoro magnetico sulle cariche è nullo Se la forza di Lorentz sposta una carica q di un tratto $d\vec{x}$, il lavoro compiuto sarà:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = q\vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{x} = q\vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{v} dt, \text{ ma } \vec{v} \times \vec{B} \perp \vec{v} \implies dW = 0.$$

Tesla Dalla forza di Lorentz ricaviamo l'unità di misura del campo magnetico:

$$[F] = [q \cdot v \cdot B] \implies N = C \cdot \frac{m}{s} \cdot T \implies T = \frac{N \cdot s}{C \cdot m} \text{ è detta } \mathbf{Tesla}.$$

Moto di una carica puntiforme in un campo magnetico Iniziamo studiando il caso più semplice, ovvero quando \vec{v} e \vec{B} sono perpendicolari.

Il modulo della forza di Lorentz diventa $F = qvB$ ed è costante.

Abbiamo che $a = \frac{F}{m} = \frac{qvB}{m}$. Dato che l'accelerazione è costante abbiamo un moto circolare uniforme (si vede graficamente). Tale accelerazione corrisponde all'accelerazione centripeta, per la sua direzione. Conoscendo ciò,

tramite la formula dell'accelerazione centripeta, possiamo ricavare il raggio R dell'orbita circolare:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{qvB}{m} \implies R = \frac{mv}{qB} \implies v = \frac{qBR}{m}$$

Altre formule:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Nel caso invece in cui \vec{B} e \vec{v} non siano perpendicolari, ma con un angolo θ tra loro, abbiamo:

$$\begin{cases} v_{\parallel} = \vec{v} \cdot \hat{B} = v \cos \theta. \\ v_{\perp} = \vec{v} \times \hat{B} = v \sin \theta. \end{cases}$$

In ogni caso, $\vec{F} \perp \vec{B} \implies \vec{a} \perp \vec{B} \implies v_{\parallel} = \text{const}$, quindi il moto complessivo è:

$$\begin{cases} \text{Moto rettilineo uniforme} & \parallel \text{ a } \vec{B} \\ \text{Moto circolare uniforme} & \perp \text{ a } \vec{B} \end{cases}$$

E la traiettoria descritta sarà dunque un'**elica cilindrica**. Si dice che la carica è **catturata** dal campo magnetico, in quanto gli gira intorno.

Le altre formule saranno: $a_{\perp} = \frac{F}{m} = \frac{qv \sin \theta B}{m} = \frac{qv_{\perp} B}{m}$, e:

$$a = \frac{v_{\perp}^2}{R} \implies R = \frac{mv_{\perp}}{qB}, \quad T = \frac{2\pi m}{qB}$$

La forza magnetica è nulla in un campo uniforme Considerando:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \implies \vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B}.$$

Se \vec{B} è uniforme, possiamo riscriverla come:

$$\vec{F} = I \left(\oint d\vec{l} \right) \times \vec{B},$$

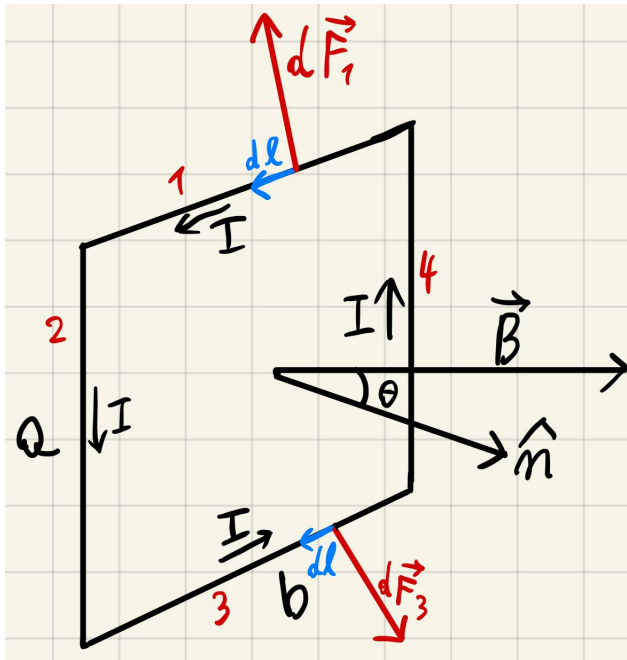
e l'integrale fa 0 poiché somma vettoriale di pezzettini $d\vec{l}$ in un percorso chiuso (mentre se fosse stato $\oint dl = L$, sarebbe stato somma algebrica di lunghezze positive, per cui $L > 0$).

Momento meccanico

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F} \implies \vec{M} = \oint \vec{r} \times d\vec{F} = I \oint \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}).$$

In generale, il momento può essere diverso da 0 anche se la forza totale è nulla.

Spira rettangolare Consideriamo una **spira** rettangolare, ovvero un circuito, di area A .



Avremo che $dF_1 = dF_3 \implies F_1 = F_3$, in particolare $\vec{F}_1 = -\vec{F}_3$.

Il momento delle forze sarà $M = DF_1 = DF_3$, dove D è il **braccio**, ovvero la distanza tra le rette direzioni delle forze.

Dato che F_1 e F_3 hanno la stessa retta direzione (perché differiscono solo in verso), il braccio D è nullo, quindi il loro momento risultante è 0.

Nel caso di F_2 e F_4 abbiamo ancora una coppia, ma con braccio diverso da 0 e pari a $b \sin \theta$, quindi:

$$M = b \sin \theta F_2 = b \sin \theta \left| \int_2 I d\vec{l} \times \vec{B} \right| =$$

$$= b \sin \theta IB \int_2 dl = ab \sin \theta IB = AIB \sin \theta.$$

Il **momento magnetico** della spira sarà $\vec{m} = IA\hat{n} \implies \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$, sarà il momento meccanico. Una formula simile sussisteva per il momento risultante di un dipolo elettrico: $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$.

Notiamo che $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \implies U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$, così come $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \implies U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$, ovvero l'equilibrio (configurazione di minima energia) si ha quando sono paralleli \vec{m} e \vec{B} .

Quando il circuito è sufficientemente piccolo, oppure se \vec{B} non è uniforme, vale $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$.

4.2 Legge di Biot-Savart

Chiamata anche **prima legge (elementare) di Laplace**.

Dagli esperimenti emerge che:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{\Delta r^3} \implies \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{\Delta r^3}$$

$$\text{N.B. in alcuni libri viene scritto: } d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \Delta\hat{r}}{\Delta r^2}.$$

Dove $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ è una costante dal valore esatto, detta **permeabilità magnetica del vuoto**.

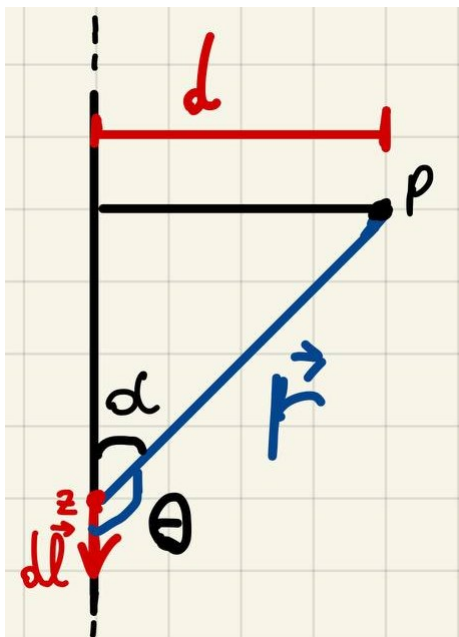
Possiamo anche esprimere questa formula attraverso la densità di corrente, infatti $I d\vec{l} = \vec{J} d\tau$, quindi:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau \frac{\vec{J} \times \Delta\vec{r}}{\Delta r^3}.$$

Effetto Hall L'effetto Hall è un fenomeno fisico per il quale si osserva una differenza di potenziale in senso trasversale in un conduttore attraversato da corrente elettrica in verso longitudinale quando questo è sottoposto ad un campo magnetico perpendicolare.

Sfruttare l'effetto Hall è il metodo più utilizzato nel mondo dell'industria per misurare il campo magnetico.

Campo magnetico prodotto da un filo infinito Un filo infinito percorso da corrente produrrà un campo magnetico **circonferenziale**, cioè orientato lungo una circonferenza attorno al filo; calcoliamolo su un punto P distante d dal filo infinito:



Per la legge di Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \implies |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl \sin \theta}{r^2}. \quad (4.3)$$

Abbiamo che:

$$r^2 = z^2 + d^2; \quad \theta = \pi - \alpha; \quad \sin \alpha = \frac{d}{r} = \frac{d}{\sqrt{z^2 + d^2}}; \quad \sin \theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha,$$

quindi l'espressione 4.3 diventa:

$$B = \frac{\mu_0 I d}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}.$$

Per capire il verso delle linee di \vec{B} , si mette il pollice sulla corrente e le altre dita si avviteranno naturalmente nel verso del campo.

A grandi distanze il campo prodotto da un dipolo elettrico è uguale al campo magnetico prodotto da una spira circolare, mentre a **piccole distanze**, questi campi sono molto diversi: il campo magnetico ha sempre linee chiuse, mentre le linee di dipolo elettrico sono aperte (vanno dalla carica positiva a quella negativa).

Forza magnetica tra due fili Consideriamo due fili infiniti percorsi rispettivamente dalle correnti I_1 e I_2 .

Come sappiamo, il campo magnetico prodotto dal primo filo e misurato su un punto distanza r da esso sarà:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}.$$

La forza magnetica tra i due fili sarà:

$$|\vec{F}_{12}| = \left| \oint I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 \right| = I_2 \oint dl_2 B_1 = I_2 B_1 \oint dl_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} l_2.$$

Dato che $l_2 \rightarrow \infty$, ha più senso considerare la **forza per unità di lunghezza**:

$$\frac{F}{\Delta L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}. \quad (4.4)$$

Se le due correnti scorrono nello stesso verso tale forza sarà attrattiva, mentre se scorrono in verso opposto sarà repulsiva.

Otteniamo direzione e verso con la regola della mano destra

Definizione rigorosa di Ampere In due fili posti a distanza di $1m$ scorre una corrente di $I_1 = I_2 = 1A$ se:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{N}{m} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}.$$

Conservatività del campo magnetico Consideriamo \vec{E} e \vec{B} stazionari, ovvero non varianti nel tempo. In tali condizioni avevamo dimostrato che $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, ovvero che il campo elettrico è conservativo.

Il rotore del campo magnetico sarà invece:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau \frac{\vec{J} \times \Delta \vec{r}}{\Delta r^3} = \mu_0 \vec{J},$$

si può dimostrare ma non lo facciamo. In generale esso è diverso da 0.

La formula $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ prende il nome di ”**quarta** equazione di Maxwell” in caso stazionario.

Ma quand’è che \vec{B} è conservativo? Per il teorema del rotore:

$$\int_A \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I,$$

quindi:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (4.5)$$

Questa quantità, ovvero la circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa γ , fa 0 se e solo se $I = 0$, quindi in condizioni stazionarie \vec{B} è conservativo se e solo se non ci sono correnti.

Una corrente I che intercetta una superficie delimitata da una curva chiusa è detta **corrente concatenata**, e la indichiamo con I_{conc} .

Con quest’informazione, possiamo riscrivere in modo più preciso la formula 4.5:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{conc}.$$

Tale risultato prende il nome di **legge di Ampere**, o **teorema di Ampere**.

Possiamo verificare la validità di questo teorema con un filo infinito e una circonferenza γ di raggio R che circonda il filo:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_\gamma B dl = B \oint_\gamma dl = B \oint_\gamma dl = B 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I_{conc}.$$

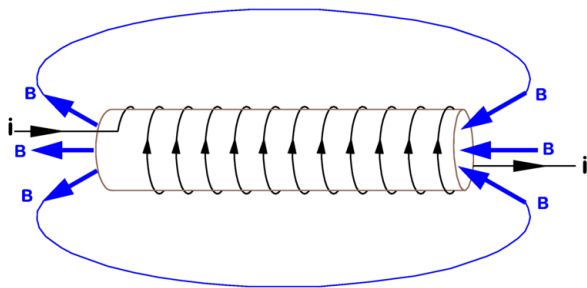
Talvolta il teorema di Ampere è un utile punto di partenza per calcolare il campo magnetico in alcuni esercizi.

4.3 Solenoide

Un solenoide è un filo disposto a forma **elicoidale** percorso da corrente.

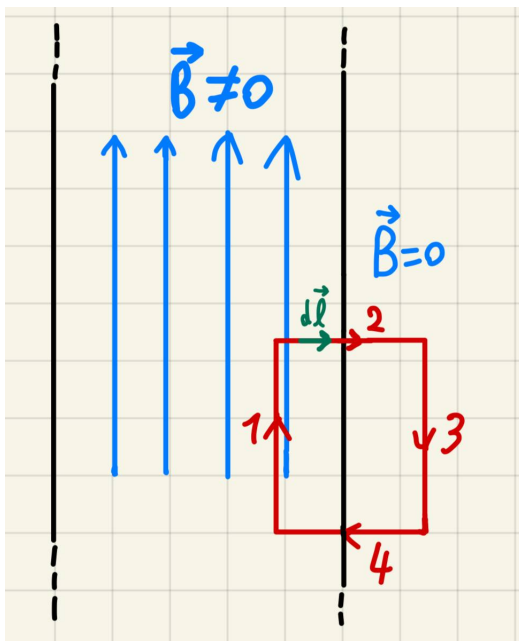


Campo magnetico in un solenoide Consideriamo un solenoide **ideale**, ovvero di lunghezza infinita e con una corrente I distribuita uniformemente (la distanza tra due spire consecutive tende a 0). Questo implicherà che il campo magnetico sulle spire sia nullo, mentre il campo magnetico \vec{B} interno al solenoide sarà la somma di tutti i campi prodotti dalle spire, e sarà rivolto come in figura, secondo la regola della mano destra:



Si può dimostrare che il campo magnetico **esterno** a un solenoide infinito è nullo, in quanto sono trascurabili gli effetti di bordo.

Consideriamo un percorso chiuso (**linea di Ampere**, così come in elettrostatica avevamo le **superfici di Gauss**) che interseca un solenoide ideale, come in figura:



Avremo:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

Il contributo 3 è nullo perché \vec{B} all'esterno del solenoide è nullo; i contributi 2 e 4 sono nulli perché si ha $d\vec{l} \perp \vec{B}$; ciò che rimane è il contributo 1:

$$\int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1 B dl = B \int_1 dl = Bl_1 = \mu_0 I_{conc} = \mu_0 NI,$$

dove N è il numero di spire concatenate e I la corrente di ogni spira.

Se chiamiamo l la lunghezza del solenoide, avremo dunque:

$$Bl = \mu_0 NI \implies B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I,$$

dove $n = \frac{N}{l}$ è il numero di spire per unità di lunghezza.

4.4 Seconda equazione di Maxwell

Per il campo elettrico avevamo visto che $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, quindi un campo elettrico prevedeva l'esistenza di **pozzi** (punti nei quali entrano linee di campo) o **sorgenti** (punti dai quali escono linee di campo).

Per il magnetismo, invece, $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$ (non lo dimostriamo), e vale anche quando \vec{B} dipende dal tempo, ovvero in casi non stazionari. Questa è la **seconda** equazione di Maxwell.

Essa implica che non può esistere un punto sorgente o pozzo per $\vec{B} \implies$ tutte le linee del campo magnetico sono chiuse. Questo dimostra la non-esistenza di **monopoli magnetici**, ovvero magneti con un solo polo.

Flusso del campo magnetico Applicando il teorema della divergenza, il flusso di \vec{B} lungo una superficie ∂V è:

$$\Phi_B(\partial V) = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0.$$

In altre parole, il numero di linee entranti nella superficie sarà uguale al numero di linee uscenti.

Il flusso del campo magnetico nel SI è misurato in **Weber**: $Wb = T \cdot m^2$.

Momento magnetico orbitale Abbiamo già detto che $\vec{m} = IA\hat{n}$, proviamo ora a calcolarlo.

Avendo $I = \frac{q_e}{T} = \frac{q_e v}{2\pi R}$, con $T = \frac{2\pi R}{v}$, il momento magnetico orbitale sarà:

$$|\vec{m}_{orb}| = I \cdot A = \frac{q_e v}{2\pi R} \pi R^2 = \frac{q_e v R}{2}.$$

Considerando che il momento angolare è $L = m_e v R \implies m_{orb} = \frac{q_e}{2m_e} L$. L'elettrone, anche quando è "fermo", ha sempre un momento angolare intrinseco, detto **spin**, che si calcola con $\vec{m}_{spin} = \frac{q_e}{2m_e} \hbar \hat{n}$, dove $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ è la **costante di Planck ridotta** (o **costante di Dirac**), mentre $h = 6.62607015 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ è la costante di Planck.

Il momento magnetico si può usare per ricavare una formulazione per l'energia potenziale della spira: $\boxed{U = -\vec{m} \cdot \vec{B}}$.

Questa formula è molto simile a quella per il dipolo elettrico, ovvero $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.

Anche i protoni hanno momento di spin, ma dato che la massa del protone è circa mille volte inferiore a quella dell'elettrone, lo spin del protone risulta

circa 1000 volte più piccolo di quello dell'elettrone, per cui è generalmente trascurato.

Precessione di Larmor Sappiamo che $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0 = \frac{d\vec{L}}{dt}$, quindi il momento angolare \vec{L} varia nel tempo se $\vec{m} \times \vec{B}_0 \neq 0$.

Se abbiamo un moto dove L è costante nel tempo, e anche una sua componente (per esempio L_z) è costante, mentre le altre due variano, allora il moto è detto di **precessione**: si tratta in generale del moto della terra che ruota, o di una trottola. Nel caso di un campo magnetico questo moto prende il nome di **precessione di Larmor**.

Tenendo conto che la velocità angolare è $\omega = \frac{d\phi}{dt}$ e $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$ (si dimostra con coordinate sferiche), otteniamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{m} \times \vec{B}_0 = -\frac{q_e}{2m_e} \vec{L} \times \vec{B}_0 = \vec{\omega} \times \vec{L} \implies \boxed{\vec{\omega}_L = \frac{-q_e}{2m_e} \vec{B}_0}$$

la quale viene chiamata **frequenza di Larmor**.

Tipi di materiali magnetici I materiali magnetici possono essere di 3 categorie:

- **Diamagnetici**: materiali i cui atomi non possiedono un naturale dipolo magnetico. Quando questi atomi vengono a contatto con un campo \vec{B}_0 vengono perturbati e formano dipoli, che si dispongono in modo da formare un campo **opposto** a \vec{B}_0 . In questi materiali $\boxed{B = \mu B_0, \text{ con } \mu < 1.}$
- **Paramagnetici**: materiali i cui atomi possiedono un dipolo magnetico disposti in maniera casuale. Quando vengono a contatto con un campo \vec{B}_0 tali dipoli si orientano come il campo, amplificandolo. In questi materiali $\boxed{B = \mu B_0, \text{ con } \mu > 1.}$

Dato che l'energia potenziale U del sistema è minima quando $\vec{m} \parallel \vec{B}_0$, in generale almeno una parte degli elettroni avrà momento magnetico \vec{m} parallelo a \vec{B}_0 .

In genere l'effetto paramagnetico domina su quello diamagnetico.

- Ferromagnetici: materiali i cui atomi possiedono dei dipoli magnetici già **orientati**, quindi basta un campo magnetico \vec{B}_0 molto piccolo per orientarli tutti essi daranno un contributo complessivo **positivo** molto intenso a \vec{B}_0 .

In questi materiali si produce un ciclo di **isteresi magnetica**, che è responsabile dei magneti permanenti. Abbiamo $B = \mu B_0$, ma μ è funzione di B : $\mu = \mu(B)$.

Densità di magnetizzazione Definiamo il vettore di **densità di magnetizzazione**:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V} = \frac{d\vec{m}}{dV},$$

analogo al vettore densità di momento di dipolo $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$.

Similmente a come avevamo definito la densità di carica di polarizzazione $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$, definiamo la **densità di corrente di magnetizzazione**

$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$, e proprio come avevamo definito il vettore spostamento elettrico $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, definiamo il vettore **campo magnetico** come

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

Tutto questo serve a poter parlare di campi nella **materia**, anziché nel vuoto.

Rotore di H Nei materiali che hanno **permeabilità relativa** μ_r si ha $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M$, quindi:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (\vec{J}_V + \vec{J}_M) = \mu_0 \vec{J}_V + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} \implies \\ \implies \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} &= \mu_0 \vec{J}_V \implies \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_V. \end{aligned}$$

Suscettività magnetica Partendo dalla formula:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M},$$

mettiamo in relazione \vec{M} con \vec{B} :

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu_r} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right) = \frac{1}{\mu_0\mu_r} \vec{B}(\mu_r - 1).$$

Da qua l'importante distinzione:

- I materiali dove $\mu_r > 1$ sono i **paramagnetici**.
- I materiali dove $\mu_r < 1$ sono i **diamagnetici**.

Definiamo la **suscettività magnetica** $\chi_m = \mu_r - 1$. Avremo che:

- Nei paramagnetici $\mu_r > 1 \implies \chi_m > 0$.
- Nei diamagnetici $\mu_r < 1 \implies \chi_m < 0$.

Grazie ad essa possiamo riscrivere la densità di magnetizzazione più compatamente:

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0\mu_r} \vec{B}.$$

5 Induzione elettromagnetica

La parte più importante del corso.

Campo elettromotore Consideriamo un circuito con generatore di forza elettromotrice.

Abbiamo finora assunto che le correnti in tale circuito siano **stazionarie**, eppure sappiamo che viene trasferita energia alla resistenza per effetto Joule. Affinché la corrente rimanga stazionaria, le cariche devono **riottenere** tale energia, e questo avviene mediante un campo detto **campo elettromotore** \vec{E}_l , generato dalla forza elettromotrice.

Questo campo è sempre non conservativo:

$$\oint \vec{E}_l \cdot d\vec{l} \neq 0.$$

Il campo elettromotore sposta ogni carica q con una forza di modulo $F_+ = qE_l$ se positiva e $F_- = -qE_l$ se negativa. In seguito a ciò, le cariche sono disposte in un modo diverso: la nuova distribuzione produce un campo E_s opposto a E_l . All'equilibrio abbiamo $E_l = -E_s$

Definiamo la forza elettromotrice come:

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{E}_l \cdot d\vec{l},$$

Ovvero il lavoro che il campo \vec{E}_l compie per spostare una carica positiva dal morsetto negativo a quello positivo nel circuito. A circuito aperto è uguale a:

$$\varepsilon = - \int_{-}^{+} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = V_+ - V_-,$$

dove $V_+ - V_-$ è la differenza di potenziale tra i morsetti. Sperimentalmente notiamo che, se I è sufficientemente piccola, quando chiudiamo il circuito (la corrente inizia a scorrere) questa differenza di potenziale decresce linearmente.

$$\oint (\vec{E}_l + \vec{E}_s) \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_l \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_l \cdot d\vec{l} = \int_{-}^{+} \vec{E}_l \cdot d\vec{l},$$

dunque:

$$\boxed{\varepsilon = \oint \vec{E}_l \cdot d\vec{l}.}$$

Il campo elettromotore non deve essere necessariamente di origini elettrostatiche, infatti considerando la forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \implies \vec{E}_l = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B},$$

ovvero il campo elettromotore ha una componente elettrica e una magnetica. Approfondiamo questo aspetto col seguente risultato.

Legge di Faraday-Neumann-Lenz Detta anche **legge di Faraday**.

Detto Φ_B il flusso magnetico passante per una superficie A :

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A},$$

allora:

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}.}$$

Quindi ogni volta che c'è un flusso magnetico che varia nel tempo, si sviluppa una forza elettromotrice indotta.

Esempio Immaginiamo una sbarra metallica di lunghezza l immersa in un campo magnetico \vec{B} costante e perpendicolare alla superficie della sbarra. Supponiamo di spostare la sbarra con una velocità di trascinamento \vec{v}_t . Su ogni carica della sbarra inizierà ad agire la forza di Lorentz $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$. Dopo un po' le cariche si saranno dunque spostate: quelle positive si saranno accumulate in un polo e quelle negative nel polo opposto della sbarra. Questa configurazione genera un campo elettrostatico E_s di cui possiamo calcolare il modulo:

$$F = qE_s = qv_t B \implies E_s = v_t B.$$

Avremo inoltre una differenza di potenziale tra i due poli:

$$\Delta V = V_+ - V_- = E_s l = v_t B l = \varepsilon.$$

Quindi viene generata una forza elettromotrice grazie alla forza di Lorentz.

Il calcolo che abbiamo fatto è preciso? Abbiamo sfruttato l'equazione $\vec{E}_s = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$, ma \vec{v} ha 2 componenti: di trascinamento (imposta dall'esterno) e di deriva (velocità della carica all'interno del conduttore).

Possiamo dunque riscrivere: $\vec{E}_s = \vec{E} + (\vec{v}_t + \vec{v}_d) \times \vec{B}$.

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint (\vec{v}_t \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} + \oint (\vec{v}_d \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$

L'ultimo prodotto scalare è nullo dato che $\vec{v}_d \parallel d\vec{l} \implies (\vec{v}_d \times \vec{B}) \perp d\vec{l}$, per cui la forza elettromotrice è influenzata solo dalla velocità di trascinamento, e non da quella di deriva.

Forza elettromotrice indotta Supponiamo ora di connettere la stessa sbarra metallica a un circuito rettangolare chiuso, di lato l . Il flusso magnetico attraverso il circuito sarà:

$$\Phi(B) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -BS = -Blx(t),$$

dove $x(t)$ indica la posizione della bacchetta al tempo t .

Per la legge di Faraday:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi(B)}{dt} = -Bl \frac{dx(t)}{dt} = -Blv_t. \quad (5.1)$$

Tale ε è detta "forza elettromotrice **indotta**", e come abbiamo visto è una conseguenza diretta della forza di Lorentz: non deriva da campi elettrici, ma dalla variazione del flusso magnetico nel tempo.

Dato che è presente la forza magnetica:

$$\vec{F}_B = \int_l I d\vec{l} \times \vec{B} = IlB,$$

è necessaria una forza \vec{F}_A **opposta** ad essa affinché la bacchetta rimanga di velocità costante: $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$.

Tale forza compierà un lavoro, e la potenza sprigionata sarà:

$$P = \vec{F}_A \cdot \vec{v}_t = IlBv_t = \varepsilon I \implies \boxed{P = \varepsilon I}.$$

Calcolare v_t Supponiamo di accelerare nel tempo la bacchetta. Risolvendo un'equazione differenziale si ricava:

$$v_t(t) = v_t(0)e^{-\frac{l^2 B^2}{mR}t}$$

Legge di Lenz La legge di Lenz afferma che la corrente indotta in una spira si oppone al cambiamento di flusso del campo magnetico. Questo avviene a causa del segno "-" nell'equazione 5, e dunque la legge di Lenz non è altro che un corollario della legge di Faraday.

Grazie alla f.e.m. indotta scorrerà della corrente indotta, quindi sarà generato un campo magnetico B_{ind} che fornisce un contributo positivo $\Phi(B_{ind})$ per bilanciare $\Phi(B)$, che è negativo. In generale $B_{ind} \ll B$.

Terza equazione di Maxwell Abbiamo prima spiegato la legge di Faraday solo con la forza di Lorentz, ma anche quando la velocità di trascinamento è nulla avremo un campo elettrico non conservativo, infatti:

$$\vec{v}_t = 0, \text{ ma } \frac{d\Phi(B)}{dt} \neq 0 \implies \varepsilon \neq 0 \implies \oint \vec{E}_t \cdot d\vec{l} \neq 0 \implies \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

Quindi la legge di Faraday ha un'altra spiegazione, nel caso in cui non ci sia nessun trascinamento, e ci è data dalla **terza equazione di Maxwell**:

$$\oint \vec{E}_t \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = \frac{-d\Phi(B)}{dt} =$$

$$-\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \implies \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Quindi se in un punto è presente un campo magnetico \vec{B} che varia nel tempo, esso genererà un campo elettrico \vec{E} non conservativo. La terza equazione di Maxwell esprime in modo **locale** la legge di Faraday.

Abbiamo appena ricavato quest'equazione nel caso non stazionario (\vec{B} varia nel tempo).

In condizioni quasi stazionarie Supponiamo una condizione quasi stazionaria, ovvero \vec{B} variante nel tempo ma sempre in equilibrio, in modo

da apparire stazionario in ogni istante (varia molto lentamente).
In tal caso avremo:

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I(t) \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{\Delta r^3} = I(t) \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{\Delta r^3}$$

Il flusso $\Phi(B)$ sarà proporzionale a I , e chiamiamo la costante di proporzionalità L : $\Phi(B) = LI$.

Tale costante sarà chiamata **induttanza**, o per essere precisi **autoinduttanza**, e racchiude informazioni sulla geometria del sistema.

L'induttanza nel SI è misurata in Henry: $H = \frac{Wb}{A}$

Possiamo anche calcolare la f.e.m. autoindotta basandoci su L , infatti:

$$\Phi(B) = LI \implies \varepsilon_a = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Induttanza di un solenoide In un solenoide ideale avente n spire al metro, il campo magnetico è $\vec{B} = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$.

Il flusso di tale campo concatenato su una spira del solenoide è $\Phi_1(B) = BA$. In tutto il solenoide, il flusso sarà $\Phi(B) = N\Phi_1(B) = NBA = A\mu_0 \frac{N^2}{l} I$.

In condizioni quasi stazionarie, come visto nella sezione precedente, questo flusso sarà uguale a LI , quindi segue che il coefficiente di autoinduttanza è $L = \frac{\Phi(B)}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} A = \mu_0 \frac{N^2}{l^2} Al = \mu_0 n^2 V = \mu_0 n^2 V$.

Se all'interno del solenoide è presente un materiale (diamagnetico o paramagnetico) con permeabilità relativa μ_r :

$$B = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 n I \implies L = \mu_r \mu_0 n^2 V$$

Circuito RL Immaginiamo un circuito RL aperto che si carica. Quando viene chiuso e inizia a scorrere la corrente, non potremo trascurare la f.e.m. indotta ε_a che si viene a formare:

$$RI = \varepsilon + \varepsilon_a = \varepsilon - L \frac{dI}{dt}.$$

In tale sistema dunque la f.e.m è:

$$\varepsilon = RI + L \frac{dI}{dt},$$

mentre:

$$I + \frac{L}{R} \frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} = I_M$$

sarà la corrente massima che scorre nel circuito.

La **costante di tempo** del circuito è $\tau = \frac{L}{R}$.

Mutua induttanza Se abbiamo due circuiti, uno generante un campo magnetico $\vec{B}_1(t)$ e l'altro generante $\vec{B}_2(t)$, avremo che:

Il flusso prodotto da \vec{B}_1 concatenato con il circuito 2 è $\Phi_2(\vec{B}_1) = M_{1,2}I_1$;

il flusso prodotto da \vec{B}_2 concatenato con il circuito 1 è $\Phi_1(\vec{B}_2) = M_{2,1}I_2$,

dove $M_{12} = M_{21}$ è detto coefficiente di **mutua induzione**.

Energia di autoinduttanza In un circuito RL , come visto prima:

$$\varepsilon = RI + L \frac{dI}{dt} \implies \varepsilon dq = RI dq + L \frac{dI}{dt} dq$$

e dato che $dq = Idt$ abbiamo:

$$\varepsilon dq = RI^2 dt + LI dI. \quad (5.2)$$

A primo membro abbiamo l'energia fornita dalla carica dq , a secondo membro abbiamo la somma tra l'effetto Joule e la cosiddetta **energia di autoinduttanza** (o di **induzione**) $\boxed{dU_L = LI dI}$, energia necessaria per cambiare la corrente da I a $I + dI$.

L'energia immagazzinata in un induttore di induttanza L percorso da corrente I sarà dunque:

$$\boxed{U_L = \int_0^t dU_L = \int_0^{I(t)} LI dI = \frac{1}{2} LI^2}$$

Dividendo l'equazione 5.2 per dt otteniamo:

$$\varepsilon I = RI^2 + LI \frac{dI}{dt}, \quad (5.3)$$

che riscriviamo come $\boxed{P_g = P_R + P_L}$: la potenza del generatore è pari alla potenza della resistenza (effetto Joule) + la potenza dell'induttanza.

Sappiamo che quando la corrente cresce in un circuito RL, la formula è:

$$I(t) = I_M(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (5.4)$$

quindi:

$$P_g = \varepsilon I = \varepsilon I_M(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{\varepsilon^2}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

$$P_R = RI^2 = RI_M^2(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})^2 = \frac{\varepsilon^2}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})^2 = P_g(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Quindi:

$$\boxed{P_g = \frac{\varepsilon^2}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})} \text{ e } \boxed{P_R = P_g(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})} \implies P_g - P_R = \boxed{P_g e^{-\frac{t}{\tau}} = P_L}$$

Plottando P_g e P_R in un grafico, si nota che tra le due curve c'è sempre una differenza, che va prima ad aumentare e poi a diminuire, tendendo a 0. Tale differenza è proprio P_L , l'energia di induttanza, che per la 5.3 è:

$$P_L = LI \frac{dI}{dt}$$

Dall'equazione 5.4 si ottiene:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I_M}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

quindi:

$$P_L = P_g e^{-\frac{t}{\tau}} = LI \frac{dI}{dt} = LI_M(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \frac{I_M}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Sostituendo $\tau = \frac{L}{R}$ si ottiene ancora una volta:

$$P_L = L \frac{R}{L} I_M^2 e^{-\frac{t}{\tau}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{\varepsilon^2}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) e^{-\frac{t}{\tau}} = P_g e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Energia in un solenoide Consideriamo un solenoide. Da equazioni scritte in precedenza possiamo ricavare:

$$dU_L = LI dI = LI \left(\frac{dI}{dt} \right) dt,$$

ma sappiamo che:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \implies L \frac{dI}{dt} = \frac{d\Phi(B)}{dt},$$

quindi:

$$dU_L = I \frac{d\Phi(B)}{dt} dt = IN A \frac{dB}{dt} dt = IN A dB = I \frac{N}{l} (lA) dB = InV dB$$

Quindi $\boxed{dU_L = VnI dB}$. Da qui:

$$\frac{dU_L}{V} = (nI) dB.$$

Sappiamo che:

$$H = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B \text{ e } B = \mu_0 \mu_r nI \implies \boxed{H = nI} \implies \frac{dU_L}{V} = H dB = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} dB$$

L'abbiamo appena dimostrato nel caso di un solenoide, ma quest'ultima equazione vale in generale. Da essa si ottiene:

$$U_L = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_0^B B dB = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r}$$

Vista questa relazione tra l'energia di induttanza e il campo magnetico, possiamo interpretare U_L come energia per formare un campo magnetico \vec{B} .

La densità di energia del campo magnetico sarà dunque:

$$\boxed{u_L = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r}}$$

proprio come per il campo elettrico era $\frac{\varepsilon E^2}{2}$.

Quando sono entrambe presenti, possiamo parlare di energia trasportata da un campo **elettromagnetico**.

Moto delle cariche Supponiamo di avere un circuito LC inizialmente senza corrente, con un condensatore avente una carica iniziale q_M e un induttore L .

Avremo:

- A $t = 0 \implies U(t = 0) = \frac{q_M^2}{2C}$, ovvero l'Energia in un condensatore.
- A $t > 0 \implies U = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2$: energia di condensatore e induttore.

Dato che il circuito è isolato:

$$\frac{dU_{tot}}{dt} = 0 \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 \right) = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0,$$

$$\text{ma } \frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \implies \boxed{L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0}.$$

Notiamo che è un'equazione simile al moto armonico:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

con le corrispondenze:

- $q \leftrightarrow x$
- $L \leftrightarrow m$
- $\frac{1}{C} \leftrightarrow k$

Questa osservazione prende il nome di "analogia di "Maxwell", o "analogia di impedenza", ed è utile perché consente di applicare strumenti usati in meccanica a un sistema elettrico.

Il moto armonico prevede $x(t) = x_M \cos(\omega t + \phi)$, con $\omega^2 = \frac{k}{m} \implies q(t) = q_M \cos(\omega t + \phi)$, con $\omega^2 = \frac{1}{LC} \implies \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

In un sistema isolato come quello del circuito:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0 \implies \phi = 0 \implies \boxed{q(t) = q_M \cos \omega t}.$$

$$\text{Di conseguenza } \boxed{I(t) = \frac{dq}{dt} = -q_M \omega \sin \omega t}.$$

Carica e corrente sono sfasati di $\frac{\pi}{2}$.

Queste equazioni indicano che quando un condensatore si "scarica" su un'induttanza, non avremo una scarica, ma un'oscillazione della carica: la

corrente cambierà continuamente di segno.

Se abbiamo un circuito con induttanza e resistenza avremo un'oscillazione e una scarica contemporaneamente, quindi un **oscillatore smorzato**.

Energia in un circuito LC In un circuito LC l'energia totale è somma dell'energia depositata nel condensatore e dell'energia depositata nell'induttore:

$$U = U_C + U_L = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} LI^2 = \boxed{\frac{q_M^2}{2C} = U.}$$

Da quest'equazione (e da $q(t) = q_M \cos \omega t$) possiamo ricavare l'andamento di queste energie:

$$U_C = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2C} q_M^2 \cos^2 \omega t.$$

$$U_L = \frac{1}{2} L \omega^2 q_M^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} L \frac{1}{LC} q_M^2 \sin^2 \omega t \implies \boxed{U_L = \frac{1}{2C} q_M^2 \sin^2 \omega t}$$

Smorzamento in un circuito RLC in serie In un circuito RLC abbiamo $\frac{dU}{dt} \neq 0$, in quanto parte dell'energia è ceduta alla resistenza R , per l'effetto Joule, quindi:

$$\frac{dU}{dt} = -RI^2,$$

ovvero l'energia decresce nel tempo. Ricordando che $U = U_C + U_L$:

$$\begin{cases} U_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \\ U_L = \frac{1}{2} LI^2 \end{cases} \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} LI^2 \right) = -RI^2 \implies$$

$$\implies \frac{1}{2C} 2q \frac{dq}{dt} + \frac{1}{2} 2LI \frac{dI}{dt} = -RI^2 \implies L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0,$$

che corrisponde all'equazione di un **moto armonico smorzato**, ovvero:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

con le corrispondenze:

- $q \leftrightarrow x$
- $L \leftrightarrow m$
- $R \leftrightarrow B$
- $\frac{1}{C} \leftrightarrow k$.

Ricordiamo che in un moto armonico smorzato, la **pulsazione** è:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{B}{2m} \right)^2},$$

quindi nel nostro caso:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} \implies \boxed{\omega_R^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2}$$

Distinguiamo 3 casi:

- $\omega_R^2 > 0 \implies \frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$: moto smorzato.
- $\omega_R^2 < 0 \implies \frac{1}{LC} < \left(\frac{R}{2L}\right)^2$: moto sovrasmorzato (R troppo alta).
- $\omega_R^2 = 0 \implies \frac{1}{LC} = \left(\frac{R}{2L}\right)^2$: caso intermedio.

Circuiti a corrente alternata Un circuito si dice "a corrente alternata" se la corrente (e di conseguenza la tensione) non ha un verso costante e determinato come le correnti continue, ma si inverte continuamente a intervalli costanti di tempo, variando in ciascun intervallo con valori uguali e verso opposto.

$$\boxed{V(t) = V_{MAX} \sin \omega t} \text{ e } T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Diremo che la corrente $I(t)$ e la tensione $V(t)$ sono **in fase**, in quanto entrambe proporzionali a $\sin \omega t$.

Per la legge di Ohm:

$$V(t) = RI(t) \implies I(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_{MAX}}{R} \sin \omega t$$

La potenza dissipata su R sarà $P_R(t) = I^2(t)R$, e il **valore medio** della potenza calcolato nel periodo del segnale è:

$$\frac{1}{T} \int_0^T P_R(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T RI^2(t) dt = R \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt$$

ovvero R moltiplicata per il valore medio della corrente (che chiameremo **corrente efficace**, serve a quantificare la potenza) al quadrato.

$$I_{EFF}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt = \frac{1}{T} \frac{V_{MAX}^2}{R^2} \int_0^T dt \sin^2 \omega t = \frac{V_{MAX}^2}{2R^2}.$$

$$\text{Otteniamo dunque che } \boxed{I_{EFF}^2 = \frac{1}{2} \frac{V_{MAX}^2}{R^2}} \implies \boxed{P = \frac{1}{2} \frac{V_{MAX}^2}{R}}.$$

Se abbiamo una tensione V continua, la potenza diventa $P = \frac{V_{MAX}^2}{R}$

Differenza di fase tra corrente e tensione In un circuito a corrente alternata, dato che V è sinusoidale, allora I è sinusoidale, ma può essere sfasata di un angolo ϕ_L , quindi:

$$I(t) = I_{MAX} \sin(\omega t + \phi_L)$$

Abbiamo:

$$\frac{dI}{dt} = \omega I_{MAX} \cos(\omega t + \phi_L) = \omega I_{MAX} (\cos \omega t \cos \phi_L - \sin \omega t \sin \phi_L).$$

Dato che:

$$\Delta V = L \frac{dI}{dt} = \Delta V_{max} \sin \omega t,$$

allora:

$$(\omega L) I_{MAX} \cos \omega t \cos \phi_L - (\omega L) I_{MAX} \sin \omega t \sin \phi_L = \Delta V_{MAX} \sin \omega t.$$

Chiamiamo $\omega L = X_L$ **reattanza induttiva**, e riscriviamo l'equazione:

$$X_L I_{MAX} \cos \omega t \cos \phi_L - X_L I_{MAX} \sin \omega t \sin \phi_L = \Delta V_{MAX} \sin \omega t \quad (5.5)$$

Dato che il primo termine è fuori fase rispetto al secondo membro (è proporzionale a coseno e non a seno), esso deve essere nullo:

$$X_L I_{MAX} \cos \phi_L = 0 \implies \cos \phi_L = 0 \implies \phi_L = \pm \frac{\pi}{2}$$

Sostituendo nell'equazione 5.5:

$$\pm X_L I_{MAX} \sin \omega t \sin \phi_L = \Delta V_{MAX} \sin \omega t \implies I_{MAX} = \pm \frac{\Delta V_{MAX}}{X_L}$$

In particolare:

$$\phi_L = \pm \frac{\pi}{2} \implies I_{MAX} = \mp \frac{\Delta V_{MAX}}{X_L} \implies I(t) = \mp \frac{\Delta V_{MAX}}{X_L} \sin \left(\omega t \pm \frac{\pi}{2} \right),$$

ma dato che $-\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$, allora se ϕ_L è positivo o negativo le espressioni saranno equivalenti, quindi scriviamo:

$$I(t) = \frac{\Delta V_{MAX}}{X_L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

dato che in questo caso ϕ_L è negativo, si parla di **ritardo di fase**.

Significato della reattanza induttiva L'equazione $I_{MAX} = \frac{\Delta V_{MAX}}{X_L}$ ricorda la legge di Ohm: maggiore sarà la reattanza induttiva e minore sarà la corrente massima, quindi X_L svolge quasi la funzione di una **resistenza**, ma **senza** alcun effetto Joule.

X_L cresce se ω cresce, in quanto in tal caso aumenterà la forza elettromotrice indotta (per la legge di Faraday).

Reattanza capacitiva Se abbiamo un circuito a corrente alternata con un condensatore, possiamo introdurre la **reattanza capacitiva**: $X_C = \frac{1}{\omega C}$. Anche questa funziona quasi da resistenza, in quanto si ricava:

$$I(t) = \pm \frac{\Delta V_{MAX}}{X_C} \sin\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

Facendo le stesse considerazioni di prima, per convenzione scegliamo:

$$I(t) = + \frac{\Delta V_{MAX}}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Dato che ϕ_C è positivo, diremo che la corrente è in **anticipo di fase**.

Corrente alternata in circuito RLC in serie L'obiettivo è calcolare I_{MAX} (l'**ampiezza della corrente**) e la fase della corrente ϕ , in un circuito RLC.

La tensione totale in un circuito RLC in serie è somma di 3 termini:

- Tensione ai capi dell'induttanza
- Tensione ai capi della resistenza
- Tensione ai capi della capacità

Infatti si ha:

$$\Delta V = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \Delta V_{MAX} \sin \omega t.$$

Tramite dei passaggi (omessi) si trova che la fase è data da $\tan \phi = \frac{X_C - X_L}{R}$. Quando $\tan \phi = 0 \implies X_C = X_L$, allora il segnale applicato e il segnale

che si genera nel circuito saranno in fase, e questa è detta **condizione di risonanza** (come la risonanza del moto armonico).

Con altri passaggi (omessi) si trova I_{MAX} , infatti chiamando **impedenza** la quantità $z = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$, si trova $I_{MAX} = \frac{\Delta V_{MAX}}{Z}$: la corrente è ancora sinusoidale e si tratta di un'oscillazione forzata (dalla forza elettromotrice).

Teorema 5.6. Vale il risultato: $P_{media} = RI_{EFF}^2$.

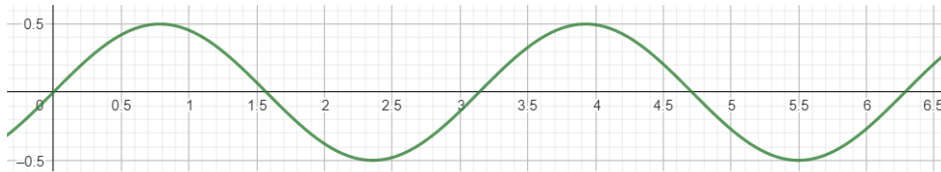
Proof. Sappiamo che vale sempre (sia con corrente continua che alternata) la relazione:

$$\begin{aligned} P &= I\Delta V = I_{MAX} \sin(\omega t + \phi) \Delta V_{MAX} \sin \omega t = \\ &= I_{MAX} (\sin \omega t \cos \phi + \sin \phi \cos \omega t) \Delta V_{MAX} \sin \omega t = \\ &= I_{MAX} \Delta V_{MAX} \sin^2 \omega t \cos \phi + I_{MAX} \Delta V_{MAX} \sin \phi \cos \omega t \sin \omega t = P(t), \end{aligned}$$

quindi in generale la potenza dipende dal **tempo** t e dallo **sfasamento** tra tensione applicata e corrente. La potenza media è

$$P_{media} = \frac{1}{T} \int_0^T dt P(t).$$

Il grafico della funzione $\sin x \cos x$ é:



e dunque:

$$\int_0^{T=2\pi} \sin x \cos x \, dx = 0 \implies \int_0^{T=\frac{2\pi}{\omega}} \sin \omega t \cos \omega t \, dt = 0,$$

quindi sopravvive solo il termine:

$$P_{media} = \frac{1}{T} \int_0^T dt I_{MAX} \Delta V_{MAX} \sin^2 \omega t \cos \phi =$$

$$= I_{MAX} \Delta V_{MAX} \cos \phi \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} I_{MAX} \Delta V_{MAX} \cos \phi.$$

Dato che $I_{EFF} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{MAX}$ e $\Delta V_{EFF} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta V_{MAX}$, possiamo riscrivere:

$$P_{media} = \frac{I_{MAX}}{\sqrt{2}} \frac{\Delta V_{MAX}}{\sqrt{2}} \cos \phi = I_{EFF} \Delta V_{EFF} \cos \phi,$$

Che in un circuito RLC è pari a $P_{media} = I_{EFF} \left(\frac{\Delta V_{EFF}}{Z} \right) R$.

Dall'equazione $I_{MAX} = \frac{\Delta V_{MAX}}{Z}$ ricaviamo:

$$I_{EFF} = \frac{\Delta V_{EFF}}{Z} \implies P_{media} = R I_{EFF}^2.$$

□

Frequenza naturale La corrente efficace I_{EFF} è massima quando abbiamo risonanza ($X_C = X_L$), in quanto:

$$I_{EFF} = \frac{\Delta V_{EFF}}{Z} = \frac{\Delta V_{EFF}}{\sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}}$$

$$X_C = X_L \implies \frac{1}{\omega C} = \omega L \implies \omega^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \implies \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Tale frequenza ω è detta **frequenza naturale** del circuito, e quando è presente, il circuito risuona col generatore.

Teorema 5.7. *Nel caso stazionario vale: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.*

Proof. Per definizione di rotore:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i}(\partial_y B_z - \partial_z B_y) + \hat{j}(\partial_z B_x - \partial_x B_z) + \hat{k}(\partial_x B_y - \partial_y B_x)$$

E di divergenza: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\partial}{\partial x}(\partial_y B_z - \partial_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\partial_z B_x - \partial_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\partial_x B_y - \partial_y B_x) = \\ &= \partial_x \partial_y B_z - \partial_x \partial_z B_y + \partial_y \partial_z B_x - \partial_y \partial_x B_z + \partial_z \partial_x B_y - \partial_z \partial_y B_x = 0 \end{aligned}$$

In generale, per qualsiasi vettore \vec{U} , $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{U} = 0}$.

Dato che $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, allora $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \frac{1}{\mu_0} = 0$.

□

Tale risultato non vale sempre, come vediamo nel paragrafo seguente.

Quarta equazione di Maxwell in caso non stazionario Ricordando l'equazione di continuità:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Nel caso stazionario otteniamo $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, ma nel caso non stazionario $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \neq 0$.

Otteniamo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \implies \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \implies \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

che possiamo riscrivere come:

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \implies \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Quindi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \implies \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Chiamiamo $\vec{J}_t = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ e otteniamo così la **Quarta equazione di Maxwell** nel caso non stazionario:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_t = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Essa, come vedremo, predice la velocità con cui si propagano le onde elettromagnetiche. Mostra che possiamo avere un campo magnetico semplicemente grazie a un campo elettrico che varia nel tempo; è simile a un'altra legge di Maxwell: il campo elettrico si ottiene da un campo magnetico che varia nel tempo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Corrente di spostamento Introduciamo i concetti:

- **Corrente di spostamento:** $I_S = \int_{\Sigma} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$, ovvero un campo elettrico che varia nel tempo.
- **Densità di corrente di spostamento:** $\vec{J}_S = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

In questo modo la circuitazione di B lungo una curva chiusa si può scrivere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{conc} + \mu_0 I_S$$

Il risultato di quest'integrale dipende non solo dal circuito, ma anche dalla superficie che viene circuitata.

La corrente di spostamento assume lo stesso valore della corrente reale, come se non ci fosse soluzione di continuità: nello spazio vuoto tra le armature di un condensatore scorre una corrente di spostamento I_S pari a I .

Nel caso del dielettrico è uguale, ma consideriamo un contributo aggiuntivo dovuto alla polarizzazione.

Nonostante non sia costituita dal moto di cariche elettriche reali, la corrente di spostamento permette di soddisfare l'equazione di continuità.

5.1 Equazioni di Maxwell nel vuoto, caso non stazionario

Elenchiamo le 4 equazioni di Maxwell che abbiamo incontrato nei vari capitoli:

1.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

che implica l'esistenza di monopoli elettrici.

2.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

che implica la non-esistenza di monopoli magnetici. Si dice che il vettore induzione magnetica è **solenoidale**, ovvero ha solo linee chiuse.

3.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

4.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Dato che, come vediamo dalla terza e dalla quarta, un campo genera l'altro, ha più senso parlare di **campo elettromagnetico**. Infatti possiamo avere campi elettromagnetici anche in assenza di sorgenti ($\vec{J} = 0$ e $\rho = 0$).

Se uniamo a queste 4 equazioni la forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Allora siamo in grado di descrivere **tutti** i fenomeni classici elettromagnetici.

Per esempio se non siamo nel vuoto, la prima equazione di Maxwell si può scrivere come $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, con $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Unendola all'equazione di continuità:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0,$$

quindi la quarta equazione di Maxwell diventa:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

Dato che $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, allora la possiamo riscrivere:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}$$

Il terzo addendo mostra che una polarizzazione dipendente dal tempo fornisce un ulteriore contributo al campo.

Energia Dato un volume V con una densità di corrente \vec{J} , tutta l'energia contenuta nel volume sarà:

$$U = \int_V d^3x \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \int_V d^3x (u_E + u_L).$$

In generale:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \neq 0.$$

Calcoliamolo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \int_V d^3x \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$

Per le equazioni di Maxwell 3 e 4 possiamo riscrivere le derivate dei campi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \int_V d^3x \left[\vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{J} \right) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (-\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] = \\ &= \int_V d^3x \vec{E} \cdot \vec{J} + \int_V d^3x \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} \right). \end{aligned}$$

Dato che vale l'identità: $\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$, possiamo scrivere:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \int_V d^3x \vec{E} \cdot \vec{J} - \int_V d^3x \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}).$$

Chiamando $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ **vettore di Poynting**, riscriviamo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \int_V d^3x \vec{E} \cdot \vec{J} - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{S} d^3x$$

Quindi per il teorema della divergenza:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \int_V d^3x \vec{E} \cdot \vec{J} - \int_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{a}. \quad (5.8)$$

Il vettore di Poynting misura il **flusso** di energia.

Collegiamo l'energia con la potenza. Data la forza di Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, facciamo considerazioni sul lavoro:

$$dW = d\vec{F} \cdot d\vec{l} = (dN)q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}, \quad (5.9)$$

dove dN è il numero di portatori di carica.

Supponendo la carica continua su d^3x , la **densità dei portatori di carica** è:

$$n = \frac{dN}{d^3x} \implies dN = n d^3x,$$

quindi l'equazione 5.9 diventa:

$$dW = nq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} d^3x = nq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt d^3x.$$

Dividendo tutto per dt si ottiene la potenza:

$$dP = nq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} d^3x,$$

ma il prodotto scalare di \vec{v} con un vettore perpendicolare ad esso è nullo, quindi:

$$dP = nq(\vec{E} \cdot \vec{v}) d^3x = \vec{E} \cdot \vec{J} d^3x$$

con $\vec{J} = nq\vec{v}$.

Possiamo quindi riscrivere l'equazione 5.8 come:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -P - \int_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{a}.$$

A parole, possiamo dire che l'energia U può variare per:

- Scambio di energia tra cariche
- Flusso di energia, misurato dal vettore di Poynting.

5.2 Equazioni di Maxwell nella materia

1.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

2.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

3.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

4.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Dove $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ e $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

Nel caso di materiali **lineari** (aventi una propria costante di permeabilità relativa e costante dielettrica relativa) avremo invece:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\vec{B}}{\mu} \text{ e } \vec{D} = \varepsilon_0 k \vec{E} = \varepsilon \vec{E},$$

con $\mu = \mu_0 \mu_r$ e $\varepsilon = \varepsilon_0 k$.

In tal caso la quarta equazione di Maxwell si può riscrivere in caso lineare, ovvero moltiplicando entrambi i membri per μ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \implies \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

6 Onde elettromagnetiche

6.1 Dalle equazioni di Maxwell alle onde

La terza equazione di Maxwell dice che $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, quindi:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (6.1)$$

come spesso accade in fisica, possiamo invertire le derivate:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Riscriviamo il secondo membro come:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Riscriviamo invece il primo membro di 6.1 come:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (6.2)$$

Dato che vale la formula "rot rot = grad div - lapl":

$$\boxed{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}}$$

dove ∇^2 è detto "laplaciano" o "operatore di Laplace", quindi:

$$\nabla^2 \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \text{ è il laplaciano di } \vec{v}.$$

In ogni caso l'espressione 6.2 è pari a $-\nabla^2 \vec{E}$ perché supponiamo di essere nel vuoto, quindi $\rho = 0$. L'equazione 6.1 si può dunque riscrivere come:

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \implies \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

Si possono fare le stesse identiche considerazioni, ma con \vec{B} (dalla quarta equazione di Maxwell), ottenendo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \implies \boxed{\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}$$

Questo tipo di equazione non è altro che un'**equazione delle onde**, detta anche "equazione d'Alembert": le equazioni di Maxwell prevedono che il campo elettromagnetico si propaga per onde.

In generale un'**onda** unidimensionale $f = f(x, t)$ ha infatti un'equazione del tipo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (6.3)$$

6.2 Relazione di dispersione

In generale $f(x, t) = f(kx - \omega t)$, ma si può usare anche $f(kx + \omega t)$, per esempio quando l'onda si propaga al contrario.

Ponendo $\xi = kx - \omega t$, dimostriamo che $f = f(\xi)$ soddisfa l'equazione 6.3.

Facciamo dei ragionamenti.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = k \frac{\partial f}{\partial \xi}, \text{ dove } k = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Seguendo lo stesso identico ragionamento:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(k \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

Allo stesso modo, rispetto al tempo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega \frac{\partial f}{\partial \xi}, \text{ dove } \omega = -\frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Seguendo lo stesso identico ragionamento:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\omega \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \left(\omega \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

Possiamo quindi riscrivere l'espressione:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v^2} \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = 0$$

Quindi:

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = 0 \implies k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \implies \boxed{\omega = vk.}$$

Questa equazione viene detta **relazione di dispersione**, ω viene detta **pulsazione** (o frequenza angolare), k **numero d'onda**.
In generale f è un'onda se soddisferà tale equazione.

Spostamento di un'onda Supponiamo di avere un'onda $f = f(kx - \omega t) = f(\xi)$.

Ipotizziamo che il valore massimo di quest'onda sia \bar{f} , che si ottiene per \bar{x} quando $t = 0$. Quando $t > 0$, in quale posizione x avremo $f = \bar{f}$? Cerchiamo il valore x tale che:

$$\bar{f} = f(kx - \omega t) = f(k\bar{x}) \implies kx - \omega t = k\bar{x} \implies x = \bar{x} + \frac{\omega}{k}t \implies x - \bar{x} = \frac{\omega}{k}t.$$

Abbiamo $\frac{\omega}{k} = v$, esattamente la stessa v dall'equazione di dispersione.

Questo vuol dire che il **profilo** di un'onda (la sua rappresentazione grafica) si sposta verso x positive con velocità v (possiamo pensare a uno tsunami).

6.3 Applicazione di onde al campo elettrico

Il campo elettrico è $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$, e ognuna di queste componenti soddisfa l'equazione delle onde.

Confrontando le due equazioni:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Si ricava che $\frac{1}{v^2} = \varepsilon\mu \implies v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, quindi la velocità di propagazione delle onde era stata prevista dalla terza equazione di Maxwell.

Se siamo **nel vuoto**, allora $\mu = \mu_0$ e $\varepsilon = \varepsilon_0 \implies$ la velocità di un'onda elettromagnetica sarà $v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

Questo valore era noto già prima dell'equazione di Maxwell, per cui tale equazione è servita principalmente a capire che la luce è un'onda elettromagnetica.

Il rapporto $\frac{c}{v} = n$ è detto **indice di rifrazione**, ed è pari a:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \sqrt{\varepsilon_0 k \mu_0 \mu_r} = \sqrt{k \mu_r}$$

Onda piana Con il termine "onda piana" si individua il più semplice tipo di propagazione in cui l'onda è funzione di una sola coordinata spaziale e della coordinata temporale. Sebbene, a rigore, le onde piane non esistono in alcuna situazione reale (in quanto dovrebbero essere generate da una sorgente di potenza infinita) alcune onde che si incontrano nella pratica possono essere considerate piane ed uniformi se osservate in zone sufficientemente ristrette dello spazio. Si parla in tal caso di onde localmente piane. Ad esempio il campo incidente su una antenna ricevente posta a grande distanza dall'antenna trasmittente può essere assimilato ad una onda piana, oppure la luce emanata dal sole incidente sulla terra.

In generale per l'onda piana $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}$, quindi il campo elettrico sarà un vettore perpendicolare a \vec{v} , quindi avrà componenti solo su y e z .

Se scegliamo \vec{E} in una direzione costante, l'onda sarà **polarizzata linearmente**.

Se invece il vettore \vec{E} ruota, allora l'onda si dice **polarizzata circolarmente**.

Una particolare onda elettromagnetica piana è l'onda monocromatica. Si tratta di un'onda sinusoidale di frequenza costante e durata infinita.

Supponendo che si propaghi lungo l'asse x , la sua equazione sarà $f = f_{MAX} \cos(kx - \omega t)$.

Approfondimento Le onde elettromagnetiche hanno tante frequenze: l'insieme di tutte le frequenze è lo **spettro**.

L'universo è permeato da radiazioni microonde (CMB: Cosmic Microwave Background), distribuite in modo piuttosto omogeneo. È tuttavia presente una zona (dal diametro di circa 1 miliardo di anni luce) chiamata **cold spot**, che appare meno riscaldata dalle microonde.

Non è ancora chiaro come mai ciò avvenga, ma una possibile spiegazione è che il cold spot sia un segno lasciato da una collisione tra il nostro universo e un altro, secondo la teoria del multiverso.

Vettore di Poynting nelle onde piane Abbiamo detto che nelle onde piane $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v} = \vec{B} \times \vec{c}$, quindi:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \times \vec{c}) \times \vec{B} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{c})$$

e sfruttando l'identità $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ l'espressione diventa:

$$\frac{1}{\mu_0} [\vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{c}) - \vec{c}B^2] = \frac{\vec{c}B^2}{\mu_0},$$

quindi il vettore di Poynting in questo caso è $\boxed{\vec{S} = \frac{B^2}{\mu_0} \vec{c}}$: mostra che il flusso d'energia ha stessa direzione e stesso verso della velocità \vec{c} .

Il modulo del vettore di Poynting è detto **intensità** dell'onda:

$$I \equiv |\vec{S}| = \frac{B^2 c}{\mu_0}$$

Sappiamo che B è funzione del tempo, infatti $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(kx - \omega t)$, con $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Avremo quindi che $B^2 = B_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$, e quindi:

$$I = \frac{c}{\mu_0} B_0^2 \cos^2(kx - \omega t).$$

È utile introdurre l'**intensità media**:

$$I_{media} = \frac{1}{T} \int_0^T dt I(t) = \frac{c}{\mu_0} B_0^2 \left(\frac{1}{T} \int_0^T dt \cos^2(kx - \omega t) \right)$$

La quantità dentro parentesi tonde è $\frac{1}{2}$, come già visto, per cui:

$$I_{media} = \frac{c B_0^2}{2 \mu_0}.$$

Così come avevamo quantificato la potenza media con la corrente efficace, possiamo quantificare l'intensità media introducendo il **campo magnetico efficace**.

$$B_{eff} = \frac{B_0}{\sqrt{2}} \implies B_{eff}^2 = \frac{B_0^2}{2} \implies \boxed{I_{media} = \frac{c B_{eff}^2}{\mu_0}}$$

7 Pratica

7.1 Costanti

- $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$, costante di Coulomb.
- $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$, costante dielettrica del vuoto.
- $e = -1.60 \cdot 10^{-19} C$, carica di un elettrone.
- $n = -\frac{1}{e} = 6.24 \cdot 10^{18}$, numero di elettroni in un Coulomb.

7.2 Formulario

7.2.1 Elettrostatica

- $\vec{F}_e = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} = q \vec{E}$.
- $\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q}$
- Campo generato da una distribuzione continua di carica: $\vec{E} = k \int \frac{dq}{r^2} \hat{u}$.
- Campo generato da un punto o sfera con carica Q : $\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}$, con r distanza dal centro della sfera, R raggio della sfera e $r \geq R$.
- Campo generato da un'asta lunga l a distanza d : $E = k \int_d^{l+d} \frac{Q}{x^2} dx$
- Campo generato da un piano isolante: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$
- Campo generato da un piano conduttore: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$
- $\lambda = \frac{dq}{dl}$, densità di carica lineare $\frac{C}{m}$
- $\sigma = \frac{dq}{dA}$, densità di carica superficiale $\frac{C}{m^2}$.

- $\rho = \frac{dq}{dV}$, densità di carica volumetrica $\frac{C}{m^3}$.

•

$$q_{int} = \int_V \rho dV = \int_0^R \rho A dr = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr,$$

se la superficie A è quella di una sfera.

- $\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -Ed$ in un campo uniforme.
- $[V] = \frac{J}{C}$ perché $V = \frac{U_E}{q}$ per una carica q .
- Potenziale di una carica puntiforme: $V = k\frac{q}{2}$.
- Componenti del campo: $E_x = \frac{\partial V}{\partial x}$ e $E_y = \frac{\partial V}{\partial y}$
- $C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{Q}{Ed}$ se \vec{E} è uniforme $= \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d} = \frac{Q\varepsilon_0}{\sigma d}$ se \vec{E} è prodotto da un piano (es: condensatore) $= \frac{\varepsilon_0 \sigma A}{\sigma d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ se Q è distribuita su una superficie (es: condensatore).
- Condensatori:

In serie: $\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i^n \frac{1}{C_i}}$ $\boxed{\Delta V_{eq} = \sum_i^n \Delta V_i}$ $\boxed{Q_1 = \dots = Q_n}$

In parallelo: $\boxed{C_{eq} = \sum_i^n C_i}$ $\boxed{\Delta V_1 = \dots = \Delta V_n}$ $\boxed{Q_{eq} = \sum_i^n Q_i}$

- $W = \Delta U_E$
- Variazione di energia potenziale elettrica ΔU_E :

$$\begin{cases} \Delta U_E = q\Delta V & \text{Spostamento di una carica } q. \\ \Delta U_E = \frac{1}{2}Q\Delta V & \text{Spostamento di più cariche.} \end{cases}$$

Si deduce che l'energia immagazzinata in un condensatore piano è:

$$U_E = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

- Densità di energia elettrica nel vuoto: $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \implies$ l'energia si ricava integrando rispetto al volume:

$$U_E = \int u_E dV = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV$$

su un condensatore piano è facile dimostrare la formula:

$$u_E = \frac{U_E}{A \cdot d} = \frac{1}{2} \frac{CV^2}{A \cdot d} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} \frac{V^2}{A \cdot d} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

- Influenza di un dielettrico avente costante dielettrica k :

$$\boxed{\Delta V = \frac{\Delta V_0}{k}} \quad \boxed{E = \frac{E_0}{k}} \quad \boxed{C = kC_0 = \frac{Q}{\Delta V_0}} \quad \boxed{U = \frac{U_0}{k}}$$

- Momento di un dipolo elettrico: $\vec{p} = q\vec{d}$.
- Momento meccanico in un dipolo: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$.

7.2.2 Elettrodinamica

- $\Phi_A(\vec{E}) = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \vec{E} \cdot \vec{A}$ se \vec{E} è uniforme rispetto ad A .
- Teorema di Gauss: $\Phi_A(\vec{E}) = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ se A è una superficie chiusa.
- Corrente: $I = \frac{dq}{dt}$
- Legge di Ohm: $V = IR$.
- Effetto Joule: $P = VI = I^2R = \frac{(\Delta V)^2}{R}$, potenza elettrica (W) dissipata come calore assorbito da un resistore.

- Energia dissipata nel tempo in una resistenza: $U = \int_0^t RI^2$
- Resistenze:

In serie: $R_{eq} = \sum_i^n R_i$ $\Delta V_{eq} = \sum_i^n \Delta V_i$ $I_1 = \dots = I_n$

In parallelo: $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i^n \frac{1}{R_i}$ $\Delta V_1 = \dots = \Delta V_n$ $I = \sum_i^n I_i$

- Legge dei nodi: $I_{entr} = I_{usc}$.
- Legge delle maglie: $\sum_{i=0}^n \Delta V_i = 0$.
- Densità di corrente: $J = \frac{I}{A}$.
- Costante di tempo di un circuito RC : $\tau = RC$.
- Carica di un condensatore:

$Q(t) = \varepsilon C(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$

- Scarica di un condensatore:

$Q(t) = Q_i e^{-\frac{t}{RC}}$ $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{Q_i}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$

- Condizione di scintilla in un condensatore: $\Delta V^* = E^* d$, dove E^* è la rigidità dielettrica.

7.2.3 Magnetismo

- Prima legge elementare di Laplace (Legge di Biot-Savart):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{\Delta r^3}$$

- Seconda legge elementare di Laplace:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B},$$

ovvero forza elementare che agisce su un tratto di filo $d\vec{s}$ percorso da corrente I e immerso in un campo magnetico \vec{B} .

- Forza di Lorentz: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.
- Campo prodotto da un filo infinito su un punto a distanza d :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{d}$$

- Campo prodotto da un nastro infinito largo S su un punto distante l :

$$B = \int_l^{l+S} \frac{\mu_0 I}{2\pi x S} dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi S} \ln\left(\frac{l+S}{l}\right)$$

- Corrente che attraversa una spira: $I = \frac{Q}{T}$, dove T è il periodo.
- Legge di Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I.$$

Attraverso un materiale diamagnetico o paramagnetico con permeabilità relativa pari a μ_r :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu_r I.$$

- Corrente come flusso:

$$I = \Phi_{\Sigma}(\vec{J}) = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \hat{n} d\Sigma.$$

- Campo magnetico in un solenoide con N spire e di lunghezza L :

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I;$$

se il solenoide è infinito poniamo $n = \frac{N}{L}$ per ottenere:

$$B = \mu_0 n I$$

- Momento magnetico in una spira circolare:

$$|\vec{m}| = IA = \frac{Q}{T} \pi r^2 = \frac{Qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{Qvr}{2}$$

Tale vettore è perpendicolare al piano della circonferenza.

- Momento meccanico in una spira circolare, calcolato dal momento magnetico:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}.$$

- Energia magnetica: $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$
- Modulo del campo magnetico in un punto sull'asse della spira:

$$B = \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Dove r è il raggio della spira e y la distanza dal centro della spira. Segue che il modulo del campo magnetico al centro della spira è:

$$B = \frac{\mu_0 I r^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

- Densità di energia magnetica:

$$u_L = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

7.2.4 Induzione elettromagnetica

- Flusso: $\Phi_B = B \cdot A \implies$ in un circuito: $\Phi_B = BLx(t) = BLvt$.
- Forza elettromotrice indotta (legge di Faraday):

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

- Flusso prodotto da \vec{B}_1 concatenato con un circuito 2:

$$\Phi_2(\vec{B}_1) = M I_1,$$

con M coefficiente di mutua induzione.

- Costante di tempo in un circuito RL:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

- Corrente crescente in un circuito RL:

$$I(t) = I_{max}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

- Corrente decrescente in un circuito RL:

$$I(t) = I_{max}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

- Energia magnetica in un induttanza L percorsa da una corrente I :

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2$$

- Coefficiente di autoinduzione:

$$L = \frac{\Phi_B}{I}$$

In un solenoide con N spire lungo d e di sezione A :

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{NBA}{I} = \frac{I\mu_0 N^2 A}{Id} = \frac{\mu_0 N^2 A}{d}$$

7.2.5 Onde elettromagnetiche

Affrontiamo la parte di onde elettromagnetiche solo dal punto di vista teorico.

7.2.6 Formule varie

Cerchi e sfere

- Circonferenza: $2\pi R = \frac{dA_C}{dr}$.
- Area di un cerchio: $A_C = \pi R^2 = \int_0^R C dr$.

- Superficie sferica: $A_S = 4\pi R^2 = \frac{dV_S}{dr}$.
- Volume di una sfera: $V_S = \frac{4}{3}\pi R^3 = \int_0^R A_S dr$, oppure:

$$V_S = \iiint d^3x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^R r^2 dr$$

Moto circolare

- $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{1}{f}$
- $\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{f} = 2\pi f$
- $v = \omega r = \frac{2\pi r}{f} = 2\pi r f$
- $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1}{T}$

Approssimazioni ricorrenti

- $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}$
- $1 + \frac{1}{\theta} \approx 1 - \theta$
- $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

Integrali ricorrenti

•

$$\int \frac{1}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x}{d^2 + \sqrt{d^2 + x^2}}$$

8 Esame Orale

8.1 Raccolta domande del prof. Ruggieri

- Argomento a scelta
- Principio di sovrapposizione
- Un esempio di sistema dove il campo magnetico è parallelo al campo elettrico (risposta: solenoide avente alle estremità armature di un condensatore)
- Onde piane ed esempio reale.
- Induttanza e sua analogia con la massa (analogia di Maxwell)
- Sistemi RL, LC, RLC.
- Energia di un campo elettromagnetico
- Dimostrazione dell'analogia tra onda di d'Alembert e campo elettromagnetico
- Tutto sulle equazioni di Maxwell, dimostrazioni, generalizzazione della quarta.
- Effetto joule
- Dipolo elettrico: campo generato ed energia potenziale.
- Teorema di gauss e suo collegamento con la prima equazione di Maxwell.
- Flusso elettrico
- Vettore densità di momento di dipolo \vec{P} .
- Ricavare le onde elettromagnetiche dalle equazioni di Maxwell.
- Barretta metallica che si muove in un campo magnetico costante (anche per introdurre la f.e.m.)
- Forza di Lorentz
- Conservazione della carica globale e locale (Equazione di continuità)
- Ricavare il campo magnetico di un filo infinito

- Campo magnetico, assenza di monopoli
- Divergenza
- Velocità di propagazione delle onde nel vuoto ($c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$)
- Sistemi fisici in cui il campo elettrico è sempre nullo (conduttori all'equilibrio)
- Materiali magnetici (diamagnetico, paramagnetico, ferromagnetico)

8.2 Raccolta domande del prof. Mirabella

- Effetto Hall
- Circuiti RC, RL, LC
- Autoinduzione
- Equazioni di Maxwell (importante)
- Legge di Ampère-Maxwell (importante)
- Teorema di Gauss
- Interazione magnetica tra 2 fili
- Polarizzazione e conduzione elettrica nei materiali
- Legge di Faraday
- Legge di Ohm
- Legge di Biot-Savart.
- Campo magnetico
- Campo magnetico di un solenoide
- Campo magnetico di un filo dalla prima legge di Laplace
- Campo magnetico al centro di una spira
- Perché i parafulmini sono appuntiti? ([Effetto punta](#)).
- Legge di Coulomb.
- Dipolo elettrico.

- Linee di campo.
- Conduttori in equilibrio. elettrostatico
- Isteresi magnetica.
- Condensatori (in serie e in parallelo) ed energia accumulata.
- Induzione elettromagnetica.
- Motore elettrico.
- Magnetismo nella materia.
- Campo elettrico e potenziale elettrostatico.
- Spettrometro di massa.
- Effetto Joule.

8.3 Raccolta domande del prof. Plumari

- Unità di misura in generale
- Teorema di Coulomb
- Conduttori in equilibrio elettrostatico
- Capacità di un condensatore (anche con inserimento di un dielettrico)
- Dipolo elettrico (raramente)
- Teorema di Ampere
- Prima e seconda legge elementare di Laplace
- Potenziale elettrostatico e proprietà
- Campo elettrostatico e proprietà
- Dielettrici e proprietà, polarizzazione di un dielettrico e vettore di polarizzazione \vec{p} .
- Leggi di Ohm
- Legge Biot-Savart
- Legge di Faraday e applicazioni (esercizi)

- Energia in un condensatore
- Condensatori e resistenze sia in serie che in parallelo.
- Circuiti RC: carica, scarica, ricavare formule varie, anche con inserimento di un dielettrico.
- Effetto Joule e potenza dissipata in un resistore
- Campo magnetico e proprietà
- Circuito RL
- Forze su una spira immersa in un campo magnetico
- Magnetizzazione e vettore di magnetizzazione
- Forza di Lorentz
- Equazioni di Maxwell