Algebra lineare e geometria - 2021/2022

Antonio Pio Caruso

Basato sulle lezioni di Angelo Ariosto

Queste dispense provengono da appunti presi a lezione, e dunque possono contenere delle sviste.

Argomenti

1 Introduzione

1.1 Funzione

Dati due insiemi A e B, si dice "applicazione" o "funzione" da A in B la relazione che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.
Possiamo scrivere che:
$\forall x \in A \ \exists! y \in B : f(x) = y$.

Chiameremo l'insieme A "dominio" e l'insieme B "codominio". L'elemento y è detto "immagine" o "corrispondente" di x, l'insieme di tutti i corrispondenti è detto insieme immagine, che non sempre coincide col codominio. Indichiamo l'insieme immagine con Imf e lo possiamo definire nel seguente modo:
$Imf = \{y \in B : y = f(x)\}$, con $x \in A$

Esempio Consideriamo un insieme U contenente tutti gli umani e un insieme M contenente tutte le madri. La relazione definita dalla legge "è figlio di" da U a M è una funzione, poiché associa ad ogni elemento di U uno e un solo elemento di M (ogni umano ha una e una sola madre).
Al contrario, la relazione definita dalla legge "è madre di" da M a U non è una funzione, in quando possono esserci degli elementi di M ai quali corrisponde più di un elemento di U, ovvero madri con più di un figlio.

1.1.1 Iniettiva, suriettiva, biettiva

Una funzione è detta iniettiva se ogni elemento del codominio è immagine di al più un elemento del dominio, quindi:
$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

Una funzione è detta suriettiva se ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio, ovvero:
$\forall y \in B \ \exists x \in A : f(x) = y$

Una funzione è detta biettiva o biunivoca se è sia iniettiva che suriettiva, ovvero ogni elemento di B è immagine di uno e un solo elemento di A:
$\forall y \in B \ \exists_1 x \in A : f(x) = y$

Funzione identità Una funzione è detta "identità" o "funzione identica" se ha questa forma
$f : A \to A$ tale che $f(a) = a \ \ \forall a \in A$
È una funzione che fa corrispondere a ogni elemento l'elemento stesso. Viene indicata con la notazione $f = i_A$, per esempio le identità su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$ sono rispettivamente:
$i_{\mathbb{R}}(x) = x$ (bisettrice di 1° e 3° quadrante)
$i_{\mathbb{N}}(n) = n$.

1.1.2 Composizione

Date due funzioni, $f : A \to B$ e $g : B \to C$, la composizione tra esse si indica con $g \circ f$, che si legge "g composto a f", ed è definita in A con valori in C. Si può scrivere:
$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \ \ \forall a \in A$

Per svolgerla, prima si calcola la funzione f e poi la g.

1.1.3 Funzione inversa e controimmagine

Data una funzione $f : A \to B$ biettiva, l'applicazione inversa di f si indica con $f^{-1} : B \to A$, e fa corrispondere ad ogni elemento di B uno e un solo elemento di A.

Ogni elemento $x = f^{-1}(y)$ è detto "controimmagine" o "immagine inversa", da non confondere con l'insieme controimmagine, indicato dallo stesso simbolo, ovvero $f^{-1}(y)$. Questo non è altro che l'insieme di tutti gli elementi di A la cui immagine è y, ovvero tutte le controimmagini di B:
$f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$.
Allo stesso modo, la controimmagine dell'insieme A è:
$f^{-1}(A) = \{x \in A : f(x) \in B\}$

1.1.4 Caratterizzazione iniettiva, suriettiva e biettiva

Diamo definizioni alternative di funzione iniettiva, suriettiva e biettiva. Prima di tutto occorre sapere che la **cardinalità** di un insieme A, indicata con $|A|, \#A$ o $card(A)$, è il numero di elementi dell'insieme.
Data una funzione $f : A \to B$, allora:

f è iniettiva se $\forall b \in B \quad |f^{-1}(b)| \leq 1$

f è suriettiva se $\forall b \in B \quad |f^{-1}(b)| \geq 1$

f è biettiva se $\forall b \in B \quad |f^{-1}(b)| = 1$ (un insieme con un solo elemento è detto "singoletto").

1.2 Operazioni

Prodotto cartesiano Per parlare di operazioni dobbiamo prima definire il prodotto cartesiano: dati due insiemi A e B, il loro prodotto cartesiano, indicato con $A \times B$, è l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate (a, b), ovvero:
$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$.

Per "coppie ordinate" si intende che $(a, b) \neq (b, a)$: si tratta di due coppie diverse.

Operazione Un'operazione binaria interna a un insieme A è una funzione $*$ definita come $* : A \times A \to A$

Quindi, per esempio, con la coppia ordinata (x, y) l'operazione restituisce l'output $x*y$. Un'operazione binaria riceve come input due elementi e produce come output un singolo elemento. Ripassiamo ora le proprietà delle operazioni, per riuscire ad applicarle successivamente a vettori e matrici.

Operazione associativa Un'operazione "*" definita su un insieme A è "associativa" se $(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3) \ \ \forall a_1, a_2, a_3 \in A$

Si sta sempre parlando in termini astratti: il simbolo "*" non rappresenta il prodotto, ma un'operazione generica. Per concretizzare il discorso, facciamo un esempio: se scegliamo $A = \mathbb{N}$ e $* = +$, possiamo dire che l'operazione è associativa.

Operazione commutativa Un'operazione "*" definita su un insieme A è "commutativa" se $a_1 * a_2 = a_2 * a_1 \ \ \forall a_1, a_2 \in A$.

In $\mathbb{N}$ viene da pensare che l'addizione goda di proprietà commutativa, mentre la sottrazione no. Tuttavia, la sottrazione in quest'insieme non è neanche un'operazione interna, secondo la definizione che abbiamo dato (1.2). Non è vero, infatti, che a una qualsiasi coppia di elementi di $\mathbb{N}$ ne associa un altro: per esempio, alla coppia $(2,7)$, la sottrazione associa -5, che non appartiene a $\mathbb{N}$.

Elemento neutro Sia A un insieme dove è definita l'operazione $*$, chiameremo $e \in A$ l'elemento "neutro" di $*$ in A se vale la condizione:
$e * a = a * e = a \ \ \forall a \in A$

Un esempio è lo 0 nell'addizione o l'1 nella moltiplicazione, entrambe definite per esempio in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
Nella definizione è stata scritta l'operazione una seconda volta, al contrario, in modo da simboleggiare che l'elemento neutro è tale e quale anche nelle operazioni non commutative.

Elemento invertibile e inverso Un elemento $a \in A$ è detto "invertibile" se esiste $a' \in A : \ \ a * a' = a' * a = e$ (elemento neutro). In tal caso diremo che a' è l'elemento inverso di a.

Facciamo un esempio con $A = \mathbb{Z}$:
$* = + \implies e = 0, \quad 3 + a' = a' + 3 = 0 \implies a' = -3$
$* = \cdot \implies e = 1, \quad 3 \cdot a' = a' \cdot 3 = 1 \implies \nexists a' \in \mathbb{Z}$ poiché $a' = \frac{1}{3}$
Gli unici elementi invertibili della moltiplicazione in $\mathbb{Z}$ sono 1 e -1.

Per quanto riguarda la divisione (anche in $\mathbb{R}$), non solo non ha elemento neutro (perché non sarebbe commutativo: $\frac{1}{a} \neq \frac{a}{1}$), e quindi neanche elementi invertibili e inversi, ma, come la sottrazione in $\mathbb{N}$, non rispetta la definizione di "operazione": non c'è output quando dividiamo per 0.

Somma in $\mathbb{R}^2$ Per esercizio definiamo l'operazione di somma in $\mathbb{R}^2$, insieme definito come $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, i cui elementi sono coppie ordinate (a, b).
Definiamo la nostra operazione:
$* = +, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad (c,d) \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$.
Essa gode di proprietà commutativa e associativa.

1.3 Gruppo, anello e campo

Gruppo Un insieme G dove è definita un'operazione * è detto "gruppo" se:

1. * è associativa
2. Esiste l'elemento neutro
3. Ogni elemento è invertibile

Tale insieme si indica con $(G;*)$.

Gruppo abeliano Se vale anche la proprietà commutativa, il gruppo è detto "abeliano".

Anello Un insieme A dove sono definite due operazioni generiche, + e $\cdot$, si dice "anello" se:

1. $(A;+)$ è un Gruppo abeliano
2. $\cdot$ è associativa
3. $\cdot$ è distributiva rispetto a +, ovvero $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \ \ \forall a, b, c \in A$.

Tale insieme si indicherà con $(A, +, \cdot)$
Se vale anche la proprietà commutativa rispetto all'operazione $\cdot$, allora l'anello è detto commutativo.
Esempi di anelli commutativi sono: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.
Se $(A, +, \cdot)$ ha elemento neutro anche per $\cdot$, si chiama **anello con unità**.

Campo Un anello con unità si dice "campo" se ogni suo elemento non nullo è invertibile.

Esempi di campi sono $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ non è un campo, in quanto non tutti gli elementi non nulli sono invertibili per la moltiplicazione.

Proprietà ulteriori degli anelli Dato l'anello $(A, +, \cdot)$ vale che:

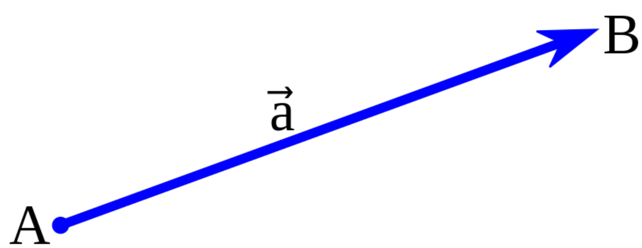
1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \ \ \forall a \in A$
2. $-a \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b) \ \ \forall a, b \in A$

2 Vettori

Un vettore geometrico è una "freccia", ovvero un segmento orientato che collega A, punto iniziale (coda) o punto di applicazione, al punto finale B (punta).

Il segmento orientato così definito ha 3 informazioni:

1. Modulo, che corrisponde alla lunghezza del segmento: è equivalente alla distanza tra i due punti e dunque si calcola come $|B - A|$
2. Direzione, ovvero la retta sulla quale giace il vettore
3. Verso, ovvero uno dei due orientamenti della retta.



La notazione per esprimere il vettore in questo caso sarà $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.
Se vogliamo esprimere un vettore nullo possiamo considerare un punto A come coda e punta, quindi lo esprimiamo: $\overrightarrow{AA} = A - A = \vec{0}$.

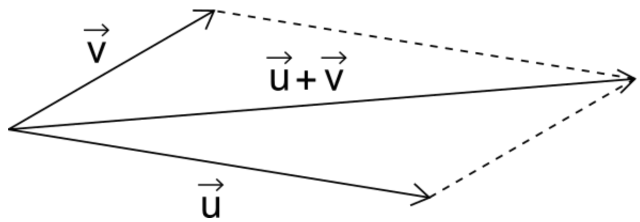
2.1 Vettori equivalenti e vettore libero

Se due vettori hanno stesso modulo, direzione e verso (possono essere diversi solo i punti di applicazione), allora si dicono **equivalenti** o equipollenti. Da un punto di vista matematico, essi fanno tutti parte della stessa classe di equivalenza chiamata **vettore libero**. L'insieme di tutti i vettori liberi si indica con V, il quale risulta essere uno spazio vettoriale (3).

2.2 Operazioni

Somma vettoriale Per calcolare la somma di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possiamo ricorrere al metodo del parallelogramma: la coda di $\vec{v}$ si mette sulla punta di $\vec{u}$ e si traccia il vettore risultato, che va dalla coda di $\vec{u}$ alla punta di $\vec{v}$.

In alternativa, possiamo rappresentare la somma vettoriale come un parallelogramma, considerando le due rette parallele ai vettori:



Quest'operazione è commutativa e associativa: l'elemento neutro è il vettore nullo. Ogni vettore $\vec{v}$ ha un opposto $-\vec{v}$ con stesso modulo e direzione ma verso opposto: per le caratteristiche appena elencate, l'insieme V dei vettori liberi è un Gruppo abeliano rispetto alla somma.

Prodotto esterno Sia $a \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \in V$, definiamo l'operazione di prodotto esterno, ovvero un'operazione $\mathbb{R} \times V \to V, \quad (a, \vec{v}) \to a\vec{v}$.
Il vettore risultato ha :

- Modulo pari a $|a| \cdot$ modulo di $\vec{v}$
- Direzione pari a quella di $\vec{v}$
- Verso:

$$\begin{cases} \text{quello di } \vec{v} & \text{se } a > 0 \\ \text{opposto a quello di } \vec{v} & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Se $a = 0$ e $\vec{v} \neq 0 \implies a \cdot \vec{v} = \vec{0}$, ovvero il vettore nullo.

Parallelismo tra vettori Due vettori sono paralleli se sono proporzionali rispetto a un prodotto esterno. Per capire meglio:
$\vec{v} \parallel \vec{w} \iff \exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \vec{v} = k\vec{w}$, con $\vec{v}, \vec{w}$ non nulli.

Per esempio: $\vec{v} \parallel \vec{w}, \quad |\vec{v}| = 5, \quad |\vec{w}| = 2 \implies \exists \frac{5}{2} \in \mathbb{R} : \frac{5}{2} \cdot \vec{w} = \vec{v}$.

Il numero k si ottiene quindi come divisione tra i due moduli.
Se due vettori sono proporzionali ($\vec{v} = k\vec{w}$), allora sono anche paralleli.

Prodotto scalare Dati $\vec{v}, \vec{w} \in V$ e α angolo tra i due vettori, il prodotto scalare ($\cdot \ : V \times V \to \mathbb{R}$) è un'operazione che dà come risultato un numero scalare, definito secondo la legge:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\begin{cases}0 & \text{se } \vec{v}=0,\ \ \vec{w}=0 \text{ o } \alpha=\frac{\pi}{2}\\ |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\alpha & \text{negli altri casi}\end{cases}$$

Quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, i due vettori sono tra loro perpendicolari, ortogonali o normali (sinonimi), e il prodotto fa 0 in quanto si sta moltiplicando una quantità per $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

Le notazioni per il prodotto scalare possono essere $\cdot$ o $\times$, noi useremo la prima.

Per il prodotto scalare valgono le seguenti proprietà:

- commutativa
- $(a,\vec{v})\cdot\vec{w} = a(\vec{v}\cdot\vec{w})$, con $a\in\mathbb{R}$, $\ \vec{v},\vec{w}\in V$
- $\vec{v}\cdot(\vec{w}+\vec{z}) = \vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{z}$, distributiva.

Dato un vettore $\vec{v}$, possiamo definire il suo modulo $|v|$ come la radice quadrata del prodotto scalare di $\vec{v}$ con sé stesso:
$|v| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

Prodotto vettoriale Dati $\vec{v},\vec{w}\in V$ e $\alpha=$ angolo tra essi, il prodotto vettoriale (che si indica con $\wedge$ o $\times$, noi useremo il primo simbolo) è un vettore che ha:

- Modulo: $|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\sin\alpha$
- Direzione ortogonale al piano individuato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$
- Verso entrante o uscente, ci sono diversi metodi per capirlo (vite destrorsa, regola del ”ciao”, pollice e palmo, oppure, il più comodo, usando le tre dita)

Il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa, ma di quella anticommutaitva: invertendo l'ordine degli addendi, cambierà il verso del vettore prodotto. Possiamo inoltre affermare che:

1. $\vec{v}\parallel\vec{w} \iff \vec{v}\wedge\vec{w}=0$, poiché l'angolo tra i due vettori sarà 0 o π, e $\sin(0)=\sin(\pi)=0$

2. $(a\vec{v}) \wedge \vec{w} = a(\vec{v} \wedge \vec{w})$, con $a \in \mathbb{R}$: proprietà distributiva del prodotto esterno rispetto a quello vettoriale.
3. $\vec{v} \wedge (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{z}$: distributiva rispetto alla somma

Prodotto misto Dati $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in V$, il prodotto misto tra essi è pari a $\vec{v} \cdot \vec{w} \wedge \vec{u}$. Viene usato per calcolare i volumi, in quanto è pari al valore assoluto del volume del parallelepipedo tra i 3 vettori.
Sarà utile per stabilire la complanarità, infatti tre vettori sono complanari (giacciono sullo stesso piano) se il loro prodotto misto è 0 (ovvero formano un parallelepipedo con volume nullo).

Versore Se il modulo di un vettore è pari a 1, allora il vettore sarà chiamato versore.

Possiamo usare i versori per assegnare una direzione e un verso a una quantità: ipotizziamo per esempio di usare un versore $\hat{r}$ per applicare una direzione e verso all'equazione $F = ma$, ovvero $\vec{F} = ma\hat{r}$: la forza avrà ora stessa direzione e verso di $\hat{r}$.

2.3 Proiezione ortogonale

Siano $\vec{v}$ un vettore, r una retta e $\hat{r}$ un versore orientato sulla retta. La proiezione di $\vec{v}$ su r ha modulo pari al prodotto scalare tra $\vec{v}$ e $\hat{r}$, e ha direzione e verso di $\hat{r}$, quindi è pari a $(\vec{v} \cdot \hat{r})\hat{r}$.

Scomposizione di vettori Siano $\vec{v}, \vec{u}$ due vettori qualsiasi. Essi potranno essere scomposti come somma di altri vettori, infatti:
$\exists \vec{u}_1, \vec{u}_2 : \vec{u}_1 \parallel \vec{v}$ e $\vec{u}_2 \perp \vec{v}$, con $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

2.4 Sistema di riferimento cartesiano

Si narra che il filosofo René Descartes, osservando il soffitto di casa sua, posò l'attenzione su una mosca che volava. Egli si accorse che poteva descrivere in modo inequivocabile la posizione della mosca sul soffitto servendosi di una coppia di coordinate che esprimono la distanza dai due lati del soffitto (assi cartesiani).

Nacque così il **sistema di riferimento cartesiano**, un sistema rispetto al quale viene misurata la posizione di un punto P tramite una corrispondenza **biunivoca** tra P e una terna ordinata di numeri (o coppia, nel caso di un sistema cartesiano ortogonale in 2 dimensioni), dette coordinate cartesiane:

$P \longleftrightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Questo significa che a P corrisponde una e una sola terna di numeri, e a una terna di numeri corrisponde uno e un solo P.

I versori delle rette x,y e z saranno per noi rispettivamente $\hat{i}, \hat{j}$ e $\hat{k}$ (in conformità col libro Paxia), dove $\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$.

3 Spazi vettoriali

Definizione Sia $\mathbb{K}$ un campo e V un insieme su cui siano definite due operazioni:

1. $+ : V \times V \to V$; somma.
2. $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$; prodotto esterno.

Rispetto alle quali ($\forall a, b \in \mathbb{K};\ \forall v, w \in V$):

1. $(V, +)$ risulti un Gruppo abeliano, ovvero un insieme le cui operazioni:
   - Sono associative
   - Hanno elemento neutro (contenuto nell'insieme)
   - Hanno ogni elemento invertibile (nell'insieme)
   - Godono di proprietà commutativa
2. $(ab)v = a(bv)$, proprietà associativa del prodotto di scalari che moltiplica per un vettore
3. $(a+b)\cdot v = a\cdot v + b\cdot v$, proprietà distributiva del prodotto tra un vettore e una somma di scalari
4. $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$, proprietà distributiva del prodotto tra uno scalare e una somma di vettori
5. $1 \cdot v = v$.

Allora V si dice spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, o $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, i suoi elementi si dicono vettori e quelli di $\mathbb{K}$ scalari. Esempi di spazi vettoriali sono l'insieme di vettori liberi V, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}[x]_n$, $\mathbb{R}^{m,n}$.

3.1 N-upla

Una ennupla (scritto anche n-upla) è un insieme ordinato di n oggetti.
È il generico elemento di $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ ripetuto n volte, ovvero $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, e in tal caso sarà un $\mathbb{R}$- spazio vettoriale.

In generale, se $\mathbb{K}$ è un campo, $\mathbb{K}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\}$

3.2 Combinazione lineare

Una combinazione lineare (c.l.) dei vettori $v_1, \dots, v_r \in V$ è un vettore che si ottiene come $a_1 v_1 + \dots + a_r v_r$, con $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K}$.

3.3 Base canonica

Dato uno spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$, si dice sua base canonica l'insieme $\mathscr{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$, dove:
$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \;\; e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \;\; e_n = (0, \dots, 0, 1).$

Per esempio, la base canonica di $\mathbb{R}^2$ è $\mathscr{E} = \{(1,0),(0,1)\}$; la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $\mathscr{E} = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$

Si tratta di un concetto importante: ogni vettore di $\mathbb{K}^n$ si può esprimere in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base canonica, ovvero:
$\forall v \in \mathbb{K}^n \;\; \exists_1 (a_1, ..., a_n) : v = a_1 e_1 + ... + a_n e_n.$

Per esempio, $v \in \mathbb{R}^3, \quad v = (3;5;7) = 3e_1 + 5e_2 + 7e_3$

Altri spazi vettoriali per i quali possiamo considerare basi canoniche sono le matrici $R^{m,n}$ e i polinomi $\mathbb{R}(x)$ e $\mathbb{R}_n(x)$, cioè di grado massimo n.

In generale, ogni oggetto di uno spazio si può esprimere come combinazione lineare dei vettori della sua **base**.

3.4 Matrici

Dato un campo $\mathbb{K}$, l'insieme $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ è detto matrice di m righe e n colonne. Le matrici vengono espresse in forma di tabella:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dove ogni elemento $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

In alternativa, possono essere indicate con notazione compatta: $A = (a_{ij})$ con $1 \leq i \leq m$ indice di riga e $1 \leq j \leq n$ indice di colonna.

Un ulteriore modo è

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_m \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots C_n \end{pmatrix}$$

Dove ogni riga $R_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, è una n-upla
e ogni colonna $C_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})$, è una m-upla.

Se $m = n$, la matrice si dirà **quadrata** e di ordine n.

Due matrici con stesso numero di righe e di colonne possono essere sommate: la somma tra matrici restituisce, intuitivamente, una matrice con lo stesso numero di righe e colonne, dove ogni elemento ij è la somma degli elementi ij delle matrici addendi.
Possiamo anche considerare il prodotto esterno: moltiplicando una matrice per uno scalare $k \in \mathbb{K}$, ogni elemento della matrice verrà moltiplicato per k.

$\mathbb{K}^{m,n}$ con queste operazioni è un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale.

Base standard per matrici Consideriamo le matrici:

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \dots e_{1n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \dots e_{m1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \dots e_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

L'insieme $\{e_{11}, \dots, e_{mn}\}$ si chiama "base standard" di $\mathbb{K}^{m,n}$, ovvero un insieme che può generare ogni matrice di $\mathbb{K}^{m,n}$.

3.5 Insiemi di polinomi

L'insieme dei polinomi in x con coefficienti in $\mathbb{K}$ si indica con $\mathbb{K}[x]$, ovvero:
$\mathbb{K}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n : \ n > 0, \ \forall a_i \in \mathbb{K}\}$.

Questo insieme è un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale rispetto alle operazioni di:

- somma tra polinomi
- prodotto di uno scalare per un polinomio

Definiamo $\mathbb{R}[x]_n$ come l'insieme di polinomi di grado massimo n, con coefficienti in $\mathbb{R}$. La base standard di $\mathbb{R}[x]_n$ è $\{1, x, x^2, \dots x^n\}$

3.6 Sottospazio

Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale e $U \subseteq V$. Si dice che U è sottospazio di V (si indica con $U \leq V$) se esso risulta un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni definite in V.
Es: $\mathbb{R}(x)_n \leq \mathbb{R}(x) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

3.6.1 Teorema di caratterizzazione di sottospazi

Dato $U \subseteq V$:
$U \leq V \iff U$ è chiuso rispetto a somma e prodotto esterno.
N.B. Per "chiuso" rispetto a un'operazione si intende che, dati dei numeri input, il numero output sarà interno a U, esempi:
$\forall u_1, u_2 \in U \implies u_1 + u_2 \in U$ per la somma
$\forall k \in \mathbb{K}, \ \forall u \in U \implies k \cdot u \in U$ per il prodotto esterno
$\forall u_1, u_2 \in U \implies u_1 \cdot u_2 \in U$ per il prodotto.

Dimostrazione verso destra: dato che $U \leq V$, allora U è uno spazio vettoriale con le medesime operazioni di V. Per definizione di "operazione" (1.2) otteniamo la tesi, dato che i numeri input saranno nello stesso insieme dei numeri output.

Dimostrazione verso sinistra: prima di tutto verifichiamo che U sia un gruppo abeliano rispetto alla somma:

- Valgono le proprietà associativa e commutativa? Possiamo considerarle valide a fortiori perché $U \subseteq V$ e queste proprietà valgono in V.
- Esiste l'elemento neutro? Esprimiamo 0_V come $0 \cdot u$, con $u \in U$.
  Dato che per ipotesi U è chiuso rispetto al prodotto esterno, $0_V \in U$.
- Ogni elemento è invertibile? Sì, perché:
  $\exists -1 \in \mathbb{K}, \ u \in U \implies -1 \cdot u = -u \in U$ per la seconda ipotesi.

Per quanto riguarda le altre 4 proprietà dello spazio vettoriale, valgono in U perché valgono in V, Q.E.D.

Proposizione Dato $V, \mathbb{K}$–spazio vettoriale, possiamo sempre affermare che $\{0_V\} \leq V$ e $V \leq V$.

Ne deduciamo che se $0_V \notin U \implies U$ non è sottospazio di V.
$\emptyset$ non può essere un sottospazio.

3.6.2 Equazioni cartesiane

I sottospazi di $\mathbb{K}$ sono descrivibili da equazioni cartesiane, ovvero lineari (solo prodotti e somme) e omogenee (termine noto nullo).

$U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : f_1(x_1, \dots, x_n) = 0; \dots ; f_n(x_1, \dots, x_n) = 0\}$
$U \leq \mathbb{K}^n \iff f_i(x_1, \dots, x_n)$ sono lineari e omogenee $\forall i \in [1, \dots, n]$.

Esempi:
$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + t - z = 0\}$
$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 10z = 0 \land x - y = 0\}$

3.7 Matrice diagonale

$$\text{La matrice } A \in \mathbb{K}^{n,n} \text{ è diagonale se } a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{quando } i \neq j \\ \neq 0 & \text{quando } i = j \end{cases}$$

Ovvero se ogni suo elemento è nullo tranne quelli posti sulla diagonale, per esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} 549 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

3.8 Prodotto righe per colonne

Il prodotto tra matrici è detto "righe per colonne".
Date le matrici $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{K}^{n,m}$, esse si possono moltiplicare solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B: il risultato è una matrice $AB \in \mathbb{K}^{m,n}$, ovvero con tante righe quante sono quelle di A e tante colonne quante sono quelle di B. In forma compatta:
$AB = (c_{ij}) = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{in}b_{nj}$, ovvero ogni elemento a_{ij} è la somma dei prodotti tra gli elementi della i−esima riga di A e la j−esima colonna di B. Si capisce molto meglio con un esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 2+0-2 & -6+0+0 \\ 0+6-10 & 0+0+0 \\ -1+0-4 & 3+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -4 & 0 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Per il prodotto righe per colonne non vale la proprietà commutativa, e inoltre non è neanche una vera e propria operazione interna, dato che l'elemento in output non appartiene necessariamente all'insieme di quelli in input (nel nostro esempio in input avevamo una matrice $3x3$ e una $3x2$, mentre in output una $3x2$)

3.9 Matrice trasposta

La trasposta di una matrice A è la matrice che si ottiene scambiando le righe con le colonne. La indicheremo con ${}^TA$, ma in altri testi si può anche trovare ${}^tA$, A^T o A^t. Vale sempre che:
$A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}, \quad {}^TA = (a_{ji}) \in \mathbb{K}^{n,m}$. Per esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad {}^TA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $A \in \mathbb{R}^{3,4}$, mentre ${}^TA \in \mathbb{R}^{4,3}$.

Proprietà della matrice trasposta:

- ${}^T({}^TA) = A$
- ${}^T(A+B) = {}^TA + {}^TB$
- ${}^T(AB) = {}^TB \cdot {}^TA$

Se ${}^TA = A$, chiameremo A **simmetrica**.
Se ${}^TA = -A$, chiameremo A **antisimmetrica**.

3.10 Determinante

Il determinante $|A|$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (esiste solo per le matrici quadrate) è un numero scalare che descrive alcune proprietà algebriche e geometriche della matrice. Vediamo come si calcola:

- Il determinante di una matrice $1x1$ è l'elemento stesso.
- Il determinante di una matrice $2x2$ è la differenza tra i prodotti della diagonale che "scende", detta **diagonale principale** e di quella che "sale", detta **diagonale secondaria**, es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 \cdot 3) - (1 \cdot 2) = -2$$

- Il determinante di una matrice $3x3$ si può trovare con il metodo di Sarrus (esclusivo alle matrici 3x3), o con il Teorema di Laplace (valido per matrici di ogni dimensione), il quale conviene quando ci accorgiamo di una riga o colonna con molti zeri. Si tratta di un metodo che sfrutta il concetto di complemento algebrico.

3.10.1 Complemento algebrico

Data una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, si dice complemento algebrico di posto i,j, in simboli A_{ij}, il prodotto di $(-1)^{i+j}$ per il determinante della matrice ottenuta da A sopprimendo l'$i-$esima riga e la $j-$esima colonna. Es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{11} = (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1[1 \cdot 0 - (-1 \cdot 5)] = 1(0+5) = 5$$

3.10.2 Teorema di Laplace I

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$. La somma dei prodotti tra gli elementi di una riga (o colonna) e i rispettivi complementi algebrici è il determinante di A.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \forall i = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

3.10.3 Teorema di Laplace II

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$. La somma dei prodotti tra gli elementi di una riga (o colonna) e i complementi algebrici degli elementi corrispondenti di un'altra riga (o colonna) è uguale a 0.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{hj} = 0 \quad \forall i \neq h \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0 \quad \forall j \neq k$$

Proprietà dei determinanti

1. $|A| = |{}^{T}\!A|$
2. Se è presente una colonna o riga nulla, $|A| = 0$.
3. Se si scambia la posizione di due righe (o colonne), il determinante cambia segno.
4. Se due righe (o due colonne) sono uguali, $|A| = 0$.
5. Se una riga si può esprimere come somma di due righe, allora il determinante è la somma dei determinanti delle 2 matrici che possiamo ottenere:

$$|A| = \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i' + R_i'' \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i' \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i'' \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}$$

6. Stessa cosa, ma per le colonne.

7.

$$k \in \mathbb{K} \implies \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ kR_i \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}$$

8. se A ha due righe o colonne proporzionali, $|A| = 0$.

9. Possiamo sostituire una riga con essa sommata alla combinazione lineare di un'altra:

$$\begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j R_j \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}$$

   stessa cosa per le colonne.

10. Se una riga è combinazione lineare delle altre, $|A| = 0$.

$$R_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j R_j$$

   stessa cosa per le colonne.

11. Teorema di Binet: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

3.11 Minore

Data una matrice $A = (a_{ij})$ di tipo $m \times n$, si dice "minore" di ordine k estratto da A il determinante di una matrice $k \times k$ ottenuta considerando gli elementi di k righe e k colonne di A.

In alcuni libri il minore è definito come la matrice in questione, non come il suo determinante.

3.12 Rango

L'argomento più importante sulle matrici. Data $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, il rango di A, in simboli $\rho(A)$, è il massimo ordine di un minore non nullo.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 5 \\ -6 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ci accorgiamo che il minore 4×4 è nullo perché $R_3 = -2R_1$ (proprietà 8).
A questo punto cerchiamo un minore 3×3 non nullo: se esiste, $\rho(A) = 3$.
Procedendo a tentativi, scegliamo arbitrariamente di estrarre una matrice 3×3; se il suo determinante è nullo ne estrarremo un'altra (si può fare 16 volte), altrimenti abbiamo trovato il rango.
Se tutti i minori 3×3 sono nulli, si considerano quelli 2×2. Capiamo che il processo diventa troppo lungo: vedremo a breve dei modi per trovare velocemente il rango.

Dalla definizione di rango si capisce che in una matrice rettangolare il massimo rango è pari al numero minore tra quello delle righe e quello delle colonne (es: in una 3×4 il rango max è 3).

3.12.1 Riduzione ed elemento speciale

Per righe Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice ridotta per righe se in ogni riga non nulla esiste un elemento $a_{hk} \neq 0$ al di sotto del quale sono presenti solo 0, ovvero $a_{jk} = 0 \quad \forall j > h$.

Per colonne Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice ridotta per colonne se in ogni colonna non nulla esiste un elemento $a_{kh} \neq 0$ a destra del quale sono presenti solo 0, ovvero $a_{kj} = 0 \quad \forall j > h$

Elemento speciale Tale elemento è chiamato elemento speciale o **pivot**: il numero di elementi speciali in una matrice è il rango.

3.12.2 Operazioni elementari

Le operazioni elementari su righe servono a ridurre una matrice senza alterarne il rango. Esse sono:

- Scambio di righe
- Moltiplicazione di una riga per uno scalare
- Sostituzione di una riga con la somma tra quella riga e una combinazione lineare delle altre:

$$R_i \longrightarrow R_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j R_j$$

Metodo di riduzione di Gauss Molto utile per la pratica. L'obiettivo è determinare il rango contando il numero di elementi speciali.

Prendiamo la matrice e tracciamo un segmento spezzato tra quegli elementi che vogliamo trasformare in "speciali" e quelli che vogliamo trasformare in 0. Tramite le operazioni di riga (3.12.2) trasformiamo gli elementi sotto il segmento in 0, a partire da quelli più in alto. Il risultato finale è qualcosa di simile:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Se osserviamo il 2 e il 3 in basso, notiamo che sono entrambi possibili elementi speciali. In questo caso dobbiamo sceglierne arbitrariamente uno, in quanto sono sulla stessa riga (non possiamo contarli entrambi).

Questa matrice è dunque di rango 3 in quanto ha 3 elementi speciali.

3.13 Matrice identica

Indichiamo con I_n la matrice identica (o matrice identità) di ordine n, ovvero una matrice quadrata che ha tutti 1 sulla diagonale principale e tutti 0 altrove:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

È l'elemento neutro del prodotto righe per colonne:
$A \in \mathbb{R}^{n,n} \implies A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ (con l'elemento neutro vale sempre la commutativa).

3.14 Matrice inversa

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ è invertibile se esiste $B \in \mathbb{K}^{m,n}$ tale che $A \cdot B = B \cdot A = I$, e in tal caso B è l'inversa di A, quindi A^{-1}.
La matrice inversa si calcola col Teorema matrice inversa

3.15 Matrice aggiunta

Data $A \in K^{m,n}$, la matrice aggiunta (detta anche cofattore) di A è la matrice i cui elementi sono i complementi algebrici corrispondenti agli elementi di A. Si indica con A_a o Agg(A). Grazie a questa possiamo calcolare l'inversa, col teorema successivo:

3.16 Teorema matrice inversa

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è invertibile $\iff |A| \neq 0$.
In tal caso, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot {}^T\!A_a$

Dimostrazione verso destra: dato che A è invertibile esiste A^{-1} tale che $A \cdot A^{-1} = I \implies |A \cdot A^{-1}| = |I|$.
Per il teorema di Binet $\implies |A| \cdot |A^{-1}| = |I| \implies |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \neq 0$, quindi per la legge di annullamento del prodotto $|A| \neq 0$, c.v.d.

Dimostrazione verso sinistra: poniamo $A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^T\!A_a$ e proviamo dunque che $\frac{1}{|A|} {}^T\!A_a \cdot A = I$.
Svolgendo il calcolo:

$$\frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

P.S. gli indici nella matrice aggiunta sono invertiti dato che è trasposta.

$$\text{Abbiamo } \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

dove ogni $c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn}$, quindi:

$$c_{ij} = \begin{cases} |A| & \text{se } i = j \text{, per Laplace I} \\ 0 & \text{se } i \neq j \text{, per Laplace II} \end{cases}$$

Quindi ci ritroviamo con:

$$\frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I, \text{ C.V.D.}$$

3.17 Sistemi lineari

Un sistema lineare $m \times n$ è un insieme di m equazioni lineari in n incognite a coefficienti in campo $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{ij} \in \mathbb{K}$ sono detti coefficienti, $b_i \in \mathbb{K}$ sono i termini noti e $x_1 \ldots x_n$ le incognite.

Dato un sistema lineare, possiamo considerare i seguenti elementi (e le loro combinazioni) come matrici:

- Matrice dei coefficienti (detta incompleta), $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Matrice (vettore colonna) dei termini noti, $B \in \mathbb{K}^{m,1}$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Matrice (vettore colonna) delle incognite, $X \in \mathbb{K}^{n,1}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Matrice completa (o orlata) $A|B \in \mathbb{K}^{m,n+1}$

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

  Sapendo ciò, possiamo esprimere un sistema lineare in a notazione compatta: $A \cdot X = B$.

3.17.1 Soluzioni di un sistema

Dato un sistema $m \times n : A \cdot X = B$, si dice che una n–upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ è soluzione del sistema se, detta α la seguente colonna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

si ha che $A\alpha = B$, quindi sostituendo a ogni incognita il corrispondente α, le equazioni risultano soddisfatte.

Sistemi possibili e impossibili Un sistema lineare può essere:

- Impossibile (o incompatibile)
- Possibile (o compatibile), a sua volta:
  - Indeterminato, se ammette più di una soluzione
  - Determinato, se ha un'unica soluzione.

Due sistemi sono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni:
$A \cdot X = B; \quad A' \cdot X = B' \implies A$ e A' sono equivalenti.

3.17.2 Incognite libere

In un sistema a n incognite $x_1 \dots x_n$, le r incognite $x_{i1} \dots x_{ir}$ si dicono libere se: $\forall \alpha_{i1} \dots \alpha_{ir} \in \mathbb{K} \ \exists_1 n$–upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ soluzione del sistema.

Succede quindi che, una volta scelte le r incognite libere arbitrariamente, le restanti $n - r$ sono già determinate.
Per esempio:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x + 2y \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 1, \ a_{12} = 1 \implies (1, 1, 3, 3)$ soluzione del sistema $\implies$ esistono $4 - 2 = 2$ incognite libere, ovvero x e y.

Vediamo ora un tris di teoremi-strumenti, utili per risolvere i sistemi lineari.

3.17.3 Rouché-Capelli I

Un sistema lineare $A \cdot X = B$ è possibile se e solo se $\rho(A) = \rho(A|B)$.

Lo dimostriamo col teorema di Kronecker, quindi più avanti: 4.10

3.17.4 Rouché-Capelli II

Se $A \cdot X = B$ con n incognite è tale che $\rho(A) = \rho(A|B) = r$, allora il sistema ha $n - r$ incognite libere e ammette ∞^{n-r} soluzioni.
In questo contesto $\infty^0 = 1$, in quanto ci ritroviamo con 0 incognite libere: un sistema determinato e quindi una soluzione.

3.17.5 Teorema di Cramer

Dato un sistema quadrato (tante incognite quante sono le equazioni) $n \times n$: $A \cdot X = B$, vale che:
Il sistema è determinato $\iff |A| \neq 0$.
Nel caso in cui sia determinato, la soluzione è:

$$(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{|B_1|}{|A|}, \dots, \frac{|B_n|}{|A|} \right)$$

dove B_i è la matrice che otteniamo sostituendo alla i–esima colonna della matrice A la colonna dei termini noti.

Dimostrazione verso sinistra: 3.17.7

3.17.6 Sistemi omogenei

Un sistema dove i termini noti sono tutti nulli è detto sistema omogeneo. In tal caso $\rho(A) = \rho(A|B)$, quindi, per Rouché-Capelli I, sono possibili. Ammettono sempre sicuramente la soluzione "banale" $(0, \dots, 0)$, ma vanno studiati per individuare eventuali altre soluzioni.

In particolare, per Rouché-Capelli II, se $r = n$ la soluzione banale è l'unica, altrimenti ci sono ∞^{n-r} soluzioni.

Corollario Un sistema lineare omogeneo $AX = 0$ ammette soluzioni diverse da quella banale se e solo se il rango della matrice incompleta è minore del numero di incognite.

Proposizione Dato un sistema lineare omogeneo $A \cdot X = \underline{0}$ dove

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$

3.17.7 Dimostrazione verso sinistra del teorema di Cramer

Ipotesi (3.17.5): sistema lineare quadrato $n \times n$, $AX = B$ con $|A| \neq 0$
Tesi: $A \cdot X = B$ è determinato.

Dimostrazione: dato che $|A| \neq 0$, sappiamo che esiste A^{-1}.
A entrambi i membri dell'equazione $AX = B$ moltiplichiamo A^{-1}, ottenendo:
$A^{-1}AX = BA^{-1}$, ossia:
$IX = BA^{-1}$
$X = BA^{-1} \implies BA^{-1}$ è la soluzione del sistema.

Dimostriamo per assurdo che è l'unica.
Se $\exists X' : AX' = B$, avremmo che:
$A^{-1}AX' = BA^{-1} \implies IX' = BA^{-1} \implies X' = BA^{-1}$

Quindi $X' = X$, c.v.d.

Ora che sappiamo come funzionano le matrici e i sistemi lineari, possiamo tornare a parlare dei sottospazi unendo le nuove conoscenze.

3.18 L'intersezione tra sottospazi è un sottospazio

$U, W \leq V \implies U \cap W \leq V$.
Dimostrazione: usiamo il Teorema di caratterizzazione di sottospazi, dobbiamo quindi dimostrare che:

1. $v_1, v_2 \in U \cap W \implies v_1 + v_2 \in U \cap W$
   dim:
   $v_1, v_2 \in U \implies v_1 + v_2 \in U$
   $v_1, v_2 \in W \implies v_1 + v_2 \in W$
   Quindi $v_1 + v_2 \in U$ e $v_1 + v_2 \in W \implies v_1 + v_2 \in U \cap W$, c.v.d.

2. $k \in \mathbb{K},\ v \in U \cap W \implies kv \in U \cap W$
   dim:
   $v \in U \implies kv \in U$
   $v \in W \implies kv \in W$
   Quindi $kv \in U$ e $kv \in W \implies kv \in U \cap W$, c.v.d.

3.19 Teorema sull'unione di sottospazi

L'unione tra due sottospazi U e W è un sottospazio se e solo se almeno uno contiene l'altro:
$U \cup W \leq V \iff U \subseteq W \vee W \subseteq U$

Dimostrazione verso sinistra immediata, in quanto:
se $U \subseteq W \implies U \cup W = W$, che per ipotesi è sottospazio di V.
se $W \subseteq U \implies U \cup W = U$, che per ipotesi è sottospazio di V.

Dimostrazione verso destra: per assurdo, $U \nsubseteq W \wedge W \nsubseteq U$:
$\exists u \in U : u \notin W$ e $\exists w \in W : w \notin U$

Consideriamo la somma di questi due elementi: $u + w \in U \cup W$, essendo $U \cup W$ un sottospazio (è chiuso rispetto alla somma).
La somma $u + w$ appartiene dunque o a U o a W, analizziamo entrambi i casi:

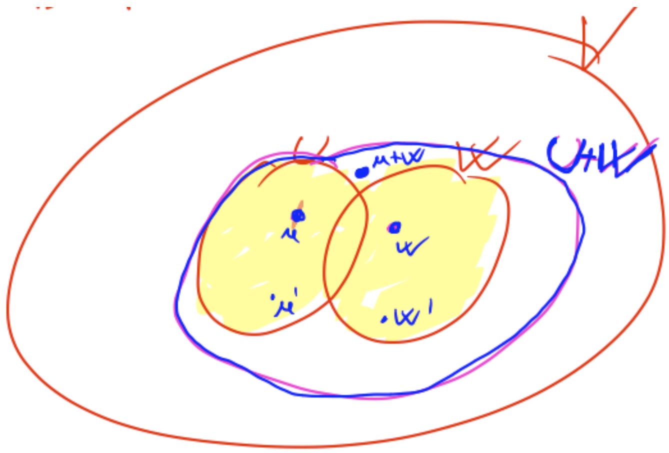
- $u + w \in U \implies w = u + w - u$: apparterrebbe a U in quanto somma algebrica di elementi di U. Questo è assurdo in quanto avevamo detto che $w \notin U$
- $u + w \in W \implies u = u + w - w$: apparterrebbe a W in quanto somma algebrica di elementi di a W. Anche questo è assurdo in quanto avevamo detto che $w \notin U$

Questi assurdi originano dall'aver supposto che $U \nsubseteq W \wedge W \nsubseteq U$, c.v.d.

3.20 Sottospazio somma

Dati $U, W \leq V$, si dice "somma" (indicato con $U + W$) il sottospazio tale che:
$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$.

Si può dimostrare che la somma è il più piccolo sottospazio di V contenente $U \cup W$. Vediamo graficamente per capire:



3.20.1 Somma diretta

Se $v \in U + W$, allora vuol dire che $\exists u \in U, \exists w \in W : v = u + w$.
Tuttavia potrebbe accadere anche che v sia esprimibile come somma di altri elementi, per esempio $\exists u' \in U,\ \exists w' \in W : v = u' + w'$.

Questo vuol dire che gli elementi nella somma non sono sempre univoci. Quando lo sono, $U + W$ viene detta **somma diretta**, e si indica con $U \oplus W$.

$U + W = U \oplus W \iff$ ogni elemento di $U + W$ si esprime come somma tra uno e un solo elemento di U e uno e un solo elemento di W.

3.20.2 Caratterizzazione somma diretta

Siano $U, W \leq V$. Allora:
$U + W = U \oplus W \iff U \cap W = \{0_V\}$

Dimostrazione verso destra: consideriamo $x \in U \cap W$. Possiamo esprimerlo come:
$x + 0_V$, considerando $x \in U$ e $0_V \in W$.
$0 + x$, considerando $0 \in U$ e $x \in W$.

In entrambi i casi $x \in U + W$. Tuttavia per ipotesi $U + W$ è una somma diretta, quindi non è possibile che un suo elemento sia esprimibile in modo non univoco $\implies x = 0_V$.

Dimostrazione verso sinistra: affermando per assurdo che la somma non sia diretta, avremo che:
$\exists u, u' \in U; \quad \exists w, w' \in W : u + w = u' + w'$, con $u \neq u'; \quad w \neq w'$.
Spostando i termini dell'equazione otteniamo $u - u' = w' - w$.
Il membro a sinistra appartiene a U ed è diverso da 0, il membro a destra appartiene a W ed è diverso da 0. Dato che sono uguali, sono un unico numero diverso da 0 che appartiene a $U \cap W$, ma per ipotesi sappiamo che $U \cap W$ contiene solo lo 0: siamo nell'assurdo nato dal fatto di aver supposto che la somma non fosse diretta, c.v.d.

Per la pratica Nella pratica viene utilizzato proprio questo teorema per stabilire se una somma è diretta o meno. In particolare, per verificare se $U \cap W = \{0_V\}$, ci si deve ricordare che, per la formula di Grassmann:
$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$. Se la dimensione è 0, allora $U \cap W = \{0_V\}$ e quindi la somma è diretta.

Enunciato nel caso di più sottospazi Non lo dimostriamo
$V_1 + \cdots + V_n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ se e solo se:

- 1) $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$
- 2) $V_1 \oplus V_2 + V_3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$
- $\vdots$
- n-1) $V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1} + V_n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1} \oplus V_n$

3.21 Sottospazio generato e generatori

Dati $v_1,\dots,v_r \in V$, si dice sottospazio generato dai vettori $v_1,\dots,v_r$ (detti **generatori**) l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1,\dots,v_r$.

In simboli, quest'insieme si indica con $\mathscr{L}(v_1,\dots,v_r)$, oppure $< v_1,\dots,v_r >$, o anche con Span$< v_1,\dots,v_r >$. Chiameremo $v_1,\dots,v_r$ un insieme (o sistema) di generatori, e lo spazio V **finitamente generato** (f.g.).
Esempi:
$\mathbb{K}^n$ è f.g., $K^{m,n}$ è f.g., $\mathbb{R}[x]_n$ è f.g., $\mathbb{R}[x]$ non lo è.

$\mathbb{R}^3$ è un sottospazio generato dai vettori $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, che compongono la sua base standard canonica.
Questi tre vettori sono quindi generatori di $\mathbb{R}^3$.

In generale, qualunque vettore di un sottospazio generato si esprime come combinazione lineare dei suoi generatori.

3.22 Vettori linearmente indipendenti

La definizione più importante dell'intero corso.

Un insieme di vettori $v_1,\dots,v_r$ si dice "libero", o **insieme di vettori linearmente indipendenti** se una loro combinazione è nulla solo per coefficienti tutti nulli, ovvero:
$a_1v_1 + \cdots + a_rv_r = 0 \implies a_1 = \cdots = a_r = 0$.

Modi in cui si può descrivere un sottospazio

1. Tramite le sue equazioni cartesiane, es: $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+z = 0\}$
2. Tramite il suo vettore generico: $(x,\ \ x+z,\ \ z)$. Si estrapola dall'equazione cartesiana e corrisponde alle equazioni parametriche
3. Mediante i suoi generatori: $V = \mathscr{L}((1,2,1);(0,1,1);(1,3,2))$.

4 Basi

Definizione Un insieme di vettori $v_1 \dots v_r \in V$ si dice base di V se qualsiasi vettore di V si esprime in modo unico come combinazione lineare dei vettori $v_1 \dots v_r$, ovvero $\forall v \in V\ \ \exists_{no} a_1, \dots, a_r$ **unici** tali che $v = a_1 v_1 + \dots + a_r v_r$.

Per esempio, per generare lo spazio $\mathbb{R}^3$, sono richiesti almeno 3 generatori. Se ne scegliessimo uno solo, come (1,1,1), avremmo infiniti numeri non rappresentabili da una sua combinazione lineare, come (1,2,1), (0,3,4), ecc.

Osservazione Dati $U, W \leq V$ generati dalle seguenti combinazioni lineari:
$U = \mathscr{L}(u_1, \dots, u_r)$
$W = \mathscr{L}(w_1, \dots, w_s)$. Allora:
$U + W = \mathscr{L}(u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s)$. Non è detto che servano tutti questi vettori, in particolare si possono scartare quelli linearmente dipendenti, lo vediamo nel seguente teorema:

4.1 Teorema del "generatore inutile"

Sia $V = \mathscr{L}(v_1, \ldots, v_n)$ uno spazio vettoriale.
Sia v_i combinazione lineare dei vettori precedenti ad esso:
$v_i = b_1 v_1 + \cdots + b_{i-1} v_{i-1}$.
Allora $V = \mathscr{L}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$, ovvero v_i può essere scartato senza alterare lo spazio V.

Dimostrazione: dobbiamo provare che:
$\mathscr{L}(v_1, \ldots, v_n) \subseteq$ (è contenuto da) $\mathscr{L}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$
$\mathscr{L}(v_1, \ldots, v_n) \supseteq$ (contiene) $\mathscr{L}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$

1. Consideriamo $v = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n$.
   È uguale a $a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + 0 v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n \in \mathscr{L}(v_1 \ldots v_n)$.

2. Sia $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, esprimiamo v_i come combinazione lineare dei vettori precedenti:
   $v = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_i (b_1 v_1 + \cdots + b_{i-1} v_{i-1}) + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n$
   svolgendo la moltiplicazione:
   $v = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_i b_1 v_1 + \cdots + a_i b_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n$
   raggruppando i termini simili:
   $v = (a_1 + a_i b_1) v_1 + \cdots + (a_{i-1} + a_i b_{i-1}) v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n$
   Che appartiene a $\mathscr{L}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$, c.v.d.

Per la pratica I vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti se e solo se:

1. $v_i \neq 0 \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

2. $v_i \notin \mathscr{L}(v_1, \ldots, v_{i-1}) \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dati i vettori $v_1, \ldots, v_n$ linearmente indipendenti:

1. $v_1, \ldots, v_r$ con $r \leq n$ sono linearmente indipendenti.

2. Se $r < n$, allora $\mathscr{L}(v_1, \ldots, v_r) \cap \mathscr{L}(v_{r+1}, \ldots, v_n) = \{0_V\}$

4.2 Teorema di caratterizzazione basi

Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$ dei vettori, allora:
$v_1, \ldots, v_n$ è una base di V se e solo se

1. $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti
2. $V = \mathscr{L}(v_1, \ldots, v_n)$

Dimostrazione verso destra:
1) Consideriamo $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$.
Questo sicuramente accade quando $a_1 = \cdots = a_n = 0$, ma dato che la base è un modo unico di esprimere un vettore, allora gli unici coefficienti possibili sono 0, quindi i vettori sono linearmente indipendenti, c.v.d.

2) Dato che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V, ogni vettore di V si scrive come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$, quindi sono dei generatori di V, c.v.d.

Dimostrazione verso sinistra: bisogna provare che ogni vettore $v \in V$ si esprime come combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ in modo unico.
Per l'ipotesi 2:

$$\forall v \in V \implies v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \tag{1}$$

Occorre provare che tale scrittura è unica: supponiamo che
$v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$.
Sottraiamo all'equazione 1 quest'ultima e otteniamo:
$v - v$ (ovvero 0)$= (a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n$.
Per l'ipotesi 1 $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, quindi quei coefficienti devono essere tutti nulli affinché il risultato sia 0.
Questo vuol dire che $a_1 - b_1 = 0; \ldots; a_n - b_n = 0 \implies a_1 = b_1; \ldots; a_n = b_n$, c.v.d.

Proposizione Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette una base. Inoltre, da ogni sistema di generatori si può estrarre una base, lo vediamo col seguente teorema:

4.3 Estrazione base e metodo di scarti successivi

Sia $V = \mathscr{L}(v_1, \ldots, v_n)$
Tesi: dai generatori di V si può estrarre una base, ovvero esiste una base di V costituita da alcuni vettori tra i generatori $v_1, \ldots, v_n$.

Dimostrazione che ci suggerisce un metodo pratico, chiamato "metodo degli scarti successivi":

- Se tra i generatori compare un vettore nullo, lo scartiamo.
- Se un generatore è combinazione lineare dei precedenti, lo scartiamo.

Quello che rimane è un insieme di generatori linearmente indipendenti, ovvero una base, c.v.d.

4.4 Teorema di completamento a base

Sia $V = \mathscr{L}(v_1, \ldots, v_n)$ e siano $\mu_1, \ldots, \mu_r \in V$ vettori linearmente indipendenti, con $r \leq n$
Tesi: esiste una base di V contenente $\mu_1, \ldots, \mu_r$

Dimostrazione: consideriamo l'insieme di vettori $\{\mu_1, \ldots, \mu_r, v_1, \ldots, v_n\}$: effettuando scarti successivi otteniamo la base in questione.

4.5 Lemma di Steinitz

Siano $v_1, \ldots, v_n$ un sistema di generatori di V e siano $\mu_1, \ldots, \mu_m \in V$ vettori linearmente indipendenti.

Tesi: $m \leq n$.

4.6 Componenti della base

Data $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V,
$\forall v \in V \;\; \exists_{no}$ unici $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K} : v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$.
Gli scalari $a_1, \ldots, a_n$ sono le componenti di v rispetto alla base B, li indichiamo con $[v]_B$.
Più formalmente, diciamo che $\exists_1 (a_1, \ldots, a_n)$, oppure $\exists_1 [v]_B$

Possiamo chiamarli il ”vestito” del vettore, in quanto possono variare al variare della base.

Le componenti di un vettore rispetto alla base canonica $[v]_{\mathscr{E}}$ sono i coefficienti stessi.

4.7 Equipotenza delle basi e definizione di dimensione

Due qualsiasi basi di uno spazio vettoriale V sono equipotenti, cioè hanno lo stesso numero di elementi.
Siano $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ basi di V
Tesi: $m = n$

Dimostrazione: $v_1, \dots, v_n$ sono un sistema di generatori e $\mu_1, \dots, \mu_m$ sono vettori linearmente indipendenti, quindi per il Lemma di Steinitz $m \leq n$.

Scambiando i ruoli, $\mu_1, \dots, \mu_m$ sono un sistema di generatori e $v_1, \dots, v_n$ sono vettori linearmente indipendenti, quindi per il lemma di Steinitz $n \leq m \implies n = m$, c.v.d.

Tale numero è detto **dimensione** e si indica con $\dim V$. Nella pratica, la dimensione è la prima cosa da individuare di un sottospazio.

Esempi

- Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, $\dim V = n$.
- Se $V = \mathbb{R}^3$ abbiamo $B = \{e_1, e_2, e_3\} \implies \dim \mathbb{R}^3 = 3$
- Se $V = \mathbb{R}^{2,2}$ abbiamo
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
gli elementi di B sono 4, quindi $\dim \mathbb{R}^{2,2} = 4$
- In generale, $\dim \mathbb{R}^{m,n} = m \cdot n$
- Se $V = \mathbb{R}[x]_n$ abbiamo $B = \{1, x, \dots, x^n\} \implies \dim \mathbb{R}[x]_n = n + 1$
- L'unico spazio vettoriale con dimensione 0 è $V = \{0_V\}$

Nella pratica, la dimensione di uno spazio ci indica quanti numeri possiamo scegliere per creare un generico elemento di quello spazio, ovvero:

- $\dim \mathbb{R}[x]_2 = 3 \implies$ posso scegliere 3 numeri a,b,c per creare il generico elemento di $\mathbb{R}[x]_2$, ovvero $ax^2 + bx + c$
- $$\dim \mathbb{R}^{2,2} = 4 \implies \text{posso scegliere 4 numeri:} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

4.8 4 Teoremi su vettori

Utili anche per la pratica. Se $\dim V = n$, allora:

1. Se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti $\implies$ formano una base
2. Se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono generatori di $V \implies$ formano una base
3. Se $v_1, \dots, v_m \in V$ con $m > n \implies$ sono linearmente dipendenti
4. Se $v_1, \dots, v_m \in V$ con $m < n \implies$ non sono generatori di V.

Dimostriamo queste 4 proposizioni:

1. Dato che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, per il Teorema di completamento a base esiste una base B di V che li contiene.
   Dato che $\dim V = n \implies v_1, \dots, v_n$ costituiscono una base di V.
2. $v_n, \dots, v_n$ sono generatori, quindi per il teorema di Estrazione base e metodo di scarti successivi possiamo ottenere da essi una base scartando certi vettori. La base deve avere n elementi, quindi non dobbiamo scartare nulla, quindi $\mu_1, \dots, \mu_n$ sono già una base.
3. Abbiamo $v_1, \dots, v_m \in V$, con $m > n \implies$ per Lemma di Steinitz non sono linearmente indipendenti (perchè se lo fossero, sarebbe $m \leq n$).
4. Dato che $m < n$ e $\dim V = n$, m vettori non bastano per generare V, ma ce ne vogliono n (Equipotenza delle basi e definizione di dimensione).

Risultati sulla dimensione Teorema: se $W \leq V$ e $\dim V = n$, allora:

1. $\dim W \leq \dim V$
2. Se $\dim W = \dim V = n \implies W = V$, ovvero ogni sottospazio di V avente stessa dimensione di V coincide con V stesso. Per esempio l'unico sottospazio di $\mathbb{R}^3$ avente dimensione 3 è $\mathbb{R}^3$.

4.8.1 Formule di Grassmann

Se $U, W \leq V$, la dimensione del sottospazio somma è:
$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.
$\dim(U \oplus W) = \dim V + \dim W$.

Premessa per il teorema di Kronecker Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ (m righe e n colonne), possiamo esprimerla come

$$A = (C_1, \ldots, C_n), \text{ dove ogni } C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ è la j-esima colonna.}$$

L'insieme delle combinazioni lineari delle colonne è detto "spazio delle colonne" o "spazio colonna":

$$\mathscr{L}(C) = \mathscr{L}(C_1, \ldots, C_n) \leq \mathbb{R}^m$$

in quanto ogni colonna è una m–upla, quindi $\dim \mathscr{L}(C) \leq m$.
Ma dato che è uno spazio generato da n vettori, vale anche $\dim \mathscr{L}(C) \leq n$

Possiamo fare le stesse considerazioni con lo "spazio delle righe", o "spazio riga", sapendo che ogni riga $R_i = (a_{i1} \ldots, a_{in})$:

$$\mathscr{L}(R) = \mathscr{L}(R_1, \ldots, R_m) \leq \mathbb{R}^n$$

in quanto ogni riga è una n–upla, quindi $\dim \mathscr{L}(R) \leq n$.
Ma dato che è uno spazio generato da m vettori, $\dim \mathscr{L}(R) \leq n$.

Infine, se riduco la matrice A ottenendo una matrice A', vale che:
$\mathscr{L}(C') = \mathscr{L}(C)$ e $\mathscr{L}(R') = \mathscr{L}(R)$.

4.9 Teorema di Kronecker

Uno dei più importanti del corso, con grandi conseguenze per la pratica (il corollario).

Data la Premessa per il teorema di Kronecker, l'enunciato è:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m,n} \implies \rho(A) = \dim \mathscr{L}(R) = \dim \mathscr{L}(C)$$

Corollario Nella pratica, data la matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono fatti equivalenti:

1. $|A| \neq 0$
2. A è invertibile
3. $\rho(A) = n$
4. Le n righe sono linearmente indipendenti
5. Le n colonne sono linearmente indipendenti

Useremo queste informazioni per verificare se dei vettori sono linearmente indipendenti, nel seguente modo:

1. Li mettiamo in riga o colonna, formando una matrice
2. Riduciamo e troviamo il rango della matrice
3. Il rango è il numero di vettori linearmente indipendenti, ed essi sono posti in corrispondenza degli elementi speciali

4.10 Dimostrazione teorema di Rouché-Capelli 1

Enunciato Rouché-Capelli I: Un sistema lineare $A \cdot X = B$ è possibile se e solo se $\rho(A) = \rho(A|B)$.

Dimostrazione verso destra: consideriamo gli spazi delle colonne delle matrici A e $A|B$.
Per $A:\quad W = \mathscr{L}(C_1, \dots, C_n) \leq \mathbb{K}^m$
Per $A|B: V = \mathscr{L}(C_1, \dots, C_n, C_{n+1}) \leq \mathbb{K}^m$, dove $C_{n+1} = B$.

Per il teorema di Kronecker, $\rho(A) = \dim W$ e $\rho(A|B) = \dim V$.
Dato che il sistema è possibile, esiste almeno una n–upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ soluzione del sistema, cioè tale che $\alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n = B$.
Questo significa che $B \in \mathscr{L}(C_1, \dots, C_n) = W$.
Dato che $B = C_{n+1}$, allora $\mathscr{L}(C_1, \dots, C_n, C_{n+1}) = \mathscr{L}(C_1, \dots, C_n)$, quindi:
$V = W \implies \dim V$ (rango di A) $= \dim W$ (rango di $A|B$).

Dimostrazione verso sinistra: si ripercorre al contrario la dimostrazione verso destra. Consideriamo gli stessi spazi W e V.
$\rho(A) = \rho(A|B) \implies \dim W = \dim V$, ed essendo $W \subseteq V \implies V = W$.
In particolare, $B \in V \implies B \in W \implies B \in \mathscr{L}(C_1, \dots, C_n)$, ovvero
$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^n : B = \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n$, per cui $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ è soluzione del sistema, c.v.d.

5 Applicazioni lineari

Siano V e W due $\mathbb{K}$–spazi vettoriali. Una funzione $f : V \to W$ è detta "funzione lineare" o "applicazione lineare" se:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)\ \ \forall v \in V$
2. $f(kv) = kf(v)\ \ \forall v \in V\ \ \forall k \in \mathbb{K}$

Oppure, in forma breve, se:
$f(kv_1 + v_2) = kf(v_1) + f(v_2)$.

5.1 Immagine

L'immagine di una funzione lineare $f : V \to W$ è
$Imf = \{w \in W : w = f(v)$ per qualche (almeno una) $v \in V\}$.

Accade sempre che $f(0_V) = 0_W$, dato che possiamo immaginare 0_V come $0 \cdot v \in V \implies f(0_V) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) \in W = 0_W$

5.2 Nucleo

Ciò che in analisi sono gli zeri di una funzione. Con nucleo (o kernel) facciamo riferimento all'insieme di vettori di V che vengono mandato nello 0_W.
Si tratta di un insieme mai vuoto, dato che conterrà almeno l'elemento 0_V.
Da ciò si deduce che $Imf \neq \emptyset$, dato che ha almeno 0_W

5.3 Imf è sottospazio di W e kerf è sottospazio di V

Dimostriamo che, data $f : V \to W$, vale che $Imf \leq W$ e $\ker f \leq V$, servendoci del Teorema di caratterizzazione di sottospazi, ovvero verificando che immagine e kernel siano chiusi rispetto alla somma e al prodotto esterno.

Per l'immagine dobbiamo dimostrare che:

1. $w_1, w_2 \in Imf \implies w_1 + w_2 \in Imf$.
   Sappiamo che $w_1 \in Imf \implies \exists v_1 \in V : f(v_1) = w_1$.
   Sappiamo che $w_2 \in Imf \implies \exists v_2 \in V : f(v_2) = w_2$.
   Essendo V uno spazio vettoriale, allora $v_1 + v_2 \in V$. Questo vuol dire che $f(v_1 + v_2) \in Imf$, ma esso è, per linearità, pari a $f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2$, c.v.d.

2. $w \in Imf$ e $k \in \mathbb{K} \implies kw \in Imf$.
   $\exists v \in V : f(v) = w$. Dati $k \in \mathbb{K}$ e $v \in V \implies kv \in V$, poiché è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.
   $f(kv)$, che appartiene quindi a Imf, è uguale a $kf(v) = kw$, c.v.d.

Per il kernel dobbiamo dimostrare che:

1. $v_1, v_2 \in \ker f \implies v_1 + v_2 \in \ker f$.
   Dato che $v_1, v_2 \in \ker f \implies f(v_1) = f(v_2) = 0_W$.
   $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0_W + 0_W = 0_W \implies v_1 + v_2 \in \ker f$, c.v.d.

2. $k \in \mathbb{K},\ v \in \ker f \implies kv \in \ker f$.
   $v \in \ker f \implies f(v) = 0_W$. $\quad f(kv) = kf(v) = k0_W = 0_W \implies kv \in \ker f$.

5.4 Se f è lineare, Imf è generata dalle immagini dei generatori del dominio

Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare.
Se $V = \mathscr{L}(v_1, \dots, v_n) \implies Imf = \mathscr{L}(f(v_1), \dots, f(v_n))$

Dimostrazione: $\forall v \in V$,
$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \implies f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)$.

Osservazione $f(v_1), \dots, f(v_n)$, pur essendo generatori di Imf, non sono necessariamente una base: lo sono solo se la funzione è iniettiva (proposizione 1).

Applicazione nulla La funzione $\theta : V \to W$ definita dalla legge $\theta(v) = 0_W \ \ \forall v \in V$ è detta "applicazione nulla": $\ker\theta = V$ e $Im\theta = 0_W$.

Funzione composta Dati U, V, W $\mathbb{K}$–spazi vettoriali e le funzioni $f: U \to V$ e $g: V \to W$, possiamo considerare l'applicazione $g \circ f : U \to W$ definita dalla legge $g \circ f(u) = g(f(u)) \quad \forall u \in U$.
Se f e g sono lineari, $g \circ f$ è a sua volta lineare. La composizione della funzione identità è $i \circ i = i$

5.5 Endomorfismo

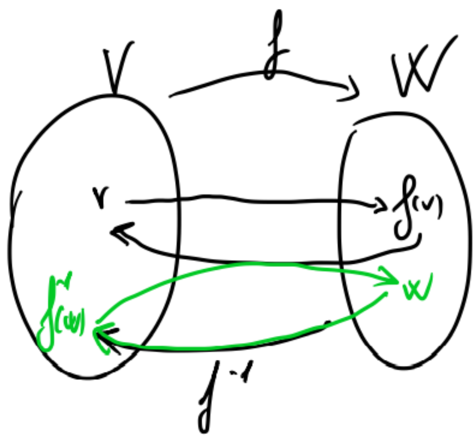
Una funzione $f: V \to V$ è detta "endomorfismo". L'esempio banale è l'applicazione identità $i_V : V \to V$ definita dalla legge $i_V(v) = v \ \ \forall v \in V$.
In analisi la funzione identità è $f(x) = x$, la prima bisettrice.

Applicazione lineare iniettiva, suriettiva e isomorfismo La funzione lineare $f: V \to W$, con $v_1, v_2 \in V$, è:

- Iniettiva se $v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)$, o equivalentemente:
  $f(v_1) = f(v_2) \implies v_1 = v_2$
- Suriettiva se $Imf = W$

Se f è biettiva, viene detta "**isomorfismo**".
In tal caso sarà invertibile, cioè $\exists f^{-1} : W \to V$ tale che $f^{-1} \circ f = i_V$ e

$f \circ f^{-1} = i_W$.
Graficamente:



5.6 f È iniettiva se e solo se il kernel è nullo

Teorema utile per la pratica per capire se una funzione è iniettiva.
Come suggerisce il titolo:
$f : V \to W$ è iniettiva $\iff \ker f = \{0_V\}$.

Dimostrazione verso destra: sia $v \in \ker f \implies f(v) = 0_W$. Dato che vale sempre che $f(0_V) = 0_W$ e la funzione è iniettiva, allora $v = 0_V$.

Dimostrazione verso sinistra: siano $v_1, v_2 \in V$ tali che $f(v_1) = f(v_2)$, dimostriamo che $v_1 = v_2$.
Sappiamo che $f(v_1) = f(v_2) \iff f(v_1) - f(v_2) = 0 \implies f(v_1 - v_2) = 0$, quindi $v_1 - v_2 \in \ker f \implies v_1 - v_2 = 0_V \implies v_1 = v_2 \implies f$ è iniettiva, Q.E.D.

Proposizione $f : V \to W$ è isomorfismo $\iff f$ è invertibile.

Proposizione Dati V e W $\mathbb{K}$–spazi vettoriali e $f : V \to W$

1. Se f è iniettiva e $v_1, \ldots, v_i \in V$ linearmente indipendenti, allora $f(v_1), \ldots, f(v_i)$ sono linearmente indipendenti
2. Se $f(v_1), \ldots, f(v_i)$ sono linearmente indipendenti $\implies$ $v_1, \ldots, v_i$ sono linearmente indipendenti

Dimostrazioni:

1. Consideriamo $a_1 f(v_1) + \cdots + a_i f(v_i) = 0$ e dimostriamo che $a_1 = \cdots = a_i = 0$.
   Sfruttando le due proprietà della funzione lineare, riscriviamo:
   $a_1 f(v_1) + \cdots + a_i f(v_i) = 0 \implies f(a_1 v_1 + \cdots + a_i v_i) = 0 \implies a_1 v_1 + \cdots + a_i v_i \in \ker f$.
   Dato che f È iniettiva se e solo se il kernel è nullo e per ipotesi f è iniettiva $\implies a_1 v_1 + \cdots + a_i v_i = 0_V$.
   Dato che $v_1, \ldots, v_i$ sono linearmente indipendenti $\implies a_1 = \cdots = a_i = 0$, c.v.d.
2. Consideriamo $a_1 v_1 + \cdots + a_i v_i = 0$ e dimostriamo che $a_1 = \cdots = a_i = 0$.
   Sappiamo che $f(a_1 v_1 + \cdots + a_i v_i) = f(0)$. Sfruttando le 2 proprietà della funzione lineare, possiamo riscrivere l'equazione come:
   $a_1 f(v_1) + \cdots + a_i f(v_i) = 0_W$. Dato che per ipotesi essi sono vettori linearmente indipendenti, ne deduciamo che $a_1 = \cdots = a_i = 0$.

Nella pratica, se abbiamo dei vettori $v_1, \ldots, v_i$ che formano una base di V, e l'immagine è $Imf = \mathscr{L}(f(v_1), \ldots, f(v_i))$, grazie a questo teorema possiamo affermare che se f è iniettiva, allora $f(v_1), \ldots, f(v_i)$ sono una base per Imf.

Corollario Il teorema appena visto ha diverse conseguenze che non dimostriamo. Data $f : V \to W$, con $\dim V = n$ e $\dim W = m$:

1. f è iniettiva $\implies n \leq m$
2. f è suriettiva $\implies n \geq m$
3. f è isomorfismo $\implies n = m$
4. f isomorfismo e $(v_1, \ldots, v_n)$ base di V $\implies f((v_1), \ldots, f(v_n))$ base di W.

5.7 Teorema delle dimensioni

Data l'applicazione lineare $f : V \to W$ tra due $\mathbb{K}$–spazi vettoriali, avremo che $\dim V = \dim Imf + \dim \ker f$.

Dimostrazione: chiamiamo $\dim V = n$, $\dim W = m$ e $\dim \ker f = r$: avremo che $r \leq n$, dato che $\ker f \leq V$.
Consideriamo una base di $\ker f : [v_1, \dots, v_r]$ e costruiamo una base di V col Teorema di completamento a base, ottenendo $[v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n]$.
Dobbiamo dimostrare che $n = \dim Imf + r \implies \dim Imf = n - r$, ovvero che Imf abbia una base con $n - r$ vettori.

$v_1, \dots, v_r \in \ker f \implies f(v_1) = \cdots = f(v_r) = 0 \implies$ proviamo che $[f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)]$ è una base di Imf:

1. Sono vettori linearmente indipendenti?
   $a_{r+1} f(v_{r+1}) + \cdots + a_n f(v_n) = 0$, riscriviamo come:
   $f(a_{r+1} v_{r+1} + \cdots + a_n v_n) = 0 \implies a_{r+1} v_{r+1} + \cdots + a_n v_n \in \ker f$.
   Per costruzione $\ker f \cap \mathscr{L}(v_{r+1}, \dots, v_n) = \{0_V\}$, quindi $a_{r+1} v_{r+1} + \cdots + a_n v_n$, che appartiene sia a $\mathscr{L}(v_{r+1}, \dots, v_n)$ che a $\ker f$, sarà pari a 0_V; ma essendo $v_{r+1}, \dots, v_n$ linearmente indipendenti $\implies$ $a_{r+1} = \cdots = a_n = 0$, c.v.d.

2. Sono generatori di Imf? Per il teorema 5.4
   $Imf = \mathscr{L}(f(v_1), \dots, f(v_n))$. Dato che $f(v_1) = \cdots = f(v_r) = 0 \implies Imf = \mathscr{L}(f(v_{r+1}), \dots, f(v_n))$.

5.8 Assegnazioni di un'applicazione lineare

Negli esercizi una funzione lineare può essere assegnata in tre modi:

1. Conoscendo le immagini dei vettori di una base del dominio
2. Conoscendo la legge (o le leggi) di definizione
3. Con la matrice associata (5.8)

Andiamo a studiare nello specifico questi casi:

Immagini dei vettori della base del dominio Dati V e W $\mathbb{K}$–spazi vettoriali, $A = [v_1, \ldots, v_n]$ base del dominio e $w_1, \ldots, w_n \in W$, tesiste un'**unica** applicazione lineare $f : V \to W$ tale che $f(v_1) = w_1; \ldots; f(v_n) = w_n$.

Dimostrazione: dobbiamo dimostrare che $\forall v \in V \; \exists_1 w \in W : f(v) = w$.
Dato che $v_1, \ldots, v_n$ è una base di $V \implies v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$.
Definiamo la funzione:

$$f(v) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n. \tag{2}$$

Dobbiamo dimostrare la sua linearità, ovvero:

1. $f(v + v') = f(v) + f(v')$.
   Servendoci della funzione appena definita:
   $f(v') = a'_1 w_1 + \cdots + a'_n w_n$.
   $f(v + v') = (a_1 + a'_1) w_1 + \cdots + (a_n + a'_n) w_n = f(v) + f(v')$, c.v.d.
2. $f(kv) = kf(v)$.
   Le componenti di kv rispetto alla base A sono $[kv]_A = (ka_1, \ldots, ka_n)$, quindi servendoci della funzione 2 sappiamo che:
   $f(kv) = ka_1 w_1 + \cdots + ka_n w_n = k(a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n) = kf(v)$, c.v.d.

Proviamo infine l'unicità di f: se esistesse $g : V \to W$ tale che
$g(v_1) = w_1; \ldots; g(v_n) = w_n$, si avrebbe che:
$\forall v \in V \implies g(v) = a_1 g(v_1) + \cdots + a_n g(v_n) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n = f(v)$, c.v.d.

Leggi di definizione Metodo comune negli esami.
Data $f: V \to W,\ A = [v_1, \dots, v_n]$ base di V e $B = [w_1, \dots, w_m]$ base di W, per ogni vettore possiamo considerare le componenti rispetto alla base del suo insieme:
$\forall v \in V\ \ [v]_A = (a_1, \dots, a_n)$
$\forall w \in W\ \ [w]_B = (b_1, \dots, b_m)$.

Si può affermare che $f(v) = w \iff f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = b_1 w_1 + \dots + b_m w_m$.

Servono delle leggi che esprimano $b_1, \dots, b_m$ in funzione di $a_1, \dots, a_n$, es:
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - 12,\ \ 3x_2,\ \ 2x_2 + 7x_1)$, dove $(x_1, x_2) = A$.

Matrice associata Appare in ogni esame.
Data $f: V \to W,\ A = [v_1, \dots, v_n]$ base di V e $B = [w_1, \dots, w_m]$ base di W, possiamo considerare le componenti delle immagini dei vettori della base del dominio rispetto alla base B:
$[f(v_1)]_B = (a_{11}, \dots, a_{m1})$
$\vdots$
$[f(v_n)]_B = (a_{1n}, \dots, a_{mn})$

Come si nota, esse sono le colonne di una matrice $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La quale prende il nome di **matrice associata** all'applicazione lineare
$f: V \to W$ rispetto alle basi A e B, e si indica con $M^{A,B}(f)$.

Calcolare l'immagine di un vettore usando la matrice associata Considero $v \in V$ e $[v]_A = (x_1, \dots, x_n)$. Vale la formula:
$[f(v)]_B = M^{A,B}(f) \cdot [v]_A$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$m \times n \qquad n \times 1. \qquad m \times 1$

Sappiamo ora che:

- Se abbiamo $f \implies$ possiamo ottenere la matrice associata
- Se abbiamo la matrice associata $\implies$ possiamo ottenere f

5.9 Applicazione lineare associata a una matrice

Siano V, W $\mathbb{K}$–spazi vettoriali, $\mathscr{A} = [v_1, \ldots, v_n]$ base di V e $B = [w_1, \ldots, w_m]$ base di W. Sia data

$$A \in \mathbb{K}^{m,n} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si definisce **applicazione lineare associata** alla matrice A rispetto alle basi $\mathscr{A}$ e B la funzione lineare $f : V \to W$ che ha come matrice associata rispetto alle basi $\mathscr{A}$ e B la matrice A.
Essa è definita dalla legge $f(v_i) = a_{1i}w_1 + \cdots + a_{mi}w_m$ con $i = 1, \ldots, n$.

Osservazione Sappiamo che Imf è generata dai vettori $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$. Se voglio una base di Imf, devo capire quali tra questi sono indipendenti, ed è possibile farlo tramite il rango della matrice associata (perché ci dice il numero degli elementi speciali, in corrispondenza dei vettori linearmente indipendenti).

Ne deduciamo quindi che $\dim Imf = \rho(M^{A,B}(f))$.

Osservazione Se f è un endomorfismo $f : V \to V$ con $\mathscr{A} = [v_1, \ldots, v_n]$ base di V, la matrice associata sarà quadrata e possiamo scriverla con una notazione abbreviata:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{A}}(f) = M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Per gli esercizi "In $\mathbb{K}^n$" sta a significare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, mentre la matrice associata rispetto alla base canonica (B = base canonica = $\mathscr{E}$) viene indicata con $M^{\mathscr{E}}(f) = M(f)$

5.10 Matrice di passaggio

Una matrice associata a un'applicazione f cambierà al variare delle basi di dominio e codominio. La nuova matrice potrebbe essere calcolata manualmente, ma un metodo più veloce è sfruttare la **matrice passaggio**.

Siano $A = [\mu_1, \ldots, \mu_n]$ e $B = [v_1, \ldots, v_n]$ basi di V. Consideriamo la matrice:

$$P^{A,B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Le cui colonne sono le componenti dei vettori di A rispetto a B:
$(a_{11}, \ldots, a_{n1}) = [\mu_1]_B$
$\vdots$
$(a_{1n}, \ldots, a_{nn}) = [\mu_n]_B$.

Tale matrice è detta "di passaggio". Vale la proprietà $P^{B,A} = (P^{A,B})^{-1}$ e $P^{BA} \cdot P^{AB} = i$.
Inoltre $i : {}^{A}V \to {}^{B}V \implies M^{A,B}(i) = P^{A,B}$.

Come si usa Se abbiamo una matrice associata $M^{A,B}(f)$ e vogliamo passare a $M^{A',B'}(f)$, basta sapere che $M^{A',B'}(f) = P^{B,B'} \cdot M^{A,B}(f) \cdot P^{A,A'}$.

Se abbiamo un vettore espresso rispetto alla base A e lo vogliamo esprimere rispetto alla base B, basta sapere che le sue nuove componenti saranno $[v]_B = P^{A,B} \cdot [v]_A$.

5.11 Applicazione lineare somma e prodotto

Date $f, g : V \to W$, l'applicazione lineare somma $(f+g) : V \to W$ è la funzione definita dalla legge $(f+g)(v) = f(v) + g(v),\ \forall v \in V$.

Data $f : V \to W$ e $a \in \mathbb{K}$, l'applicazione prodotto $af : V \to W$ è l'applicazione definita dalla legge $(af)(v) = af(v),\ \forall v \in V$.

Osservazioni che non dimostreremo

1. $M^{A,B}(f+g) = M^{A,B}(f) + M^{A,B}(g)$
2. $M^{A,B}(af) = aM^{A,B}(f)$

È possibile avere un caso dove vengono combinate entrambe queste proprietà, quindi:
$M(af + bg) = aM(f) + bM(g)$, con $f, g : V \to W$ e $a, b \in \mathbb{K}$.

Matrice associata a una composizione di applicazioni Date le applicazioni lineari $f : V \to W,\quad g : W \to U$ e A, B, C rispettivamente basi di V, W, U, possiamo affermare che $M^{A,C}(g \circ f) = M^{B,C}(g) \cdot M^{A,B}(f)$.

Matrice associata a un isomorfismo Se $f : V \to W$ è un isomorfismo allora $M^{B,A}(f^{-1}) = (M^{A,B}(f))^{-1}$, con A e B basi di V e W.

5.12 Similitudine tra matrici

Argomento molto importante. Le matrici $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ si dicono "simili" se esiste una matrice $P \in \mathbb{K}^{m,n}$ invertibile e tale che $A = P^{-1}BP$. Per dire che A è simile a B in simboli, scriviamo $A(S)B$.

La similitudine è una relazione di equivalenza, valgono infatti le proprietà:

- Riflessiva: $A(S)A$, in quanto $\exists\ P_{inv} : P^{-1}AP = A$, in particolare $P = I$, la matrice identica.
- Simmetrica: $A(S)B \implies B(S)A$, poiché possiamo riscrivere:
  $A = P^{-1}BP$
  $PA = PP^{-1}BP$

$PAP^{-1} = IBPP^{-1}$
$PAP^{-1} = B$

- Transitiva: $A(S)B \wedge B(S)C \implies A(S)C$, non lo dimostriamo.

6 Autovettori e autovalori

Da questa sezione in poi ogni funzione sarà un endomorfismo $f : V \to V$, con V $\mathbb{K}$–spazio vettoriale.

Definizione Uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice autovalore se $f(v) = \lambda v$, con $v \in V$ e $v \neq 0_V$.

Un vettore $v \in V$ si dice autovettore associato all'autovalore λ se $f(v) = \lambda v$.

Le due definizioni sono strettamente collegate, infatti:

- La prima ci dice che λ è un autovalore solo se esiste un autovettore v
- La seconda ci dice che v è un autovettore solo se esiste l'autovalore λ

Osservazioni 0_V non può essere un autovettore in quanto qualsiasi numero moltiplicato per esso risulterebbe per definizione un autovalore, quando potrebbe non esserlo.

Se $\lambda = 0 \implies f(v) = 0_V \implies v \in \ker f$

Gli autovettori sono un importante concetto matematico (si ritrovano in analisi 2 con sistemi di equazioni differenziali) usato anche in altri ambiti scientifici, dall'informatica (motore di ricerca di Google) alla fisica.

Per la pratica Uno scalare λ è autovalore per una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ se esiste almeno una soluzione non banale all'equazione $AX = \lambda X$, ovvero al sistema $(A - \lambda I)X = 0$ (se $|A - \lambda I| = 0$, allora λ è autovettore).

Come si cercano gli autovalori? Modelliamo l'equazione che definisce gli autovalori:
$f(v) = \lambda v$
$f(v) - \lambda v = 0$
$f(v) - \lambda i(v) = 0$

Abbiamo quindi ottenuto un'altra funzione lineare (endomorfismo), che chiamiamo $f_\lambda = f - \lambda i$ (N.B. la pronunciamo "f con lambda", non "f lambda", che indica invece f moltiplicato lambda).
$v \in V \implies f_\lambda(v) = f(v) - \lambda i(v)$

Osservazione Dato che definiamo un autovettore come
$v \in V : f(v) - \lambda i(v) = 0$, possiamo riscriverlo come $v : f_\lambda = 0$, quindi appartiene al kernel di f_λ.

La matrice associata a f_λ è:
$M^A(f\lambda) = M^A(f - \lambda i) = M^A(f) - \lambda M^A(i) = M^A(f) - \lambda I$.

Nella pratica, λ è un autovalore $\iff |M^A(f) - \lambda I| = 0$

6.1 Polinomio caratteristico

Si chiama "polinomio caratteristico" il determinante di $M^A(f) - \lambda I$

Per il teorema appena scritto, cercare gli autovalori significa cercare le radici del polinomio caratteristico:
$P(\lambda) = |M^A(f) - \lambda I|$.
Esso gode di invarianza, ovvero rimane uguale anche cambiando base.

6.2 Autospazio

L'insieme $V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$ è detto "autospazio" associato all'autovalore λ. Contiene gli autovettori associati all'autovalore λ, con l'aggiunta del vettore nullo (presente in ogni sottospazio).

Osservazione pratica $\ker f_\lambda = V_\lambda$, e questo si può anche dimostrare:
$f(v) = \lambda v \iff f(v) - \lambda v = 0 \iff f(v) - \lambda i(v) = 0 \iff f_\lambda(v) = 0 \iff v \in \ker f_\lambda$.

6.3 Teorema di indipendenza degli autovettori

Dato l'endomorfismo $f : V \to V$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ autovalori distinti, allora gli autovettori $v_1 \in V_{\lambda_1}; \ldots; v_r \in V_{\lambda_r}$ sono linearmente indipendenti.

Corollario Se $\dim V = n$, allora ogni endomorfismo $f : V \to V$ ammette al più n autovettori.

6.4 Endomorfismo semplice

Un endomorfismo $f : V \to V$ si dice "semplice" se esiste una base di autovettori per lo spazio V.

Osservazione Se come base di V scelgo una base di autovettori A, allora la matrice associata avrà solo gli autovalori sulla diagonale:

$$M^A(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

perché: $A = \{v_1, \dots, v_r\}$
$f(v_1) = \lambda v_1$
$[f(v_1)]_A = [\lambda_1, 0, \dots, 0]$
$f(v_2) = \lambda v_2$
$[f(v_2)]_A = [0, \lambda_2, \dots, 0]$

e così via.

Se un endomorfismo f ammette n autovalori distinti, allora è semplice.

Autospazi che compongono V Se f è semplice, il suo dominio V si può dividere in pezzi, ognuno dei quali è un autospazio.

La somma delle dimensioni di questi pezzi è $\dim V = n$.

6.5 Molteplicità geometrica e algebrica

Siano $f : V \to V$ un endomorfismo e λ un autovalore.

Si dice "**molteplicità geometrica**" g_λ la dimensione dell'autospazio associato all'autovalore λ, in simboli $\dim V_\lambda = g_\lambda$.

Si dice "**molteplicità algebrica**" m_λ la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico (il numero di volte che λ annulla il polinomio).

Es: $P(x) = (x-1)^3 \implies x = 1$ è radice di molteplicità 3.

Si dimostra che $1 \leq g \leq m_\lambda$

Teorema corollario È equivalente dire che:

1. f è semplice
2. $\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_r}$
3. $m_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} \quad \forall i = 1, \ldots, r$
4. V= $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$

6.6 Matrice diagonalizzabile

Una matrice si dice diagonalizzabile se è simile a una matrice diagonale

Teorema di diagonalizzazione Una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ è diagonalizzabile $\iff$ l'endomorfismo φ_A associato ad A è semplice.

In tal caso, dato che φ_A è semplice, esiste una base A di autovettori di φ_A.

Detta P la matrice di passaggio dalla base canonica alla base di autovettori A, ovvero $P^{\mathscr{E},A}$, avremo che $P^{-1}AP = \Delta$, che è la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori.

A diagonalizzabile $\iff$ A è simile a una matrice diagonale.

7 Geometria

Applichiamo ciò che abbiamo fatto in algebra alla geometria, dando un significato geometrico alle nozioni algebriche.

7.1 Coordinate, punti, piano proiettivo

Le coordinate cartesiane (o non omogenee) sono quelle a cui siamo abituati: fungono da notazione per un sistema di riferimento cartesiano ortogonale indicato con $O, \vec{x}, \vec{y}, u$, dove $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sono versori che indicano le direzioni degli assi x (1,0) e y (0,1), mentre u è l'unità di misura.

Punti propri e impropri Un punto P può essere espresso da coordinate cartesiane: $P \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Chiameremo i punti di questo tipo **punti propri**

Questo corso farà tuttavia largo uso anche delle coordinate proiettive (o omogenee). Per immaginarsi una geometria proiettiva, si può pensare ai quadri rinascimentali dove due rette parallele si incontrano in un punto di fuga, che chiameremo **punto improprio**.

A una coppia di coordinate non omogenee (x, y) associamo delle coordinate omogenee, terne ordinate di numeri reali (x', y', t'), in questo modo:

- Se $t' \neq 0$ poniamo $x = \frac{x'}{t'},\ \ y = \frac{y'}{t'}$, il che implica che coordinate omogenee proporzionali individuano lo stesso punto, per esempio le terne $(8, 12, 4)$ e $(2, 3, 1)$.
  Per questo motivo si sceglie di trattare i punti propri sempre con $t' = 1$, per esempio l'origine sarà $(0, 0, 1)$.

- Se $t' = 0$ non si rappresenta alcun punto cartesiano, ma un punto improprio, detto anche **punto all'infinito**.
  Anche i punti impropri sono definiti a meno di una costante di proporzionalità.

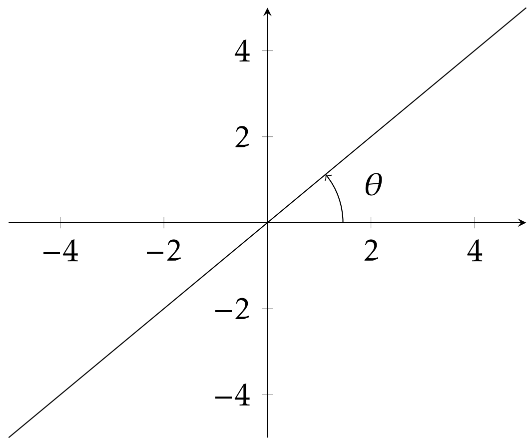
La terna di coordinate omogenee $(x', y', t') = (0, 0, 0)$ non rappresenta alcun punto ed è detta ”soluzione banale”, mentre $(0, 0, 1)$ rappresenta il centro degli assi cartesiani, essendo un punto proprio.
Il punto improprio di una retta non è altro che il suo vettore direzione.

Ricapitolando Un punto in coordinate omogenee $(x, y, 1)$ è proprio, e corrisponde al punto (x, y) in coordinate cartesiane.
Un punto in coordinate omogenee $(x, y, 0)$ è improprio, e individua una direzione, quella del vettore $\vec{v} = (x, y)$.

Piano e spazio proiettivo Tutti i punti propri e impropri del piano formano il piano proiettivo.
Analogamente, in 3 (n) dimensioni, si parla di spazio proiettivo.

7.2 Geometria lineare nel piano

In un piano possiamo rappresentare una retta mediante l'equazione $ax+by+c=0 \implies y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, ovvero $y=mx+q$, dove m è detto **coefficiente angolare** e q **intercetta**.



$y = x$
$-1x+1y+0=0$
$m=\tan\theta=1$
oppure $m=-\frac{a}{b}=1$
$q=0$

- Il coefficiente angolare descrive l'inclinazione (pendenza) della retta
- L'intercetta è la distanza tra l'origine e l'intersezione della retta con l'asse y.

7.2.1 Equazioni parametriche

Per esprimere un punto usiamo la notazione $P=(x_0,y_0)$, mentre per un vettore usiamo $\vec{v}=(v_x,v_y)$, ovvero $\vec{v}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}$.
Unendo queste due notazioni otteniamo:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \end{cases}$$

Che vengono chiamate **equazioni parametriche** di una retta, in quanto contengono il parametro $t \in \mathbb{R}$. Si passa dalle equazioni parametriche a quelle cartesiane eliminando il parametro in questo modo:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{v_x} = t \\ \frac{y-y_0}{v_y} = t \end{cases} \implies \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y}$$

Per passare invece dalle equazioni cartesiane a quelle parametriche siamo liberi: la rappresentazione parametrica di una retta non è univoca.
Esempio: $x - 5y + 7 = 0$ in equazione parametrica può diventare:

$$\begin{cases} x = 5t - 7 \\ y = t \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = 2 + t \end{cases} \quad \text{esprimendo la stessa retta}$$

I vantaggi delle equazioni parametriche sono:

- Danno un punto: (x_0, y_0) nel piano e (x_0, y_0, z_0) nello spazio.
- Danno il vettore direzione della retta: (v_x, v_y) nel piano e (v_x, v_y, v_z) nello spazio.
- Danno informazioni sul generico punto della retta

7.3 Geometria nello spazio

Equazione di una retta passante per due punti Nello spazio possiamo indicare una retta tramite un vettore direttivo $\vec{v} = (l, m, n)$, dove l, m, n sono chiamati **parametri direttori**.
Un punto P si può esprimere come $P = (x, y, z)$. Se immaginiamo di connetterlo a un altro punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, allora il vettore che li congiunge sarà $\vec{P_0P} = t\vec{v}$, un vettore differenza pari a:
$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k} = t(l\hat{i} + m\hat{j} + m\hat{n})$, da cui otteniamo le **equazioni parametriche di una retta**:

$$\begin{cases} x - x_0 = lt \\ y - y_0 = mt \\ z - z_0 = nt \end{cases} \implies \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Ricordando che è possibile passare da queste alle equazioni cartesiane isolando il parametro t e uguagliando le tre espressioni che si ottengono:

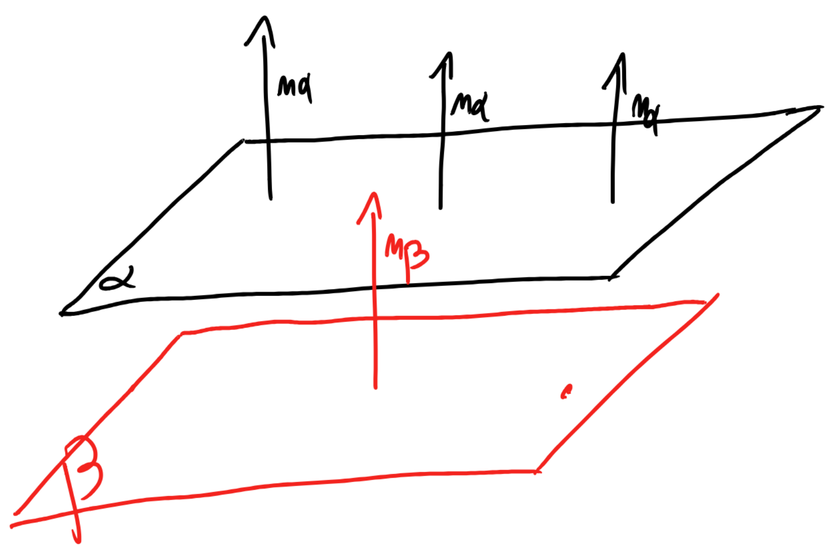
$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{l} = t \\ \frac{y-y_0}{m} = t \\ \frac{z-z_0}{n} = t \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} \\ \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \end{cases}$$

La condizione di ortogonalità tra due rette (o tra una retta e un piano o tra due piani) è che il prodotto scalare sia nullo, quindi date le rette (a, b, c) e

(x, y, z), sappiamo che sono ortogonali se e solo se:
$(ax + by + cz) = 0$.

7.4 Vettore normale e piani paralleli

Quando si deve individuare un piano negli esercizi pratica, il protagonista è il vettore normale, ovvero un vettore perpendicolare al piano.
Se due piani sono paralleli, i vettori normali devono essere paralleli tra loro:



In simboli $\alpha /\!\!/ \beta \leftrightarrow n_\alpha /\!\!/ n_\beta$ (ricordando che la condizione di parallelismo implica $n_\alpha = kn_\beta$).
Allo stesso modo, $\alpha \perp \beta \leftrightarrow n_\alpha \perp n_\beta$ (ricordando che la condizione di ortogonalità implica $n_\alpha \cdot n_\beta = 0$.)

7.4.1 Giacitura

La giacitura G è uno spazio di dimensione 2 che contiene i vettori ortogonali a un vettore (a, b, c), ovvero:
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$

7.4.2 Condizione di complanarità

Dati tre punti distinti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, siamo sicuri che essi individuano uno e un solo piano (si deduce dal primo postulato di Euclide).

Vogliamo studiare se un punto P appartenga al suddetto piano: consideriamo i vettori $\overrightarrow{P_0P}$, $\overrightarrow{P_1P}$ e $\overrightarrow{P_2P}$, essi dovranno essere complanari. La condizione di complanarità fra 3 vettori è che il loro prodotto misto sia nullo, quindi imponiamo $\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{P_1P} \wedge \overrightarrow{P_2P} = 0$, ovvero:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \end{vmatrix} = 0$$

E da qui si trova l'equazione del piano, ovvero ciò che stiamo cercando.

Modi in cui può essere data una retta

1. Come intersezione di due piani non paralleli
2. Con un punto e un vettore
3. Con due punti distinti

7.4.3 Trovare i punti impropri di piano e retta

Un piano è descritto dall'equazione non omogenea $ax+by+cz+d=0$. Dato che $x = \frac{x'}{t'}$, $y = \frac{y'}{t'}$ e $z = \frac{z'}{t'}$, l'equazione omogenea del piano è $ax'+by'+cz'+dt' = 0$. Per cercare i punti impropri di un piano, come già detto, basta imporre $t' = 0$, quindi:

$$\begin{cases} ax'+by'+cz'+dt' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Il sistema appena scritto descrive la **retta impropria** del piano, ovvero la retta contenente tutti i punti impropri del piano.

Se vogliamo trovare il punto improprio di una retta, dobbiamo esprimerla come intersezione di due piani, ovvero:

$$r : \begin{cases} ax+by+cz+d = 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' = 0 \end{cases}$$

A questo punto si omogenizza e si impone $t = 0$:

$$\begin{cases} ax + by + cz + dt = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d't = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene il punto improprio della retta, che non è altro che l'intersezione delle rette improprie dei due piani che la individuano.

7.5 Posizioni reciproche di due rette

Due rette possono essere:

- Complanari, in tal caso possono a loro volta essere:
  1. Coincidenti
  2. Incidenti (caso particolare: perpendicolari)
  3. Parallele
- Sghembe (7.5)

Nel caso in cui siano complanari, per capire il loro rapporto bisogna verificare le soluzioni del sistema formato dalle due rette:

$$\begin{cases} ax + by + c+ = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

In particolare, consideriamo la matrice orlata:

$$A|B = \begin{pmatrix} a & b & | & c \\ a' & b' & | & c' \end{pmatrix}$$

E analizziamo i casi:

- $|A| \neq 0 \implies \rho(A) = \rho(A|B) = 2 \implies$ sistema determinato $\implies$ rette incidenti
- $|A| = 0 \implies \rho(A) = 1$:

- $\rho(A|B) = 1 \implies$ sistema indeterminato, $\infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni $\implies$ rette coincidenti
- $\rho(A|B) = 2 \implies$ sistema impossibile $\implies$ rette parallele

Più in generale (nello spazio anziché nel piano) consideriamo due rette, esprimendole come intersezioni tra piani:

$$r : \begin{cases} a_r x + b_r y + c_r z + d_r = 0 \\ a'_r x + b'_r y + c'_r z + d'_r = 0 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} a_s x + b_r s + c_s z + d_s = 0 \\ a'_s x + b'_s y + c'_s z + d'_s = 0 \end{cases}$$

Mettiamo queste due rette a sistema:

$$\begin{cases} a_r x + b_r y + c_r z + d_r = 0 \\ a'_r x + b'_r y + c'_r z + d'_r = 0 \\ a_s x + b_r s + c_s z + d_s = 0 \\ a'_s x + b'_s y + c'_s z + d'_s = 0 \end{cases}$$

Si omogenizza:

$$\begin{cases} a_r x + b_r y + c_r z + d_r t = 0 \\ a'_r x + b'_r y + c'_r z + d'_r t = 0 \\ a_s x + b_r s + c_s z + d_s t = 0 \\ a'_s x + b'_s y + c'_s z + d'_s t = 0 \end{cases}$$

E si studia il sistema. Tolta la soluzione banale $(0,0,0,0)$, che non ha significato geometrico, si cercano soluzioni.
Tutto dipende dal rango della matrice dei coefficienti, infatti per avere soluzioni non banali esso deve essere:

$$\rho < 4 \implies \begin{vmatrix} a_r & b_r & c_r & d_r \\ a'_r & b'_r & c'_r & d'_r \\ a_s & b_s & c_s & d_s \\ a'_s & b'_s & c'_s & d'_s \end{vmatrix} = 0$$

Se invece questo determinante risulta 0, le rette sono sghembe, ovvero non hanno alcun punto in comune: né proprio, né improprio, quindi non sono parallele e non si toccano (non sono complanari).

7.6 Intersezione di piani

Nello spazio, due piani distinti hanno sempre una retta in comune:

- Retta propria, in tal caso i due piani sono propri e non sono paralleli (sono incidenti)
- Retta impropria: uno dei due piani è improprio, oppure sono due piani paralleli

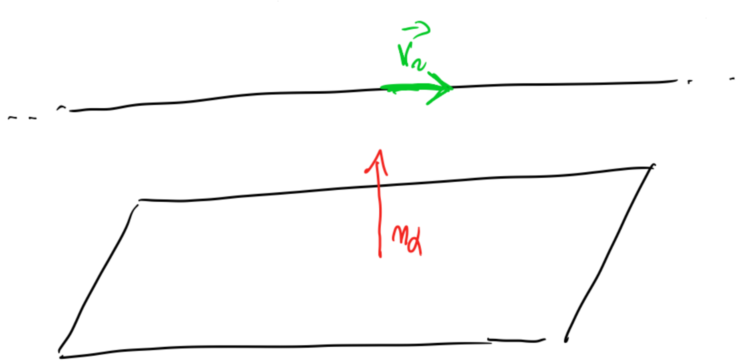
Nella pratica basta controllare i vettori normali: dati i piani $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ i vettori normali sono $\vec{n_\alpha} = (a, b, c)$ e $\vec{n_\beta} = (a', b', c')$. Distinguiamo quindi:

- $\vec{n_\alpha} = k\vec{n_\beta} \leftrightarrow \vec{n_\alpha} \parallel \vec{n_\beta} \leftrightarrow \alpha \parallel \beta$
- $\vec{n_\alpha} \neq k\vec{n_\beta} \leftrightarrow \vec{n_\alpha} \nparallel \vec{n_\beta} \leftrightarrow \alpha \nparallel \beta$, quindi saranno incidenti.

7.7 Posizioni reciproche di retta e piano

Una retta r può essere rispetto a un piano α:

- Giacente, ogni punto della retta apparterrà al piano.
  $r \subseteq \alpha \implies r \cap \alpha = \{r\}$
- Incidente, solo un punto P appartenente alla retta apparterrà anche al piano. $r \cap \alpha = \{P\}$
- Parallela, nessun punto proprio in comune tra retta e piano: $r \cap \alpha = \emptyset$. Il vettore direzione della retta sarà perpendicolare al vettore normale del piano: $v_r \perp n_\alpha$, come si vede dal disegno:



Nella pratica, per studiare la posizione reciproca di retta e piano, bisogna esprimere la retta con le sue equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

e inserire l'equazione del piano $\alpha = ax + by + cz + d = 0$, quindi si risolve il sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Se esso risulta determinato, retta e piano sono incidenti.
Se è impossibile, retta e piano sono paralleli.
Se è indeterminato abbiamo infinite soluzioni: infiniti punti per cui è verificato, ovvero tutti i punti della retta: la retta giace sul piano.

7.8 Fascio di rette

Un fascio di rette è l'insieme di rette generato dalla combinazione lineare di due rette:

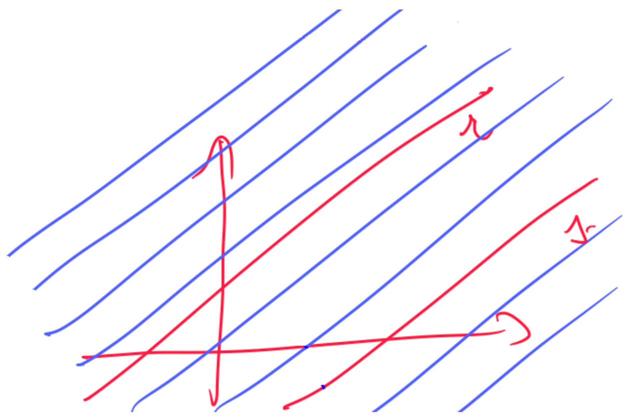
$$r : a_r x + b_r y + c_r$$

$$s : a_s x + b_s y + c_s$$

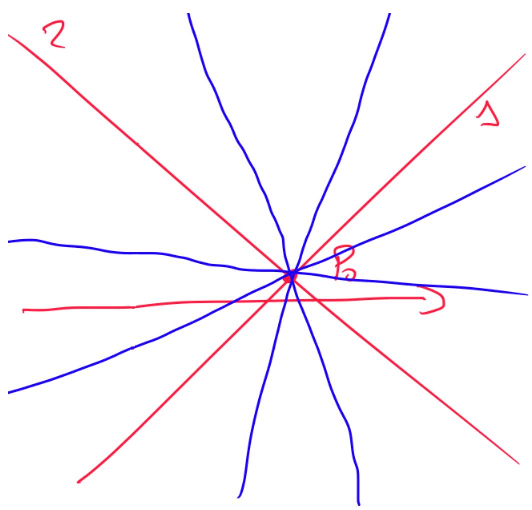
Possiamo esprimerlo come $\varphi_1 = \lambda r + \mu s$, ovvero:

$$\varphi_1 : \lambda(a_r x + b_r y + c_r) + \mu(a_s x + b_s y + c_s) = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Se $r /\!/ s$ il fascio è improprio, e comprende tutte le rette del piano parallele a r e s, come in figura:



Se $r \not\parallel s$ il fascio è proprio, e comprende tutte le rette del piano passanti per il punto di intersezione tra r e s, come in figura:



Il punto $P_0 = r \cap s$ è detto ”centro del fascio”.

Equazione del fascio con un solo parametro Tornando all’equazione che descrive il fascio, se dividiamo tutto per un parametro λ ci ritroviamo con

$$\varphi_2 = a_r x + b_r y + c_r + \frac{\mu}{\lambda}(a_s x + b_s y + c_s) = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

E se poniamo $\frac{\mu}{\lambda} = k$, ci troviamo con un'equazione più gestibile, dato che contiene un solo parametro anziché due:

$$\varphi_2 = a_r x + b_r y + c_r + k(a_s x + b_s y + c_s) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Quest'equazione contiene tuttavia una retta in meno rispetto alla precedente φ_1, e si tratta della retta che si ottiene quando $\lambda = 0$: non può essere rappresentata da nessun valore del parametro k (ci si può avvicinare quando $k \to \infty$, per questo talvolta viene chiamata **retta all'infinito** o **retta nascosta**).

7.9 Fasci di piani nello spazio

Dati due piani distinti

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

$$\pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

Si dice **fascio di piani** generato da π e π' l'insieme dei piani dello spazio la cui equazione è combinazione lineare di π e π', ovvero:

$$\varphi_1 : \{\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Come per il fascio di rette, possiamo scrivere l'equazione del fascio di piani usando un solo parametro:

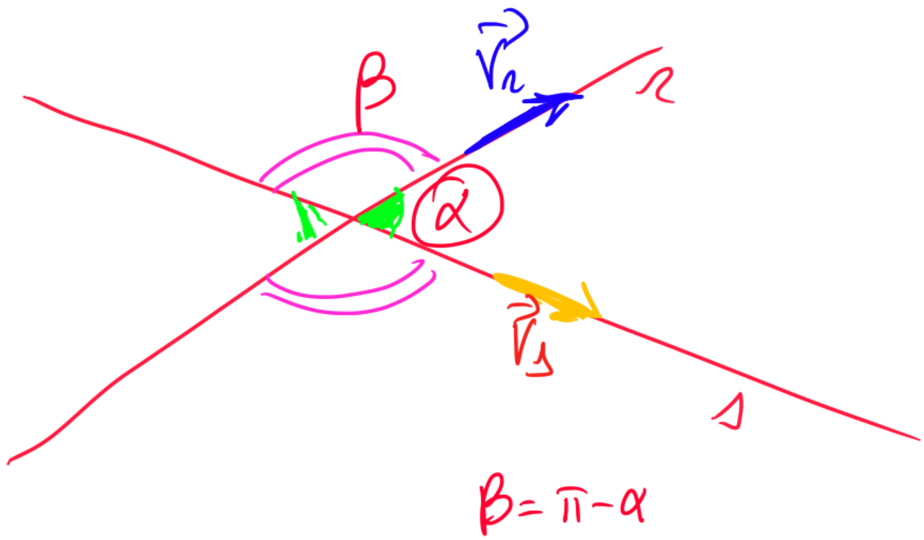
$$\varphi_2 : \left\{(ax + by + cz + d) + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0, \text{ dove } k = \frac{\mu}{\lambda}\right\}$$

Perdendo il piano che si otterrebbe quando $\lambda = 0$, ovvero:
$a'x + by' + c'z + d' = 0$.

Asse del fascio La retta dove si intersecano i piani π e π' è detta **asse del fascio**, la possiamo indicare con $r = \pi \cup \pi'$. Se i due piani sono paralleli, r è impropria e il fascio è, di conseguenza, improprio.

7.10 Angoli tra rette

Date due rette r e s incidenti, esse formano 4 angoli uguali a due a due. Per convenzione definiamo l'angolo tra le due rette quello acuto:



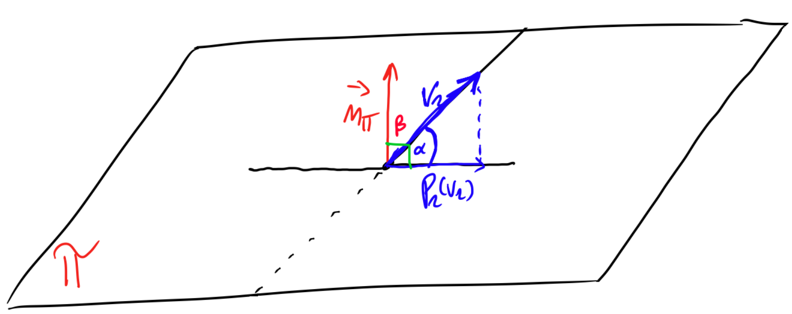
Lo indichiamo con $\alpha = \widehat{rs}$.
Dato che $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = |\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s| \cdot \cos \widehat{rs}$, possiamo trovare il coseno dell'angolo α come:

$$\cos \widehat{rs} = \left| \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} \right|$$

Il valore assoluto è posto dato che abbiamo definito α come angolo sempre acuto.

7.10.1 Angoli tra retta e piano

Dato un piano π e una retta come in figura:



Chiamiamo α l'angolo tra il vettore direzione della retta e la sua proiezione sul piano.
L'angolo β, che si forma tra il vettore normale al piano e il vettore direzione della retta, è complementare ad α, ovvero la loro somma fa $\frac{pi}{2}$.
Angoli complementari si scambiano seno e coseno:

$$\sin\alpha = \cos\beta \qquad \sin\beta = \cos\alpha$$

7.10.2 Simmetria

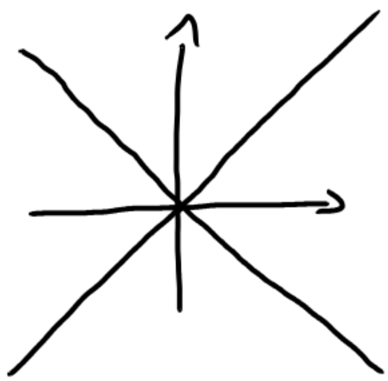
La simmetria è un tipo di isometria, ovvero una trasformazione che conserva le distanze (altri esempi sono traslazione, rotazione, glissosimmetria).
Consideriamo due tipi di simmetria:

- Centrale, ovvero rispetto a un punto C. Il simmetrico di un punto P rispetto a C è il punto P' tale che C risulti punto medio del segmento PP'.
- Assiale, ovvero rispetto a una retta. Il simmetrico di P rispetto alla retta a è il punto P' tale che a risulti asse (retta perpendicolare e passante per il punto medio) del segmento PP'.

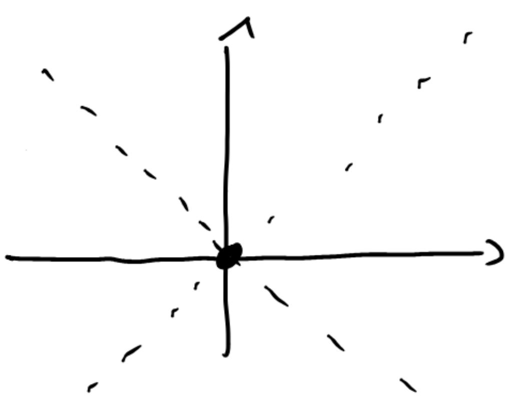
7.11 Coniche

Dato un piano cartesiano e un sistema di riferimento O, x, y, u, una **conica** è il luogo dei punti propri, impropri, reali o immaginari che soddisfano un'equazione omogenea di secondo grado in (x, y, t).

Es. $\gamma_1 : x^2 - y^2 = 0 \implies (x+y)(x-y) = 0 \leftrightarrow x+y = 0 \vee x-y = 0$
La conica γ_1 è spezzata nell'unione di due rette reali e distinte, come in figura:



Es. $\gamma_2 : x^2+y^2 = 0 \implies (x+iy)(x-iy) = 0 \leftrightarrow x+iy = 0 \vee x-iy = 0$, quindi γ_2 è spezzata nell'unione di due rette immaginarie e coniugate (l'unico punto reale è (0,0), come in figura:



7.11.1 Equazione di una conica

L'equazione di una conica in coordinate omogenee è:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x't' + 2a_{23}y't' + a_{33}t'^2 = 0$$

Dato che $\frac{x'}{t'} = x \implies x' = xt'$ e $\frac{y'}{t'} = y \implies y' = yt'$, possiamo riscrivere:

$$a_{11}x^2t'^2 + 2a_{12}xyt'^2 + a_{22}y^2t'^2 + 2a_{13}xt'^2 + 2a_{23}yt'^2 + a_{33}t'^2 = 0$$

E dividendo tutto per t'^2 otteniamo l'equazione in coordinate cartesiane:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Come suggeriscono i pedici, possiamo associare a quest'equazione una matrice simmetrica:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se effettuiamo i seguenti prodotti:

$$(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

il risultato è proprio l'equazione della conica in forma cartesiana: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.
Questo vuol dire che possiamo scrivere l'equazione della conica in forma compatta:
${}^T\underline{X}B\underline{X} = 0$, oppure ${}^T\underline{X}'B\underline{X}' = 0$, dove $\underline{X}$ e $\underline{X}'$ sono i vettori colonna.

Data B, chiamiamo A la sottomatrice associata ai termini di secondo grado, per esempio:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Traccia di una matrice Data una matrice A, la traccia di A è la somma degli elementi della diagonale, e si indica con $tr(A)$.

7.11.2 Conica riducibile

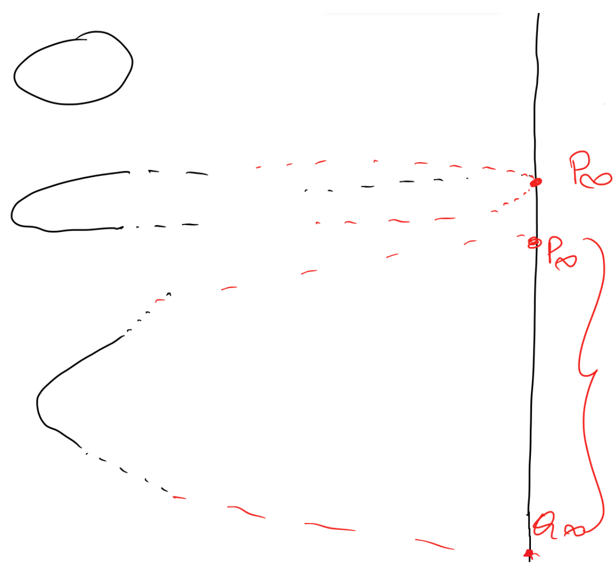
Se il polinomio $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ è riducibile, la conica si dice riducibile o **spezzata**.
Se esso risulta irriducibile, la conica è detta irriducibile: si tratta delle coniche che conosciamo (parabola, ellissi e iperbole).

7.11.3 Punti impropri di una conica

Distinguiamo i tre tipi di coniche irriducibili in base ai punti impropri, in particolare:

- L'ellisse ha due punti impropri immaginari e coniugati
- La parabola ha due punti impropri reali e coincidenti
- L'iperbole ha due punti impropri reali e distinti

Lo vediamo dall'immagine:



I punti impropri di una conica si trovano intersecando l'equazione della conica con la retta impropria, quindi:

$$\begin{cases} a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x't' + 2a_{23}y't' + a_{33}t'^2 = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Che diventa $a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 = 0$. Dividendo tutto per y'^2:

$$a_{11}\left(\frac{x'}{y'}\right)^2 + 2a_{12}\frac{x'}{y'} + a_{22} = 0$$

Chiamiamo $a_{11} = a,\ \ 2a_{12} = b,\ \ a_{22} = c$.

Avremo $\dfrac{\Delta}{4} = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac$. Se questa quantità è:

- > 0, l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte che sono:

  $$\frac{x'}{y'} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \implies x' = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}y',$$

  Quindi troviamo due punti impropri reali e distinti: la conica è un'**iperbole**

- $= 0$, l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti che sono:

  $$\frac{x'}{y'} = -\frac{2a_{12}}{2a_{11}} \implies x' = -\frac{a_{12}}{a_{11}}y'$$

  Ovvero $\left(-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}y', y', 0\right) = (a_{12}, -a_{11}, 0)$

  Ovvero due punti impropri reali e coincidenti, quindi la conica è una **parabola**

- < 0, l'equazione ammette due soluzioni immaginarie e coniugate che sono:

  $$\frac{x'}{y'} = \frac{-a_{12} \pm i\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{a_{11}} \implies x' = \frac{-a_{12} \pm i\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{a_{11}}y'$$

  Quindi troviamo due punti impropri immaginari e coniugati, quindi la conica è un'**ellisse**.

Classificazione tramite determinante Per distinguere tra le tre coniche irriducibili possiamo anche usare il determinante di A, infatti:
$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \implies a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\det(A)$, quindi se $|A|$ è:

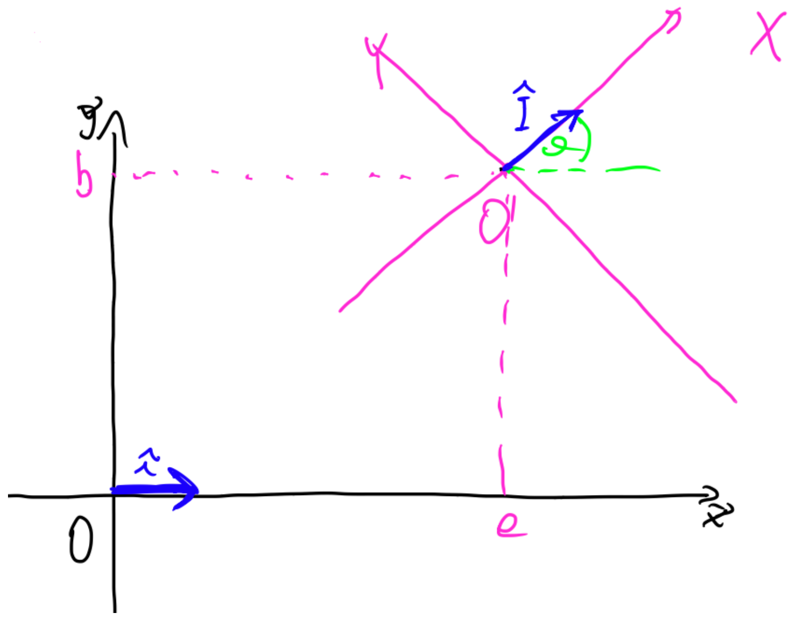
- $> 0 \implies$ ellisse
- $= 0 \implies$ parabola
- $< 0 \implies$ iperbole

Quando una conica è spezzata allora $\det(B) = 0 \implies \rho(B) < 3$:

- $\rho(B) = 1 \implies$ la conica si spezza in rette coincidenti
- $\rho(B) = 2 \implies$ la conica si spezza in rette distinte

7.12 Rototraslazione

Dati due sistemi di riferimento $O, \vec{x}, \vec{y}, u$ e O', X, Y, u come in figura:



Per passare da O', X, Y a $O, \vec{x}, \vec{y}$ è necessario effettuare una rototraslazione (composizione tra rotazione e traslazione), ovvero il seguente cambio di variabili:

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta + a \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta + b \end{cases}$$

Dove a e b sono le coordinate del punto O' e θ l'angolo individuato dalle direzioni dei versori degli assi delle ascisse (in blu): $\theta = \hat{\imath} \cdot \hat{I}$.

In forma matriciale possiamo scrivere la rototraslazione come $\underline{x} = Q\underline{X}$, dove:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a \\ \sin\theta & \cos\theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.13 Forma canonica (coniche) e invarianti ortogonali

Dimostrazione non richiesta. Data una conica C di equazione ${}^T\underline{x}B\underline{x} = 0$ è sempre possibile effettuare una rototraslazione di matrice Q, tale che C nel nuovo sistema di riferimento abbia una delle seguenti equazioni:

- $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$, equazione canonica del primo tipo
- $\beta y^2 = 2\gamma x$, equazione canonica del secondo tipo

Inoltre, se B e A sono rispettivamente la matrice associata a C e la sottomatrice dei termini di 2° grado nel sistema di riferimento $O, \vec{x}, \vec{y}, u$, mentre B' e A' sono rispettivamente la matrice associata a C e la sottomatrice dei termini di 2° grado nel sistema di riferimento O, X', Y', u, allora:

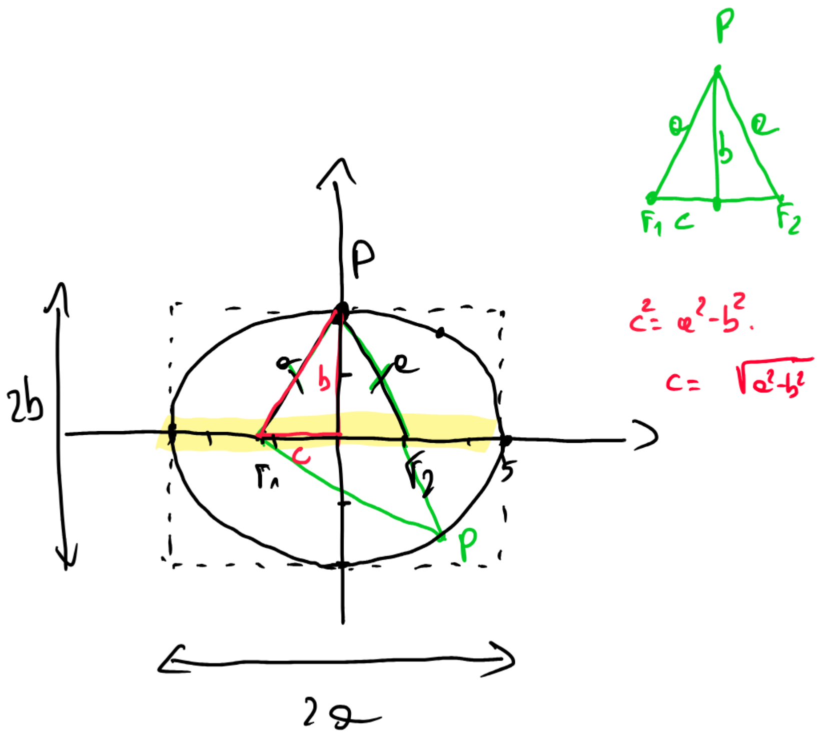
- B e B' hanno stesso determinante e stesso rango
- A e A' sono simili (stesso polinomio caratteristico, stesso determinante e stessa traccia)

Esistono quindi 3 scalari che non variano con una rototraslazione, chiamati infatti **invarianti ortogonali**:

- $|B|$ (quindi anche $\rho(B)$)
- $|A|$ (quindi anche $\rho(A)$)
- $tr(A)$

7.14 Ellisse

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze da due punti fissi detti "fuochi" è costante.
È una conica di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, quindi ponendo $\frac{1}{a^2} = \frac{\alpha}{\gamma}$ e $\frac{1}{b^2} = \frac{\beta}{\gamma}$ notiamo che ha un'equazione del primo tipo, ovvero $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$.



Se $a > b$ l'ellisse è orizzontale, se $b > a$ è verticale, se $b = a$ è una circonferenza.
La distanza $2a$ (o $2b$ nel caso di ellisse verticale) è detta **asse focale** o **asse maggiore**.

Fuochi I fuochi dell'ellisse sono i due punti F_1, F_2 di coordinate

- $(\pm c, 0)$ con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, se l'ellisse è orizzontale
- $(0, \pm c)$ con $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, se l'ellisse è verticale

Condizioni di realtà per l'ellisse Dall'equazione dell'ellisse si ricavano le condizioni $-b \leq y \leq b$ e $-a \leq x \leq a$: se non sono rispettate, l'ellisse è immaginaria.
Possiamo affermare che:

- $(\alpha + \beta) \cdot |B| > 0 \implies$ ellisse reale
- $(\alpha + \beta) \cdot |B| < 0 \implies$ ellisse immaginaria

Quindi, più praticamente:

- $tr(A) \cdot |B| > 0 \implies$ ellisse reale
- $tr(A) \cdot |B| < 0 \implies$ ellisse immaginaria

Vertici I vertici di un'ellisse sono:

- $(\pm a; 0)$ se $a > b$
- $(0; \pm b)$ se $b > a$

Simmetria L'ellisse ha due simmetrie:

- Assiale, rispetto agli assi x e y
- Centrale, rispetto all'origine

Direttrici Per un'ellisse possiamo considerare le direttrici d_1 e d_2, dalle coordinate:

- $x = \pm\frac{a^2}{c}$ se $a > b$.
- $y = \pm\frac{b^2}{c}$ se $a < b$.

Eccentricità

$$\text{I rapporti } \frac{PF_1}{d(P, d_1)} \text{ e } \frac{PF_2}{d(P, d_2)}$$

Sono sempre costanti al variare di P sull'ellisse, in particolare sono uguali a una costante e detta **eccentricità**, che risulta sempre $e < 1$. Per calcolarla:

- $e = \frac{c}{a}$ se $a > b$
- $e = \frac{c}{b}$ se $a < b$

7.15 Iperbole

L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano la cui differenza delle distanze da punti fissi detti "fuochi" è costante.

L'equazione di un'iperbole con assi di simmetria pari ad assi cartesiani è:

- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se i fuochi sono sull'asse delle x
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ se i fuochi sono sull'asse delle y

Notiamo che è del 1° tipo, ponendo:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{a^2} \quad \text{e} \quad \frac{\beta}{\gamma} = -\frac{1}{b^2}$$

Fuochi Detta $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ la **semidistanza focale**, calcoliamo i fuochi F_1, F_2 con:

- $(\pm c, 0)$ se l'iperbole interseca l'asse delle x
- $(0, \pm c)$ se l'iperbole interseca l'asse delle y

Asintoti e punti impropri Gli asintoti dell'iperbole sono due rette alle quali l'iperbole si avvicina ma non tocca mai, tranne nei punti impropri. Essi hanno equazione $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Per calcolarli, dobbiamo prima trovare i punti impropri omogenizzando l'equazione dell'iperbole e intersecandola col piano improprio.
Per esempio, si omogenizza l'equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ per ottenere:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = t'^2 \implies \frac{x^2b^2 - y^2a^2}{a^2b^2} = t'^2 \implies x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2t'^2$$

$$\begin{cases} x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2t'^2 \\ t' = 0 \end{cases} \implies x^2b^2 - y^2a^2 = 0$$

Quindi:

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}y^2 \implies x = \pm\frac{a}{b}y \implies \left(\pm\frac{a}{b}y; y; 0\right) = \left(1; \pm\frac{b}{a}; 0\right)$$

Quindi i due punti impropri dell'iperbole sono:

$$P_\infty = \left(1; \frac{b}{a}; 0\right) \qquad Q_\infty = \left(1; -\frac{b}{a}; 0\right)$$

O equivalentemente possiamo dire che:

$$\left(1; \frac{b}{a}\right) \qquad \left(1; -\frac{b}{a}\right)$$

Sono i vettori direzione degli asintoti. Allo stesso modo si trovano i punti impropri per le altre coniche.

Direttrici Nell'iperbole le direttrici sono due rette di equazione:

- $x = \pm\frac{a^2}{c}$ se l'iperbole ha fuochi sull'asse delle x
- $y = \pm\frac{b^2}{c}$ se l'iperbole ha fuochi sull'asse delle y

Eccentricità Anche per l'iperbole:

$$\frac{PF_1}{d(P,d_1)} = \frac{PF_2}{d(P,d_2)} = e$$

Con la differenza (rispetto all'ellisse) che vale sempre $e > 1$. Per calcolarla:

- $e = \frac{c}{a}$ se l'iperbole ha fuochi sull'asse delle x
- $e = \frac{c}{a}$ se l'iperbole ha fuochi sull'asse delle y

Iperbole equilatera Un caso particolare di iperbole è quando:
$a = b \implies x^2 - y^2 = \pm a^2$, si tratta di **iperbole equilatera**. In questo caso la sua matrice sarà:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm a^2 \end{pmatrix}$$

Quindi $tr(A) = 0$.
Nella pratica, per capire se una conica è un'iperbole equilatera, bisogna verificare che i due asintoti abbiano direzioni perpendicolari tra loro: $(1,1)$ e $(1,-1)$; questo avviene quando i punti impropri sono $(1,\pm 1,0)$.

Proposizione $tr(A) = 0$ caratterizza le coniche contenenti la retta impropria oppure quelle che hanno due punti impropri reali e distinti in direzioni ortogonali. In quest'ultimo caso la conica può essere spezzata in rette ortogonali (riducibile), oppure iperbole equilatera (irriducibile).

7.16 Parabola

La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano P equidistanti da un punto fisso detto "fuoco" e da una retta fissa detta "direttrice", quindi $\overline{PF} = d(P,d)$

Fun fact Può essere costruito un sistema di "specchi ustori" che, grazie alla loro forma parabolica, convogliano i raggi di luce nel punto di fuoco, causando un aumento della temperatura.
Secondo la leggenda (probabilmente falsa) Archimede usò questo sistema per difendere Siracusa contro le navi romane, bruciandole.

Equazione L'equazione della parabola orizzontale in forma canonica (asse di simmetria = asse x) è $y^2 = 2px$, quindi riconducibile a un'equazione del 2° tipo.
Se $p > 0$, la parabola è orientata verso destra, se $p < 0$ verso sinistra.
A differenza di quanto visto con l'ellisse, parabola e iperbole non hanno simmetria centrale, ma assiale.

Direttrice ed eccentricità La direttrice si trova con $x = -\frac{p}{2}$.
L'eccentricità è il rapporto:

$$\frac{\overline{PF}}{d(P,d)} = e = 1$$

7.17 Circonferenza

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro; tale distanza è detta **raggio**.
È un oggetto che risente solo di traslazione, non di rotazione. Si tratta di un caso particolare di ellisse ($a = b$)

Dalla definizione si ricava l'equazione, dato che:

$$\overline{PC} = r \implies \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} = r$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \implies x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2y\beta + \beta^2 = r^2$$

Sistemando i termini:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

Ponendo:

$$\begin{cases} -2\alpha = a \\ -2\beta = b \\ \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c \implies r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione generica di una circonferenza:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

La condizione di realtà della circonferenza è che il termine sotto radice sia positivo, ovvero $\alpha^2 + \beta^2 - c > 0 \implies \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$: quando esso è negativo, abbiamo una circonferenza immaginaria.
Quando invece $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 0$, la circonferenza è detta "degenere" e il suo unico punto reale è il centro: si tratta di una conica spezzata in due rette immaginarie e coniugate.

Punti impropri Calcolando i punti impropri di una generica circonferenza (si omogenizza l'equazione e si interseca col piano improprio) si trovano sempre i punti $(1; i; 0)$ e $(1; -i; 0)$, il che indica che ogni circonferenza del piano passa per essi, motivo per cui vengono chiamati **punti ciclici**.

7.18 Centro di simmetria di una conica

Sia Γ una conica del 1° tipo (ellisse o iperbole). Si dimostra (non lo facciamo) che se Γ ha centro di simmetria (a, b), allora (a, b) è soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

Possiamo esprimere tale sistema in forma matriciale considerando la matrice B', ovvero quella matrice ottenuta da B ma togliendo la terza riga:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questo serve a individuare centri di simmetria anche quando l'equazione della conica è strana.

7.19 Retta tangente

Data una conica Γ, si dice che la retta t è tangente in un punto $P_0 \in \Gamma$ se essa incontra Γ in due punti coincidenti in P_0.

Data una conica irriducibile $\Gamma :{}^T\underline{x}B\underline{x} = 0$ e un suo punto $P_0 = \underline{x_0}$, allora esiste la retta tangente a Γ nel punto P_0 e ha equazione ${}^T\underline{x_0}B\underline{x} = 0$

7.20 Curva algebrica

Una curva algebrica C di ordine n è il luogo dei punti propri, impropri, reali o immaginari le cui coordinate soddisfano un'equazione omogenea $F(x', y', t') = 0$, dove $F(x', y', t')$ è un polinomio omogeneo di grado n.
N.B. quando $n = 2$, questa è la definizione di conica.

Se $F = F_1^{n_1} \cdot F_2^{n_2} \cdot \dots \cdot F_{r-1}^{n_{r-1}} \cdot F_r^{n_r}$ con $F_1, \dots, F_r$ fattori irriducibili, allora la curva C di equazione $F = 0$ è costituita da punti che soddisfano le equazioni:

- $F_1 = 0$ n_1 volte
- $\vdots$
- $F_r = 0$ n_r volte

Dove F_i sono le componenti irriducibili (di grado n_i) della curva C.

7.21 Teorema di Bezout

Date due curve:

- C_1 di ordine n
- C_2 di ordine m

Esse o hanno una componente in comune (es. una retta), oppure si incontrano sempre in $n \cdot m$ punti.
Caso particolare: due coniche hanno in comune o una retta o 4 punti.

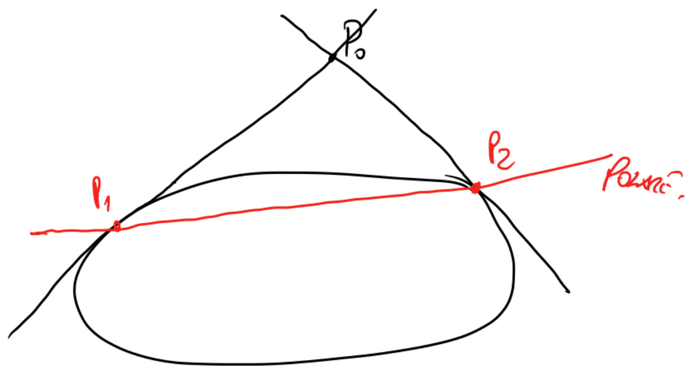
Teorema Per 5 punti distinti del piano passa una ed una sola conica, oppure, se almeno 4 dei 5 punti del piano sono allineati, ne passano infinite.

Dimostrazione: supponendo per assurdo che per 5 punti distinti passino 2 coniche, stiamo contraddicendo il teorema di Bezout, dato che afferma che due coniche distinte possono avere 4 (e non 5) punti in comune.

7.22 Polarità rispetto a una conica

Si dice "polare" del punto P_0 rispetto alla conica Γ la retta di equazione $\underline{x_0} B \underline{x} = 0$.

Rispetto alla definizione di tangente cambia solo che qua non è specificato che P_0 sia nella conica (se lo è, polare e tangente coincidono); graficamente:



La funzione che associa a ogni punto P_0 la sua retta polare p_0 rispetto ad una conica irriducibile Γ è detta **polarità**, ed è una funzione biettiva: $P_0 \leftrightarrow p_0$.

7.23 Teorema di reciprocità

Rispetto alla stessa conica Γ, un punto P_0 appartiene alla polare p_1 se e solo se il punto P_1 appartiene alla polare p_0:
$P_0 \in p_1 \iff P_1 \in p_0$

7.23.1 Punti coniugati

Due punti P_0 e P_1 tali che uno appartiene alla polare dell'altro sono detti **coniugati**.
Un punto si dice **autoconiugato** se appartiene alla propria polare (che sarà una tangente).
Due rette si dicono coniugate se una contiene il polo dell'altra.

7.24 Fascio di coniche

Un fascio di coniche è l'insieme delle coniche la cui equazione è data da una combinazione lineare delle coniche Γ_1 e Γ_2 di equazioni $\Gamma_1 : F_1 = 0$ e $\Gamma_2 : F_2 = 0$, quindi:
$\lambda F_1 + \mu F_2 = 0$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e non contemporaneamente nulli.

Ricordiamo che, come per gli altri fasci studiati, si può dividere l'equazione del fascio per un parametro λ perdendo una conica.

7.24.1 Punti base

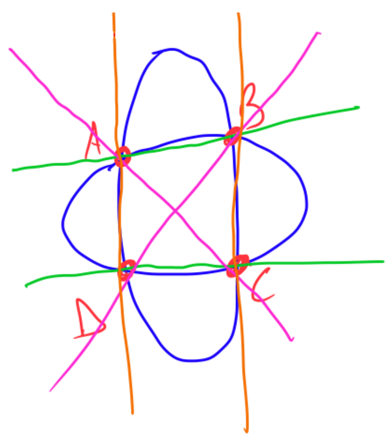
Nel fascio $\lambda F_1 + \mu F_2 = 0$ i punti $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ sono detti "punti base", in quanto tutte le coniche del fascio passano per essi.

Proposizione In un fascio di coniche ci sono tre spezzate oppure tutte le coniche del fascio sono spezzate.

Teorema Un fascio di coniche è determinato in modo unico dalle sue coniche.

Costruzione di fasci Abbiamo detto che Il fascio di coniche si può ottenere come combinazione lineare di due coniche che lo costituiscono (per semplicità scegliamo di usare delle spezzate). Ci si può imbattere in fasci di 5 tipi diversi:

1. 4 Punti base distinti

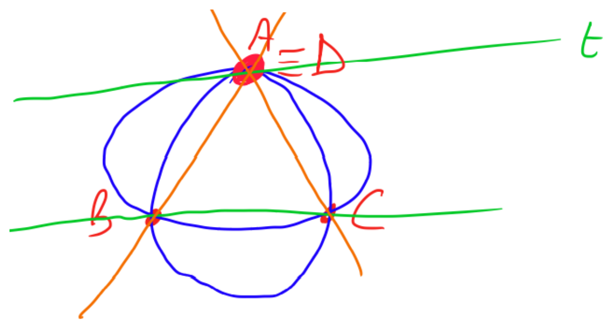


   In particolare si possono notare 3 spezzate che passano per tutti i punti base:

   - $\Sigma_1 : AB \cup DC$
   - $\Sigma_2 : AD \cup BC$

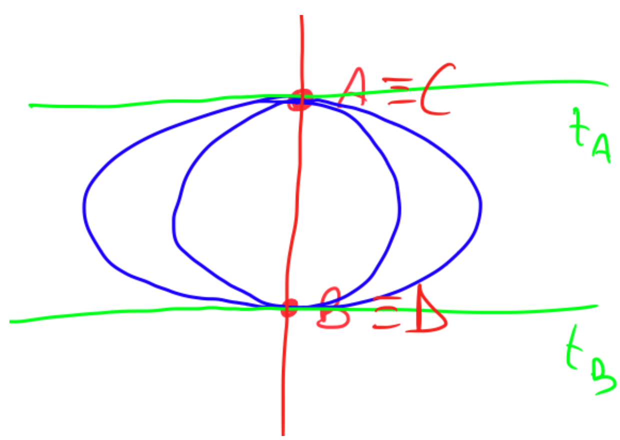
- $\Sigma_3 : AC \cup BD$

2. 4 Punti base di cui 1 doppio (tangenza)



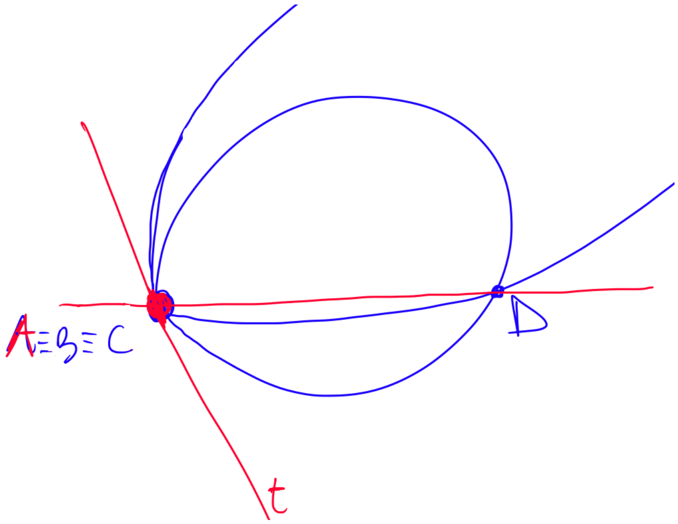
Le spezzate sono $\Sigma_1 : t \cup BC$ e $\Sigma_2 : AB \cup BC$ contata due volte.

3. 4 punti coincidenti a due a due (bitangenza)



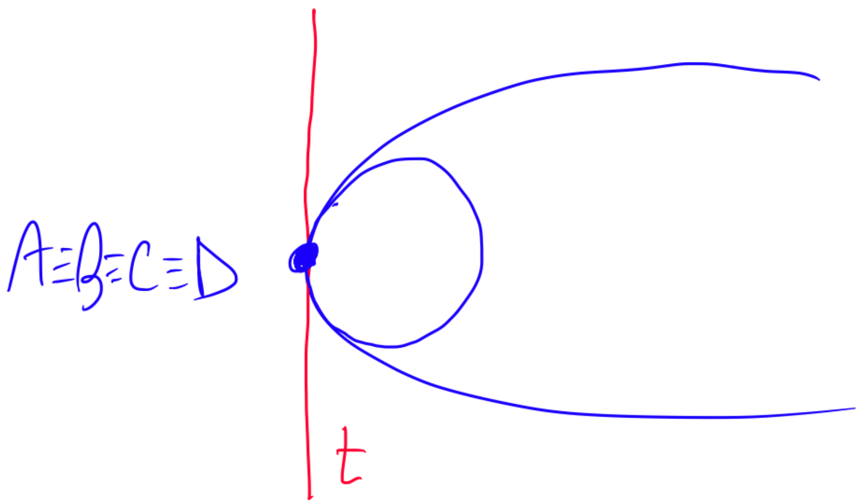
Le spezzate sono $\Sigma_1 : t_A \cup t_B$ e $\Sigma_2 : AB^2$ contata due volte.

4. 4 Punti di cui 3 coincidono (osculamento)



Le spezzate sono $\Sigma_1 : t \cup AD$ contata 3 volte.

5. 4 Punti coincidenti (iperosculamento)



La spezzata in rette coincidenti è t, contata 3 volte.

Studiare il fascio significa trovare tutti i suoi punti base e tutte le sue coniche (irriducibili, spezzate e anche quella nascosta, cioè per $k \to \infty$).

7.25 Quadriche

Le quadriche sono figure tridimensionali illimitate ma vuote all'interno: l'equazione di una quadrica descrive solo la sua area, mentre se si vuole studiare il volume bisogna usare disequazioni.

Vertice Il vertice V di una quadrica Q è quel punto tale che $\forall P \in Q \implies \overline{PV} \subseteq Q$.
Le quadriche con vertice sono dette **degeneri**.

Tipi di quadriche Classifichiamo le quadriche in:

- Degeneri, che a loro volta possono avere:
  - Un vertice:
    - Proprio $\Longrightarrow$ Cono
    - Improprio $\Longrightarrow$ Cilindro
  - Infiniti vertici:
    - Retta di vertici $\Longrightarrow$ spezzata in piani distinti
    - Piano di vertici $\Longrightarrow$ spezzata in piani coincidenti
- Non degeneri, a loro volta:
  - 1° tipo, e in base al segno degli autovalori, nonché dei coefficienti dell'equazione in forma canonica:
    - Ellissoidi
    - Iperboloidi
  - 2° tipo, cioè paraboloidi

Si nota che così come le coniche si spezzano in rette (distinte, reali, immaginarie), le quadriche si spezzano in piani.

7.25.1 Equazione di una quadrica

La quadrica è il luogo dei punti propri, impropri, reali e immaginari che soddisfano la seguente equazione (versione omogenea):

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}xt+2a_{24}yt+2a_{34}zt+a_{44}t^2=0$$

La matrice associata alla quadrica sarà dunque:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Dove A è la matrice del complesso dei termini di 2° grado.
In forma compatta possiamo scrivere ${}^t\underline{x}'B\underline{x}' = 0$, dove:

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^t\underline{x}' = \begin{pmatrix} x' & y' & z' & t' \end{pmatrix}$$

7.25.2 Intersezioni con quadriche

L'intersezione tra un piano π e una quadrica Q è:

- Una conica (detta **conica sezione**)
- Il piano stesso, se esso è interamente contenuto nella quadrica (che sarà quindi spezzata), quindi $\pi \subseteq Q$

L'intersezione di una retta r con una quadrica è:

- Due punti
- La retta stessa, se essa è interamente contenuta nella quadrica (spezzata), quindi $r \subseteq Q$

Conica all'infinito Se si interseca una quadrica col piano improprio:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + \cdots + a_{44}t'^2 = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

La conica sezione che si ottiene è indicata con C_∞ e viene detta conica all'infinito: appartiene al piano improprio (quindi il piano di equazione $t' = 0$).
La sua matrice associata è semplicemente A, la sottomatrice dei termini di 2° grado della quadrica, quindi $|A| \neq 0 \iff C_\infty$ è irriducibile.

Punti impropri della conica sezione Data una quadrica Q la cui conica sezione col piano π è Γ, i punti impropri di Γ sono:
$\Gamma \cap \pi_\infty = (Q \cap \pi) \cap \pi_\infty = (Q \cap \pi_\infty) \cap (\pi \cap \pi_\infty) = C_\infty \cap (\pi \cap \pi_\infty)$.
Ovvero i punti che hanno in comune la conica all'infinito e la retta impropria del piano π.

7.26 Vertici di una quadrica

Teorema Se Q è una quadrica con più di un vertice allora è spezzata, e quindi ha infiniti vertici.

Dal sistema $B\underline{x} = \underline{0}$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo capire quanti vertici ha una quadrica, infatti se le soluzioni sono:

- Una (quella banale $(0,0,0,0)$) $\Longrightarrow$ nessun vertice
- $\infty^1 \implies$ 1 vertice
- $\infty^2 \implies$ una retta di vertici
- $\infty^3 \implies$ un piano di vertici

Quindi, se $\rho(B)$ è:

- $4 \Longrightarrow$ nessun vertice (non degenere)
- $3 \Longrightarrow$ un vertice (cono se proprio, cilindro se improprio)
- $2 \Longrightarrow$ una retta di vertici $\Longrightarrow$ spezzata in piani distinti
- $1 \Longrightarrow$ un piano di vertici $\Longrightarrow$ spezzata in piani coincidenti

Teorema Sia Q un cono o un cilindro, allora tutti e soli i piani che secano Q in una spezzata sono quelli passanti per il vertice:
$Q \cap \pi$ è una spezzata $\iff V \in \pi$

Corollario Un cono ammette sezioni di tutti i tipi (parabola, ellissi, iperbole)
Un cilindro ammette sezioni di un solo tipo: se π non passa dal vertice abbiamo:

- Ellissi $\leftrightarrow$ cilindro ellittico $\leftrightarrow C_\infty$ spezzata in rette immaginarie e coniugate
- Parabola $\leftrightarrow$ cilindro parabolico $\leftrightarrow C_\infty$ spezzata in due rette reali e coincidenti
- Iperbole $\leftrightarrow$ cilindro iperbolico $\leftrightarrow C_\infty$ spezzata in due rette reali e distinte

7.27 Retta tangente a una quadrica

Una retta si dice tangente a Q se interseca Q in due punti coincidenti, oppure se giace su Q.

Il piano che contiene tutte le rette tangenti a Q in P_0 si dice **piano tangente** a Q in P_0.

L'equazione del piano tangente a Q nel punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0, 1)$ è ${}^t\underline{x_0}B\underline{x} = 0$

Teorema Sia Q una quadrica irriducibile, sia $P_0 \in Q$ (non vertice) e sia π_0 il piano tangente a Q in P_0, allora la conica sezione col piano tangente, ovvero $\Gamma = Q \cap \pi_0$, è spezzata.

Vale il viceversa? Analizzando i sottocasi: se $\Gamma = Q \cap \pi_0$ è spezzata in:

- Rette distinte r e $s \implies r \cap s = P_0$ è un punto che non è vertice per Q e il piano π_0 è tangente a Q in P_0
- Rette coincidenti in $r \implies \pi$ è il piano tangente a Q in r (r giace su Q e non è una retta di vertici)

7.27.1 Teorema del segno del determinante di B

"Continuo" del teorema precedente. Data una quadrica Q e il piano π_0 tangente a Q in P_0, la conica sezione tra essi è spezzata in:

- Rette reali e distinte $\iff |B| > 0$
- Rette reali e coincidenti $\iff |B| = 0$
- Rette immaginarie e coniugate $\iff |B| < 0$

Nel primo caso P_0 è detto **punto iperbolico**.
Nel secondo caso P_0 è detto **punto parabolico**.
Nel terzo caso P_0 è detto **punto ellittico**.

Se Q è irriducibile e ha un punto iperbolico, parabolico o ellittico, allora tutti i suoi punti saranno rispettivamente iperbolici, parabolici o ellittici. Vale il viceversa.

7.28 Teorema della forma canonica (quadriche)

Sia Q una quadrica non degenere, allora esiste un sistema di riferimento O', x, y, z rispetto al quale la quadrica ha una delle due equazioni:

- 1° tipo: $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta$
- 2° tipo: $\beta y^2 + \gamma z^2 = 2\delta x$

Dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$

Riconoscere la quadrica dall'equazione È possibile riconoscere il tipo di quadrica in base ai segni dei termini della sua equazione canonica, per esempio:

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{5} = 1 \rightarrow$$ ELLISSOIDE REALE

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{5} = -1 \rightarrow$$ ELLISSOIDE IMMAGINARIO

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{5} = 1 \rightarrow$$ IPERBOLOIDE IPERBOLICO.

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{5} = 1. \rightarrow$$ IPERBOLOIDE ELLITTICO.

Ellissoidi e iperboloidi hanno equazione canonica del 1° tipo, mentre i paraboloidi di 2° tipo (come per le quadriche).

Se i segni dei primi 3 termini sono tutti concordi, si tratta di ellissoide.
Se essi risultano invece discordi, si tratta di iperboloide.

Allo stesso modo è possibile riconoscere il tipo di paraboloide dal segno dei coefficienti:

$$\frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 2x \rightarrow$$ PARABOLOIDE ELLITTICO

$$\frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 2x \rightarrow$$ PARABOLOIDE IPERBOLICO.

Regola di Cartesio Dato un polinomio a coefficienti reali, ad ogni variazione di segno nei coefficienti corrisponde una possibile radice positiva; ad ogni permanenza una possibile radice negativa. Esempio: $x^2-10x+24 = 0 \implies$ 2 radici positive.

$x^2 - 2x - 24 = 0 \implies$ una radice positiva e una negativa.

7.28.1 Classificazione finale di quadriche