

Analisi matematica 2



Antonio Pio Caruso

Basato sulle lezioni di Fabio Raciti

Argomenti

Chapter	Funzioni reali di più variabili	Page 6
1.1	Prime definizioni	6
1.2	Limiti	8
1.3	Funzioni continue	11
1.4	Spazi euclidei	17
1.5	Calcolo differenziale in \mathbb{R}^n	20
Chapter	Equazioni differenziali	Page 35
Chapter	Curve e forme differenziali	Page 52
Chapter	Misura e integrazione	Page 66
4.1	Integrali doppi secondo Riemann	66
4.2	Integrali tripli secondo Riemann	71
Chapter	Successioni e serie di funzioni	Page 74
5.1	Successioni di funzioni	74
5.2	Serie di funzioni	77
Chapter	Esercizi	Page 85
6.1	Funzioni reali di più variabili	85
6.2	Equazioni differenziali	86
6.3	Misura e integrazione	86
	Integrali tripli — 86 • Passaggio a coordinate cilindriche — 86 • Passaggio a coordinate sferiche — 87	
6.4	Successioni e serie di funzioni	87

Introduzione

Queste dispense provengono da appunti presi a lezione, e dunque possono contenere delle sviste. Se ne trovate, potete mandarle a CRSNNP02L04C351I@studium.unict.it.

Informazioni sul corso

- **Libri:**

- Pagani Salsa, analisi 1.
- Pagani Salsa, analisi 2.
- Fanciullo, Raciti, Giacobbe, esercizi di analisi matematica 2.

- **Prerequisiti:**

- Padronanza di concetti di analisi 1.
- Conoscenza di alcuni concetti di algebra lineare (autovalori, matrici e determinanti, dipendenza lineare)

- **Esame:** Gli studenti dovranno affrontare un esame scritto che richiede:

- 1 teorema
- 2 definizioni (con esempi o controesempi)
- 3 esercizi (di cui uno facile)

Il minimo per passare (con 18) è fornire in modo totalmente corretto 1 definizione, 1 teorema e 1 esercizio; il punteggio massimo è 26, per aumentare il voto si può optare per l'orale (facoltativo). È possibile fornire dimostrazioni non viste a lezione, ma bisogna riportare la fonte.

- **Frequenza:** Non obbligatoria.

Notazione

- Indicheremo il generico punto di \mathbb{R}^n con $x = (x_1, \dots, x_n)$, senza scrivere \vec{x} . In \mathbb{R}^2 , $x = (x, y)$ e in \mathbb{R}^3 , $x = (x, y, z)$.
- Per indicare che un insieme X è sottoinsieme di U scriveremo sempre $X \subset U$, a prescindere dall'inclusione stretta o meno. Eventualmente l'inclusione stretta si indicherà in modo più formale con $X \subsetneq U$.

- Il simbolo " $=$ " denota un'uguaglianza, " $=:$ " una definizione e " \equiv " un'equivalenza; a volte sarà usato $=$ al posto degli altri, per semplificare.

Chapter 1

Funzioni reali di più variabili

1.1 Prime definizioni

Una funzione è detta **reale** se ha valori in \mathbb{R} .

Tratteremo funzioni reali di più variabili reali, ovvero $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 1.1: Intorno aperto

Dato un punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$, un **intorno aperto** di centro x^0 e raggio r è l'insieme:
 $I(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x^0) < r\}$.

Definizione 1.2: Intorno chiuso

Dato un punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$, un **intorno chiuso** di centro x^0 e raggio r è l'insieme:
 $I(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x^0) \leq r\}$.

In queste definizioni, $d(x, x^0)$ è la classica distanza euclidea tra i due punti x e x^0 , pari a:

$$d(x, x^0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2}.$$

Possiamo indicare un intorno di raggio r e centro x^0 anche con $I_r(x^0)$.

Esempio 1.1 (Per $n = 1$)

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$:

$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x - x_0)^2} < r\}$. Volendo, possiamo riscrivere la condizione:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_0)^2} < r &\implies |x - x_0| < r \implies \begin{cases} x - x_0 \geq 0 \\ x - x_0 < r \end{cases} \cup \begin{cases} x - x_0 \leq 0 \\ x_0 - x > r \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} x \geq x_0 \\ x < x_0 + r \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq x_0 \\ x < x_0 - r \end{cases} \implies x_0 - r < x < x_0 + r. \end{aligned}$$

Esempio 1.2 (Per $n = 2$)

Dato $x^0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$I(x^0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}.$$

Visivamente tale intorno è un cerchio con centro (x_0, y_0) e raggio r .

Definizione 1.3: Sottoinsieme limitato

Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ e $x^0 \in X$.

Diremo che l'insieme X è "**limitato**" se esiste un intorno di centro x^0 che lo contiene, ovvero se $\exists r : X \subset I(x^0, r)$.

Definizione 1.4: Punto di accumulazione

Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Il punto x_0 è detto "punto d'accumulazione" per X se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto (possiamo anche dire infiniti) di X diverso da x_0 , ovvero:

$$\forall I(x_0, r) \implies \{I(x_0, r) \setminus \{x_0\}\} \cap X \neq \emptyset.$$

Notiamo che un punto di accumulazione di un insieme può non appartenere all'insieme stesso.

Definizione 1.5: Punto interno

Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in X$.

Il punto x_0 è detto "interno" a X se esiste un suo intorno interamente contenuto in X , ovvero se $\exists r : I(x_0, r) \subset X$.

Definizione 1.6: Punto esterno

Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Diremo che x_0 è "**punto esterno**" a X se esiste un suo intorno interamente contenuto nel complementare di X , ovvero se $\exists r : I(x_0, r) \subset CX$.

Possiamo notare che un punto può essere né interno né esterno rispetto a un insieme, e in tal caso sarà di frontiera:

Definizione 1.7: Punto di frontiera

Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in X$.

x_0 è detto "punto di frontiera" se non è né interno né esterno a X , ovvero se in ogni suo intorno cadono sia punti di X che punti non appartenenti a X :

$$\forall r \implies I(x_0, r) \cap X \neq \emptyset \wedge I(x_0, r) \cap CX \neq \emptyset.$$

Definizione 1.8: Insieme derivato

Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un insieme.

L'insieme di tutti i punti di accumulazione di X è detto "insieme derivato", e si indica con DX .

Definizione 1.9: Insieme aperto

Un insieme $X \subset \mathbb{R}^n$ è aperto se ogni suo punto è interno.

Definizione 1.10: Insieme chiuso

Un insieme $X \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso se il suo complementare è aperto.
In alternativa, X è chiuso se contiene il suo derivato: $DX \subset X$.

Definizione 1.11: Insieme chiusura

Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un insieme.
l'insieme "chiusura di X " è l'unione di X col suo derivato: $\bar{X} = X \cup DX$.

Osservazione 1.1. L'insieme chiusura è il più piccolo insieme chiuso che contiene X , e si può adesso dare una terza definizione di insieme chiuso: un insieme che coincide con la sua chiusura.

Definizione 1.12: Punto isolato

Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un insieme.
Un punto $x_0 \in X$ che non è di accumulazione è detto "isolato".

Definizione 1.13: Insieme discreto

Un insieme $X \subset \mathbb{R}^n$ è detto "discreto" se privo di punti d'accumulazione.

1.2 Limiti

Definizione 1.14: Limite per $x \rightarrow x^0$

Dati $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x^0 \in DX$, allora:

- Diremo che la funzione f , al tendere di x a x^0 , è convergente a l se:

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Ovvero se $\forall \varepsilon > 0 \exists I(x^0, r) : \forall x \in X \cap I(x^0, r) \setminus \{x^0\} \implies l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

- Diremo che la funzione f , al tendere di x a x^0 , diverge positivamente se:

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = +\infty. \quad (1.3)$$

Ovvero se $\forall k > 0 \exists I(x^0, r) : \forall x \in X \cap I(x^0, r) \setminus \{x^0\} \implies f(x) > k$.

- Diremo che la funzione f , al tendere di x a x^0 , diverge negativamente se:

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = -\infty. \quad (1.4)$$

Ovvero se $\forall k > 0 \exists I(x^0, r) : \forall x \in X \cap I(x^0, r) \setminus \{x^0\} \implies f(x) < -k$.

Definizione 1.15: Limite per $x \rightarrow \infty$

Dato un insieme non limitato $X \subset \mathbb{R}^n$ e la funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, allora:

- Diremo che la funzione f , al tendere di x a ∞ , è convergente a l se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Ovvero se $\forall \varepsilon > 0 \exists I(0, r) : \forall x \in X \cap CI(0, r) \setminus \{x^0\} \implies l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$, dove $CI(0, r)$ è il complementare di un intorno di centro 0 e raggio r .

- Diremo che la funzione f , al tendere di x a ∞ , è divergente positivamente se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty. \quad (1.6)$$

Ovvero se $\forall k > 0 \exists I(0, r) : \forall x \in X \cap CI(0, r) \setminus \{x^0\} \implies f(x) > k$.

- Diremo che la funzione f , al tendere di x a ∞ , è divergente negativamente se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty. \quad (1.7)$$

Ovvero se $\forall k > 0 \exists I(0, r) : \forall x \in X \cap CI(0, r) \setminus \{x^0\} \implies f(x) < -k$.

Osservazione 1.8. Per limiti di funzioni definite in \mathbb{R}^n non vale la regola di de l'Hopital, mentre valgono (chiaramente cambiando il dominio) i teoremi:

- Sulle 4 operazioni per i limiti
- Della permanenza del segno
- Del confronto
- Unicità del limite
- Locale limitatezza
- Limite in valore assoluto
- Limite del reciproco

Vediamo 3 teoremi che non dimostriamo, utili per svolgere esercizi:

Teorema 1.1

Dati $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x^0 \in DX$, $Y \subset X$, $x^0 \in DY$, allora:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x^0} f|_Y(x) \implies \nexists \lim_{x \rightarrow x^0} f(x) \quad (1.9)$$

Dove $f|_Y(x)$ è la restrizione di f all'insieme Y .

Teorema 1.2

Dati $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x^0 \in DX$, $Z, Y \subset X$, $x^0 \in DY \cap DZ$, allora:

$$\text{Se } \exists \lim_{x \rightarrow x^0} f|_Y(x) = l \text{ e } \lim_{x \rightarrow x^0} f|_Z(x) = m, \text{ con } l \neq m \implies \nexists \lim_{x \rightarrow x^0} f(x) \quad (1.10)$$

Coordinate polari In \mathbb{R}^2 (dove molti esercizi sono ambientati) è comune servirsi delle coordinate polari per svolgere limiti di più variabili.

Si tratta delle sostituzioni:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases} \quad (1.11)$$

Per esempio:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$$

Uniformemente rispetto a θ .

Teorema 1.3 Limite della funzione composta

Ripreso da analisi 1.

Dati $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : X \rightarrow (a, b)$, $x^0 \in DX$, supponiamo che:

1.

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \varphi(x) = t_0 \in [a, b]$$

2.

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$$

3. $\exists \delta > 0 : \forall x \in I(x_0, \delta) \cap X \setminus \{x_0\} \implies \varphi(x) \neq t_0$

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = l$$

Negli esercizi le ipotesi di questo teorema saranno sempre automaticamente verificate, e potremo applicare direttamente la tesi.

In questo modo trasformiamo un limite in n variabili in uno a 1 variabile.

Esempio 1.3

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \implies \varphi(x, y) = x^2 + y^2 \text{ (tende a 0)}$$

quindi possiamo scrivere:

$$f(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}, \text{ dato che } t \rightarrow 0$$

1.3 Funzioni continue

Definizione 1.16: Funzione continua

Dati $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x^0 \in X \cap DX$, f si dice **continua** in x^0 se:

$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 : \forall x \in X \cap I(x^0, r) \implies |f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$, ovvero:

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0).$$

Osservazione 1.12. Una funzione è continua nei suoi punti isolati.

Osservazione 1.13. Vale l'algebra delle funzioni continue che valeva in analisi 1: somme, prodotti, quozienti e composizioni di funzioni continue saranno a loro volta funzioni continue.

Definizione 1.17: Successione di punti di \mathbb{R}^n

Chiameremo **Successione di punti di \mathbb{R}^n** la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ che associa a **ogni** numero naturale k un punto $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ (k è indice, non esponente).

Indicheremo tale successione con $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{x^k\} = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots\}$.

Definizione 1.18: Limite di successione di punti

Sia $x^0 \in \mathbb{R}^n$, e sia $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di punti di \mathbb{R}^n .
Diciamo che $\{x^k\}$ converge a x^0 , e scriviamo:

$$\lim_k x^{(k)} = x^0$$

se:

$$\lim_k d(x^{(k)}, x^0) = 0,$$

ovvero se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall k > \nu \implies d(x^k, x^0) < \varepsilon.$$

Per chiarire, \lim_k è solo un altro modo di scrivere $\lim_{k \rightarrow +\infty}$.

Proposizione 1.1 Condizione necessaria e sufficiente di convergenza

Una successione (o funzione) f converge a un punto x^0 se e solo se ogni componente di f converge al rispettivo componente di x^0 .

Il limite esiste quindi componente per componente.

Esempio 1.4

$$\{f(n)\} = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n} \right) \rightarrow (0, 1)$$

Teorema 1.4 Di collegamento

Anche questo riadattato da analisi 1.

Sia $x^0 \in X$, allora:

$$\text{Per ogni successione } \{x^k\} \subset X \setminus \{x_0\} : \lim_k x^k = x^0 \iff \lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0)$$

Teorema 1.5

Una successione convergente è limitata.

Osservazione 1.14. In \mathbb{R} , "successione limitata" vuol dire limitata superiormente e inferiormente, mentre in \mathbb{R}^2 vuol dire che c'è un cerchio che la contiene (in \mathbb{R}^3 una sfera, in \mathbb{R}^n un intorno sferico).

Teorema 1.6

Se un insieme E ha un punto d'accumulazione y , esiste una successione di punti contenuta in E e convergente in y , ovvero:

$$E \subset \mathbb{R}^n, \quad y \in DE \implies \exists \{x^k\} \subset E : \lim_k x^k = y \quad (1.15)$$

Dimostrazione

Per ipotesi $y \in DE \implies$ in ogni intorno $I(y, r)$ cadono infiniti punti di E distinti da y .
Scelgo $r = \frac{1}{k}$, con $k \in \mathbb{N}$. Facendo ciò, ho tanti intorni (uno per ogni valore di k): per ogni intorno scelgo un punto x^k che vi sta dentro, ovvero $x^k \in I(y, \frac{1}{k}) \cap E$, con $x^k \neq y$. In questo modo abbiamo creato una successione di punti $d(x^k, y) \in E$.

Applichiamo il teorema dei carabinieri:

$$0 \leq d(x^k, y) \leq \frac{1}{k} \implies \lim_k d(x^k, y) = 0$$

Teorema 1.7 Bolzano-Weierstrass

Dato $X \subset \mathbb{R}^n$,

X limitato e infinito $\implies DX \neq \emptyset$

Teorema 1.8

Da una successione $\{f^n\}$ di punti di \mathbb{R}^n limitata, posso estrarne una convergente (ripreso da analisi 1).

Dimostrazione

Distinguiamo tra due casi:

1. L'immagine di $\{f^n\}$ ha un numero finito di elementi \implies c'è sicuramente un elemento che si ripete infinite volte, chiamiamolo $\bar{x} \implies$ una successione estratta da $\{f^n\}$ è $\{x^k\} = \{\bar{x}\}$, ovvero una successione costante (ad ogni k associa sempre lo stesso elemento).
2. L'immagine di $\{f^n\}$ ha un numero infinito di elementi \implies per Bolzano-Weierstrass ammette un punto d'accumulazione $y \implies$ per il teorema 1.3, esiste una successione di punti che converge a y .

Teorema 1.9

Dati $E \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$,

$y \in \bar{E}$ (chiusura) $\iff \exists \{x^k\}$ convergente a y .

Dimostrazione

Dimostriamo entrambi i versi.

- Verso destra: dato che y appartiene alla chiusura di E , potrebbe stare in E o anche solo in $DE \setminus E$:
 - $y \in E \implies$ scelgo $\{x^k\} = \{y\}$, converge a y .
 - $y \in DE \setminus E \implies$ per il teorema 1.3, posso estrarre $\{x^k\}$ convergente a y .
- Verso sinistra: per assurdo supponiamo che $y \notin \bar{E} \implies y \in C\bar{E}$ (complementare). $C\bar{E}$ è aperto, essendo il complementare di un insieme chiuso $\implies y$ è punto interno a

$C\bar{E} \implies \exists I(y, r) \in C\bar{E}$, il che è assurdo, dato che per ipotesi:

$$\lim_k x^k = y \implies \forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : \forall k > v \implies d(x^k, y) < \varepsilon$$

ovvero i punti in un intorno di y sono appartenenti a E .

Corollario 1.1

Dati $X \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$

X è chiuso $\iff \forall \{x^k\} \subset X$ convergente a y , si ha che $y \in X$.

Definizione 1.19: Insieme compatto di \mathbb{R}^n

Un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$ si dice **compatto per successioni** o **sequenzialmente** se da ogni successione di punti di K se ne può estrarre una convergente a un punto di K .

Esiste anche il concetto di "compattezza per ricoprimenti", ma rappresenta lo stesso spazio della compattezza per successioni, per cui noi ci atterremo a questa definizione.

Teorema 1.10

Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n è compatto \iff è chiuso e limitato.

Ora è possibile dare una definizione alternativa di una funzione continua (equivalente a quella già data):

Definizione 1.20: Funzione continua

Dati $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, diremo che:

f è continua \iff per ogni successione $\{x^k\} \subset X$ convergente in x^0 si ha che:

$$\lim_k f(x^k) = f(x_0).$$

Definizione 1.21: Estremi

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x^0 \in A$.

x^0 si dice "punto di **minimo relativo**" per f se $\forall x \in I(x^0, r)$, $f(x) \geq f(x^0)$;

x^0 si dice "punto di **minimo assoluto**" per f se $\forall x \in A$, $f(x) \geq f(x^0)$;

x^0 si dice "punto di **massimo relativo**" per f se $\forall x \in I(x^0, r)$, $f(x) \leq f(x^0)$;

x^0 si dice "punto di **massimo assoluto**" per f se $\forall x \in A$, $f(x) \leq f(x^0)$.

Se l'uguale vale solo per $x = x^0$, si parla di minimo (o massimo) **stretto** o **forte**.

Nella pratica, per capire se un punto x^0 è di massimo o minimo, si può studiare il segno di f (oppure di $f(x) - f(x^0)$) in un intorno di x^0 :

- Se il segno è costante, x^0 può essere di massimo o minimo
- Se il segno non è costante, x^0 non può essere di massimo o minimo.

Teorema 1.11 Weierstrass

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora f ha massimo e minimo assoluti in K .

P.S. quando si scrive "massimo" o "minimo" senza specificare "relativo", allora è sottinteso "assoluto".

Dimostrazione

Dimostriamo l'esistenza del massimo; la dimostrazione per il minimo è analoga. Sappiamo che $\exists L = \sup_K f(x)$: può essere un numero reale o ∞ .

Dimostriamo che in entrambi i casi esiste una successione massimizzante per f , ovvero $\exists \{x_n\} \subset K : \lim_n f(x_n) = L$.

- Se $L = +\infty \implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in K : f(x_n) > n$.
 $n \rightarrow \infty \implies$ per il teorema del confronto $\lim_n f(x_n) = +\infty$, quindi $\{x_n\}$ è massimizzante.

- Se invece $L \in \mathbb{R}$, valgono le proprietà dell'estremo superiore:

1. $\forall x \in K, L \geq f(x)$

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in K : f(x_\varepsilon) > L - \varepsilon$

Con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ otteniamo una successione $\{x_n\} \in K : f(x_n) > L - \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$.

Considerando entrambe le proprietà dell'estremo superiore:

$$L - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq L.$$

Per il teorema dei carabinieri $f(x_n) \rightarrow L$, quindi $\{x_n\}$ è massimizzante.

Vediamo ora come la successione massimizzante si traduce in un massimo.

Per compattezza, $\exists \{x_{n_h}\}$ estratta da $\{x_n\}$ convergente a un punto $x^0 \in K$.

Dato che f è continua per ipotesi (sfruttiamo la seconda definizione di funzione continua), allora:

$$\lim_h f(x_{n_h}) = f(x^0) = L \implies f(x^0) \text{ è il massimo.}$$

Definizione 1.22: Segmento

Dati x', x'' punti di \mathbb{R}^n , si definisce "**segmento**" di estremi x' e x'' l'insieme dei punti che soddisfano l'equazione parametrica $x(t) = tx'' + (1-t)x'$, oppure $x(t) = x' + t(x'' - x')$, con $t \in [0, 1]$.

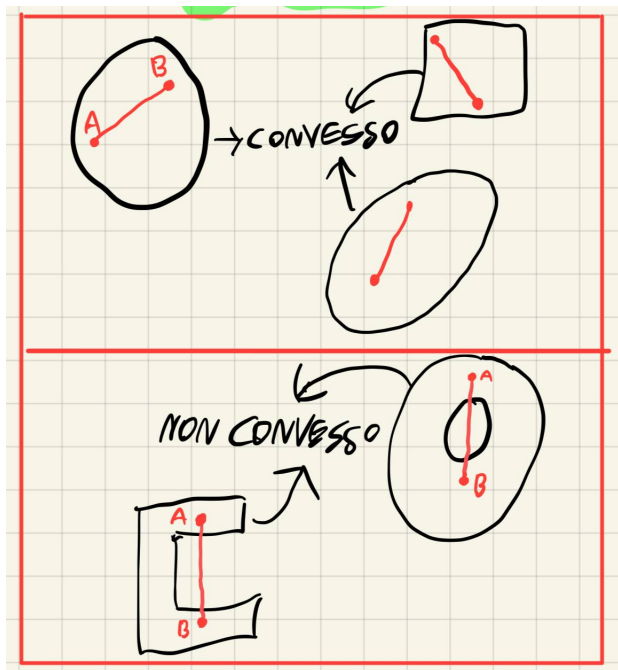
Dato che siamo in \mathbb{R}^n , si tratta di un'**uguaglianza vettoriale**: è vera componente per componente, per cui si risolve con un sistema del tipo:

$$\begin{cases} x_1(t) = tx''_1 + (1-t)x'_1 \\ \vdots \\ x_n(t) = tx''_n + (1-t)x'_n \end{cases}$$

Definizione 1.23: Insieme convesso

Un insieme $X \subset \mathbb{R}^n$ è convesso di \mathbb{R}^n se $\forall x, y \in X$ il segmento di estremi x e y è tutto contenuto in X .

Visivamente:



Definizione 1.24: Spezzata

Dati $k+1$ punti di \mathbb{R}^n : x^0, x^1, \dots, x^k , si definisce "spezzata" (o "poligonale") di vertici $\{x^0, \dots, x^k\}$ l'insieme $[x^0, x^1] \cup \dots \cup [x^{k-1}, x^k]$.

Una spezzata dunque non è altro che l'unione di tutti i k segmenti che congiungono $k+1$ punti.

Definizione 1.25: Insieme connesso per spezzate

Un insieme $X \subset \mathbb{R}^n$ aperto si dice **connesso** per spezzate $\iff \forall x_1, x_2 \in X \exists$ una poligonale che li congiunge, tutta contenuta nell'insieme.

Teorema 1.12 Esistenza degli zeri

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e connesso per poligonalità e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in A ; supponiamo che $\exists x', x'' \in A : f(x') \cdot f(x'') < 0$.

Allora: $\exists \bar{x} \in A : f(\bar{x}) = 0$.

Dimostrazione

Supponiamo che $f(x') > 0$ e $f(x'') < 0$ (si potrebbe fare anche al contrario) e analizziamo due possibili casi:

1. I punti x' e x'' si connettono con un solo segmento appartenente ad A : $x(t) = tx'' + (1-t)x'$ con $t \in [0, 1]$. Consideriamo la restrizione di f a tale segmento, ovvero la funzione composta $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t) = f[x(t)]$, continua poiché composizione di funzioni continue. Si ha:

$$F(0) = f(x') > 0$$

$$F(1) = f(x'') < 0$$

F soddisfa quindi le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri (di analisi 1), per cui:

$$\exists \bar{t} \in]0, 1[: F(\bar{t}) = 0 \implies f[x(\bar{t})] = 0.$$

2. Il segmento tra x' e x'' non appartiene ad A . Per ipotesi di connessione è possibile connettere x' e x'' con una poligonale:

$$[x', x^1] \cup [x^1, x^2] \cup \dots \cup [x^k, x''].$$

Si calcola la funzione f nei vertici della poligonale. Se f si annulla in qualche vertice, il teorema è dimostrato. Se invece f non si annulla in nessun vertice, allora esisteranno necessariamente due vertici consecutivi nei quali la funzione ha segno opposto, quindi si torna al caso 1.

Definizione 1.26: Dominio

Un insieme $D \subset \mathbb{R}^n$ è chiamato **dominio** di \mathbb{R}^n se è chiusura di un insieme aperto.

Ogni punto del dominio è punto di accumulazione di punti interni.

Definizione 1.27: Dominio internamente connesso

Un dominio D è detto "**internamente connesso**" se comunque scelgo una coppia di punti di D , esiste una poligonale che li collega.

Nel teorema di esistenza degli zeri, A è dominio internamente connesso.

1.4 Spazi euclidei

Il campo \mathbb{R}^n si può definire uno **spazio vettoriale**, con le operazioni di somma e prodotto:

- Somma: $x, y \in \mathbb{R}^n \implies x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- Prodotto: $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x = (\lambda, x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$

Definizione 1.28: Prodotto scalare

Il prodotto scalare canonico (o euclideo) di due vettori $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ è:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

ovvero la somma dei prodotti delle componenti con lo stesso indice (dette **omonime**).

Esempio 1.5

$$\langle (1, 2, 3), (4, 5, 6) \rangle = 4 + 10 + 18 = 32.$$

Proprietà $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, simmetrica
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$, ed è $= 0$ se e solo se $x = (0, \dots, 0)$ (vettore nullo)

Definizione 1.29: Norma euclidea di un vettore

Dato un vettore $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, la norma euclidea di x indotta dal prodotto scalare è la radice quadrata del prodotto scalare di x con sè stesso: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

La norma euclidea di un vettore rappresenta la sua lunghezza.

Proprietà, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\| \geq 0$, pari a 0 solo se $x = (0, \dots, 0)$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, disuguaglianza triangolare della norma
4. $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$,

Possiamo avere infiniti tipi di norma:

- Norma uno: $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$;
- Norma euclidea (norma due): $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$;
- \vdots
- Norma infinito $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$.

In generale, una norma p è $\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

Proposizione 1.2 Disuguaglianza di Schwarz

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Dimostrazione

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, x \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle = \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Riscrivo come $\|y\|^2 \lambda^2 + \langle x, y \rangle 2\lambda + \|x\|^2$ e risolvo per λ :

$$\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|y\|^2 \|x\|^2 \leq 0 \implies \langle x, y \rangle \leq \|y\| \cdot \|x\|$$

Osservazione 1.16. Dati due vettori non nulli $x, y \in \mathbb{R}^n$ si considera la disuguaglianza di Schwarz per ottenere:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \implies \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \leq 1 \implies -1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1;$$

Per cui notiamo che $\exists! \theta \in [0, \pi] : \cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$.

Definizione 1.30: Vettori ortogonali

Due vettori non nulli $x, y \in \mathbb{R}^n$ sono detti "ortogonali" se il loro prodotto scalare è 0:
 $x, y \neq (0, \dots, 0)$ e $\langle x, y \rangle = 0 \implies x \perp y$.

Teorema 1.13 Di Pitagora in \mathbb{R}^n

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ vettori ortogonali, allora $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Dimostrazione

$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$. Se i due vettori sono ortogonali, allora l'ultima quantità è nulla.

Dimostrazione della disuguaglianza triangolare della norma

Dimostriamo che $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle.$$

Per proprietà del valore assoluto e disuguaglianza di Schwarz, $\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, quindi:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Passando alla radice, si ottiene la tesi.

Definizione 1.31: Distanza

La distanza tra due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ è il numero reale non negativo $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

Proprietà della distanza, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

- $d(x, y) \geq 0$, l'uguale vale solo se $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$, disuguaglianza **triangolare**.

1.5 Calcolo differenziale in \mathbb{R}^n

Definizione 1.32: Derivata parziale prima

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in A$.

Se esiste finita la quantità:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x^0)}{h} \text{ tale che } (x_1^0 + h, \dots, x_n^0) \in A,$$

essa sarà chiamata **derivata parziale prima** di f rispetto a x_1 nel punto x^0 .

La indichiamo con $\boxed{\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}}$, $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)}$, $\boxed{D_{x_1}f(x^0)}$, oppure $\boxed{f_{x_1}(x^0)}$.

Come per la derivata in \mathbb{R} , si può scrivere il limite in un altro modo; ponendo $h = x_1 - x_1^0$ abbiamo:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{f(x_1, \dots, x_n^0) - f(x^0)}{x_1 - x_1^0}.$$

Esempio 1.6

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (in \mathbb{R}^2 le variabili sono $x_1 = x$ e $x_2 = y$), consideriamo la derivata parziale prima di f rispetto alla variabile x nel punto (x_0, y_0) :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

consideriamo la derivata parziale prima di f rispetto alla variabile y nel punto (x_0, y_0) :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Osservazione 1.17. La derivabilità parziale non implica la continuità, ma la **continuità separata**, ovvero continuità soltanto rispetto alla variabile per la quale stiamo derivando.

Esempio di funzione derivabile (lo vediamo col rapporto incrementale) ma non continua (ha limite parametrico, lo vediamo prendendo la generica retta):

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Per semplificare la scrittura possiamo porre per esempio:

$x_0 + h = x \implies h = x - x_0$. Dato che $h \rightarrow 0 \implies x \rightarrow x_0$, quindi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Vediamo ora una generalizzazione del concetto di derivata parziale: anziché derivare rispetto a una variabile alla volta, deriviamo rispetto a tutte le variabili contemporaneamente, quindi lungo una direzione.

Definizione 1.33: Derivata direzionale prima

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x^0 \in A$.

Sia $\hat{v} \neq (0, \dots, 0)$ un versore non nullo ($\|\hat{v}\| = 1$) di \mathbb{R}^n .

La "**derivata direzionale**", o "derivata di f nel punto x^0 lungo la direzione v " è pari alla quantità (se esiste finita):

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t} = \frac{f(x_1^0 + tv_1, \dots, x_n^0 + tv_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{t}$$

Sembra un concetto più spaventoso della derivata parziale, ma in realtà ponendo $f(x^0 + tv) = \varphi(t)$, notiamo che:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(0 + t) - \varphi(0)}{t - 0} = \varphi'(0)$$

Ovvero la derivata direzionale si può considerare come una semplice derivata di analisi 1.

Definizione 1.34: Gradiente

Il **gradiente** della funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nel punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è il vettore $\nabla f(x^0) \in \mathbb{R}^n$ che ha per componenti le derivate parziali di f in x_0 :

$$\nabla f(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right)$$

Il simbolo ∇ si legge **nabla**. Notiamo che $\nabla f(x^0) \cdot v = D_v f(x^0)$.

Definizione 1.35: Funzione differenziabile in un punto

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x^0 \in A$;

f si dice **differenziabile** in x^0 se esiste un vettore $a \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$f(x^0 + h) - f(x^0) = \langle a, h \rangle + o(\|h\|), \text{ per } h \rightarrow 0, \quad (1.18)$$

per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ tale che $x^0 + h \in A$.

Ponendo $x^0 + h = x \implies h = x - x^0$, possiamo riscrivere la condizione come:

$$f(x) - f(x^0) = \langle a, x - x^0 \rangle + o(\|x - x^0\|), \text{ per } x \rightarrow x^0.$$

Teorema 1.14 Esistenza e formula della derivata direzionale di una funzione differenziabile

Pagani salsa 1, teorema 1.1, pagina 354.

Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto; se f è differenziabile in $x^0 \in A$, allora:

1. f è continua in x^0
2. f è derivabile in x^0 lungo ogni direzione; in particolare esistono tutte le derivate parziali di f in x^0 e, se a è il vettore in 1.18, si ha $a = \nabla f(x^0)$. Inoltre vale la formula:

$$D_v f(x^0) = \langle \nabla f(x^0), v \rangle. \quad (1.19)$$

Dimostrazione

1. Passando al limite per $h \rightarrow 0$ nella 1.18 si ottiene $f(x^0 + h) - f(x^0) \rightarrow 0 \implies f(x^0 + h) \rightarrow f(x^0)$.
2. Identifichiamo il vettore $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$; scegliendo nella 1.18 $h = te^j = t(e_1^j, \dots, e_{j-1}^j, e_j^j, e_{j+1}^j, \dots, e_n^j) = t(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, si ha:

$$f(x^0 + te^j) - f(x^0) = \langle a, te^j \rangle + o(\|te^j\|) = t\langle a, e^j \rangle + o(t). \quad (1.20)$$

Dividendo entrambi i membri per t e passando al limite per $t \rightarrow 0$ si ottiene:

$$f_{x_j}(x^0) = a_j.$$

Questo si può ripetere per ogni $j = 1, \dots, n$, dunque esistono tutte le derivate parziali in x^0 e $a = \nabla f(x^0)$ è il vettore delle derivate.

Scegliendo ora nella 1.18 $h = tv$, dove v è un generico versore di \mathbb{R}^n , si ha:

$$f(x^0 + tv) - f(x^0) = \langle a, tv \rangle + o(\|tv\|) = t\langle a, v \rangle + o(t).$$

Dividendo entrambi i membri per t e passando al limite per $t \rightarrow 0$, si ha che:

$$D_v f(x^0) = \langle a, v \rangle = \langle \nabla f(x^0), v \rangle.$$

Teorema 1.15 La differenziabilità implica la continuità

Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile, A aperto di \mathbb{R}^n , $x^0 \in A$, $h \in \mathbb{R}^n$, $x^0 + h \in A$;

allora f è continua in x^0 .

Dimostrazione

Si deve dimostrare che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x^0 + h) = f(x^0), \text{ ovvero } \lim_{h \rightarrow 0} f(x^0 + h) - f(x^0) = 0.$$

Per ipotesi f è differenziabile, quindi $f(x^0 + h) - f(x^0) = \langle a, h \rangle + o(\|h\|)$; facendo il limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle a, h \rangle + o(\|h\|) = \lim_{h \rightarrow 0} a_1 h_1 + \dots + a_n h_n + o(\|h\|) = 0.$$

Osservazione 1.21. Data una funzione differenziabile in x^0 , se si fissa una direzione v con $\|v\| = 1$ e $h = tv$, allora per $t \rightarrow 0$:

$$f(x^0 + tv) - f(x^0) = \langle \nabla f(x^0), tv \rangle + o(\|tv\|) = t \langle \nabla f(x^0), v \rangle + o(\|tv\|);$$

dividendo per t :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t} = \frac{t \langle \nabla f(x^0), v \rangle}{t} + \frac{o(\|t\|)}{t}$$

Il membro di sinistra è la derivata direzionale di f in x^0 lungo v , mentre a destra abbiamo un prodotto scalare e un "o piccolo" che tende a 0, quindi otteniamo $D_v f(x^0) = \langle \nabla f(x^0), v \rangle$.

Teorema 1.16 Differenziabilità totale

Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, A aperto di \mathbb{R}^n , $x^0 \in A$, $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$ continue $\forall x_i$ ($f \in C^1(A)$), ovvero insieme delle funzioni che hanno derivate parziali prime continue in A), allora f è differenziabile in A .

Definizione 1.36: Differenziale

La funzione $df(x^0) : h \rightarrow \langle \nabla f(x^0), h \rangle$ è detta "differenziale primo" della funzione f nel punto x^0 .

In particolare, per $f = x_j$, vale $dx_j(h) = hj \implies d_j = hj$.

Definizione 1.37: Derivata parziale seconda

Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto di \mathbb{R}^n , $x^0 \in A$.

Supponiamo che f sia derivabile rispetto a x_i in un intorno di x^0 : $\exists f_{x_i}(x) \forall x \in I(x^0, r)$.

Se la funzione f_{x_i} è a sua volta derivabile in x^0 rispetto a x_j , allora diremo che f ammette in x^0 derivata seconda rispetto a x_i e x_j , che sarà indicata con:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x^0).$$

Una derivata parziale seconda viene detta **mista** se $i \neq j$, **pura** se $i = j$: in quest'ultimo

caso la indicheremo con $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$.

Osservazione 1.22. In generale non è detto che le due derivate miste coincidano, per esempio si veda la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Infatti $f_{xy}(0, 0) = 1$, mentre $f_{yx}(0, 0) = -1$.

Teorema 1.17 Di Schwarz

Data $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto di \mathbb{R}^n , le derivate parziali miste sono uguali in ogni punto dove sono continue.

Possiamo considerare la derivata seconda anche per le direzionali.

Definizione 1.38: Derivata direzionale seconda

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto di \mathbb{R}^n ; siano $x^0 \in A$ e $v \in \mathbb{R}^n$.

Se esiste la derivata direzionale di f lungo la direzione v : $D_v f(x) \forall x \in I(x^0)$, ed essa è a sua volta una funzione derivabile in x^0 lungo una direzione w , allora esiste la derivata direzionale seconda di f lungo v e w , e la indichiamo con $D_{wv}^2 f(x^0)$.

Definizione 1.39: Differenziale secondo

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $x^0 \in A$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in x^0 .

Se tutte le derivate parziali di f in x^0 sono a loro volta differenziabili parzialmente in x^0 , allora f è due volte differenziabile in x^0 , e il differenziale secondo si esprime come:

$$d^2 f(x^0) : h \rightarrow \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x^0) h_i h_j.$$

Esempio 1.7 (Se $n = 2$)

$$d^2 f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)h_1^2 + f_{xy}(x_0, y_0)h_1 h_2 + f_{yx}(x_0, y_0)h_1 h_2 + f_{yy}(x_0, y_0)h_2^2$$

Definizione 1.40: Matrice hessiana

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto di \mathbb{R}^n , e sia $x^0 \in A$.

La matrice quadrata di ordine n contenente tutte le derivate seconde di f in x^0 in tale disposizione:

$$H_f(x^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x^0) & \dots & f_{x_1 x_n}(x^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x^0) & \dots & f_{x_n x_n}(x^0) \end{pmatrix}$$

è detta matrice **hessiana**.

Quando le derivate seconde sono continue in una regione, allora per il teorema di Schwarz le derivate seconde miste coincidono, e l'hessiana sarà una matrice simmetrica.

Altre notazioni per indicare l'hessiana sono $\boxed{h^t \cdot H_f(x^0) \cdot h}$, oppure $\boxed{\langle h, H_f(x^0), h \rangle}$.

Teorema 1.18 Derivazione di funzione composta

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto di \mathbb{R}^n ; sia $x^0 \in A$;

siano x_1, \dots, x_n n funzioni definite in un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$, tali che $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)] \in A \forall t \in I$. Fissato $t_0 \in I$ e posto $x^0 = x(t_0)$, supponiamo che f sia differenziabile in x^0 e che tutte le x_i siano derivabili in t_0 .

Allora possiamo considerare la funzione composta $F(t) = f[x(t)]$, ed essa risulta derivabile in t_0 secondo la formula: $F'(t_0) = \langle \nabla f[x(t_0)], x'(t_0) \rangle$.

Dimostrazione

Analizziamo il rapporto incrementale di F :

$$\frac{F(t_0 + \tau) - F(t_0)}{\tau} = \frac{f[x(t_0 + \tau)] - f[x(t_0)]}{\tau} \quad (1.23)$$

Dato che f è differenziabile in x^0 , allora per $x \rightarrow x^0$ vale:

$f(x) - f(x^0) = \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + o(\|x - x^0\|)$, quindi la 1.23 si scrive:

$$\frac{f[x(t_0 + \tau)] - f[x(t_0)]}{\tau} = \frac{\langle \nabla f[x(t_0)], x(t_0 + \tau) - x(t_0) \rangle}{\tau} + \frac{o(\|x(t_0 + \tau) - x(t_0)\|)}{\tau}$$

(dove l'o piccolo è adesso per $\tau \rightarrow 0$). Riscriviamo il primo addendo come:

$$\langle \nabla f[x(t_0)], \frac{x(t_0 + \tau) - x(t_0)}{\tau} \rangle \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \langle \nabla f[x(t_0)], x'(t_0) \rangle$$

Per il secondo addendo si ha, nel caso in cui $x(t_0 + \tau) - x(t_0) \neq 0$, $\tau \neq 0$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o(\|x(t_0 + \tau) - x(t_0)\|)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o(\|x(t_0 + \tau) - x(t_0)\|)}{\|x(t_0 + \tau) - x(t_0)\|} \cdot \frac{\|x(t_0 + \tau) - x(t_0)\|}{\tau}$$

Il limite del primo fattore è 0 per definizione di **o piccolo**.

Il secondo fattore si scrive come:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n [x_i(t_0 + \tau) - x_i(t_0)]^2}}{\tau} = \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i(t_0 + \tau) - x_i(t_0)}{\tau} \right)^2} & \text{per } \tau > 0 \\ -\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i(t_0 + \tau) - x_i(t_0)}{\tau} \right)^2} & \text{per } \tau < 0 \end{cases}$$

$$\text{E quindi risulta: } \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^n [x'_i(t_0)]^2} & \text{per } \tau \rightarrow 0^+ \\ -\sqrt{\sum_{i=1}^n [x'_i(t_0)]^2} & \text{per } \tau \rightarrow 0^- \end{cases}$$

Il prodotto dei due fattori è quindi 0.

Nel caso in cui abbiamo invece $x(t_0 + \tau) - x(t_0) = 0$, la dimostrazione va modificata come segue.

Definiamo la funzione:

$$w(\tau) = \begin{cases} \frac{o(\|x(t_0 + \tau) - x(t_0)\|)}{\|x(t_0 + \tau) - x(t_0)\|} & \text{se } x(t_0 + \tau) \neq x(t_0) \\ 0 & \text{se } x(t_0 + \tau) = x(t_0) \end{cases}$$

Da cui si ricava: $o(\|x(t_0 + \tau) - x(t_0)\|) = w(\tau)\|x(t_0 + \tau) - x(t_0)\|$.

Si ha:

$$\frac{F(t_0 + \tau) - F(t_0)}{\tau} = \frac{\langle \nabla f[x(t_0)], x(t_0 + \tau) - x(t_0) \rangle}{\tau} + w(\tau) \frac{\|x(t_0 + \tau) - x(t_0)\|}{\tau}$$

Dalla definizione di w si ha che $\lim_{\tau \rightarrow 0} w(\tau) = w(0) = 0$, e procedendo come nel caso precedente si trova lo stesso risultato.

Richiami di analisi 1 Il polinomio di Taylor di grado n e di centro x_0 di una funzione f è:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Esso è utile in quanto, in determinate condizioni, dà vita alle seguenti formule di approssimazione:

- Formula di Taylor con resto di Lagrange:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad c \in I(x, x_0).$$

- Formula di Taylor con resto di Peano:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o[(x - x_0)^n].$$

Andiamo ora a vedere l'equivalente di tutto ciò in analisi 2.

Teorema 1.19 Formula di Taylor con resto di Lagrange

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto di \mathbb{R}^n e $f \in C^2(A)$. Siano $x^0, x \in A$ tali che il segmento $[x^0, x] \subset A$.

Allora, fermandoci fino al secondo ordine di derivazione:

$$\exists \xi \in]x^0, x[: f(x) = f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\xi)(x - x^0), x - x^0 \rangle.$$

Dimostrazione

Considero il segmento $x(t) = x^0 + t(x - x^0)$, con $t \in [0, 1]$, e definisco $F(t) = f[x(t)]$, ovvero la funzione f ristretta al segmento $[x^0, x]$; $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Grazie alla formula di Taylor (di analisi 1) fino al secondo ordine e con punto iniziale 0, possiamo riscrivere la nostra funzione come:

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(\bar{t})t^2, \text{ con } \bar{t} \in]0, 1[.$$

Per semplificare, fissando $t = 1$:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\bar{t})$$

Andiamo quindi a calcolare ognuno di questi termini per vedere se otteniamo la tesi.

$$F(t) = f[x^0 + t(x - x^0)] \implies \boxed{F(0) = f(x^0)}.$$

Per il teorema [Derivazione di funzione composta](#):

$$F'(t) = \langle \nabla f[x(t)], x'(t) \rangle = \langle \nabla f[x(t)], x - x^0 \rangle \implies \boxed{F'(0) = \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle}.$$

Riscrivendo la derivata prima come:

$$F'(t) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}[x(t)](x_i - x_i^0),$$

possiamo calcolare la derivata seconda:

$$F''(t) = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}[x(t)](x_j - x_j^0)(x_i - x_i^0) = \boxed{\langle H_f(t)(x - x^0), x - x^0 \rangle = F''(t)}.$$

Calcolandola in $t = \bar{t}$ otteniamo: $\xi = x(\bar{t}) = x^0 + \bar{t}(x - x^0)$, che è un punto del segmento $]x^0, x[$. Sommando le tre parti cerchiate si trova $f(x)$, quindi la tesi è dimostrata.

Definizione 1.41: Norma di Frobenius di una matrice

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, la sua norma di **Frobenius** (o norma 2) sarà:

$$\|A\|_2 = \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}^2|}, \text{ solitamente abbreviata in } \|A\|.$$

Esempio 1.8

$$A \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}^2} = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2}$$

$$\text{Quindi se } A = \begin{pmatrix} 666 & 42 \\ 24 & 22 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{666^2 + 42^2 + 24^2 + 22^2} = 668.12$$

Lemma 1.1

Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^n$, vale la proprietà: $\|A x\| \leq \|A\| \|x\|$.

Teorema 1.20 Formula di Taylor con resto di Peano

Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto di \mathbb{R}^n , $f \in C^2(A)$, $x, x^0 \in A$ tali che il segmento $[x^0, x] \subset A$, allora:

$$f(x) = f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x^0)(x - x^0), x - x^0 \rangle + o(\|x - x^0\|^2), \text{ per } x \rightarrow x^0 \text{ e fermandoci al secondo ordine.}$$

Dimostrazione

Sottraiamo e aggiungiamo lo stesso termine alla formula di Taylor con resto di Lagrange:

$$f(x) = f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\xi)(x - x^0), x - x^0 \rangle - \frac{1}{2} \langle H_f(x^0)(x - x^0), x - x^0 \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x^0)(x - x^0), x - x^0 \rangle.$$

Affinché la formula della tesi sia vera, deve accadere che la somma tra il terzo e il quarto addendo sia:

$$\frac{1}{2} \langle H_f(\xi)(x - x^0), x - x^0 \rangle - \frac{1}{2} \langle H_f(x^0)(x - x^0), x - x^0 \rangle = o(\|x - x^0\|^2), \text{ per } x \rightarrow x^0;$$

quindi deve tendere a 0 il seguente rapporto:

$$\frac{\frac{1}{2} \langle H_f(\xi)(x - x^0), x - x^0 \rangle - \frac{1}{2} \langle H_f(x^0)(x - x^0), x - x^0 \rangle}{\|x - x^0\|^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle (H_f(\xi) - H_f(x^0))(x - x^0), x - x^0 \rangle}{\|x - x^0\|^2}.$$

Per disuguaglianza di Schwarz $\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, quindi la quantità che abbiamo è minore o uguale di:

$$\frac{1}{2} \frac{\|(H_f(\xi) - H_f(x^0))(x - x^0)\| \|x - x^0\|}{\|x - x^0\|^2} \leq \frac{1}{2} \frac{\|H_f(\xi) - H_f(x^0)\| \|x - x^0\|}{\|x - x^0\|}, \text{ per il lemma 1.5}$$

Siamo rimasti quindi con $\frac{1}{2} \|H_f(\xi) - H_f(x^0)\|$, che tenderà a 0 se e solo se la funzione H_f è continua. Possiamo dimostrarlo in 3 modi diversi:

1. Dato che $f \in C^2$, la matrice hessiana contiene funzioni continue.
2. Stiamo facendo il limite di una funzione continua, che è una funzione continua.
3. Disegnando un segmento notiamo che quando $x \rightarrow x^0$, $H_f(\xi) = H_f(x^0)$.

Definizione 1.42: Funzione convessa e concava

Data $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $X \subset \mathbb{R}^n$ convesso, f si dice **convessa** se:

$$f[tx'' + (1-t)x'] \leq tf(x'') + (1-t)f(x'), \quad \forall t \in]0, 1[\text{ e } \forall x', x'' \in X.$$

f Si dice **strettamente** convessa se vale solo il minore.

f Si dice **concava** se $-f$ è convessa.

Graficamente, se traccio un segmento tra due punti di una funzione convessa, tale segmento sarà sempre sopra il grafico della funzione.

In altre parole, f è convessa se e solo se il suo **epigrafico** è un insieme convesso di \mathbb{R}^{n+1} (dato che dobbiamo aggiungere una dimensione per aggiungere una coordinata, lo si capisce graficamente).

Ricordando una proprietà geometrica di analisi 1, una funzione convessa sta sempre sopra la tangente in ogni suo punto, e possiamo interpretare "tangente" con "derivata".

Nello spazio la funzione sarà quindi sempre sopra il piano tangente, ovvero:

$$f(x) \geq f(x^0) + \langle f'(x^0), x - x^0 \rangle, \quad \forall x^0, x \in X.$$

Una funzione può avere gradiente nullo (ogni derivata parziale nulla) pur non essendo una funzione costante, per esempio $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{x}$.

Tuttavia, se f è definita in un insieme convesso aperto e ha gradiente nullo, allora è sicuramente costante.

Teorema 1.21 Di Fermat (condizione necessaria del primo ordine per un punto di estremo relativo)

Siano A aperto di \mathbb{R}^n , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$; sia $x^0 \in A$ punto di estremo relativo per f .

Supponiamo che $\exists D_v f(x^0) \quad \forall v : \|v\| = 1$.

Allora: $D_v f(x^0) = 0$.

Dimostrazione rispetto al minimo

Si considera un segmento costituito da punti di f : $\varphi(t) := f(x^0 + tv)$, con $t \in [0, 1]$.

Tale segmento è una funzione a una variabile (t), derivabile e avente come punto di minimo

$t = 0$, quindi per il teorema di Fermat di analisi 1 sappiamo che $\frac{d}{dt}\varphi(0) = 0$, ovvero:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(0+t) - \varphi(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t} = \frac{\partial}{\partial v} f(x^0) = 0.$$

La dimostrazione rispetto al massimo è identica.

Come conseguenza di questo teorema possiamo dire che tutte le derivate parziali (e quindi il gradiente) in un punto di estremo saranno pari a 0, dato che le derivate parziali sono semplicemente un caso particolare di derivate direzionali, ovvero quando la direzione coincide con uno degli assi.

Definizione 1.43: Forma quadratica

Una forma quadratica in \mathbb{R}^n è un polinomio omogeneo di secondo grado del tipo:

$$q(h) = q(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j,$$

dove gli a_{ij} sono numeri reali detti **coefficienti** della forma quadratica.

Se tutti gli a_{ij} sono uguali a 0, la forma quadratica si dice **nulla**.

Definizione 1.44: Punto critico

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Un punto critico (detto anche **stazionario**) di f è un punto $x_0 \in A$ avente gradiente nullo.

Esercizio 1.1

Trova i punti critici della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Soluzione

I punti critici sono quei punti della funzione aventi gradiente nullo, quindi intanto calcoliamo le derivate prime della funzione:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

Affinché il gradiente sia nullo, tutte le derivate prime devono essere contemporaneamente nulle, quindi:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (0, 0), \text{ soluzione immediata.}$$

Tipi di forma quadratica Una forma quadratica (o la matrice simmetrica corrispondente) $q(h)$, con $h \in \mathbb{R}^n$, si può classificare come segue:

1. $q(h) > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq (0, \dots, 0) \implies$ **definita positiva**

2. $q(h) < 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq (0, \dots, 0) \implies$ **definita negativa**
3. $q(h) \geq 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$ ed esiste almeno un $\bar{h} \neq (0, \dots, 0) : q(\bar{h}) = 0 \implies$ **semidefinita positiva**
4. $q(h) \leq 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$ ed esiste almeno un $\bar{h} \neq (0, \dots, 0) : q(\bar{h}) = 0 \implies$ **semidefinita negativa**
5. **Indefinita** in tutti gli altri casi.

Esempio 1.9

Se una forma quadratica $q(h) = q(h_1, h_2)$ è uguale a:

- $h_1^2 + h_2^2 \implies$ definita positiva.
- $-(h_1^2 + h_2^2) \implies$ definita negativa.
- $h_1^2 \implies$ semidefinita positiva (fa zero quando $(h_1, h_2) = (0, a) \ \forall a \in \mathbb{R}$).
- $-(h_1)^2 \implies$ semidefinita negativa.
- $h_1^2 - h_2^2 \implies$ indefinita, perché a volte è negativa e a volte positiva.

Lemma 1.2

Se una forma quadratica $q(h) = h^T A h$ è:

- definita positiva $\implies \exists \lambda_m \in \mathbb{R}^+ : q(h) \geq \lambda_m \|h\|^2, \ \forall h \in \mathbb{R}^n$.
- definita negativa $\implies \exists \lambda_n \in \mathbb{R}^- : q(h) \leq \lambda_n \|h\|^2, \ \forall h \in \mathbb{R}^n$,

dove λ_m è il minimo autovalore di A e λ_n il massimo autovalore di A .

Teorema 1.22 Condizione sufficiente del secondo ordine per un punto di estremo relativo

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^2(A)$, $x^0 \in A$ punto critico per f , e sia $d^2 f(x^0)$ la forma quadratica associata alla matrice hessiana di f in x^0 ; allora:

1. Se $d^2 f(x^0)$ è definita positiva, x^0 è punto di minimo relativo.
2. Se $d^2 f(x^0)$ è definita negativa, x^0 è punto di massimo relativo.
3. Se $d^2 f(x^0)$ è indefinita, x^0 non è né punto di massimo, né di minimo, ed è quindi detto **punto di sella**, o **punto di colle**.

Dimostrazione

Seguiamo il Pagani-Salsa 2, cap. 2, teorema 1.9.

In questo documento la (1.14) e la (1.15) sarebbero in 1.5, mentre la (1.7) è:

$$f(x^0 + h) - f(x^0) = \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(\|h\|^2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x^0) h_i h_j + o(\|h\|^2), \text{ per } h \rightarrow 0,$$

che si ottiene applicando la formula di Taylor con resto di Peano fino al secondo ordine.

Dimostrazione – Sia $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ definita positiva. Dalla (1.14) abbiamo $d^2 f(\mathbf{x}^0) \geq \lambda_m \|\mathbf{h}\|^2$, dove λ_m è il minimo autovalore di $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$. Dalla (1.7) otteniamo allora,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) &= \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{x}^0) + o(\|\mathbf{h}\|^2) \geq \frac{1}{2} \lambda_m \|\mathbf{h}\|^2 + o(\|\mathbf{h}\|^2) = \\ &= \frac{1}{2} \lambda_m \|\mathbf{h}\|^2 \{1 + o(1)\} \quad (\text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}). \end{aligned}$$

Poiché $\lambda_m > 0$, $\|\mathbf{h}\|^2 > 0$ per $\|\mathbf{h}\| \neq 0$ e $\{1 + o(1)\} > 0$ definitivamente per $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, si deduce che anche $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) > 0$ definitivamente per $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ e perciò \mathbf{x}^0 è di minimo locale forte. La dimostrazione è analoga nel caso $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ definita negativa: usando la (1.15) si trova

$$f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) \leq \frac{1}{2} \lambda_M \|\mathbf{h}\|^2 \{1 + o(1)\}$$

dove λ_M (negativo) è il massimo autovalore di $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$. Dunque $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) < 0$ definitivamente per $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ e perciò \mathbf{x}^0 è punto di massimo locale forte.

Se $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ è indefinita esistono due vettori incremento \mathbf{h} e \mathbf{k} in corrispondenza ai quali $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ è rispettivamente positiva e negativa; cioè:

$$\sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) h_i h_j > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) k_i k_j < 0.$$

Valutiamo l'incremento di f lungo la retta $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{h}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$; si ha, dalla (1.7):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) &= \frac{1}{2} t^2 \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) h_i h_j + o(t^2) = \\ &= \frac{1}{2} t^2 \left\{ \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) h_i h_j + o(1) \right\} \quad (\text{per } t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

e perciò, essendo definitivamente positivo il termine tra parentesi, si ottiene che, per $|t|$ piccolo, sarà $f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) > 0$.

Con lo stesso ragionamento si trova che, per $|t|$ piccolo, $f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{k}) - f(\mathbf{x}^0) < 0$.

Dunque, in ogni intorno di \mathbf{x}^0 si trovano punti in cui f è maggiore di $f(\mathbf{x}^0)$ e punti in cui f è minore: \mathbf{x}^0 è punto di colle. \square

Esempio 1.10 (in \mathbb{R}^2)

Vedere 6.1.

Definizione 1.45: Minore di nord ovest

Data una matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, il minore di nord-ovest di ordine k è il minore della matrice A_k (matrice di **nord ovest**), la quale si ottiene intersecando le prime k righe con le prime k colonne, con $k = 1, \dots, n$.

Sappiamo che:

- A è definita positiva \iff tutti i minori di nord ovest sono positivi: $|A_k| > 0 \ \forall k = 1, \dots, n$.
- A è definita negativa $\iff (-1)^k |A_k| > 0$

Inoltre, se A è simmetrica:

- A è definita positiva \iff tutti gli autovalori sono positivi
- A è definita negativa \iff tutti gli autovalori sono negativi
- A è semidefinita positiva \iff tutti gli autovalori sono ≥ 0
- A è semidefinita negativa \iff tutti gli autovalori sono ≤ 0

Teorema 1.23 C.N.S. affinché una funzione sia strettamente convessa

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(A)$.

Allora f è strettamente convessa $\iff H_f(x)$ è definita positiva $\forall x \in A$

Teorema 1.24

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente convessa e differenziabile in A , insieme aperto convesso di \mathbb{R}^n , sia x^0 punto critico di A .

Allora x^0 è l'unico punto di minimo assoluto.

Teorema 1.25 Metodo dei minimi quadrati

Siano $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ n punti nel piano con ascisse non tutte uguali; se $n > 2$ è evidente che, in generale, non esisterà una retta passante per ognuno di essi. Si vuole trovare la retta $y = ax + b$ che minimizza l'errore quadratico totale, definito dall'espressione:

$$E_2(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2,$$

con $E_2 : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Dimostrazione

Cerchiamo i punti stazionari di E_2 , ovvero quelli che soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_2}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2x_i(ax_i + b - y_i) = 0 \\ \frac{\partial E_2}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

Portiamo i termini noti a destra:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n ax_i^2 + \sum_{i=1}^n bx_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n ax_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Chiamiamo:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = P, \quad \sum_{i=1}^n x_i = Q, \quad \sum_{i=1}^n y_i = R, \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = S,$$

quindi possiamo riscrivere il sistema precedente in modo compatto:

$$\begin{cases} Pa + Qb = S \\ Qa + nb = R \end{cases}$$

Si tratta di un sistema quadrato avente come determinante $\Delta = np - Q^2$. Usando il metodo di Cramer si trovano i valori delle incognite:

$$\begin{cases} a^* = \frac{nS - RQ}{nP - Q^2} \\ b^* = \frac{PR - QS}{nP - Q^2} \end{cases}$$

Quindi il punto (a^*, b^*) è l'unico punto stazionario. Ricordando il teorema 1.5, un punto stazionario di una funzione differenziabile e strettamente convessa è l'unico punto di minimo assoluto di tale funzione.

E_2 è strettamente convessa, e si può dimostrare calcolando la matrice hessiana e mostrando che è definita positiva in ogni punto della funzione.

A questo punto abbiamo trovato la retta che minimizza E_2 : $y = a^*x + b^*$.

Chapter 2

Equazioni differenziali

Integrale Consideriamo una funzione f continua in (a, b) e cerchiamo funzioni $y(x)$ derivabili in (a, b) tali che $y'(x) = f(x) \forall x \in (a, b)$.

Questo è il classico problema dell'integrazione, ovvero della ricerca delle primitive di f , ed è stato risolto dal teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt + y_0,$$

dove y_0 è una costante pari a $y(x_0)$. Si tratta del caso più semplice di **equazione differenziale**.

Problema di Cauchy Un problema di Cauchy è una richiesta del tipo:

$$\begin{cases} y' = \alpha x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Ovvero oltre alla risoluzione dell'equazione differenziale, è richiesto di calcolare anche il valore della funzione in un dato punto.

Un esempio di equazione differenziale (proveniente dalla fisica) è quella del moto armonico: $x'' + \omega^2 x = 0$.

In fisica è frequente la ricerca di funzioni derivabili 2 volte in un intervallo (a, b) .

Definizione 2.1: Equazione differenziale di ordine n

Dato l'insieme $A \subset \mathbb{R}^{n+2}$ e la funzione $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, un'equazione differenziale di ordine n è il problema della ricerca di funzioni $y(x)$ definite in un certo intervallo (α, β) e ivi derivabili n volte, tali che:

1. $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in A \forall x \in (\alpha, \beta)$
2. $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \forall x \in (\alpha, \beta)$

Una tale $y(x)$ è detta **soluzione** dell'equazione differenziale.

Un'equazione differenziale è in forma **normale** se è esplicitata rispetto alla derivata di ordine massimo, ovvero:

$$f : B \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R} \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Una tale equazione sarà il problema della ricerca di funzioni $y(x)$ definite in un certo intervallo (α, β) e ivi derivabili n volte, tali che $y^n(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$.

Classificazioni di equazioni differenziali Classifichiamo le equazioni differenziali in base al tipo di funzione:

- Lineari, per esempio $y' = y \sin x$. Per questo tipo di equazioni la teoria è completa, ovvero sappiamo risolvere tutti i problemi.
- Non lineari

Equazioni differenziali a variabili separabili (o separate) Si tratta di equazioni del tipo $y' = X(x)Y(y)$, dove $y' = f(x, y)$ e le funzioni $X : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $Y : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue. Le **soluzioni** sono funzioni $y(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in (α, β) e tali che $y'(x) = X(x)Y(y(x)) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$.

Equazioni differenziali a coefficiente omogeneo Questo è un tipo di equazioni differenziali non immediatamente trattabili col metodo della separazione delle variabili.

Il nostro obiettivo in questo caso sarà dunque quello di ricondurci al caso della separazione di variabili, mediante l'introduzione di una funzione ausiliaria $z(x)$

Equazioni differenziali del primo ordine Si tratta di equazioni del tipo:

$$y' + a(x)y = f(x) \quad (2.1)$$

dove a e f sono funzioni continue in (α, β) .

In alcuni libri le troviamo in forma normale: $y' = a(x)y + f(x)$, per cui le formule non sono da imparare a memoria in quanto potrebbero variare.

Ogni equazione del tipo 2.1 (detta **completa**) ha un'equazione omogenea associata, ovvero:

$$y' + a(x)y = 0 \quad (2.2)$$

il **procedimento** per risolverle è:

1. Si trovano tutte le soluzioni della 2.2
2. Si trova una soluzione della 2.1
3. La somma di tutte queste soluzioni trovate è pari a tutte le soluzioni della 2.1.

Esercizio 2.1

Risolvere l'equazione:

$$y' + y = 3 \sin 4x \quad (2.3)$$

Soluzione

Si risolve prima di tutto l'omogenea associata, ovvero:

$$y' + y = 0 \implies y' = -y$$

La soluzione banale è $y(x) = 0$, mentre l'integrale generale:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -1 \xrightarrow{\text{integrando}} \ln |y(x)| = -x + c \implies |y(x)| = e^{-x} e^c = k e^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo adesso una soluzione **particolare** z della 2.3 col metodo di variazione delle costanti: imponiamo che la funzione $z(x) = \gamma(x)e^{-x}$ sia soluzione della 2.3, che diventa:

$$\gamma' e^{-x} - \gamma e^{-x} + \gamma e^{-x} = 3 \sin 4x \implies \gamma'(x) = 3e^x \sin 4x \implies$$

$$\implies \gamma(x) = 3 \int e^x \sin 4x \, dx. \text{ Integrando per parti otteniamo:}$$

$$\int e^x \sin 4x \, dx = e^x \sin 4x - 4 \int e^x \cos 4x \, dx.$$

$$\text{Dato che } \int e^x \cos 4x \, dx = e^x \cos 4x + 4 \int e^x \sin 4x \, dx, \text{ otteniamo:}$$

$$\int e^x \sin 4x \, dx = e^x \sin 4x - 4 \left(e^x \cos 4x + 4 \int e^x \sin 4x \, dx \right) \implies$$

$$\implies \int e^x \sin 4x \, dx = e^x \sin 4x - 4e^x \cos 4x - 16 \int e^x \sin 4x \, dx$$

$$\int e^x \sin 4x \, dx = \frac{1}{17} e^x (\sin 4x - 4 \cos 4x) + d \implies \gamma(x) = \frac{3}{17} e^x (\sin 4x - 4 \cos 4x)$$

γ è una qualunque primitiva, non la famiglia di tutte le primitive, per cui scegliamo $d = 0$. $z(x) = \gamma(x)e^{-x}$ è la soluzione particolare che cercavamo. L'integrale generale della 2.3 si ottiene sommando a essa l'integrale generale dell'omogenea associata:

$$y(x) = \gamma(x)e^{-x} + k e^{-x} = \frac{3}{17} (\sin 4x - 4 \cos 4x) + k e^{-x}$$

Equazioni del tipo $y' = g(ax+by)$ Risolviamo ponendo $ax + by = z$

Equazione lineare del secondo ordine Un'equazione lineare del tipo

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \quad (2.4)$$

è detta "equazione lineare **del secondo ordine**". I valori a e b saranno detti **coefficienti**, $f(x)$ sarà il termine noto.

L'omogenea associata a questo tipo di funzione è

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (2.5)$$

e un caso particolare è quando i coefficienti sono costanti, per cui si avrebbe:

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (2.6)$$

Per la 2.5 (e quindi anche 2.6), se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni, si verifica che $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ è sempre soluzione.

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono linearmente indipendenti (ovvero $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \iff c_1 = c_2 = 0$), allora **tutte le soluzioni** sono combinazioni lineari di $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

Nel caso in cui a e b siano costanti, possiamo ricavarci un'equazione caratteristica, ovvero $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, da cui:

- se $\Delta > 0$ abbiamo 2 soluzioni reali e distinte dell'equazione caratteristica $\lambda_1, \lambda_2 \implies e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ sono soluzioni linearmente indipendenti della 2.6
- se $\Delta = 0$ abbiamo 2 soluzioni reali e coincidenti dell'equazione caratteristica $\lambda \implies e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}$ sono soluzioni linearmente indipendenti della 2.6
- se $\Delta < 0$ abbiamo 2 soluzioni immaginarie e coniugate dell'equazione caratteristica $\alpha \pm i\beta \implies e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $e^{\alpha x} \sin \beta x$ sono soluzioni linearmente indipendenti della 2.6

Date $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluzioni della 2.5, cerco una soluzione della 2.4 nella forma $\gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x)$, dove γ_1', γ_2' sono soluzioni del sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(x) \\ \gamma_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Si può risolvere con Cramer, ma naturalmente anche con altri metodi.

Definizione 2.2: Matrice wronskiana

Siano $y_1(x), y_2(x)$ soluzioni della 2.5. La matrice: $\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$ è detta **wronskiana**, e il suo determinante è detto **wronskiano**.

Il wronskiano $W(x)$ è o sempre diverso da 0 (in tal caso avremo soluzioni linearmente indipendenti), o sempre 0 (soluzioni linearmente dipendenti) al variare di x .

Esercizio 2.2

Risolvere l'equazione differenziale del secondo ordine:

$$y'' + 2y' + y = \frac{\ln x}{e^x} \quad (2.7)$$

Soluzione

Si scrive l'equazione omogenea associata alla 2.7 e se ne ricava l'equazione caratteristica:

$$y'' + 2y' + y = 0 \implies \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad (2.8)$$

Essa si può riscrivere come $(\lambda + 1)^2 = 0 \implies \lambda = -1$ è soluzione doppia, quindi $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_2(x) = x e^{-x}$ sono soluzioni linearmente indipendenti della 2.8, e di conseguenza l'integrale generale della 2.8 è $c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Si cerca ora una soluzione particolare della 2.7 nella forma:

$w(x) = w_1(x) + w_2(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x)$, dove γ'_1, γ'_2 sono soluzioni del sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'_1(x) \\ \gamma'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'_1(x) \\ \gamma'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\ln x}{e^x} \end{pmatrix}$$

Che risolviamo usando il metodo di Cramer:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

$$\gamma'_1(x) = e^{2x} \begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ \frac{\ln x}{e^x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = -x \ln x$$

$$\text{Scegliamo una primitiva } \gamma_1(x) = - \int x \ln x \, dx = -\frac{x^2}{2} \ln x + \int \frac{x}{2} \, dx = -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4}$$

$$\text{Quindi } w_1(x) = e^{-x} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x \right).$$

$$\gamma'_2(x) = e^{2x} \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{\ln x}{e^x} \end{vmatrix} = e^{2x} \frac{\ln x}{e^{2x}} = \ln x \implies \gamma_2(x) = \int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

è la primitiva che cerchiamo.

$$\text{Quindi } w_2(x) = xe^{-x}(x \ln x - x) = x^2e^{-x}(\ln x - 1).$$

L'integrale generale della 2.7 è somma dell'integrale generale della 2.8 e della soluzione particolare $w(x) = w_1 + w_2$, quindi:

$$c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + x^2e^{-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln x + \ln x - 1 \right) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + x^2e^{-x} \frac{2 \ln x - 3}{4}$$

Diversi tipi di problemi di Cauchy Un problema di Cauchy può anche avere nessuna soluzione, come:

$$\begin{cases} y' = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{dove } g(x) = \frac{|x|}{x} \text{ è la funzione "gradino" di Heaviside.}$$

In generale questo avviene quando g è una funzione con discontinuità di prima specie (salto), in quanto non ha primitive in un intorno di x_0 .

Un problema di Cauchy potrebbe avere 2 soluzioni, per esempio:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \implies \text{soluzioni: } y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Ci chiediamo dunque se esista un modo per sapere se il problema di Cauchy ha una sola soluzione, e la risposta è affermativa, secondo il successivo teorema.

Teorema 2.1 Di Cauchy di esistenza e unicità locale

Ipotizziamo una funzione f definita in un intorno (per semplicità rettangolare) di un punto (x_0, y_0) .

Supponiamo che f sia continua in $I_x \times I_y = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, e inoltre $\exists L > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2| \quad \forall x \in I_x, \quad \forall y_1, y_2 \in I_y$, ovvero f lipschitziana rispetto a y uniformemente rispetto alla x (poiché L non dipende da x).

Allora esiste un'unica funzione definita in un intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [x_0 - a, x_0 + a]$, ed è soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Un modo comodo per capire se una funzione è lipschitziana o meno è attraverso il seguente teorema.

Teorema 2.2 Condizione sufficiente affinché f sia lipschitziana

Data la funzione f , se $f_y(x, y)$ è continua in $I_x \times I_y$, allora f è lipschitziana.

Dimostrazione

Fissato $x \in I_x$ e scelti arbitrariamente $y_1, y_2 \in I_y$, considero la differenza $f(x, y_1) - f(x, y_2)$. Essa sarà una funzione derivabile rispetto a y , per cui applicando il teorema di Lagrange:

$$\begin{aligned} \exists c \in (y_1, y_2) : f(x, y_1) - f(x, y_2) &= f_y(x, c)(y_1 - y_2) \implies \\ \implies |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= |f_y(x, c)(y_1 - y_2)|. \end{aligned}$$

Dato che f è continua, per il teorema di [Weierstrass](#) ammette massimo L tale che $f_y(x) \leq L, \quad \forall x \in \text{dom } f$, quindi:

$$f_y(x, c) \leq L \implies |f_y(x, c)(y_1 - y_2)| \leq L(y_1 - y_2),$$

Quindi f è lipschitziana.

Vediamo ora la versione **globale** del teorema Di Cauchy di esistenza e unicità, ovvero senza possibilità che la soluzione abbia un campo d'esistenza ristretto rispetto a f . L'unica differenza è che f è definita in una striscia di piano anziché un rettangolo.

Teorema 2.3 Di Cauchy di esistenza e unicità globale (ordine 2)

Data $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}$, supponiamo che:

1. f sia continua in $[a, b] \times \mathbb{R}$
2. $\exists L > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2| \quad \forall x \in I_x, \quad \forall y_1, y_2 \in I_y$

Allora esiste un'unica funzione reale definita in $[a, b]$ e soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

A tal proposito, una condizione sufficiente affinché una funzione $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia lipschitziana è che esista f_y limitata in $[a, b] \times \mathbb{R}$.

Definizione 2.3: Equazione integrale di Volterra

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, e sia $x_0 \in A$.

Un'equazione integrale di Volterra è il problema della ricerca di funzioni continue in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ che soddisfano l'equazione:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad (2.9)$$

dove $y_0 = y(x_0)$.

Notiamo che le funzioni che soddisfano la 2.9, per il teorema fondamentale del calcolo integrale soddisfano il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

E inoltre le funzioni che soddisfano la 2.10 soddisfano la 2.9, in quanto:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \implies y(x) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt + y(x_0),$$

dunque l'equazione integrale di Volterra e il problema di Cauchy 2.10 sono equivalenti.

Notazione

- (x, y_1, \dots, y_n) denota il generico punto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
- $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ sarà un punto di un insieme $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Definizione 2.4: Problema di Cauchy di ordine n

Data $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, un problema di Cauchy di ordine n è:

$$\begin{cases} y^n = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Dove i vari $y_0^{(i)}$ a secondo membro sono numeri reali, non funzioni.

Si tratta della ricerca di funzioni $y(x)$ derivabili n volte in un certo intervallo (α, β) tali che $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in A$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$ e tali che $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$.

Possiamo ripetere le considerazioni fatte riguardo l'esistenza e unicità di soluzioni per tale problema, a patto di definire f in un "iperparallelepipedo" o "strato", ovvero $[a, b] \times \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.4 Di Cauchy di esistenza e unicità globale (ordine n)

Sia $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che:

$$\exists L > 0 : |f(x, Y^1) - f(x, Y^2)| \leq L \|Y^1 - Y^2\| \quad (2.11)$$

dove $Y^i = (y_1^i, \dots, y_n^i)$.

Allora esiste un'unica funzione $y(x) : [a, b] \times \mathbb{R}^n$ soluzione del problema di Cauchy.

Condizione sufficiente affinché valga la 2.11 è che $\exists_{n_0} f_{y_1}(x, Y), \dots, f_{y_n}(x, Y)$ limitate in $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, dove $Y = (y_1, \dots, y_n)$.

Definizione 2.5: Equazione differenziale lineare di ordine n

Date le funzioni $y, g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ continue, un'equazione del tipo:

$$y^n + a_0(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x), \quad (2.12)$$

con a_j continue, è detta "equazione differenziale lineare di ordine n ".

Scritta in forma normale:

$$y^n = -(a_0(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y) + g(x),$$

che possiamo riscrivere come:

$f(x, Y_1, \dots, Y_n) = -a_0(x)Y_n - \dots - a_n(x)Y_1 + g(x)$, dove le Y sono derivate parziali, quindi funzioni continue.

Definizione 2.6: Equazione di Bernoulli

Date le funzioni $a, f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ continue, un'equazione del tipo $y' + a(x)y = f(x)y^m$, con $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, è detta **equazione di Bernoulli**.

Fissando $m > 0$ risulta che $y(x) = 0$ è sempre soluzione.

Per risolvere un'equazione di Bernoulli ci si riconduce a un'equazione lineare, che bisogna poi svolgere.

Per arrivare a tale equazione lineare basta fare dei rimaneggiamenti:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)y^m(x) \implies \frac{y'(x)}{y^m(x)} + a(x)\frac{y(x)}{y^m(x)} = f(x) \implies \frac{y'(x)}{y^m(x)} + a(x)[y(x)]^{1-m} = f(x)$$

$$\text{ponendo } z(x) = [y(x)]^{1-m} \implies z'(x) = (1-m)[y(x)]^{-m}y'(x) \implies \frac{z'(x)}{1-m} = \frac{y'(x)}{y^m(x)}, \text{ quindi per}$$

$$\text{l'equazione ottenuta sopra: } \frac{z'(x)}{1-m} + a(x)z(x) = f(x).$$

Ci troviamo ora con un'equazione lineare che possiamo risolvere, ma naturalmente va poi fatto il cambio variabile inverso per ottenere il risultato che vogliamo: $y(x) = [z(x)]^{\frac{1}{1-m}}$.

Definizione 2.7: Equazione differenziale lineare omogenea di ordine n

Data la funzione $y : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ continua, un'equazione del tipo:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \quad (2.13)$$

con a_j continue, è detta "equazione omogenea differenziale lineare **omogenea** di ordine n".

Osservazione 2.14. Se $y_1(x), \dots, y_n(x)$ sono soluzioni di 2.13, allora $c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x)$ è soluzione di 2.13 $\forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

Notiamo che la funzione $y(x) = 0$ è soluzione di tale equazione, e inoltre è anche soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad \text{con } x_0 \in [\alpha, \beta].$$

Quindi, per il teorema di esistenza e unicità globale, sappiamo che è l'unica soluzione.

Definizione 2.8: Funzioni linearmente indipendenti o dipendenti

Delle funzioni appartenenti all'insieme $\{f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$ si dicono:

- Linearmente indipendenti se $c_1f_1(x) + \dots + c_kf_k(x) = 0 \quad \forall x \in I \implies c_1 = \dots = c_k = 0$.
- Linearmente dipendenti se $c_1f_1(x) + \dots + c_kf_k(x) = 0 \quad \forall x \in I$.

Teorema 2.5 Sulla matrice wronskiana

Date y_1, \dots, y_n soluzioni della 2.13, si può considerare la matrice wronskiana:

$$[w(x)] = \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

E si avrà che:

- 1a Se $\exists x_0 \in [a, b] : w(x_0) = 0$, allora y_1, \dots, y_n sono linearmente dipendenti.
- 1b Se y_1, \dots, y_n sono linearmente dipendenti, allora $w(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$
- 2a Se $\exists \bar{x} \in [a, b] : w(\bar{x}) \neq 0$, allora y_1, \dots, y_n sono linearmente indipendenti.
- 2b Se y_1, \dots, y_n sono linearmente indipendenti, allora $w(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

Dimostrazione

- 1a) Considero il sistema $[w(x_0)]C = 0$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo per ipotesi $w(x_0) = 0$ e y_1, \dots, y_n linearmente dipendenti, per cui oltre $(0, \dots, 0)$ abbiamo $\exists(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n)$ soluzione del sistema.

Considero la funzione $c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$. Risulta che:

$$\begin{cases} \text{Essa vale } 0 \text{ in } x_0 \\ \text{La sua derivata vale } 0 \text{ in } x_0 \\ \vdots \\ \text{Tutte le derivate fino alla } n-1 \text{ valgono } 0 \text{ in } x_0 \end{cases}$$

Per cui si tratta della funzione nulla $\implies \bar{c}_1 y_1(x) + \dots + \bar{c}_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \implies y_1, \dots, y_n$ sono linearmente dipendenti.

- 1b) Per ipotesi $\exists(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n) \neq (0, \dots, 0)$. Per ogni x in $[a, b]$ si ha:

$$\begin{cases} \bar{c}_1 y_1(x) + \dots + \bar{c}_n y_n(x) = 0 \\ \bar{c}_1 y_1'(x) + \dots + \bar{c}_n y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ \bar{c}_1 y_1^{(n-1)}(x) + \dots + \bar{c}_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare determinato, quindi ha una soluzione (ovvero 0), per un teorema di algebra lineare.

Come visto, il wronskiano o è sempre 0 in ogni x oppure è sempre $\neq 0$.

Teorema 2.6 Esistenza di n integrali indipendenti di una equazione differenziale lineare omogenea di ordine n

Un'equazione del tipo:

$$y^n + a_0(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

con coefficienti continui in $[a, b]$, ammette n soluzioni linearmente indipendenti.

Dimostrazione

Consideriamo n problemi di Cauchy associati all'equazione omogenea, e denotiamo con y_1, y_2, \dots, y_n le soluzioni di tali problemi:

P1

$$\begin{cases} y_1(x_0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

P2

$$\begin{cases} y_2(x_0) = 0 \\ y_2'(x_0) = 1 \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

\vdots

\vdots

Pn

$$\begin{cases} y_n(x_0) = 0 \\ y_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Si verifica subito che la matrice wronskiana di tali soluzioni calcolata nel punto x_0 è $[w(x_0)] = I \implies w(x_0) = 1 \neq 0$, quindi per il teorema [Sulla matrice wronskiana](#) y_1, \dots, y_n sono linearmente indipendenti.

Teorema 2.7 Di struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare di ordine n omogenea

Data l'equazione differenziale lineare omogenea:

$$y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \text{ con } a_j : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \quad (2.15)$$

e dette y_1, \dots, y_n le soluzioni linearmente indipendenti, l'integrale generale della 2.15 è della forma:

$$c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x), \quad \forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Vale anche il viceversa, perché la derivata di una combinazione lineare è la combinazione lineare delle derivate.

Dimostrazione

Sia $y(x)$ soluzione della 2.15. Scegliamo arbitrariamente $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e consideriamo il sistema:

$$[w(x_0)] \cdot C = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}, \text{ con } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Riscriviamolo in forma estesa:

$$\begin{cases} y_1(x_0)c_1 + \cdots + y_n(x_0)c_n = y(x_0) \\ y'_1(x_0)c_1 + \cdots + y'_n(x_0)c_n = y'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)c_1 + \cdots + y_n^{(n-1)}(x_0)c_n = y^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Dato che y_1, \dots, y_n sono linearmente indipendenti, $w(x) \neq 0$, e quindi $\exists(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n)$ soluzione del sistema.

Se consideriamo la funzione $\bar{c}_1 y_1(x) + \cdots + \bar{c}_n y_n(x)$, essa è una soluzione della 2.15 che in x_0 soddisfa le stesse condizioni iniziali della funzione $y(x)$ nella prima equazione del sistema. Per il teorema di esistenza e unicità, tale soluzione è unica, e dunque esse coincidono.

Teorema 2.8 Di struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare di ordine n

Sia w una soluzione di un'equazione differenziale lineare di ordine n :

$$y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x), \quad (2.16)$$

con $a_j : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Siano y_1, \dots, y_n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata, ovvero della 2.15.

Allora l'integrale generale della 2.16 è dato da:

$$w(x) + c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

al variare di c_1, \dots, c_n in \mathbb{R} .

Dimostrazione

Sia y una fissata soluzione della 2.16 e $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Si consideri il sistema di n equazioni lineari nelle n incognite c_1, \dots, c_n :

$$\begin{cases} y_1(x_0)c_1 + \cdots + y_n(x_0)c_n = y(x_0) - w(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)c_1 + \cdots + y_n^{(n-1)}(x_0)c_n = y^{(n-1)}(x_0) - w^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Il determinante di questo sistema è diverso da 0, in quanto è il wronskiano delle soluzioni indipendenti y_1, \dots, y_n calcolato in x_0 , dunque il sistema ha un'unica soluzione $(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n)$. Si costruisce la funzione:

$$w(x) + \bar{c}_1 y_1(x) + \cdots + \bar{c}_n y_n(x).$$

Essa è soluzione dell'equazione completa (2.16), e in x_0 soddisfa le condizioni iniziali della soluzione y fissata, per cui coincide con essa; si ha dunque la tesi.

Lemma 2.1 Se la soluzione è complessa:

L'equazione sarà:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = h(x), \quad (2.17)$$

dove $h : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$ e $a_j : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue.

Essendo h complessa, abbiamo $h(x) = f(x) + ig(x)$.

Detta $u(x)$ la parte reale della soluzione $y(x)$ e $v(x)$ il coefficiente dell'immaginario, si ha che:

- u soddisfa $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$
- v soddisfa $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x)$.

Lemma 2.2 Struttura dello spazio delle soluzioni di un'equazione lineare di ordine n a coefficienti costanti

L'equazione sarà:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \quad (2.18)$$

In generale la funzione $e^{\lambda x}$ è soluzione se e solo se λ è soluzione di $\lambda^{(n)} + a_1\lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$, l'equazione caratteristica.

In particolare, se λ^* è radice dell'equazione caratteristica con molteplicità p , allora le funzioni $e^{\lambda^*x}, xe^{\lambda^*x}, x^2e^{\lambda^*x}, \dots, x^{p-1}e^{\lambda^*x}$ sono soluzioni della 2.18.

Le soluzioni dell'equazione caratteristica possono essere:

- Soluzioni reali $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ con molteplicità rispettivamente p_1, \dots, p_r .

Allora le funzioni:

$$e^{\lambda_1x}, xe^{\lambda_1x}, \dots, x^{p_1-1}e^{\lambda_1x}$$

\vdots

$$e^{\lambda_rx}, xe^{\lambda_rx}, \dots, x^{p_r-1}e^{\lambda_rx}$$

Sono tutte soluzioni linearmente indipendenti della 2.18

- Soluzioni complesse $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_s \pm i\beta_s$ con molteplicità rispettivamente q_1, \dots, q_s .

Allora le funzioni:

$$e^{\alpha_1x} \cos \beta_1x, e^{\alpha_1x} \sin \beta_1x, xe^{\alpha_1x} \cos \beta_1x, xe^{\alpha_1x} \sin \beta_1x, \dots, x^{q_1-1}e^{\alpha_1x} \cos \beta_1x, x^{q_1-1}e^{\alpha_1x} \sin \beta_1x$$

\vdots

$$e^{\alpha_sx} \cos \beta_sx, e^{\alpha_sx} \sin \beta_sx, xe^{\alpha_sx} \cos \beta_sx, xe^{\alpha_sx} \sin \beta_sx, \dots, x^{q_r-1}e^{\alpha_sx} \cos \beta_sx, x^{q_r-1}e^{\alpha_sx} \sin \beta_sx$$

Sono tutte soluzioni linearmente indipendenti della 2.18

Metodo di somiglianza Data l'equazione: $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = e^{\gamma x}(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)$, con $b_m \neq 0$ e $\gamma, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{C}$, sappiamo che l'equazione caratteristica è $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$.

Avremo due possibili casi:

1. γ non è soluzione dell'equazione caratteristica $\implies e^{\gamma x}(c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m)$ è soluzione dell'equazione completa, con coefficienti da determinare.
2. γ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità $p \implies e^{\gamma x}x^p(c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m)$ è soluzione dell'equazione completa, con coefficienti da determinare

Notiamo che le soluzioni così trovate sono simili al termine noto, e da qui il nome del teorema, che risulta un metodo più veloce rispetto a quello della variazione della costante.

È anche possibile evitare il passaggio al campo complesso usando seno e coseno al posto di e^{ix} , ma le n derivate potrebbero far confondere con i segni, per cui è preferibile il metodo descritto.

Esercizio 2.3

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + \omega_0^2 y = F \sin \omega t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{con } \omega_0, \omega, F > 0 \quad \text{e } \omega \neq \omega_0 \quad (2.19)$$

Soluzione

Risolviamo l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \implies \lambda = \pm \sqrt{-\omega_0^2} = \pm i\omega_0$$

L'integrale generale dell'omogenea è dunque $y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$.

Riscriviamo l'equazione completa come $y'' + \omega_0^2 y = Fe^{i\omega_0 t}$, e notiamo che $i\omega_0$ è radice dell'equazione caratteristica, quindi per il teorema di somiglianza $w(t) = cte^{i\omega_0 t}$ è una soluzione particolare **complessa** della completa, con c da determinare:

$$w(t) = cte^{i\omega_0 t}$$

$$w'(t) = ce^{i\omega_0 t} + i\omega_0 cte^{i\omega_0 t} = e^{i\omega_0 t}(c + i\omega_0 ct)$$

$$w''(t) = i\omega_0 ce^{i\omega_0 t} + (ci\omega_0 - \omega^2 ct)e^{i\omega_0 t} = e^{i\omega_0 t}(2i\omega_0 c - \omega^2 ct)$$

Sostituendo nell'equazione $y'' + \omega_0^2 y = Fe^{i\omega_0 t}$ troviamo:

$$(2i\omega_0 c - \omega^2 ct)e^{i\omega_0 t} + \omega_0^2 cte^{i\omega_0 t} = Fe^{i\omega_0 t} \implies 2i\omega_0 c = F \implies c = \frac{F}{2i\omega_0}$$

Quindi:

$$w(t) = \frac{F}{2i\omega_0} te^{i\omega_0 t} = \frac{Ft}{2i\omega_0} (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) = \frac{-Fti}{2\omega_0} (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t)$$

La soluzione particolare **reale** della completa è il coefficiente del termine immaginario, ovvero $\text{Im } w(t) = -\frac{tF}{2\omega_0} \cos \omega_0 t$.

Infine, l'integrale generale della completa è:

$$y(t) = -\frac{F}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

A questo punto facilmente si risolve il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 0 \\ -\frac{F}{2\omega_0} + B\omega_0 = 0 \end{cases} \implies B = \frac{F}{2\omega_0^2}.$$

Cenni di sistemi di equazioni differenziali del 1° ordine Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} y_1'(t) = p_{11}(t)y_1(t) + \cdots + p_{1n}(t)y_n(t) + q_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = p_{n1}(t)y_1(t) + \cdots + p_{nn}(t)y_n(t) + q_n(t) \end{cases}$$

In esso possiamo distinguere i vettori delle incognite e dei termini noti, rispettivamente:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad Q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}$$

Il nostro obiettivo sarà trovare il vettore delle soluzioni $Y'(t)$ tale che $Y'(t) = p(t)Y(t) + Q(t)$. Eventualmente si può considerare un problema di Cauchy per $Y(0) = B$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ \vdots \\ y_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$$

Esponenziale di una matrice Sappiamo che si può fare la derivata o l'integrale di matrice, semplicemente derivando o integrando ogni elemento. Consideriamo ora un'altra operazione meno intuitiva.

Verrebbe da pensare che e^A è la matrice che ha per elementi $e^{a_{ij}}$, ma così facendo si perderebbero due proprietà di esponenziali: $e^0 = 1$ e $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$. Come si può definire dunque e^A ?

Ricordando che l'espansione in serie di Taylor è $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$, possiamo porre:

$$e^A := I + A + \frac{A^2}{2} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

Teorema 2.9 Criterio di convergenza

Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|$ è convergente, allora $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ è convergente.

Esempio 2.1

Ci chiediamo se la serie $e^A I + A + \frac{A^2}{2} + \cdots + \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge.

Applicando il criterio, basta verificare che $\|e^k\| = \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$ converge, e questo è semplice:

$$\text{Sfruttando la proprietà } \|AB\| \leq \|A\| \|B\| \implies \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!},$$

che è una serie convergente.

Teorema 2.10 Equazione differenziale soddisfatta dall'esponenziale di una matrice

Sia $E(t) = e^{tA}$ una funzione matriciale, allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ è soddisfatta l'equazione differenziale matriciale:

$$E'(t) = E(t)A = AE(t).$$

Dimostrazione

Dalla definizione di matrice esponenziale sappiamo che:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots,$$

quindi:

$$E(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k c_{ij}^{(k)}}{k!} \right)_{ij}, \text{ con } c_{ij}^{(k)} \text{ elemento di posto } ij \text{ di } A^k. \quad (2.20)$$

Ogni elemento a secondo membro di 2.20 è una serie di potenze nella variabile t , convergente per ogni t . Perciò la sua derivata esiste per ogni t ed è data dalla serie derivata:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k c_{ij}^{(k)}}{k!} \right)_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^k c_{ij}^{(k)}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} c_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} c_{ij}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_{ij}^{(k+1)},$$

quindi:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k A = e^{tA} A,$$

ma anche:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k+1} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = A e^{tA}.$$

Lemma 2.3

Per ogni matrice quadrata A vale $e^{tA} e^{-tA} = I, \forall t \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.11

Siano A e B due matrici $n \times n$ costanti (ovvero di numeri), allora la sola matrice $n \times n$ che soddisfa il problema:

$$\begin{cases} F'(t) = AF(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ F(0) = B \end{cases}$$

è $F(t) = e^{tA} B$.

Dimostrazione

Si verifica subito che $D(e^{tA}B) = Ae^{tA}B$ e $F(0) = e^0B = B$.

Dimostriamo ora l'unicità: supponendo l'esistenza di un'altra soluzione $H(t)$, consideriamo:
 $D(H(t)e^{-tA}) = H'(t)e^{-tA} - AH(t)e^{-tA}$.

Essendo H soluzione, allora per ipotesi $H'(t) = AH(t)$, quindi la derivata diventa:

$D(H(t)e^{-tA}) = AH(t)e^{-tA} - AH(t)e^{-tA} = 0$, quindi $H(t)e^{-tA}$ è costante, e la chiamiamo B .

Abbiamo:

$$H(t)e^{-tA} = B \implies H(t)e^{-tA}e^{tA} = Be^{tA} \implies H(t) = Be^{tA}.$$

Lemma 2.4

Siano A, B due matrici $n \times n$ costanti.

Se $AB = BA$, allora $e^{A+B} = e^A e^B$.

In particolare, $e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA} \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \text{ e } \forall A \text{ matrice } n \times n$.

Teorema 2.12

Sia A matrice numerica $n \times n$ e $B \in \mathbb{R}^n$ un vettore, allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(a) = B \end{cases}$$

Ha come unica soluzione $y(t) = e^{(t-a)A}B$.

Dimostrazione

Identica al teorema precedente.

Lo scopo di questi due teoremi è mostrare che la risoluzione di un problema di Cauchy del genere è **nota**: basta solo calcolare l'esponenziale della matrice.

Vediamo come farlo:

Calcolare e^A

1. Se A è diagonale, allora $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \implies e^A = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
2. Se A è diagonalizzabile $\implies \exists C$ matrice non singolare e invertibile tale che $C^{-1}AC = D \implies e^{tA} = Ce^{tD}C^{-1}$
3. Se A non è diagonalizzabile –non fa parte del corso–

Chapter 3

Curve e forme differenziali

Definizione 3.1: Curva

Dato $I \subset \mathbb{R}$ e $\vec{r} = (x, y, z)$, chiamiamo **curva** l'applicazione $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, ovvero $(x(t), y(t), z(t))$, con $t \in I$ e x, y, z continue.

L'**immagine** di una curva sarà $Im\vec{r}(t) = \gamma$, ed è chiamata **sostegno** della curva.

In molti testi viene chiamata **curva** la coppia parametrizzazione e sostegno, ovvero (\vec{r}, γ) . In altri testi la curva viene indicata semplicemente con γ , oppure ancora semplicemente con \vec{r} .

Vediamo alcuni tipi di curve:

Definizione 3.2: Curva chiusa

$\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, dove $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ è una curva **chiusa**.

Definizione 3.3: Curva semplice

$\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, è una curva **semplice** se:

$$\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b] : t_1 \neq t_2$$

Con almeno uno dei due punti non estremo dell'intervallo. Si tratta semplicemente una curva che non si auto-interseca.

Per una curva, $x(t) = x' + t(x'' - x')$ e $y(t) = y' + t(y'' - y')$, ma possiamo anche scrivere $x(t) = x^0 + tv$, con $t \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^3$ norma.

$\vec{r}(t) = x^0 + t\vec{v}$ è la retta che passa per x^0 di direzione v .

L'equazione parametrica di una circonferenza è:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

Possiamo rappresentare la stessa identica circonferenza in questo modo:

$$\begin{cases} x(t) = \cos \omega t \\ y(t) = \sin \omega t \end{cases} \quad \text{con } t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$$

Il verso di percorrenza è lo stesso rispetto alla rappresentazione precedente, ma cambia la **velocità** con cui viene percorsa la circonferenza.

Altri esempi di curve:

- Elica cilindrica:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = ct \end{cases}$$

- Elica ellittica:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \\ z(t) = ct \end{cases}$$

Definizione 3.4: Curva piana

Una curva si dice **piana** se il suo sostegno è rappresentato su un unico piano.

Definizione 3.5: Curva regolare

Una curva $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice **regolare** se $\vec{r} \in C^1(I)$ (ovvero se x, y, z sono funzioni derivabili in I con derivata continua) e $\vec{r}'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

\vec{r} si dice **"generalmente regolare"**, o **"regolare a tratti"** se I si può suddividere in un numero finito di intervalli, in ciascuno dei quali \vec{r} è regolare.

Il **vettore velocità** di una curva \vec{r} sarà $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$.

Il versore tangente di tale vettore sarà $\frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|} = \vec{T}(t)$.

Definizione 3.6: Curva rettificabile e sua lunghezza

Sia $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva continua;

consideriamo una decomposizione di $[a, b]$, $D = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$.

Si calcolano i punti $\vec{r}(t_0), \dots, \vec{r}(t_n)$ e si costruisce la poligonale associata ad essi:

$$P_D = [\vec{r}(t_0); \vec{r}(t_1)] \cup \dots \cup [\vec{r}(t_{n-1}); \vec{r}(t_n)].$$

La **lunghezza** della poligonale P_D sarà la somma di tutti i segmenti della poligonale.

Denotando con $\{l(P_D)\}_D$ l'insieme di tutte le lunghezze delle poligonali al variare della decomposizione D , poniamo $L = \sup\{l(P_D)\}_D$.

Se $L \in \mathbb{R}$, la curva \vec{r} sarà detta **rettificabile** e L sarà la sua **lunghezza**.

Curve equivalenti La curva della circonferenza è, come già visto, $\gamma : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Facendo il cambio variabili $t = \omega\tau$, con $\tau \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$, possiamo costruire una nuova curva $\gamma, \tilde{\gamma}(\tau) = \vec{r}(\omega\tau) = (\cos \omega\tau, \sin \omega\tau)$.

Calcoliamo per la prima curva:

- Vettore velocità: $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$
- Versore tangente: $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{(-\sin t, \cos t)}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}} = (-\sin t, \cos t)$

Calcoliamo ora gli stessi elementi per la seconda curva:

- Vettore velocità: $\tilde{\gamma}'(\tau) = (-\omega \sin \omega\tau, \omega \cos \omega\tau)$
- Versore tangente: $\vec{T}(\tau) = \frac{\tilde{\gamma}'(\tau)}{|\tilde{\gamma}'(\tau)|} = \frac{(-\omega \sin \omega\tau, \omega \cos \omega\tau)}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \omega\tau + \omega^2 \cos^2 \omega\tau}} = (-\sin \omega\tau, \cos \omega\tau)$

Notiamo che il versore tangente è **lo stesso** in ogni punto del sostegno (quindi il verso di percorrenza sarà uguale), mentre la velocità è diversa (l'accelerazione sarà dunque anch'essa diversa). Le due curve sono dette **equivalenti**. Vediamo una definizione più rigida.

Definizione 3.7: Cambiamento ammissibile di parametro

Un cambiamento di parametro $t = \varphi(\tau)$ è detto **ammissibile** se:

1. $\varphi \in C^1([\alpha, \beta])$
2. $\varphi'(\tau) \neq 0 \ \forall \tau \in [\alpha, \beta]$
3. La corrispondenza tra $[\alpha, \beta]$ e $[a, b]$ è univoca.

Definizione 3.8: Curva equivalente

Sia data una curva regolare (γ, \vec{r}) con $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Consideriamo $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ e definiamo il cambiamento ammissibile di parametro:

$\tilde{\gamma} = \vec{r}(\varphi(\tau))$, con $t = \varphi(\tau)$.

La curva $\tilde{\gamma}$ è detta **equivalente** a \vec{r} .

Due curve si dicono "equivalenti" se sono ottenute l'una dall'altra con un cambiamento di parametro ammissibile che non cambia l'orientazione.

Osservazione 3.1. La curva $\tilde{\gamma}$ risulta di classe $C^1([\alpha, \beta])$, in quanto composizione di funzioni di classe C^1 . Derivando otteniamo $\tilde{\gamma}'(\tau) = \vec{r}'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau) \neq 0$. Se tale derivata è:

- > 0 , allora l'orientazione della curva rimane la stessa
- < 0 , allora l'orientazione della curva si inverte

La notazione è: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$.

La formula per cambiare orientazione di una curva è:

$$t = b + \frac{a-b}{\beta-\alpha}(\tau-\alpha), \text{ e se } [a, b] = [\alpha, \beta] \implies a = \alpha, b = \beta \implies t = b - (\tau - a) = b + a - \tau$$

Teorema 3.1 Una curva regolare è rettificabile

Una curva regolare γ con $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è rettificabile, e la sua lunghezza è:

$$l(\gamma, \vec{r}) = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt, \text{ con } |\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}.$$

Calcolare la lunghezza del grafico di una funzione Possiamo interpretare il grafico di una funzione continua come una curva:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

$$\vec{r}'(t) = (1, f'(t)) \implies |\vec{r}'(t)| = \sqrt{1 + f'^2(t)} \implies \text{la lunghezza è } l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt.$$

Teorema 3.2 La lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione

Siano (γ, \vec{r}) e $(\gamma, \tilde{\vec{r}})$ due curve regolari, con $\vec{r}, \tilde{\vec{r}} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Se $\tilde{\vec{r}}$ si ottiene da \vec{r} con un cambio di parametro ammissibile, allora $l(\gamma, \vec{r}) = l(\gamma, \tilde{\vec{r}})$.

Dimostrazione

Essendo γ regolare, allora per il teorema 3 la sua lunghezza è:

$$l(\gamma, \vec{r}) = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt.$$

Con un cambio di parametro ammissibile si ottiene $\tilde{\vec{r}} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\tilde{\vec{r}} = \vec{r}(\varphi(\tau))$ e $t = \varphi(\tau)$. Dopo questo cambio variabile, l'integrale diventa:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}'[\varphi(\tau)]| \varphi'(\tau) d\tau.$$

Distinguiamo ora due casi:

1. $\varphi'(\tau) > 0$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}'[\varphi(\tau)]| \varphi'(\tau) d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}'[\varphi(\tau)]| \varphi'(\tau) d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{d}{d\tau} \tilde{\vec{r}}(t) \right| d\tau = l(\gamma, \tilde{\vec{r}}).$$

2. $\varphi'(\tau) < 0$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}'[\varphi(\tau)]| \varphi'(\tau) d\tau = - \int_{\beta}^{\alpha} |\vec{r}'[\varphi(\tau)]| \varphi'(\tau) d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{d}{d\tau} \tilde{\vec{r}}(t) \right| d\tau = l(\gamma, \tilde{\vec{r}}).$$

Definizione 3.9: Unione di due curve

Date due curve: γ_1 con $\vec{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e γ_2 con $\vec{r}_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tali che $\vec{r}_1(b) = \vec{r}_2(b)$, la curva $\gamma_1 \cup \gamma_2$ con $\vec{r} : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è l'unione delle due curve, definita dalla legge:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} \vec{r}_1(t) & \text{se } t \in [a, b] \\ \vec{r}_2(t) & \text{se } t \in [b, c] \end{cases}$$

L'unione di due curve regolari è di solito **generalmente regolare**.

Nel caso in cui nell'estremo b le derivate di entrambe le curve coincidono, l'unione risulta **regolare**.

Definizione 3.10: Ascissa curvilinea

Sia γ una curva regolare con $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e sia L la sua lunghezza.

Allora $\forall t \in [a, b]$ possiamo considerare la funzione:

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(u)| du.$$

essa prende il nome di **ascissa curvilinea**.

Osserviamo che $s'(t) = v > 0 \quad \forall t \in [a, b] \implies s$ è strettamente crescente \implies è invertibile in $[a, b]$ e la funzione inversa è $t : [0, L] \rightarrow [a, b] \implies t'(s) = \frac{1}{v} > 0$, perché la derivata dell'inversa è il reciproco della derivata.

Definizione 3.11: Integrale curvilineo

Data $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ con $E \subset \mathbb{R}^3$ e la curva (γ, \vec{r}) con γ contenuta in E e $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'**integrale curvilineo** (o **integrale di linea**) di f lungo γ è:

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt,$$

dove ds è detto **differenziale d'arco**, e indica che l'integrale è effettuato su un'ascissa curvilinea.

Gli integrali curvilinei hanno moltissime applicazioni in fisica (es: catenaria).

Disclaimer: per il resto del capitolo faremo l'ipotesi che le funzioni siano definite in un insieme **aperto e connesso**.

Definizione 3.12: Forma differenziale lineare e suo integrale

Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ un insieme aperto e connesso;

consideriamo il campo vettoriale $\vec{F} : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito dalla legge:

$$\vec{F} = F_1(x, y, z)\hat{i} + F_2(x, y, z)\hat{j} + F_3(x, y, z)\hat{k}.$$

L'oggetto:

$$\omega = F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz = \langle \vec{F}$$

è chiamato **forma differenziale lineare** nello spazio.

Il suo integrale lungo una curva γ è:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \{F_1[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + F_2[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + F_3[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\}dt,$$

dove $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ è la legge della curva γ ; $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Le funzioni $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ e $F_3(x, y, z)$ sono detti **coefficienti** della forma differenziale.

Le proprietà di tale integrale sono:

- Linearità:

$$\int_{\gamma} \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 = \alpha \int_{\gamma} \omega_1 + \beta \int_{\gamma} \omega_2$$

- Additività rispetto al cammino di integrazione:

$$\text{se } \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \implies \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

- Indipendenza dalla parametrizzazione della curva:

se si passa da una curva γ a una equivalente $\tilde{\gamma}$, allora:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega; \quad \text{se } \varphi' < 0 \text{ si ha invece: } \int_{\gamma} \omega = - \int_{\tilde{\gamma}} \omega.$$

La dimostrazione di quest'ultima proprietà è identica a quella vista per le curve

Teorema 3.3 Della curva di Jordan

Una curva chiusa continua che non si intreccia divide il piano in due parti: una "interna" (regione chiusa) e una "esterna" (regione aperta).

Una curva del genere è detta **curva di Jordan**.

Se si percorre una curva di Jordan in verso antiorario, l'orientazione è **positiva**; se si percorre in verso orario, l'orientazione è **negativa**.

Definizione 3.13: Forma differenziale esatta

Sia $\vec{F} : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ il campo di classe $C^1(E)$ associato a una forma differenziale ω , con E aperto connesso di \mathbb{R}^3 ;

se esiste una funzione scalare U di classe $C^2(E)$ tale che:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \\ F_2(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \\ F_3(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \end{cases}$$

Allora ω si dice **esatta** in E , e il campo \vec{F} si dice **conservativo**.

Una funzione U per cui succede questo si chiama **funzione potenziale** o **primitiva** di ω .

Osservazione 3.2. Si può notare una differenza con la fisica e una cosa in comune.

Nella fisica una forza conservativa è definita come $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, mentre in analisi $\vec{F} = \vec{\nabla}U$.

La somiglianza è che anche in analisi $U(x, y, z) + c$ è ancora potenziale.

Definizione 3.14: Funzione potenziale

Data la funzione differenziale ω di classe $C^1(E)$, una funzione potenziale (se esiste) è una funzione scalare $U \in C^2(E) : \vec{F}(x, y, z) = \nabla U(x, y, z), \forall (x, y, z) \in E$.

una ω per cui esiste una funzione potenziale si dice **esatta**, o il campo **conservativo**.

Teorema 3.4

Sia ω una forma differenziale esatta su un insieme aperto e connesso E , e sia γ una curva regolare contenuta in E con $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Allora si ha:

$$\int_{\gamma} \omega = U[\vec{r}(b)] - U[\vec{r}(a)]$$

Dimostrazione

$$\int \omega = \int_a^b F_1[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + F_2[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + F_3[x(t), y(t), z(t)]z'(t)dt$$

Con:

$$F_1(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad F_2(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \quad F_3(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}$$

Quindi:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \frac{\partial U[x(t), y(t), z(t)]}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial U[x(t), y(t), z(t)]}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial U[x(t), y(t), z(t)]}{\partial z} z'(t)dt$$

Di conseguenza, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \frac{d}{dt} U[\vec{r}(t)] dt = U[\vec{r}(b)] - U[\vec{r}(a)]$$

Osservazione 3.3. Il teorema vale anche per una curva generalmente regolare, anziché regolare.

Teorema 3.5 Passaggio al limite sotto il segno di integrale (funzioni)

Sia $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua di 2 variabili, e sia $g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$.

Allora $g(y)$ è continua in $[c, d]$ e, se $y_0 \in [c, d]$:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

Teorema 3.6

Sia $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ una forma differenziale lineare di classe $C^1(E)$, con E aperto e connesso di \mathbb{R}^3 .

Allora le seguenti 3 affermazioni sono equivalenti:

- Per ogni coppia di curve generalmente regolari γ_1 e γ_2 contenute in E e con gli stessi punti iniziali e finali, si ha $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$;
- Per ogni curva γ generalmente regolare e chiusa, contenuta in E , si ha $\oint_{\gamma} \omega = 0$;
- ω è esatta in E .

Dimostrazione

Proveniente dal Pagani Salsa 2, pg 41.

Dimostriamo l'equivalenza delle 3 affermazioni mostrando che $a) \implies c)$, che $c) \implies b)$ e che $c) \implies a)$.

- $c) \implies b)$ si evince immediatamente dal teorema 3:

$$\oint_{\gamma} \omega = U([\vec{r}(a)] - U[\vec{r}(a)]) = 0.$$

- $a) \implies c)$: Siano $\vec{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{p} = (x, y, z)$ punti di E , e γ la curva avente \vec{p}_0 come punto iniziale e \vec{p} come punto finale.

Fissato \vec{p}_0 , l'integrale $\int_{\gamma} \omega$ non dipende da γ a causa di a), ma solo da \vec{p} , quindi possiamo scrivere:

$$\int_{\gamma} \omega = \varphi(x, y, z).$$

Dobbiamo dimostrare che $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1$ in E , poi saranno analoghe le dimostrazioni che $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_3$, da cui si conclude che φ è una funzione potenziale per ω , e quindi che ω è esatta.

Passiamo dal punto (x, y, z) al punto $(x + \Delta x, y, z)$:

$$\varphi(x + \Delta x, y, z) = \int_{\gamma \cup \Gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\Gamma} \omega = \varphi(x, y, z) + \int_{\Gamma} \omega$$

Dove Γ è una qualunque curva regolare con punto iniziale (x, y, z) e punto finale $(x + \Delta x, y, z)$, con sostegno contenuto in E . Essendo E aperto, se Δx è abbastanza piccolo si può scegliere come Γ il segmento di equazioni parametriche:

$$x(t) = x + t\Delta x, \quad y(t) = y, \quad z(t) = z \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

In questo modo abbiamo $y'(t) = z'(t) = 0$ e $x'(t) = \Delta x$, quindi:

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_0^1 F_1(x + t\Delta x, y, z) \Delta x dt$$

E segue che:

$$\frac{\varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta x} = \int_0^1 F_1(x + t\Delta x, y, z) dt$$

Dato che F_1 è continua, effettuando il passaggio al limite sotto il segno di integrale per $\Delta x \rightarrow 0$, si ha $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1$, c.v.d.

- $b) \implies a)$: Siano γ_1 di equazione $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$, con $\vec{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, e γ_2 di equazione $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$, con $\vec{r}_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$, due curve regolari a tratti contenute in E , tali che $\vec{r}_1(a) = \vec{r}_2(\alpha)$ e $\vec{r}_1(b) = \vec{r}_2(\beta)$. Dobbiamo dimostrare che $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

Riparametrizziamo γ_2 definendo:

$$t(\tau) = -\frac{\beta - \alpha}{c - b} + \frac{c\beta - b\alpha}{c - b}, \quad \text{con } \tau \in [b, c]$$

Si osservi che $t(b) = \beta$, che $t(c) = \alpha$ e che $t'(\tau) < 0$, quindi (per l'ultima proprietà dell'integrale di forma differenziale) avremo:

$$\int_{\gamma_2} \omega = - \int_{\tilde{\gamma}_2} \omega$$

dove $\tilde{\gamma}_2$ è la curva di equazione $\tilde{\vec{r}}_2(\tau) = \vec{r}_2(t(\tau)) : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Considerando una curva chiusa (e regolare a tratti) $\gamma = \gamma_1 \cup \tilde{\gamma}_2$, si ha:

$$0 = \oint_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\tilde{\gamma}_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

Definizione 3.15: Forma differenziale chiusa

Una forma differenziale $\omega = F_1 dx + F_2 dy$ in un piano si dice "chiusa" se:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Una forma differenziale $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ in uno spazio si dice "chiusa" se:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}.$$

Per ricordare quest'ultima definizione, basta ricordarsi la seguente matrice.

Definizione 3.16: Rotore di un campo vettoriale

Il rotore di un campo vettoriale \vec{F} è un operatore che associa a \vec{F} un altro campo vettoriale:

$$\text{rot} \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Definizione 3.17: Campo irrotazionale

Un campo vettoriale $\vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$ è detto "irrotazionale" se $\text{rot} \vec{F} = 0$.

Proposizione 3.1

Detto \vec{F} il campo vettoriale associato ad una forma differenziale ω , \vec{F} è irrotazionale se e solo se ω è chiusa.

Teorema 3.7 Le forme differenziali di classe C^1 esatte sono chiuse

Sia E un insieme aperto connesso di \mathbb{R}^2 e sia $\omega \in C^1(E)$, ovvero $\omega = F_1 dx + F_2 dy$, con $F_1, F_2 \in C^1(E)$, una forma differenziale con campo associato $\vec{F} = F_1 dx + F_2 dy$. Se ω è esatta in E , allora essa è chiusa in E .

Dimostrazione

Per ipotesi ω è esatta, quindi per definizione $\exists U : E \rightarrow \mathbb{R}$, $U \in C^2(E) : dU = \omega$ in E . Questo vuol dire che:

$$F_1(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \quad F_2(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$$

Calcolando le derivate:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y}$$

$U \in C^2(E)$, quindi le sue derivate seconde sono continue in E e dunque sono soddisfatte le ipotesi del teorema **Di Schwarz**, per cui le derivate miste saranno uguali in E , ovvero:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Abbiamo dimostrato il teorema in \mathbb{R}^2 , ma esso vale anche in \mathbb{R}^3 , e lo si può dimostrare ripetendo il procedimento per ognuna delle 3 componenti.

Controesempio La forma differenziale:

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

è chiusa in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, come si verifica derivando, ma non è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, in quanto il lavoro fatto sulla curva chiusa:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

vale:

$$\oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{-\sin t(-\sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \frac{\cos t \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right\} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Definizione 3.18: Insieme stellato

Un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}^n$ si dice "**stellato**" o "convesso" rispetto a un punto $P_0 \in X$ se $\forall p \in X$ il segmento $[P_0, p]$ è interamente contenuto in X .

Esempio 3.1

Un esempio di insieme stellato è banalmente un insieme a forma di stella:



Osservazione 3.4. Un insieme convesso è stellato in ogni punto.

Teorema 3.8 Esattezza di una forma differenziale chiusa in un aperto stellato

Sia $\omega = F_1 dx + F_2 dy$ una forma differenziale, con $\vec{F} \in C^1(E)$ ed E stellato di \mathbb{R}^2 rispetto a un punto.

Se $\text{rot } \vec{F} = (0, 0, 0)$ allora ω è esatta in E .

Dimostrazione

Pagani Salsa volume 2, teorema 2.6.

Dimostriamo in \mathbb{R}^2 (in \mathbb{R}^3 è uguale) Supponiamo che E sia stellato rispetto all'origine senza perdere di generalità. In tal caso l'origine si potrà connettere con un arbitrario punto $(x, y) \in E$ tramite un segmento γ . Poniamo:

$$U(x, y) := \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy. \quad (3.5)$$

Considerando l'equazione parametrica del segmento:

$$\begin{cases} x(t) = tx \\ y(t) = ty \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

possiamo riscrivere la 3.5 come:

$$U = \int_0^1 [F_1(tx, ty)x + F_2(tx, ty)y]dt.$$

Dobbiamo dimostrare che il gradiente di U è il campo \vec{F} , ovvero:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_2(x, y)$$

Dimostriamo solo la prima equazione, dato che l'altra si dimostra allo stesso modo. Dato che $\vec{F} \in C^1(E)$ per ipotesi, vale il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 [F_1(tx, ty)x + F_2(tx, ty)y]dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} [F_1(tx, ty)x + F_2(tx, ty)y]dt = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty)tx + F_1(tx, ty) + \frac{\partial F_2}{\partial x}(tx, ty)ty \right] dt. \end{aligned}$$

Dato che per ipotesi $\text{rot } \vec{F} = 0$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

dunque:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int_0^1 F_1(tx, ty)dt + \int_0^1 \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty)tx + \frac{\partial F_1}{\partial y}(tx, ty)ty \right] dt.$$

L'espressione tra parentesi nel secondo integrale non è altro che $t \frac{d}{dt} F_1(tx, ty)$, dunque:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \int_0^1 F_1(tx, ty) dt + \int_0^1 t \frac{d}{dt} F_1(tx, ty) dt = (\text{integrando per parti}) \\ &= \int_0^1 F_1(tx, ty) dt + [t F_1(tx, ty)]_0^1 - \int_0^1 F_1(tx, ty) dt = F_1(x, y). \end{aligned}$$

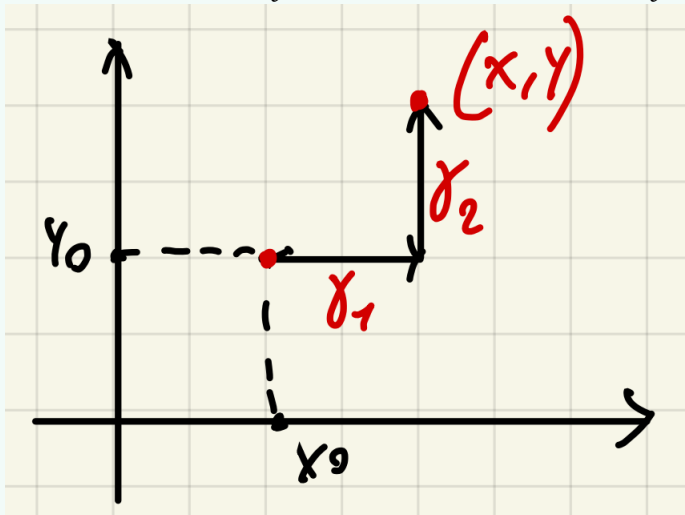
Calcolare la funzione potenziale Questa dimostrazione ci suggerisce un metodo per calcolare la funzione potenziale:

1. Si verifica se l'insieme è stellato
2. Si calcola l'integrale rispetto a γ , il segmento tra 2 punti. Si può anche calcolare rispetto ad altre curve γ che collegano i due punti, in particolare si può scegliere come curva l'unione di due segmenti: uno orizzontale e uno verticale. Così facendo, nascono due formule che rendono l'integrale più facile.

Vediamo questo secondo metodo:

Esempio 3.2

Prendiamo un insieme E stellato rispetto a un punto (x_0, y_0) . Tracciamo due curve γ_1, γ_2 per connettere (x_0, y_0) a un generico punto (x, y) , come in figura:



Avremo $\omega = F_1 dx + F_2 dy$. Cerchiamo di calcolare U :

$$U = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

dove:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = x_0 + t(x - x_0) \\ y(t) = y_0 \end{cases} \quad \gamma_2 = \begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = y_0 + t(y - y_0) \end{cases}, \text{ con } t \in [0, 1]$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega &= \int_0^1 F_1[x_0 + t(x - x_0), y_0](x - x_0) dt + \int_0^1 F_2[x, y_0 + t(y - y_0)](y - y_0) dt = \\ &= \int_0^1 F_1[x_0 + t(x - x_0), y_0]D(x_0 + t(x - x_0)) dt + F_2[x, y_0 + t(y - y_0)]D(y_0 + t(y - y_0)) dt\end{aligned}$$

Ponendo $x_0 + t(x - x_0) = u$ e $y_0 + t(y - y_0) = v$ si ottiene:

$$U = \int_{x_0}^x F_1(u, y_0) du + \int_{y_0}^y F_2(x, v) dv$$

In generale, quando viene assegnato un esercizio di questo tipo:

1. Si vede se la forma differenziale è chiusa
2. Si vede se l'insieme è stellato
3. Si usa la formula.

Chapter 4

Misura e integrazione

4.1 Integrali doppi secondo Riemann

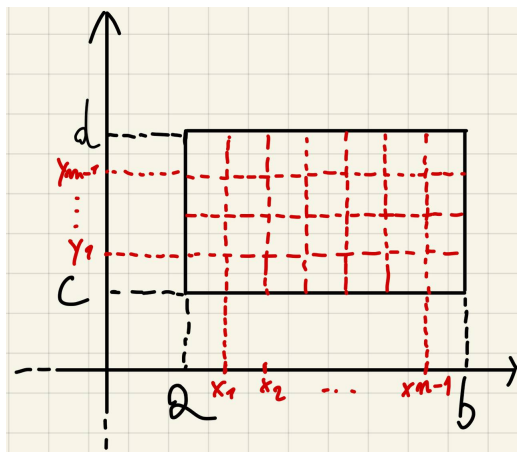
Sia $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata in un rettangolo, con $l \leq f(x, y) \leq L$.

Consideriamo le decomposizioni:

$$D_1 : \{a \equiv x_0 < \cdots < x_n \equiv b\}$$

$$D_2 : \{c \equiv y_0 < \cdots < y_m \equiv d\}$$

come in figura:



Consideriamo il rettangolo Q come composto da tante celle elementari, ognuna di area $a_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$.

Chiamiamo l_{ij} l'estremo inferiore di $f(x, y)$ nel rettangolino a_{ij} e L_{ij} l'estremo superiore di $f(x, y)$ nello stesso rettangolino:

$$l_{ij} = \inf_{a_{ij}} f(x, y), \quad L_{ij} = \sup_{a_{ij}} f(x, y)$$

Considerando che $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta x_j = y_j - y_{j-1}$, definiamo la somma inferiore e la somma superiore di f relative alla decomposizione D :

$$s_D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m l_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \quad S_D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m L_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

Consideriamo due insiemi:

$\{s_D\}_D$, l'insieme delle somme inferiori al variare di D .

$\{S_D\}_D$, l'insieme delle somme superiori al variare di D .

In generale sappiamo che, fissata una decomposizione D , avremo $s_D \leq S_D$.

Inoltre, in generale $s_{D'} \leq S_{D''}$, $\forall D', D''$, ovvero una qualunque somma inferiore è minore di una qualunque somma superiore. Non lo dimostriamo perché già visto in analisi 1.

Da questo teorema si evince che i due insiemi $\{s_D\}_D$ e $\{S_D\}_D$ sono separati, ovvero:

$$\sup\{s_D\}_D \leq \inf\{S_D\}_D;$$

quando essi coincidono, la funzione è integrabile secondo Riemann nel rettangolo $[a, b] \times [c, d]$, e il valore comune è detto "integrale di Riemann", che indichiamo con:

$$\iint_Q f(x, y) dx dy,$$

dove $Q = [a, b] \times [c, d]$.

A volte si scrive semplicemente \int_Q per indicare l'integrale doppio, triplo o n-esimo di lungo una data figura Q .

Esempio 4.1 (Funzione integrabile secondo Riemann)

$f(x, y) = k$, $\forall (x, y) \in Q \subset \mathbb{R}^2$.

$$s_D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m l_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \quad S_D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m L_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

Essendo la funzione costante, il sup coincide con l'inf, che coincide col valore della costante: $l_{ij} = L_{ij} = k \implies \forall D, s_D = S_D = k(b-a)(d-c)$, quindi il valore dell'integrale è:

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = k(b-a)(d-c).$$

Esempio 4.2 (Funzione non integrabile secondo Riemann)

Consideriamo la funzione di Dirichlet bidimensionale: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A = [0, 1] \times [0, 1]$.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in A \cap \mathbb{Q}^2 \\ 0 & \text{se } (x, y) \in A \setminus \mathbb{Q}^2 \end{cases}$$

Calcoliamo somme superiori e inferiori:

$$s_D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m l_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \quad S_D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m L_{ij} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Per la densità di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in \mathbb{R} sappiamo che l_{ij} è sempre 0, mentre per la densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R}

sappiamo che L_{ij} è sempre 1, quindi per ogni decomposizione D si ha:
 $s = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ e $S = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, e perciò f non è integrabile.

Interpretazione geometrica Così come l'integrale unidimensionale misura un'area (somma di tanti rettangolini), l'integrale doppio misura un volume (somma di tanti piccoli parallelepipedi).

Teorema 4.1

Se una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua nel un rettangolo $A = [a, b] \times [c, d]$, allora è integrabile secondo Riemann.

Definizione alternativa di integrale Data una decomposizione D , consideriamo la somma:

$$\sigma_D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu_{ij} x_i y_j,$$

con $l_{ij} \leq \mu_{ij} \leq L_{ij}$. Essa sarà chiamata **somma di Darboux** o **somma di Riemann**.

Chiamiamo "**ampiezza**" o "**norma**" della decomposizione D il valore massimo fra le distanze tra due punti: $|D| = \max_{i=1, \dots, n} \{\Delta x_i\}$. Supponendo che $D = D_1 \times D_2$, allora $|D| = \max\{|D_1|, |D_2|\}$.

Diremo che una funzione f è integrabile se e solo se esiste tale limite:

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sigma_D = l \in \mathbb{R}$$

ovvero se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall D \text{ decomposizioni del rettangolo } Q \implies |\sigma - l| < \varepsilon \text{ comunque scelti } \mu_{ij}$$

Per precisare, non si tratta di un limite di funzione in quanto σ_D è una **funzione polidroma** o **multifunzione**: ad ogni elemento del dominio associa *almeno* un elemento del codominio.

Notazione Con $f \in R(Q)$ indicheremo l'appartenenza di f alla classe di funzioni integrabili secondo Riemann nella figura Q .

Con la scrittura $x \mapsto H(x)$ si indica una funzione che assegna ad ogni x una funzione $H(x)$.

Teorema 4.2 Formule di riduzione su un rettangolo

Sia $f \in R(Q)$ una funzione continua, con $Q = [a, b] \times [c, d]$, allora:

- Se $\forall y \in [c, d] \exists G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, allora la funzione $y \rightarrow G(y)$ è integrabile in $[c, d]$ e vale la formula:

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

- Se $\forall x \in [a, b] \exists H(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, allora la funzione $x \rightarrow H(x)$ è integrabile in $[a, b]$ e vale la formula:

$[a, b]$ e vale la formula:

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \int_a^b H(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

In questo modo si passa da un integrale doppio al calcolo di due o più integrali semplici, detti **iterati**. Per le funzioni non continue, queste formule non sono sempre valide.

Teorema 4.3 Criterio di integrabilità in un insieme

Dato il rettangolo Q contenente l'insieme Ω , e la funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo la funzione:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

f sarà integrabile secondo Riemann su Ω se lo è \tilde{f} , e in tal caso scriveremo:

$$\iint_{\omega} f = \iint_Q \tilde{f}$$

Definizione 4.1: Funzione caratteristica di un insieme

Dato l'insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato, definiamo la **funzione caratteristica di Ω** come:

$$\mathbb{1}_{\omega}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

Teorema 4.4

Se la funzione caratteristica di un insieme Ω è integrabile secondo Riemann, allora Ω si dice **misurabile**, e parleremo di "misura di **Peano-Jordan**".

Il valore dell'integrale sarà detto **misura** dell'insieme, (o "area" se siamo in \mathbb{R}^2), che sarà indicata con $|\Omega|$, $m(\Omega)$, $mis(\Omega)$ o in altri modi.

Un esempio di insieme non misurabile secondo Peano-Jordan è quello che ha come funzione caratteristica la funzione di Dirichlet.

Se l'integrale della funzione caratteristica di un insieme vale 0, l'insieme si dice di **misura nulla**.

Teorema 4.5 Condizione per verificare se un insieme è di misura nulla

Un insieme Ω è di misura nulla se $\forall \varepsilon > 0 \exists$ una famiglia finita di rettangoli Q_1, \dots, Q_n tale che $\cup_{i=1}^n Q_i \supseteq \Omega$ (l'unione di essi contiene Ω) e $\sum_{i=1}^n m(Q_i) < \varepsilon$.

Grazie a ciò, notiamo che i segmenti sono insiemi di misura nulla nel piano: fissato un ε possiamo considerare un rettangolo con area minore di ε che li contiene.

Stesso discorso per le poligoni, o anche per grafici di funzioni reali.

Teorema 4.6

Un insieme è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se la sua frontiera ha misura nulla.

Definizione 4.2: Funzione a 1 variabile generalmente continua

Una funzione f si dice continua se ha un numero finito di punti di discontinuità

Definizione 4.3: Funzione a 2 variabili generalmente continua

Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, si dice "generalmente continua" se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla secondo Peano-Jordan.

Teorema 4.7

Sia f una funzione generalmente continua, limitata e definita in un insieme limitato Ω ; allora f è integrabile secondo Riemann.

Se f è continua allora la funzione \tilde{f} può avere discontinuità solo sulla frontiera di Ω (che indichiamo con $\partial\Omega$).

Se Ω è misurabile, allora $m(\partial\Omega) = 0 \implies \tilde{f}$ è generalmente continua su Q .

Definizione 4.4: Dominio normale (o semplice)

Se il dominio di una funzione a 2 variabili è:

$$\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ e } f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

Allora esso è detto **normale** rispetto a x .

Se il dominio di una funzione a 2 variabili è:

$$\Omega = \{(x, y) : c \leq y \leq d \text{ e } h(y) \leq x \leq t(y)\}$$

Allora esso è detto **normale** rispetto a y .

In alcuni libri viene chiamato "normale rispetto a x " il secondo tipo di insieme e "normale rispetto a y " il primo tipo, ma noi ci atteniamo alla definizione data.

Ognuno dei due casi dà vita a una formula di riduzione:

- Se il dominio Ω è normale rispetto a x :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y=f(x)}^{y=g(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

- Se il dominio Ω è normale rispetto a y :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{x=h(y)}^{x=t(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Definizione 4.5: Matrice jacobiana

La matrice jacobiana di una funzione ψ è una matrice che ha per righe i gradienti delle componenti di ψ :

$$J_\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \psi_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Il determinante di tale matrice è detto **jacobiano**.

In molti casi per calcolare il jacobiano è utile il passaggio:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \phi \\ y = y_0 + r \sin \phi \end{cases}, \text{ con } r > 0, \phi \in]0, 2\pi[,$$

in quanto il jacobiano diventa:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r \cos^2 \phi + r \sin^2 \phi = r(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r.$$

Teorema 4.8

Siano $D, E \subset \mathbb{R}^2$ insiemi aperti e misurabili, e sia $\vec{\psi} : D \rightarrow E$ un'applicazione continua biunivoca.

Se ψ e le sue derivate parziali sono limitate in D , e $\det(J_\psi(u, v)) \neq 0, \forall (u, v) \in D$, allora:

1. Se $s \subset D$ si ha s misurabile $\iff \psi(s)$ misurabile.

2.
$$\iint_{\psi(s)} f(x, y) dx dy = \iint_s f[\psi(u, v)] |\det(J_\psi(u, v))| du dv.$$

4.2 Integrali tripli secondo Riemann

Gli integrali tripli sono definiti in modo quasi identico agli integrali doppi, aggiungendo solo una dimensione in più.

Allo stesso modo, i teoremi e i risultati saranno pressappoco gli stessi.

Sia $Q : [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ un parallelepipedo, e sia $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Allora si possono considerare le decomposizioni:

$$D_1 = \{a \equiv x_0 < \dots < x_n \equiv b\}$$

$$D_2 = \{c \equiv y_0 < \dots < y_m \equiv d\}$$

$$D_3 = \{e \equiv z_0 < \dots < z_l \equiv f\}.$$

Consideriamo il parallelepipedo come composto da tante celle elementari, ognuna di volume $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$, ovvero: $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$.

Una funzione g avrà massimo e minimo in tale cella, e li indichiamo con L_{ijk} e l_{ijk} . A questo punto possiamo considerare le somme superiori e inferiori:

$$S_D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l L_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k, \quad s_D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l l_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Al variare di D , possiamo considerare l'insieme di tutte le somme inferiori e l'insieme di tutte le somme superiori: $\{s_D\}_D$ e $\{S_D\}_D$. Avremo che $\sup\{s_D\}_D \leq \inf\{S_D\}_D$, e quando vale l'uguale diremo che g è integrabile secondo Riemann nel parallelepipedo Q , e il valore comune sarà l'integrale triplo, che indichiamo con:

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz.$$

Mentre l'integrale doppio misura un volume, l'integrale triplo misura l'**ipervolume** di una figura in 4 dimensioni.

Teorema 4.9 Formule di riduzione in un parallelepipedo

Dato il parallelepipedo $Q : [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ e la funzione $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ continua, valgono le seguenti formule per calcolare l'integrale triplo su Q :

- Integrazione **per fili**:

$$\iiint_Q g(x, y, z) dx dy dz = \iint_{[a,b] \times [c,d]} dx dy \left(\int_e^f g(x, y, z) dz \right).$$

- Integrazione **per strati**:

$$\iiint_Q g(x, y, z) dx dy dz = \int_e^f dz \left(\iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x, y, z) dx dy \right).$$

Esercizio 4.1

Dato il cubo $Q : [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, calcola l'integrale:

$$\iiint_Q xy^2z^3 dx dy dz.$$

Soluzione

Possiamo procedere in due distinti modi:

1. Integrando per fili:

$$\begin{aligned} \iiint_Q xy^2z^3 dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^1 dy dz \left(\int_0^1 xy^2z^3 dx \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 y^2z^3 dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dy \left(\int_0^1 y^2z^3 dz \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

2. Integrando per strati:

$$\begin{aligned} \iiint_Q xy^2z^3 dx dy dz &= \int_0^1 dx \left(\int_0^1 \int_0^1 xy^2z^3 dy dz \right) = \\ &= \int_0^1 dx \left[\int_0^1 dy \left(\int_0^1 xy^2z^3 dz \right) \right] = \frac{1}{4} \int_0^1 dx \left(\int_0^1 dy xy^2 \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \int_0^1 x dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}.$$

Più in generale, come facciamo a integrare una funzione definita in una figura tridimensionale che **non** è un parallelepipedo? Per rispondere, dobbiamo introdurre una definizione.

Definizione 4.6: Insieme normale rispetto a un piano

Siano $\alpha, \beta : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ due funzioni continue, con $D \subset \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile e $\alpha(x, y) \leq \beta(x, y)$. L'insieme:

$$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

sarà detto "**normale**" rispetto al piano xy .

Teorema 4.10 Formule di riduzione generalizzate

Data la funzione continua $g : T \rightarrow \mathbb{R}$, con $T \subset \mathbb{R}^3$, allora valgono le seguenti formule:

1. Se $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D; \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$ (normale rispetto al piano xy), **integrazione per fili**:

$$\iiint_T g(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} g(x, y, z) dz \right);$$

dove $D \subset \mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ sono funzioni continue.

2. Se $T = \{(x, y, z) : a \leq z \leq b; (x, y) \in T_z\}$ (normale rispetto a z), **integrazione per strati**:

$$\iiint_T g(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \left(\iint_{T_z} g(x, y, z) dx dy \right);$$

dove T_z è una figura bidimensionale che varia al variare di z , e $a, b \in \mathbb{R}$.

Chapter 5

Successioni e serie di funzioni

5.1 Successioni di funzioni

Definizione 5.1: Successione di funzioni

Una successione di funzioni è una legge che associa ad ogni numero naturale n una funzione $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, e si può indicare con $\{f_n\}$, (f_n) , o ancora $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Possiamo dire che una successione di funzioni è una **famiglia** di funzioni definite in un intervallo (a, b) .

Esempi di successioni di funzioni sono:

$$\{e^{nx}\}, \quad \left\{ \frac{\sin nx}{x} \right\}, \quad \{\ln(1 + nx^2)\}.$$

Definizione 5.2: Successione di funzioni convergente in un punto

Una successione di funzioni $\{f_n\}$ converge in $x_0 \in (a, b)$ se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la successione numerica $\{f_n(x_0)\}$ converge.

Definizione 5.3: Successione di funzioni convergente semplicemente

Una successione di funzioni $\{f_n\}$ converge **semplicemente** o "puntualmente" in (a, b) se converge $\forall x \in (a, b)$, ovvero se $\forall x \in (a, b)$ esiste finito $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, ovvero:

$$\forall x \in (a, b), \forall \varepsilon > 0 \exists v_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N} : \forall n > v_{\varepsilon, x} \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

La funzione f è chiamata **funzione limite**.

Definizione 5.4: Successione di funzioni convergente uniformemente

Una successione di funzioni $\{f_n\}$ definite in (a, b) converge uniformemente in (a, b) alla funzione f se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > v_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a, b).$$

La differenza tra queste due definizioni è che nella successione convergente uniformemente il valore ν dipende solo da ε e non da x , dunque è uguale (uniforme) per tutte le x .

Teorema 5.1 Criterio di Cauchy

Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ converga uniformemente in (a, b) è che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m > \nu \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a, b)$$

Se si fosse stato scritto " $\forall x \in (a, b)$ " prima di " $\forall \varepsilon > 0$ ", allora sarebbe stata una condizione per convergenza semplice, non uniforme.

Teorema 5.2 Condizione necessaria e sufficiente di convergenza uniforme

Data la successione di funzioni $\{f_n\}$, si considera:

$$\sup_{(a,b)} |f_n(x) - f(x)| = \{a_n\}.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\{f_n\}$ converga uniformemente in (a, b) è che:

1. $a_n \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

In breve possiamo scrivere che la condizione è:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(a,b)} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Teorema 5.3 Di continuità

Data la successione di funzioni $\{f_n\}$ convergente uniformemente a una funzione limite $f(x)$, e con f_n funzioni continue, allora $f(x)$ è continua.

Ci chiediamo ora se, data una successione di funzioni continue $\{f_n\}$, si possa scambiare il segno di limite con quello di integrale, in questo modo:

$$\lim_n \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_n f_n(x) dx$$

Una condizione **sufficiente** affinché questo accada è la convergenza uniforme di $\{f_n\}$, come vediamo nel seguente teorema.

Teorema 5.4 Passaggio al limite sotto il segno di integrale (successioni)

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continue, uniformemente convergente in $[a, b]$ a una funzione f .

Allora:

$$\lim_n \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Dimostrazione

Notiamo intanto che la funzione limite f risulta continua per il teorema di continuità, quindi essa è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$. Fissiamo un n e consideriamo l'espressione:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx.$$

La funzione integranda è continua, quindi per il teorema di Weierstrass essa ha un massimo:

$$\exists M_n = \max_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)|,$$

quindi: $|f_n(x) - f(x)| \leq M_n \forall x \in [a, b]$ e $\forall n \in \mathbb{N}$. Per proprietà di monotonia degli integrali di Riemann otteniamo:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b M_n dx = M_n(b - a)$$

Facendo il limite per $n \rightarrow \infty$ otteniamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(b - a)$$

Avremo che M_n tende a 0 perché $\{f_n\}$ converge uniformemente (caratterizzazione di convergenza uniforme), quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema 5.5 Passaggio al limite sotto il segno di derivata

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni convergente semplicemente in (a, b) a una funzione $f(x)$; siano f_n derivabili in (a, b) , $\forall n \in \mathbb{N}$, e la successione delle derivate prime $\{f'_n\}$ converga uniformemente in (a, b) a una funzione $g(x)$.

Allora la funzione f è derivabile $\forall x \in (a, b)$, e risulta:

$$g(x) = \lim_n f'_n(x) = f'(x)$$

Questo teorema è uno dei più importanti sulle successioni, assieme al passaggio al limite sotto il segno di integrale e al teorema di continuità.

5.2 Serie di funzioni

Definizione 5.5: Serie di funzioni

Data una successione di funzioni $\{f_n(x)\}$, la somma delle sue funzioni:

$$f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

è detta **serie di funzioni**.

Si considerano inoltre le successioni: $s_1(x) = f_1(x)$

$$s_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

\vdots

$$s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x).$$

Ognuna di esse è detta **successione di somme parziali**.

Definizione 5.6: Serie semplicemente convergente

Se $\forall x \in (a, b)$ esiste finito il limite $\lim_n s_n(x) = s(x)$, allora la serie converge **semplicemente** in (a, b) alla funzione $s(x)$, detta **funzione somma**.

Definizione 5.7: Serie assolutamente convergente

Diremo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge **assolutamente** in (a, b) se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ è puntualmente convergente in (a, b) .

Definizione 5.8: Serie totalmente convergente

Se valgono:

1. $\exists \{M_n\}, M_n \geq 0 : f_n(x) \leq M_n, \forall x \in (a, b).$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ è convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ si dice **totalmente convergente**.

Detto a parole: ogni elemento della serie di funzioni deve essere maggiorato da un elemento di una serie numerica positiva, e tale serie numerica deve convergere.

Teorema 5.6

Una serie di funzioni totalmente convergente in (a, b) è uniformemente convergente in (a, b) .

Noteremo che molti teoremi delle serie ripercorrono teoremi di successioni, in quanto le serie sono definite a partire dalle successioni. Un esempio è il seguente teorema.

Teorema 5.7 Della continuità

Considero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ con $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ uniformemente.
Allora $s(x)$ è continua in $[a, b]$.

Dimostrazione

$\exists \lim_n s_n(x) = s(x) \implies \{s_n\}$ converge uniformemente in $[a, b] \implies$ per il teorema di continuità delle successioni, $s(x)$ è continua.

Teorema 5.8 Integrazione per serie

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ uniformemente in $[a, b]$, con $f_n : [a, b]$ continue, allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b s(x) dx.$$

Teorema 5.9 Passaggio al limite sotto il segno di derivata

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni derivabili in (a, b) , convergente semplicemente a $s(x)$.
Sia $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = g(x)$ uniformemente.
Allora $s(x)$ è derivabile e $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = s'(x)$.

Definizione 5.9: Serie di potenze e raggio di convergenza

Siano $\{a_n\}$ una successione di numeri reali e $x_0 \in \mathbb{R}$.

La serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

è detta **serie di potenze** di punto iniziale (o di centro) x_0 .

Denotato con $H = \{h \geq 0 : \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n-1}| h^{n-1} \text{ converge}\}$, chiamiamo "raggio di convergenza" la quantità $r = \sup H$.

Osserviamo che H non è mai vuoto in quanto contiene sicuramente almeno lo 0. Il raggio di convergenza sarà dunque sempre $r \geq 0$.

Teorema 5.10

1. Se una serie di potenze ha raggio di convergenza $r = 0$, allora essa converge solo in x_0 .

2. Se una serie di potenze ha raggio di convergenza $r > 0$, allora essa converge **assolutamente** nell'intervallo aperto $]x_0 - r, x_0 + r[$ e converge **totalmente** in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ contenuto in tale intervallo.
3. Se una serie di potenze ha raggio di convergenza $r = +\infty$, allora essa converge assolutamente in tutto \mathbb{R} e uniformemente in ogni insieme compatto (chiuso e limitato) in \mathbb{R} .

Lemma 5.1

Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

Allora:

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l > 0 \implies r = \frac{1}{l}$.
- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \implies r = +\infty$.
- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \implies r = 0$.

Esiste anche una versione più precisa di tale lemma, che fa uso di massimo limite, ma non la facciamo.

Lemma 5.2 Criterio d'Alembert (o del rapporto)

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ una serie di potenze tale che $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Allora:

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l > 0 \implies r = \frac{1}{l}$.
- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 \implies r = +\infty$.
- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty \implies r = 0$.

Teorema 5.11 Di Abel

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ una serie di potenze di raggio $r > 0$.

Allora:

- Se la serie converge nel punto $x_0 + r$, essa converge **uniformemente** in ogni intervallo chiuso $[a, x_0 + r]$, $\forall a > x_0 - r$.
- Se la serie converge nel punto $x_0 - r$, essa converge **uniformemente** in ogni intervallo chiuso $[x_0 - r, b]$, $\forall b < x_0 + r$.

Teorema 5.12

Data una serie di potenze con $r > 0$, sia $s(x)$ la funzione somma:

$$s(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad \forall x \in]x_0-r, x_0+r[. \quad (5.1)$$

Consideriamo le derivate prime di tali funzioni:

$$0 + a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} \quad (5.2)$$

Derivate seconde:

$$0 + 0 + 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} \quad (5.3)$$

Derivate di ordine k :

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} \quad (5.4)$$

Allora:

1. Tutte queste serie hanno lo stesso raggio di convergenza della serie iniziale
2. La serie data si può derivare per serie (teorema già visto), e in particolare:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} &= s'(x). \\ \vdots \\ \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} &= s^{(k)}(x). \end{aligned}$$

Osservazione 5.5. Una volta fissato x_0 , possiamo esprimere i coefficienti delle equazioni: Dalla 5.1: $a_0 = s(x_0)$.

Dalla 5.2: $a_1 = s'(x_0)$.

Dalla 5.3: $2a_2 = s''(x_0)$

Dalla 5.4: $k!a_k = s^{(k)}(x_0) \implies a_k = \frac{s^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Definizione 5.10: Serie di Taylor

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(a, b)$, e sia $x_0 \in (a, b)$.

A tale f è possibile associare una particolare serie di funzioni, ovvero:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots + f^{(k)}(x_0)\frac{(x - x_0)^k}{k!} + \dots;$$

tale serie è detta di **Taylor**.

Se $x_0 = 0$, viene detta serie di **Maclaurin**.

Definizione 5.11: Funzione sviluppabile in serie di Taylor

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$. Diremo che f è **sviluppabile** in serie di Taylor di centro x_0 se per ogni x nell'intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset (a, b)$ si ha:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots + f^{(k)}(x_0)\frac{(x - x_0)^k}{k!} + \dots$$

Esempio 5.1 (Funzione non sviluppabile in serie di Taylor)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si verifica che la funzione è continua:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0).$$

Si verifica che esiste $f'(0) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

Si prova anche che $\exists f^{(k)}(0) = 0, \forall k = 1, 2, \dots$

Con quest'informazione, si prova a scrivere lo sviluppo in serie di Taylor:

$$f(x) = 0 + 0x + 0\frac{x^2}{2} + 0\frac{x^3}{3!} \dots = 0$$

Il che è ovviamente sbagliato: lo sviluppo in serie di Taylor risulta la funzione nulla, mentre f è sempre maggiore di 0 tranne in un punto, quindi tra f e il suo sviluppo in serie di Taylor non c'è nessuna correlazione $\implies f$ non è sviluppabile.

Lemma 5.3 Condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor

Data $f \in C^\infty(I)$, f sarà sviluppabile in serie di Taylor se tutte le sue derivate sono **equi-limitate** per ogni x , ovvero se $\exists L > 0 : |f^{(k)}(x)| \leq L, \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I$.

Il termine "equilimitate" indica che il limite L è lo stesso per ogni derivata.

Esempio 5.2 (Sviluppo in serie di $\sin x$)

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

\vdots

Quindi $|D^{(k)} \sin(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies \sin x$ è sviluppabile in serie di Taylor.

In particolare, calcolando la funzione e tutte le derivate in 0 possiamo scrivere la serie di Maclaurin:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \dots = \\ &= 0 + x + 0 \cdot x^2 - \frac{x^3}{3} + 0 + \frac{x^5}{5} + \dots = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x. \end{aligned}$$

Questo è il modo in cui le calcolatrici calcolano seno, coseno e altre funzioni non polinomiali.

Teorema 5.13 Teorema binomiale

$\forall x \in]-1, 1[, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

dove $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!}$ è il **coefficiente binomiale**, che si può riscrivere come:

$$\frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)(\alpha-n)!}{n!(\alpha-n)!} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}.$$

Definizione 5.12: Funzione periodica

Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice "**periodica**" di periodo $p \neq 0$ se $\forall x \in \text{dom} f$ si ha $f(x+p) = f(x)$.

Proposizione 5.1

Se p è un periodo, anche $2p, 3p, \dots, np, \dots$ e $-p, -2p, -3p, \dots, -np, \dots$ sono periodi. Se $\inf\{\text{periodi positivi}\} = p_0 > 0$, diremo che la funzione è periodica di periodo p_0 .

Osservazione 5.6. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è periodica di periodo 2π , ed è integrabile secondo Riemann in

$[0, 2\pi]$, allora:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_c^{c+2\pi} f(x) dx.$$

Definizione 5.13: Sviluppo di Fourier di una funzione

Sia f una funzione periodica di periodo 2π integrabile secondo Riemann in $[0, 2\pi]$. Si dice "sviluppo di Fourier" di $f(x)$ la serie trigonometrica:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

con:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad \forall n = 0, \dots; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad \forall n = 1, \dots$$

Osservazione 5.7. Supponiamo di avere una serie trigonometrica:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = f(x), \quad \forall x \in [0, 2\pi],$$

convergente uniformemente nell'intervallo $[0, 2\pi]$. moltiplicando tutto per $\cos mx$ e poi integrando:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx f(x) dx &= \int_0^{2\pi} \cos mx \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{2\pi} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) \right] dx + \int_0^{2\pi} \cos mx \frac{a_0}{2} dx. \end{aligned}$$

Ogni volta che $m \neq n$ il primo integrale fa 0, quindi si avrebbe:

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \frac{a_0}{2} dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx \implies \cos mx \frac{a_0}{2} = f(x) \cos mx \implies \frac{a_0}{2} = f(x).$$

Quando invece $m = n$, si trovano le formule viste prima per a_n e b_n .

Riassumendo: data una funzione integrabile e periodica, si può scrivere il suo sviluppo di Fourier, ma quand'è che la funzione coincide con tale sviluppo? Lo vediamo con la seguente definizione.

Definizione 5.14: Funzione sviluppabile in serie di Fourier

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π e integrabile secondo Riemann in $[0, 2\pi]$.

f si dice "sviluppabile in serie di Fourier" nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se la serie di Fourier di f converge in x_0 , e si ha:

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0$$

Teorema 5.14 Condizione di Dirichlet

Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in [0, 2\pi]$ tale che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-) \in \mathbb{R},$$

e tale che esistano finiti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}.$$

Allora la serie di Fourier di f converge in x_0 al valore:

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Osservazione 5.8. Questo teorema ci assicura che il **prolungamento periodico** di una funzione è sviluppabile in serie di Fourier.

Esempio 5.3

Consideriamo $f(x) = |x|$ in $[-\pi, \pi]$. Sia g il prolungamento periodico di f : per la condizione di Dirichlet possiamo sviluppare g in serie di Fourier:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

con:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \, dx, \quad \forall n = 0, \dots; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx \, dx, \quad \forall n = 1, \dots$$

Calcoliamo i termini. Sfruttando le proprietà delle funzioni pari (coseno) e dispari (seno) possiamo riscrivere:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx; \quad b_n = 0.$$

Dopo aver svolto l'integrale (per parti) otteniamo:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos 0x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi \implies \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2},$$

quindi:

$$g(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) \cos nx.$$

Chapter 6

Esercizi

6.1 Funzioni reali di più variabili

Trovare punti di massimo e minimo relativo

- Funzione di 2 variabili $f(x, y)$:
 1. Si calcolano le derivate parziali e si pongono uguali a 0
 2. Si risolve il sistema così ottenuto (o i sistemi così ottenuti): i punti che si trovano sono i **punti critici** di f .
 3. Si calcolano le derivate seconde di f e si costruisce la [Matrice hessiana](#).
 4. Si calcola il determinante dell'hessiana e in esso si sostituiscono i punti ottenuti sopra.
Se il risultato è negativo, il punto è di sella.
Se il risultato è 0, non otteniamo informazioni utili (caso dubbio).
Se il risultato è positivo, si sostituisce il punto nell'elemento di posto $(1, 1)$ dell'hessiana, ovvero f_{xx} . Se il risultato è:
 - < 0 , il punto è di massimo relativo.
 - > 0 , il punto è di minimo relativo.
 - $= 0$, caso dubbio.
- Funzione di 3 o più variabili $f(x, y, z)$:
 1. Si calcolano le derivate parziali e si pongono uguali a 0.
 2. Si risolve il sistema così ottenuto: i punti che si trovano sono i **punti critici** di f .
 3. Si calcola la matrice hessiana in ogni punto. Se essa è definita positiva il punto è di massimo, se definita negativa punto di minimo.
Possiamo usare 3 strumenti:
 - (a) Regola dei minori
 - (b) Definizione

(c) Autovalori:

- i. Tutti positivi: definita positiva.
- ii. Tutti negativi: definita negativa.
- iii. Di segno misto: indefinita.
- iv. È presente almeno un autovalore nullo: semidefinita.

6.2 Equazioni differenziali

Equazioni differenziali lineari del primo ordine Possiamo risolvere le equazioni del tipo:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \quad (6.1)$$

usando il metodo del fattore integrante:

1. Si trova $A(x)$, ovvero una primitiva di $a(x)$.
2. Si moltiplicano entrambi i membri di 6.1 per $e^{A(x)}$; dopo averlo fatto, il membro di sinistra sarà sempre $[y(x)e^{A(x)}]'$.
3. Si integrano entrambi i membri di 6.1; il membro di sinistra diventa dunque $y(x)e^{A(x)}$;
4. Si ricava $y(x)$.

È da notare che se $a(x) = 0$, l'equazione 6.1 è "elementare"; se invece $f(x) = 0$, l'equazione 6.1 è a variabili separabili.

6.3 Misura e integrazione

6.3.1 Integrali tripli

Ci sono diversi modi per risolvere agevolmente integrali tripli.

6.3.2 Passaggio a coordinate cilindriche

Per passare alle coordinate cilindriche si pone:

$$\begin{cases} z = t \\ x = \rho \cos \theta + x_0 \\ y = \rho \sin \theta + y_0 \end{cases}$$

con $\theta \in [0, 2\pi[$ e $\rho > 0$. Quando l'asse perpendicolare al piano xy coincide con l'asse z , allora $x_0 = y_0 = 0$.

Passando a coordinate cilindriche, la cella infinitesima di volume $dx dy dz$ diventa $J d\rho d\theta dt$, dove J è il jacobiano, ovvero il determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\theta} & \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\theta} & \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{d\rho} & \frac{dz}{d\theta} & \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies J = \rho.$$

Quindi $dx dy dz = \rho d\rho d\theta dt$.

6.3.3 Passaggio a coordinate sferiche

Per passare alle coordinate sferiche si pone:

$$\begin{cases} z = \rho \cos \psi \\ x = \rho \sin \psi \cos \theta + x_0 \\ y = \rho \sin \psi \sin \theta + y_0 \end{cases}$$

con $\theta \in [0, 2\pi[$ e $0 \leq \psi \leq \pi$.

Passando a coordinate sferiche, la cella infinitesima di volume $dx dy dz$ diventa $J d\rho d\psi d\theta$, dove J è il jacobiano, ovvero il determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\psi} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\psi} & \frac{dy}{d\theta} \\ \frac{dz}{d\rho} & \frac{dz}{d\psi} & \frac{dz}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \psi \cos \theta & \rho \cos \psi \cos \theta & -\rho \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & \rho \cos \psi \sin \theta & \rho \sin \psi \cos \theta \\ \cos \psi & -\rho \sin \psi & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J = \rho^2 \sin \psi$$

per cui $dx dy dz = \rho^2 \sin \psi d\rho d\psi d\theta$.

6.4 Successioni e serie di funzioni

Verifica l'uniforme convergenza della successione assegnata

Verifica il passaggio al limite sotto il segno di integrale della funzione assegnata Per le serie è utile conoscere i metodi che si usavano in analisi 1.

Chapter 7

Alcune definizioni comparse in esami

In ordine di frequenza:

- Derivata direzionale
- Estremi
- Funzione sviluppabile in serie di Taylor
- Integrale curvilineo
- Curva rettificabile
- Derivata parziale in un punto
- Lunghezza di una curva
- Forma differenziale chiusa
- Forma differenziale esatta
- Funzione differenziabile in un punto
- Successione di funzioni uniformemente convergente (con esempio di successione di funzioni **non** uniformemente convergente).