

北京師範大學

本科生毕业论文（设计）

毕业论文（设计）题目：

等温捷径与绝热捷径构成的
类卡诺热机的功率与效率

部 院 系：物理学系

专 业：物理学

姓 名：龚政楠

指 导 教 师：涂展春教授

校内指导教师：涂展春教授

2021 年 3 月 10 日

北京师范大学本科毕业论文（设计）诚信承诺书

本人郑重声明：所提交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

本人签名: 年 月 日

北京师范大学本科毕业论文（设计）使用授权书

本人完全了解北京师范大学有关收集、保留和使用毕业论文（设计）的规定，即：本科生毕业论文（设计）工作的知识产权单位属北京师范大学。学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许毕业论文（设计）被查阅和借阅；学校可以公布毕业论文（设计）的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编毕业论文（设计）。保密的毕业论文（设计）在解密后遵守此规定。

本论文（是、否）保密论文。

保密论文在 年 月解密后适用本授权书。

本人签名: 年 月 日

导师签名: 年 月 日

等温捷径与绝热捷径构成的类卡诺热机的功率与效率

摘 要

论文的摘要是对论文研究内容和成果的高度概括。摘要应对论文所研究的问题及其研究目的进行描述，对研究方法和过程进行简单介绍，对研究成果和所得结论进行概括。摘要应具有独立性和自明性，其内容应包含与论文全文同等量的主要信息。使读者即使不阅读全文，通过摘要就能了解论文的总体内容和主要成果。

论文摘要的书写应力求精确、简明。切忌写成对论文书写内容进行提要的形式，尤其要避免“第 1 章……；第 2 章……；……”这种或类似的陈述方式。

本文介绍清华大学论文模板 `BNUTHESIS` 的使用方法。本模板符合学校的本科、硕士、博士论文格式要求。

本文的创新点主要有：

- 用例子来解释模板的使用方法；
- 用废话来填充无关紧要的部分；
- 一边学习摸索一边编写新代码。

关键词是为了文献标引工作、用以表示全文主要内容信息的单词或术语。关键词不超过 5 个，每个关键词中间用分号分隔。（模板作者注：关键词分隔符不用考虑，模板会自动处理。英文关键词同理。）

关键词：有限时间热力学；等温捷径；绝热捷径；类卡洛热机

Finite Time Thermodynamics

ABSTRACT

An abstract of a dissertation is a summary and extraction of research work and contributions. Included in an abstract should be description of research topic and research objective, brief introduction to methodology and research process, and summarization of conclusion and contributions of the research. An abstract should be characterized by independence and clarity and carry identical information with the dissertation. It should be such that the general idea and major contributions of the dissertation are conveyed without reading the dissertation.

An abstract should be concise and to the point. It is a misunderstanding to make an abstract an outline of the dissertation and words “the first chapter”, “the second chapter” and the like should be avoided in the abstract.

Key words are terms used in a dissertation for indexing, reflecting core information of the dissertation. An abstract may contain a maximum of 5 key words, with semi-colons used in between to separate one another.

KEY WORDS: TeX; LaTeX; CJK; template; thesis

目 录

第 1 章 引言：热机的最大功率与效率问题.....	1
1.1 背景介绍：热机的功率与效率	2
1.2 字体命令	2
第 2 章 随机热机.....	3
2.1 随机热机模型	3
2.2 绝热捷径	3
2.2.1 绝热捷径的实现	3
2.2.2 经典和量子偶次幂势场中生成元的构造	6
2.2.3 利用绝热捷径实现平衡态的转化	9
2.3 等温捷径	10
2.3.1 等温捷径的实现	11
2.3.2 等温捷径应用于过阻尼布朗粒子	11
2.3.3 等温捷径应用于欠阻尼布朗粒子	13
第 3 章 绝热捷径与等温捷径构成的类卡诺循环热机.....	15
3.1 布朗粒子的能量学.....	15
3.1.1 过阻尼布朗粒子的能量学	15
3.1.2 欠阻尼布朗粒子的能量学	16
3.2 类卡诺循环热机模型.....	18
3.2.1 过阻尼布朗粒子构成的类卡诺循环热机	18
3.2.2 欠阻尼布朗粒子构成的类卡诺循环热机	23
3.3 类卡诺循环热机的功、熵、能量损失.....	23
3.4 与其他热机的比较.....	23
插图索引	24
表格索引	25

公式索引	26
参考文献	30
致 谢	32
附录 A 外文资料原文	33
A.1 Single-Objective Programming	33
A.1.1 Linear Programming	34
A.1.2 Nonlinear Programming	35
A.1.3 Integer Programming	35
附录 B 外文资料的调研阅读报告或书面翻译	37
B.1 单目标规划	37
B.1.1 线性规划	37
B.1.2 非线性规划	38
B.1.3 整数规划	38
附录 C 其它附录	39
在学期间参加课题的研究成果	40

主要符号对照表

E	能量
m	质量
c	光速
P	概率
h	普朗克常量, $6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
\hbar	约化普朗克常量, $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$
k_{B}	玻尔兹曼常数, $1.380649 \times 10^{23} \text{ J/K}$
$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}$	定义为 $\sum \frac{\partial f}{\partial r_i} \hat{r}_i$
\dot{f}	函数 f 对时间的导数
f'	函数 f 对空间位置的导数 (针对一维情况)

第 1 章 引言：热机的最大功率与效率问题

热机的发明和使用对人类的生产生活产生了重大的影响，第一次工业革命和第二次工业革命都和热机的发展有紧密的关系。一直以来，特别是近些年来，由于能源短缺的问题愈发突出，研究热机的效率问题吸引着一大批研究者。

早在 1824 年，卡诺就指出（基于热质说）^[1]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，而且这些可逆热机的效率都相同。为 $\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ 。这个问题似乎就这么解决了，然而必须注意的是可逆热机的要求相当于要求工作物质是准静态的。也就是说，要想严格意义上达到卡诺热机的效率，热机一个循环的工作时间应当是无限长，这样的热机功率是 0。

我们当然不可能接受功率为 0 的热机，所以得到热机保持在某一功率下（特别是最大功率）的最大效率成了摆在我们面前的问题，而这个问题促进了有限时间热力学的诞生。

1975 年，Curzon 和 Ahlborn 研究了内可逆热机^[2]，该热机可在有限时间内完成一个循环。利用 Newton 热运输规律，得到了该热机在最大功率下的效率为 $\eta_{CA} = 1 - \sqrt{T_c/T_h} = 1 - \sqrt{1 - \eta_C}$ ，其中 η_C 为卡诺效率。

2008 年，T. Schmiedl 和 U. Seifert 提出了布朗随机热机模型^[3]，该热机模型利用谐振子势场驱动布朗粒子做功，并得到了其在最大功率下的效率。

同年，涂展春推导出费曼棘轮热机^[4]在最大功率下的效率 $\eta_F = \frac{\eta_C^2}{\eta_C - (1 - \eta_C) \ln(1 - \eta_C)}$ 。^[5]

.....

同时涂展春^[4]在小温差条件下，即 $\eta_C \rightarrow 0$ 。将上述热机的效率按照展开。发现这些效率到二阶项都相同的，它们都普遍地满足 $\eta_U = \frac{\eta_C}{2} + \frac{\eta_C^2}{8} + O(\eta_C^3)$ 。这个规律在其他热机中也得到了验证，但也有一些热机不满足这个关系。这引发了研究者对相关问题的思考，涂展春在紧耦合热机的范畴内对其中的原因进行了解释。^[5]

在这些形形色色的有限时间热机中，由 Seifert 等人提出的随机热机^[3]占据一席之地。随机热机通常是利用外势驱动与热源接触的布朗粒子做功。其中的具体的实现过程可以有很大的不同，对应着不同的随机热机。在这些不同的随机热机中，Campo 等人利用绝热捷径构建的奥托热机^[6]引人注目。而后，Deng 等人发现绝热捷径能够提高奥托热机的效率，不论是经典的还是量子的。^[7]涂展春在 Schmiedl 和 Seifert 工作^[3]的基础上，考虑了他们在过阻尼情况下忽略的惯性的影响，构建了一种类卡洛热机^[8]。惊讶地发现这种随机热机的效率等于 Curzon 和 Ahlborn 构建的内可逆热机^[2]的效率。在涂展春构建的热机中^[8]，布朗粒子在与时间相关的谐振子 $U = \lambda^2(t) x^2/2$ 的控制下，经历了类卡诺循环。其中与卡诺循环中绝热过程对应的就是前面提到的绝热捷径，但与卡诺循环中等温过程对应的“等温过程”，却只是粒子与恒温热源接触，而非系统保持等温。

这促使笔者思考是否有与卡诺循环中等温过程更加对应的过程，以实现类卡诺循环。

等温捷径^[9]的提出为实现这个目标提供了契机，李耿等人给一个系统引入了辅助势，这个系统的演化本来是被一个含时哈密顿量所决定的，这个精心选择的辅助势可以使得系统在当前的哈密顿量下的状态，仿佛处于原哈密顿量的瞬时平衡态中一样，从而实现了“等温过程”，我们称之为等温捷径。

综上，笔者欲构造由绝热捷径和等温捷径构成的类卡诺循环，根据随机热力学和非平衡热力学中的典型方法，研究该热机工作过程中的功、熵、能量损失等参数，并考察它的效率与功率。并与其他类型的热机，特别是涂展春构建的类卡洛热机^[8]进行比较，Campo等人构建的奥托热机^[6]。考虑到Deng等人发现绝热捷径能够提高奥托热机的效率^[7]，我们也期望等温捷径的引入能进一步提高热机的效率

1.1 背景介绍：热机的功率与效率

封面的例子请参看 `cover.tex`。主要符号表参看 `denation.tex`，附录和个人简历分别参看 `appendix01.tex` 和 `resume.tex`。里面的命令都很直观，一看即会^①。

1.2 字体命令

① 你说还是看不懂？怎么会呢？

第 2 章 随机热机

2.1 随机热机模型

2.2 绝热捷径

在有限时间热力学中，一个非常重要的议题是如何实现不同平衡态的相互转换。因为有限时间的限制使得我们不能使用准静态的方法，而绝热捷径^[10]提供了这样一种可以在有限时间内实现平衡态转化的策略。这个策略是由 Demirplak and Rice^[11] 和 Berry^[12] 独立发展出来的。在这个策略提出以后的很长一段时间里，它引起了一大批研究者的关注。下面我们回顾一下绝热捷径是怎么实现的。

2.2.1 绝热捷径的实现

考虑量子力学中的绝热定理^[13]：如果一个系统的哈密顿量 $H_0(t)$ 随时间变化很缓慢，即 $\tau_e \gg \tau_i$ ，其中 τ_e, τ_i 分别表示环境的特征时间和系统的内部特征时间。那么如果系统在时间 $t = 0$ 处于 $H_0(0)$ 的本征态，即系统的初态 $|\psi(0)\rangle = |n(0)\rangle$ ，绝热定理告诉我们系统在 t 时刻会处于 $H_0(t)$ 的对应于瞬时本征态 $|n(0)\rangle$ ，并且

$$|\psi(t)\rangle = |n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \quad (2-1)$$

其中 $\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'$, $\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle n(t') | \partial_{t'} n(t') \rangle dt'$

不难注意到，绝热定理实现了 $H_0(t)$ 的对应的本征态之间的转化 $|n(0)\rangle \rightarrow |n(t)\rangle$ 。现在我们考虑取消 $\tau_e \gg \tau_i$ 的要求。

假设存在一个哈密顿量 $H(t)$ ，它使得系统的态的演化严格为 $|\psi(t)\rangle = |n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)}$ ，则根据薛定谔方程有

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (2-2)$$

将 (2-1) 代入 (2-2)，整理得 $E_n + i\hbar (|\partial_t n\rangle - \langle n | \partial_t n \rangle |n\rangle) = H|n\rangle$ ，于是可得

$$\begin{aligned} H(t) &= H_0(t) + i\hbar \sum_m (|\partial_t m\rangle \langle m| - \langle m | \partial_t m \rangle |m\rangle \langle m|) \\ &\equiv H_0 + H_1 \end{aligned} \quad (2-3)$$

于是一个以 $H(t)$ 作为哈密顿量的系统，若其初态为 $H_0(t)$ 的本征态 $|n(0)\rangle$ ，那么不论 $H(t)$ 随时间的变化快慢与否，在 t 时刻，系统的状态依然是 $H_0(t)$ 的本征态，只是两者有一个相位差。于是我们实现了在有限时间内的本征态之间的转化。这其中的关键在于我们引进

了一个反绝热哈密顿量 $H_1(t)$ ，根据 (2-3)，我们已经在形式上得到了 $H_1(t)$ 。现在我们考虑对于具体的 $H_0(t)$ ，如何得到 $H_1(t)$ 的具体表达式。^[14]

让 H_0 通过一系列参数 $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_1(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t))$ 依赖于时间 t 。同时， $H_0(\lambda)$ 的本征值、本征态为 $E_n(\lambda), |n(\lambda)\rangle$ ，根据复合函数的微分法则，式 (2-5) 可以写为

$$H_1(t) = \dot{\lambda} \cdot \xi(\lambda(t)) \quad (2-4)$$

其中

$$\xi(\lambda) = i\hbar \sum_m (|\nabla m\rangle \langle m| - \langle m| \nabla m\rangle |m\rangle \langle m|) \quad (2-5)$$

同时 $|\nabla m\rangle \equiv \partial_\lambda |m(\lambda)\rangle, \dot{\lambda} \equiv d\lambda/dt$

把 ξ 看做参数空间的无穷小平移 $\lambda \rightarrow \lambda + \delta\lambda$ 的生成元。这个无穷小平移与希尔伯特空间中态的变换 $|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle + |\delta\psi\rangle$ 相联系，通过以下方式

$$i\hbar |\delta\psi\rangle = \delta\lambda \cdot \xi |\psi\rangle \quad (2-6)$$

这样，在一阶近似下， $H_0(\lambda)$ 的本征态 $|n(\lambda)\rangle$ 的变换为

$$|n(\lambda)\rangle \rightarrow \left(1 + \frac{1}{i\hbar} \delta\lambda \cdot \hat{\xi}\right) |n(\lambda)\rangle = e^{i\delta\lambda \cdot A_n} |n(\lambda + \delta\lambda)\rangle \quad (2-7)$$

其中 $A_n(\lambda) = i\langle n|\nabla n\rangle$. 这意味着，沿着参数空间的曲线 λ 利用式 (2-7)，可以将系统的态逐步从 $|n(\lambda_0)\rangle$ 变换成 $e^{i\int_{\lambda_0}^{\lambda_s} i\langle n|\nabla n\rangle d\lambda} |n(\lambda_s)\rangle$. 这正是们所希望得到的形式。

现在看看系统态的时间演化，先考虑系统经过一个无穷小时间 δt ，则态 $|\psi\rangle$ 将演化为

$$\left(1 + \frac{1}{i\hbar} H \delta t\right) |\psi\rangle = |\psi\rangle + \frac{1}{i\hbar} \delta t H_0 |\psi\rangle + \frac{1}{i\hbar} \delta\lambda \cdot \xi |\psi\rangle \quad (2-8)$$

如果考虑态 $|\psi\rangle = |n(\lambda)\rangle$ ，那么 (2-8) 的物理意义是明显的。 H_0 产生了我们熟悉的动力学相位，而 ξ 产生了几何相因子。

由 (2-5) 定义的 ξ ，也可由下式 (2-9) 定义，（二者的等价性可由 $\langle m | \nabla n \rangle = \langle m | \nabla \hat{H}_0 | n \rangle / (E_n - E_m)$ ^[12] 加以证明）

$$[\xi, H_0] = i\hbar (\nabla H_0 - \text{diag}(\nabla H_0)) \quad (2-9a)$$

$$\langle n | \xi | n \rangle = 0 \quad (2-9b)$$

其中 $\text{diag}(\nabla H_0) = \sum_m |m\rangle \langle m | \nabla H_0 | m \rangle \langle m|$. 对 (2-9a) 两端同时进行操作 $\langle m | \dots | n \rangle$ ，得到 $\langle m | \xi | n \rangle (E_n - E_m) = \langle m | i\hbar (\nabla H_0 - \text{diag}(\nabla H_0)) | n \rangle$. 可见，(2-9a) 决定了 ξ 的非对角元，(2-9b) 决定了其非对角元。

式 (2-9) 提供了一种在经典力学中找到反绝热哈密顿量的对应方法。因为我可以利用量子与经典的对应 $[A, B]/i\hbar \rightarrow \{A, B\}$ 将 (2-9) 转换为经典的，进而可以在经典力学中找到

对应的反绝热哈密顿量。现在考虑一个经典系统，其自由度为 1，哈密顿量为 $H_0(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\lambda})$ 。其中 $\boldsymbol{\lambda}$ 依然为依赖于时间的一系列参数， $\boldsymbol{\eta} = (q, p)$ 为广义坐标和广义动量，确定了相空间的一个点。对于确定的能量 $E = H_0(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\lambda})$ ，这将相点约束在相空间的一个能壳上，积分

$$I(E, \boldsymbol{\lambda}) \equiv \int d\boldsymbol{\eta} \theta [E - H_0(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\lambda})] \quad (2-10)$$

表示的是能壳所围成的体积，阶跃函数 $\theta [E - H_0(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\lambda})]$ 可以使得积分区域为整个相空间。经典的绝热定理告诉我们 $I(E, \boldsymbol{\lambda})$ 是一个绝热不变量^[15]。也就是说如果 H_0 随时间 t 变化的足够缓慢，那么能壳所围成的体积将保持不变。定义任意可观测量 A 的微正则分布平均

$$\langle A \rangle_{E, \boldsymbol{\lambda}} \equiv \frac{1}{\partial_E I} \int d\boldsymbol{\eta} \delta (E - H_0) A \quad (2-11)$$

利用函数 $I(E, \boldsymbol{\lambda})$ 去定义函数 $E(I, \boldsymbol{\lambda})$ ，则有

$$\nabla E(I, \boldsymbol{\lambda}) = -\frac{\nabla I(E, \boldsymbol{\lambda})}{\partial_E I(E, \boldsymbol{\lambda})} = \langle \nabla H_0 \rangle_{E, \boldsymbol{\lambda}} \quad (2-12)$$

其中第一个等式利用循环函数的偏导数的性质，第二个等式利用了式 (2-10) 和式 (2-11)。

式 (2-9) 的经典对应为^[16]

$$\{\boldsymbol{\xi}, H_0\} = \nabla H_0 - \langle \nabla H_0 \rangle_{E, \boldsymbol{\lambda}} \equiv \nabla \tilde{H}_0 \quad (2-13a)$$

$$\langle \boldsymbol{\xi} \rangle_{E, \boldsymbol{\lambda}} = 0 \quad (2-13b)$$

其中 $\{\dots\}$ 是经典力学中的泊松括号 $\{A, B\} = (\partial A / \partial q)(\partial B / \partial p) - (\partial A / \partial p)(\partial B / \partial q)$ 。利用式 (2-12) 和泊松括号的定义，式 (2-13a) 可改写为不懂，出自^[14] page2 (13)

$$\{\boldsymbol{\xi}, i\} = \nabla i \quad (2-14)$$

其中关于 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 的函数 i 的定义为： $i(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\lambda}) \equiv I(H_0(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\lambda}); \boldsymbol{\lambda})$ 。类似于量子的情形，将 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\lambda})$ 看做和参数空间的无穷小平移 $\boldsymbol{\lambda} \rightarrow \boldsymbol{\lambda} + \delta \boldsymbol{\lambda}$ 相联系的相空间的平移 $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\eta} + \delta \boldsymbol{\eta}$ 的生成元，有^[17]

$$\delta \boldsymbol{\eta} = \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot \{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}\} \quad (2-15)$$

于是，由式 (2-14) 和 (2-15) 可得

$$\begin{aligned} & i(\boldsymbol{\eta} + \delta \boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\lambda} + \delta \boldsymbol{\lambda}) - i(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\lambda}) \\ &= \frac{\partial i}{\partial \boldsymbol{\eta}} \delta \boldsymbol{\eta} + \nabla i \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} \\ &= (\{i, \boldsymbol{\xi}\} + \nabla i) \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2-16)$$

这说明，变换 $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\eta} + \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot \{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}\}$ 将能壳 $H_0(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\lambda})$ 上的一个相点映射到能壳 $H_0(\boldsymbol{\eta} + \delta \boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\lambda})$ 上的一个点，而二者包围着相同的相体积。

可见，类似于量子中的情形，只要给经典的系统施加一个反绝热的哈密顿量 $\dot{\lambda} \cdot \xi(\eta, \lambda(t))$ 。那么此系统的 $I(E, \lambda) \equiv \int d\eta \theta [E - H_0(z; \lambda)]$ 将严格保持不变，不论 H_0 随时间的变化快慢与否。这个新的哈密顿量为（文献^[14] page eq16 直接计算了 $\frac{d}{dt}I(\eta; \lambda)$ ，但其中的推理过程未能理解）

$$H(\eta, t) = H_0(\eta; \lambda(t)) + \dot{\lambda} \cdot \xi(\eta, \lambda(t)) \quad (2-17)$$

从系综的角度来考虑这个过程：想象一下从 H_0 的能壳 E_0 中取样的初始条件的集合。在任何后来的时间 $t > 0$ ，从这些初始条件演化出来的轨迹，在 *Hamiltonian* $H(z; t)$ 下，将填充一个 $H_0(z; (t))$ 的单一能壳 $E(t)$ ，具体来说是绝热能壳，它与初始能壳的相空间体积相同。如果我们把绝热能壳想象成一个随着参数随时间变化而变形的闭合循环，那么在式 16 中， H_0 围绕这个循环产生运动，调整每个轨迹，使其保持在壳上。可不要，出自^[14] page eq16

2.2.2 经典和量子偶次幂势场中生成元的构造

现在，鉴于变换 $\eta \rightarrow \eta + \delta\lambda \cdot \{\eta, \xi\}$ 将能壳 $H_0(\eta; \lambda)$ 上的相点映射到了能壳 $H_0(\eta + \delta\eta; \lambda)$ 上，我们可以此为根据构造经典力学中的 $\xi(\eta, \lambda)$ ，下面我们用例子进行说明

考虑一个一维的粒子，处在两堵刚性墙之间，刚性墙的位置为 $q = 0, \lambda$ ，这个例子这对应于量子力学中的一维无限深势阱。其相空间的能壳如图 (2.1) 所示。

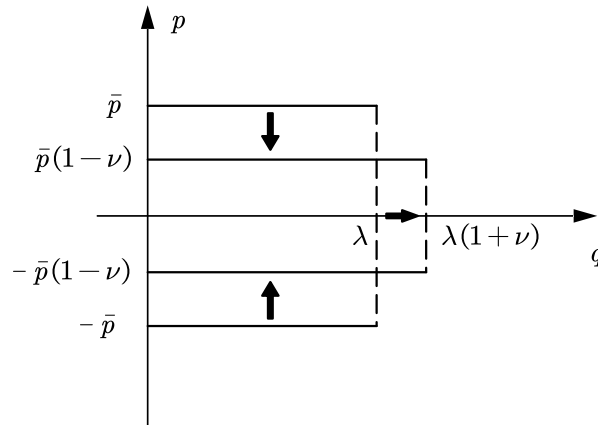


图 2.1 在一维盒子中的粒子的能壳。该粒子的能壳是一个矩形，当盒子的长度发生极小的改变时，矩形能壳也发生相应的改变。但矩形的体积不变

系统的哈密顿量为

$$H_0(\eta; \lambda) = \frac{p^2}{2m} + V_{\text{box}}(q; \lambda) \quad (2-18)$$

其中 $V_{\text{box}}(q; \lambda)$ 代表一维盒子的势场 $V_{\text{box}}(q; \lambda) = \begin{cases} 0, & q < \lambda \\ \infty, & q \leq 0 \text{ or } q \geq \lambda \end{cases}$ 在经典中这个粒子的运动是平凡的——以相同的速度在两堵墙之间做往返运动。

哈密顿量的参数 λ 随时间 t 变化，现在我们构造这个系统的**反绝热哈密顿量**。不难看出，矩形能壳的面积为 $I = 2\bar{p}\lambda$ ，由于矩形能壳的长的变化为 $\lambda \rightarrow \lambda(1+\nu)$ ，为了维持矩形能壳的面积，在一阶精度下，可令其宽的微小改变为 $2\bar{p} \rightarrow 2\bar{p}(1-\nu)$ ，其中 $\nu \equiv \delta\lambda/\lambda$ 。于是，这两个能壳被一个线性的尺度变换所联系

$$q \rightarrow q(1+\nu) \quad , \quad p \rightarrow p(1-\nu) \quad (2-19)$$

现在我们可以通过 $(\nu q, -\nu p) = \delta\lambda\{(q, p), \xi\}$ （式 (2-15)）逆向解出生成元的表达式，于是我们可得一对这样的方程 $\begin{cases} q/\lambda = \partial\xi/\partial p \\ p/\lambda = \partial\xi/\partial q \end{cases}$ 。结合限制条件 (2-13b)，于是可令 $\xi = qp/\lambda$ 。再根据式 (2-19)，我们最终得到

$$H(\eta, t) = H_0(\eta; \lambda) + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} qp \quad , \quad \lambda = \lambda(t) \quad (2-20)$$

在这个时间依赖的哈密顿量之下，绝热不变量 $i(q, p; \lambda) = 2|p|\lambda$ 是严格守恒的，不论函数 $\lambda(t)$ 的形式是怎样的。现在我们对于这个具体的例子，实实在在的构造出了**反绝热哈密顿量**，这说明其并不只是存在于形式化理论中，而是可以在实际中加以利用的。

在构造出了经典的**反绝热哈密顿量**之后，我们也可以通过 ξ 的经典表达式来猜想量子力学中的**反绝热哈密顿量**，因为算符 p, q 是不对易的，一个自然的猜想是

$$\xi(\lambda) = \frac{qp + pq}{2\lambda} \quad (2-21)$$

于是，再联系到已知的量子力学中**一维无限深势阱**的本征解，非常幸运的，我们发现选择的这个 ξ 满足式 (2-7)

$$\left(1 + \frac{1}{i\hbar}\delta\lambda\xi\right)\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\sin\left(\frac{n\pi q}{\lambda}\right) = \sqrt{\frac{2}{\lambda+\delta\lambda}}\sin\left(\frac{n\pi q}{\lambda+\delta\lambda}\right) \quad (2-22)$$

这一点可以通过计算 $\mathbb{I}1P\lambda\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\sin\left(\frac{n\pi q}{\lambda}\right)\delta\lambda = \frac{1}{i\hbar}\delta\lambda\xi\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\sin\left(\frac{n\pi q}{\lambda}\right)$ 得到验证。(2-22) 中的相位由于 $A_n(\lambda) = i\langle n|\partial_\lambda n\rangle = 0$ 而消失。于是可以立刻得到

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V_{\text{box}}(q; \lambda) + \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda}\frac{\hbar}{i}\left(q\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}q\right) \quad (2-23)$$

这样，波函数

$$\psi(q, t) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\sin\left(\frac{n\pi q}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m\lambda'^2}\right) \quad (2-24)$$

将成为这个系统的精确解（初态为 $\psi(q, 0) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\sin\left(\frac{n\pi q}{\lambda}\right)$ ），不论 $\lambda(t)$ 的函数形式如何。

式 (2-23) 也可以更一般的写成

$$\left(1 + \frac{1}{i\hbar}\delta\lambda\hat{\xi}\right)\psi(q) = \sqrt{\frac{1}{s}}\psi\left(\frac{q}{s}\right) \quad , \quad s = \frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} \quad (2-25)$$

换句话说，算符 $\exp(\delta\lambda\xi/i\hbar)$ 对波函数 $\psi(q)$ 进行了线性放大。（系数 $\sqrt{\frac{1}{s}}$ 保证了波函数的归一化）自此我们也成功的通过构造的经典反绝热哈密顿量构造出了量子反绝热哈密顿量

不难发现，我们的构造能够成功，很大程度上得益于能壳和本征态之间的尺度变换关系能够成立。相似的办法也能够应用于偶次幂势场，则经典哈密顿量为

$$H_0(\eta; \lambda) = \frac{p^2}{2m} + \epsilon \left(\frac{q}{\lambda} \right)^b \quad (2-26)$$

可以证明，对于相应的量子的情形，也是可以按照类似的方式构造其量子反绝热哈密顿量的。其中 $\epsilon > 0$ 调节了能量尺度，而 b 是正偶数。同样的，我们先在经典中加以考虑，再推广到量子中。上述系统的绝热不变量为

$$\begin{aligned} i(\eta; \lambda) &= 4 \int_0^{\lambda(H_0/\epsilon)^{1/b}} \sqrt{2m [H_0 - \epsilon (q/\lambda)^b]} dq \\ &= \sqrt{8\pi m \epsilon}^{-1/b} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{b})}{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{1}{b})} \lambda H_0^{\frac{1}{2\mu}} \\ &= c \lambda H_0^{\frac{1}{2\mu}} \end{aligned} \quad (2-27)$$

其中， $\mu \equiv \frac{b}{b+2}$, $c \equiv \sqrt{8\pi m \epsilon}^{-1/b} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{b})}{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{1}{b})}$ 同样的，含时参数 $\lambda \rightarrow \lambda + \delta\lambda$ 的变化，通过一个线性变换引起了能壳的变化。为了看到这一点，我们考虑 $i(q, p; \lambda)$ 的变化 $\delta i(q, p; \lambda) = \mathbb{I}1Piq\delta q + \mathbb{I}1Pip\delta p + \mathbb{I}1Pil\delta\lambda \equiv 0$ ，为了使恒等式成立，可以假设 $\delta q = xq \frac{\delta\lambda}{\lambda}$, $\delta p = -yp \frac{\delta\lambda}{\lambda}$ ，可以得到

$$\frac{c}{2\mu H_0} \left[(\mu - y) \frac{p^2}{m} + (2\mu - b + bx) \epsilon \left(\frac{q}{\lambda} \right)^b \right] \delta\lambda \equiv 0 \quad (2-28)$$

要使上式成立，必须有 $x = y = \mu$ ，可见，能壳的变换依然可以由式 (2-19) 进行描述，只不过现在 $\nu = \mu\delta\lambda/\lambda$ ，同理我们可以得到新的哈密顿量

$$H(\eta, t) = H_0(\eta; \lambda) + \mu \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} qp \quad (2-29)$$

在这个哈密顿量下， $i(\eta; \lambda) = c \lambda H_0^{\frac{1}{2\mu}}$ 将成为一个严格的守恒量。在量子力学中，本征态将满足（不甚理解）

$$\phi_n(q; \lambda) = \sqrt{\frac{1}{\lambda^\mu}} \phi_n\left(\frac{q}{\lambda^\mu}; 1\right) \quad (2-30)$$

在新的哈密顿量

$$H(t) = H_0(\lambda) + \frac{b}{b+2} \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda} \frac{\hbar}{i} \left(q \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q} q \right) \quad (2-31)$$

之下。这结果对任意 $b \in \{2, 4, 6, \dots\}$ 都是成立对的。特别的， $b = 2$ 和 $b \rightarrow \infty$ 对应于一维谐振子和一维无限深势阱的情况。不过，对于一维谐振子的情况，Muga 等人使用升降算子 a, a^\dagger 结合式 (2-3) 的办法更为简单地得到了相同的结果。^[18]

对于一般的一维势场，生成元应该满足

$$\xi(\eta_b; \lambda) - \xi(\eta_a; \lambda) = \int_a^b dt \nabla \tilde{H}_0(\eta(t); \lambda) \quad (2-32)$$

其中相点 η_a, η_b 在同一能壳上， $\eta(t)$ 是相点从 η_a 演化到 η_b 的相轨迹。式 (2-32) 可以结合式 (2-13a) 和 $(d/dt)\xi(\eta(t); \lambda) = \{\xi, H_0\}$ 而得到。

如果我们考虑相空间中复杂一点的能壳，它们不是简单闭合的环。比如如果势 $V(q; \lambda)$ 是双阱势，而参数 λ 的变化可以改变能壳的拓扑结构——从单环变成双环或相反。这时 i 的绝热不变性将被破坏。^[19-21]

对于自由度 $f \geq 2$ 的经典系统，如果 H_0 是**完全可积的**^[15]，我们就有可能能够重复式 (2-10)-(2-17) 对**作用量-角度变量**的分析，每一个生成 ξ_i 元对应一对**作用量-角度变量**。（**可加一脚注**）另一个情形下，如果 H_0 是各态历经的，那么式 (2-13a) 的解的存在将意味着能壳 $H_0(\eta; \lambda)$ 可以被**正则变换**到 $H_0(\eta; \lambda + \delta\lambda)$ 。^[16] 虽然对于 $f \geq 2$ 的系统，这一条件通常并不能满足，但一旦满足， ξ 就简单的是这个变换的生成元，无耗散的驱动就可以由 $H_0 + \dot{\lambda} \cdot \xi$ 实现。

上述的方法除了可以应用在量子 and 经典动力学之外，相似的方法也可以应用于统计力学，用于估算自由能的变化。其中反绝热的**度规缩放**^[22] 或者**场流**^[23] 被构造出来，用于减少或者消除对有限时间过程中数字模拟的不可逆性。

2.2.3 利用绝热捷径实现平衡态的转化

接下来，我们举例说明绝热捷径如何实现平衡态的转化。^[8] 考虑一个被时间依赖的谐振子势场驱动的布朗粒子，只需使式 (2-26) 中的 $b = 2$ ，再联系到式 (2-30)，就可以直接得到它被施加反绝热哈密顿量之后的哈密顿量

$$\begin{aligned} H(t) &= H_0(t) + \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda(t)} qp \\ &= \frac{p^2}{2m} + \epsilon \left(\frac{q}{\lambda}\right)^2 + \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda(t)} qp \end{aligned} \quad (2-33)$$

在时间 $t_i < t \leq t_f$ 内，参数由 $\lambda_i \equiv \lambda(t_i)$ 变为 $\lambda_f \equiv \lambda(t_f)$ 。我们要求

$$\dot{\lambda}(t_i) = \dot{\lambda}(t_f) = 0, \quad (2-34)$$

这样才有 $H(t_f) = H_0(t_f)$ ，除此之外， $\lambda(t)$ 依赖于时间 t 的形式有很大的任意性。运动方程为

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} + \frac{\lambda(t)}{2\lambda(t)} q \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -2\epsilon \frac{q}{\lambda^2(t)} - \frac{\dot{\lambda}(t)}{2\lambda(t)} p \end{cases} \quad (2-35)$$

接下来我们将说明**绝热捷径**如何联系两个不同**有效温度的正则态**。^[8] 假设系统初始处

在有效温度为 $(k_B\beta_i)^{-1}$ 的正则态中，那么初始时系统的分布函数可以表达为

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{2\pi\lambda_i} \exp[-\beta_i H_0(t_i)] \quad (2-36)$$

其中 (q_i, p_i) 代表初始时的相点，根据刘维尔定理，当系统不和外界任何热浴接触时，分布函数沿着相轨应当是不变的。所以，末态的分布函数应当为

$$\rho_f = \rho_i = \frac{\beta_i}{2\pi\lambda_i} \exp[-\beta_i H(t_i)] \quad (2-37)$$

接着我们寻找末态的有效温度，使得末态的分布函数 (2-37) 可以被表达成正则分布的样子

$$\rho_f = \frac{\beta_f}{2\pi\lambda_f} \exp[-\beta_f H(t_f)] \quad (2-38)$$

其中 (q_f, p_f) 是末态的相点。计算 $H_0(t)$ 对时间的导数得

$$\begin{aligned} \frac{dH_0(t)}{dt} &= \frac{p}{m} \dot{p} + 2\epsilon \frac{q}{\lambda^2} \dot{q} - 2\epsilon \frac{q^2}{\lambda^2} \dot{\lambda} \\ &= -H(t) \frac{d \ln \lambda(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2-39)$$

第二个等式用到了运动方程 (2-38) 于是可得 $H(t_f) = H(t_i) \lambda_i / \lambda_f$ ，将这个式子代入式 (2-38)，得到

$$\rho_f = \frac{\beta_f}{2\pi\lambda_f} \exp\left[-\frac{\beta_f \lambda_i}{\lambda_f} H(t_f)\right] \quad (2-40)$$

将这个式子和式 (2-37) 比较可得

$$\frac{\beta_f}{\lambda_f} = \frac{\beta_i}{\lambda_i} \quad (2-41)$$

这说明，如果系统的初态等效温度为 $(k_B\beta_i)^{-1}$ 的正则态，那么在系统经历绝热捷径之后，我们可以把系统的末态视为等效温度为 $(k_B\beta_f)^{-1}$ 的正则态。而且，初态和末态的等效温度满足 (2-41)。

这样，通过绝热捷径，在有限时间 $t_i \sim t_f$ 内，我们实现了微观正则态之间的转换。

2.3 等温捷径

上一节我们介绍了绝热捷径，它可以在有限时间内实现正则平衡态之间的转化。又由于这个过程中，系统和外界没有热交换故而称之为绝热捷径。那么类比于经典中的绝热过程和等温过程，我自然难免思考是否会存在对应的等温捷径。类似的，我们希望它可以在有限时间内实现两个等温平衡态间的转化。如果可以成功，我们还可以进一步思考由绝热捷径和等温捷径构成的有限时间类卡诺循环的功率与效率等问题。

Martínez^[24] 针对谐振子场中的布朗粒子，通过对劲度系数进行调节，是系统比自然驰豫过程快一百倍达到了平衡态。Le Cunuder 等人^[25] 实现了微观谐振子平衡态的快速转化。

不过这些方法都只能限制于布朗粒子系统，我们需要在一般情况也能适用的办法。于是，李耿等人^[9]发展出了等温捷径的概念。很类似于绝热捷径，李耿等人为一个初始处于平衡态的系统施加了一个辅助势场（类似于绝热捷径中的反绝热哈密顿量），它使得这个和恒温热浴接触的系统的演化处于原哈密顿量的瞬时平衡态。通过对辅助势场的调节，可以使得系统的初末状态都是原哈密顿量的平衡态，就此实现了等温情况下平衡态间的转化。

2.3.1 等温捷径的实现

考虑一个和温度为 T 的热浴接触的系统，如果系统的哈密顿量 $H_0(\boldsymbol{\eta}, \lambda(t))$ 依赖于时间。分布函数 $\rho(\boldsymbol{\eta}, t)$ 的时间演化由下式决定

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial t} = L_0(\boldsymbol{\eta}, \lambda(t))\rho(\boldsymbol{\eta}, t) \quad (2-42)$$

其中 $L_0(\boldsymbol{\eta}, \lambda(t))$ 是演化算符，我们将讨论的框架限制在这样一种情况下：对于固定的参数 λ ，系统处于这样一种平衡态之中，它的分布函数满足 $\rho_{\text{eq}} \propto e^{-\beta H_0(\boldsymbol{\eta}, \lambda)}$ ，其中 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ 。现在给系统引入一个辅助势 $U_1(\boldsymbol{\eta}, t)$ ，哈密顿量成为 $H(\boldsymbol{\eta}, t) = H_0(\boldsymbol{\eta}, \lambda(t)) + U_1(\boldsymbol{\eta}, t)$ ，演化方程 (2-42) 成为

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial t} = L_0(\boldsymbol{\eta}, \lambda(t))\rho(\boldsymbol{\eta}, t) + L_1(\boldsymbol{\eta}, t)\rho(\boldsymbol{\eta}, t) \quad (2-43)$$

其中 $L_1(\boldsymbol{\eta}, t)$ 代表与辅助势对应的算符。我们要求辅助势可以使得系统在任何时候都处于原哈密顿量的瞬时平衡态中，则分布函数为

$$\rho(\boldsymbol{\eta}, t) = \rho_{\text{ieq}}(\boldsymbol{\eta}, \lambda(t)) \equiv e^{\beta[F(\lambda(t)) - H_0(\boldsymbol{\eta}, \lambda(t))]} \quad (2-44)$$

其中， $F(\lambda) \equiv -\beta^{-1} \ln \left[\int e^{-\beta H_0(\boldsymbol{\eta}, \lambda)} d\boldsymbol{\eta} \right]$ 是原系统在给定参数 λ 时，在平衡态下的自由能。(2-44) 的积分是对整个相空间的。如果我们限制辅助势 $U_1(\boldsymbol{\eta}, t)$ 在驱动过程的初末时刻都为零，即分布函数在初末时刻都对应于哈密顿量 $H(\boldsymbol{\eta}, t)$ ，那么我们就实现了有限时间内的等温平衡态的转化。

上面的这种方法看上去很类似于 Vaikuntanathan 和 Jarzynski 提出的护送自由能模拟 (escorted free-energy simulations)^[23] 通过在系统中引入恰当的人工场流和巧妙的功的定义，这个方法可以生成相轨迹，沿着这些相轨迹做的功等于系统自由能的改变。而等温捷径的方法致力于为等温情况下有限时间内平衡态的转化提供统一的理论框架。也不用额外引入功的定义，可以依旧采用随机热力学中轨道功的定义。^[26-27]

2.3.2 等温捷径应用于过阻尼布朗粒子

考虑在势场 $U_0(q, \lambda(t))$ 中的一维布朗粒子，在过阻尼的情形下忽略其惯性的影响。为系统引入一个辅助势 $U_1(q, t)$ ，那么现在粒子的势场为

$$U(q, t) = U_0(q, \lambda(t)) + U_1(q, t) \quad (2-45)$$

布朗粒子的分布函数 $\rho(q, t)$ 的演化由福克-普朗克-克拉马斯方程 (**Fokker-Planck-Kramers equation**)^[28] 决定

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial q} = 0, \quad (2-46)$$

$$J = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial U}{\partial q} \rho + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial q} \right) \quad (2-47)$$

其中 γ 是粒子与液体间的黏滞系数。鉴于我们的假设——系统时刻处在 $H_0(\eta, \lambda(t))$ 瞬时平衡态下，则系统的分布函数为

$$\rho(q, t) = \rho_{\text{ieq}}(q, \lambda(t)) \equiv e^{\beta[F(\lambda(t)) - U_0(q, \lambda(t))]} \quad (2-48)$$

其中， $F(\lambda) \equiv -\beta^{-1} \ln \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta U_0(q, \lambda)} dq \right]$ 将式 (2-48) 代入福克-普朗克方程 (2-46)，可以得到 $U_1(q, t)$ 需要满足的方程：

$$\frac{1}{\gamma\beta} \frac{\partial^2 U_1}{\partial q^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial U_0}{\partial q} \frac{\partial U_1}{\partial q} = \left(\frac{dF}{d\lambda} - \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} \right) \dot{\lambda} \quad (2-49)$$

可以令 $U_1(q, t)$ 取如下形式

$$U_1(q, t) = \dot{\lambda}(t) f(q, \lambda(t)) \quad (2-50)$$

将上式 (2-50) 代入式 (2-49) 可得

$$\frac{1}{\gamma\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial U_0}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{dF}{d\lambda} - \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} \quad (2-51)$$

非常有趣的是式 (2-48) 是方程 (2-51) 的积分因子，于是不难求得方程 (2-51) 的形式解。再结合假设 (2-50)，得到

$$U_1(q, t) = \gamma\beta\dot{\lambda}(t) \int dq \frac{\int dq h(q, \lambda(t))}{\rho_{\text{ieq}}(q, \lambda(t))} \quad (2-52)$$

其中 $h(q, \lambda) \equiv \left[\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} - \frac{\partial U_0(q, \lambda)}{\partial \lambda} \right] \rho_{\text{ieq}}(q, \lambda)$ 。注意到，从分布函数的演化得到势能的想法，Martínez 等人在快速平衡 (**engineered swift equilibration**) 的研究^[24] 中已经被应用过。不过，我们是从给定的势能 $U_0(q, \lambda(t))$ 得到辅助势，Martínez 等人是从给定的分布函数得到辅助势。而且，Martínez 等人的方法不能同时确定哈密顿量和自由能。

考虑到我们对辅助势的 $U(q, t)$ 限制条件——在驱动过程的初末时刻 t_i, t_f 要使得 $U(q, t) = U_0(q, t)$ ，于是我们引入限制条件

$$\dot{\lambda}(t_i) = \dot{\lambda}(t_f) = 0 \quad (2-53)$$

结合辅助势 (2-52) 和上式 (2-53) 的边界条件，我们就在过阻尼的情况下实现了等温捷径。

现在来让我们考虑两个简单的例子，第一个例子是在谐振子中受时间依赖的力的布朗粒子。相应的势能为

$$U_0(q, \lambda(t)) = \frac{1}{2}kq^2 - \lambda(t)q \quad (2-54)$$

其中 k 代表了谐振子势的强度， $\lambda(t)$ 是外力。将上式 (2-54) 代入式 (2-52) 就得到了辅助势的形式

$$U_1(q, t) = -\frac{\gamma\dot{\lambda}(t)}{k}q \quad (2-55)$$

再来看一个例子：依赖于时间的谐振子势场中的布朗粒子，势场为

$$U_0(q, \lambda(t)) = \frac{q^2}{2\lambda(t)^2} \quad (2-56)$$

同样的，根据式 (2-52) 可得辅助势为

$$U_1(q, t) = -\frac{\gamma\dot{\lambda}(t)}{2\lambda(t)}q^2 \quad (2-57)$$

式 (2-57) 和 Martínez 等人得到的结果^[24] 是等价的。并且，他们的结果意味着对于势场 $U_0(q, \lambda(t)) = q^n/2\lambda(t)^n$ ($n = 2, 4, 6, \dots$) 都可以找到辅助势的解析解 $U_1(q, t) = -\gamma\dot{\lambda}q^2/(2\lambda)$ 。除此之外，也可以找到另一类势场 $U_0(q, \lambda(t)) = u(q - \lambda(t))$ 的辅助势^[9]，这是一个随时间平移的势场，相应的辅助势为 $U_1(q, t) = -\gamma\dot{\lambda}q$ 。

2.3.3 等温捷径应用于欠阻尼布朗粒子

在欠阻尼情况下，布朗粒子的惯性的影响不能忽略，我们假设辅助势 U_1 是粒子的坐标 q 和动能 p 的函数^①。则总哈密顿量为

$$H(q, p, t) = H_0(q, p, \lambda(t)) + U_1(q, p, t) \quad (2-58)$$

其中 $H_0(q, p, \lambda(t)) = p^2/2 + U_0(q, \lambda(t))$ 。^②但是通常的福克-普朗克-克拉马斯方程只能描述势场不依赖于动量 p 时分布函数 $\rho(q, p, t)$ 的时间演化。通过刘维尔方程，李耿^[9] 得到了势能含有动量 p 的福克-普朗克-克拉马斯方程如下

$$\mathbb{I}1P\rho t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2-59)$$

其中

$$\mathbf{J} \equiv \rho(p + \mathbb{I}1PU p) \hat{q} - \rho \left(\gamma p + \frac{\partial U}{\partial q} + \mathbb{I}1PU p + \frac{\gamma}{\rho\beta} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \hat{p} \quad (2-60)$$

① 严格说来，这个时候 $U_1(q, p)$ 应该叫做辅助哈密顿量。

② 为了简便，令 $m = 1$ ，或者做变换 $p = \frac{p}{\sqrt{m}}$

注意到, 我们令 $U \equiv U_0 + U_1$, 算符 $\nabla \equiv \hat{q}\partial/\partial x + \hat{p}\partial/\partial p$, 其中 \hat{q} 和 \hat{p} 是单位方向向量。原系统瞬时平衡态的分布函数为

$$\rho(x, p, t) = \rho_{\text{ieq}}(x, p, \lambda(t)) \equiv e^{\beta[F(\lambda(t)) - H_0(x, p, \lambda(t))]} \quad (2-61)$$

其中 $F(\lambda) \equiv -\beta^{-1} \ln \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\beta H_0(q, p, \lambda)} \right]$ 同理, 将上式 (2-61) 代入方程 (2-59), 得到

$$\frac{\gamma}{\beta} \frac{\partial^2 U_1}{\partial p^2} - \gamma p \frac{\partial U_1}{\partial p} + \frac{\partial U_0}{\partial q} \frac{\partial U_1}{\partial p} - p \frac{\partial U_1}{\partial q} = \left(\frac{dF}{d\lambda} - \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} \right) \dot{\lambda} \quad (2-62)$$

假设 $U_1(q, p, t) = \dot{\lambda}(t) f(q, p, \lambda(t))$, 可以得到关于 f 的偏微分方程

$$\frac{\gamma}{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} - \gamma p \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial U_0}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} - p \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{dF}{d\lambda} - \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} \quad (2-63)$$

不同于欠阻尼的情况, 除了一些特殊情况, 我们无法为上面这个方程 (2-63) 找到解析解。

和欠阻尼的情况一样, 依然考虑两个特殊的势场 (2-54) 和 (2-56)。可以求得相应的辅助势为

$$U_1(q, p, t) = \frac{\dot{\lambda}(t)}{k} (p - \gamma q) \quad (2-64)$$

和

$$U_1(q, p, t) = -\frac{\dot{\lambda}(t)}{2\gamma\lambda(t)} \left[(p - \gamma q)^2 + q^2/\lambda(t)^2 \right] \quad (2-65)$$

类似于过阻尼的情形, 在欠阻尼的情形下我们也可以为两类势场的辅助势找到解析解^[9], 势场 $U_0(q, \lambda(t)) = q^n/2\lambda(t)^n$ ($n = 2, 4, 6 \dots$), $U_0(q, \lambda(t)) = u(q - \lambda(t))$ 的辅助势分别为 $U_1(q, p, t) = -\dot{\lambda} \left[(p - \gamma q)^2 + q^n/\lambda(t)^n \right] / 2\gamma\lambda$, $U_1(q, p, t) = \dot{\lambda}(p - \gamma q)$ 。

由 Le Cunuder 和他的合作者^[25]所做的实验说明了辅助势 (2-64) 是能够在实验上实现的, 而辅助势 (2-65) 里的交叉项 qp 很类似于绝热捷径中的反绝热哈密顿量^[14,29-30]。对于一大类由绝热捷径控制的量子多体系统, del Campo 提出了一种可能的实验方案来实现交叉项^[30]。这种方案不需要知道微观系统的详细信息, 通过适当的正则变换, 他得到了在另一个表象, 在这个表象下没有交叉项。这个办法为我们实现辅助势 (2-65) 提供了思路。

第 3 章 绝热捷径与等温捷径构成的类卡诺循环热机

3.1 布朗粒子的能量学

在正式开始讨论我们构建的热机之前，为了方便讨论热机的效率、熵变等问题，让我们先花一点时间讨论布朗粒子的能量学。

3.1.1 过阻尼布朗粒子的能量学

李耿博士毕业论文，第一章随机能量学可作为参考

考虑一个和温度为 T 的热浴接触的一维布朗粒子。它被施加一个依赖于时间的外势 $U(q, p, t) = U_0(q, \lambda(t)) + U_1(q, t)$ ，其中考虑到了在绝热捷径和等温捷径中我们施加的辅助势 U_1 。在过阻尼情况下，粒子的惯性的影响可以忽略，哈密顿量为

$$H = U_0(q, \lambda(t)) + U_1(q, p, t) \quad (3-1)$$

哈密顿量的全微分为

$$dH = \left(\dot{q} \frac{\partial U_0}{\partial q} + \dot{q} \mathbb{I} P U_1 q \right) dt + \left(\dot{\lambda} \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} + \mathbb{I} P U_1 t \right) dt \quad (3-2)$$

这提示我们定义沿着相轨迹 $(q(t), p(t))$ 的能量差^[8]

$$\Delta e \equiv H(t_f) - H(t_i), \quad (3-3)$$

输入功

$$w \equiv \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\dot{\lambda} \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} + \mathbb{I} P U_1 t \right) \quad (3-4)$$

这也与传统的随机热力学对轨道功的定义相符合。^[27,31-32]。还有吸收的热量

$$q \equiv \int_{t_i}^{t_f} dt \dot{q} \frac{\partial U}{\partial q}. \quad (3-5)$$

相轨连接了初时刻 t_i 对应的相点 (q_i, p_i) 和末时刻 t_f 对应的相点 (q_f, p_f) 。显然，对于每条相轨有

$$\Delta e = w + q \quad (3-6)$$

而系统的分布函数 $\rho(q, p, t)$ 由的福克-普朗克-克拉马斯方程 (2-46) 决定，在知道了 $\rho(q, p, t)$ 之后就可以计算以上式子 (3-4)-(3-6) 的系综平均，这和文献^[33-35] 的步骤是类似

的。得到能量差和输入功的系综平均为

$$\Delta E \equiv \langle \Delta e \rangle = \int dq (H\rho) \Big|_{t_i}^{t_f}, \quad (3-7)$$

和

$$W \equiv \langle w \rangle = \int_{t_i}^{t_f} dt \int dq \left[\rho \left(\lambda \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} + \mathbb{I} 1 P U_1 t \right) \right]. \quad (3-8)$$

对于吸收的热的系综平均，由于存在 \dot{q} ，我们不好直接积分，需要做进一步的推导。系综平均为

$$Q = \int_{t_i}^{t_f} \left\langle \dot{q} \frac{\partial U}{\partial q} \right\rangle dt \quad (3-9)$$

现在分两步对上式 (3-9) 进行平均。

第一步，对系综中在 t 时刻经过 q 的轨道进行平均（不懂至以下），得到

$$\langle \dot{x} | x, p, t \rangle = \frac{J}{\rho} \quad (3-10)$$

其中 J 是式 (2-47) 所定义的流。

第二步，利用分布函数 $\rho(q, p, t)$ 对所有的 q 和 p 进行系综平均。于是，系统与热浴的热交换为

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int dq \left(J \frac{\partial U}{\partial q} \right) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int dq \left[-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial q} \left(\frac{\partial U}{\partial q} \rho + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial q} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-11)$$

3.1.2 欠阻尼布朗粒子的能量学

考虑一个和温度为 T 的热浴接触的一维布朗粒子。它被施加一个依赖于时间的外势 $U(q, p, t) = U_0(q, \lambda(t)) + U_1(q, p, t)$ ，其中考虑到了在绝热捷径和等温捷径中我们施加的辅助势包含动量 p 。在欠阻尼情况下，粒子的惯性的影响不能忽略，哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2} + U_0(q, \lambda(t)) + U_1(q, p, t) \quad (3-12)$$

哈密顿量的全微分为

$$dH = \left(\dot{p} p + \dot{q} \frac{\partial U_0}{\partial q} + \dot{p} \mathbb{I} 1 P U_1 p + \dot{q} \mathbb{I} 1 P U_1 q \right) dt + \left(\lambda \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} + \mathbb{I} 1 P U_1 t \right) dt \quad (3-13)$$

这提示我们定义沿着相轨迹 $(q(t), p(t))$ 的能量差^[8]

$$\Delta e \equiv H(t_f) - H(t_i), \quad (3-14)$$

输入功

$$w \equiv \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\dot{\lambda} \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} + \mathbb{I} 1 P U_1 t \right) \quad (3-15)$$

这也与传统的随机热力学对轨道功的定义相符合。^[27,31-32]。还有吸收的热量

$$q \equiv \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\dot{p} p + \dot{q} \frac{\partial U}{\partial q} + p \mathbb{I} 1 P U p \right). \quad (3-16)$$

相轨连接了初时刻 t_i 对应的相点 (q_i, p_i) 和末时刻 t_f 对应的相点 (q_f, p_f) 。显然，对于每条相轨有

$$\Delta e = w + q \quad (3-17)$$

而系统的分布函数 $\rho(q, p, t)$ 由推广的福克-普朗克-克拉马斯方程 (2-59) 决定。在知道了 $\rho(q, p, t)$ 之后就可以计算以上式子 (3-15)-(3-17) 的系综平均，这和文献^[33-35] 的步骤是类似的。得到能量差和输入功的系综平均为

$$\Delta E \equiv \langle \Delta e \rangle = \int dq \int dp (H \rho) \Big|_{t_i}^{t_f}, \quad (3-18)$$

和

$$W \equiv \langle w \rangle = \int_{t_i}^{t_f} dt \int dq \int dp \left[\rho \left(\dot{\lambda} \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} + \mathbb{I} 1 P U_1 t \right) \right]. \quad (3-19)$$

对于吸收的热量的系综平均，由于存在 \dot{q} 和 \dot{p} 我们不好直接积分，需要做进一步的推导。系综平均为

$$Q = \int_{t_i}^{t_f} \langle (\dot{x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{p} \hat{\mathbf{p}}) \cdot \nabla H \rangle dt \quad (3-20)$$

为了方便，上式 (3-22) 我们用了 $(\dot{x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{p} \hat{\mathbf{p}}) \cdot \nabla H = \dot{p} p + \dot{q} \frac{\partial U}{\partial q} + p \mathbb{I} 1 P U p$ 。现在分两步对上式 (3-20) 进行平均。

第一步，对系综中在 t 时刻经过 x 且动量为 p 的轨道进行平均（不懂至以下），得到

$$\langle \dot{x} | x, p, t \rangle = \frac{J_x}{\rho}, \quad \langle \dot{p} | x, p, t \rangle = \frac{J_p}{\rho} \quad (3-21)$$

其中 J_x , J_p 代表式 (2-59) 所定义的流矢量 J 的 q 分量和 p 分量。

第二步，利用分布函数 $\rho(q, p, t)$ 对所有的 q 和 p 进行系综平均。于是，系统与热浴的热交换为

$$Q = \int_{t_i}^{t_f} dt \int dq \int dp (J \cdot \nabla H) \quad (3-22)$$

再将流矢量 J 的定义代入上式 (3-22)，不难得到

$$Q = - \int_{t_i}^{t_f} dt \int dq \int dp \left[\gamma \rho \left(p + \frac{\partial U}{\partial p} \right) \left(p + \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{1}{\beta \rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \right] \quad (3-23)$$

3.2 类卡诺循环热机模型

考虑一个由绝热捷径与等温捷径构成的类卡诺循环热机，它通过由一个依赖于时间的谐振子势 $U_0(q, \lambda(t)) = q^2/2\lambda(t)^2$ ，来驱动布朗粒子对外做功。

在绝热捷径中，由于系统不与任何热浴接触，故没有热交换， $Q = 0$, $\Delta E = W$ 。也没有过阻尼的情况，即惯性的影响不能忽略。由于在绝热捷径中，系统的初末状态依然是正则平衡态。初末的分布函数分别为式 (2-36) 和式 (2-38)，所以，我们依然可以用式 (3-18) 来计算能量差，于是

$$\begin{aligned} W &= \Delta E \\ &= \int dq \int dp \left(\frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2\lambda^2} q^2 \right) \rho \Big|_{t_i}^{t_f} \\ &= \beta_{t_f}^{-1} - \beta_{t_i}^{-1} \end{aligned} \quad (3-24)$$

在等温捷径中，由于系统与热浴接触，可以分过阻尼和欠阻尼两种情况进行讨论。

3.2.1 过阻尼布朗粒子构成的类卡诺循环热机

利用式 (3-7), (3-8), (3-11) 可以计算过阻尼布朗粒子的在等温捷径过程中的能量差 ΔE 、输入功 W 、吸收热 Q 。注意到根据式 (2-57), $U = U_0 + U_1 = q^2/2\lambda(t)^2 - \gamma\dot{\lambda}(t)q^2/2\lambda(t)$ ，又根据 (2-48) 的假设, $\rho(q, t) = e^{\beta[F(\lambda(t)) - q^2/2\lambda(t)^2]}$, $F(\lambda) \equiv -\beta^{-1} \ln \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta q^2/2\lambda(t)^2} dq \right]$ 。于是不难得到，能量差（似乎可以根据辅助势满足的微风方程直接计算，省去中间步骤，可以考虑）

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int dq \left[\rho \left(\frac{1}{2\lambda^2} q^2 - \frac{\gamma\dot{\lambda}}{2\lambda} q^2 \right) \right] \Big|_{t_i}^{t_f} \\ &= \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\gamma\dot{\lambda}}{2\lambda} \right) \int \rho q^2 dq \Big|_{t_i}^{t_f} \\ &= \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\gamma\dot{\lambda}}{2\lambda} \right) \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \frac{1}{\lambda} \int e^{-\frac{\beta}{2\lambda^2} q^2} q^2 dq \Big|_{t_i}^{t_f} \\ &= \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\gamma\dot{\lambda}}{2\lambda} \right) \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \frac{1}{\lambda} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\sqrt{\frac{\beta}{2\lambda}} \right)^{-3} \Big|_{t_i}^{t_f} \\ &= \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\gamma\dot{\lambda}}{2\lambda} \right) \frac{\lambda^2}{\beta} \Big|_{t_i}^{t_f} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-25)$$

其中最后一步用到了对 $\lambda(t)$ 的限制条件 (2-53)。注意到，和经典中理想气体的等温过程相似，粒子的能量没有变化。接下来计算输入功

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int dq \left[\rho \left(-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda^3} q^2 - \frac{\gamma \dot{\lambda}}{2\lambda} q^2 + \frac{\gamma \dot{\lambda}^2}{2\lambda^2} q^2 \right) \right] \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left(-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda^3} - \frac{\gamma \dot{\lambda}}{2\lambda} + \frac{\gamma \dot{\lambda}^2}{2\lambda^2} \right) \int \rho q^2 dq \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left(-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda^3} - \frac{\gamma \dot{\lambda}}{2\lambda} + \frac{\gamma \dot{\lambda}^2}{2\lambda^2} \right) \frac{\lambda^2}{\beta} \\
 &= \beta^{-1} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} - \frac{\gamma \dot{\lambda}}{2} + \frac{\gamma \dot{\lambda}^2}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{3-26}$$

再来看看吸收的热量

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int dq \left[-\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda^2} q - \frac{\gamma \dot{\lambda}}{\lambda} q \right) \left(\left(\frac{1}{\lambda^2} q - \frac{\gamma \dot{\lambda}}{\lambda} q \right) \rho - \frac{1}{\lambda^2} q \rho \right) \right] \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\gamma \dot{\lambda}}{\lambda} \right) \frac{\gamma \dot{\lambda}}{\lambda} \int \rho q^2 dq \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\gamma \dot{\lambda}}{\lambda} \right) \frac{\gamma \dot{\lambda}}{\lambda} \frac{\lambda^2}{\beta} \\
 &= \beta^{-1} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} - \gamma \dot{\lambda}^2 \right) \\
 &= \beta^{-1} \ln \frac{\lambda_f}{\lambda_i} - \beta^{-1} \gamma \int_{t_i}^{t_f} dt \dot{\lambda}^2
 \end{aligned} \tag{3-27}$$

不难验证有热平衡关系 $\Delta E = W + Q$ ，接下来我们分析过阻尼布朗粒子构成的类卡诺热机的各个过程。

如图3.1所示，这个循环由如下四个过程组成。点 1, 2, 3, 4 代表了系统的四个状态，这

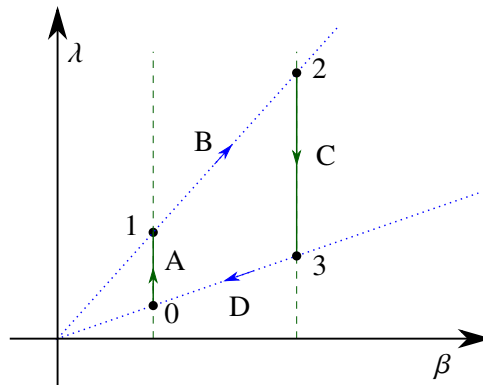


图 3.1 热力学循环过程。点线对应于式 (2-41)，竖直虚线对应于等温。0, 1, 2, 3 代表循环中的四个状态，A, B, C, D 代表四个过程。各个过程所用的时间分别为 t_1, t_2, t_3, t_4

四个状态对应的参数如下表3.1所示。

A. 等温膨胀

表 3.1 循环过程中各个状态所对应的参数

状态	时间 t	(等效) 温度 β^{-1}	势能参数 λ
0	$0(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)$	β_h^{-1}	λ_0
1	t_1	β_h^{-1}	λ_1
2	$t_1 + t_2$	β_c^{-1}	λ_2
3	$t_1 + t_2 + t_3$	β_c^{-1}	λ_3

在上图3.1中, 由实线连接的 $0 \rightarrow 1$ 代表了由等温捷径实现的“等温膨胀”过程。正如在第2章第2.2.2节所阐释的, 参数 λ 表征了系统的空间尺度, 而该过程中参数 λ 变大了, 故把 A 过程称为等温膨胀过程。在 A 过程中, 系统与高温热源 β_h^{-1} 接触。可以由式 (3-27) 计算 A 过程系统吸收的能量, 又鉴于在这个过程中由式 (3-25) 知有 $\Delta E_A = W_A + Q_A = 0$, 所以

$$\Delta E_A = 0, -W_A = Q_A = \beta_h^{-1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \beta_h^{-1} C_h[\lambda(\tau) \lambda_h] \frac{1}{t_1} \quad (3-28)$$

其中 $C_h[\lambda_h(\tau)] \equiv \gamma \int_0^1 dt \left(\frac{d\lambda_h}{d\tau} \right)^2$, $\lambda_h(\tau) \equiv \lambda(t_1 \tau)$

B. 绝热膨胀

图3.1中由虚线连接的 $1 \rightarrow 2$ 就是由绝热捷径所联系的“绝热膨胀”过程, 膨胀一词也同样基于参数 λ 的增长。需要注意的是, 在这个过程中我们只知道初末状态 1, 2 的等效温度 β_1, β_2 , 中间过程的等效温度我们并不清楚, 这也是我们用虚线作图的原因。好在, 中间的过程的等效温度的知道与否并不影响我们接下来的讨论。根据绝热捷径过程中的关系式 (2-41), 有

$$\frac{\lambda_2}{\beta_c} = \frac{\lambda_1}{\beta_h} \quad (3-29)$$

绝热捷径 B 过程中的能量差 ΔE_B 吸收热 Q_B , 输入功 W_B 正如本章开始所讨论的那样,

$$W_B = \Delta E_B = (\beta_c^{-1} - \beta_h^{-1}), Q_B = 0 \quad (3-30)$$

C. 等温压缩

在上图3.1中, 由实线连接的 $2 \rightarrow 3$ 代表了由等温捷径实现的“等温压缩”过程。在 A 过程中, 系统与低温热源 β_c^{-1} 接触。和 A 过程的讨论类似, 不难得到

$$\Delta E_C = 0, -W_C = Q_C = \beta_c^{-1} \ln \frac{\lambda_3}{\lambda_2} - \beta_c^{-1} C_c[\lambda_c(\tau)] \frac{1}{t_3} \quad (3-31)$$

其中 $C_c[\lambda_c(\tau)] \equiv \beta_c^{-1} \gamma \int_0^1 d\tau \left(\frac{d\lambda_c}{d\tau} \right)^2$, $\lambda_c(\tau) \equiv \lambda(t_3 \tau + t_2 + t_1)$

D. 绝热压缩

图3.1中由虚线连接的 $3 \rightarrow 0$ 就是由绝热捷径所联系的“绝热压缩”过程。同样，根据(2-41)，有

$$\frac{\lambda_3}{\beta_c} = \frac{\lambda_0}{\beta_h} \quad (3-32)$$

而且和 B 过程类似，不难得到

$$W_D = \Delta E_D = (\beta_h^{-1} - \beta_c^{-1}), Q_D = 0 \quad (3-33)$$

我们将各个过程的能量变化、输入功和吸收热总结如下表3.2

表 3.2 循环过程中的能量变化

过程	能量差	输入功	吸收热
A	0	$-\beta_h^{-1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + \beta_h^{-1} C_h \frac{1}{t_1}$	$\beta_h^{-1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \beta_h^{-1} C_h \frac{1}{t_1}$
B	$(\beta_c^{-1} - \beta_h^{-1})$	$(\beta_c^{-1} - \beta_h^{-1})$	0
C	0	$-\beta_c^{-1} \ln \frac{\lambda_3}{\lambda_2} + \beta_c^{-1} C_c \frac{1}{t_3}$	$\beta_c^{-1} \ln \frac{\lambda_3}{\lambda_2} - \beta_c^{-1} C_c \frac{1}{t_3}$
D	$(\beta_h^{-1} - \beta_c^{-1})$	$(\beta_h^{-1} - \beta_c^{-1})$	0

在分析完了整个循环的各个过程之后，来分析这个类卡诺循环热机的效率与功率。先看效率 η ，整个循环只有在 A 过程中从高温热源吸热 Q_A ，而在 C 过程中发热 Q_C 给低温热源。于是效率为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} \\ &= 1 - \frac{\beta_c^{-1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + \beta_c^{-1} C_c \frac{1}{t_3}}{\beta_h^{-1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \beta_h^{-1} C_h \frac{1}{t_1}} \end{aligned} \quad (3-34)$$

其中考虑到由式(3-29)和式(3-32)得 $\ln \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = -\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ 现在考虑功率 P ，由于一个循环的做功和绝热过程无关，但功率却与绝热过程的时间成反比。好在我们对绝热过程的时间并没有限制，原则上这个时间可以任意短。所以以下的讨论中只考虑 $t_2 + t_4 \ll t_1 + t_3$ 时的情况，有

$$\begin{aligned} P &= -\frac{W}{t_1 + t_3} \\ &= \frac{Q_A + Q_C}{t_1 + t_3} \\ &= \frac{(\beta_h^{-1} - \beta_c^{-1}) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - (\beta_h^{-1} C_h \frac{1}{t_1} + \beta_c^{-1} C_c \frac{1}{t_3})}{t_1 + t_3} \end{aligned} \quad (3-35)$$

现在考虑使得功率 P 最大时的效率 η ，可以通过优化 t_1, t_3 使得 P 最大，只需使

$\mathbb{I}1PPt_1 = \mathbb{I}1PPt_3 = 0$ 即可，解得

$$\begin{cases} \frac{1}{t_1} = \frac{(\beta_h^{-1} - \beta_c^{-1}) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{2(\beta_h^{-1} C_h + \sqrt{\beta_c^{-1} \beta_h^{-1} C_c C_h})} \\ \frac{1}{t_3} = \frac{(\beta_h^{-1} - \beta_c^{-1}) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{2(\beta_c^{-1} C_c + \sqrt{\beta_c^{-1} \beta_h^{-1} C_c C_h})} \end{cases} \quad (3-36)$$

于是，效率可以写为

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{\beta_c^{-1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + \beta_c^{-1} C_c \frac{(\beta_h^{-1} - \beta_c^{-1}) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{2(\beta_c^{-1} C_c + \sqrt{\beta_c^{-1} \beta_h^{-1} C_c C_h})}}{\beta_h^{-1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \beta_h^{-1} C_h \frac{(\beta_h^{-1} - \beta_c^{-1}) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{2(\beta_h^{-1} C_h + \sqrt{\beta_c^{-1} \beta_h^{-1} C_c C_h})}} \\ &= 1 - \frac{\beta_c^{-1} + \beta_c^{-1} C_c \frac{(\beta_h^{-1} - \beta_c^{-1})}{2(\beta_c^{-1} C_c + \sqrt{\beta_c^{-1} \beta_h^{-1} C_c C_h})}}{\beta_h^{-1} - \beta_h^{-1} C_h \frac{(\beta_h^{-1} - \beta_c^{-1})}{2(\beta_h^{-1} C_h + \sqrt{\beta_c^{-1} \beta_h^{-1} C_c C_h})}} \\ &= \frac{\eta_c \left[\sqrt{\chi(1 - \eta_c)} + 1 \right]}{2 - \eta_c + 2\sqrt{\chi(1 - \eta_c)}} \end{aligned} \quad (3-37)$$

其中 $\eta_c \equiv 1 - \frac{\beta_c^{-1}}{\beta_h^{-1}}$ 是卡诺效率，而 $\chi \equiv \frac{C_c[\lambda_c(\tau)]}{C_h[\lambda_h(\tau)]}$ 。

现在唯一的问题就是如何把 χ 用 η_c 表示出来，这一点可以这么考虑。对于上式 (3-35) 分子的第二项，除去一个负号外始终是大于零的。既然我们关心功率最大时的效率，就应当考虑选取适当的 $\lambda_c(\tau)$, $\lambda_h(\tau)$ 的形式，使得关于它们的泛函 $C_c[\lambda_c(\tau)]$, $C_h[\lambda_h(\tau)]$ 都取最小值。这一点可以使用变分的方法求得，分别得到

$$\frac{d\lambda_c}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\lambda_h}{d\tau} = 0 \quad (3-38)$$

可见函数 $\lambda_c(\tau)$, $\lambda_h(\tau)$ 是线性函数，于是容易知道

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 - \lambda_0)^2} \\ &= (1 - \eta_c)^{-2} \end{aligned} \quad (3-39)$$

只需将上式 (3-39) 带入到式 (3-42)，我们最终得到了过阻尼类卡诺热机在最大功率时的效率

$$\eta = \frac{\eta_c \left(1 + \sqrt{1 - \eta_c} \right)}{(2 - \eta_c) \sqrt{1 - \eta_c} + 2} \quad (3-40)$$

Series $\left[\frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{(2-x)\sqrt{1-x}+2}, \{x, 0, 5\} \right]$

3.2.2 欠阻尼布朗粒子构成的类卡诺循环热机

同样地，利用式 (3-18), (3-19), (3-22) 可以计算欠阻尼布朗粒子的在等温捷径过程中的能量差 ΔE 、输入功 W 、吸收热 Q 。注意到根据式 (2-57),

$$\begin{aligned} U &= U_0 + U_1 \\ &= \frac{q^2}{2\lambda(t)^2} - \frac{\dot{\lambda}(t)}{2\gamma\lambda(t)} [(p - \gamma q)^2 + q^2/\lambda(t)^2] \end{aligned} \quad (3-41)$$

又根据 (2-61) 的假设, $\rho(q, t) = e^{\beta(F - \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2\lambda^2})}$ 其中, $F(\lambda) \equiv -\beta^{-1} \ln \int dq \int dp e^{\beta(F - \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2\lambda^2})}$ 。于是可以计算得到, 能量差 (似乎可以根据辅助势满足的微分方程直接计算, 省去中间步骤, 可以考虑)

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int dq \int dp \rho \left(\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2\lambda(t)^2} - \frac{\dot{\lambda}(t)}{2\gamma\lambda(t)} [(p - \gamma q)^2 + q^2/\lambda(t)^2] \right) \Big|_{t_i}^{t_f} \\ &= \left[1 - \frac{\dot{\lambda}}{2\gamma\lambda} (2 + \gamma^2 \lambda^2) \right] \beta^{-1} \Big|_{t_i}^{t_f} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-42)$$

这个结果和过阻尼的情况下没有区别, 为简单计, 由于已知 $Q + W = \Delta E = 0$, 不再计算输入功, 直接计算吸收热

$$\begin{aligned} Q &= - \int_{t_i}^{t_f} dt \int dq \int dp \left[\gamma \rho \left(p + \frac{\partial U}{\partial p} \right) \left(p + \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{1}{\beta \rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \right] \\ &= \beta^{-1} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} - \frac{1}{\gamma} \frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2} - \gamma \dot{\lambda}^2 \right) \end{aligned} \quad (3-43)$$

接下来的处理和上节 3.2.1 过阻尼情况类似, 不再赘述。热机的效率 η 为

$$\eta = 1 + \frac{\beta_c^{-1} \ln \frac{\lambda_3}{\lambda_2} - \beta_c^{-1} \int_{t_2}^{t_3} dt \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2} + \gamma \dot{\lambda}^2 \right)}{\beta_h^{-1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \beta_h^{-1} \int_0^{t_1} dt \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2} + \gamma \dot{\lambda}^2 \right)} \quad (3-44)$$

功率 P 为

$$\begin{aligned} P &= -\frac{W}{t_4} \\ &= \frac{Q_A + Q_C}{t_3} \\ &= \frac{\beta_h^{-1} \int_0^{t_1} dt (\dot{\lambda}/\lambda - \gamma \dot{\lambda}^2) + \beta_c^{-1} \int_{t_2}^{t_3} dt (\dot{\lambda}/\lambda - \gamma \dot{\lambda}^2)}{t_4} \end{aligned} \quad (3-45)$$

3.3 类卡诺循环热机的功、熵、能量损失

3.4 与其他热机的比较

插图索引

- 图 2.1 在一维盒子中的粒子的能壳。该粒子的能壳是一个矩形，当盒子的长度发生极小的改变时，矩形能壳也发生相应的改变。但矩形的体积不变…………… 6
- 图 3.1 热力学循环过程。点线对应于式 (2-41)，竖直虚线对应于等温。0, 1, 2, 3 代表循环中的四个状态，A, B, C, D 代表四个过程。各个过程所用的时间分别为 t_1, t_2, t_3, t_4 …………… 19

表格索引

表 3.1	循环过程中各个状态所对应的参数	20
表 3.2	循环过程中的能量变化	21

公式索引

公式 2-1	3
公式 2-2	3
公式 2-3	3
公式 2-4	4
公式 2-5	4
公式 2-6	4
公式 2-7	4
公式 2-8	4
公式 2-9a.....	4
公式 2-9b.....	4
公式 2-10.....	5
公式 2-11.....	5
公式 2-12.....	5
公式 2-13a.....	5
公式 2-13b.....	5
公式 2-14.....	5
公式 2-15.....	5
公式 2-16.....	5
公式 2-17.....	6
公式 2-18.....	6
公式 2-19.....	7
公式 2-20.....	7
公式 2-21.....	7
公式 2-22.....	7
公式 2-23.....	7
公式 2-24.....	7
公式 2-25.....	7
公式 2-26.....	8
公式 2-27.....	8
公式 2-28.....	8
公式 2-29.....	8
公式 2-30.....	8

公式 2-31.....	8
公式 2-32.....	9
公式 2-33.....	9
公式 2-34.....	9
公式 2-35.....	9
公式 2-36.....	10
公式 2-37.....	10
公式 2-38.....	10
公式 2-39.....	10
公式 2-40.....	10
公式 2-41.....	10
公式 2-42.....	11
公式 2-43.....	11
公式 2-44.....	11
公式 2-45.....	11
公式 2-46.....	12
公式 2-47.....	12
公式 2-48.....	12
公式 2-49.....	12
公式 2-50.....	12
公式 2-51.....	12
公式 2-52.....	12
公式 2-53.....	12
公式 2-54.....	13
公式 2-55.....	13
公式 2-56.....	13
公式 2-57.....	13
公式 2-58.....	13
公式 2-59.....	13
公式 2-60.....	13
公式 2-61.....	14
公式 2-62.....	14
公式 2-63.....	14
公式 2-64.....	14
公式 2-65.....	14
公式 3-1	15

公式 3-2 15

公式 3-3 15

公式 3-4 15

公式 3-5 15

公式 3-6 15

公式 3-7 16

公式 3-8 16

公式 3-9 16

公式 3-10..... 16

公式 3-11..... 16

公式 3-12..... 16

公式 3-13..... 16

公式 3-14..... 16

公式 3-15..... 17

公式 3-16..... 17

公式 3-17..... 17

公式 3-18..... 17

公式 3-19..... 17

公式 3-20..... 17

公式 3-21..... 17

公式 3-22..... 17

公式 3-23..... 17

公式 3-24..... 18

公式 3-25..... 18

公式 3-26..... 19

公式 3-27..... 19

公式 3-28..... 20

公式 3-29..... 20

公式 3-30..... 20

公式 3-31..... 20

公式 3-32..... 21

公式 3-33..... 21

公式 3-34..... 21

公式 3-35..... 21

公式 3-36..... 22

公式 3-37..... 22

公式 3-38.....	22
公式 3-39.....	22
公式 3-40.....	22
公式 3-41.....	23
公式 3-42.....	23
公式 3-43.....	23
公式 3-44.....	23
公式 3-45.....	23
公式 A-1	33
公式 A-2	34

参考文献

- [1] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程: 热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005
- [2] Curzon F L, Ahlborn B. Efficiency of a Carnot engine at maximum power output[J]. American Journal of Physics, 1975.
- [3] Schmiedl T, Seifert U. Efficiency at maximum power: An analytically solvable model for stochastic heat engines[J]. EPL, 2008.
- [4] Tu Z C. Efficiency at maximum power of Feynman's ratchet as a heat engine[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2008.
- [5] Tu Z C. Abstract models for heat engines[J]. Frontiers of Physics, 2020, 16(3): 33202.
- [6] Del Campo A, Goold J, Paternostro M. More bang for your buck: Super-adiabatic quantum engines[J]. Scientific Reports, 2014, 4: 1-6.
- [7] Deng J, Wang Q H, Liu Z, et al. Boosting work characteristics and overall heat-engine performance via shortcuts to adiabaticity: Quantum and classical systems[J]. Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 2013, 88(6): 1-8.
- [8] Tu Z C. Stochastic heat engine with the consideration of inertial effects and shortcuts to adiabaticity[J]. Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 2014, 89(5): 1-9.
- [9] Li G, Quan H T, Tu Z C. Shortcuts to isothermality and nonequilibrium work relations[J]. Physical Review E, 2017, 96(1): 1-11.
- [10] Chen X, Ruschhaupt A, Schmidt S, et al. Fast optimal frictionless atom cooling in harmonic traps: Shortcut to adiabaticity[J]. Physical Review Letters, 2010, 104(6): 1-4.
- [11] Demirplak M, Rice S A. Adiabatic population transfer with control fields[J]. Journal of Physical Chemistry A, 2003, 107(46): 9937-9945.
- [12] Berry M V. Transitionless quantum driving[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009, 42(36): 1-9.
- [13] Griffiths D J, Schroeter D F. Introduction to Quantum Mechanics[M]. Cambridge University Press, 2018: 546-550
- [14] Jarzynski C. Generating shortcuts to adiabaticity in quantum and classical dynamics[J]. Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics, 2013, 88(4): 1-5.
- [15] 刘川. 理论力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2019
- [16] Jarzynski C. Geometric phases and anholonomy for a class of chaotic classical systems[J]. Physical Review Letters, 1995, 74(10): 1732-1735.
- [17] H. 戈德斯坦. 经典力学[M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 1986: 480-483
- [18] Muga J G, Chen X, Ibáez S, et al. Transitionless quantum drivings for the harmonic oscillator[J]. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 2010, 43(8).
- [19] Tennyson J L, Cary J R, Escande D F. Change of the adiabatic invariant due to separatrix crossing[J]. Physical Review Letters, 1986, 56(20): 2117-2120.

- [20] Cary J R, Escande D F, Tennyson J L. Adiabatic-invariant change due to separatrix crossing[J]. *Physical Review A*, 1986, 34(5): 4256-4275.
- [21] Hannay J H. Accuracy loss of action invariance in adiabatic change of a one-freedom hamiltonian[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1986, 19(17): L1067-L1072.
- [22] Miller M A, Reinhardt W P. Efficient free energy calculations by variationally optimized metric scaling: Concepts and applications to the volume dependence of cluster free energies and to solid-solid phase transitions[J]. *Journal of Chemical Physics*, 2000, 113(17): 7035-7046.
- [23] Vaikuntanathan S, Jarzynski C. Escorted free energy simulations: Improving convergence by reducing dissipation[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(19): 8-11.
- [24] Martínez I A, Petrosyan A, Guéry-Odelin D, et al. Engineered swift equilibration of a Brownian particle [J]. *Nature Physics*, 2016, 12(9): 843-846.
- [25] Le Cunuder A, Martínez I A, Petrosyan A, et al. Fast equilibrium switch of a micro mechanical oscillator [J/OL]. *Applied Physics Letters*, 2016, 109(11). <http://dx.doi.org/10.1063/1.4962825>.
- [26] Seifert U. Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines[J]. *Reports on Progress in Physics*, 2012, 75(12).
- [27] Sekimoto K. Stochastic energetics: volume 799[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2010
- [28] Gardiner C W. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences[M]. Third ed. Berlin Heidelberg: Springer, 2004
- [29] Deffner S, Jarzynski C, del Campo A. Classical and quantum shortcuts to adiabaticity for scale-invariant driving[J]. *Physical Review X*, 2014, 4(2): 1-19.
- [30] Del Campo A. Shortcuts to adiabaticity by counterdiabatic driving[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(10): 1-5.
- [31] Jarzynski C. Nonequilibrium equality for free energy differences[J]. *Physical Review Letters*, 1997, 78(14): 2690-2693.
- [32] Sekimoto K. Kinetic characterization of heat bath and the energetics of thermal ratchet models[J/OL]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1997, 66(5): 1234-1237. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.66.1234>.
- [33] Seifert U. Entropy production along a stochastic trajectory and an integral fluctuation theorem[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(4).
- [34] Shizume K. Heat generation required by information erasure[J/OL]. *Phys. Rev. E*, 1995, 52: 3495-3499. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.52.3495>.
- [35] Bizarro P S, Report B. Boltzmann ' s H theorem for systems with frictional dissipation: volume 032102 [Z]. 2011: 1-4.

致 谢

衷心感谢导师 xxx 教授和物理系 xxx 副教授对本人的精心指导。他们的言传身教将使我终生受益。

在美国麻省理工学院化学系进行九个月的合作研究期间，承蒙 xxx 教授热心指导与帮助，不胜感激。感谢 xx 实验室主任 xx 教授，以及实验室全体老师和同学们的热情帮助和支持！本课题承蒙国家自然科学基金资助，特此致谢。

感谢 L^AT_EX 和 BNUTHE^SIS^[2]，帮我节省了不少时间。

附录 A 外文资料原文

The title of the English paper

Abstract: As one of the most widely used techniques in operations research, *mathematical programming* is defined as a means of maximizing a quantity known as *objective function*, subject to a set of constraints represented by equations and inequalities. Some known subtopics of mathematical programming are linear programming, nonlinear programming, multiobjective programming, goal programming, dynamic programming, and multilevel programming^[1].

It is impossible to cover in a single chapter every concept of mathematical programming. This chapter introduces only the basic concepts and techniques of mathematical programming such that readers gain an understanding of them throughout the book^[2,3].

A.1 Single-Objective Programming

The general form of single-objective programming (SOP) is written as follows,

$$\begin{cases} \max & f(x) \\ \text{subject to:} & \\ & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (123)$$

which maximizes a real-valued function f of $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ subject to a set of constraints.

Definition A.1: In SOP, we call x a decision vector, and x_1, x_2, \dots, x_n decision variables. The function f is called the objective function. The set

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p\} \quad (456)$$

is called the feasible set. An element x in S is called a feasible solution.

Definition A.2: A feasible solution x^* is called the optimal solution of SOP if and only if

$$f(x^*) \geq f(x) \quad (\text{A-1})$$

for any feasible solution x .

One of the outstanding contributions to mathematical programming was known as the Kuhn-Tucker conditionsA-2. In order to introduce them, let us give some definitions. An inequality

constraint $g_j(x) \leq 0$ is said to be active at a point x^* if $g_j(x^*) = 0$. A point x^* satisfying $g_j(x^*) \leq 0$ is said to be regular if the gradient vectors $\nabla g_j(x)$ of all active constraints are linearly independent.

Let x^* be a regular point of the constraints of SOP and assume that all the functions $f(x)$ and $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, p$ are differentiable. If x^* is a local optimal solution, then there exist Lagrange multipliers λ_j , $j = 1, 2, \dots, p$ such that the following Kuhn-Tucker conditions hold,

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla g_j(x^*) = 0 \\ \lambda_j g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p. \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

If all the functions $f(x)$ and $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, p$ are convex and differentiable, and the point x^* satisfies the Kuhn-Tucker conditions (A-2), then it has been proved that the point x^* is a global optimal solution of SOP.

A.1.1 Linear Programming

If the functions $f(x)$, $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, p$ are all linear, then SOP is called a *linear programming*.

The feasible set of linear is always convex. A point x is called an extreme point of convex set S if $x \in S$ and x cannot be expressed as a convex combination of two points in S . It has been shown that the optimal solution to linear programming corresponds to an extreme point of its feasible set provided that the feasible set S is bounded. This fact is the basis of the *simplex algorithm* which was developed by Dantzig as a very efficient method for solving linear programming.

Table 1 This is an example for manually numbered table, which would not appear in the list of tables

Network Topology		# of nodes	# of clients			Server
GT-ITM	Waxman Transit-Stub	600	2%	10%	50%	Max. Connectivity
Inet-2.1		6000				
Xue	Rui	Ni	BNUThesis			
	ABCDEF					

Roughly speaking, the simplex algorithm examines only the extreme points of the feasible set, rather than all feasible points. At first, the simplex algorithm selects an extreme point as the initial point. The successive extreme point is selected so as to improve the objective function value. The procedure is repeated until no improvement in objective function value can be made. The last extreme point is the optimal solution.

A.1.2 Nonlinear Programming

If at least one of the functions $f(x), g_j(x), j = 1, 2, \dots, p$ is nonlinear, then SOP is called a *nonlinear programming*.

A large number of classical optimization methods have been developed to treat special-structural nonlinear programming based on the mathematical theory concerned with analyzing the structure of problems.



Figure 1 This is an example for manually numbered figure, which would not appear in the list of figures

Now we consider a nonlinear programming which is confronted solely with maximizing a real-valued function with domain \mathcal{R}^n . Whether derivatives are available or not, the usual strategy is first to select a point in \mathcal{R}^n which is thought to be the most likely place where the maximum exists. If there is no information available on which to base such a selection, a point is chosen at random. From this first point an attempt is made to construct a sequence of points, each of which yields an improved objective function value over its predecessor. The next point to be added to the sequence is chosen by analyzing the behavior of the function at the previous points. This construction continues until some termination criterion is met. Methods based upon this strategy are called *ascent methods*, which can be classified as *direct methods*, *gradient methods*, and *Hessian methods* according to the information about the behavior of objective function f . Direct methods require only that the function can be evaluated at each point. Gradient methods require the evaluation of first derivatives of f . Hessian methods require the evaluation of second derivatives. In fact, there is no superior method for all problems. The efficiency of a method is very much dependent upon the objective function.

A.1.3 Integer Programming

Integer programming is a special mathematical programming in which all of the variables are assumed to be only integer values. When there are not only integer variables but also conventional continuous variables, we call it *mixed integer programming*. If all the variables are assumed either 0 or 1, then the problem is termed a *zero-one programming*. Although integer programming can be solved by an *exhaustive enumeration* theoretically, it is impractical to solve realistically sized integer programming problems. The most successful algorithm so far found to solve integer

programming is called the *branch-and-bound enumeration* developed by Balas (1965) and Dakin (1965). The other technique to integer programming is the *cutting plane method* developed by Gomory (1959).

Uncertain Programming (BaoDing Liu, 2006.2)

References

NOTE: These references are only for demonstration. They are not real citations in the original text.

- [1] Donald E. Knuth. The T_EXbook. Addison-Wesley, 1984. ISBN: 0-201-13448-9
- [2] Paul W. Abrahams, Karl Berry and Kathryn A. Hargreaves. T_EX for the Impatient. Addison-Wesley, 1990. ISBN: 0-201-51375-7
- [3] David Salomon. The advanced T_EXbook. New York : Springer, 1995. ISBN:0-387-94556-3

附录 B 外文资料的调研阅读报告或书面翻译

英文资料的中文标题

摘要：本章为外文资料翻译内容。如果有摘要可以直接写上来，这部分好像没有明确的规定。

B.1 单目标规划

北冥有鱼，其名为鲲。鲲之大，不知其几千里也。化而为鸟，其名为鹏。鹏之背，不知其几千里也。怒而飞，其翼若垂天之云。是鸟也，海运则将徙于南冥。南冥者，天池也。

p(y|x) = p(x,y) / p(x) = p(x|y)p(y) / p(x) (123)

吾生也有涯，而知也无涯。以有涯随无涯，殆已！已而为知者，殆而已矣！为善无近名，为恶无近刑，缘督以为经，可以保身，可以全生，可以养亲，可以尽年。

B.1.1 线性规划

庖丁为文惠君解牛，手之所触，肩之所倚，足之所履，膝之所倚，砉然响然，奏刀騞然，莫不中音，合于桑林之舞，乃中经首之会。

表 1 这是手动编号但不出现在索引中的一个表格例子

Network Topology		# of nodes	# of clients			Server
GT-ITM	Waxman Transit-Stub	600	2%	10%	50%	Max. Connectivity
Inet-2.1		6000				
Xue	Rui	Ni	BNU ^T HESIS			
	ABCDEF					

文惠君曰：“嘻，善哉！技盖至此乎？”庖丁释刀对曰：“臣之所好者道也，进乎技矣。始臣之解牛之时，所见无非全牛者；三年之后，未尝见全牛也；方今之时，臣以神遇而不以目视，官知止而神欲行。依乎天理，批大郤，导大窾，因其固然。技经肯綮之未尝，而况大瓠乎！良庖岁更刀，割也；族庖月更刀，折也；今臣之刀十九年矣，所解数千牛矣，而刀刃若新发于硎。彼节者有间而刀刃者无厚，以无厚入有间，恢恢乎其于游刃必有余地矣。是以十九年而刀刃若新发于硎。虽然，每至于族，吾见其难为，怵然为戒，视为止，行为迟，动刀甚微，謦然已解，如土委地。提刀而立，为之而四顾，为之踌躇满志，善刀而藏之。”

文惠君曰：“善哉！吾闻庖丁之言，得养生焉。”

B.1.2 非线性规划

孔子与柳下季为友，柳下季之弟名曰盗跖。盗跖从卒九千人，横行天下，侵暴诸侯。穴室枢户，驱人牛马，取人妇女。贪得忘亲，不顾父母兄弟，不祭先祖。所过之邑，大国守城，小国入保，万民苦之。孔子谓柳下季曰：“夫为人父者，必能诏其子；为人兄者，必能教其弟。若父不能诏其子，兄不能教其弟，则无贵父子兄弟之亲矣。今先生，世之才士也，弟为盗跖，为天下害，而弗能教也，丘窃为先生羞之。丘请为先生往说之。”



图 1 这是手动编号但不出现索引中的图片的例子

柳下季曰：“先生言为人父者必能诏其子，为人兄者必能教其弟，若子不听父之诏，弟不受兄之教，虽今先生之辩，将奈之何哉？且跖之为人也，心如涌泉，意如飘风，强足以距敌，辩足以饰非。顺其心则喜，逆其心则怒，易辱人以言。先生必无往。”

孔子不听，颜回为驭，子贡为右，往见盗跖。

B.1.3 整数规划

盗跖乃方休卒徒大山之阳，脍人肝而铺之。孔子下车而前，见谒者曰：“鲁人孔丘，闻将军高义，敬再拜谒者。”谒者入通。盗跖闻之大怒，目如明星，发上指冠，曰：“此夫鲁国之巧伪人孔丘非邪？为我告之：尔作言造语，妄称文、武，冠枝木之冠，带死牛之胁，多辞缪说，不耕而食，不织而衣，摇唇鼓舌，擅生是非，以迷天下之主，使天下学士不反其本，妄作孝弟，而侥幸于封侯富贵者也。子之罪大极重，疾走归！不然，我将以子肝益昼铺之膳。”

附录 C 其它附录

前面两个附录主要是给本科生做例子。其它附录的内容可以放到这里，当然如果你愿意，可以把这部分也放到独立的文件中，然后将其 `\input` 到主文件中。

在学期间参加课题的研究成果

个人简历

xxxx 年 xx 月 xx 日出生于 xx 省 xx 县。

xxxx 年 9 月考入 xx 大学 xx 系 xx 专业, xxxx 年 7 月本科毕业并获得 xx 学士学位。

xxxx 年 9 月免试进入 xx 大学 xx 系攻读 xx 学位至今。

发表的学术论文

- [1] Yang Y, Ren T L, Zhang L T, et al. Miniature microphone with silicon- based ferroelectric thin films. Integrated Ferroelectrics, 2003, 52:229-235. (SCI 收录, 检索号:758FZ.)
- [2] 杨轶, 张宁欣, 任天令, 等. 硅基铁电微声学器件中薄膜残余应力的研究. 中国机械工程, 2005, 16(14):1289-1291. (EI 收录, 检索号:0534931 2907.)
- [3] 杨轶, 张宁欣, 任天令, 等. 集成铁电器件中的关键工艺研究. 仪器仪表学报, 2003, 24(S4):192-193. (EI 源刊.)
- [4] Yang Y, Ren T L, Zhu Y P, et al. PMUTs for handwriting recognition. In press. (已被 Integrated Ferroelectrics 录用. SCI 源刊.)
- [5] Wu X M, Yang Y, Cai J, et al. Measurements of ferroelectric MEMS microphones. Integrated Ferroelectrics, 2005, 69:417-429. (SCI 收录, 检索号:896KM)
- [6] 贾泽, 杨轶, 陈兢, 等. 用于压电和电容微麦克风的体硅腐蚀相关研究. 压电与声光, 2006, 28(1):117-119. (EI 收录, 检索号:06129773469)
- [7] 伍晓明, 杨轶, 张宁欣, 等. 基于 MEMS 技术的集成铁电硅微麦克风. 中国集成电路, 2003, 53:59-61.

研究成果

- [1] 任天令, 杨轶, 朱一平, 等. 硅基铁电微声学传感器畴极化区域控制和电极连接的方法: 中国, CN1602118A. (中国专利公开号)
- [2] Ren T L, Yang Y, Zhu Y P, et al. Piezoelectric micro acoustic sensor based on ferroelectric materials: USA, No.11/215, 102. (美国发明专利申请号)

综合论文训练记录表

学生姓名		学号		班级	
论文题目					
主要内容以及进度安排	<div>指导教师签字：_____</div> <div>考核组组长签字：_____</div> <div>年 月 日</div>				
中期考核意见	<div>考核组组长签字：_____</div> <div>年 月 日</div>				

指导教师评语	<div>指导教师签字：_____</div> <div>年 月 日</div>
评阅教师评语	<div>评阅教师签字：_____</div> <div>年 月 日</div>
答辩小组评语	<div>答辩小组组长签字：_____</div> <div>年 月 日</div>

总成绩：_____

教学负责人签字：_____

年 月 日