等温捷径与绝热捷径构成的类卡诺热机的效率与功率

龚政楠

北京师范大学

2021 年 3 月 23 日

目录

引言：热机的功率与效率问题

引言：热机的功率与效率问题

- 1824，卡诺指出 [1]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\mathrm{c}} = 1 - \frac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{h}}}$

引言：热机的功率与效率问题

- 1824，卡诺指出 [1]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\rm c} = 1 - \frac{T_{\rm c}}{T_{\rm h}}$
- 1975 年，Curzon 和 Ahlborn 研究了内可逆热机 [2]，得到了该热机在最大功率下的效率为 $\eta_{\rm CA} = 1 - \sqrt{1-\eta_{\rm c}}$

引言：热机的功率与效率问题

- 1824，卡诺指出 [1]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\mathrm{c}} = 1 - \frac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{h}}}$
- 1975 年，Curzon 和 Ahlborn 研究了内可逆热机 [2]，得到了该热机在最大功率下的效率为 $\eta_{\mathrm{CA}} = 1 - \sqrt{1 - \eta_{\mathrm{c}}}$
- 2008 年，T. Schmiedl 和 U. Seifert 提出了布朗随机热机模型 [3]，最大功率下的效率为 $\frac{\eta_{\mathrm{c}}}{2 - \frac{1}{2}\eta_{\mathrm{c}}}$

引言：热机的功率与效率问题

- 1824，卡诺指出 [1]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\mathrm{c}} = 1 - \frac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{h}}}$
- 1975 年，Curzon 和 Ahlborn 研究了内可逆热机 [2]，得到了该热机在最大功率下的效率为 $\eta_{\mathrm{CA}} = 1 - \sqrt{1 - \eta_{\mathrm{c}}}$
- 2008 年，T. Schmiedl 和 U. Seifert 提出了布朗随机热机模型 [3]，最大功率下的效率为 $\frac{\eta_{\mathrm{c}}}{2 - \frac{1}{2}\eta_{\mathrm{c}}}$
- 同年，涂展春推导出费曼棘轮热机 [4] 在最大功率下的效率 $\frac{\eta_{\mathrm{c}}^2}{\eta_{\mathrm{c}} - (1-\eta_{\mathrm{c}})\ln(1-\eta_{\mathrm{c}})}$. [5]

引言：热机的功率与效率问题

- 1824，卡诺指出 [1]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\mathrm{c}} = 1 - \frac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{h}}}$
- 1975 年，Curzon 和 Ahlborn 研究了内可逆热机 [2]，得到了该热机在最大功率下的效率为 $\eta_{\mathrm{CA}} = 1 - \sqrt{1-\eta_{\mathrm{c}}}$
- 2008 年，T. Schmiedl 和 U. Seifert 提出了布朗随机热机模型 [3]，最大功率下的效率为 $\frac{\eta_{\mathrm{c}}}{2-\frac{1}{2}\eta_{\mathrm{c}}}$
- 同年，涂展春推导出费曼棘轮热机 [4] 在最大功率下的效率 $\frac{\eta_{\mathrm{c}}^2}{\eta_{\mathrm{c}}-(1-\eta_{\mathrm{c}})\ln(1-\eta_{\mathrm{c}})}$. [5]
- 2013 年，涂展春在 Schmiedl 和 Seifert 工作 [3] 的基础上，考虑了他们在过阻尼情况下忽略的惯性的影响，构建了一种类卡洛热机 [6]. 发现这种随机热机在最大功率下的效率等于 η_{CA}

绝热捷径

为了在有限时间内实现平衡态的转化，Demirplak and Rice [7] 和 Berry [8] 独立发展出了绝热捷径的策略。

绝热捷径

为了在有限时间内实现平衡态的转化，Demirplak and Rice [7] 和 Berry [8] 独立发展出了绝热捷径的策略。
对于依赖于时间缓变的 $H_0(t)$，有绝热定理 [9]

$$
\begin{gathered}
|\psi(t)\rangle = |n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)}, \\
\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\mathrm{d}t', \quad \gamma_n(t) = i\int_0^t \langle n(t')|\partial_{t'} n(t')\rangle \mathrm{d}t'
\end{gathered}
\tag{1}
$$

绝热捷径

为了在有限时间内实现平衡态的转化，Demirplak and Rice [7] 和 Berry [8] 独立发展出了绝热捷径的策略。
对于依赖于时间缓变的 $H_0(t)$，有绝热定理 [9]

$$
\begin{gathered}
|\psi(t)\rangle = |n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)}, \\
\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\mathrm{d}t', \quad \gamma_n(t) = i\int_0^t \langle n(t')|\partial_{t'} n(t')\rangle \mathrm{d}t'
\end{gathered}
\tag{1}
$$

若有 $H(t)$ 使得绝热定理严格成立

绝热捷径

为了在有限时间内实现平衡态的转化，Demirplak and Rice [7] 和 Berry [8] 独立发展出了绝热捷径的策略。
对于依赖于时间缓变的 $H_0(t)$，有绝热定理 [9]

$$
\begin{gathered}
|\psi(t)\rangle = |n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)}, \\
\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\mathrm{d}t', \quad \gamma_n(t) = i\int_0^t \langle n(t')|\partial_{t'} n(t')\rangle \mathrm{d}t'
\end{gathered} \tag{1}
$$

若有 $H(t)$ 使得绝热定理严格成立

$$
\begin{aligned}
H(t) &= H_0(t) + i\hbar\sum_m \left(|\partial_t m\rangle\langle m| - \langle m \mid \partial_t m\rangle | m\rangle\langle m|\right) \\
&\equiv H_0 + H_1
\end{aligned} \tag{2}
$$

绝热捷径

在经典的情形下，对于随时间缓变的 $H_0(t)$，也可以引入辅助哈密顿量 $H_1(t)$，使得绝热不变量 [10] 严格守恒

$$I(E, \boldsymbol{\lambda}) \equiv \int \mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \theta \left[E - H_0(z; \boldsymbol{\lambda}) \right] \tag{3}$$

绝热捷径

在经典的情形下，对于随时间缓变的 $H_0(t)$，也可以引入辅助哈密顿量 $H_1(t)$，使得绝热不变量 [10] 严格守恒

$$I(E,\boldsymbol{\lambda}) \equiv \int \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\theta\left[E - H_0(z;\boldsymbol{\lambda})\right] \tag{3}$$

谐振子势场中的辅助势

根据 Jarzynski 的计算 [11]，对于依赖于时间的谐振子势

$$H_0(\boldsymbol{\eta};\lambda(t)) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2\lambda(t)^2} \tag{4}$$

绝热捷径

在经典的情形下，对于随时间缓变的 $H_0(t)$，也可以引入辅助哈密顿量 $H_1(t)$，使得绝热不变量 [10] 严格守恒

$$I(E,\boldsymbol{\lambda}) \equiv \int \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\theta\left[E - H_0(z;\boldsymbol{\lambda})\right] \tag{3}$$

谐振子势场中的辅助势

根据 Jarzynski 的计算 [11]，对于依赖于时间的谐振子势

$$H_0(\boldsymbol{\eta};\lambda(t)) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2\lambda(t)^2} \tag{4}$$

其相应的辅助势为

$$H_1(\boldsymbol{\eta};\lambda(t)) = \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda}qp \tag{5}$$

利用绝热捷径实现平衡态的转化

平衡态的转化

设初态为平衡态

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{2\pi\lambda_i} \exp\left[-\beta_i H_0\left(t_i\right)\right] \tag{6}$$

利用绝热捷径实现平衡态的转化

平衡态的转化

设初态为平衡态

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{2\pi\lambda_i} \exp\left[-\beta_i H_0\left(t_i\right)\right] \tag{6}$$

假设末态为等效温度为 β_f 的平衡态

$$\rho_f = \frac{\beta_f}{2\pi\lambda_f} \exp\left[-\beta_f H_0\left(t_f\right)\right] \tag{7}$$

利用绝热捷径实现平衡态的转化

平衡态的转化

设初态为平衡态

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{2\pi\lambda_i} \exp\left[-\beta_i H_0\left(t_i\right)\right] \tag{6}$$

假设末态为等效温度为 β_f 的平衡态

$$\rho_f = \frac{\beta_f}{2\pi\lambda_f} \exp\left[-\beta_f H_0\left(t_f\right)\right] \tag{7}$$

鉴于 $\rho_f = \rho_i$，$\frac{\mathrm{d}H_0(t)}{\mathrm{d}t} = -H_0(t)\frac{\mathrm{d}\ln\lambda(t)}{\mathrm{d}t}$，得到 [6]

$$\frac{\beta_f}{\lambda_f} = \frac{\beta_i}{\lambda_i} \tag{8}$$

等温捷径

为了实现等温平衡态之间的相互转化，类似于绝热捷径，李耿等人[12]发展出了等温捷径的策略。

等温捷径

为了实现等温平衡态之间的相互转化，类似于绝热捷径，李耿等人[12]发展出了等温捷径的策略。

为系统施加一个额外的辅助势场，使得哈密顿量成为

$$H(q,p,t) = H_0(q,p,\lambda(t)) + U_1(q,p,t) \tag{9}$$

等温捷径

为了实现等温平衡态之间的相互转化，类似于绝热捷径，李耿等人 [12] 发展出了等温捷径的策略。
为系统施加一个额外的辅助势场，使得哈密顿量成为

$$H(q,p,t)=H_0(q,p,\lambda(t))+U_1(q,p,t) \tag{9}$$

分布函数 $\rho(q,p,t)$ 的演化由福克-普朗克方程决定

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0\\ &\boldsymbol{J}\equiv\rho\left(p+\frac{\partial U}{\partial p}\right)\hat{\mathbf{q}}-\rho\left(\gamma p+\frac{\partial U}{\partial q}+\frac{\partial U}{\partial p}+\frac{\gamma}{\rho\beta}\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)\hat{\mathbf{p}}\end{aligned} \tag{10}$$

等温捷径

等温平衡态的转化

系统在原哈密顿量 $H_0(q,p,\lambda(t))$ 下的瞬时平衡态

$$\rho(q,p,t)=\mathrm{e}^{\beta[F(\lambda(t))-H_0(q,p,\lambda(t))]} \tag{11}$$

等温捷径

等温平衡态的转化

系统在原哈密顿量 $H_0(q,p,\lambda(t))$ 下的瞬时平衡态

$$\rho(q,p,t)=\mathrm{e}^{\beta[F(\lambda(t))-H_0(q,p,\lambda(t))]} \tag{11}$$

要使系统始终保持瞬时平衡态，将上式(11)代入方程(10)，得到 [12]

$$\frac{\gamma}{\beta}\frac{\partial^2 U_1}{\partial p^2}-\gamma p\frac{\partial U_1}{\partial p}+\frac{\partial U_0}{\partial q}\frac{\partial U_1}{\partial p}-p\frac{\partial U_1}{\partial q}=\left(\frac{dF}{d\lambda}-\frac{\partial U_0}{\partial\lambda}\right)\dot{\lambda} \tag{12}$$

等温捷径

等温平衡态的转化

系统在原哈密顿量 $H_0(q,p,\lambda(t))$ 下的瞬时平衡态

$$\rho(q,p,t)=\mathrm{e}^{\beta[F(\lambda(t))-H_0(q,p,\lambda(t))]} \tag{11}$$

要使系统始终保持瞬时平衡态，将上式(11)代入方程(10)，得到 [12]

$$\frac{\gamma}{\beta}\frac{\partial^2 U_1}{\partial p^2}-\gamma p\frac{\partial U_1}{\partial p}+\frac{\partial U_0}{\partial q}\frac{\partial U_1}{\partial p}-p\frac{\partial U_1}{\partial q}=\left(\frac{dF}{d\lambda}-\frac{\partial U_0}{\partial\lambda}\right)\dot{\lambda} \tag{12}$$

利用上式(12)，对依赖于时间的谐振子势 $U_0=q^2/2\lambda(t)^2$

$$U_1(q,p,t)=-\frac{\dot{\lambda}(t)}{2\gamma\lambda(t)}\left[(p-\gamma q)^2+q^2/\lambda(t)^2\right] \tag{13}$$

布朗粒子能量学

布朗粒子能量学

哈密顿量为 $H = \frac{p^2}{2} + U_0(q, \lambda(t)) + U_1(q, p, t)$，其全微分

$$\mathrm{d}H = \left(\dot{p}p + \dot{q}\frac{\partial U_0}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial U_1}{\partial p} + \dot{q}\frac{\partial U_1}{\partial q}\right)\mathrm{d}t + \left(\dot{\lambda}\frac{\partial U_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial U_1}{\partial t}\right)\mathrm{d}t \tag{14}$$

布朗粒子能量学

哈密顿量为 $H=\frac{p^2}{2}+U_0(q,\lambda(t))+U_1(q,p,t)$，其全微分

$$\mathrm{d}H=\left(\dot{p}p+\dot{q}\frac{\partial U_0}{\partial q}+\dot{p}\frac{\partial U_1}{\partial p}+\dot{q}\frac{\partial U_1}{\partial q}\right)\mathrm{d}t+\left(\dot{\lambda}\frac{\partial U_0}{\partial \lambda}+\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)\mathrm{d}t \tag{14}$$

定义沿着轨道的能量差 Δe [6]、输入功 w [13,14,15]、吸收热 $\bar{q}$

$$\Delta e\equiv H(t_f)-H(t_i)\,,\quad w\equiv\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\left(\dot{\lambda}\frac{\partial U_0}{\partial\lambda}+\frac{\partial U_1}{\partial t}\right),$$
$$\bar{q}\equiv\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\left(\dot{p}p+\dot{q}\frac{\partial U}{\partial q}+\dot{p}\frac{\partial U}{\partial p}\right) \tag{15}$$

布朗粒子能量学

对 Δe, w, $\bar{q}$ 求系综平均得

$$\Delta E \equiv \langle \Delta e \rangle = \int \mathrm{d}q \int \mathrm{d}p (H\rho) \Big|_{t_i}^{t_f} \tag{16}$$

$$W \equiv \langle w \rangle = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}q \int \mathrm{d}p \left[\rho \left(\dot{\lambda} \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial U_1}{\partial t} \right) \right] \tag{17}$$

$$Q \equiv \langle \bar{q} \rangle = -\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}q \int \mathrm{d}p \gamma \rho \left(p + \frac{\partial U}{\partial p} \right) \left(p + \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{1}{\beta \rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \tag{18}$$

布朗粒子能量学

布朗粒子能量学——依赖于时间谐振子势

依赖于时间的谐振子势 $U_0 = q^2/2\lambda(t)^2$，此时 $U = U_0 + U_1$，得

布朗粒子能量学

布朗粒子能量学——依赖于时间谐振子势

依赖于时间的谐振子势 $U_0 = q^2/2\lambda(t)^2$，此时 $U = U_0 + U_1$，得

- 过阻尼情况

$$\Delta E = \beta_f^{-1} - \beta_i^{-1} = 0 \tag{19}$$

$$Q = -W = \beta^{-1} \ln \frac{\lambda_f}{\lambda_i} - \beta^{-1} \gamma \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \dot{\lambda}^2 \tag{20}$$

布朗粒子能量学

布朗粒子能量学——依赖于时间谐振子势

依赖于时间的谐振子势 $U_0 = q^2/2\lambda(t)^2$，此时 $U = U_0 + U_1$，得

- 过阻尼情况

$$\Delta E = \beta_f^{-1} - \beta_i^{-1} = 0 \tag{19}$$

$$Q = -W = \beta^{-1} \ln \frac{\lambda_f}{\lambda_i} - \beta^{-1}\gamma \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \dot{\lambda}^2 \tag{20}$$

- 欠阻尼情况

$$\Delta E = \beta_f^{-1} - \beta_i^{-1} = 0 \tag{21}$$

$$Q = -W = \beta^{-1} \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} - \frac{1}{\gamma} \frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2} - \gamma \dot{\lambda}^2 \right) \tag{22}$$

类卡诺热机模型

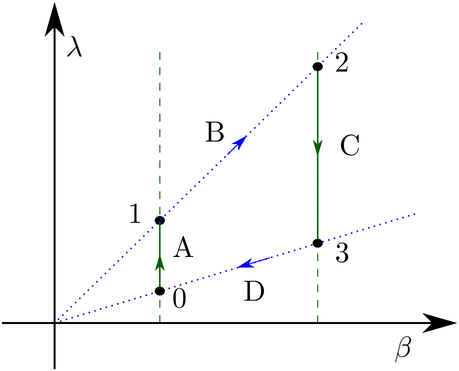

图 1: 类卡诺热机模型

类卡诺热机模型

类卡诺热机循环

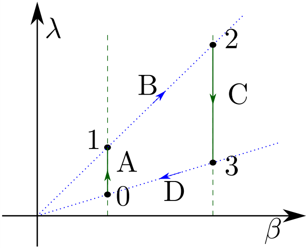

图 1: 类卡诺热机模型

类卡诺热机模型

类卡诺热机循环

- A. 等温膨胀

$$Q_{\mathrm{A}} = \beta_{\mathrm{h}}^{-1}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \beta_{\mathrm{h}}^{-1}C_{\mathrm{h}}[\lambda_{\mathrm{h}}(\tau)]\frac{1}{t_1} \quad (23)$$

其中 $C_{\mathrm{h}}[\lambda_{\mathrm{h}}(\tau)] \equiv \gamma\int_0^1 \mathrm{d}\tau\left(\frac{\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{h}}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2, \lambda_{\mathrm{h}}(\tau) \equiv \lambda(t_1\tau)$

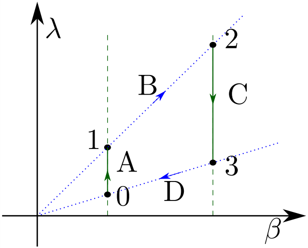

图 1: 类卡诺热机模型

类卡诺热机模型

类卡诺热机循环

- A. 等温膨胀

$$Q_{\mathrm{A}}=\beta_{\mathrm{h}}^{-1}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}-\beta_{\mathrm{h}}^{-1}C_{\mathrm{h}}[\lambda_{\mathrm{h}}(\tau)]\frac{1}{t_1}\quad(23)$$

其中 $C_{\mathrm{h}}[\lambda_{\mathrm{h}}(\tau)]\equiv$
$\gamma\int_0^1 \mathrm{d}\tau\left(\frac{\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{h}}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2,\lambda_{\mathrm{h}}(\tau)\equiv\lambda(t_1\tau)$

- B. 绝热膨胀

$$W_{\mathrm{B}}=\Delta E_{\mathrm{B}}=(\beta_{\mathrm{c}}^{-1}-\beta_{\mathrm{h}}^{-1}),\ \ Q_{\mathrm{B}}=0\quad(24)$$

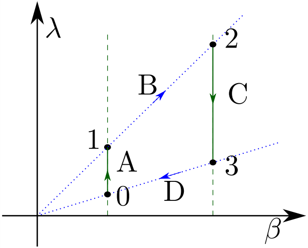

图 1: 类卡诺热机模型

类卡诺热机模型

类卡诺热机循环

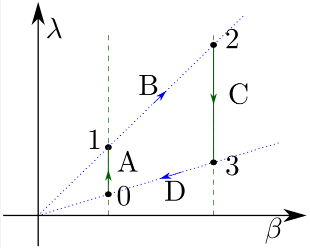

图 1: 类卡诺热机模型

类卡诺热机模型

类卡诺热机循环

- C. 等温压缩

$$Q_{\mathrm{C}} = \beta_{\mathrm{c}}^{-1} \ln \frac{\lambda_3}{\lambda_2} - \beta_{\mathrm{c}}^{-1} C_{\mathrm{c}}[\lambda_{\mathrm{c}}(\tau)] \frac{1}{t_3} \quad (25)$$

其中 $C_{\mathrm{c}}[\lambda_{\mathrm{c}}(\tau)] \equiv \gamma \int_0^1 \mathrm{d}\tau \left(\frac{\mathrm{d}\lambda_c}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$,$\lambda_{\mathrm{c}}(\tau) \equiv \lambda(t_3\tau + t_2 + t_1)$

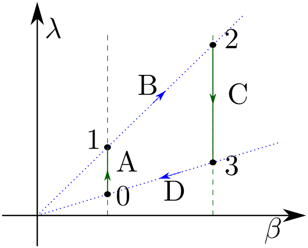

图 1: 类卡诺热机模型

类卡诺热机模型

类卡诺热机循环

- C. 等温压缩

$$Q_{\mathrm{C}} = \beta_{\mathrm{c}}^{-1} \ln \frac{\lambda_3}{\lambda_2} - \beta_{\mathrm{c}}^{-1} C_{\mathrm{c}}[\lambda_{\mathrm{c}}(\tau)] \frac{1}{t_3} \quad (25)$$

其中 $C_{\mathrm{c}}[\lambda_{\mathrm{c}}(\tau)] \equiv \gamma \int_0^1 \mathrm{d}\tau \left(\frac{\mathrm{d}\lambda_c}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$,$\lambda_{\mathrm{c}}(\tau) \equiv \lambda(t_3\tau + t_2 + t_1)$

- D. 绝热压缩

$$W_{\mathrm{D}} = \Delta E_{\mathrm{D}} = (\beta_{\mathrm{h}}^{-1} - \beta_{\mathrm{c}}^{-1}), \quad Q_{\mathrm{D}} = 0 \quad (26)$$

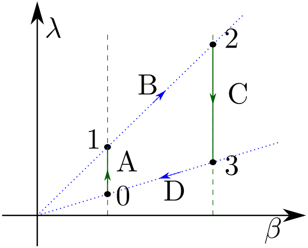

图 1: 类卡诺热机模型

类卡诺热机的功率与效率

则类卡诺热机的功率为

$$P = \frac{\left(\beta_{\mathrm{h}}^{-1} - \beta_{\mathrm{c}}^{-1}\right) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \left(\beta_{\mathrm{h}}^{-1} C_{\mathrm{h}} \frac{1}{t_1} + \beta_{\mathrm{c}}^{-1} C_{\mathrm{c}} \frac{1}{t_3}\right)}{t_1 + t_3} \tag{27}$$

类卡诺热机的功率与效率

则类卡诺热机的功率为

$$P = \frac{\left(\beta_{\mathrm{h}}^{-1} - \beta_{\mathrm{c}}^{-1}\right) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \left(\beta_{\mathrm{h}}^{-1} C_{\mathrm{h}} \frac{1}{t_1} + \beta_{\mathrm{c}}^{-1} C_{\mathrm{c}} \frac{1}{t_3}\right)}{t_1 + t_3} \tag{27}$$

效率为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{C}}}{Q_{\mathrm{A}}} \\ &= 1 - \frac{\beta_{\mathrm{c}}^{-1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + \beta_{\mathrm{c}}^{-1} C_{\mathrm{c}} \frac{1}{t_3}}{\beta_{\mathrm{h}}^{-1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \beta_{\mathrm{h}}^{-1} C_{\mathrm{h}} \frac{1}{t_1}} \end{aligned} \tag{28}$$

类卡诺热机的功率与效率

类卡诺热机的效率

优化 t_1，t_3 使得功率最大得

$$\eta^* = \frac{\eta_\mathrm{c}}{2 - \eta_\mathrm{c} \frac{\sqrt{\chi(1-\eta_\mathrm{c})}-1}{\chi(1-n_\mathrm{c})-1}} \tag{29}$$

其中 $\eta_\mathrm{c} \equiv 1 - \frac{\beta_\mathrm{c}^{-1}}{\beta_\mathrm{h}^{-1}}$ 是卡诺效率，而 $\chi \equiv \frac{C_\mathrm{c}[\lambda_\mathrm{c}(\tau)]}{C_\mathrm{h}[\lambda_\mathrm{h}(\tau)]}$。

类卡诺热机的功率与效率

类卡诺热机的效率

优化 t_1，t_3 使得功率最大得

$$\eta^* = \frac{\eta_c}{2-\eta_c\frac{\sqrt{\chi(1-\eta_c)}-1}{\chi(1-n_c)-1}} \tag{29}$$

其中 $\eta_c \equiv 1-\frac{\beta_c^{-1}}{\beta_h^{-1}}$ 是卡诺效率，而 $\chi \equiv \frac{C_c[\lambda_c(\tau)]}{C_h[\lambda_h(\tau)]}$。
根据功率的表达式(27)，对 $C_h[\lambda_h(\tau)]$ 和 $C_c[\lambda_c(\tau)]$ 求泛函极值可得

$$\chi = (1-\eta_c)^{-2} \tag{30}$$

类卡诺热机的功率与效率

布朗粒子类卡诺热机在最大功率时的效率

将上式(30)代入效率的表达式(29)可得

$$\eta^* = \frac{\eta_c}{3 - \left(\eta_c + \sqrt{1 - \eta_c}\right)} \tag{31}$$

总结与展望

目前做了的工作

总结与展望

目前做了的工作

- 对于欠阻尼和过阻尼等温捷径过程，以及绝热捷径过程，得到了计算能量差、输入功、吸收热的表达式

总结与展望

目前做了的工作

- 对于欠阻尼和过阻尼等温捷径过程，以及绝热捷径过程，得到了计算能量差、输入功、吸收热的表达式
- 利用等温捷径和绝热捷径构造了，在过阻尼情况下构造了类卡诺热机

总结与展望

目前做了的工作

- 对于欠阻尼和过阻尼等温捷径过程，以及绝热捷径过程，得到了计算能量差、输入功、吸收热的表达式
- 利用等温捷径和绝热捷径构造了，在过阻尼情况下构造了类卡诺热机
- 对于过阻尼情况，计算出了该热机在最大功率时的效率

总结与展望

以后要做的工作

总结与展望

以后要做的工作

- 在欠阻尼情况下，构造出类卡诺热机，并计算该热机在最大功率时的效率

总结与展望

以后要做的工作

- 在欠阻尼情况下，构造出类卡诺热机，并计算该热机在最大功率时的效率
- 将构造的类卡诺热机的效率与其他热机进行比较，包括 Curzon 和 Ahlborn 构造的内可逆热机 [2]，T. Schmiedl 和 U. Seifert 构造的布朗随机热机模型 [3]，涂展春构建的类卡洛热机 [6]，Campo 等人构建的奥托热机 [16]

THANK YOU!

[1] 赵凯华 and 罗蔚茵. 新概念物理教程：热学. 高等教育出版社, 北京, 2005.

[2] F. L. Curzon and B. Ahlborn. Efficiency of a Carnot engine at maximum power output. *American Journal of Physics*, 1975.

[3] T. Schmiedl and U. Seifert. Efficiency at maximum power: An analytically solvable model for stochastic heat engines. *EPL*, 2008.

[4] Z. C. Tu. Efficiency at maximum power of Feynman's ratchet as a heat engine. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2008.

[5] Zhan-Chun Tu. Abstract models for heat engines. *Frontiers of Physics*, 16(3):33202, 2020.

[6] Z. C. Tu. Stochastic heat engine with the consideration of inertial effects and shortcuts to adiabaticity. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 89(5):1–9, 2014.

[7] Mustafa Demirplak and Stuart A. Rice. Adiabatic population transfer with control fields. *Journal of Physical Chemistry A*, 107(46):9937–9945, 2003.

[8] M. V. Berry. Transitionless quantum driving. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(36):1–9, 2009.

[9] David J. Griffiths and Darrell F. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2018.

[10] 刘川. *理论力学*. 北京大学出版社, 北京, 2019.

[11] Christopher Jarzynski. Generating shortcuts to adiabaticity in quantum and classical dynamics. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 88(4):1–5, 2013.

[12] Geng Li, H. T. Quan, and Z. C. Tu. Shortcuts to isothermality and nonequilibrium work relations. *Physical Review E*, 96(1):1–11, 2017.

[13] K. Sekimoto. *Stochastic energetics*, volume 799. Springer, Berlin Heidelberg, 2010.

[14] C. Jarzynski. Nonequilibrium equality for free energy differences. *Physical Review Letters*, 78(14):2690–2693, 1997.

[15] Ken Sekimoto. Kinetic characterization of heat bath and the energetics of thermal ratchet models. *Journal of the Physical Society of Japan*, 66(5):1234–1237, may 1997.

[16] A. Del Campo, J. Goold, and M. Paternostro. More bang for your buck: Super-adiabatic quantum engines. *Scientific Reports*, 4:1–6, 2014.