等温捷径与绝热捷径构成的类卡诺热机的效率与功率

龚政楠

北京师范大学

2021 年 3 月 23 日

目录

引言：热机的功率与效率问题

引言：热机的功率与效率问题

- 1824，卡诺指出 [?]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\mathrm{C}} = 1 - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{h}}$

引言：热机的功率与效率问题

- 1824，卡诺指出 [?]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\rm C} = 1 - \frac{\rm c}{\rm h}$
- 1975 年，Curzon 和 Ahlborn 研究了内可逆热机 [?]，得到了该热机在最大功率下的效率为 $\eta_{\rm CA} = 1 - \sqrt{1 - \eta_{\rm C}}$

- 1824，卡诺指出[?]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\mathrm{C}} = 1 - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{h}}$
- 1975 年，Curzon 和 Ahlborn 研究了内可逆热机[?]，得到了该热机在最大功率下的效率为 $\eta_{\mathrm{CA}} = 1 - \sqrt{1 - \eta_{\mathrm{C}}}$
- 2008 年，T. Schmiedl 和 U. Seifert 提出了布朗随机热机模型[?]，最大功率下的效率为 $\frac{2\eta_{\mathrm{C}}}{4-\eta_{\mathrm{C}}}$

引言：热机的功率与效率问题

- 1824，卡诺指出 [?]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\mathrm{C}}=1-\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{h}}$
- 1975 年，Curzon 和 Ahlborn 研究了内可逆热机 [?]，得到了该热机在最大功率下的效率为 $\eta_{\mathrm{CA}}=1-\sqrt{1-\eta_{\mathrm{C}}}$
- 2008 年，T. Schmiedl 和 U. Seifert 提出了布朗随机热机模型 [?]，最大功率下的效率为 $\frac{2\eta_{\mathrm{C}}}{4-\eta_{\mathrm{C}}}$
- 同年，涂展春推导出费曼棘轮热机 [?] 在最大功率下的效率 $\frac{\eta_{\mathrm{C}}^2}{\eta_{\mathrm{C}}-(1-\eta_{\mathrm{C}})\ln(1-\eta_{\mathrm{C}})}$. [?]

- 1824，卡诺指出 [?]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\mathrm{C}} = 1 - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{h}}$
- 1975 年，Curzon 和 Ahlborn 研究了内可逆热机 [?]，得到了该热机在最大功率下的效率为 $\eta_{\mathrm{CA}} = 1 - \sqrt{1 - \eta_{\mathrm{C}}}$
- 2008 年，T. Schmiedl 和 U. Seifert 提出了布朗随机热机模型 [?]，最大功率下的效率为 $\frac{2\eta_{\mathrm{C}}}{4-\eta_{\mathrm{C}}}$
- 同年，涂展春推导出费曼棘轮热机 [?] 在最大功率下的效率 $\frac{\eta_{\mathrm{C}}^2}{\eta_{\mathrm{C}}-(1-\eta_{\mathrm{C}})\ln(1-\eta_{\mathrm{C}})}$. [?]
- 2013 年，涂展春在 Schmiedl 和 Seifert 工作 [?] 的基础上，考虑了他们在过阻尼情况下忽略的惯性的影响，构建了一种类卡洛热机 [?]. 发现这种随机热机在最大功率下的效率等于 η_{CA}

CA 内可逆热机模型

Curzon 和 Ahlborn 的假设

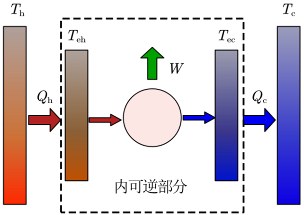

图 1: CA 内可逆热机

CA 内可逆热机模型

Curzon 和 Ahlborn 的假设

- 内可逆假设

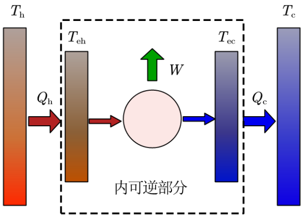

图 1: CA 内可逆热机

Curzon 和 Ahlborn 的假设

- 内可逆假设
- 绝热过程熵产生为零

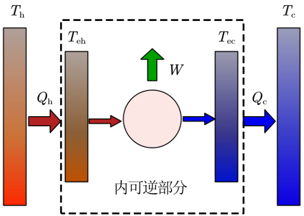

图 1: CA 内可逆热机

CA 内可逆热机模型

Curzon 和 Ahlborn 的假设

- 内可逆假设
- 绝热过程熵产生为零
- 绝热过程与等温过程所用的时间成正比，即循环总时间为 $t_0 = a(t_h + t_c)$

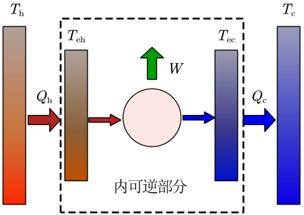

图 1: CA 内可逆热机

CA 内可逆热机模型

Curzon 和 Ahlborn 的假设

- 内可逆假设
- 绝热过程熵产生为零
- 绝热过程与等温过程所用的时间成正比，即循环总时间为 $t_0 = a(t_h + t_c)$
- 线性热传输假设，即

$$
\begin{aligned}
Q_h &= \kappa_h \left(T_h - T_{eh}\right) t_h \\
Q_c &= \kappa_c \left(T_{ec} - T_c\right) t_c
\end{aligned}
\tag{1}
$$

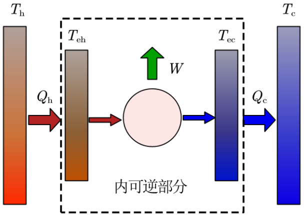

图 1: CA 内可逆热机

CA 热机的功率

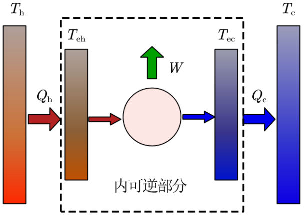

图 1: CA 内可逆热机

CA 内可逆热机模型

CA 热机的功率

输出功率

$$P(T_{\mathrm{eh}}, T_{\mathrm{ec}}) = \frac{T_{\mathrm{eh}} - T_{\mathrm{ec}}}{\frac{T_{\mathrm{eh}}}{a\kappa_h(T_h - T_{\mathrm{eh}})} + \frac{T_{\mathrm{ec}}}{a\kappa_c(T_{\mathrm{ec}} - T_c)}} \tag{2}$$

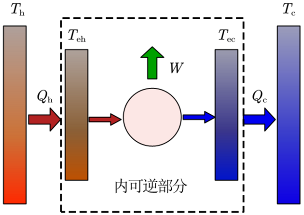

图 1: CA 内可逆热机

CA 内可逆热机模型

CA 热机的功率

输出功率

$$P(T_{\rm eh}, T_{\rm ec}) = \frac{T_{\rm eh} - T_{\rm ec}}{\frac{T_{\rm eh}}{a\kappa_h(T_h - T_{\rm eh})} + \frac{T_{\rm ec}}{a\kappa_c(T_{\rm ec} - T_c)}} \tag{2}$$

针对 $T_{\rm eh}, T_{\rm ec}$ 使功率取最大值

$$\begin{aligned} T^*_{\rm eh} &= \frac{\sqrt{\kappa_h T_h} + \sqrt{\kappa_c T_c}}{\sqrt{\kappa_h} + \sqrt{K_c}}\sqrt{T_h} \\ T^*_{\rm ec} &= \frac{\sqrt{\kappa_h T_h} + \sqrt{\kappa_c T_c}}{\sqrt{K_h} + \sqrt{\kappa_c}}\sqrt{T_c} \end{aligned} \tag{3}$$

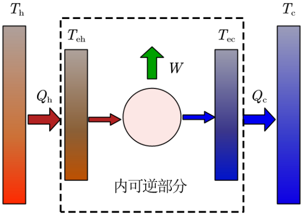

图 1: CA 内可逆热机

CA 热机在最大功率下的效率

根据 $\eta = 1 - T_{\mathrm{ec}}/T_{\mathrm{eh}}$ 就可以得到

$$\eta_{\mathrm{CA}} = 1 - \sqrt{1 - \eta_{\mathrm{C}}} \tag{4}$$

TU 布朗随机热机的假设

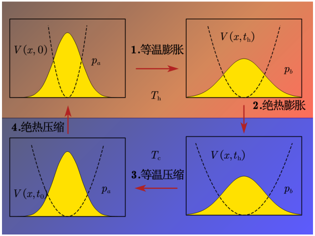

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机的假设

- 两个绝热过程是在瞬间完成的，
  $t_0 = (t_h + t_c)$

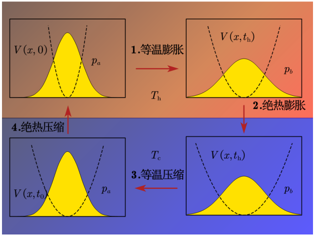

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机的假设

- 两个绝热过程是在瞬间完成的，$t_0 = (t_h + t_c)$
- 两个绝热过程中不可逆熵产生为零

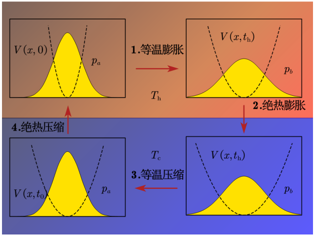

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机的假设

- 两个绝热过程是在瞬间完成的，$t_0 = (t_h + t_c)$
- 两个绝热过程中不可逆熵产生为零
- 过阻尼假设，不考虑惯性的影响

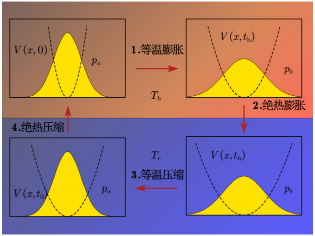

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机

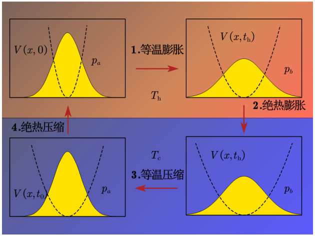

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机

平均功输出

$$-W=\left(T_{\mathrm{h}}-T_{\mathrm{c}}\right)\Delta S-\left(1/t_{\mathrm{h}}+1/t_{\mathrm{c}}\right)A_{\mathrm{irr}} \tag{5}$$

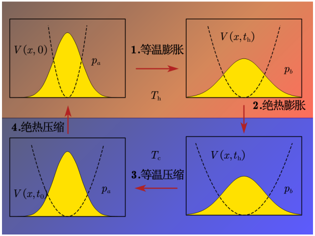

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机的功率

TU 布朗随机热机

平均功输出

$$-W = (T_{\mathrm{h}} - T_{\mathrm{c}})\,\Delta S - (1/t_{\mathrm{h}} + 1/t_{\mathrm{c}})\,A_{\mathrm{irr}} \tag{5}$$

吸收热

$$Q = T_{\mathrm{h}}\Delta S - A_{\mathrm{irr}}/t_{\mathrm{h}} \tag{6}$$

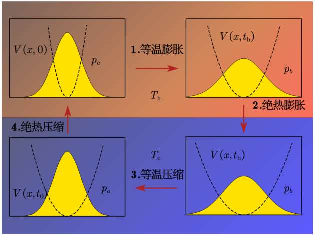

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机

平均功输出

$$-W=\left(T_{\mathrm{h}}-T_{\mathrm{c}}\right)\Delta S-\left(1/t_{\mathrm{h}}+1/t_{\mathrm{c}}\right)A_{\mathrm{irr}} \tag{5}$$

吸收热

$$Q=T_{\mathrm{h}}\Delta S-A_{\mathrm{irr}}/t_{\mathrm{h}} \tag{6}$$

功率

$$P=\frac{\left(T_{\mathrm{h}}-T_{\mathrm{c}}\right)\Delta S-\left(1/t_{\mathrm{h}}+1/t_{\mathrm{c}}\right)A_{\mathrm{irr}}}{t_{\mathrm{h}}+t_{\mathrm{c}}} \tag{7}$$

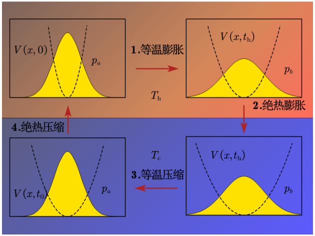

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机的效率

通过优化 t_1，t_2 不难得到，最大功率时的效率为

$$\eta^* = \frac{\eta_C}{2 - \eta_C/2} \tag{8}$$

绝热捷径

为了在有限时间内实现平衡态的转化，Demirplak and Rice [?] 和 Berry [?] 独立发展出了绝热捷径的策略。

绝热捷径

为了在有限时间内实现平衡态的转化，Demirplak and Rice [?] 和 Berry [?] 独立发展出了绝热捷径的策略。
依赖于时间缓变的 $H_0(t)$，绝热定理 [?]

$$|\psi(t)\rangle = |n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)},$$
$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\mathrm{d}t', \quad \gamma_n(t) = i\int_0^t \langle n(t')|\partial_{t'} n(t')\rangle \mathrm{d}t' \tag{9}$$

为了在有限时间内实现平衡态的转化，Demirplak and Rice [?] 和 Berry [?] 独立发展出了绝热捷径的策略。
依赖于时间缓变的 $H_0(t)$，绝热定理 [?]

$$\begin{gathered} |\psi(t)\rangle = |n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)}, \\ \theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\mathrm{d}t', \quad \gamma_n(t) = i\int_0^t \langle n(t')|\partial_{t'} n(t')\rangle \mathrm{d}t' \end{gathered} \tag{9}$$

若有 $H(t)$ 使得绝热定理严格成立

为了在有限时间内实现平衡态的转化，Demirplak and Rice [?] 和 Berry [?] 独立发展出了绝热捷径的策略。
依赖于时间缓变的 $H_0(t)$，绝热定理 [?]

$$\begin{gathered} |\psi(t)\rangle = |n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)}, \\ \theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\mathrm{d}t', \quad \gamma_n(t) = i\int_0^t \langle n(t')|\partial_{t'} n(t')\rangle \mathrm{d}t' \end{gathered} \tag{9}$$

若有 $H(t)$ 使得绝热定理严格成立

$$\begin{aligned} H(t) &= H_0(t) + i\hbar\sum_m \left(|\partial_t m\rangle\langle m| - \langle m \mid \partial_t m\rangle | m\rangle\langle m|\right) \\ &\equiv H_0 + H_1 \end{aligned} \tag{10}$$

绝热捷径

在经典的情形下，对于随时间缓变的 $H_0(t)$，也可以引入辅助哈密顿量 $H_1(t)$，使得绝热不变量严格守恒

$$I(E,\boldsymbol{\lambda}) \equiv \int \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\theta\left[E - H_0(z;\boldsymbol{\lambda})\right] \tag{11}$$

绝热捷径

在经典的情形下，对于随时间缓变的 $H_0(t)$，也可以引入辅助哈密顿量 $H_1(t)$，使得绝热不变量严格守恒

$$I(E,\boldsymbol{\lambda}) \equiv \int \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\theta\left[E - H_0(z;\boldsymbol{\lambda})\right] \tag{11}$$

谐振子势场中的辅助势

根据 Jarzynski 的计算 [?]，对于依赖于时间的谐振子势

$$H_0(\boldsymbol{\eta};\lambda(t)) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2\lambda(t)^2} \tag{12}$$

在经典的情形下，对于随时间缓变的 $H_0(t)$，也可以引入辅助哈密顿量 $H_1(t)$，使得绝热不变量严格守恒

$$I(E,\boldsymbol{\lambda}) \equiv \int \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\theta\left[E - H_0(z;\boldsymbol{\lambda})\right] \tag{11}$$

谐振子势场中的辅助势

根据 Jarzynski 的计算 [?]，对于依赖于时间的谐振子势

$$H_0(\boldsymbol{\eta};\lambda(t)) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2\lambda(t)^2} \tag{12}$$

其相应的辅助势为

$$H_1(\boldsymbol{\eta};\lambda(t)) = \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda}qp \tag{13}$$

考虑谐振子势式(??)，施加辅助哈密顿量之后的新哈密顿量为

$$H(t) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2\lambda(t)^2} + \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda(t)} qp, \tag{14}$$

利用绝热捷径实现平衡态的转化

考虑谐振子势式(??)，施加辅助哈密顿量之后的新哈密顿量为

$$H(t) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2\lambda(t)^2} + \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda(t)} qp, \tag{14}$$

可以得到运动方程

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} + \dfrac{\lambda(t)}{2\lambda(t)} q \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -2\dfrac{q}{\lambda^2(t)} - \dfrac{\dot{\lambda}(t)}{2\lambda(t)} p \end{cases} \tag{15}$$

平衡态的转化

设初态为平衡态

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{2\pi\lambda_i} \exp\left[-\beta_i H_0\left(t_i\right)\right] \tag{16}$$

平衡态的转化

设初态为平衡态

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{2\pi\lambda_i} \exp\left[-\beta_i H_0\left(t_i\right)\right] \tag{16}$$

假设末态为等效温度为 β_f 的平衡态

$$\rho_f = \frac{\beta_f}{2\pi\lambda_f} \exp\left[-\beta_f H_0\left(t_f\right)\right] \tag{17}$$

平衡态的转化

设初态为平衡态

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{2\pi\lambda_i} \exp\left[-\beta_i H_0\left(t_i\right)\right] \tag{16}$$

假设末态为等效温度为 β_f 的平衡态

$$\rho_f = \frac{\beta_f}{2\pi\lambda_f} \exp\left[-\beta_f H_0\left(t_f\right)\right] \tag{17}$$

鉴于 $\rho_f = \rho_i$，$\frac{\mathrm{d}H_0(t)}{\mathrm{d}t} = -H_0(t)\frac{\mathrm{d}\ln\lambda(t)}{\mathrm{d}t}$，得到 [?]

$$\frac{\beta_f}{\lambda_f} = \frac{\beta_i}{\lambda_i} \tag{18}$$

等温捷径

为了实现等温平衡态之间的相互转化，类似于绝热捷径，李耿等人 [?] 发展出了等温捷径的策略。

为了实现等温平衡态之间的相互转化，类似于绝热捷径，李耿等人 [?] 发展出了等温捷径的策略。
为系统施加一个额外的辅助势场，使得哈密顿量成为

$$H(q, p, t) = H_0(q, p, \lambda(t)) + U_1(q, p, t) \tag{19}$$

等温捷径

为了实现等温平衡态之间的相互转化，类似于绝热捷径，李耿等人 [?] 发展出了等温捷径的策略。
为系统施加一个额外的辅助势场，使得哈密顿量成为

$$H(q,p,t) = H_0(q,p,\lambda(t)) + U_1(q,p,t) \tag{19}$$

分布函数 $\rho(q,p,t)$ 的演化由福克-普朗克方程决定

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0 \\ \boldsymbol{J} \equiv \rho\left(p + \frac{\partial U}{\partial p}\right)\hat{\mathbf{q}} - \rho\left(\gamma p + \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\gamma}{\rho\beta}\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)\hat{\mathbf{p}}\end{gathered} \tag{20}$$

等温平衡态的转化

系统在原哈密蹲下的瞬时平衡态

$$\rho(q,p,t)=\mathrm{e}^{\beta[F(\lambda(t))-H_0(x,p,\lambda(t))]} \tag{21}$$

等温平衡态的转化

系统在原哈密蹲下的瞬时平衡态

$$\rho(q,p,t)=\mathrm{e}^{\beta[F(\lambda(t))-H_0(x,p,\lambda(t))]} \tag{21}$$

要使系统始终保持瞬时平衡态，将上式(??)代入方程(??)，得到 [?]

$$\frac{\gamma}{\beta}\frac{\partial^2 U_1}{\partial p^2}-\gamma p\frac{\partial U_1}{\partial p}+\frac{\partial U_0}{\partial q}\frac{\partial U_1}{\partial p}-p\frac{\partial U_1}{\partial q}=\left(\frac{dF}{d\lambda}-\frac{\partial U_0}{\partial\lambda}\right)\dot{\lambda} \tag{22}$$

等温平衡态的转化

系统在原哈密蹲下的瞬时平衡态

$$\rho(q,p,t) = \mathrm{e}^{\beta[F(\lambda(t)) - H_0(x,p,\lambda(t))]} \tag{21}$$

要使系统始终保持瞬时平衡态，将上式(??)代入方程(??)，得到 [?]

$$\frac{\gamma}{\beta}\frac{\partial^2 U_1}{\partial p^2} - \gamma p \frac{\partial U_1}{\partial p} + \frac{\partial U_0}{\partial q}\frac{\partial U_1}{\partial p} - p\frac{\partial U_1}{\partial q} = \left(\frac{dF}{d\lambda} - \frac{\partial U_0}{\partial \lambda}\right)\dot{\lambda} \tag{22}$$

利用上式(??)也可以得到，对谐振子势 $U_0(q,\lambda(t)) = q^2/2\lambda(t)^2$

$$U_1(q,p,t) = -\frac{\dot{\lambda}(t)}{2\gamma\lambda(t)}\left[(p-\gamma q)^2 + q^2/\lambda(t)^2\right] \tag{23}$$

哈密顿量为 $H=\frac{p^2}{2}+U_0(q,\lambda(t))+U_1(q,p,t)$，其全微分

$$\mathrm{d}H=\left(\dot{p}p+\dot{q}\frac{\partial U_0}{\partial q}+\dot{p}\frac{\partial U_1}{\partial p}+\dot{q}\frac{\partial U_1}{\partial q}\right)\mathrm{d}t+\left(\dot{\lambda}\frac{\partial U_0}{\partial \lambda}+\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)\mathrm{d}t \tag{24}$$

定义沿着轨道的能量差 Δe [?]、输入功 w [?, ?, ?]、吸收热 $\bar{q}$

$$\begin{aligned}\Delta e\equiv H(t_f)-H(t_i),\quad w\equiv\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\left(\dot{\lambda}\frac{\partial U_0}{\partial\lambda}+\frac{\partial U_1}{\partial t}\right),\\ \bar{q}\equiv\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\left(\dot{p}p+\dot{q}\frac{\partial U}{\partial q}+\dot{p}\frac{\partial U}{\partial p}\right)\end{aligned} \tag{25}$$

对 Δe, w, $\bar{q}$ 求系综平均得

$$\Delta E \equiv \langle \Delta e \rangle = \int \mathrm{d}q \int \mathrm{d}p (H\rho) \Big|_{t_i}^{t_f} \tag{26}$$

$$W \equiv \langle w \rangle = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}q \int \mathrm{d}p \left[\rho \left(\dot{\lambda} \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial U_1}{\partial t} \right) \right] \tag{27}$$

$$Q \equiv \langle \bar{q} \rangle = - \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}q \int \mathrm{d}p \gamma \rho \left(p + \frac{\partial U}{\partial p} \right) \left(p + \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{1}{\beta \rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \tag{28}$$

类卡诺热机模型的假设

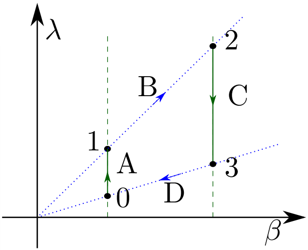

图 3: 类卡诺热机模型

类卡诺热机模型的假设

- 采用依赖于时间的谐振子势

$$U_0 = q^2/2\lambda(t)^2 \tag{29}$$

再配上相应的辅助势驱动布朗粒子做功

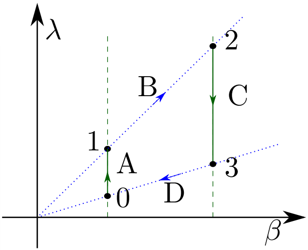

图 3: 类卡诺热机模型

类卡诺热机效率

类卡诺热机模型的假设

- 采用依赖于时间的谐振子势

$$U_0 = q^2/2\lambda(t)^2 \tag{29}$$

再配上相应的辅助势驱动布朗粒子做功

- 忽略绝热捷径过程的时间

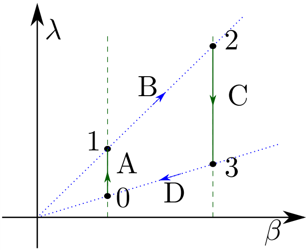

图 3: 类卡诺热机模型

类卡诺热机的功率与效率

- A. 等温膨胀
  将式(??)和式(??)代入式(??)可得

$$Q_{\mathrm{A}} = \beta_{\mathrm{h}}^{-1}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \beta_{\mathrm{h}}^{-1}C_{\mathrm{h}}[\lambda_{\mathrm{h}}(\tau)]\frac{1}{t_1} \quad (30)$$

  其中 $C_{\mathrm{h}}[\lambda_{\mathrm{h}}(\tau)] \equiv \gamma\int_0^1 \mathrm{d}\tau\left(\frac{\mathrm{d}\lambda_h}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$,
  $\lambda_h(\tau) \equiv \lambda(t_1\tau)$
- B. 绝热膨胀
  同理可得

$$W_{\mathrm{B}} = \Delta E_{\mathrm{B}} = (\beta_{\mathrm{c}}^{-1} - \beta_{\mathrm{h}}^{-1}),\ Q_{\mathrm{B}} = 0 \quad (31)$$

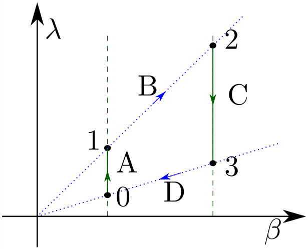

图 3: 类卡诺热机模型

类卡诺热机的功率与效率

类卡诺热机的功率与效率

- C. 等温压缩

$$Q_{\mathrm{C}} = \beta_{\mathrm{c}}^{-1} \ln \frac{\lambda_3}{\lambda_2} - \beta_{\mathrm{c}}^{-1} C_{\mathrm{c}}[\lambda_{\mathrm{c}}(\tau)] \frac{1}{t_3} \quad (32)$$

其中 $C_{\mathrm{c}}[\lambda_{\mathrm{c}}(\tau)] \equiv \gamma \int_0^1 \mathrm{d}\tau \left(\frac{\mathrm{d}\lambda_c}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$,
$\lambda_{\mathrm{c}}(\tau) \equiv \lambda(t_3\tau + t_2 + t_1)$

- D. 绝热压缩

$$W_{\mathrm{D}} = \Delta E_{\mathrm{D}} = (\beta_{\mathrm{h}}^{-1} - \beta_{\mathrm{c}}^{-1}),\ Q_{\mathrm{D}} = 0 \quad (33)$$

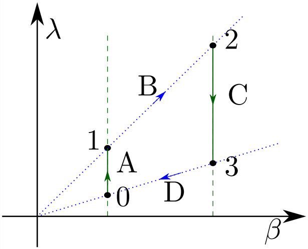

图 3: 类卡诺热机模型

则类卡诺热机的功率为

$$P = \frac{\left(\beta_{\mathrm{h}}^{-1} - \beta_{\mathrm{c}}^{-1}\right) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \left(\beta_{\mathrm{h}}^{-1} C_{\mathrm{h}} \frac{1}{t_1} + \beta_{\mathrm{c}}^{-1} C_{\mathrm{c}} \frac{1}{t_3}\right)}{t_1 + t_3} \tag{34}$$

效率为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{C}}}{Q_{\mathrm{A}}} \\ &= 1 - \frac{\beta_{\mathrm{c}}^{-1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + \beta_{\mathrm{c}}^{-1} C_{\mathrm{c}} \frac{1}{t_3}}{\beta_{\mathrm{h}}^{-1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \beta_{\mathrm{h}}^{-1} C_{\mathrm{h}} \frac{1}{t_1}} \end{aligned} \tag{35}$$

类卡诺热机的功率与效率

类卡诺热机的效率

优化 t_1，t_3 使得功率最大得

$$\eta^{*}=\frac{\eta_{\mathrm{c}}\left[\sqrt{\chi(1-\eta_{\mathrm{c}})}+1\right]}{2-\eta_{\mathrm{c}}+2\sqrt{\chi\left(1-\eta_{\mathrm{c}}\right)}} \tag{36}$$