等温捷径与绝热捷径构成的类卡诺热机的效率与功率

龚政楠

北京师范大学

2021 年 3 月 20 日

目录

引言：热机的功率与效率问题

引言：热机的功率与效率问题

- 1824，卡诺指出 [1]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\mathrm{C}} = 1 - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{h}}$

引言：热机的功率与效率问题

- 1824，卡诺指出[1]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\mathrm{C}} = 1 - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{h}}$
- 1975 年，Curzon 和 Ahlborn 研究了内可逆热机[2]，得到了该热机在最大功率下的效率为 $\eta_{\mathrm{CA}} = 1 - \sqrt{1 - \eta_{\mathrm{C}}}$

引言：热机的功率与效率问题

- 1824，卡诺指出 [1]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\mathrm{C}} = 1 - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{h}}$
- 1975 年，Curzon 和 Ahlborn 研究了内可逆热机 [2]，得到了该热机在最大功率下的效率为 $\eta_{\mathrm{CA}} = 1 - \sqrt{1 - \eta_{\mathrm{C}}}$
- 2008 年，T. Schmiedl 和 U. Seifert 提出了布朗随机热机模型 [3]，最大功率下的效率为 $\frac{2\eta_{\mathrm{C}}}{4-\eta_{\mathrm{C}}}$

引言：热机的功率与效率问题

- 1824，卡诺指出 [1]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\mathrm{C}} = 1 - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{h}}$
- 1975 年，Curzon 和 Ahlborn 研究了内可逆热机 [2]，得到了该热机在最大功率下的效率为 $\eta_{\mathrm{CA}} = 1 - \sqrt{1 - \eta_{\mathrm{C}}}$
- 2008 年，T. Schmiedl 和 U. Seifert 提出了布朗随机热机模型 [3]，最大功率下的效率为 $\frac{2\eta_{\mathrm{C}}}{4-\eta_{\mathrm{C}}}$
- 同年，涂展春推导出费曼棘轮热机 [4] 在最大功率下的效率 $\frac{\eta_{\mathrm{C}}^2}{\eta_{\mathrm{C}}-(1-\eta_{\mathrm{C}})\ln(1-\eta_{\mathrm{C}})}$. [5]

引言：热机的功率与效率问题

- 1824，卡诺指出 [1]：工作在相同高温热源和相同低温热源的所有热机中，以可逆热机的效率最高，为 $\eta_{\mathrm{C}} = 1 - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{h}}$
- 1975 年，Curzon 和 Ahlborn 研究了内可逆热机 [2]，得到了该热机在最大功率下的效率为 $\eta_{\mathrm{CA}} = 1 - \sqrt{1 - \eta_{\mathrm{C}}}$
- 2008 年，T. Schmiedl 和 U. Seifert 提出了布朗随机热机模型 [3]，最大功率下的效率为 $\frac{2\eta_{\mathrm{C}}}{4-\eta_{\mathrm{C}}}$
- 同年，涂展春推导出费曼棘轮热机 [4] 在最大功率下的效率 $\frac{\eta_{\mathrm{C}}^2}{\eta_{\mathrm{C}}-(1-\eta_{\mathrm{C}})\ln(1-\eta_{\mathrm{C}})}$. [5]
- 2013 年，涂展春在 Schmiedl 和 Seifert 工作 [3] 的基础上，考虑了他们在过阻尼情况下忽略的惯性的影响，构建了一种类卡洛热机 [6]. 发现这种随机热机在最大功率下的效率等于 η_{CA}

CA 内可逆热机模型

Curzon 和 Ahlborn 的假设

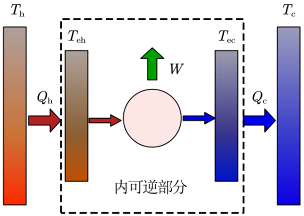

图 1: CA 内可逆热机

CA 内可逆热机模型

Curzon 和 Ahlborn 的假设

- 内可逆假设

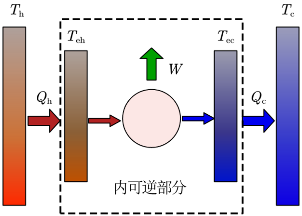

图 1: CA 内可逆热机

CA 内可逆热机模型

Curzon 和 Ahlborn 的假设

- 内可逆假设
- 绝热过程熵产生为零

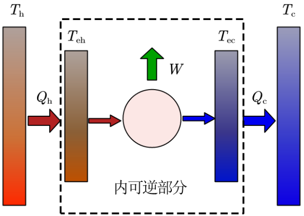

图 1: CA 内可逆热机

CA 内可逆热机模型

Curzon 和 Ahlborn 的假设

- 内可逆假设
- 绝热过程熵产生为零
- 绝热过程与等温过程所用的时间成正比，即循环总时间为
  $t_0 = a(t_h + t_c)$

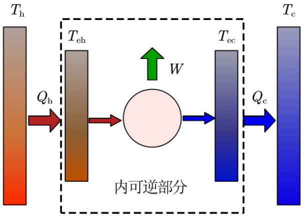

图 1: CA 内可逆热机

CA 内可逆热机模型

Curzon 和 Ahlborn 的假设

- 内可逆假设
- 绝热过程熵产生为零
- 绝热过程与等温过程所用的时间成正比，即循环总时间为 $t_0 = a(t_h + t_c)$
- 线性热传输假设，即

$$
\begin{aligned}
Q_h &= \kappa_h \left(T_h - T_{eh} \right) t_h \\
Q_c &= \kappa_c \left(T_{ec} - T_c \right) t_c
\end{aligned}
\tag{1}
$$

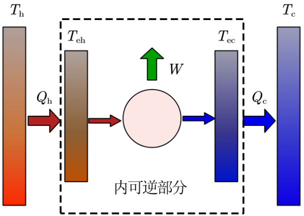

图 1: CA 内可逆热机

CA 内可逆热机模型

CA 热机的功率

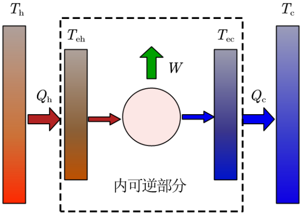

图 1: CA 内可逆热机

CA 内可逆热机模型

CA 热机的功率

输出功率

$$P(T_{\rm eh},T_{\rm ec})=\frac{T_{\rm eh}-T_{\rm ec}}{\frac{T_{\rm eh}}{a\kappa_h(T_h-T_{\rm eh})}+\frac{T_{\rm ec}}{a\kappa_c(T_{\rm ec}-T_c)}} \quad (2)$$

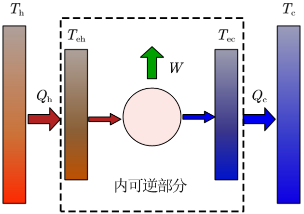

图 1: CA 内可逆热机

CA 内可逆热机模型

CA 热机的功率

输出功率

$$P(T_{\rm eh},T_{\rm ec})=\frac{T_{\rm eh}-T_{\rm ec}}{\frac{T_{\rm eh}}{a\kappa_h(T_h-T_{\rm eh})}+\frac{T_{\rm ec}}{a\kappa_c(T_{\rm ec}-T_c)}} \tag{2}$$

针对 $T_{\rm eh},T_{\rm ec}$ 使功率取最大值

$$\begin{aligned} T^*_{\rm eh}&=\frac{\sqrt{\kappa_h T_h}+\sqrt{\kappa_c T_c}}{\sqrt{\kappa_h}+\sqrt{K_c}}\sqrt{T_h} \\ T^*_{\rm ec}&=\frac{\sqrt{\kappa_h T_h}+\sqrt{\kappa_c T_c}}{\sqrt{K_h}+\sqrt{\kappa_c}}\sqrt{T_c} \end{aligned} \tag{3}$$

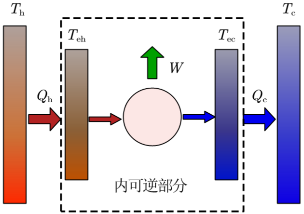

图 1: CA 内可逆热机

CA 内可逆热机模型

CA 热机在最大功率下的效率

根据 $\eta = 1 - T_{\mathrm{ec}}/T_{\mathrm{eh}}$ 就可以得到

$$\eta_{\mathrm{CA}} = 1 - \sqrt{1 - \eta_{\mathrm{C}}} \tag{4}$$

TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机的假设

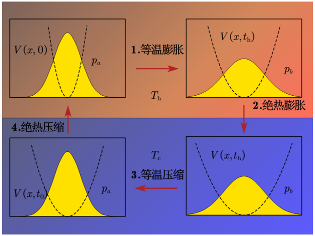

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机的假设

- 两个绝热过程是在瞬间完成的，$t_0 = (t_h + t_c)$

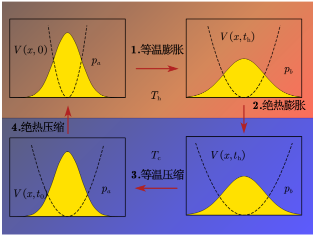

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机的假设

- 两个绝热过程是在瞬间完成的，$t_0 = (t_h + t_c)$
- 两个绝热过程中不可逆熵产生为零

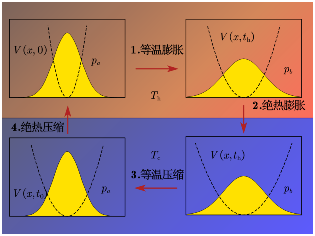

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机的假设

- 两个绝热过程是在瞬间完成的，$t_0 = (t_h + t_c)$
- 两个绝热过程中不可逆熵产生为零
- 过阻尼假设，不考虑惯性的影响

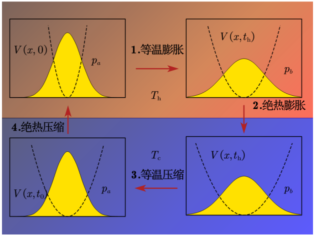

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机的功率

TU 布朗随机热机

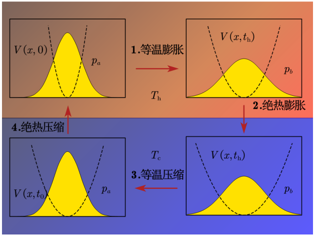

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机的功率

TU 布朗随机热机

平均功输出

$$-W = (T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c})\,\Delta S - (1/t_\mathrm{h} + 1/t_\mathrm{c})\,A_\mathrm{irr} \tag{5}$$

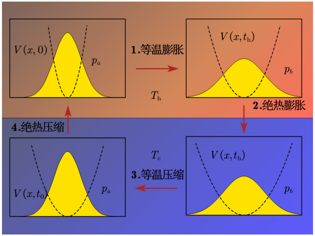

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机的功率

TU 布朗随机热机

平均功输出

$$-W=(T_{\mathrm{h}}-T_{\mathrm{c}})\Delta S-(1/t_{\mathrm{h}}+1/t_{\mathrm{c}})A_{\mathrm{irr}} \tag{5}$$

吸收热

$$Q=T_{\mathrm{h}}\Delta S-A_{\mathrm{irr}}/t_{\mathrm{h}} \tag{6}$$

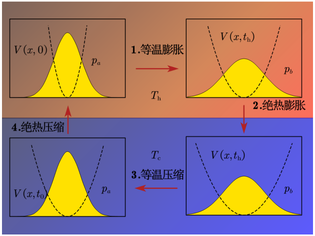

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机的功率

TU 布朗随机热机

平均功输出

$$-W=\left(T_{\rm h}-T_{\rm c}\right)\Delta S-\left(1/t_{\rm h}+1/t_{\rm c}\right)A_{\rm irr} \tag{5}$$

吸收热

$$Q=T_{\rm h}\Delta S-A_{\rm irr}/t_{\rm h} \tag{6}$$

功率

$$P=\frac{\left(T_{\rm h}-T_{\rm c}\right)\Delta S-\left(1/t_{\rm h}+1/t_{\rm c}\right)A_{\rm irr}}{t_{\rm h}+t_{\rm c}} \tag{7}$$

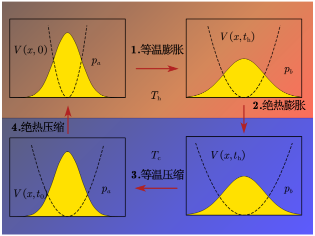

图 2: TU 布朗随机热机模型

TU 布朗随机热机

TU 布朗随机热机的效率

通过优化 t_1，t_2 不难得到，最大功率时的效率为

$$\eta^* = \frac{\eta_C}{2 - \eta_C/2} \tag{8}$$

绝热捷径

为了在有限时间内实现平衡态的转化，Demirplak and Rice [7] 和 Berry [8] 独立发展出了绝热捷径的策略。

绝热捷径

为了在有限时间内实现平衡态的转化，Demirplak and Rice [7] 和 Berry [8] 独立发展出了绝热捷径的策略。
依赖于时间缓变的 $H_0(t)$，绝热定理 [9]

$$|\psi(t)\rangle = |n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)},$$
$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\mathrm{d}t', \quad \gamma_n(t) = i\int_0^t \langle n(t')|\partial_{t'} n(t')\rangle \mathrm{d}t' \tag{9}$$

绝热捷径

为了在有限时间内实现平衡态的转化，Demirplak and Rice [7] 和 Berry [8] 独立发展出了绝热捷径的策略。
依赖于时间缓变的 $H_0(t)$，绝热定理 [9]

$$|\psi(t)\rangle = |n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)},$$

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\mathrm{d}t', \quad \gamma_n(t) = i\int_0^t \langle n(t')|\partial_{t'} n(t')\rangle \mathrm{d}t' \tag{9}$$

若有 $H(t)$ 使得绝热定理严格成立

绝热捷径

为了在有限时间内实现平衡态的转化，Demirplak and Rice [7] 和 Berry [8] 独立发展出了绝热捷径的策略。
依赖于时间缓变的 $H_0(t)$，绝热定理 [9]

$$|\psi(t)\rangle = |n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)},$$

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\mathrm{d}t', \quad \gamma_n(t) = i\int_0^t \langle n(t')|\partial_{t'} n(t')\rangle \mathrm{d}t' \tag{9}$$

若有 $H(t)$ 使得绝热定理严格成立

$$\begin{aligned} H(t) &= H_0(t) + i\hbar\sum_m \left(|\partial_t m\rangle\langle m| - \langle m \mid \partial_t m\rangle |m\rangle\langle m|\right) \\ &\equiv H_0 + H_1 \end{aligned} \tag{10}$$

绝热捷径

在经典的情形下，对于随时间缓变的 $H_0(t)$，也可以引入辅助哈密顿量 $H_1(t)$，使得绝热不变量严格守恒

$$I(E,\boldsymbol{\lambda}) \equiv \int \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\theta\left[E - H_0(z;\boldsymbol{\lambda})\right] \tag{11}$$

绝热捷径

在经典的情形下，对于随时间缓变的 $H_0(t)$，也可以引入辅助哈密顿量 $H_1(t)$，使得绝热不变量严格守恒

$$I(E,\boldsymbol{\lambda}) \equiv \int \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\theta\left[E - H_0(z;\boldsymbol{\lambda})\right] \tag{11}$$

谐振子势场中的辅助势

根据 Jarzynski 的计算 [10]，对于依赖于时间的谐振子势

$$H_0(\boldsymbol{\eta};\lambda(t)) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2\lambda(t)^2} \tag{12}$$

绝热捷径

在经典的情形下，对于随时间缓变的 $H_0(t)$，也可以引入辅助哈密顿量 $H_1(t)$，使得绝热不变量严格守恒

$$I(E, \boldsymbol{\lambda}) \equiv \int \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\theta\left[E - H_0(z; \boldsymbol{\lambda})\right] \tag{11}$$

谐振子势场中的辅助势

根据 Jarzynski 的计算 [10]，对于依赖于时间的谐振子势

$$H_0(\boldsymbol{\eta}; \lambda(t)) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2\lambda(t)^2} \tag{12}$$

其相应的辅助势为

$$H_1(\boldsymbol{\eta}; \lambda(t)) = \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda} qp \tag{13}$$

利用绝热捷径实现平衡态的转化

考虑谐振子势式(12)，施加辅助哈密顿量之后的新哈密顿量为

$$H(t) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2\lambda(t)^2} + \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda(t)} qp, \tag{14}$$

利用绝热捷径实现平衡态的转化

考虑谐振子势式(12)，施加辅助哈密顿量之后的新哈密顿量为

$$H(t) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2\lambda(t)^2} + \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda(t)} qp, \tag{14}$$

可以得到运动方程

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} + \dfrac{\lambda(t)}{2\lambda(t)} q \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -2\dfrac{q}{\lambda^2(t)} - \dfrac{\dot{\lambda}(t)}{2\lambda(t)} p \end{cases} \tag{15}$$

利用绝热捷径实现平衡态的转化

平衡态的转化

设初态为平衡态

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{2\pi\lambda_i} \exp\left[-\beta_i H_0\left(t_i\right)\right] \tag{16}$$

利用绝热捷径实现平衡态的转化

平衡态的转化

设初态为平衡态

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{2\pi\lambda_i} \exp\left[-\beta_i H_0\left(t_i\right)\right] \tag{16}$$

假设末态为等效温度为 β_f 的平衡态

$$\rho_f = \frac{\beta_f}{2\pi\lambda_f} \exp\left[-\beta_f H_0\left(t_f\right)\right] \tag{17}$$

利用绝热捷径实现平衡态的转化

平衡态的转化

设初态为平衡态

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{2\pi\lambda_i} \exp\left[-\beta_i H_0\left(t_i\right)\right] \tag{16}$$

假设末态为等效温度为 β_f 的平衡态

$$\rho_f = \frac{\beta_f}{2\pi\lambda_f} \exp\left[-\beta_f H_0\left(t_f\right)\right] \tag{17}$$

鉴于 $\rho_f = \rho_i$，$\frac{\mathrm{d}H_0(t)}{\mathrm{d}t} = -H_0(t)\frac{\mathrm{d}\ln\lambda(t)}{\mathrm{d}t}$，得到 [6]

$$\frac{\beta_f}{\lambda_f} = \frac{\beta_i}{\lambda_i} \tag{18}$$

等温捷径

为了实现等温平衡态之间的相互转化，类似于绝热捷径，李耿等人 [11] 发展出了等温捷径的策略。

等温捷径

为了实现等温平衡态之间的相互转化，类似于绝热捷径，李耿等人 [11] 发展出了等温捷径的策略。
为系统施加一个额外的辅助势场，使得哈密顿量成为

$$H(q,p,t) = H_0(q,p,\lambda(t)) + U_1(q,p,t) \tag{19}$$

等温捷径

为了实现等温平衡态之间的相互转化，类似于绝热捷径，李耿等人 [11] 发展出了等温捷径的策略。
为系统施加一个额外的辅助势场，使得哈密顿量成为

$$H(q,p,t)=H_0(q,p,\lambda(t))+U_1(q,p,t) \tag{19}$$

分布函数 $\rho(q,p,t)$ 的演化由福克-普朗克方程决定

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0\\ \boldsymbol{J}\equiv\rho\left(p+\frac{\partial U}{\partial p}\right)\hat{\mathbf{q}}-\rho\left(\gamma p+\frac{\partial U}{\partial q}+\frac{\partial U}{\partial p}+\frac{\gamma}{\rho\beta}\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)\hat{\mathbf{p}}\end{aligned} \tag{20}$$

等温捷径

等温平衡态的转化

系统在原哈密顿下的瞬时平衡态

$$\rho(q,p,t)=\mathrm{e}^{\beta[F(\lambda(t))-H_0(x,p,\lambda(t))]} \tag{21}$$

等温捷径

等温平衡态的转化

系统在原哈密蹲下的瞬时平衡态

$$\rho(q,p,t)=\mathrm{e}^{\beta[F(\lambda(t))-H_0(x,p,\lambda(t))]} \tag{21}$$

要使系统始终保持瞬时平衡态，将上式(21)代入方程(20)，得到 [11]

$$\frac{\gamma}{\beta}\frac{\partial^2 U_1}{\partial p^2}-\gamma p\frac{\partial U_1}{\partial p}+\frac{\partial U_0}{\partial q}\frac{\partial U_1}{\partial p}-p\frac{\partial U_1}{\partial q}=\left(\frac{dF}{d\lambda}-\frac{\partial U_0}{\partial\lambda}\right)\dot{\lambda} \tag{22}$$

等温捷径

等温平衡态的转化

系统在原哈密蹲下的瞬时平衡态

$$\rho(q,p,t)=\mathrm{e}^{\beta[F(\lambda(t))-H_0(x,p,\lambda(t))]} \tag{21}$$

要使系统始终保持瞬时平衡态，将上式(21)代入方程(20)，得到 [11]

$$\frac{\gamma}{\beta}\frac{\partial^2 U_1}{\partial p^2}-\gamma p\frac{\partial U_1}{\partial p}+\frac{\partial U_0}{\partial q}\frac{\partial U_1}{\partial p}-p\frac{\partial U_1}{\partial q}=\left(\frac{dF}{d\lambda}-\frac{\partial U_0}{\partial \lambda}\right)\dot{\lambda} \tag{22}$$

利用上式(22)也可以得到，对谐振子势 $U_0(q,\lambda(t))=q^2/2\lambda(t)^2$

$$U_1(q,p,t)=-\frac{\dot{\lambda}(t)}{2\gamma\lambda(t)}\left[(p-\gamma q)^2+q^2/\lambda(t)^2\right] \tag{23}$$

类卡诺热机模型

类卡诺热机模型的假设

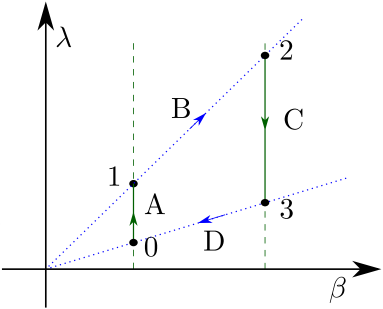

图 3: 类卡诺热机模型

类卡诺热机模型

类卡诺热机模型的假设

- 忽略绝热捷径过程的时间

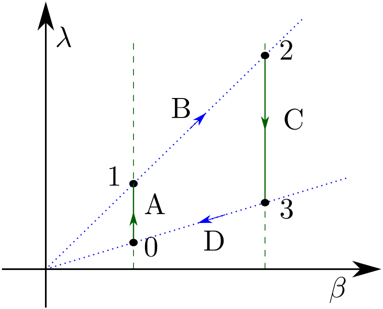

图 3: 类卡诺热机模型

[1] 赵凯华 and 罗蔚茵. 新概念物理教程：热学. 高等教育出版社, 北京, 2005.

[2] F. L. Curzon and B. Ahlborn. Efficiency of a Carnot engine at maximum power output. *American Journal of Physics*, 1975.

[3] T. Schmiedl and U. Seifert. Efficiency at maximum power: An analytically solvable model for stochastic heat engines. *EPL*, 2008.

[4] Z. C. Tu. Efficiency at maximum power of Feynman's ratchet as a heat engine. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2008.

[5] Zhan-Chun Tu. Abstract models for heat engines. *Frontiers of Physics*, 16(3):33202, 2020.

[6] Z. C. Tu. Stochastic heat engine with the consideration of inertial effects and shortcuts to adiabaticity. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 89(5):1–9, 2014.

[7] Mustafa Demirplak and Stuart A. Rice. Adiabatic population transfer with control fields. *Journal of Physical Chemistry A*, 107(46):9937–9945, 2003.

[8] M. V. Berry. Transitionless quantum driving. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(36):1–9, 2009.

[9] David J. Griffiths and Darrell F. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2018.

[10] Christopher Jarzynski. Generating shortcuts to adiabaticity in quantum and classical dynamics. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 88(4):1–5, 2013.

[11] Geng Li, H. T. Quan, and Z. C. Tu. Shortcuts to isothermality and nonequilibrium work relations. *Physical Review E*, 96(1):1–11, 2017.