Билет 1

1. Решите систему линейных уравнений. Для соответствующей однородной системы определите базис (фундаментальную систему решений) и размерность пространства ее решений.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 5, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 1. \end{cases}$$

2. Найдите матрицу линейного оператора $f(\vec{x}) = \dfrac{(\vec{x}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{b})} \cdot \vec{a}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$, $\vec{a} = (1; -1; 0)$, $\vec{b} = (2; 1; 4)$, в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Укажите собственные значения и собственные векторы этого оператора.

3. Решите краевую задачу $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0) = 6\sin\dfrac{2\pi x}{5}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $x \in [0, 5]$, $u(0,t) = u(5,t) = 0$, $t \ge 0$.

4. Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^{\ln 2} \left(y'^2 + 2y^2 + 2y\right) \cdot e^{-x} dx, \quad y(0) = y(\ln 2) = 0.$$

5. Решите разностное уравнение $x(n+2) - x(n) = \sin\dfrac{\pi n}{2}$, $x(0) = 0, x(1) = 0.$

Билет 2

1. Найдите косинус угла между функциями $f(x)$ и $g(x)$ евклидова пространства $C[a,b]$ со скалярным произведением $\left(f(x), g(x)\right) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$, если $f(x) = \ln x$, $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $a = 1, b = 2.$

2. Дан линейный оператор $f: R^3 \to R^3$, заданный условием $f(\vec{x}) = (2x_1 + 3x_3;\ x_1 + x_2 + x_3;\ -3x_1 + 4x_3)$. Найдите $Ker A$ и $\operatorname{Im} A$ линейного оператора f в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Разложите в ряд Фурье $2\pi-$периодическую функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x \le 0, \\ 2 - x, & 0 < x < \pi, \end{cases}$ заданную на промежутке $[-\pi; \pi)$. Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

4. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^2)^3}}$.

5. Решите задачу Коши операционным методом $y'' + 2y = 2 + e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.