5. Решите разностное уравнение $x(n+2)+2x(n+1)+x(n)=(-1)^n$

ли $x(0)=0,\ x(1)=1$.

4 ... см. конец.

5. $x(n+2)+2x(n+1)+x(n)=(-1)^n$

$x(n) \leftrightarrow X(z)$

$x(n+1) \leftrightarrow z(X(z)-x(0))=zX(z)$

$x(n+2) \leftrightarrow z^2\left(X(z)-\cancel{x(0)}-\frac{x(1)}{z}\right)=z^2X(z)-z$

$(-1)^n \leftrightarrow \frac{z}{z+1}$

$$z^2X(z)+2zX(z)+X(z)=\frac{z+z^2+z}{z+1}=$$

$$=\frac{z^2+2z}{z+1}$$

$$X(z)=\frac{z^2+2z}{(z+1)(z^2+2z+1)}=\frac{z^2+2z}{(z+1)^3}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to-1}\left((z^2+2z)\cdot z^{n-1}\right)''=$$

$$=\frac{1}{2}\lim\left(z^{n+1}+2z^n\right)''$$

$$\left(z^{n+1}+2z^n\right)''=\left((n+1)z^n+2nz^{n-1}\right)'=n(n+1)z^{n-1}+$$

$$+2n(n-1)z^{n-2}$$

$$=\frac{1}{2}\left((n^2+n)z^{n-1}+(2n^2-2n)z^{n-2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left((n^2+n)(-1)^{n-1}+(2n^2-2n)(-1)^{n-2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(-1)^{n-2}(n^2-3n)=(-1)^n\cdot\left(\frac{n^2}{2}-\frac{3n}{2}\right)$$

3. $$\int_0^{+\infty}x^3\cdot e^{-x^2}\,dx=\left|\begin{matrix} t=x^2 & dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt \\ x=t^{\frac{1}{2}} & 0\to0 \\ x^3=t^{\frac{3}{2}} & \infty\to\infty\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}e^{-t}=\frac{1}{2}\Gamma(2)=\frac{1}{2}$$

4. $$F(p)=\frac{6}{p^3-8}=\frac{6}{(p-2)(p^2+2p+4)}=$$

$$=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+4}=\frac{A(p^2+2p+4)+(Bp+C)(p-2)}{(p-2)(p^2+2p+4)}=$$

$$=\frac{Ap^2+2Ap+4A+Bp^2-2Bp+Cp-2C}{(p-2)(p^2+2p+4)}=$$

$$=\begin{cases}A+B=0\\2A-2B+C=0\\4A-2C=6\end{cases}$$

$A=\frac{1}{2}$

$B=-\frac{1}{2}$

$4A+C=0$

$4A-2C=6$

$-3C=6$

$C=-2$

3. Восстановите решетчатую функцию $f(n)$ по ее преобразованию $F(z) = \dfrac{z+1}{(z-2)^3}$, используя теорию вычетов.

3. $F(z) = \dfrac{z+1}{(z-2)^3}$

$$\operatorname*{Res}_{z=2} \frac{z+1}{(z-2)^3}\cdot z^{n-1} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\left((z-2)^3\frac{z+1}{(z-2)^3}\cdot z^{n-1}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\left((z+1)\cdot z^{n-1}\right)'' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2^{n-2}(n^2-n) + 2^{n-3}(n^2-3n+2)\right) = 2^{n-3}(n^2-n) + 2^{n-4}(n^2-3n+2) =$$

$$= 2^{n-4}(3n^2-5n+2).$$

4. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$

4. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \left| \begin{matrix} x^4=t & dx=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt \\ x=t^{\frac{1}{4}} & 0\to 0 \quad 1\to 1 \end{matrix} \right| = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}dt = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{\frac{1}{4}-1}(1-t)^{\frac{3}{4}-1}dt =$$

$$= \frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(1)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{4\cdot\sin\frac{3\pi}{4}}$$

5. Запишите допустимую экстремаль функционала $J(y(x)) = \int\limits_0^1 \left(\left(y'\right)^2 + 4y^2 \right) dx$, если $y(0) = e^2$, $y(1) = 1$.

5. $J(y(x)) = \int\limits_0^1 (y')^2 + 4y^2) dx$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 8y \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''$

$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow 8y - 2y'' = 0 \Rightarrow y'' - 4y = 0$

Х-ко у-ние:

$k^2 - 4 = 0$

$k = \pm 2$

$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

$y(0) = e^2 \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = e^2 \\ C_1 e^2 + C_2 e^{-2} = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} C_1 e^{-2} + C_2 e^{-2} = 1 \\ C_1 e^2 + C_2 e^{-2} = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0,\ C_2 = e^2$

$y(1) = 1 \Rightarrow$

$y(x) = e^{-2x+2}$

6. Запишите формулу действия линейного оператора ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость $x+y=0$, а также найдите его собственные значения и векторы.

6. $x+y=0$

$n=(1;1;0)$

$$f(\bar{e}) = \bar{e} - \frac{(\bar{n},\bar{e})}{|\bar{n}|^2}\cdot\bar{n}$$

$$f(\bar{i}) = (1;0;0) - \frac{1}{2}(1;1;0) = \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$$

$$f(\bar{j}) = (0;1;0) - \frac{1}{2}(1;1;0) = \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$$

$$f(\bar{k}) = (0;0;1)$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 (1-\lambda) - \frac{1}{4}(1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$(1-\lambda)\left(\frac{1}{4} + \lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\lambda(1-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 1$$

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\bar{x} = (x_2; x_2; 0), \ \forall x_2 \in R \quad x_2 \neq 0$

$\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

$\bar{x} = (-x_2; x_2; x_3) \ \forall x_2, x_3 \in R \quad x_2^2 + x_3^2 \neq 0$

5. Найдите собственные векторы и значения линейного оператора $f: R^3 \to R^3$, если $f(\bar{x}) = \frac{2(\bar{a}, \bar{x}) \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|^2}$, где $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $\bar{a} = (1; 0; -1)$.

$f(\bar{x}) = \frac{2(\bar{a}, \bar{x}) \bar{a}}{|\bar{a}|^2}$ $\quad \bar{a} = (1; 0; -1)$

$f(\bar{i}) = \frac{2 \cdot 1}{2} (1; 0; -1) = (1; 0; -1)$

$f(\bar{j}) = \frac{2 \cdot 0}{} = (0; 0; 0)$

$f(\bar{k}) = \frac{-2}{2} (1; 0; -1) = (-1; 0; 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2 \lambda + \lambda = 0$$

$\lambda (1 - (1-\lambda)^2) = 0$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 =$

$1 - 1 - \lambda^2 + 2\lambda$

$\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 = x_3$

$x_1 = x_3$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -x_3$$

$$x_1 = -x_3$$

$$x_2 = 0$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

3. Восстановите оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)=\dfrac{p}{(p^2-9)(p+2)}$, используя теорию вычетов.

3. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2-9)(p+2)} = \dfrac{p}{(p-3)(p+3)(p+2)}$

$$\operatorname*{Res}_{p=3}\left(F(p)\,e^{pt}\right) = \lim_{p\to 3}\frac{p\,e^{pt}}{(p+3)(p+2)} = \frac{3e^{3t}}{6\cdot 5} =$$

$$= \frac{1}{10}e^{3t}$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-3}\left(F(p)\,e^{pt}\right) = \lim_{p\to -3}\frac{p\,e^{pt}}{(p-3)(p+2)} = \frac{-3e^{-3t}}{-6(-1)} =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-3t}$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-2}\left(F(p)\,e^{pt}\right) = \lim_{p\to -2}\frac{p\,e^{pt}}{(p-3)(p+3)} = \frac{-2e^{-2t}}{-5} =$$

$$= \frac{2}{5}e^{-2t}$$

$$f(t) = \frac{1}{10}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{2}{5}e^{-2t}$$

3. Выясните, является ли линейным оператор $f: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$, если $f(\bar{x}) = (5x_1; -x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 + 4x_3)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{R}^3$. Если – да, запишите его матрицу в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

3. Выясните, является ли линейным оператор $f: R^3 \to R^3$, если $f(\bar{x}) = (5x_1; -x_2+3x_3; x_1+2x_2+4x_3)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Если-да, запишите матрицу в $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

1. $f(\bar{x}+\bar{y}) = (5x_1+5y_1; -x_2-y_2+3x_3+3y_3; x_1+y_1+2x_2+2y_2+4x_3+4y_3)$

$f(\bar{x}) + f(\bar{y}) = (5x_1+5y_1; -x_2-y_2+3x_3+3y_3; x_1+y_1+2x_2+2y_2+4x_3+4y_3)$

$f(\bar{x}+\bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y})$ ✓

2. $f(\lambda\bar{x}) = (5\lambda x_1; -\lambda x_2 + 3\lambda x_3; \lambda x_1 + 2\lambda x_2 + 4\lambda x_3) = \lambda(5x_1; -x_2+3x_3; x_1+2x_2+4x_3) =$

$= \lambda f(\bar{x})$ ✓

$f(\bar{i}) = (5, 0, 1)$

$f(\bar{j}) = (0; -1, 2)$

$f(\bar{k}) = (0, 3, 4)$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} f(\bar{i}) & f(\bar{j}) & f(\bar{k}) \end{matrix} \end{array}$$

4. Запишите изображение для оригинала $f(t) = e^{-2t} \cos^2 t$.

4. Запишите изображение для оригинала $f(t) = e^{-2t}\cos^2 t$.

$$e^{-2t}\cos^2 t = e^{-2t} \cdot \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 2t$$

$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+2} + \frac{p+2}{(p+2)^2+4}\right) = \frac{p^2+4p+8+p^2+4p+4}{2(p+2)(p^2+4p+8)} = \frac{2p^2+8p+12}{2(p+2)(p^2+4p+8)} =$$

$$= \frac{p^2+4p+6}{(p+2)(p^2+4p+8)}$$

5. Разложите функцию $f(x) = x^2 - x + 2$ по многочленам Лежанд[ра н]а промежутке $[-1;1]$.

5. Разложить $f(x) = x^2 - x + 2$ по Лежандру на промеж. $[-1;1]$.

$f(x) = x^2 - x + 2$

$f(x) = \sum_{k=0}^{1} C_k P_k(x)$

$$C_0 = \frac{\int_{-1}^{1} f(x) P_0(x)\,dx}{\|P_0(x)\|^2} = \frac{\int_{-1}^{1}(x^2-x+2)\,dx}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + 2x\Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+4\right) = \frac{7}{3}$$

$$C_1 = \frac{\int_{-1}^{1} f(x) P_1(x)\,dx}{\|P_1(x)\|^2} = \frac{\int_{-1}^{1}(x^2-x+2)\cdot x\,dx}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$$

$$C_2 = \frac{\int_{-1}^{1} f(x) P_2(x)\,dx}{\|P_2(x)\|^2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}(x^2-x+2)(3x^2-1)\,dx = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}(3x^4-3x^3+6x^2-x^2+x-2)\,dx = \frac{5}{4}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{5}{4}\left(\frac{6}{5} + \frac{10}{3} - 4\right) = \frac{3}{2} + \frac{25}{6} - 5 = \frac{2}{3}.$$

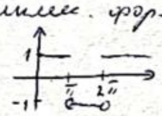
$$f(x) = \frac{7}{3}P_0(x) - P_1(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$$

6. Запишите разложение в ряд Фурье в комплексной форме функции

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le \pi\\ -1, & \pi<x<2\pi\end{cases}$$

6. Запишите в ряд Фурье в компл. форме.

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le \pi\\ -1, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$$



$$C_n=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{-inx}dx-\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{in}e^{-in\pi}+\frac{1}{in}-\left(-\frac{1}{in}+\frac{1}{in}e^{in\pi}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{in}e^{-in\pi}+\frac{1}{in}+\frac{1}{in}-\frac{1}{in}e^{in\pi}\right)=\frac{1}{2\pi i n}\left(-e^{in\pi}-e^{in\pi}+2\right)=-\frac{1}{\pi i n}(\cos\pi n-1)=$$

$$=-\frac{1}{\pi i n}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}n-\text{чет: } 0\\ n-\text{нечет: } \frac{2}{\pi i n}\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi i(2n-1)}e^{i(2n-1)x}$$

Вид матрицы поворота R в случае вращения относительно координатных осей OX, OY, OZ на угол α.

$$R_{x,\alpha}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$R_{z,\alpha}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R_{y,\alpha}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

Г и В ф-ии.

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t}\,dt \qquad \Gamma(n+1)=n!=n\Gamma(n)$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}$$

!! = ! с шагом 2
Для чёт n
$n!!=2\cdot4\cdot6\ldots n$
Для нечёт n
$n!!=1\cdot3\cdot5\ldots n$

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}\,dt \qquad B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt \qquad \Gamma(x+y)\cdot B(x,y)=\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)$$

— Ур. Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y}-\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)'_x=0$ (Для $J(y)$)

— Полином Лежандра

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\cdot\varphi_n(x)$$

$$C_n=\frac{\int_a^b f(x)\cdot\varphi_n(x)\,dx}{\|\varphi_n(x)\|^2} \qquad \varphi_n=P_n$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

$P_0(x)=1$

$P_1(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)'=x$

$P_2=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

векторы.

6. Запишите закон свободных колебаний струны, если $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$u(0,t)=u(1,t)=0$, $u(x,0)=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=x-2$.

6. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\qquad u(0,t)=u(1,t)=0 \quad \cdot\, u(x,0)=0$, значит $A_n=0$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=x-2$

$a=2$

$l=1$

$$B_n=\frac{2}{2\pi n}\int_0^1(x-2)\sin(\pi n x)\,dx=\frac{1}{\pi n}\left(\int_0^1 x\sin\pi n x\,dx-2\int_0^1\sin\pi n x\,dx\right)=$$

$$=\cancel{\frac{1}{\pi n}\left(\int_0^1 x\sin\pi n x\,dx\right.}=\frac{1}{\pi n}\left(-\frac{1}{\pi n}x\cdot\cos\pi n x\Big|_0^1+\frac{1}{\pi n}\int_0^1\underbrace{\cos\pi n x\,dx}_{\to 0}-2\cdot\right($$

$$\cdot\left(-\frac{1}{\pi n}\cos\pi n x\right)\Big|_0^1\Big)=\frac{1}{\pi^2 n^2}\left(-x\cos\pi n x\Big|_0^1+2\cdot\cos\pi n x\Big|_0^1\right)=\frac{1}{\pi^2 n^2}\Big((-1)^{n+1}+2\cdot(-1)^n-$$

$$-2\Big)=\frac{1}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-2\right)=\begin{cases} n\text{ - чёт}: -\frac{1}{\pi^2 n^2}\\ n\text{ - нечёт}: -\frac{3}{\pi^2 n^2}\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{4\pi^2 n^2}\sin 4\pi n\cdot\sin 2\pi n x+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{\pi^2(2n-1)^2}\cdot\sin 2\pi(2n-1)\cdot$$

$$\cdot\sin\pi(2n-1)x.$$

4. Вычислите интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln^6 x}{x^2}\,dx$

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \ln^6 x \quad x^{-2}\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty} t^6 \; e^{-t}\,dt = \Gamma(7) = 720.$$

$t = \ln x, \quad x = e^t$

$dx = e^{t}\,dt$

5. Ортонормируйте систему элементов $\bar{x}_1 = (1;-2;2)$, $\bar{x}_2 = (-1;0;1)$,

$= (5;-3;-7)$.

$\bar{x}_1 = (1, -2, 2)$

$\bar{x}_2 = (-1, 0, 1)$

$\bar{x}_3 = (5, -3, -7)$

1. $\bar{y}_1 = \bar{x}_1$

2. $\bar{y}_2 = \bar{x}_2 + \lambda y_1$

$\bar{y}_2 = (-1+\lambda, -2\lambda, 1+2\lambda)$

$y_1 \perp \bar{y}_2$

$(y_1, y_2) = 0$

$-1+\lambda+4\lambda+2+4\lambda = 0.$

$\lambda = -\frac{1}{9}$

$y_2 = \left(-\frac{10}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$

3. $\bar{y}_3 = x_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$

$\bar{y}_3 = \left(5+\lambda_2\left(-\frac{10}{9}\right)+\lambda_1; -3-2\lambda_1+\frac{2}{9}\lambda_2; -7+2\lambda_1+\frac{7}{9}\right.$

$\left.\begin{matrix}(y_3; y_2) = 0 \\ (y_3; y_1) = 0\end{matrix}\right\} \ldots$

$\|\bar{y}_1\| = \sqrt{(y_1; y_1)} = 3$

...

...

Ортонорм. ...

$\bar{y}_1 = \frac{y_1}{\|\bar{y}_1\|}$

3. Запишите разложение элемента $\bar{x} = (-3;6;13) \in R^3$ по базису $\bar{e}_1 = (1;-6;3), \bar{e}_2 = (-2;1;-5), \bar{e}_3 = (-1;4;-7)$.

Задание Написать разложение вектора $\bar{a} = (1;\ -1;\ 2)$ по векторам $\bar{e}_1 = (2;\ 3;\ 1)$, $\bar{e}_2 = (3;\ 7;\ 2)$, $\bar{e}_3 = (5;\ 4;\ 3)$

Решение Векторы $\bar{a},\ \bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3$ заданы в одном базисе. Пусть искомое разложение имеет вид:

$$\bar{a} = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2 + a_3 \cdot \bar{e}_3$$

Запишем это равенство в векторной форме:

$$(1;\ -1;\ 2) = a_1 \cdot (2;\ 3;\ 1) + a_2 \cdot (3;\ 7;\ 2) + a_3 \cdot (5;\ 4;\ 3)$$

При умножении вектора на число надо каждую координату этого вектора умножить на указанное число:

$$(1;\ -1;\ 2) = (2a_1;\ 3a_1;\ a_1) + (3a_2;\ 7a_2;\ 2a_2) + (5a_3;\ 4a_3;\ 3a_3)$$

Чтобы найти сумму векторов, заданных своими координатами, необходимо просуммировать соответствующие координаты:

$$(1;\ -1;\ 2) = (2a_1 + 3a_2 + 5a_3;\ 3a_1 + 7a_2 + 4a_3;\ a_1 + 2a_2 + 3a_3)$$

Два вектора равны, если равны их соответствующие координаты, то есть получаем следующую систему относительно неизвестных коэффициентов $a_1,\ a_2,\ a_3$ разложения:

$$\begin{cases} 2a_1 + 3a_2 + 5a_3 = 1, \\ 3a_1 + 7a_2 + 4a_3 = -1, \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 2. \end{cases}$$

Найдем решение полученной системы, например, методом Крамера. Основной определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot7\cdot3+3\cdot2\cdot5+3\cdot4\cdot1-1\cdot7\cdot5-2\cdot4\cdot2-3\cdot3\cdot3 = 6 \neq 0$$

Вычислим теперь вспомогательные определители системы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot7\cdot3+(-1)\cdot2\cdot5+3\cdot4\cdot2-2\cdot7\cdot5-2\cdot4\cdot1-(-1)\cdot3\cdot3 = -34;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot3+3\cdot2\cdot5+1\cdot4\cdot1-1\cdot(-1)\cdot5-2\cdot4\cdot2-3\cdot1\cdot3 = 8;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot7\cdot2+3\cdot2\cdot1+3\cdot(-1)\cdot1-1\cdot7\cdot1-2\cdot(-1)\cdot2-3\cdot3\cdot2 = 10$$

Тогда

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-34}{6} = -\frac{17}{3}; a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; a_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Следовательно, искомое разложение

$$\bar{a} = -\frac{17}{3}\bar{e}_1 + \frac{4}{3}\bar{e}_2 + \frac{5}{3}\bar{e}_3$$

Ответ $\bar{a} = -\frac{17}{3}\bar{e}_1 + \frac{4}{3}\bar{e}_2 + \frac{5}{3}\bar{e}_3$

6. Разложите в ряд Фурье $2l$-периодическую функцию $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1<x<0 \\ 1, & 0\le x\le 1 \end{cases}$. Постройте графики функций $f(x)$ и $S(x)$.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-1}^{0} 1\,dx + \int_0^1 (x+1)\,dx =$$

$$= x\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$a_n = \int_{-1}^{0} \cos\pi n x\,dx + \int_0^1 (x+1)\cos\pi n x\,dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi n}\sin\pi n x\Big|_{-1}^{0}}_{yo}$$

$$= \int_0^1 x\cos\pi n x\,dx + \underbrace{\int_0^1 \cos\pi n x\,dx}_{yo} =$$

$$= \underbrace{\frac{x}{\pi n}\sin\pi n x\Big|_0^1}_{yo} - \frac{1}{\pi n}\int \sin n\pi x\,dx = \frac{1}{\pi^2 n^2}\cos\pi n x\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} n\text{-чет}: 0 \\ n\text{-нечет}: -\frac{2}{\pi^2 n^2} \end{cases}$$

$$b_n = \int_{-1}^{0} \sin\pi n x\,dx + \int_0^1 (x+1)\sin\pi n x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cos\pi n x\Big|_{-1}^{0} + \int_0^1 x\sin\pi n x\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right) - \frac{1}{\pi n}(-1)^n$$

$$-\frac{1}{\pi n}x\cos\pi n x\Big|_0^1 = -\frac{1}{\pi n}(-1)^n$$

$$-\frac{1}{\pi n}$$

$$f(x) = \frac{5}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\pi(2n-1)x + $$

$$+ \frac{1}{\pi n}\sin\pi n x.$$

Тут решение неправильное, но суть верна☺