1.25) Разложить данную функцию f(x) в ряд Фурье в интервале (a;b).

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ 10x-3, & 0 \le x \le \pi \end{cases} \quad \text{в интервале } (-\pi;\pi).$$

Найдём коэффиценты Фурье.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(10x-3)dx=\frac{1}{\pi}(5x^2-3x)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot(5\pi^2-3\pi)=5\pi-3$$

$$a_л=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(10x-3)\cos kxdx=\left|\begin{matrix}\text{Интегрируем по частям} & \\ 10x-3=U & 10dx=dU \\ \cos kxdx=dV & V=\frac{1}{k}\sin kx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}(10x-3)\sin kx\Big|_0^{\pi}-\frac{10}{k}\int_0^{\pi}\sin kxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}(10x-3)\sin kx\Big|_0^{\pi}+\frac{10}{k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{10}{k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{10}{k^2\pi}(\cos k\pi-\cos 0)=\frac{10}{k^2\pi}(\cos k\pi-1)=\begin{cases}0, & \text{если k-четное}\\ -\dfrac{20}{\mathrm{k}^2\pi}, & \text{если k-нечетное}\end{cases}$$

Принимаем $k=2n-1$

$$a_k=a_{2n-1}=-\frac{20}{(2n-1)^2\pi}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(10x-3)\sin kxdx=\left|\begin{matrix}10x-3=U & 10dx=dU \\ \sin kxdx=dV & V=-\frac{1}{k}\cos kx\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}(-\frac{1}{k}(10x-3)\cos kx\Big|_0^{\pi}+$$

$$+\frac{10}{k}\int_0^{\pi}\cos kxdx)==\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}(10x-3)\cos kx\Big|_0^{\pi}+\frac{10}{k^2}\sin kx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}(10x-3)\cos kx\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{k\pi}((10\pi-3)\cos k\pi+3\cos 0)=-\frac{1}{k\pi}((10\pi-3)(-1)^n+3)$$

Получаем ряд Фурье

$$f(x)=\frac{5\pi-3}{2}-\frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((10\pi-3)(-1)^n+3)\sin nx}{n}$$

2.25) Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на интервале (0;π), доопределив её чётным и нечётным образом. Построить графики для каждого случая.

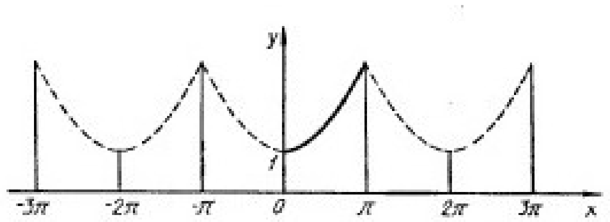
$$f(x) = e^{-\frac{2x}{3}}$$

Продолжим данную функцию чётным образом.

Тогда:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{2x}{3}}dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{2x}{3}}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{3}{\pi}\left(e^{-\frac{2\pi}{3}} - e^0\right) = -\frac{3}{\pi}\left(e^{-\frac{2\pi}{3}} - 1\right) = \frac{3\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{3}}\right)}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{2x}{3}}\cos nx dx$$



$$\int_0^{\pi} e^{-\frac{2x}{3}}\cos nx dx = \frac{-\frac{2}{3}\cos nx + n\sin nx}{\frac{4}{9}+n^2}e^{-\frac{2x}{3}}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{-\frac{2}{3}\cos n\pi + n\sin n\pi}{\frac{4}{9}+n^2}e^{-\frac{2\pi}{3}} -$$

$$-\frac{-\frac{2}{3}\cos 0 + n\sin 0}{\frac{4}{9}+n^2}e^0 = \frac{-\frac{2}{3}\cos n\pi + 0}{\frac{4}{9}+n^2}e^{-\frac{2\pi}{3}} - \frac{-\frac{2}{3}\cos 0 + 0}{\frac{4}{9}+n^2} = \frac{-\frac{2}{3}\cdot(-1)^n e^{-\frac{2\pi}{3}} + \frac{2}{3}}{\frac{4}{9}+n^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{9\left(1-(-1)^n e^{-\frac{2\pi}{3}}\right)}{4+9n^2} = \frac{6\left(1-(-1)^n e^{-\frac{2\pi}{3}}\right)}{4+9n^2}$$

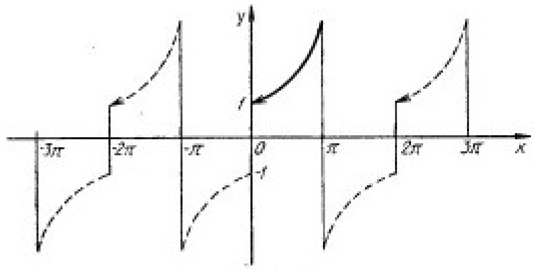
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{2x}{3}}\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{6\left(1-(-1)^n e^{-\frac{2\pi}{3}}\right)}{4+9n^2} = \frac{12}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n e^{-\frac{2\pi}{3}}}{4+9n^2}$$

Разложение имеет вид:

$$e^{-\frac{2x}{3}} = \frac{3\left(1-e^{-\frac{2\pi}{3}}\right)}{2\pi} + \frac{12}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\frac{2\pi}{3}}}{4+9n^2}\cos nx$$

Продолжим данную функцию нечётным образом.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{2x}{3}}\sin nx dx$$



$$\int_0^{\pi} e^{-\frac{2x}{3}} \sin nx dx = \frac{-\frac{2}{3}\sin nx - n\cos nx}{\frac{4}{9}+n^2} e^{-\frac{2x}{3}}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{-\frac{2}{3}\sin n\pi - n\cos n\pi}{\frac{4}{9}+n^2} e^{-\frac{2\pi}{3}} -$$

$$-\frac{-\frac{2}{3}\sin 0 - n\cos 0}{\frac{4}{9}+n^2} e^{0} = \frac{0 - n\cdot(-1)^n}{\frac{4}{9}+n^2} e^{-\frac{2\pi}{3}} - \frac{-n}{\frac{4}{9}+n^2} = \frac{-n\cdot(-1)^n}{\frac{4}{9}+n^2} e^{-\frac{2\pi}{3}} + \frac{n}{\frac{4}{9}+n^2} =$$

$$= \frac{n(1-(-1)^n e^{-\frac{2\pi}{3}})}{\frac{4}{9}+n^2} = \frac{9n(1-(-1)^n e^{-\frac{2\pi}{3}})}{4+9n^2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{2x}{3}} \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{9n(1-(-1)^n e^{-\frac{2\pi}{3}})}{4+9n^2}\right) = \frac{18}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n e^{-\frac{2\pi}{3}}}{4+9n^2}\cdot n$$

Разложение имеет вид:

$$e^{-\frac{2x}{3}} = \frac{18}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\frac{2\pi}{3}}}{4+9n^2} n\cdot\sin nx$$

3.25)Разложить данную функцию f(x) в ряд Фурье в интервале (a;b).

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -4 < x < 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1+x, & 0 < x < 4 \end{cases} \qquad l = 4$$

Найдём коэффиценты Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-4}^{0}(-2)dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{4}(1+x)dx = -\frac{1}{2}x\Big|_{-4}^{0} + \frac{1}{4}(x+\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^4 = -\frac{1}{2}(0+4) + \frac{1}{4}(4+\frac{1}{2}\cdot 16) =$$

$$= -2 + \frac{1}{4}(4+8) = -2+3 = 1$$

$$a_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{0}(-2)\cos\frac{k\pi x}{4}dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{4}(1+x)\cos\frac{k\pi x}{4}dx = \left|\begin{array}{l}\text{Интегрируем по частям} \\ 1+x=U \qquad dx=dU \\ \cos\frac{k\pi x}{4}dx = dV \quad V=\frac{4}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{4}\end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{4}\Big|_{-4}^{0}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4(1+x)}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{4}\Big|_{0}^{4} - \frac{4}{k\pi}\int_0^4 \sin\frac{k\pi x}{4}dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{4}\Big|_{-4}^{0}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4(1+x)}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{4} + \frac{16}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{4})\Big|_{0}^{4}\right) =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}(\sin 0 + \sin k\pi) + \left(\frac{(1+4)}{k\pi}\sin k\pi + \frac{4}{k^2\pi^2}\cos k\pi - \frac{(1+0)}{k\pi}\sin 0 - \frac{4}{k^2\pi^2}\cos 0\right) =$$

$$= \frac{4}{k^2\pi^2}\cos k\pi - \frac{4}{k^2\pi^2} = \frac{4}{k^2\pi^2}((-1)^n - 1)$$

Принимаем $k = 2n - 1$

$$a_k = a_{2n-1} = -\frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}$$

$$b_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{0}(-2)\sin\frac{k\pi x}{4}dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{4}(1+x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx = \left|\begin{array}{l}\text{Интегрируем по частям} \\ 1+x=U \qquad dx=dU \\ \sin\frac{k\pi x}{4}dx = dV \quad V=-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{4}\end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{4}\Big|_{-4}^{0}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{4(1+x)}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{4}\Big|_{0}^{4} + \frac{4}{k\pi}\int_0^4 \cos\frac{k\pi x}{4}dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{4}\Big|_{-4}^{0}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{4(1+x)}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{4} + \frac{16}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{4})\Big|_{0}^{4}\right) =$$

$$= \frac{2}{k\pi}(\cos 0 - \cos k\pi) + \left(-\frac{(1+4)}{k\pi}\cos k\pi + \frac{4}{k^2\pi^2}\sin k\pi + \frac{(1+0)}{k\pi}\cos 0 - \frac{4}{k^2\pi^2}\sin 0\right) =$$

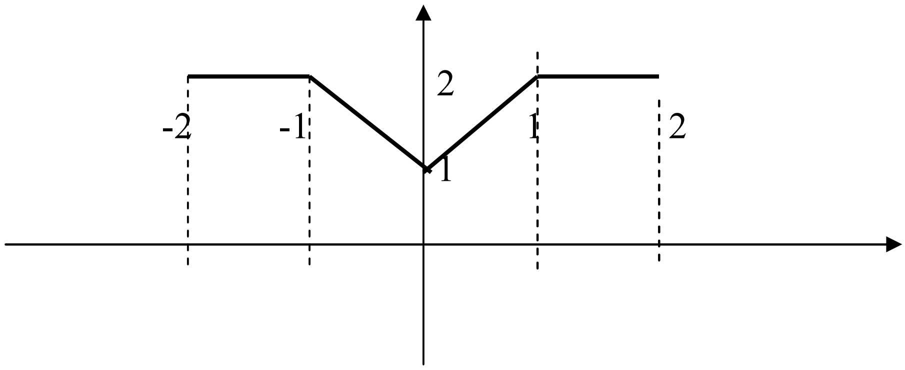
$$= \frac{2}{k\pi}(1 - \cos k\pi) + \left(-\frac{5}{k\pi}\cos k\pi + \frac{1}{k\pi}\right) = \frac{2}{k\pi} - \frac{2}{k\pi}\cos k\pi - \frac{5}{k\pi}\cos k\pi + \frac{1}{k\pi} =$$

$$= -\frac{7}{k\pi}\cdot(-1)^n + \frac{3}{k\pi} = \frac{1}{k\pi}(3 - 7\cdot(-1)^k)$$

Получаем ряд Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-7\cdot(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{4}$$

4.25) Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически.



Запишем функцию аналитически.

$$f(x)=\begin{cases}2 & -2<x<-1\\ x+1 & -1<x<0\\ 1-x & 0<x<1\\ 2 & 1<x<2\end{cases}\qquad \omega=4$$

Вычислим коэффициенты Фурье.

Функция симметрична относительно оси ОУ, значит она чётная.

Член, содержащий синусы, равен нулю.

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}2dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-x)dx+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}2dx=\frac{1}{2}x\Big|_{-2}^{-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x+1)^2\Big|_{-1}^{0}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-x)\Big|_{0}^{1}+\frac{1}{2}x\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{2}(-1+2)+\frac{1}{4}((0+1)^2-(-1+1)^2)-\frac{1}{4}((1-1)^2-(1-0)^2)+$$

$$+\frac{1}{2}(2-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(1-0)-\frac{1}{4}(0-1)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$a_k=\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}2\cos\frac{k\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x+1)\cos\frac{k\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-x)\cos\frac{k\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}2\cos\frac{k\pi x}{2}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x+1=U\Rightarrow dU=dx\\ \cos\frac{k\pi x}{2}dx=dV\Rightarrow V=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\end{array}\right|\left|\begin{array}{l}1-x=U\Rightarrow dU=-dx\\ \cos\frac{k\pi x}{2}dx=dV\Rightarrow V=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_{-2}^{-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{2(x+1)}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_{-1}^{0}-\frac{2}{k\pi}\int_{-1}^{0}\sin\frac{k\pi x}{2}dx\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2(1-x)}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_{0}^{1}+\frac{2}{k\pi}\int_{0}^{1}\sin\frac{k\pi x}{2}dx\right)+\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_{1}^{2}=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_{-2}^{-1}+\left(\frac{(x+1)}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}+\frac{2}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}+$$

$$+\left(\frac{(1-x)}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}-\frac{2}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{2}\right)\Big|_{0}^{1}+\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_{1}^{2}=$$

$$=\frac{2}{k\pi}(\sin(-\frac{k\pi}{2})-\sin(-k\pi))+(\frac{(0+1)}{k\pi}\sin 0+\frac{2}{k^2\pi^2}\cos 0-\frac{(-1+1)}{k\pi}\sin(-\frac{k\pi}{2})-$$

$$-\frac{2}{k^2\pi^2}\cos(-\frac{k\pi}{2}))+(\frac{(1-1)}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}-\frac{2}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{(1-0)}{k\pi}\sin 0+\frac{2}{k^2\pi^2}\cos 0)+$$

$$+\frac{2}{k\pi}(\sin k\pi-\sin\frac{k\pi}{2})=-\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{2}{k^2\pi^2}-\frac{2}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{2}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{2}{k^2\pi^2}-$$

$$-\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}=-\frac{4}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{4}{k^2\pi^2}-\frac{4}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi}{2}$$

$k=2n-1$

$$a_k=a_{2n-1}=-\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}+\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}-\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}=$$

$$=-\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin(n\pi-\frac{\pi}{2})+\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}-\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(n\pi-\frac{\pi}{2})=$$

$$=-\frac{4}{(2n-1)\pi}\cos n\pi+\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}+\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\sin n\pi=\frac{4}{(2n-1)\pi}\cdot(-1)^n+\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}$$

Получаем ряд:

$$f(x)=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

5.25) Воспользовавшись разложением функции в ряд Фурье найти сумму данного ряда.

$f(x)=\pi^2-x^2 \qquad [-\pi;\pi]$

Найдём коэффициенты Фурье.

Функция чётная, значит не содержит синусов

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)dx=\frac{2}{\pi}\cdot(\pi^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot(\pi^2\cdot\pi-\frac{1}{3}\cdot\pi^3)=\frac{2}{\pi}\cdot(\pi^3-\frac{1}{3}\cdot\pi^3)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{3}\cdot\pi^3=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nxdx=\left|\begin{matrix}\pi^2-x^2=U\Rightarrow -2xdx=dU\\ \cos nxdx=dV\Rightarrow V=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2-x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx\right)=\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\left|\begin{matrix}x=U\Rightarrow dx=dU\\ \sin nxdx=dV\Rightarrow V=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)=-\frac{4}{\pi n^2}(\cos \pi n-\cos 0)=-\frac{4}{\pi n^2}(\cos \pi n-1)=$$

$$=\begin{cases}0, \text{ если } n \text{ - чётное}\\ \dfrac{8}{\pi n^2} \text{ - если } n \text{ - нечётное}\end{cases}$$

Принимаем $n=2k+1$

$$a_{2k+1}=\frac{8}{\pi(2k+1)^2}$$

Получаем ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{(2n+1)^2}$$

Полагаем $x=0$

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\Rightarrow\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{2\pi^2}{3}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^3}{12}$$