Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

З. Н. Примичева, Т. А. Романчук, С. Н. Жук

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве пособия для специальностей 1-36 04 02 «Промышленная электроника», 1-39 02 01 «Моделирование и компьютерное проектирование радиоэлектронных средств», 1-39 03 01 «Электронные системы безопасности», 1-39 03 02 «Программируемые мобильные системы», 1-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети», 1-40 02 02 «Электронные вычислительные средства», 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)», 1-53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах»

Минск БГУИР 2023

УДК 517(076)
ББК 22.1я73
П76

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра математических методов в экономике учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет» (протокол №6 от 26.01.2023);

доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент Т. С. Мардвилко

Примичева, З. Н.

П76 Специальные математические методы и функции : пособие / З. Н. Примичева, Т. А. Романчук, С. Н. Жук – Минск : БГУИР, 2023. – 129 с.
ISBN 978-985-543-721-6.

Содержит сведения по линейным пространствам, элементам функционального анализа, линейным операторам, элементам теории рядов Фурье, уравнениям математической физики, интегралам Эйлера первого и второго рода, уравнениям Бесселя, *Z*-преобразованию, элементам вариационного и операционного исчисления. Может использоваться преподавателями для самостоятельной контролируемой работы студентов и проведения практических занятий.

УДК 517(076)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-543-721-6

Введение

Данное издание представляет собой пособие по спецкурсу «Специальные математические методы и функции», изучаемому студентами всех форм обучения БГУИР.

Учебная дисциплина «Специальные математические методы и функции» включает в свой состав ряд тем, представляющих собой существенную значимость для профессиональной деятельности инженера и применяемых при решении различных задач в областях радиотехники и электроники, а также связанных с ними приложениях в медицине, биологии, генетике, экологии, в задачах оптимизации сигналов.

Пособие содержит основные теоретические сведения по таким разделам математики как линейные пространства, элементы функционального анализа, линейные операторы, элементы теории рядов Фурье, уравнения математической физики, интегралы Эйлера первого и второго рода, уравнения Бесселя, Z-преобразования, элементы вариационного и операционного исчисления. Теоретический материал имеет последовательное изложение и дополняется решением типовых примеров с подробными комментариями. В конце каждого раздела приведены условия задач с ответами для самостоятельного решения студентами с целью закрепления полученных знаний и навыков.

1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА[1]

Определение 1.1. Линейным (или векторным) пространством называется непустое множество V элементов произвольной природы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$, то есть $V = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots\}$, условно называемых **векторами**, над которыми определены две операции: **сложения двух векторов** $\oplus : \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \Rightarrow \vec{x} \oplus \vec{y} \in V$ и **умножения вектора на число** $\otimes : \forall \vec{x} \in V, \forall \alpha \in P \Rightarrow \alpha \otimes \vec{x} \in V$, где $P-$некоторое числовое множество, удовлетворяющие следующим аксиомам:

1) $\vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{y} \oplus \vec{x}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$;

2) $(\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z} = \vec{x} \oplus (\vec{y} \oplus \vec{z})$, $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$;

3) существует **нуль-вектор** $\vec{0} \in V$ такой, что $\vec{x} \oplus \vec{0} = \vec{x}$ для любого $\vec{x} \in V$;

4) для каждого $\vec{x} \in V$ существует ему **противоположный элемент** $-\vec{x} \in V$ такой, что $\vec{x} \oplus (-\vec{x}) = \vec{0}$;

5) $1 \otimes \vec{x} = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in V$;

6) $\alpha \otimes (\beta \otimes \vec{x}) = (\alpha\beta) \otimes \vec{x}, \forall \vec{x} \in V, \forall \alpha, \beta \in P$;

7) $\alpha \otimes (\vec{x} \oplus \vec{y}) = (\alpha \otimes \vec{x}) \oplus (\alpha \otimes \vec{y})$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall \alpha \in P$;

8) $(\alpha + \beta) \otimes \vec{x} = (\alpha \otimes \vec{x}) \oplus (\beta \otimes \vec{x})$, $\forall \vec{x} \in V, \forall \alpha, \beta \in P$.

Свойства линейного пространства:

1. В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.

2. В линейном пространстве V для каждого вектора $\vec{x} \in V$ существует единственный противоположный ему вектор $-\vec{x} \in V$.

3. Для вектора $-\vec{x} \in V$ противоположным вектором является $\vec{x} \in V$.

4. $0 \otimes \vec{x} = \vec{0}, \forall \vec{x} \in V$.

5. $-1 \otimes \vec{x} = -\vec{x}, \forall \vec{x} \in V$.

6. $\alpha \otimes \vec{0} = \vec{0}, \forall \alpha \in P$.

7. Если $\alpha \otimes \vec{x} = \vec{0}$ и $\alpha \neq 0$, то $\vec{x} = \vec{0}$.

[1] При подготовке данного раздела использовались следующие источники: [2, 8, 9, 10].

8. Если $\alpha \otimes \vec{x} = \vec{0}$ и $\vec{x} \neq \vec{0}$, то $\alpha = 0$.

Пример 1.1. Выясните, образует ли линейное пространство множество всех положительных чисел с операциями $\vec{x} \oplus \vec{y} = x \cdot y, \alpha \otimes \vec{x} = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ По условию $V-$ множество всех положительных чисел. Значит, множество V замкнуто относительно указанных операций.

Проверим справедливость аксиом линейного пространства.

1) $\vec{x} \oplus \vec{y} = x \cdot y = y \cdot x = \vec{y} \oplus \vec{x}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$, то есть аксиома 1 выполняется.

2) $(\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z} = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = \vec{x} \oplus (\vec{y} \oplus \vec{z}), \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$, значит, аксиома 2 имеет место.

3) Роль нуль-вектора $\vec{0} \in V$ играет число 1, так как $1 \in V$ и $\vec{x} \oplus \vec{0} = x \cdot 1 = x = \vec{x}, \forall \vec{x} \in V$, следовательно, аксиома 3 выполняется.

4) Так как нуль-вектором множества V является число 1, то равенство $\vec{x} \oplus (-\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in V,$ возможно, когда $-\vec{x} = \dfrac{1}{x}$, так как $\vec{x} \oplus (-\vec{x}) = x \cdot \dfrac{1}{x} = 1 = \vec{0},$ $\forall \vec{x} \in V$, поэтому аксиома 4 справедлива.

5) $1 \otimes \vec{x} = x^1 = x = \vec{x}, \forall \vec{x} \in V$, значит, аксиома 5 имеет место.

6) $\alpha \otimes (\beta \otimes \vec{x}) = \left(x^{\beta}\right)^{\alpha} = x^{\beta\alpha} = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \otimes \vec{x}, \forall x \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то есть аксиома 6 выполняется.

7) $\alpha \otimes (\vec{x} \oplus \vec{y}) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha} = (\alpha \otimes \vec{x}) \oplus (\alpha \otimes \vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \ \alpha \in \mathbb{R}$, значит, аксиома 7 справедлива.

8) $(\alpha + \beta) \otimes \vec{x} = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta} = (\alpha \otimes \vec{x}) \oplus (\beta \otimes \vec{x}), \forall \vec{x} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, следовательно, аксиома 8 выполняется.

Таким образом, множество всех положительных чисел с операциями $\vec{x} \oplus \vec{y} = x \cdot y, \alpha \otimes \vec{x} = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, образует линейное пространство. ▲

Пример 1.2. Выясните, образует ли линейное пространство множество всех невырожденных матриц второго порядка с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на действительное число.

Δ Рассмотрим невырожденные матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\det A=1$, и $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\det B=-1$. Найдем $A+B$. Поскольку $A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, то $\det(A+B)=0$. Значит, $A+B\notin V$. Следовательно, рассматриваемое множество не замкнуто относительно операции сложения двух векторов, поэтому не является линейным пространством с указанными операциями. ▲

Примеры линейных пространств:

1. Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ с естественными операциями сложения и умножения двух чисел.

2. Множество всех матриц размерности $m\times n$ с естественными операциями сложения двух матриц и умножения матрицы на число.

3. Множество $\mathbb{R}^3$ всех векторов трехмерного пространства с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на число.

4. Множество всех решений линейного однородного дифференциального уравнения $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на число.

5. Пространство $C[a;b]$ всех непрерывных действительных на отрезке $[a;b]$ функций.

6. Пространство $L_2[a;b]$ всех функций $f(x)$, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a;b]$, для которых существует интеграл $\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

7. Пространство l_2 всех последовательностей $\{x_n\}$ действительных чисел, для которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n{}^2$.

Определение 1.2. Множество V_1 элементов линейного пространства V называется **подпространством** пространства V, если выполнены условия:

1) во множестве V_1 операции сложения векторов и умножения вектора на число определяются также, как и в V;

2) если $\vec{x}, \vec{y} \in V_1$, то и $\vec{x} \oplus \vec{y} \in V_1$;

3) если $\alpha \in P, \vec{x} \in V_1$, то и $\alpha \otimes \vec{x} \in V_1$.

Заметим, что всякое подпространство V_1 линейного пространства является линейным пространством.

Пример 1.3. Рассмотрим линейное пространство $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на число. Покажем, что множества $V_1 = \{\vec{a} = (x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ и $V_2 = \{\vec{b} = (0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ являются линейными подпространствами пространства V.

Δ Для любых $\vec{a}_1 = (x_1; 0)$ и $\vec{a}_2 = (x_2; 0)$ из множества V_1 выполняется условие $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2; 0) \in V_1$ и $\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot x; 0) \in V_1$, $\forall \vec{a} \in V_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Для произвольных векторов $\vec{b}_1 = (0; y_1)$ и $\vec{b}_2 = (0; y_2)$ из множества V_2 имеем $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = (0; y_1 + y_2) \in V_2$ и $\alpha \cdot \vec{b} = (0; \alpha \cdot y) \in V_2$, $\forall \vec{b} \in V_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Значит, V_1 и V_2 – подпространства линейного пространства V. ▲

Пример 1.4. Рассмотрим линейное пространство V всех действительных чисел с естественными операциями сложения и умножения двух чисел. Покажем, что множество V_1 четных чисел с указанными операциями не является линейным подпространством пространства V.

Δ Так как сумма четных чисел есть число четное, то множество V_1 является замкнутым относительно операции сложения двух векторов.

Поскольку $\alpha \cdot x$ не всегда является четным числом, множество V_1 не является замкнутым относительно операции умножения вектора на число.

Следовательно, V_1 не является подпространством линейного пространства V. ▲

Определение 1.3. Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ линейного пространства V называется **линейно зависимой**, если существует набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, среди которых хотя бы одно число не равно нулю, такой, что $(\alpha_1 \otimes \vec{x}_1) \oplus (\alpha_2 \otimes \vec{x}_2) \oplus \ldots \oplus (\alpha_n \otimes \vec{x}_n) = \vec{0}$.

Определение 1.4. Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ линейного пространства V называется **линейно независимой**, если векторное равенство $(\alpha_1 \otimes \vec{x}_1) \oplus (\alpha_2 \otimes \vec{x}_2) \oplus \ldots \oplus (\alpha_n \otimes \vec{x}_n) = \vec{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Теорема 1.1. Если к системе r линейно зависимых векторов присоединить любые m векторов, то получим систему $r + m$ линейно зависимых векторов.

Теорема 1.2. Если из системы r линейно независимых векторов отбросить любые m векторов, $m < r$, то получим систему $r - m$ линейно независимых векторов.

Теорема 1.3. Если среди векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ имеется нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Теорема 1.4. Для того чтобы векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, линейного пространства V были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.

Определение 1.5. Пусть в линейном пространстве V выполняются следующие условия:

1) существует n линейно независимых векторов;

2) любая система $n + 1$ векторов линейно зависима,

тогда число n называется **размерностью линейного пространства** V и обозначается $\dim V = n$.

Определение 1.6. Базисом n**-мерного линейного пространства** V называется любая упорядоченная система n линейно независимых векторов этого пространства.

Теорема 1.5. Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – базис n-мерного линейного пространства V, то любой вектор $\vec{x}$ этого пространства линейно выражается через векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, то есть

$$\vec{x} = (\alpha_1 \otimes \vec{x}_1) \oplus (\alpha_2 \otimes \vec{x}_2) \oplus \ldots \oplus (\alpha_n \otimes \vec{x}_n), \tag{1.1}$$

причем коэффициенты разложения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ определены однозначным образом.

Теорема 1.6. Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – система линейно независимых векторов линейного пространства V и любой вектор $\vec{x}$ этого пространства линейно выражается через векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, то $\dim V = n$.

Определение 1.7. Равенство (1.1) называется **разложением вектора $\vec{x}$ по базису** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – **координатами вектора $\vec{x}$ в этом базисе**.

Определение 1.8. Линейное пространство V называется **конечномерным**, если в нем имеется базис, состоящий из конечного числа векторов. Линейное пространство V называется **бесконечномерным**, если в нем можно указать систему из любого конечного числа линейного независимых векторов.

Множество всех аналитических (бесконечное число раз дифференцируемых) функций является примером бесконечномерного пространства, в котором в качестве базиса можно взять совокупность многочленов $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$.

Пример 1.5. Дано линейное пространство $V = \mathbb{R}^3$. Докажите, что данный набор векторов $\vec{e}_1 = (1;7;-5)$, $\vec{e}_2 = (2;-3;-6)$, $\vec{e}_3 = (0;4;-1)$ образует базис линейного пространства V и найдите координаты вектора $\vec{y} = (1;-1;-2)$ в этом базисе.

Δ Известно, что базисом пространства $\mathbb{R}^3$ является любая тройка некомпланарных векторов. Поэтому проверим компланарность векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Для этого найдем их смешанное произведение:

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\begin{vmatrix}1 & 7 & -5\\ 2 & -3 & -6\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}\overset{S_2+(-2)S_1}{=}\begin{vmatrix}1 & 7 & -5\\ 0 & -17 & 4\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}\overset{S_2+4S_3}{=}\begin{vmatrix}1 & 7 & -5\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}\overset{S_3+4S_2}{=}\begin{vmatrix}1 & 7 & -5\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=1.$$

Так как $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=1\neq 0$, то векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ не компланарны и, следовательно, образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Найдем координаты вектора $\vec{y}$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$. Для этого представим вектор $\vec{y}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$: $\vec{y}=y_1\cdot\vec{e}_1+y_2\cdot\vec{e}_2+y_3\cdot\vec{e}_3$.

Тогда тройка чисел $(y_1;y_2;y_3)$ и будет являться координатами вектора $\vec{y}$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$. Получим

$$\vec{y}=y_1\cdot\vec{e}_1+y_2\cdot\vec{e}_2+y_3\cdot\vec{e}_3\Leftrightarrow y_1\cdot\begin{pmatrix}1\\ 7\\ -5\end{pmatrix}+y_2\cdot\begin{pmatrix}2\\ -3\\ -6\end{pmatrix}+y_3\cdot\begin{pmatrix}0\\ 4\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -2\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y_1+2y_2=1,\\ 7y_1-3y_2+4y_3=-1,\\ -5y_1-6y_2-y_3=-2.\end{cases}$$

Решим полученную систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 1\\ 7 & -3 & 4 & -1\\ -5 & -6 & -1 & -2\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{S_2+(-7)S_1\\ S_3+5S_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & -17 & 4 & -8\\ 0 & 4 & -1 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{S_2+4S_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 4 & -1 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{S_3+4S_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 19\end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система линейных уравнений:

$$\begin{cases}y_1+2y_2=1,\\ -y_2=4,\\ -y_3=19,\end{cases}$$

из которой находим $y_3=-19, y_2=-4, y_1=9$. Значит, $\vec{y}=9\cdot\vec{e}_1-4\cdot\vec{e}_2-19\cdot\vec{e}_3$. ▲

Задачи и упражнения

1. Выясните, образует ли линейное пространство данное множество с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на действительное число. В случае положительного ответа укажите размерность и какой-нибудь базис этого линейного пространства.

1.1. Множество всех нечетных чисел.

Ответ: не образует.

1.2. Множество всех чисел, кратных 7.

Ответ: не образует.

1.3. Множество всех плоских векторов, сумма координат которых является положительным числом.

Ответ: не образует.

1.4. Множество всех плоских векторов, сумма координат которых равна нулю.

Ответ: образует, $\dim V = 1$, $\vec{e} = (1;-1)$.

1.5. Множество всех плоских векторов, коллинеарных данной прямой.

Ответ: образует, $\dim V = 1$, $\vec{e} = (B;-A)$, где $l: Ax + By + C = 0$ – данная прямая.

1.6. Множество всех плоских векторов, перпендикулярных к данной прямой.

Ответ: образует, $\dim V = 1$, $\vec{e} = (A;B)$, где $l: Ax + By + C = 0$ – данная прямая.

1.7. Множество всех векторов, параллельных плоскости $x - 3y + 2z = 0$.

Ответ: образует, $\dim V = 2$, $\vec{e}_1 = (3;1;0)$, $\vec{e}_2 = (2;0;-1)$.

1.8. Множество всех функций, определенных на отрезке $[a;b]$, таких, что $f(a) = 1$.

Ответ: не образует.

1.9. Множество всех функций, определенных на отрезке $[a;b]$, таких, что $f(x) \geq 0, \forall x \in [a;b]$.

Ответ: не образует.

1.10. Множество всех диагональных матриц третьего порядка.

Ответ: образует, $\dim V = 3$, $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.11. Множество всех многочленов от одной переменной с действительными коэффициентами степени не выше n.

Ответ: образует, $\dim V = n+1$, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, …, $f_{n+1}(x) = x^n$.

1.12. Множество всех многочленов от одной переменной с действительными коэффициентами степени n.

Ответ: не образует.

1.13. Множество всех сходящихся к единице числовых последовательностей.

Ответ: не образует.

1.14. Множество всех решений системы линейных однородных алгебраических уравнений.

Ответ: образует, $\dim V = n - r$, где $n -$ число неизвестных, $r -$ ранг матрицы системы.

2. Исследуйте линейную зависимость векторов.

2.1. $\vec{a} = (1;1;2)$, $\vec{b} = (0;1;1)$, $\vec{c} = (1;1;1)$.

Ответ: линейно независимы.

2.2. $\vec{a} = (-1;3;-6)$, $\vec{b} = (5;-4;8)$, $\vec{c} = (1;-2;4)$.

Ответ: линейно зависимы.

2.3. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: линейно независимы.

2.4. $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: линейно независимы.

2.5. $\vec{x}_1 = e^t$, $\vec{x}_2 = \operatorname{sh} t$, $\vec{x}_3 = \operatorname{ch} t$.

Ответ: линейно зависимы.

2.6. $\vec{x}_1 = \sin^2 t$, $\vec{x}_2 = 5\cos^2 t$, $\vec{x}_3 = 1$.

Ответ: линейно зависимы.

2.7. $f_1(x) = 2x^4 - 3$, $f_2(x) = x^4 - 4x^3 - x + 1$, $f_3(x) = 2x^3 + x^2$, $f_4(x) = 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x - 7$.

Ответ: линейно независимы.

2.8. $f_1(x) = x^4 + 1$, $f_2(x) = x^3 + 2$, $f_3(x) = x^2 + 3$, $f_4(x) = x + 4$, $f_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Ответ: линейно независимы.

3. Даны линейные пространства:

3.1) $V = \mathbb{R}^3$;

3.2) $V -$ пространство всех матриц второго порядка;

3.3) $V -$пространство всех многочленов, степень которых не превосходит трех.

В каждом из этих пространств указан упорядоченный набор векторов и фиксированный вектор $\vec{y}$.

Докажите, что данный набор векторов образует базис линейного пространства V и найдите координаты вектора $\vec{y}$ в этом базисе.

3.1.1. $\vec{e}_1 = (1;-2;4)$, $\vec{e}_2 = (-3;5;4)$, $\vec{e}_3 = (1;0;-2)$, $\vec{y} = (-6;14;9)$.

Ответ: $\vec{y} = \frac{1}{2} \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 + \frac{5}{2} \cdot \vec{e}_3$.

3.1.2. $\vec{e}_1 = (1;-1;-1)$, $\vec{e}_2 = (0;1;0)$, $\vec{e}_3 = (1;3;2)$, $\vec{y} = (-1;4;2)$.

Ответ: $\vec{y} = -\frac{4}{3} \cdot \vec{e}_1 + \frac{5}{3} \cdot \vec{e}_2 + \frac{1}{3} \cdot \vec{e}_3$.

3.2.1. $A_1=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Ответ: $Y=\frac{3}{2}\cdot A_1-\frac{7}{2}\cdot A_2+\frac{3}{2}\cdot A_3+\frac{3}{2}\cdot A_4$.

3.2.2. $A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 4\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}6 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Ответ: $Y=-1\cdot A_1+0\cdot A_2-16\cdot A_3-9\cdot A_4$.

3.3.1. $f_1(x)=1$, $f_2(x)=-2x+1$, $f_3(x)=x^2-2x-3$, $f_4(x)=x^3-1$, $y(x)=3x^3-7x^2+4x+15$.

Ответ: $y(x)=-8\cdot f_1(x)+5\cdot f_2(x)-7\cdot f_3(x)+3\cdot f_4(x)$.

3.3.2. $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x+1$, $f_3(x)=(x+1)^2$, $f_4(x)=(x+1)^3$, $y(x)=x^3-2x^2+3x-4$.

Ответ: $y(x)=-10\cdot f_1(x)+10\cdot f_2(x)-5\cdot f_3(x)+f_4(x)$.

4. Решите систему линейных уравнений. Для соответствующей однородной системы определите базис (фундаментальную систему решений) и размерность пространства ее решений.

4.1. $$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=6,\\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=5,\\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=8,\\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5=1.\end{cases}$$

Ответ: данная система решений не имеет; $X_0 = \left(c_1; -\frac{3}{2}c_1 - 2c_4 - 4c_5; c_4 + 3c_5; c_4; c_5 \right)^T$, $c_1, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$, $E_1 = \left(1; -\frac{3}{2}; 0; 0; 0 \right)^T$, $E_2 = (0; -2; 1; 1; 0)^T$, $E_3 = (0; -4; 3; 0; 1)^T$, $\dim V = 3$.

4.2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -3. \end{cases}$

Ответ: $X = (-2; -6c_5; c_5 + 1; c_5 - 1; c_5)^T$, $c_5 \in \mathbb{R}$; $X_0 = (0; -6c_5; c_5; c_5; c_5)^T$, $c_5 \in \mathbb{R}$, $E_1 = (0; -6; 1; 1; 1)^T$, $\dim V = 1$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА[2]

Определение 2.1. Непустое множество X элементов произвольной природы $x, y, z, \ldots$ называется **метрическим пространством**, а его элементы – точками, если любым двум элементам x и y из множества X ставится в соответствие действительное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$, и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X$;

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \forall x, y, z \in X$.

Обозначается метрическое пространство (X, ρ).

Введенная операция называется **метрической**, а число $\rho(x, y) -$ **расстоянием (метрикой)** между x и y.

Метрическое пространство не обязательно является линейным.

Определение 2.2. Всякое подмножество Y метрического пространства X, рассматриваемое с тем же расстоянием между элементами, также является

---

[2] При подготовке данного раздела использовались следующие источники: [1, 2, 3, 6, 7, 9, 10].

метрическим пространством и называется **подпространством метрического пространства** X.

Определение 2.3. Расстоянием между множествами M и N метрического пространства X называется число $\rho(M,N)=\inf\limits_{\substack{x\in M\\ y\in N}}\rho(x,y)$.

Примеры метрических пространств:

1. Пространство изолированных точек произвольного множества X с расстоянием $\rho(x,y)=\begin{cases}0, \text{если } x=y,\\ 1, \text{если } x\neq y.\end{cases}$

2. Множество всех действительных чисел ℝ, в котором расстояние между числами x и y определяется по формуле $\rho(x,y)=|x-y|$.

3. Множество $\mathbb{R}^n$ всех свободных векторов, в котором расстояние между векторами $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\vec{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ можно определить по одной из формул:

$$\rho_1(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,\qquad \rho_2(\vec{x},\vec{y})=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|,$$

$$\rho_3(\vec{x},\vec{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}.$$

4. Множество всех матриц размерности $m\times n$, в котором расстояние между матрицами $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ можно определить по формуле $\rho(A,B)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}-b_{ij})^2}$.

5. Множество $C[a;b]$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций, в котором $\rho(f(x),\varphi(x))=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)-\varphi(x)|$.

6. Множество $C^n[a;b]$ всех функций, имеющих на отрезке $[a;b]$ непрерывные производные до n-го порядка включительно, в котором $\rho(f(x),\varphi(x))=\max\limits_{a\le x\le b}\{|f(x)-\varphi(x)|,|f'(x)-\varphi'(x)|,\ldots,|f^{(n)}(x)-\varphi^{(n)}(x)|\}$.

7. Пространство $L_p[a;b]$, $1 \le p < +\infty$, функций, интегрируемых с p-ой степенью на отрезке $[a;b]$, то есть $\int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty$, с расстоянием

$$\rho(f(x),\varphi(x)) = \left(\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

8. Пространство $l_p, 1 \le p < +\infty$, всех последовательностей $\{x_n\}$ действительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$, с расстоянием

$$\rho(x_n, y_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

9. Пространство всех ограниченных последовательностей $\{x_n\}$ действительных чисел с расстоянием $\rho(x_n, y_n) = \sup_{1 \le k < \infty} |x_k - y_k|$.

10. Метрика Хэмминга.

Информация, передаваемая по каналам связи с одного компьютера на другой, обычно записывается в виде вектора $\vec{x}(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i, i = 1,2,\ldots,n,$ равно либо 0, либо 1. Рассмотрим линейное пространство V_n векторов $\vec{x}$ над множеством двух чисел 0 и 1. Операции $\oplus$ и $\otimes$ над этими числами таковы:

$$\begin{array}{ll} 0 \oplus 0 = 0, & 0 \otimes 0 = 0, \\ 0 \oplus 1 = 1, & 1 \otimes 0 = 0, \\ 1 \oplus 0 = 1, & 0 \otimes 1 = 0, \\ 1 \oplus 1 = 0, & 1 \otimes 1 = 1. \end{array}$$

В роли числа, противоположного 1, выступает 1.

Это алгебра выключателя света: если дважды нажать на выключатель, то сначала свет зажжется, а потом погаснет.

Например, $\vec{x}(0,0,1,0,0,1,0,1,)$ – вектор из V_8, а $\vec{x}(1,0,0,1)$ – вектор из V_4.

Расстояние между $\vec{x}$ и $\vec{y}$, обозначаемое $\mathrm{dist}(\vec{x},\vec{y})$, равно числу различий в координатах векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и называется метрикой Хэмминга.

Пусть, например, $\vec{x}(0,1,1,0)$, $\vec{y}(1,0,1,0)$. У этих векторов одинаковы третьи и четвертые координаты, а остальные различны, поэтому $\mathrm{dist}(\vec{x},\vec{y})=2$. Если же $\vec{x}(0,0,1,0,1,1,0,1)$, $\vec{y}(1,1,1,0,0,1,0,0)$, то $\mathrm{dist}(\vec{x},\vec{y})=4$.

Пример 2.1. Выясните, является ли множество действительных чисел $\mathbb{R}$ метрическим пространством с метрикой $\rho(x,y)=\sin^2(x-y)$.

Δ Заметим, что $\rho(x,y)=\sin^2(x-y)\geq 0$ для любых $x,y\in\mathbb{R}$. Однако существуют $x=2\pi, y=\pi, x\neq y$, такие, что $\rho(2\pi,\pi)=\sin^2(2\pi-\pi)=\sin^2\pi=0$.

Значит, аксиома 1 метрического пространства нарушается и множество $\mathbb{R}$ не является метрическим пространством с указанной операцией. ▲

Определение 2.4. Множество $\{x: x\in X, \rho(x,x_0)<r\}$ называется **открытым шаром** $B(x_0,r)$ с центром в точке x_0 и с радиусом r или r-окрестностью точки x_0.

Определение 2.5. Пусть $A\subset X$. Точка x называется **внутренней точкой** множества A, если существует радиус $r>0$ такой, что шар $B(x,r)\subset A$.

Определение 2.6. Множество A называется **открытым**, если каждая его точка является внутренней.

Определение 2.7. Точка x называется **точкой прикосновения** множества A, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из множества A.

Определение 2.8. Точка x называется **изолированной точкой** множества A, если существует окрестность этой точки, не содержащая точек из A, отличных от x.

Определение 2.9. Точка x называется **предельной точкой** множества A, если в любой ее окрестности содержатся точки множества A, отличные от x.

Определение 2.10. Совокупность всех точек прикосновения множества A называется **замыканием множества** A.

Определение 2.11. Множество $A \subset X$ называется **замкнутым**, если оно совпадает со своим замыканием.

Теорема 2.1. Множество A открыто тогда и только тогда, когда его дополнение $X \setminus A$ замкнуто.

Определение 2.12. Точка x называется **граничной точкой** множества A, если любая окрестность точки x содержит как точки принадлежащие A, так и точки, которые этому множеству не принадлежат.

Определение 2.13. Совокупность всех граничных точек множества A называется его **границей**.

Определение 2.14. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства (X, ρ) называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при любых $n, m > N$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Теорема 2.2. Любая сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной последовательностью.

Определение 2.15. Метрическое пространство (X, ρ) называется **полным**, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к некоторому $x \in X$.

Примеры полных метрических пространств:

1. Пространство всех действительных чисел $\mathbb{R}$, в котором расстояние между числами x и y определяется по формуле $\rho(x, y) = |x - y|$.

2. Пространство $\mathbb{R}^n$ всех свободных векторов, в котором расстояние между векторами $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определяется по формуле

$$\rho_3(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

3. Пространство $C[a;b]$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций, в котором $\rho(f(x),\varphi(x)) = \max\limits_{a\le x\le b} |f(x)-\varphi(x)|$.

4. Пространство $L_2[a;b]$ всех действительных функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a;b]$.

5. Пространство l_2 всех числовых последовательностей, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {x_n}^2 < +\infty$.

Пример 2.2. Рассмотрим $X = (0;+\infty)$, $\rho(x,y) = |x-y|$. Покажем, что данное множество не является полным с указанной метрикой.

Δ Рассмотрим последовательность $\{x_n\}, x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Указанная последовательность является фундаментальной, поскольку $\rho(x_n, y_m) = |x_n - y_m| = \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}\right| \to 0$ при $n,m \to \infty$, но ее предел, равный нулю, не принадлежит множеству X. Следовательно, множество $X = (0;+\infty)$ не является полным с введенной метрикой. ▲

Пример 2.3. Выясните, сходится ли последовательность $\{x_n\}$, $x_n = \dfrac{1}{n^2}\sqrt{n^4 t^2 + 1}$, метрического пространства $C[-4;4]$ к точке $a = |t|$.

Δ Поскольку $\rho(f(x),\varphi(x)) = \max\limits_{a\le x\le b} |f(x)-\varphi(x)|$, найдем $|x_n(t) - a|$:

$$|x_n(t) - a| = \left|\frac{1}{n^2}\sqrt{n^4t^2+1} - |t|\right| = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^4}} - |t| =$$

$$= \frac{t^2 + \dfrac{1}{n^4} - t^2}{\sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^4}} + |t|} = \frac{\dfrac{1}{n^4}}{\sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^4}} + |t|} \le \frac{\dfrac{1}{n^4}}{\sqrt{\dfrac{1}{n^4}}} = \frac{1}{n^2} \to 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда $\rho(x_n(t), a) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, последовательность $\{x_n\}$ сходится к $a = |t|$ в пространстве $C[-4;4]$. ▲

Определение 2.16. Линейное пространство V называется **нормированным**, если каждому вектору $\vec{x} \in V$ поставлено в соответствие действительное число $\|\vec{x}\|$, называемое нормой вектора $\vec{x}$, удовлетворяющее аксиомам:

1) $\|\vec{x}\| \geq 0, \forall \vec{x} \in V,$ и $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0};$

2) $\|\alpha \otimes \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),\ \forall \vec{x} \in V;$

3) $\|\vec{x} \oplus \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V.$

Примеры нормированных пространств:

1. Пространство всех действительных $\mathbb{R}$ чисел с нормой $\|\vec{x}\| = |x|$.

2. Пространство $\mathbb{R}^n$ всех свободных векторов с нормой вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $\|\vec{x}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|\vec{x}\|_2 = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, $\|\vec{x}\|_3 == \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2}$.

3. Пространство $C[a;b]$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с нормой функции $f(x)$: $\|f(x)\| = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

4. Пространство $l_p, 1 \leq p < +\infty,$ всех последовательностей $\{x_n\}$ действительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$, с нормой

$$\|x_n\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

5. Пространство всех ограниченных последовательностей $\{x_n\}$ действительных чисел с нормой $\|x_n\| = \sup\limits_{1 \leq k < \infty} |x_k|$.

6. Пространство $L_p[a;b], 1 \leq p < +\infty,$ всех функций, интегрируемых с p-ой степенью на отрезке $[a;b]$, то есть $\int\limits_a^b |f(x)|^p dx < +\infty$, с нормой

$$\|f(x)\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В нормированном пространстве расстояние между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ определяется по формуле $\rho(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|$.

Определение 2.17. Линейное пространство V называется **евклидовым**, если каждой паре векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из пространства V поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое $(\vec{x},\vec{y})$ и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $(\vec{x},\vec{x}) \geq 0, \forall \vec{x} \in V$, и $(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;

2) $(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\vec{x}), \forall \vec{x},\vec{y} \in V$;

3) $(\vec{x}_1 \oplus \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1,\vec{y}) + (\vec{x}_2,\vec{y}), \forall \vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{y} \in V$;

4) $(\alpha \otimes \vec{x},\vec{y}) = \alpha \cdot (\vec{x},\vec{y}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{x},\vec{y} \in V$.

Введенная операция называется **скалярным умножением векторов**, число $(\vec{x},\vec{y})$ – **скалярным произведением векторов** $\vec{x}$ и $\vec{y}$, а число $(\vec{x},\vec{x})$ – **скалярным квадратом вектора** $\vec{x}$ и обозначается $\vec{x}^2$.

В евклидовом пространстве норма определяется по формуле $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$.

Если хотя бы один из векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ является нулевым, то их скалярное произведение равно нулю, то есть $(\vec{0},\vec{y}) = 0, \forall \vec{y} \in V$.

Определение 2.18. Если n-мерное линейное пространство является евклидовым, то оно называется **евклидовым n-мерным пространством**, а базис линейного пространства – **базисом евклидова пространства**.

Примеры евклидовых пространств:

1. Пространство E^3 всех свободных векторов, в котором скалярное произведение векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ определяется равенством $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

2. Пространство E^n всех свободных векторов, в котором скалярное произведение векторов $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\vec{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ определяется по формуле $(\vec{x},\vec{y})=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$.

3. Пространство всех действительных матриц размером $n\times 1$, в котором скалярное произведение матриц $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ и $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$ определяется равенством $(X,Y)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$.

4. Пространство $C[a;b]$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций, в котором скалярное произведение функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ определяется по формуле $(f(x),\varphi(x))=\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ (иногда его вводят по формуле $(f,\varphi)=\int\limits_a^b \rho(x)f(x)\varphi(x)\,dx$, где $\rho(x)>0$, $\forall x\in[a,b]$ – весовая функция). Линейное пространство $V=\{f(x),\varphi(x),\ldots\}$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций образует бесконечномерное евклидово пространство и обозначается E_∞.

Пример 2.4. Выясните, является ли пространство $\mathbb{R}^2$ евклидовым пространством, если каждой паре векторов $\vec{x}=(x_1;x_2)$ и $\vec{y}=(y_1;y_2)$ поставлено в соответствие число $(\vec{x},\vec{y})=2x_1y_1+7x_1y_2+3x_2y_1+x_2y_2$.

Δ Пусть $\vec{x}=(x_1;x_2)$, $\vec{y}=(y_1;y_2)$, $(\vec{x},\vec{y})=2x_1y_1+7x_1y_2+3x_2y_1+x_2y_2$.

Вычислим $(\vec{x},\vec{x})$ и проверим, верно ли $(\vec{x},\vec{x})\geq 0,\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^2$. Получим $(\vec{x},\vec{x})=2x_1^2+10x_1x_2+x_2^2$.

Так как существует вектор, например, $\vec{x}_0=(1;-1)\in\mathbb{R}^2$, такой, что $(\vec{x}_0,\vec{x}_0)=2\cdot 1^2+10\cdot 1\cdot(-1)+(-1)^2=-7<0$, то первая аксиома выполняется не для всех $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$.

Значит, число $(\vec{x},\vec{y})$ не является скалярным произведением векторов в пространстве $\mathbb{R}^2$, поэтому $\mathbb{R}^2$ с указанной операцией евклидовым пространством не является. ▲

Неравенство Коши-Буняковского. Для любых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ евклидова пространства справедливо неравенство $|(\vec{x},\vec{y})| \le \sqrt{(\vec{x},\vec{x})}\cdot\sqrt{(\vec{y},\vec{y})}.$

Из неравенства Коши-Буняковского для ненулевых векторов имеет место условие $\frac{|(\vec{x},\vec{y})|}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} \le 1$, то есть $-1 \le \frac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} \le 1$.

Отсюда существует единственный угол $\varphi \in [0;\pi]$ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}. \tag{2.1}$$

Определение 2.19. Углом между ненулевыми векторами евклидова пространства V называется такой угол φ, косинус которого определяется по формуле (2.1).

Определение 2.20. Два вектора называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю.

Нулевой вектор ортогонален любому другому вектору.

Определение 2.21. Система векторов $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n,\ n\ge 2,$ в евклидовом пространстве называется **ортогональной**, если эти векторы попарно ортогональны, то есть $(\vec{x}_i,\vec{x}_j)=0, \forall i\ne j;\ i,j=1,2,\ldots,n.$

Определение 2.22. Вектор $\vec{x}$ называется **нормированным или единичным**, если $\|\vec{x}\|=1$.

Если $\vec{x}\ne\vec{0}$, то существует два нормированных вектора $\vec{x}_1^0=\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ и $\vec{x}_2^0=-\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$.

Нахождение для данного вектора нормированного вектора по указанным формулам называется **нормированием** данного **вектора**, а множитель $\mu = \pm\dfrac{1}{\|\vec{x}\|}$ − **нормирующим множителем**.

Определение 2.23. Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n,\ n \geq 2,$ в евклидовом пространстве называется **ортонормированной**, если она ортогональна и каждый вектор является нормированным, то есть $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \begin{cases} 0, \ \forall i \neq j, \\ 1, \ \forall i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$

Определение 2.24. Базис евклидова пространства называется ортогональным, если базисные векторы составляют ортогональную систему векторов.

Определение 2.25. Базис евклидова пространства называется ортонормированным, если базисные векторы составляют ортонормированную систему векторов.

Теорема 2.3. Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Теорема 2.4 (процесс ортогонализации Грамма-Шмидта).

В любом n-мерном евклидовом пространстве, $n \geq 2$, существует ортонормированный базис.

Δ Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ − некоторый базис данного n-мерного евклидова пространства. Построим ортогональную систему векторов $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n$ следующим образом.

Пусть $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$. В качестве вектора $\vec{y}_2$ возьмем вектор $\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \lambda_1^2 \cdot \vec{y}_1$, где $\lambda_1^2 \in \mathbb{R}$. При любом λ_1^2 вектор $\vec{y}_2$ является ненулевым, так как $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ линейно независимы. Подберем число λ_1^2 так, чтобы $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = 0$. Тогда

$$(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = 0 \Leftrightarrow (\vec{y}_1, \vec{x}_2 + \lambda_1^2 \cdot \vec{y}_1) = 0 \Leftrightarrow (\vec{y}_1, \vec{x}_2) + \lambda_1^2 \cdot (\vec{y}_1, \vec{y}_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1^2 = -\frac{(\vec{y}_1, \vec{x}_2)}{(\vec{y}_1, \vec{y}_1)}.$$

В качестве вектора $\vec{y}_3$ возьмем вектор $\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \lambda_1^3 \cdot \vec{y}_1 + \lambda_2^3 \cdot \vec{y}_2$, где $\lambda_1^3, \lambda_2^3 \in \mathbb{R}$. При любых λ_1^3, λ_2^3 вектор $\vec{y}_3$ является ненулевым, так как $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ линейно независимы. Подберем числа λ_1^3 и λ_2^3 так, чтобы $(\vec{y}_1, \vec{y}_3) = 0$ и $(\vec{y}_2, \vec{y}_3) = 0$. Тогда

$$\begin{cases} (\vec{y}_1, \vec{y}_3) = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{y}_1, \vec{x}_3 + \lambda_1^3 \cdot \vec{y}_1 + \lambda_2^3 \cdot \vec{y}_2\right) = 0 \Leftrightarrow (\vec{y}_1, \vec{x}_3) + \lambda_1^3 \cdot (\vec{y}_1, \vec{y}_1) + \lambda_2^3 \cdot (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = 0, \\ (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{y}_2, \vec{x}_3 + \lambda_1^3 \cdot \vec{y}_1 + \lambda_2^3 \cdot \vec{y}_2\right) = 0 \Leftrightarrow (\vec{y}_2, \vec{x}_3) + \lambda_1^3 \cdot (\vec{y}_2, \vec{y}_1) + \lambda_2^3 \cdot (\vec{y}_2, \vec{y}_2) = 0. \end{cases}$$

Так как $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{y}_2, \vec{y}_1) = 0$ и $(\vec{y}_1, \vec{y}_1) = (\vec{y}_2, \vec{y}_2) \neq 0$, то получим

$$\lambda_1^3 = -\frac{(\vec{y}_1, \vec{x}_3)}{(\vec{y}_1, \vec{y}_1)}, \; \lambda_2^3 = -\frac{(\vec{y}_2, \vec{x}_3)}{(\vec{y}_2, \vec{y}_2)}.$$

Продолжая построение векторов аналогичным образом, получим

$$\vec{y}_i = \vec{x}_i + \lambda_1^i \cdot \vec{y}_1 + \lambda_2^i \cdot \vec{y}_2 + \ldots + \lambda_{i-1}^i \cdot \vec{y}_{i-1},$$

где $\lambda_j^i = -\dfrac{(\vec{y}_j, \vec{x}_i)}{(\vec{y}_j, \vec{y}_j)}$, $i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, i-1.$

Построенная система векторов $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n$ является ортогональной. Нормируя каждый вектор этой системы, получим ортонормированную систему векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, в которой $\vec{e}_i = \dfrac{\vec{y}_i}{\|\vec{y}_i\|}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. ▲

Пример 2.5. В пространстве $\mathbb{R}^3$ задан базис $\vec{x}_1(1;-1;1)$, $\vec{x}_2(2;-3;4)$, $\vec{x}_3(2;2;6)$. Постройте по данному базису ортонормированный.

Δ 1. Построим сначала ортогональный базис $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$.

Пусть $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1;-1;1)$. Положим $\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \lambda_1^2 \cdot \vec{y}_1$, где $\lambda_1^2 = -\dfrac{(\vec{y}_1, \vec{x}_2)}{(\vec{y}_1, \vec{y}_1)}$.

Найдем λ_1^2: $\lambda_1^2 = -\dfrac{(\vec{y}_1, \vec{x}_2)}{(\vec{y}_1, \vec{y}_1)} = -\dfrac{1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot 4}{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = -3$.

Тогда $\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \lambda_1^2 \cdot \vec{y}_1 = (2;-3;4) - 3 \cdot (1;-1;1) = (2;-3;4) - (3;-3;3) = (-1;0;1)$.

Пусть теперь $\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \lambda_1^3 \cdot \vec{y}_1 + \lambda_2^3 \cdot \vec{y}_2$, где $\lambda_1^3 = -\dfrac{(\vec{y}_1, \vec{x}_3)}{(\vec{y}_1, \vec{y}_1)}$, $\lambda_2^3 = -\dfrac{(\vec{y}_2, \vec{x}_3)}{(\vec{y}_2, \vec{y}_2)}$.

Найдем λ_1^3 и λ_2^3:

$$\lambda_1^3 = -\frac{(\vec{y}_1, \vec{x}_3)}{(\vec{y}_1, \vec{y}_1)} = -\frac{1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 6}{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = -2,$$

$$\lambda_2^3 = -\frac{(\vec{y}_2, \vec{x}_3)}{(\vec{y}_2, \vec{y}_2)} = -\frac{(-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6}{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = -2.$$

Тогда $\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \lambda_1^3 \vec{y}_1 + \lambda_2^3 \vec{y}_2 = (2;2;6) - 2(1;-1;1) - 2(-1;0;1) = (2;4;2)$.

2. По ортогональному базису $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ построим ортонормированный базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Нормируя векторы $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$, получим

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|} = \frac{(1;-1;1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|} = \frac{(-1;0;1)}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{y}_3}{\|\vec{y}_3\|} = \frac{(2;4;2)}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right). \ \blacktriangle$$

Определение 2.26. Линейное пространство H называется **гильбертовым**, если:

1. Каждой паре векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из пространства H поставлено в соответствие комплексное число, обозначаемое $(\vec{x}, \vec{y})$ и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0, \forall \vec{x} \in H$, и $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;

2) $(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{(\vec{y}, \vec{x})}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$;

3) $(\vec{x}_1 \oplus \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y}), \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in H$;

4) $(\alpha \otimes \vec{x}, \vec{y}) = \alpha \cdot (\vec{x}, \vec{y}), \forall \alpha \in C, \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$.

2. H является полным метрическим пространством относительно порожденной этим скалярным произведением метрики $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y})}$.

Примеры гильбертовых пространств:

1. Пространство $\mathbb{C}^n$ – совокупность всевозможных наборов n комплексных чисел, в котором скалярное произведение векторов $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\vec{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ определяется по формуле $(\vec{x},\vec{y})=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i$.

2. Пространство $L_2[a;b]$ всех комплекснозначных непрерывных функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a;b]$, со скалярным произведением $(f(x),g(x))=\int\limits_a^b f(x)\cdot\overline{g(x)}dx.$

3. Пространство l_2 всех последовательностей комплексных чисел, в котором скалярное произведение последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ определяется как $(x_n,y_n)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i\bar{y}_i$.

Задачи и упражнения

1. Выясните, является ли пространство $\mathbb{R}^2$ евклидовым пространством, если каждой паре векторов $\vec{x}=(x_1;x_2)$ и $\vec{y}=(y_1;y_2)$ поставлено в соответствие число $(\vec{x},\vec{y})$:

1.1. $(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1-3x_2y_2$. Ответ: не является.

1.2. $(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+5x_2y_2$. Ответ: является.

1.3. $(\vec{x},\vec{y})=5x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$. Ответ: является.

1.4. $(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1+4x_1y_2+x_2y_1+4x_2y_2$. Ответ: не является.

2. Выясните, является ли линейное пространство P_2 всех многочленов от одной переменной с действительными коэффициентами степени, не превосходящей 2, евклидовым пространством, если каждой паре многочленов $f(x)$ и $g(x)$ поставлено в соответствие число:

2.1. $(f,g)=f(-1)\cdot g(-1)+f(0)\cdot g(0)+f(1)\cdot g(1)$.

Ответ: является.

2.2. $(f,g) = f(1)\cdot g(1) + f(1)\cdot g(0) + f(0)\cdot g(1) + f(0)\cdot g(0)$.

Ответ: не является.

3. Выясните, является ли линейное пространство M_2 всех матриц второго порядка евклидовым пространством, если каждой паре матриц $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ поставлено в соответствие число:

3.1. $(A,B) = a_1\cdot a_2 - b_1\cdot b_2 + c_1\cdot c_2 - d_1\cdot d_2$.

Ответ: не является.

3.2. $(A,B) = a_1\cdot a_2 - a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1 + 2b_1\cdot b_2 + c_1\cdot c_2 + d_1\cdot d_2$.

Ответ: является.

4. В пространстве $\mathbb{R}^3$ задан базис. Постройте по данному базису ортонормированный базис.

4.1. $\vec{x}_1 = (1;2;3), \vec{x}_2 = (0;2;0), \vec{x}_3 = (0;0;3)$.

Ответ: $\vec{e}_1\left(\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$, $\vec{e}_2\left(-\frac{1}{\sqrt{35}};\frac{5}{\sqrt{35}};-\frac{3}{\sqrt{35}}\right)$, $\vec{e}_3\left(-\frac{3}{\sqrt{10}};0;\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

4.2. $\vec{x}_1 = (1;-1;1), \vec{x}_2 = (0;1;1), \vec{x}_3 = (-2;1;3)$.

Ответ: $\vec{e}_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{e}_2\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{e}_3\left(-\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ[3]

Пусть V − линейное пространство.

Определение 3.1. Если задан закон f, по которому каждому вектору $\vec{x} \in V$ поставлен в соответствие единственный вектор $\vec{y} \in V$, то будем говорить, что задано **преобразование (отображение, оператор)** f пространства V в себя и записывать $f : V \to V$.

[3] При подготовке данного раздела использовались следующие источники: [2, 8, 9, 10].

Вектор $\vec{y}$ называется **образом** вектора $\vec{x}$, а вектор $\vec{x}$ – **прообразом** вектора $\vec{y}$. Если преобразование f переводит вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{y}$, то это будем записывать как $\vec{y} = f(\vec{x})$.

Определение 3.2. Преобразование f называется **линейным**, если выполнены два условия:

1) $f(\vec{x}_1 \oplus \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) \oplus f(\vec{x}_2), \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$;

2) $f(\lambda \otimes \vec{x}) = \lambda \otimes f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Линейное преобразование переводит нулевой вектор в нулевой.

Определение 3.3. Преобразование f называется тождественным, если оно каждому вектору пространства V ставит в соответствие этот же вектор, то есть $f(\vec{x}) = \vec{x}$.

Тождественное преобразование является линейным.

Пусть линейное преобразование f переводит базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ в векторы $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$, то есть $f(\vec{e}_i) = \vec{e}_i', i = 1, 2, \ldots, n$, при этом

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n, \\ \vec{e}_2' = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{e}_n' = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n. \end{cases}$$

Определение 3.4. Матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей линейного преобразования** f в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Определение 3.5. Ранг r матрицы A называется **рангом преобразования**, а число $n - r$ – **дефектом** этого **преобразования**.

Связь между координатами вектора и его образа

Пусть вектор $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, то есть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$. Найдем $f(\vec{x})$. Предположим, что $f(\vec{x}) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогда $f(\vec{x}) = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n$.

С другой стороны

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n) = \\ &= x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n) + x_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n) + \ldots + \\ &+ x_n(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\vec{e}_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)\vec{e}_2 + \ldots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n)\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Обозначим

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T,\ Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T,\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда система (3.1) примет вид $Y = AX$.

Определение 3.6. Областью значений линейного оператора f называется множество $\mathrm{Im}A$ векторов вида $\vec{y} = A\vec{x}$, то есть $\mathrm{Im}A = \{\vec{y} \in V \mid \vec{y} = A\vec{x},\ \vec{x} \in V\}$.

Определение 3.7. Ядром линейного оператора f называется множество $KerA$ всех векторов $\vec{x} \in V$, для которых $A\vec{x} = \vec{0}$, то есть $\ker A = \{\vec{x} \in V \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$.

Преобразование координат вектора

Определение 3.8. Пусть в линейном пространстве V даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}'$ и

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2 + \ldots + t_{n1}\vec{e}_n, \\ \vec{e}_2' = t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2 + \ldots + t_{n2}\vec{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{e}_n' = t_{1n}\vec{e}_1 + t_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + t_{nn}\vec{e}_n. \end{cases}$$

Матрица $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$ называется **матрицей перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$**.

Если $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{x}(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$, то

$$X = TX', \tag{3.2}$$

где $X' = (x_1', x_2', \cdots, x_n')^T$.

Определение 3.9. Формула (3.2) называется **формулой преобразования координат**.

Теорема 3.1. Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ – два базиса некоторого линейного пространства и A – матрица линейного оператора f в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, то матрица B этого оператора в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ имеет вид $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$, где T – матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$.

Если линейный оператор имеет в некотором базисе невырожденную матрицу, то и в любом другом базисе матрица этого оператора является невырожденной.

Теорема 3.2. Если A и B – матрицы линейного оператора в двух различных базисах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ соответственно, то $\det(A - \lambda \cdot E) = \det(B - \lambda \cdot E)$, где λ – произвольное число, а E – единичная матрица порядка n.

Определение 3.10. Многочлен $\det(A-\lambda\cdot E)$ степени n относительно λ называется **характеристическим многочленом** матрицы A или линейного оператора f.

Определение 3.11. Характеристическим уравнением линейного оператора f называется уравнение вида $\det(A-\lambda\cdot E)=0$, где A – матрица линейного оператора f в некотором базисе.

Определение 3.12. Корни характеристического уравнения называются **характеристическими числами** матрицы A или линейного оператора f.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора f в некотором базисе. Тогда характеристическое уравнение примет вид

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Определение 3.13. Вектор $\vec{x}$ линейного пространства называется **собственным вектором линейного оператора** f, если этот вектор ненулевой и существует действительное число k такое, что $f(\vec{x})=k\cdot\vec{x}.$

Определение 3.14. Число k называется **собственным числом вектора** $\vec{x}$ относительно линейного оператора f.

Свойства линейного оператора:

1. Собственный вектор линейного оператора имеет единственное собственное значение.

2. Если $\vec{x}$ – собственный вектор линейного оператора f с собственным значением k и λ – любое отличное от нуля число, то $\lambda \cdot \vec{x}$ − также собственный вектор линейного оператора f с собственным значением k.

3. Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ – линейно независимые собственные векторы линейного оператора f с одним и тем же собственным значением k, то $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ – собственный вектор линейного оператора f с собственным значением k.

4. Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ – собственные векторы линейного оператора f с собственными значениями k_1 и k_2 соответственно, $k_1 \neq k_2$, то $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ – линейно независимые векторы.

Теорема 3.3. Для того чтобы линейный оператор f имел собственный вектор $\vec{x}$ с собственным значением k, необходимо и достаточно, чтобы число k являлось корнем характеристического уравнения этого оператора.

Теорема 3.4. Пусть k – собственное число линейного оператора f с матрицей A n-мерного линейного пространства. Если ранг матрицы $A - k \cdot E$ равен r, то существует $n - r$ линейно независимых собственных векторов линейного оператора f с собственным числом k.

Пример 3.1. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Δ Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$, корнями которого являются собственные значения λ матрицы A:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(4-\lambda) \cdot \left((2-\lambda)^2 - 1\right) + (2 - \lambda + 1) - (-1 - (2 - \lambda)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)\cdot\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)+6-2\lambda=0 \Leftrightarrow (\lambda-3)^2(2-\lambda)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=2,\\ \lambda=3.\end{array}\right.$$

Для каждого собственного значения λ составим и решим однородную систему уравнений $(A-\lambda\cdot E)\cdot\vec{x}=\vec{0}$:

$$(A-\lambda\cdot E)\cdot\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

решениями которой являются собственные векторы матрицы A с собственным значением λ.

Для $\lambda_1=2$ указанная система примет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=0, \\ x_1-x_3=0, \\ x_1-x_2=0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1\leftrightarrow S_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2+(-2)S_1 \\ S_3+(-1)S_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3+(-1)S_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последней матрице соответствует однородная система $\begin{cases} x_1-x_3=0, \\ -x_2+x_3=0. \end{cases}$

Выберем базисными переменными x_1 и x_2, а свободной – x_3. Тогда $x_1=x_3$, $x_2=x_3$. Полагая $x_3=c_3\neq 0$, получим собственные векторы $\vec{X}_1$, соответствующие собственному значению $\lambda_1=2$: $\vec{X}_1=\begin{pmatrix} c_3 \\ c_3 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot c_3$, где c_3 – произвольное число, отличное от нуля.

Для $\lambda_2=3$ указанная система примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2-x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=0, \end{cases} \Leftrightarrow x_1-x_2-x_3=0.$$

Выберем x_1 базисной переменной, а x_2, x_3 – свободными неизвестными. Тогда $x_1=x_2+x_3$. Полагая $x_2=c_2, x_3=c_3$, получим собственные векторы $\vec{X}_2$, соответствующие собственному значению $\lambda_2=3$:

$$\vec{X}_2=\begin{pmatrix} c_2+c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_3\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где c_2, c_3 – произвольные числа, не равные нулю одновременно, что равносильно условию $c_2^2+c_3^2\neq 0$. ▲

Задачи и упражнения

1. Выясните, являются ли линейными операторы $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$.

В случае положительного ответа найдите:

а) матрицу линейного оператора f в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$;

б) ядро и область значений оператора f;

в) собственные векторы оператора f.

1.1. $f(\vec{x})=(2x_1+x_2-3x_3;\ 1;\ x_1+x_3)$, $\vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$.

Ответ: не является.

1.2. $f(\vec{x})=(\vec{i},\vec{x})\cdot\vec{j}$, $\vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3$.

Ответ: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{X}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \forall c_2, c_3\in\mathbb{R},\ c_2^2+c_3^2\neq 0, \lambda_1=0$.

1.3. f – оператор поворота векторов пространства $\mathbb{R}^3$ относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \vec{X}_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ c_3\end{pmatrix}, c_3\in\mathbb{R},\ c_3\neq 0, \lambda_1=1.$

1.4. f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость $y+\sqrt{3}z=0$.

Воспользуйтесь формулой $f(\vec{e})=\vec{e}-np_{\vec{n}}\vec{e}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\vec{e}-\frac{(\vec{n},\vec{e})}{|\vec{n}|^2}\cdot\vec{n}$.

Ответ: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}, \vec{X}_1=\begin{pmatrix}c_1\\ -\sqrt{3}c_3\\ c_3\end{pmatrix}, \forall c_1,c_3\in\mathbb{R},\ c_1{}^2+c_3{}^2\neq 0, \lambda_1=1;$

$\vec{X}_2=\begin{pmatrix}0\\ c_2\\ \sqrt{3}c_2\end{pmatrix}, \forall c_2\in\mathbb{R},\ c_2\neq 0, \lambda_2=0.$

1.5. . $f(\vec{x})=3\cdot(\vec{a},\vec{x})\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-2\vec{x},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \vec{a}=(1;\ 2;-2).$

Ответ: $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -4\\ -2 & -4 & 2\end{pmatrix}, \vec{X}_1=\begin{pmatrix}-2c_2+2c_3\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}, \forall c_2,c_3\in\mathbb{R},\quad c_2{}^2+c_3{}^2\neq 0,$

$\lambda_1=2;\ \vec{X}_2=\begin{pmatrix}-\frac{c_3}{2}\\ -c_3\\ c_3\end{pmatrix}, \forall c_3\in\mathbb{R},\ c_3\neq 0, \lambda_2=7.$

1.6. $f(\vec{x})=(x_1+x_2-4x_3;\ x_2+3x_3;\ x_3^2),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3.$

Ответ: не является.

2. Даны координаты вектора $\vec{x}$ и матрица A линейного оператора в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$. Найдите координаты вектора $f(\vec{x})$ в этом базисе.

2.1. $\vec{x}=(2;-1;3), A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$. Ответ: $f(\vec{x})=(4;4;-4)$.

2.2. $\vec{x}=(1;1;-1), A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Ответ: $f(\vec{x})=(0;2;0)$.

3. Даны два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ и $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'$ и матрица A линейного оператора в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'$, если

3.1. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1'=\vec{e}_1+\vec{e}_2, \vec{e}_2'=\vec{e}_1+\vec{e}_3, \vec{e}_3'=\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

Ответ: $B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 4\end{pmatrix}$.

3.2. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2, \vec{e}_2'=2\vec{e}_1-\vec{e}_2, \vec{e}_3'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3$.

Ответ: $B=\begin{pmatrix}\frac{10}{3} & \frac{5}{3} & -3\\ -\frac{1}{3} & \frac{13}{3} & -2\\ \frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -3\end{pmatrix}$.

4. ОБОБЩЕННЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ[4]

4.1. Ортогональные системы функций. Тригонометрический ряд Фурье и его коэффициенты

Будем рассматривать пространство $L_2[a;b]$ функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a;b]$, для которых выполнено условие $\int\limits_a^b f^2(x)dx < +\infty$, со скалярным произведением $(f,g)=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ и нормой $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$.

Определение 4.1. Множество функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

называется основной тригонометрической системой функций.

Теорема 4.1. Основная тригонометрическая система функций является ортогональной на отрезке $[-\pi;\pi]$, при этом $\|1\|=\sqrt{2\pi}$, $\|\cos nx\|=\|\sin nx\|=\sqrt{\pi}$, для любого $n\in\mathbb{N}$.

Замечания:

1. Основная тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке $[a;a+2\pi]$, $a\in\mathbb{R}$, длиной 2π.

2. Тригонометрическая система функций $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\pi}, \ldots$ является ортонормированной на отрезке $[-\pi;\pi]$, и, значит, на любом отрезке $[a;a+2\pi]$, $a\in\mathbb{R}$.

3. Тригонометрическая система функций

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots$$

является ортогональной на любом отрезке $[-l;l]$, и, значит, на любом отрезке $[a;a+2l]$, $a\in\mathbb{R}$, длиной $2l$.

[4] При подготовке данного раздела использовались следующие источники: [8, 10].

4. Тригонометрическая система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi x}{l},\ldots,\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots$$

является ортонормированной на любом отрезке $[a;a+2l]$, $a\in\mathbb{R}$.

Определение 4.2. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \tag{4.1}$$

где $a_0, a_n, b_n\in\mathbb{R}$, называется **тригонометрическим рядом**, а числа a_0, a_n, b_n – его коэффициентами.

Теорема 4.2. Пусть

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{4.2}$$

и ряд, стоящий в правой части равенства (4.2), сходится равномерно на отрезке $[-\pi;\pi]$. Тогда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ n\in\mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Определение 4.3. Тригонометрический ряд (4.1), коэффициенты которого определяются по формулам (4.3), называется **тригонометрическим рядом Фурье**, а числа a_0, a_n, b_n – **коэффициентами Фурье** функции $f(x)$ и записывается как

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right). \tag{4.4}$$

Если функция $f(x)$ – 2π-периодическая функция, заданная на отрезке $[a;a+2\pi]$, $a\in\mathbb{R}$, длиной 2π, то коэффициенты a_0, a_n, b_n могут быть вычислены по формулам

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}f(x)\sin nxdx,\ n\in\mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi;\pi]$. Для того чтобы разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье, нужно периодически продолжить ее с отрезка $[-\pi;\pi]$ на всю числовую ось, то есть получить 2π-периодическую функцию $f^*(x)$ такую, что $f^*(x)=f(x)$, $x\in[-\pi;\pi]$, и $f^*(x+2\pi)=f^*(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ совпадает с рядом Фурье функции $f^*(x)$ и имеет вид (4.4) с коэффициентами (4.3).

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[a;a+2\pi]$, $a\in\mathbb{R}$, то, чтобы получить разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье, периодически продолжим $f(x)$ с отрезка $[a;a+2\pi]$ на всю числовую ось. Полученная функция $f^*(x)$ является 2π-периодической функцией: $f^*(x)=f(x)$, $[a;a+2\pi]$, и $f^*(x+2\pi)=f^*(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ совпадает с рядом Фурье функции $f^*(x)$ и имеет вид (4.4) с коэффициентами (4.5.).

Теорема 4.3 (Дирихле). Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1) $f(x)$ является кусочно-непрерывной на $[-\pi;\pi]$, то есть функция непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке;

2) $f(x)$ является кусочно-монотонной на $[-\pi;\pi]$, то есть функция является монотонной на всем отрезке или этот отрезок можно разбить на конечное число таких отрезков, на каждом из которых функция $f(x)$ монотонна.

Тогда ряд Фурье (4.4) сходится на отрезке $[-\pi;\pi]$ к функции $S(x)$ следующим образом: $S(x)=f(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$; $S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, если x_0 – точка разрыва первого рода; $S(\pi)=S(-\pi)=\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

4.2. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Пусть $f(x)$ – четная 2π-периодическая функция. Тогда функция $f(x)\cos nx$ является четной, а $f(x)\sin nx$ – нечетной функций при любом $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0, \; n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому ряд Фурье четной функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{4.6}$$

в котором коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам

$$a_0 = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \; a_n = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \; b_n = 0, \; n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Пусть теперь $f(x)$ – нечетная 2π-периодическая функция. Тогда функция $f(x)\cos nx$ является нечетной, а $f(x)\sin nx$ – четной функций при любом $n \in \mathbb{N}$. Отсюда,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0, \; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 0, \; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx, n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, ряд Фурье нечетной функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \tag{4.8}$$

при этом коэффициенты a_0, a_n, b_n находятся по формулам

$$a_0 = 0, \; a_n = 0, \; b_n = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \; n \in \mathbb{N}. \tag{4.9}$$

4.3. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на промежутке $(0;\pi)$

Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $(0;\pi)$. Для того чтобы разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0;\pi)$, нужно доопределить $f(x)$ на интервале $(-\pi;0)$. Полученная при этом функция будет задана на интервале $(-\pi;\pi)$, которую можно разложить в ряд Фурье, при этом ряды Фурье полученной и данной функций будут совпадать.

Доопределим функцию $f(x)$ четным образом с интервала $(0;\pi)$ на интервал $(-\pi;0)$. Получим четную функцию $f^*(x)$ такую, что $f^*(x) = f(x), x \in (0;\pi)$, и $f^*(x) = f(-x), x \in (-\pi;0)$.

Тогда ряды Фурье функций $f^*(x)$ и $f(x)$ совпадают и ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид (4.6) с коэффициентами (4.7).

Продолжим теперь функцию $f(x)$ нечетным образом с интервала $(0;\pi)$ на интервал $(-\pi;0)$. Получим нечетную функцию $f^*(x)$ такую, что $f^*(x) = f(x), x \in (0;\pi)$, и $f^*(x) = -f(-x), x \in (-\pi;0)$.

Следовательно, ряды Фурье функций $f^*(x)$ и $f(x)$ совпадают и ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид (4.8) с коэффициентами (4.9).

4.4. Ряд Фурье для функций с произвольным периодом

Пусть функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы Дирихле, является периодической с периодом $T = 2l, l \neq \pi$, то есть $f(x+2l) = f(x), x \in \mathbb{R}$.

Введем замену переменной $u = \dfrac{\pi x}{l}$. В результате получим функцию $f\left(\dfrac{lu}{\pi}\right) = \varphi(u)$, которая является 2π-периодической, поскольку

$$\varphi(u+2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(u+2\pi)\right) = f\left(\frac{lu}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{lu}{\pi}\right) = \varphi(u).$$

Тогда функцию $\varphi(u)$ можно разложить в ряд Фурье следующим образом:

$$\varphi(u) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nu + b_n \sin nu),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)du\,,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)\cos nu du\,,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)\sin nu du\,,\ n \in \mathbb{N}.$$

Возвращаясь к переменной x, полагая $u = \frac{\pi x}{l}$, получим ряд Фурье $2l$-периодической функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{4.10}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)du = \left|\begin{array}{l} u = \frac{\pi x}{l} \\ u = \frac{\pi}{l}dx \\ u_1 = -\pi \Rightarrow x_1 = -l \\ u_2 = \pi \Rightarrow x_2 = l \end{array}\right| = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)\cos nu du = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)\sin nu du = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Если $2l$-периодическая функция $f(x)$ задана на отрезке $[a; a+2l], a \in \mathbb{R}$, то она разлагается в ряд Фурье (4.10), коэффициенты которого вычисляются по формулам $a_0 = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \in \mathbb{N}.$

Если $2l$-периодическая функция $f(x)$ является четной и задана на отрезке $[-l; l]$, то она разлагается в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

при этом коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\ \ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Если $2l$-периодическая функция $f(x)$ является нечетной и задана на отрезке $[-l;l]$, то она разлагается в ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

при этом коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = 0,\ \ a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

4.5. Комплексная форма ряда Фурье

Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Воспользовавшись формулами Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, найдем $\cos nx,\ \sin nx$:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2},\ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = -i\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}.$$

Подставим в ряд Фурье вместо $\cos nx,\ \sin nx$ полученные значения:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right).$$

Введем обозначения

$$\frac{a_0}{2} = c_0,\ \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n,\ \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n},\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

Тогда

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

то есть

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \qquad (4.12)$$

Ряд (4.12) называется комплексной формой ряда Фурье функции $f(x)$ с комплексными коэффициентами Фурье c_n, $n \in \mathbb{Z}$, определяемыми формулами (4.11).

Найдем явное выражение для коэффициентов Фурье c_n, $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,\ n \in \mathbb{N},$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx,\ n \in \mathbb{N},$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{i0x}dx.$$

Следовательно, комплексные коэффициенты Фурье c_n, $n \in \mathbb{Z}$, вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,\ n \in \mathbb{Z}. \qquad (4.13)$$

Таким образом, **комплексная форма ряда Фурье** 2π-периодической функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right). \qquad (4.14)$$

Зная комплексную форму ряда Фурье функции $f(x)$, можно найти ее действительный ряд Фурье, воспользовавшись формулами

$$a_0 = 2c_0,\ a_n = \mathrm{Re}(2c_n),\ b_n = -\mathrm{Im}(2c_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Комплексная форма ряда Фурье $2l$-периодической функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}},$$

где коэффициенты вычисляются по формулам $c_n = \dfrac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx,\ \ n \in \mathbb{Z},$ то есть $f(x) \sim \dfrac{1}{2l}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dt\right).$

4.6. Интеграл Фурье. Косинус- и синус- преобразования Фурье

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси.

Определение 4.4. Интегралом Фурье функции $f(x)$ называется интеграл вида

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(a(z)\cos zx + b(z)\sin zx\right)dz, \tag{4.15}$$

где $a(z) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos zt dt$, $b(z) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin zt dt$.

Подставим значения $a(z)$, $b(z)$ в интеграл (4.15), получим

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(a(z)\cos zx + b(z)\sin zx\right)dz = \int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos zt dt\cos zx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin zt dt\sin zx\right)dz =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\cos zt\cos zx + \sin zt\sin zx\right)dt\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(x-t)dt\right).$$

Пусть $f(x) = \int\limits_0^{+\infty}\left(a(z)\cos zx + b(z)\sin zx\right)dz$.

Если $f(x)$ – четная функция, то $a(z)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos zt dt$, $b(z)=0$, и

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty} a(z)\cos zx dz=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos zx dz\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos zt dt .$$

Обозначим $F_c(z)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos zt dt$, тогда $f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} F_c(z)\cos zx dz$.

Если $f(x)$ – нечетная функция, то $a(z)=0$, $b(z)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin zt dt$, и

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty} b(z)\sin zx dz=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin zx dz\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin zt dt.$$

Обозначим $F_s(z)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin zt dt$, тогда $f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} F_s(z)\sin zx dz$.

Определение 4.5. Функции $F_c(z)$ и $F_s(z)$ называются **косинус- и синус-преобразованиями Фурье**.

4.7. Комплексная форма интеграла Фурье. Преобразование Фурье

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна на всей числовой оси, имеет односторонние производные. Тогда для любого $x\in\mathbb{R}$ справедлива формула Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(x-t)dt\right), \tag{4.16}$$

а так как подынтегральная функция $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(x-t)dt$ является четной относительно переменной z, то

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(x-t)dt\right). \tag{4.17}$$

Из неравенства $|f(t)\sin z(x-t)| \le |f(t)|, t \in \mathbb{R}$, существует интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(x-t)dt$, который в силу признака Вейерштрасса сходится равномерно на всей числовой оси переменной z и, следовательно, является непрерывной функцией от z. Поэтому для любого числа η существует интеграл $\int\limits_{-\eta}^{\eta} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(x-t)dt\right)$, который в силу нечетности подынтегральной функции равен нулю, то есть $\int\limits_{-\eta}^{\eta} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(x-t)dt\right)$, значит,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(x-t)dt\right) = 0. \tag{4.18}$$

Умножим обе части равенства (4.18) на $\frac{i}{2\pi}$ и сложим с равенством (4.17):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(x-t)dt\right) + \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(x-t)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos z(x-t) + i\sin z(x-t))dt\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iz(x-t)}dt\right),$$

то есть

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-izt}dt\right). \tag{4.19}$$

Определение 4.6. Формула (4.19) называется **комплексной формой интеграла Фурье**.

Обозначим $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-izt}dt$, тогда $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(z)e^{izx}dz$.

Определение 4.7. Функция $F(z)$ называется **прямым преобразованием Фурье** функции $f(x)$, а функция $f(x)$ – **обратным преобразованием Фурье**.

4.8. Обобщенные ряды Фурье

Пусть $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ – ортогональная система функций из $L_2[a;b]$ и функция $f(x)$ представима на отрезке $[a;b]$ в виде ряда

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x), \qquad (4.20)$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ – постоянные, называемые коэффициентами ряда.

Предположим, что ряд правой части равенства (4.20) сходится равномерно к $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Умножим обе части равенства (4.20) на $\varphi_n(x)$ и проинтегрируем результат почленно на отрезке $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x) \cdot \varphi_n(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = c_n\int_a^b \varphi_n^2(x)dx.$$

Отсюда

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx} = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\|\varphi_n\|^2}, \; n = 0,1,\ldots. \qquad (4.21)$$

Определение 4.8. Ряд (4.20) называется **обобщенным рядом Фурье** функции $f(x)$ по ортогональной системе функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$, а числа c_n, вычисляемые по формуле (4.21), – **коэффициентами Фурье**.

4.9. Многочлены Лежандра

Определение 4.9. Многочленом Лежандра называется многочлен вида

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n, \; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Теорема 4.4. Многочлены Лежандра $\{P_n(x)\}$ образуют ортогональную систему функций на отрезке $[-1;1]$, при этом $\|P_n(x)\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Непосредственным вычислением можно найти первые шесть многочленов Лежандра: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$,

$$P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right),\ P_5(x)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right).$$

Тогда обобщенный ряд Фурье для функции $f(x)\in L_2[-l;l]$ по многочленам Лежандра будет иметь вид

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kP_k(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+\ldots+c_nP_n(x)+\ldots,$$

где коэффициенты $c_k=\frac{\left(f(x),P_k(x)\right)}{\left(P_k(x),P_k(x)\right)}=\frac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1}f(x)P_k(x)dx$.

Пример 4.1. Разложите функцию $f(x)=-x^3+x^2-x+3$, $[-1;1]$, в ряд Фурье по многочленам Лежандра.

Δ Поскольку $\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)Q_m(x)dx=0$ при $m<n$, где $P_n(x)-$ многочлен Лежандра, $Q_m(x)-$любой многочлен степени m, и в силу формулы (4.21), будем искать коэффициенты c_k, $k=0,1,2,3$.

Получим

$$c_0=\frac{\left(f(x),P_0(x)\right)}{\left(P_0(x),P_0(x)\right)}=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}f(x)P_0(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^3+x^2-x+3\right)\cdot 1dx=$$

$$=\frac{2}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(x^2+3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+3x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3},$$

$$c_1=\frac{\left(f(x),P_1(x)\right)}{\left(P_1(x),P_1(x)\right)}=\frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1}f(x)P_1(x)dx=\frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^3+x^2-x+3\right)\cdot xdx=$$

$$=3\int\limits_{0}^{1}\left(-x^4-x^2\right)dx=3\left(-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=3\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{8}{5},$$

$$c_2=\frac{\left(f(x),P_2(x)\right)}{\left(P_2(x),P_2(x)\right)}=\frac{5}{2}\int\limits_{-1}^{1}f(x)P_2(x)dx=\frac{5}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^3+x^2-x+3\right)\cdot\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(3x^4+8x^2-3\right)dx=\frac{5}{2}\left(3\frac{x^5}{5}+8\frac{x^3}{3}-3x\right)\Big|_0^1=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}+\frac{8}{3}-3\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{15}=\frac{2}{3},$$

$$c_3=\frac{\left(f(x),P_3(x)\right)}{\left(P_3(x),P_3(x)\right)}=\frac{7}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_7(x)dx=\frac{7}{2}\int_{-1}^{1}\left(-x^3+x^2-x+3\right)\cdot\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)dx=$$

$$=\frac{7}{2}\int_{0}^{1}\left(-5x^6-2x^4+3x^2\right)dx=\frac{7}{2}\cdot\left(-5\frac{x^7}{7}-2\frac{x^5}{5}+3\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{5}{7}-\frac{2}{5}+1\right)=-\frac{2}{5}.$$

Окончательно получим

$$-x^3+x^2-x+3=\frac{10}{3}P_0(x)-\frac{8}{5}P_1(x)+\frac{2}{3}P_2(x)-\frac{2}{5}P_3(x).\ \blacktriangle$$

Задачи и упражнения

1. Разложите в ряд Фурье 2π-периодическую функцию, заданную на интервале $(-\pi;\pi)$. Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

1.1. $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le 0,\\ -2, & 0<x<\pi.\end{cases}$

Ответ: $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$.

1.2. $f(x)=\begin{cases}3x, & -\pi<x\le 0,\\ 2x, & 0<x<\pi.\end{cases}$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{2k+1}+5\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$.

1.3. $f(x)=\pi^2-x^2$.

Ответ: $\dfrac{2}{3}\pi^2+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos nx}{n^2}$.

2. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0;\pi)$, продолжив ее на интервал $(-\pi;0)$ нечетным образом. Постройте графики нечетного продолжения функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

2.1. $f(x)=\sin\dfrac{x}{4}$.

Ответ: $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\pi}\left(1+8\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{1-16(2k)^2}\right)+\dfrac{4\left(2+\sqrt{2}\right)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-)x}{1-16(2k-1)^2}$.

2.2. $f(x)=e^{2x}$.

Ответ: $\dfrac{e^{2\pi}-1}{2\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\left(e^{2\pi}-1\right)}{n^2+4}\cos nx$.

3. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0;\pi)$, продолжив ее на интервал $(-\pi;0)$ нечетным образом. Постройте графики нечетного продолжения функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

3.1. $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2}$. Ответ: $\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\pi^2-4n^2}\left((-1)^n\cos\dfrac{\pi^2}{2}-1\right)\sin nx$.

3.2. $f(x)=x$. Ответ: $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$.

4. Разложите в ряд Фурье $2l$-периодическую функцию $f(x)=\begin{cases}2x+2, & -\dfrac{1}{2}<x\le 0,\\ 2x, 0<x<\dfrac{1}{2}, l=\dfrac{1}{2}, & \end{cases}$ заданную на интервале $(-l;l)$. Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

Ответ: $1-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2n\pi x}{n}$.

5. Найдите комплексную форму ряда Фурье функции $f(x)=e^x, -\pi<x<\pi$.

Ответ: $e^x+\dfrac{shx}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-ni}e^{inx}$.

6. Представьте функцию $f(x)=\begin{cases}\cos x, |x|<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, \quad |x|>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ интегралом Фурье.

Ответ: $\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos\frac{z\pi}{2}}{1-z^2}\cos zx dz$.

7. Найдите косинус-преобразование Фурье функции $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$.

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)$.

8. Найдите синус-преобразование Фурье функции $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$.

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{z}{1+z^2}\right)$.

9. Найдите прямое преобразование Фурье функции
$$f(x)=\begin{cases}-e^{x}, & -1\le x<0,\\ e^{-x}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

Ответ: $-\frac{2i}{\sqrt{2\pi}e(1+z^2)}(ze+\sin z+z\cos z)$.

10. Разложите функцию $f(x)=x^3-2x^2$, $[-1;1]$, в ряд Фурье по многочленам Лежандра.

Ответ: $-\frac{2}{3}P_0(x)+\frac{3}{5}P_1(x)-\frac{4}{3}P_2(x)+\frac{2}{5}P_3(x)$.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ[5]

Математическая физика – это теория математических моделей, которые описывают реальные физические процессы. Многие из этих моделей описываются дифференциальными уравнениями в частных производных и имеют важное значение при решении известных прикладных задач. Поэтому определим основные понятия этой теории, приведем типы таких уравнений, а также рас-

[5] При подготовке данного раздела использовались следующие источники: [3, 4, 8, 10].

смотрим методы решения известной задачи математической физики, предложенной для широкого круга инженерно-технических исследований.

5.1. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Основные понятия

Определение 5.1. Дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции двух переменных $u(x,y), (x,y) \in D, D \subset \mathbb{R}^2$, называется функциональная зависимость вида

$$F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{5.1}$$

между неизвестными переменными (x,y) и неизвестной функцией $u(x,y)$ и ее частными производными первого и второго порядков.

Определение 5.2. Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции двух переменных $u(x,y), (x,y) \in D, D \subset \mathbb{R}^2$, называется **линейным** относительно старших производных, если оно имеет вид

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{5.2}$$

где коэффициенты a, b, c есть функции от переменных x, y.

Определение 5.3. Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции $u(x,y), (x,y) \in D, D \subset \mathbb{R}^2$, называется **линейным**, если оно линейно как относительно старших производных, так и относительно функции $u(x,y)$ и ее первых производных, то есть имеет вид

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f, \tag{5.3}$$

где коэффициенты a, b, c, d, e, g, f есть функции от переменных x, y.

Если коэффициенты уравнения (5.3) не зависят от переменных x, y, то оно является линейным уравнением с постоянными коэффициентами.

Определение 5.4. Линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции двух переменных $u(x,y), (x,y) \in D, D \subset \mathbb{R}^2$,

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f(x,y),$$

называется **однородным**, если $f(x,y) = 0$ для любой пары $(x,y) \in D$.

Определение 5.5. Решением уравнения (5.1) называется определенная в области D действительная функция $u(x,y)$, непрерывная в этой области вместе со своими производными первого и второго порядков и обращающая его в тождество в данной области.

Обратимся теперь к обзору простейших уравнений математической физики и ознакомимся с методами, позволяющими в каждом конкретном случае найти собственные функции и получить общее решение.

Множество задач физики, механики описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Поэтому эти уравнения носят название уравнений математической физики. Они подразделяются на три типа, которые определяются следующим образом.

Определение 5.6. Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

называется в некоторой точке $(x,y) \in D$ уравнением:

1) **гиперболического типа** (уравнение колебаний), если в этой точке выполняется условие $b^2 - ac > 0$;

2) **параболического типа** (уравнение диффузии), если в этой точке выполняется условие $b^2 - ac = 0$;

3) **эллиптического типа** дифференциальное уравнение, если в этой точке выполняется условие $b^2 - ac < 0$.

Пример 5.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Для данного уравнения определим тип дифференциального уравнения, приведем его к каноническому виду и найдем общее решение.

Δ Заметим, что матрица, соответствующая данному дифференциальному уравнению, имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Так как определитель матрицы равен нулю

$$det\,(A) = 1 - 1 = 0,$$

то мы имеем уравнение параболического типа.

Чтобы привести дифференциальное уравнение к каноническому виду, необходимо найти собственные значения и соответствующие собственные векторы матрицы перехода от одних переменных к другим. Решив соответствующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

получим $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$.

Для каждого собственного значения найдем соответствующий собственный вектор, который можно нормировать. Соответствующие единичные векторы образуют матрицу перехода от одних координат к другим.

Выполним следующие шаги:

1) $\lambda_1 = 0, \begin{cases} x - y = 0, \\ -x + y = 0, \end{cases}$ имеем $y = x$. Пусть $y = x = 1, \vec{a}(1;1), |\vec{a}| = \sqrt{2}$, тогда $\overrightarrow{e_1} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $\lambda_2 = 2, \begin{cases} -x - y = 0, \\ -x - y = 0, \end{cases}$ имеем $y = -x$. Пусть $x = 1, y = -1, \vec{b}(1;-1)$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, тогда $\overrightarrow{e_2} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Таким образом, матрица перехода имеет вид

$$T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

Данная матрица позволяет записать систему для нахождения связи между соответствующими координатами, то есть

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi+\frac{1}{\sqrt{2}}\eta,\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi-\frac{1}{\sqrt{2}}\eta.\end{cases}$$

Решив данную систему линейных уравнений относительно ее новых неизвестных, мы получаем соотношения следующего вида:

$$\begin{cases} \xi=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y,\\ \eta=\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y.\end{cases}$$

Также используя матрицу перехода, можно записать систему для производных функции $u(x,y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial u}{\partial \eta},\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial u}{\partial \eta}.\end{cases}$$

Продифференцировав эти две системы по переменным x,y, получим производные

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \frac{\partial \eta}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\end{cases}$$

и частные производные

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \xi} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \eta} \dfrac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \xi} \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \eta} \dfrac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \xi} \dfrac{\partial \xi}{\partial y} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \eta} \dfrac{\partial \eta}{\partial y}, \end{cases}$$

при подстановке которых в исходное уравнение и после приведения подобных слагаемых, получается каноническая форма его записи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \eta} = 0.$$

Данное уравнение является дифференциальным уравнением в частных производных относительно переменных ξ, η, которое решается дифференцированием, а именно:

1) $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \eta} d\eta = \int 0 d\eta = F_1(\xi)$;

2) $u(\xi, \eta) = \int \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta = \int F_1(\xi) d\eta = F_1(\xi) \cdot \eta + F_2(\xi)$.

Таким образом, решение исходного уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ записывается в виде функции общего вида

$$u(x, y) = F_1\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} x + \tfrac{1}{\sqrt{2}} y\right) \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} x - \tfrac{1}{\sqrt{2}} y\right) + F_2\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} x + \tfrac{1}{\sqrt{2}} y\right). \blacktriangle$$

Каждое из названных типов уравнений имеет бесконечно много решений. Для описания реального физического процесса надо задать начальные условия и краевые условия на границе области, в которой рассматривается конкретный физический процесс. Поэтому такие задачи называются краевыми задачами.

5.2. Уравнения малых поперечных колебаний струны. Постановка задачи и методы решения.

Рассмотрим пример известного уравнения математической физики (задачу о колебаниях струны), а также опишем предложенные методы его решения.

Сформулируем задачу о колебаниях струны. Под струной мы понимаем тонкую нить, которая может свободно изгибаться. Допустим, что она находится под воздействием некоторого натяжения и в состоянии равновесия без внешних сил направлена по оси Ox. Если мы выведем ее из положения равновесия и, кроме того, подвергнем действию какой-нибудь внешней силы, то струна начнет колебаться, причем точка струны, занимавшая при равновесии некоторое положение с абсциссой x, к моменту времени t переместится в другое положение. Ограничившись рассмотрением только поперечных колебаний, а именно: предполагая, что все движение происходит в одной плоскости, и что точки струны движутся перпендикулярно оси Ox, искомой функцией будет смещение точек струны, которое мы обозначим $u(x,t)$. Данная функция зависит от двух переменных величин положения струны и времени. Можно рассмотреть случаи, когда концы струны закреплены жестко, свободны, закреплены упруго и двигаются в поперечном направлении по заданным законам. Сопротивлением среды и действием силы тяжести пренебрегают.

Задача 5.1. Уравнение вынужденных поперечных колебаний струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t). \tag{5.4}$$

Если внешняя сила отсутствует, мы имеем $f(x,t) = 0$, и получаем уравнение свободных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5.5}$$

Одного уравнения движения (5.5) недостаточно для полного определения формы струны, поэтому нужно задать еще состояние струны в начальный момент времени $t = 0$, то есть положение ее точек u и их скорость $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t = 0$:

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), x \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Для поставленной задачи о колебаниях струны без воздействия внешней силы и приведенных выше начальных условиях решение $u(x,t)$ задачи находится по формуле Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz\,. \qquad (5.8)$$

Пример 5.2. Для поставленной задачи о колебаниях струны без воздействия внешней силы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и начальных условиях

$$u(x,0) = \cos x,$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, x \in \mathbb{R},$$

найдем форму струны, используя метод Даламбера.

Δ Заметим, что в нашем случае $a^2 = 4$, $\varphi(x) = \cos x, \psi(x) = 0$. Тогда по формуле Даламбера решение имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\cos(x+2t) + \cos(x-2t)] + \frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t} 0dz =$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(x+2t) + \cos(x-2t)] = \cos x \cdot \cos(2t). \ ▲$$

Задача 5.2. Рассмотрим уравнение свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

для случая, когда струна в спокойном состоянии занимает отрезок $[0; l]$ оси Ox.

Для однозначного решения данной задачи кроме начальных условий

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), x \in [0; l]$$

необходимо задать еще краевые условия

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad (5.9)$$

означающие, что концы струны закреплены. Эта задача называется краевой задачей Коши. Частное решение будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от переменной t, а другая от переменной

x. Данный метод решения дифференциального уравнения известен как метод разделения Фурье.

Δ Фурье предложил искать решения данной задачи при условиях (5.9) в виде произведения двух функций

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Продифференцируем последнее равенство по переменным величинам x, t:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t^2} = X(x) \cdot T''(t),$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t).$$

С учетом этих равенств, уравнение (5.5) перепишется в виде дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t),$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

В последнем равенстве в левой части имеем функцию от переменной t, справа – функция от x, где t и x – независимые переменные. Поэтому функции от них равны тогда и только тогда, когда они постоянные. Это дает возможность, записать систему дифференциальных уравнений

$$T''(t) + a^2 \lambda \cdot T(t) = 0, \tag{5.10}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{5.11}$$

Рассмотрим сначала уравнение (5.11). В силу краевых условий (5.9) получаем следующее:

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(0), X(0) = 0, \tag{5.12}$$

$$u(l,t) = X(l) \cdot T(t), X(l) = 0. \tag{5.13}$$

Анализ равенств (5.11) – (5.13) приводит к тому, что возможные решения уравнения (5.11) можно записать как функции

$$X_n(x) = c_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, c_n = \text{const}.$$

Тогда уравнение (5.10) имеет общее решение

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right).$$

Таким образом, мы нашли подходящие частные решения нашего дифференциального уравнения в виде функций

$$u_n(x,t) = \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Используя свойство линейности и однородности волнового уравнения, сумма частных решений также является решением, то есть решение уравнения (5.5) можно записать в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\tfrac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \cdot \sin\left(\tfrac{\pi n a}{l} t\right)\right) \cdot \sin\left(\tfrac{\pi n}{l} x\right). \qquad (5.14)$$

Предположив, что данный ряд сходится и его можно дважды почленно дифференцировать, а именно:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \cdot \frac{\pi n a}{l} \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \cdot \frac{\pi n a}{l} \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

и используя начальные условия, найдем коэффициенты a_n, b_n:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{\pi n a}{l} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \psi(x).$$

Полученные равенства описывают разложение функций $\varphi(x), \psi(x)$ по синусам в ряды Фурье соответственно на промежутке $x \in [0; l]$. Поэтому неизвестные коэффициенты a_n, b_n определяются по известным формулам:

$$a_n = \tfrac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\tfrac{\pi n}{l} x\right) dx, \qquad (5.15)$$

$$b_n = \tfrac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(x) \cdot \sin\left(\tfrac{\pi n}{l} x\right) dx. \qquad (5.16)$$

Подставив формулы (5.15), (5.16) в (5.14), можно записать решение уравнения математической физики. ▲

Пример 5.3. Найти закон свободных колебаний струны, при условии, что ее концы закреплены и в начальный момент времени заданы форма струны и скорости ее точек

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(x,0) = 20\sin(3\pi x), \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \\ u(0,t) = u(4,t) = 0. \end{cases} \tag{5.17}$$

В примере задана так называемая краевая задача Коши с начальными и краевыми условиями.

∆ Используя описанный выше алгоритм метода разделения переменных (метод Фурье), найдем частное решение задачи (5.17) в виде произведения двух функций $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.

Получим систему линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ T''(t) + 81\lambda T(t) = 0. \end{cases}$$

Граничные условия дают равенства $X(0) = X(4) = 0$.

Решение уравнения $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$X(x) = X_n(x) = c_n sin\left(\frac{\pi n x}{4}\right), \text{ при этом } \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{4}\right)^2.$$

Решениями уравнения $T''(t) + 81\lambda T(t) = 0$ при $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{4}\right)^2$ являются функции

$$T_n(t) = C_{1n} \cdot cos\left(\frac{9\pi n t}{4}\right) + C_{2n} \cdot sin\left(\frac{9\pi n t}{4}\right).$$

Таким образом, частное решение уравнения можно представить в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot cos\left(\frac{9\pi nt}{4}\right) + b_n \cdot sin\left(\frac{9\pi nt}{4}\right) \right) \cdot sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right). \qquad (5.18)$$

Найдем производную функции (5.18) по переменной t

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{9\pi n}{4} a_n \cdot sin\left(\frac{9\pi nt}{4}\right) + \frac{9\pi n}{4} b_n \cdot cos\left(\frac{9\pi nt}{4}\right) \right) \cdot sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right). \qquad (5.19)$$

Согласно условию $u_t(x,0) = 0$ и полагая в (5.18) $t = 0$, получаем

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9\pi n}{4} b_n \cdot sin\left(\frac{9\pi nt}{4}\right) \right) = 0,$$

отсюда $b_n = 0$.

Согласно условию $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 20\sin(3\pi x)$ и полагая в (5.19) $t = 0$, получаем условие для нахождения коэффициентов a_n:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right) = 20\sin(3\pi x),$$

$$a_n = \begin{cases} 0, n \neq 12, \\ 20, n = 12. \end{cases}$$

Решение исходной задачи Коши, найденное по методу Фурье, имеет вид

$$u(x,t) = 20\cos(27\pi t)\sin(3\pi x)\,, 0 \leq x \leq 4, 0 \leq t \leq +\infty. \ ▲$$

Заметим, что на практике при решении задачи Коши для конечной однородной струны, закрепленной в некоторых точках, используют уже готовые формулы, описанные в алгоритме метода Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi na}{l} t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi na}{l} t\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi na} \int_0^l \psi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx.$$

Задачи и упражнения

1. Струна, закрепленная на отрезке $x \in [0; l]$, имеет в начальный момент времени форму $\varphi(x)$. Определить форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости точек струны отсутствуют.

1.1. $\varphi(x) = 2x - x^2, x \in [0; 2]$.

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k+1)^3}\cdot\cos\left(\frac{\pi(2k+1)a}{2}t\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}x\right).$$

1.2. $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3, x \in [0; 1]$.

Ответ:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{8}{(\pi(2k+1))^3} - \frac{6}{\pi(2k+1)}\right)\cos(\pi(2k+1)t)\right)\sin(\pi(2k+1)x)).$$

2. Найти решение волнового уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

2.1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x,0) = \sin(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$.

Ответ: $u(x,t) = \sin x \cdot \cos x$.

2.2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x^2$.

Ответ: $u(x,t) = x^2 t + 3t^3$.

2.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x,0) = \cos(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 3x^2$.

Ответ: $u(x,t) = \cos(x)\cdot\cos(5t) + 3x^2 t + 25t^3$.

3. Найти решение волнового уравнения колебания закрепленной в точках $x = 0$, $x = l$ струны, если при $t = 0$ $u(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$.

3.1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(0,t) = u(l,t) = 0, l = 5$.

$$u(x,0) = \varphi(x) = 25\sin(4\pi x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = 0.$$

Ответ: $u(x,t) = 25\cos(28\pi t)\cdot\sin(4\pi x)$.

3.2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(0,t) = u(l,t) = 0, l = 6,$

$$u(x,0) = \varphi(x) = 30\sin(2\pi x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = 6\pi\sin(2\pi x).$$

Ответ: $u(x,t) = (30\cos(6\pi t) + \sin(6\pi t)) \cdot \sin(2\pi x)$.

6. ЭЙЛЕРОВЫ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ[6]

6.1. Гамма-функция. Определение и свойства

Определение 6.1. Гамма-функцией называется математическая функция, зависящая от параметра x, и которая определяется несобственным интегралом первого рода

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt. \tag{6.1}$$

Гамма-функция имеет широкое применение в научных исследованиях и при решении задач математического анализа, теории вероятностей, статистики и физики. Данная функция используется для обобщения факториала на множестве действительных и комплексных значений.

Гамма-функция является одной из важных не элементарных функций. Вычисление многих определенных интегралов сводится к выражению их через эту функцию. Для данных функций составлены подробные таблицы, поэтому решение задачи считается выполненным, если результат выражается через гамма-функцию.

Рассмотрим более подробно свойства этой функции.

Свойство 6.1. Область определения. Гамма-функция является сходящимся несобственным интегралом при любом $x > 0$.

Гамма-функция является несобственным интегралом первого рода. Отметим, что при некоторых значениях переменной x подынтегральная функция является разрывной при $t = 0$, а значит интеграл, определяющий гамма-функцию,

[6] При подготовке данного раздела использовались следующие источники: [3, 8, 10].

является несобственным интегралом второго рода. Исследуем сходимость данного интеграла.

Δ Рассмотрим интегральное представление данной функции в виде суммы двух интегралов

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt = \int\limits_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt + \int\limits_1^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt,$$

где
$$I_1 = \int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt, \tag{6.2}$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt. \tag{6.3}$$

Для функции $I_1 = \int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ подынтегральную функцию заменим эквивалентной, а именно: $f(t,x) = t^{x-1} \cdot e^{-t} \sim t^{x-1}$ при $t \to 0$.

Интеграл (6.2) $I_1 = \int_0^1 t^{x-1} dt$ сходится при $1 - x < 1, x > 0$.

Рассмотрим функцию $g(t) = \frac{1}{t^2}$. Из курса математического анализа мы знаем, что несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ сходится. Сравним подынтегральную функцию интеграла I_2 и функцию $g(t)$. Для этого найдем следующее предельное отношение:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^{x-1} \cdot e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0.$$

Из последнего равенства видно, что величина $f(t,x) = t^{x-1} \cdot e^{-t}$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $g(t) = \frac{1}{t^2}$, а из сходимости несобственного интеграла $\int_1^{\infty} g(t) dt$ следует для любого значения переменной x сходимость интеграла (6.3).

Таким образом, мы показали, что гамма-функция является сходящимся несобственным интегралом при любом $x > 0$. ▲

Свойство 6.2. Непрерывность гамма-функции. Гамма-функция является непрерывной для любого $x > 0$, то есть $\Gamma(x) \in C\big((x; +\infty)\big)$.

Δ Воспользуемся теоремой о непрерывности несобственных интегралов, зависящих от параметров. Возьмем любое $x > 0$. Гамма-функция $\Gamma(x)$ непрерывна в точке x. В силу плотности множества действительных чисел существуют такие x_0 и A, что $x_0 < x < A$. Докажем, что интеграл (6.1) сходится равномерно на промежутке $[x_0; A]$.

Рассмотрим представление $\Gamma(x)$ в виде интегралов (6.2), (6.3):

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt.$$

Если $x > 1$, то интеграл (6.2) является интегралом от непрерывной функции, следовательно, $I_1 \in \mathrm{C}\big([1; +\infty)\big)$.

Если $0 < x < 1$ $(x_0 < x < 1)$, то $|t^{x-1} \cdot e^{-t}| \leq t^{x_0-1}$ и интеграл $\int_0^1 t^{x_0-1} dt$ сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса интеграл I_1 сходится равномерно на промежутке $[x_0; A]$. Следовательно, $I_1 \in \mathrm{C}\big([x_0; 1)\big)$. Таким образом, мы показали, что I_1 непрерывна в любой точке x.

Рассмотрим интеграл (6.3). Отметим, что $I_2 = \int_1^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ сходится равномерно на промежутке $[x_0; A]$, так как $|t^{x-1} \cdot e^{-t}| \leq t^{A-1} \cdot e^{-t}$, а интеграл вида $\int_1^{+\infty} \frac{t^{A-1}}{e^{-t}} dt$ сходится. А так как подынтегральная функция непрерывна, то интеграл I_2 непрерывен на промежутке $[x_0; A]$, следовательно, непрерывен в точке x.

Таким образом, показано, что гамма-функция $\Gamma(x) = I_1 + I_2$ непрерывна как сумма непрерывных функций. А в силу произвольного выбора точки x, имеем, что гамма-функция принадлежит классу непрерывных функций, то есть $\Gamma(x) \in \mathrm{C}\big((x; +\infty)\big)$. ▲

Пример 6.1. Найдем значение $\Gamma(1)$.

Δ Используя определение, по формуле (6.1) посчитаем интеграл:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-t} dt = \lim_{b \to +\infty} -e^{-t}\Big|_0^b = -\lim_{b \to +\infty} (e^{-b} - e^0) = 1.$$ ▲

Свойство 6.3. Дифференцируемость гамма-функции. С помощью теоремы о дифференцируемости несобственных интегралов, зависящих от параметров, а именно: для функции $\Phi(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ производная вычисляется по формуле $\Phi'(y) = \int_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx$, нетрудно доказать, что гамма-функция $\Gamma(x)$ дифференцируема и ее производная вычисляется по формуле

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} \cdot (t)dt.$$

Аналогично, можно получить, что

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} \cdot \ln^2(t)dt.$$

Пример 6.2. Найдем значение $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Δ Используя определение, по формуле (6.1) посчитаем интеграл, введя соответствующую замену и воспользовавшись известным интегралом Эйлера-Пуассона,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t}dt = \left\{\begin{matrix} \sqrt{t} = s, t = s^2, dt = 2sds \\ t_н = 0, s_н = 0,\ t_в = +\infty, s_в = +\infty \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} 2 \cdot e^{-s^2ds} = \left\{\int_0^{+\infty} e^{-x^2dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right\} = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \blacktriangle$$

Свойство 6.4. Справедлива формула понижения

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x). \tag{6.4}$$

Δ Докажем этот факт. Рассмотрим интеграл вида

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^{x+1-1} \cdot e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} t^x \cdot e^{-t}dt.$$

Применив к данному интегралу метод интегрирования по частям, получим

$$\Gamma(x+1)=\int\limits_0^{+\infty} t^x\cdot e^{-t}dt=\left\{\begin{matrix}\int udv=uv-\int vdu,\\ u=t^x, du=x\cdot t^{x-1}dt,\\ dv=e^{-t}dt, v=\int e^{-t}dt=-e^{-t}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}(-t^x\cdot e^{-t})-\int\limits_0^{\infty} -e^{-t}\cdot x\cdot t^{x-1}dt=0+x\int\limits_0^{\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}dt=$$

$$=x\cdot\Gamma(x).\ \blacktriangle$$

Свойство 6.5. Выражение гамма-функции через факториал.

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{6.5}$$

Δ Придадим в формуле понижения $\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$ $x=n$ (целое положительное число) и применим данную формулу n раз, получим

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots$$

$$=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)=n!$$

Итак, имеем $\Gamma(n+1)=n!$. $\blacktriangle$

Функция $\Gamma(x)$ для целых значений аргумента совпадает с обычным факториалом

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

$$\Gamma(1)=1=0!$$

Иногда в вычислениях и преобразованиях полезно применять так называемую формулу дополнения.

Свойство 6.6. Для гамма-функции справедлива формула дополнения

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}, 0<x<1. \tag{6.6}$$

Δ Заменив в формуле (6.6) x на $x+1$, получим

$$\Gamma(x+1)\cdot\Gamma(-x)=\frac{\pi}{\sin\big(\pi(x+1)\big)}=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}. \tag{6.7}$$

Отсюда и из справедливости формулы (6.7) при $0<x<1$ вытекает справедливость равенства (6.6) при любом x, не являющемся целым числом.

Заметим, что, применяя повторно формулу (6.5), получаем справедливое равенство

$$\Gamma(x+n)=(x+n-1)\cdot(x+n-2)\cdot\ldots\cdot(x+1)\cdot x\cdot\Gamma(x). \qquad (6.8)$$

Отсюда при $x=\frac{1}{2}$ имеем

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}.$$

Итак, имеем $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}$. ▲

Пример 6.3. Найдем значение $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$.

Δ Используя формулу (6.4), можно получить

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5\cdot 3\cdot 1}{2^3}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{15}{8}\cdot\sqrt{\pi}. \ ▲$$

6.2. Бета-функция. Определение и свойства

Определение 6.2. Бета-функцией называется математическая функция, зависящая от двух параметров x, y, которая определяется несобственным интегралом второго рода

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}dt\,, x>0, y>0. \qquad (6.9)$$

Перейдем к более подробному рассмотрению свойств данной функции.

Свойство 6.7. Подынтегральная функция имеет разрыв при $x<1$ на нижнем пределе интегрирования и при $y<1$ на верхнем пределе интегрирования. Несобственный интеграл, определяемый формулой (6.9), сходится при $x>0, y>0$ и расходится при $x\leq 0, y\leq 0$.

Доказательство можно провести аналогично доказательству сходимости гамма-функции.

Свойство 6.8. Бета-функция является симметрической функцией, то есть $\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x)$.

Δ В формуле (6.9) введем замену $\tau=1-t, t=1-\tau$. Относительно новой переменной имеем следующее представление:

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}dt=\int_0^1(1-\tau)^{x-1}\cdot\tau^{y-1}=\mathrm{B}(y,x).\ \blacktriangle$$

Свойство 6.9. Для бета-функции справедливо следующее выражение:

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\cdot dt. \qquad (6.10)$$

Свойство 6.10. Между гамма-функцией и бета-функцией существует зависимость

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Δ Рассмотрим гамма-функцию

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t}dt$$

и сделаем замену $t=az$, где $z>0$ – переменная, $a>0$ – параметр. Относительно введенной замены, интеграл запишется следующим образом:

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty}(az)^{x-1}\cdot e^{-az}\cdot adz=a^x\cdot\int\limits_0^{+\infty} z^{x-1}\cdot e^{-az}\cdot dz.$$

Из последнего равенства найдем

$$\frac{\Gamma(x)}{a^x}=\int\limits_0^{+\infty} z^{x-1}\cdot e^{-az}\cdot dz.$$

Подставив в полученное равенство $x\sim x+y, a\sim 1+a$, получим

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+a)^x}=\int_0^{+\infty} z^{x+y-1}\cdot e^{-(1+a)z}\cdot dz. \qquad (6.11)$$

В равенстве (6.11) умножим левую и правую части на выражение z^{x-1} и проинтегрируем:

$$\Gamma(x+y)\cdot\int_0^{+\infty}\frac{a^{x-1}}{(1+a)^{x+y}}da=\int_0^{+\infty}a^{x-1}\cdot da\int_0^{+\infty}z^{x+y-1}\cdot e^{-(1+a)z}\cdot dz. \qquad (6.12)$$

В левой части равенства (6.12) имеем представление бета-функции по формуле (6.10), а именно:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{a^{x-1}}{(1+a)^{x+y}}da=\mathrm{B}(x,y).$$

Справа в равенстве (6.12) поменяем порядок интегрирования, применив соответствующую замену:

$$\int_0^{+\infty} z^{x+y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz=\int_0^{+\infty} a^{x-1}\cdot e^{-az}\cdot da=\left\{\begin{matrix} az=b, a=\dfrac{b}{z}, \\ db=zda, da=\dfrac{1}{z}db\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int_0^{+\infty} z^{x+y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz\int_0^{+\infty} \left(\frac{b}{z}\right)^{x-1}\cdot e^{-b}\cdot\frac{1}{z}db=$$

$$=\int_0^{+\infty} z^{x+y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz\int_0^{+\infty} \frac{b^{x-1}}{z^x}\cdot e^{-b}db=$$

$$=\int_0^{+\infty} z^{x+y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz\cdot\frac{1}{z^x}\int_0^{+\infty} b^{x-1}\cdot e^{-b}db=$$

$$=\int_0^{+\infty} z^{y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz\cdot\Gamma(x)=\Gamma(y)\cdot\Gamma(x).$$

Таким образом, подставляя в (6.12) полученные преобразования интегралов, мы имеем

$$\Gamma(x+y)\cdot B(x,y)=\Gamma(y)\cdot\Gamma(x),$$

откуда следует соотношение, представляющее связь бета-функции и гамма-функции:

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.\ \blacktriangle \qquad (6.13)$$

Определение 6.3. Бета- и гамма-функции, определенные формулами (6.9) и (6.1) называются **интегралами Эйлера первого и второго рода** соответственно.

Некоторые интегралы могут быть вычислены с помощью рассматриваемых функций. Приведем некоторые примеры.

Пример 6.4. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot x^6dx,$ используя формулы Эйлера первого и второго рода.

Δ При помощи определения гамма-функции, посчитаем:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot x^6 dx = \left\{\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t}dt\right\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot x^5 \frac{1}{2} dx^2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot (x^2)^{\frac{5}{2}} dx^2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot (x^2)^{\frac{7}{2}-1} dx^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}. \ \blacktriangle$$

Пример 6.5. Используя формулы Эйлера первого и второго рода, докажем некоторое полезное равенство $I(\alpha,\beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\cdot\cos^\beta x dx = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}\right)$.

Δ Преобразуя в данном интеграле подынтегральную функцию, введя соответствующую замену и поменяв пределы интегрирования, посчитаем данный интеграл:

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\cdot\cos^\beta x dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} x\cdot\cos^{\beta-1} x\cdot\sin x\cdot\cos x\, dx = \left\{\sin x\cdot\cos x\, dx = \frac{1}{2}d\sin^2 x\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} x\cdot\cos^{\beta-1} x\cdot d\sin^2 x = \left\{\begin{matrix} \sin^2 x = t, \\ x_{\text{н}} = 0, t_{\text{н}} = 0, x_{\text{в}} = \dfrac{\pi}{2}, t_{\text{в}} = 1 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}}\cdot(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}dt = \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\left(\tfrac{\alpha+1}{2},\tfrac{\beta+1}{2}\right). \ \blacktriangle$$

Приведем без доказательства некоторые полезные соотношения, используемые на практике при вычислении определенных интегралов:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cdot \cos^\beta x dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Пример 6.6. Вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^2)^3}}$, используя формулы Эйлера первого и второго рода.

Δ Применив известное соотношение и выполнив некоторые преобразования степени, имеем

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^2)^3}} = \left\{\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right\} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}\cdot x^{-1}dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(x^2)^{-\frac{1}{2}}dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{4}}} = \left\{\begin{array}{c} \alpha-1=-\frac{1}{2}, \alpha=\frac{1}{2}; \\ \alpha+\beta=\frac{3}{4}, \beta=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right). \blacktriangle$$

Задачи и упражнения

1. Используя свойства гамма-функции, вычислить значения функции $\Gamma(2), \Gamma(3), \Gamma(4), \Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \Gamma\left(\frac{5}{2}\right), \Gamma\left(\frac{7}{2}\right), \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$.

2. Вычислить следующие интегралы, используя формулы Эйлера второго рода:

1.1. $\int_0^{+\infty} e^{-4x}\cdot x^3 dx$. Ответ: $\frac{3}{128}$.

1.2. $\int_0^{+\infty} e^{-3x^2}\cdot x^4 dx$. Ответ: $\frac{\sqrt{3\pi}}{72}$.

1.3. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot x^4 dx$. Ответ: $\frac{3\sqrt{\pi}}{8}$.

1.4. $\int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n dx$. Ответ: $\Gamma(n+1)$.

1.5. $\int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^5 dx.$ Ответ: $120.$

1.6. $\int_0^1 x^3 \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^5 dx.$ Ответ: $\frac{15}{512}.$

2. Доказать следующие формулы:

2.1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha} x \cdot \cos^{\beta} x dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}.$

2.2. $\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$

2.3. $\int_0^{a} x^2\sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi\cdot a^4}{16}, a > 0.$

2.4. $\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha\text{-}1}}{1+x^{\beta}} dx = \frac{1}{\beta}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{\beta}, 1 - \frac{\alpha}{\beta}\right), 0 < \alpha < \beta.$

4. Вычислить следующие интегралы, используя формулы Эйлера первого и второго рода и полезные соотношения:

4.1. $\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2} dx.$ Ответ: $\pi.$

4.2. $\int_0^4 x^2\sqrt{16 - x^2} dx.$ Ответ: $16\pi.$

4.3. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx\,.$ Ответ: $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$

4.4. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x^3)^2} dx\,.$ Ответ: $\frac{\pi}{5\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}.$

4.5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx\,.$ Ответ: $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$

4.6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cdot \cos^3 x dx.$ Ответ: $\frac{1}{24}.$

4.7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x \cdot \cos^5 x dx.$ Ответ: $\frac{1}{210}.$

4.8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx.$ Ответ: $\frac{8}{315}.$

4.9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cdot \cos^4 x dx.$ Ответ: $\frac{3\pi}{512}.$

4.10. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[5]{x^3(2-x)^2}} dx.$ Ответ: $\frac{\pi}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}.$

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ, ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ[7]

7.1. Понятие функции Бесселя

Степенные ряды находят широкое применение при решении задач, которые возникают во многих разделах математики. Это не только численные вычисления, но и решение различных задач, где решение может быть представлено степенной функцией аргумента x. В качестве примера рассмотрим так называемое уравнение Бесселя, применение которого встречается при исследовании и решении прикладных задач физики и техники.

Определение 7.1. Дифференциальное уравнение вида

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \tag{7.1}$$

$p -$ заданная постоянная, называется **уравнением Бесселя**.

Данное дифференциальное уравнение удовлетворяет условиям теоремы 7.1, в соответствии с которой его решение будем искать в виде обобщенного степенного ряда.

Теорема 7.1. Пусть в уравнении $p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ функции $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ разлагаются в степенные ряды в окрестности точки x_0, причем точка x_0 является нулем порядка s функции $p_0(x)$, является нулем порядка $s-1$ функции $p_1(x)$, является нулем порядка $s-2$ функции $p_2(x)$. Тогда решение дифференциального уравнение существует и представимо в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+\rho}, \tag{7.2}$$

где $a_0 \neq 0, \rho \in \mathbb{R}$.

Уравнение для определения его показателя p имеет вид

$$\rho(\rho - 1) + \rho - p^2 = 0 \text{ или } \rho^2 - p^2 = 0.$$

Последнее уравнение называется определяющим уравнением, и его корни равны $\rho_1 = p, \rho_2 = -p$.

[7] При подготовке данного раздела использовались следующие источники: [3].

Будем искать решение уравнения в виде

$$y = x^{\rho}(a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots).$$

Подставляя в левую часть уравнения Бесселя решение в виде степенного ряда и его производные первого и второго порядков и приравнивая коэффициенты при различных степенях переменной x нулю, получим систему следующего вида:

$$\begin{cases} [\rho^2 - p^2]a_0 = 0 \\ [(\rho+1)^2 - p^2]a_1 = 0, \\ [(\rho+2)^2 - p^2]a_2 + a_0 = 0, \\ [(\rho+3)^2 - p^2]a_3 + a_1 = 0, \\ \dots \\ [(\rho+n)^2 - p^2]a_n + a_{n-2} = 0. \end{cases}$$

Приняв $a_0 = 1$ и вычисляя последовательно коэффициенты, приходим к решению ($\rho_1 = p$)

$$y_1 = x^p \left(1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \cdots \right).$$

Решение y_1 удобно представить в виде ряда с учетом того, что коэффициенты с нечетными индексами равны нулю, а с четными индексами можно записать с использованием функции Эйлера второго рода:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{k!\, 2^{2k}(1+p)(2+p)\dots(k+p)}.$$

Если рассмотреть в виде $a_0 = \frac{1}{2^p p!} = \frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$, то имеем формулу для определения следующих коэффициентов

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)}$$

и, следовательно, решение можно представить в виде

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} = J_p(x). \qquad (7.3)$$

Используя второй корень $\rho_2 = -p$, можем построить второе решение рассматриваемого уравнения Бесселя. Оно может быть получено из решения y_1 простой заменой p на $-p$, так как уравнение Бесселя содержит только p^2 и не меняет знак при замене p на $-p$:

$$y_2 = x^{-p}\left(1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(-2p+2)(-2p+4)}\right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(-2p+2)(-2p+4)(-2p+6)} + \cdots \right).$$

Решение y_2 аналогично предыдущему можно записать с использованием функции Эйлера, приняв $a_0 = \frac{1}{2^{-p}\Gamma(-p+1)}$:

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p} = J_{-p}(x). \tag{7.4}$$

Разность корней определяющего уравнения равна $2p$, а следовательно, два решения будут верны, если p не равно целому числу или половине целого нечетного числа. Решение y_1 с точностью до некоторого постоянного множителя дает функцию Бесселя p-порядка, которую обозначают через $J_p(x)$ и называют цилиндрической функцией первого рода. Таким образом, если p не есть целое число или половина целого нечетного числа, то общее решение уравнения Бесселя можно записать в виде линейной комбинации двух функций $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$:

$$y = C_1 \cdot J_p(x) + C_2 \cdot J_{-p}(x),$$

где

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p},$$

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}.$$

Степенной ряд, входящий в решение

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} = J_p(x),$$

сходится при любом значении переменной, в чем нетрудно убедиться, применив известный признак сходимости – признак Даламбера.

Определение 7.2. Функции $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$ называются **функциями Бесселя первого рода порядка p и $-p$** соответственно или **цилиндрическими функциями первого рода.**

Если рассмотрим $p = n$ – целое положительное число, то решение y_1 сохранит свою силу, а решение y_2 потеряют силу, так как, начиная с некоторого числа, один из множителей в знаменателе членов разложения будет равен нулю.

При целом $p = n$ имеет место равенство

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \cdot J_n(x), \tag{7.5}$$

которое показывает линейную зависимость функций Бесселя.

Докажем равенство (7.5).

Δ Так как гамма-функция $\Gamma(x)$ определена при $x > 0$, то

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k-n)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}.$$

Положим $k - n = m$. Тогда

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{m!\,(n+m)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} =$$

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n J_n(x).$$

Итак, при целом n функции $J_{-n}(x), J_n(x)$ не образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя (7.1). ▲

При целом положительном $p = n$ второе решение уравнения Бесселя, линейно независимое с $J_n(x)$, имеет вид

$$N_n(x) = \lim_{p\to n} \frac{J_p(x)\cos(\pi p) - J_{-p}(x)}{\sin(\pi p)}, \tag{7.6}$$

где p – нецелое.

Определение 7.3. Функция $N_n(x)$ называется **цилиндрической функцией Бесселя второго рода или функцией Неймана**.

Таким образом, при целом $p = n$ общее решение уравнения Бесселя имеет вид $y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x)$.

7.2. Функции Бесселя, индекс которых равен целому числу с половиной

Пример 7.1. Рассмотрим случай, когда параметр в уравнении Бесселя (7.1) $p = \frac{1}{2}$. Найдем функцию Бесселя $J_{\frac{1}{2}}(x)$.

Δ Применяя формулу (7.3), получим

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\left(k+\frac{1}{2}\right)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}+1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}+1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Так как из свойств гамма-функций следует, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k),$$

то получаем следующие соотношения:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi},$$

$$\cdots$$

$$\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right) = \frac{2k+1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}{2^{k+1}} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Учитывая, что для натуральных k справедливо соотношение $\Gamma(k+1) = k!$, после некоторых преобразований получим следующее:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^{k+1}}{k! \cdot \sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{k! \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1) \cdot 2^k} \cdot x^{2k+1} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}.$$

Правая часть последнего соотношения представляет собой разложение известной нам тригонометрической функции $\sin x$. Таким образом, мы показали справедливость равенства

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x. \ \blacktriangle \qquad (7.7)$$

Пример 7.2. Рассмотрим случай, когда параметр в уравнении Бесселя (7.1) $p = -\frac{1}{2}$. Найдем функцию Бесселя $J_{-\frac{1}{2}}(x)$.

Δ Применяя формулу (7.4), имеем

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\left(k-\frac{1}{2}\right)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}+1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}+1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma\left(k-\frac{1}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{2k-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\, \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k},$$

получим

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{k! \cdot \sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} \cdot x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x\,.$$

Таким образом, мы показали, что функция Бесселя $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ выражается через тригонометрическую функцию $\cos(x)$ и справедливо равенство

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x. \ \blacktriangle \tag{7.8}$$

Получим некоторые рекуррентные соотношения для функций Бесселя, которые связывают функции Бесселя первого рода различных порядков.

Свойство 7.1. Справедливо равенство

$$\left(x^p \cdot J_p(x)\right)' = x^p \cdot J_{p-1}(x). \tag{7.9}$$

Δ Найдем производную по переменной x от произведения $x^p \cdot J_p(x)$:

$$\left(x^p \cdot J_p(x)\right)' = \left(x^p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}\right)' =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+2p}}{k!\,\Gamma(k+p+1) \cdot 2^{2k+p}}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2k+2p) x^{2k+2p-1}}{k!\,\Gamma(k+p+1) \cdot 2^{2k+p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2k+2p) x^{2k+2p-1}}{k!\,(k+p)\Gamma(k+p) \cdot 2^{2k+p}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2x^{2k+2p-1}}{k!\,\Gamma(k+p) \cdot 2^{2k+p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+2p-1}}{k!\,\Gamma(p-1+k+1) \cdot 2^{2k+p-1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^p \cdot x^{2k+p-1}}{k!\,\Gamma(p-1+k+1) \cdot 2^{2k+p-1}} = x^p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+p-1}}{k!\,\Gamma(p-1+k+1) \cdot 2^{2k+p-1}} =$$

$$= x^p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p-1+k+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p-1} = x^p \cdot J_{p-1}(x).$$

Таким образом, доказана формула (7.9)

$$\left(x^p \cdot J_p(x)\right)' = x^p \cdot J_{p-1}(x). \ \blacktriangle$$

Свойство 7.2. Справедливо равенство

$$\left(\frac{J_p(x)}{x^p}\right)' = -\frac{1}{x^p} \cdot J_{p+1}(x). \quad (7.10)$$

Δ Найдем производную по переменной x от частного $\frac{J_p(x)}{x^p}$:

$$\left(\frac{J_p(x)}{x^p}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+p+1)x^p} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}\right)' =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{k!\,\Gamma(k+p+1) \cdot 2^{2k+p}}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2k)x^{2k-1}}{k!\,\Gamma(k+p+1) \cdot 2^{2k+p}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2k+2p)x^{2k+2p-1}}{k!\,\Gamma(k+p+1) \cdot 2^{2k+p}} = \left\{\begin{matrix}\text{суммирование начнем с } k=1, \\ \text{так как при } k=0 \text{ первый член} \\ \text{суммы равен нулю}\end{matrix}\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2x^{2k-1}}{(k-1)!\,\Gamma(k+p+1) \cdot 2^{2k+p}} = \left\{\begin{matrix}\text{положим} \\ k = m+1 \\ m = k-1\end{matrix}\right\}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot 2x^{2m+1}}{m!\,\Gamma(p+m+2) \cdot 2^{2m+p+2}} = \left\{\begin{matrix}\text{умножим и разделим} \\ \text{на } x^p\end{matrix}\right\}$$

$$= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{x^p} \cdot \frac{(-1)^m \cdot x^{2m+1+p}}{m!\,\Gamma\big((p+1)+m+1\big) \cdot 2^{2m+p+1}} = -\frac{1}{x^p} \cdot J_{p+1}(x).$$

Таким образом, доказана формула (7.10)

$$\left(\frac{J_p(x)}{x^p}\right)' = -\frac{1}{x^p} \cdot J_{p+1}(x). \ \blacktriangle$$

Свойство 7.3. Справедливо равенство

$$J_p(x) = \frac{x}{2p} \cdot \left(J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)\right). \quad (7.11)$$

Δ Применив правила дифференцирования в левых частях доказанных равенств (7.9) и (7.10), получим систему линейных уравнений для нахождения связи между функциями:

$$\begin{cases} \left(x^p \cdot J_p(x)\right)' = x^p \cdot J_{p-1}(x), \\ \left(\dfrac{J_p(x)}{x^p}\right)' = -\dfrac{1}{x^p} \cdot J_{p+1}(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \cdot x^{p-1} \cdot J_p(x) + x^p \cdot J'_p(x) = x^p \cdot J_{p-1}(x), \\ -p \cdot x^{-p-1} \cdot J_p(x) + x^{-p} \cdot J'_p(x) = -\dfrac{1}{x^p} \cdot J_{p+1}(x). \end{cases}$$

Выразим из равенств последней системы производную функции Бесселя $J'_p(x)$ и приравняем полученные выражения:

$$\begin{cases} J'_p(x) = J_{p-1}(x) - \dfrac{p}{x} \cdot J_p(x), \\ J'_p(x) = -J_{p+1}(x) + \dfrac{p}{x} \cdot J_p(x). \end{cases}$$

Данная система дает соотношение (7.11), которое представляет собой рекуррентное равенство, связывающее функции Бесселя первого рода различных порядков, а именно:

$$J_p(x) = \frac{x}{2p} \cdot \left(J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)\right). \blacktriangle$$

Заметим, что, используя рекуррентную формулу (7.11) и положив в ней $p = \frac{1}{2}$, можно получить выражения функций Бесселя $J_{\frac{3}{2}}(x), J_{\frac{5}{2}}(x), J_{\frac{7}{2}}(x), \dots$.

Доказанные свойства дают возможность на практике записывать некоторые значения функций Бесселя, опираясь на уже вычисленные и известные.

Отметим также, что функции Бесселя с полуцелым индексом $J_{\frac{1}{2}+n}(x)$ всегда выражаются через элементарные функции, что также широко применяется при решении дифференциальных уравнений на практике.

Задачи и упражнения

1. Найти вид функции Бесселя $J_{\frac{3}{2}}(x)$. Ответ: $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$.
2. Найти вид функции Бесселя $J_{-\frac{3}{2}}(x)$.

Ответ: $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$.

3. Найти вид функции Бесселя $J_{\frac{5}{2}}(x)$.

Ответ: $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3\sin x}{x} - \frac{3\cos x}{x^2} - \sin x\right)$.

4. Найти вид функции Бесселя $J_{-\frac{5}{2}}(x)$.

Ответ: $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3\sin x}{x} + \frac{3\cos x}{x^2} - \cos x\right)$.

5. Используя рекуррентные соотношения, выразить $J_{\frac{5}{2}}(x)$.

Ответ: $J_{\frac{5}{2}}(x) = \frac{3}{x}J_{\frac{3}{2}}(x) - J_{\frac{1}{2}}(x)$.

6. Используя рекуррентные соотношения, выразить $J_{\frac{7}{2}}(x)$.

Ответ: $J_{\frac{7}{2}}(x) = \frac{5}{x}J_{\frac{5}{2}}(x) - J_{\frac{3}{2}}(x)$.

7. Найти решение уравнения Бесселя $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$.

Ответ: $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$.

8. Найти решение уравнения Бесселя $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)y = 0$.

Ответ: $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(C_1\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) + C_2\left(-\sin x - \frac{\cos x)}{x}\right)\right)$.

9. Показать, что, используя замену $y = u\sqrt{x}$, дифференциальное уравнение $y'' + y = 0$ сводится к уравнению Бесселя и записать его решение.

Ответ: $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$.

10. Показать, что, используя замену $y = x^{-n}u$, дифференциальное уравнение $y'' + \frac{2n+1}{x}y' + y = 0$ сводится к уравнению Бесселя и записать его решение.

Ответ: $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$.

8. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И *Z*-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ[8]

8.1. Решетчатые функции

Основой математической теории описания процессов в импульсных системах является аппарат решетчатых функций и разностных уравнений.

Определение 8.1. Пусть дана непрерывная функция $f(t)$. Пройдем по оси t с шагом $T=1$ и найдем множество значений функции f целочисленного аргумента $n \in \mathbb{Z}$: $\{f(n)\} = \{\ldots, f(-n), \ldots, f(-1), f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots\}$.

Если значения этого множества изобразить в виде отрезков, исходящих из точек n оси t, то получим картину, напоминающую решетку (рис. 8.1), поэтому функцию $\{f(n)\}$ и называют **решетчатой функцией** (в дальнейшем фигурные скобки для простоты будем опускать).

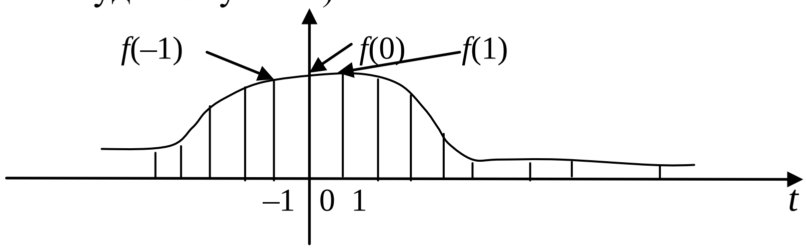

Рис. 8.1. График решетчатой функции

Решетчатая функция является математической абстракцией реального дискретного сигнала. Дискретный сигнал (в том числе и импульсный) образуется из непрерывного сигнала в результате квантования по времени. Заметим, что для инженера, как правило, неинтересно течение процесса, описываемого функцией $f(t)$ для времени $t<0$ (то есть до начального момента времени), поэтому для дальнейших рассуждений мы будем рассматривать решетчатые функции $f(n)$, для которых $f(n)=0$ для $n<0$.

8.2. *Z*-преобразование

Определение 8.2. Функция

[8] При подготовке данного раздела использовались следующие источники: [3, 8, 10].

$$F(z)=f(0)+\frac{f(1)}{z}+\frac{f(2)}{z^2}+\ldots+\frac{f(n)}{z^n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n)}{z^n} \qquad (8.1)$$

называется **Z-преобразованием (Z-изображением)** решетчатой функции $f(n)$.

Правую часть формулы (8.1) можно рассматривать как ряд Лорана функции $F(z)$. Найдем его область сходимости, используя радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{f(n)}{z^n}\right|}=\frac{1}{|z|}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f(n)|}=\frac{R}{|z|}<1,$$

а значит ряд (8.1) абсолютно сходится в области $|z|>R$, где $R=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f(n)|}$, которая представляет собой внешность круга радиусом R с центром в точке $z=0$ (рис. 8.2).

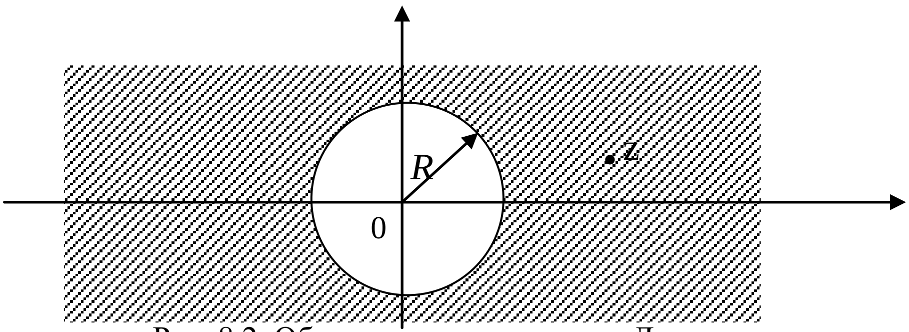

Рис. 8.2. Область сходимости ряда Лорана

Рассмотрим **свойства Z-преобразования.**

Свойство 8.1. Линейность. Оператор F является линейным, то есть если $f(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i f_i(n)$, то $F(z)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i F_i(z)$, где $f_i(n)\leftrightarrow F_i(z)$, $c_i\in\mathbb{R}$.

Свойство 8.2. Запаздывание аргумента. Если $f(n)\leftrightarrow F(z)$, то $f(n-k)\leftrightarrow\dfrac{F(z)}{z^k}$.

Δ По определению $f(n)\leftrightarrow F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f(n)}{z^n}$. Тогда

$$f(n-k)\leftrightarrow\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f(n-k)}{z^n}=\left\{\begin{matrix}\text{сделаем замену:}\\ n-k=m\Rightarrow n=m+k\end{matrix}\right\}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(m)}{z^{m+k}}=$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)}{z^m \cdot z^k} = \frac{1}{z^k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)}{z^m} = \frac{1}{z^k} \cdot F(z). \blacktriangle$$

Свойство 8.3. Опережение аргумента. Если $f(n) \leftrightarrow F(z)$, то

$$f(n+k) \leftrightarrow z^k \left[F(z) - \left(f(0) + \frac{f(1)}{z} + \ldots + \frac{f(k-1)}{z^{k-1}} \right) \right].$$

Δ По определению

$$f(n+k) \leftrightarrow f(k) + \frac{f(k+1)}{z} + \frac{f(k+2)}{z^2} + \ldots + \frac{f(k+n)}{z^n} + \ldots =$$

$$= z^k \left[\begin{array}{l} f(0) + \dfrac{f(1)}{z} + \dfrac{f(2)}{z^2} + \ldots + \dfrac{f(k)}{z^k} + \dfrac{f(k+1)}{z^{k+1}} + \ldots - \\ -\left(f(0) + \dfrac{f(1)}{z} + \ldots + \dfrac{f(k-1)}{z^{k-1}} \right) \end{array} \right] =$$

$$= z^k \left[F(z) - \left(f(0) + \frac{f(1)}{z} + \ldots + \frac{f(k-1)}{z^{k-1}} \right) \right]. \blacktriangle$$

Свойство 8.4. Подобие. Если $f(n) \leftrightarrow F(z)$, то $\dfrac{f(n)}{a^n} \leftrightarrow F(az)$.

Δ Если $f(n) \leftrightarrow F(z) = f(0) + \dfrac{f(1)}{z} + \dfrac{f(2)}{z^2} + \ldots + \dfrac{f(n)}{z^n} + \ldots$, то

$$\frac{f(n)}{a^n} \leftrightarrow F(z) = f(0) + \frac{f(1)}{az} + \frac{f(2)}{(az)^2} + \ldots + \frac{f(n)}{(az)^n} + \ldots = F(az). \blacktriangle$$

Свойство 8.5. Дифференцирование *Z*-преобразования.

Если $f(n) \leftrightarrow F(z)$, то $n \cdot f(n) \leftrightarrow -z \cdot F'(z)$.

Δ По определению $F(z) = f(0) + \dfrac{f(1)}{z} + \dfrac{f(2)}{z^2} + \ldots + \dfrac{f(n)}{z^n} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(n)}{z^n}$.

Продифференцируем по z это равенство:

$$F'(z) = -\frac{f(1)}{z^2} - 2\frac{f(2)}{z^3} - \ldots - n\frac{f(n)}{z^{n+1}} + \ldots = -\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{f(n)}{z^{n+1}}.$$

Далее умножим на $(-z)$ обе части полученного равенства:

$$-z\cdot F'(z)=\frac{f(1)}{z}+2\frac{f(2)}{z^2}+\ldots+n\frac{f(n)}{z^n}+\ldots=z\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{f(n)}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot f(n)}{z^n}.$$

Таким образом, справедливо соответствие $n\cdot f(n)\leftrightarrow -z\cdot F'(z)$.▲

Свойство 8.6. Свертка решетчатых оригиналов.

Определение 8.3. Сверткой решетчатых функций $f(n)$ и $\varphi(n)$ называется решетчатая функция $f(n)*\varphi(n)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f(k)\varphi(n-k)$.

Если $f(n)\leftrightarrow F(z),\ \varphi(n)\leftrightarrow \Phi(z)$, то $f(n)*\varphi(n)\leftrightarrow F(z)\Phi(z)$.

Δ Обозначим через $g(n)$ свертку двух решетчатых функций $f(n)$ и $\varphi(n)$: $g(n)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f(k)\varphi(n-k)$, а через $G(z)$ – Z-изображение функции $g(n)$.

По определению

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g(n)}{z^n}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}f(k)\varphi(n-k)}{z^n}=\{\text{изменим порядок суммирования}\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\varphi(n-k)}{z^n}=\left\{\begin{array}{l}\text{замена}:\\ m=n-k\\ n=m+k\end{array}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi(m)}{z^{m+k}}=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(k)}{z^k}}_{F(z)}\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi(m)}{z^m}}_{\Phi(z)}=F(z)\Phi(z).\ ▲$$

Пример 8.1. Запишите Z-преобразования следующих функций: а) $f(n)=1$; б) $f(n)=a^n\cdot e^{\alpha n}$; в) $f(n)=\dfrac{a^n}{n!}$.

$$\Delta\ \text{а) } 1\leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots=\left\{\left|\frac{1}{z}\right|<1\Leftrightarrow|z|>1\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{z}{z-1};$$

$$\text{б) } a^n\cdot e^{\alpha n}\leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\cdot e^{\alpha n}}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a\cdot e^{\alpha}}{z}\right)^n=1+\frac{a\cdot e^{\alpha}}{z}+\left(\frac{a\cdot e^{\alpha}}{z}\right)^2+\ldots+$$

$$+\left(\frac{a\cdot e^{\alpha}}{z}\right)^n+\ldots=\left\{\left|\frac{a\cdot e^{\alpha}}{z}\right|<1\ \Leftrightarrow\ |z|>e^{\alpha}|a|\right\}=\frac{1}{1-\frac{a\cdot e^{\alpha}}{z}}=\frac{z}{z-a\cdot e^{\alpha}}.$$

Если $a=1$, то $e^{\alpha n} \leftrightarrow \dfrac{z}{z-e^{\alpha}}$; при $\alpha=0$: $a^n \leftrightarrow \dfrac{z}{z-a}$.

в) $\dfrac{a^n}{n!} \leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n! \cdot z^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} \cdot \left(\dfrac{a}{z}\right)^n = e^{\frac{a}{z}}$.

Здесь использовано известное разложение функции e^x в ряд Маклорена $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. ▲

В таблице приложения 2 приведены *Z*-преобразования основных функций.

8.3. Восстановление решетчатой функции по ее *Z*-преобразованию

Рассмотрим вопрос о восстановлении решетчатой функции $f(n)$ по ее *Z*-преобразованию $F(z)$.

В некоторых случаях восстановить решетчатую функцию по ее преобразованию можно используя таблицу основных *Z*-преобразований и его свойства.

Пример 8.2. Найдите решетчатую функцию $f(n)$ по ее *Z*-преобразованию $F(z) = \dfrac{z-1}{z^2+3z+2}$.

Δ Представим $F(z) = \dfrac{z-1}{z^2+3z+2}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{z-1}{z^2+3z+2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} = \frac{A(z+2)+B(z+1)}{z^2+3z+2}.$$

Используя метод частных значений, получим $z=-1: A=-2$; $z=-2: B=3$.

Таким образом, $\dfrac{z-1}{z^2+3z+2} = -2 \cdot \dfrac{1}{z+1} + 3 \cdot \dfrac{1}{z+2}$.

Используем таблицу *Z*-преобразований, свойства линейности и запаздывания аргумента:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z+1} \leftrightarrow (-1)^{n-1}, \quad \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z+2} \leftrightarrow (-2)^{n-1}.$$

Значит $F(z) = \dfrac{z-1}{z^2+3z+2} \leftrightarrow -2 \cdot (-1)^{n-1} + 3 \cdot (-2)^{n-1} = f(n)$. ▲

Утверждение 8.1. Если $z_1, z_2, \ldots, z_k$ особые точки функции $F(z)$, лежащие внутри некоторого круга $|z| = R_1$, тогда решетчатая функция $f(n)$ может быть найдена по формуле

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_i}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right), \tag{8.2}$$

где $\operatorname*{Res}_{z=z_i}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)$ – вычет функции $F(z)\cdot z^{n-1}$ в точке $z = z_i$, который может быть вычислен стандартным образом (формулы (П.1.2)–(П.1.4), прил. 1).

Вернемся к условию примера 8.2 и решим его с помощью формулы (8.2), а также формулы (П.1.2).

Δ Точки $z_1 = -1$ и $z_2 = -2$ являются простыми корнями знаменателя, а значит простыми полюсами функции $F(z)$, поэтому

$$f(n) = \operatorname*{Res}_{z=-1}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right) + \operatorname*{Res}_{z=-2}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right).$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся формулой (П.1.2), а также тем, что функцию $F(z)$ можно записать в виде $F(z) = \dfrac{z-1}{(z+1)(z+2)}$:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right) = \lim_{z\to-1}\left((z+1)\cdot\frac{z-1}{(z+1)(z+2)}\cdot z^{n-1}\right) = -2\cdot(-1)^{n-1},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right) = \lim_{z\to-2}\left((z+2)\cdot\frac{z-1}{(z+1)(z+2)}\cdot z^{n-1}\right) = 3\cdot(-2)^{n-1}.$$

С учетом полученных выражений имеем $f(n) = -2\cdot(-1)^{n-1} + 3\cdot(-2)^{n-1}$.▲

Пример 8.3. Найдите решетчатую функцию $f(n)$ по ее Z-изображению $F(z) = \dfrac{z+3}{(z-1)^3}$.

Δ В данном случае $z = 1$ – особая точка знаменателя, корень кратности три, а значит и полюс третьего порядка.

Используя формулу (8.2), а также формулу (П.1.4) получим:

$$f(n)=\operatorname*{Res}_{z=1}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\left[F(z)z^{n-1}(z-1)^3\right]^{//}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[(z+3)z^{n-1}\right]^{//}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[z^n+3z^{n-1}\right]^{//}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[n\cdot z^{n-1}+3(n-1)z^{n-2}\right]^{/}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[n(n-1)z^{n-2}+3(n-1)(n-2)z^{n-3}\right]=\frac{1}{2}(n-1)(n+3n-6)=(n-1)(2n-3).\ \blacktriangle$$

8.4. Разностные уравнения

Определение 8.4. Пусть $f(n)$ – некоторая решетчатая функция. Функция

$$\Delta f(n)=f(n+1)-f(n) \tag{8.3}$$

называется **конечной разностью первого порядка**.

Далее можно записать определения и формулы для конечных разностей второго, третьего и других порядков.

Функция $\Delta^2 f(n)=\Delta\left(\Delta f(n)\right)$ называется **конечной разностью второго порядка**

$$\Delta^2 f(n)=\Delta f(n+1)-\Delta f(n)=f(n+2)-f(n+1)-(f(n+1)-f(n))=$$

$$=f(n+2)-2f(n+1)+f(n) \tag{8.4}$$

Рекуррентно k-я конечная разность определяется следующим образом:

$$\Delta^k f(n)=\Delta\left(\Delta^{k-1}f(n)\right)=\Delta^{k-1}f(n+1)-\Delta^{k-1}f(n)=f(n+k)-C_k^1 f(n+k-1)+$$

$$+C_k^2 f(n+k-2)-\ldots+(-1)^i C_k^i f(n+k-i)+\ldots+(-1)^k f(n), \tag{8.5}$$

где $C_k^i=\dfrac{k!}{i!(k-i)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Формулы (8.3)–(8.5) выражают разности решетчатой функции через значения этой функции в целочисленных точках.

Определение 8.5. Разностным уравнением *k*-го порядка называется соотношение, связывающее неизвестную решетчатую функцию $f(n)$ и ее разности до порядка k включительно

$$F\left(n,\ f(n),\Delta f(n),\Delta^2 f(n),\ldots,\Delta^k f(n)\right)=0 \tag{8.6}$$

или с учетом формулы (8.5)

$$F\big(n,\ f(n),\ f(n+1),\ f(n+2),\ldots,f(n+k)\big)=0. \qquad (8.7)$$

Определение 8.6. Решением уравнений (8.6) или (8.7) называется любая решетчатая функция $f(n)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в верное равенство для любого $n=0,1,2,\ldots$.

Определение 8.7. Линейным разностным уравнением *k*-го порядка называется уравнение вида

$$a_0 y(n+k)+a_1 y(n+k-1)+a_2 y(n+k-2)+\ldots+a_k y(n)=f(n), \qquad (8.8)$$

где $a_i=\text{const},\ i=\overline{0,k}$, причем $a_0\neq 0$.

Если решетчатая функция $f(n)\equiv 0$, то уравнение (8.8) называется **однородным**; в противном случае – **неоднородным**.

Определение 8.8. Начальными условиями для разностного уравнения (8.8) называются условия вида

$$y(n_0)=y_0,\quad y(n_0+1)=y_1,\quad \ldots\quad y(n_0+k-1)=y_{k-1}. \qquad (8.9)$$

Решение разностного уравнения (8.8) с начальными условиями (8.9) называется **задачей Коши**.

Рассмотрим приложения *Z*-преобразования к решению линейных разностных уравнений и систем разностных уравнений.

Алгоритм решения линейного разностного уравнения *k*-го порядка. Дано линейное разностное уравнение вида (8.8)

$$a_0 y(n+k)+a_1 y(n+k-1)+a_2 y(n+k-2)+\ldots+a_k y(n)=f(n)$$

при начальных условиях вида (8.9)

$$y(0)=y_0, y(1)=y_1,\ldots,y(k-1)=y_{k-1},$$

где $y_0,y_1,\ldots,y_{k-1}$ – заданные числа.

Применим *Z*-преобразование к обеим частям уравнения (8.8):

$$f(n)\leftrightarrow F(z),$$

$$y(n)\leftrightarrow Y(z),$$

$$y(n+1)\leftrightarrow z[Y(z)-y_0],$$

$$y(n+2) \leftrightarrow z^2\left[Y(z)-\left(y_0+\frac{y_1}{z}\right)\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y(n+k-1) \leftrightarrow z^{k-1}\left[Y(z)-\left(y_0+\frac{y_1}{z}+\frac{y_2}{z^2}+\ldots+\frac{y_{k-2}}{z^{k-2}}\right)\right],$$

$$y(n+k) \leftrightarrow z^{k}\left[Y(z)-\left(y_0+\frac{y_1}{z}+\frac{y_2}{z^2}+\ldots+\frac{y_{k-1}}{z^{k-1}}\right)\right].$$

Подставим данные выражения в уравнение (8.8) и используя свойство линейности, а также то, что из равенства решетчатых оригиналов следует равенство их Z-преобразований, получим операторное уравнение

$$Y(z)(a_0z^k+a_1z^{k-1}+a_{k-1}z+a_k)-y_0(a_0z^k+a_1z^{k-1}+a_{k-1}z)-$$
$$-y_1(a_0z^{k-1}+a_1z^{k-2}+a_{k-2}z)-\ldots-y_{k-1}a_0z\equiv F(z).$$

Данное уравнение легко решается относительно функции $Y(z)$. Запишем его в виде $Y(z)\varphi(z)-\psi(z)\equiv F(z) \quad \Leftrightarrow \quad Y(z)=\dfrac{F(z)+\psi(z)}{\varphi(z)}$.

Далее стандартным образом необходимо восстановить решетчатый оригинал $y(n)$.

Замечание. Аналогичным образом решаются системы линейных разностных уравнений.

Пример 8.4. Решите разностное уравнение второго порядка $y(n+2)-y(n)=2^n$ при начальных условиях $y(0)=y(1)=0$.

Δ Пусть $y(n)\leftrightarrow Y(z)$, тогда

$$y(n+2) \leftrightarrow z^2\left[Y(z)-\left(y_0+\frac{y_1}{z}\right)\right]=z^2\left[Y(z)-\left(0+\frac{0}{z}\right)\right]=z^2\cdot Y(z).$$

Также по формуле 4) прил.2 получим $2^n \leftrightarrow \dfrac{z}{z-2}$.

Запишем операторное уравнение:

$$z^2\cdot Y(z)-Y(z)=\frac{z}{z-2}\quad\Rightarrow\quad (z^2-1)\cdot Y(z)=\frac{z}{z-2}\quad\Rightarrow Y(z)=\frac{z}{(z^2-1)(z-2)}.$$

Так как особые точки $z_1=1, z_2=-1, z_3=2$ функции $Y(z)$ являются ее простыми полюсами, то используя формулы (8.2) и (П.1.2) находим

$$y(n)=\operatorname*{Res}_{z=1}Y(z)z^{n-1}+\operatorname*{Res}_{z=-1}Y(z)z^{n-1}+\operatorname*{Res}_{z=2}Y(z)z^{n-1}\langle=\rangle$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}Y(z)\cdot z^{n-1}=\lim_{z\to1}\frac{z}{(z^2-1)(z-2)}\cdot(z-1)\cdot z^{n-1}=-\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}Y(z)\cdot z^{n-1}=\lim_{z\to-1}\frac{z}{(z^2-1)(z-2)}\cdot(z+1)\cdot z^{n-1}=\frac{1}{6}\cdot(-1)^n,$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2}Y(z)\cdot z^{n-1}=\lim_{z\to2}\frac{z}{(z^2-1)(z-2)}\cdot(z-2)\cdot z^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot 2^n,$$

$$\langle=\rangle-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{6}+\frac{2^n}{3}.\blacktriangle$$

Задачи и упражнения

1. Найдите Z-преобразование решетчатой функции:

1.1. $f(n)=e^{3n}\cdot\operatorname{ch}4n.$ Ответ: $F(z)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{z-e^7}+\dfrac{z}{z-e^{-1}}\right).$

1.2. $f(n)=n\cdot\sin 3n.$ Ответ: $F(z)=\dfrac{z\sin 3(z^2-1)}{\left(z^2-2z\cos 3+1\right)^2}.$

1.3. $f(n)=n^3.$ Ответ: $F(z)=\dfrac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}.$

2. Найдите решетчатую функцию $f(n)$ по ее Z-преобразованию $F(z)$:

2.1. $F(z)=\dfrac{z+3}{z^2+3z-10}.$ Ответ: $f(n)=\dfrac{2}{7}\cdot(-5)^{n-1}+\dfrac{5}{7}\cdot 2^{n-1}.$

2.2. $F(z)=\dfrac{z-1}{(z+1)(z+2)^2}.$ Ответ: $f(n)=2\cdot(-1)^n+\dfrac{3n-7}{4}\cdot(-2)^n.$

2.3. $F(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2+z-12}.$ Ответ: $f(n)=\dfrac{1}{7}\left(10\cdot 3^{n-1}-17\cdot(-4)^{n-1}\right).$

2.4. $F(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-3)^3}$. Ответ: $f(n)=3^{n-3}(5n^2+3n+2)$.

3. Решите разностное уравнение соответствующего порядка при данных начальных условиях:

3.1. $y(n+2)-5y(n+1)+6y(n)=1$ при $y(0)=y(1)=0$.

Ответ: $y(n)=\dfrac{1}{2}-2^n+\dfrac{1}{2}\cdot 3^n$.

3.2. $y(n+2)-3y(n+1)+2y(n)=0$ при $y(0)=2$; $y(1)=3$.

Ответ: $y(n)=1+2^n$.

3.3. $y(n+3)-5y(n+2)+8y(n+1)-4y(n)=0$ при $y(0)=0$; $y(1)=2$; $y(2)=1$.

Ответ: $y(n)=-7+7\cdot 2^n-5n\cdot 2^{n-1}$.

3.4. $y(n+2)-y(n+1)-6y(n)=0$ при $y(0)=1$; $y(1)=2$.

Ответ: $y(n)=\dfrac{1}{5}\left(12\cdot 3^{n-1}+(-2)^n\right)$.

3.5. $y(n+2)-3y(n+1)-10y(n)=0$ при $y(0)=3$; $y(1)=-1$.

Ответ: $y(n)=\dfrac{1}{7}\left(5^{n+1}+(-2)^{n+1}\right)$.

3.6. $y(n+3)-3y(n+2)+3y(n+1)-y(n)=2^n$ при $y(0)=0$; $y(1)=0$; $y(2)=1$.

Ответ: $y(n)=2^n-(n+1)$.

3.7. $y(n+2)+y(n+1)-2y(n)=0$ при $y(0)=1$; $y(1)=-1$.

Ответ: $y(n)=\dfrac{1}{3}\left(1-(-2)^{n+1}\right)$.

4. Решите систему линейных разностных уравнений при начальных условиях $x(0)=3$; $y(0)=0$: $\begin{cases} x(n+1)-x(n)+y(n)=3^n, \\ y(n+1)+2x(n)=-3^n. \end{cases}$

Ответ: $x(n)=(-1)^n+2^n+3^n$, $y(n)=2(-1)^n-2^n-3^n$.

9. ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ[9]

9.1. Основные понятия вариационного исчисления

Определение 9.1. Пусть дан некоторый класс M функций $y(x)$. Если каждой функции $y(x) \in M$ по некоторому закону ставится в соответствие определенное число *J*, то говорят, что в классе M определен **функционал** *J*: $J = J[y(x)]$.

Определение 9.2. Совокупность функций, на которых определен функционал, называется **классом допустимых функций (областью задания функционала)**.

Таким образом, понятие функционала является обобщением понятия функции: аргумент функции – число, аргумент функционала – функция.

Наиболее часто рассматриваются следующие классы функций:

1) $M \subset C^0[a;b]$ – пространство функций непрерывных на отрезке $[a;b]$;

2) $M \subset C^1[a;b]$ – пространство непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[a;b]$ функций;

3) $M \subset C^2[a;b]$ – пространство дважды непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[a;b]$ функций.

Пример 9.1. Пусть $M = C^0[a;b]$ и функционал $J = J[y(x)] = \int\limits_0^1 y(x)dx$.

Подставляя вместо $y(x)$ конкретные функции, мы будем получать соответствующие значения $J[y(x)]$.

Если $y(x) = 1$, то $J[1] = \int\limits_0^1 dx = 1$; если $y(x) = e^x$, то $J[e^x] = \int\limits_0^1 e^x dx = e - 1$.

[9] При подготовке данного раздела использовались следующие источники: [3, 5, 10].

Определение 9.3. Приращение аргумента $y(x)$ в функционале $J[y(x)]$ называется **вариацией функции** $y(x)$ и обозначается δy: $\delta y = y(x) - y_1(x)$, где $y(x), y_1(x) \in M$.

Соответствующее приращение функционала определяется как

$$\Delta J = J[y(x)+\delta y] - J[y(x)] \text{ или } \Delta J = L[y(x);\delta y] + \beta[y(x);\delta y]\|\delta y\|,$$

где $L[y(x);\delta y]$ является линейным относительно δy функционалом.

Если $\beta[y(x);\delta y] \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$, то главная часть приращения функционала $L[y(x);\delta y]$ называется его **вариацией** и обозначается δJ.

9.2. Простейшая задача вариационного исчисления

Определение 9.4. Будем говорить, что функционал $J[y(x)]$ **достигает** на кривой $y_0(x)$ своего **максимума (минимума)**, если $J[y(x)] < J[y_0(x)]$ $\left(J[y(x)] > J[y_0(x)]\right)$, $y(x), y_0(x) \in M$. Кривая $y_0(x)$ называется **экстремалью** функционала $J[y(x)]$.

Рассмотрим функционал

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx, \tag{9.1}$$

сопоставляющий каждой кривой $y = y(x)$ $\left(x \in [a,b]\right)$ некоторое число $J[y(x)]$.

Отметим, что функция $F(x, y, y')$ предполагается гладкой, то есть ее частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам x, y, y' непрерывны в некоторой области $D: \begin{Bmatrix} a \le x \le b \\ -\infty < y < +\infty \\ -\infty < y' < +\infty \end{Bmatrix}$.

Необходимо найти функцию $y^*(x) \in C^2[a;b]$, удовлетворяющую краевым условиям

$$y(a) = y_A, \ \ y(b) = y_B, \tag{9.2}$$

на которой функционал (9.1) достигает экстремума (максимума или минимума).

Для решения этой задачи используем метод, предложенный Лагранжем.

Пусть $y^*(x)$ является экстремалью для функционала (9.1), а $\delta y(x)$ – зафиксированная произвольная вариация, то есть непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая нулевым краевым условиям $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$.

Получим множество функций $y(x)$, отличных от функции $y^*(x)$, прибавляя вариацию $\delta y(x)$ к функции $y^*(x)$

$$y(x) = y^*(x) + t \cdot \delta y(x), \qquad (9.3)$$

где t – параметр и $|t| < 1$.

После подстановки в функционал (9.1) выражения (9.3) для $y(x)$ получим функцию $\varphi(t)$:

$$J[y(x)] = J[y^*(x) + t \cdot \delta y(x)] = \varphi(t),$$

которая достигает экстремума при $t = 0$ (так как $y^*(x)$ является экстремалью функционала), а значит $\varphi'(0) = 0$.

Найдем $\varphi'(0)$:

$$\varphi'(t)\Big|_{t=0} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} F(x, \underbrace{y^* + t \cdot \delta y}_{y}, \underbrace{y^{*\prime} + t \cdot \delta y'}_{y'})dx \Bigg|_{t=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \Bigg|_{t=0} = 0. \qquad (9.4)$$

В полученном выражении (9.4) преобразуем второе слагаемое:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \, dx = \left| \begin{array}{l} \text{интегрируем по частям} \\ u = \dfrac{\partial F}{\partial y'}, \ du = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) dx \\ dv = \delta y'(x) dx, \ v = \delta y(x) \end{array} \right| = \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \delta y(x) \Bigg|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \delta y dx =$$

$$= -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \delta y dx.$$

Здесь учтено, что $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$.

Таким образом, формулу (9.4) можно переписать следующим образом:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \delta y(x) dx = 0. \qquad (9.5)$$

Заметим, что равенство (9.5) должно выполняться для любой функции $\delta y(x)$. И возникает вопрос: каким должен быть множитель $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$?

Ответ на этот вопрос дает основная лемма вариационного исчисления.

Лемма 9.1. (основная лемма вариационного исчисления). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_1]$ и для любой непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ такой, что $\varphi(x_0)=\varphi(x_1)=0$ верно $\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\cdot\varphi(x)dx=0$, тогда функция $f(x)\equiv 0$ для $\forall x\in[x_0,x_1]$.

Δ Докажем методом от противного.

Пусть $f(x)\neq 0$, не ограничивая общности, будем считать, что $f(x)>0$ (если $f(x)<0$, то рассмотрим функцию $-f(x)$). Так как $f(x)$ непрерывна, то существует окрестность $(a;b)$ точки x_0 такая, что $f(x)>0$.

Положим $\varphi(x)=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2,\ x\in(a;b),\\ 0,\ x\notin(a;b).\end{cases}$

Функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема и $\varphi(x_0)=\varphi(x_1)=0$, но

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\cdot\varphi(x)dx=\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)(x-a)^2(x-b)^2dx>0,$$

то есть получено противоречие, а значит $f(x)\equiv 0$. ▲

Возвращаясь к выражению (9.5), можно сделать вывод о том, что экстремальная кривая $y=y^*(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0, \tag{9.6}$$

которое называется **уравнением Эйлера**.

Таким образом, решение простейшей задачи вариационного исчисления свелось к решению уравнения Эйлера (9.6) при краевых условиях (9.2). Отметим, что иногда уравнение (9.6) называется уравнением Эйлера – Лагранжа.

Решения уравнения Эйлера называются **допустимыми экстремалями** для функционала $J[y(x)]$.

Замечание. Если краевая задача для уравнения Эйлера и разрешима, то это еще не означает существование экстремумов у функционала, так как экстремаль – это кривая, на которой может достигаться экстремум функционала. Как и при исследовании экстремумов функций, требуется дополнительный анализ решения, чтобы установить, реализуется ли в действительности экстремум и какого характера (максимум или минимум), а для этого надо использовать достаточные условия экстремума.

Пример 9.2. Найдите допустимую экстремаль функционала $J[y(x)]=\int\limits_0^1 (y'^2-12xy)dx$ при краевых условиях $y(0)=0, y(1)=1$.

Δ Так как $F(x,y,y')=y'^2-12xy$, то для записи уравнения Эйлера найдем

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-12x,\ \frac{\partial F}{\partial y'}=2y',\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=2y''.$$

Значит уравнение Эйлера (9.6) имеет вид $-12x-2y''=0$ или $y''=-6x$.

Дважды интегрируя его, находим общее решение $y(x)=-x^3+C_1x+C_2$.

Найдем частное решение с учетом краевых условий:

$$\begin{cases} y(0)=C_2=0, \\ y(1)=-1+C_1+C_2=1 \end{cases} \Rightarrow \quad C_2=0, C_1=2.$$

Следовательно, $y(x)=-x^3+2x$ – искомая экстремаль.▲

Частные случаи уравнения Эйлера:

I случай. Функция $F(x,y,y')$ не зависит от y', то есть имеет вид $F(x,y)$. Тогда уравнение Эйлера выглядит как $\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$, которое не является дифференциальным. Оно определяет одну или конечное число функций, которые могут и не удовлетворять граничным условиям. Лишь в исключительных случаях, когда полученная функция проходит через граничные точки $(a;y_A)$ и $(b;y_B)$, существует функция, на которой может достигаться экстремум. Для произвольных краевых условий (9.2) непрерывного решения нет.

Пример 9.3. Найдите допустимую экстремаль функционала $J[y(x)]=\int\limits_1^2 (2x-y^2)dx$ при краевых условиях $y(1)=1, y(2)=3$.

Δ Так как $F(x,y,y')=2x-y^2$, то $\frac{\partial F}{\partial y}=-2y$, $\frac{\partial F}{\partial y'}=0$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$.

Значит уравнение Эйлера (9.6) имеет вид $-2y=0$ или $y=0$.

Полученное уравнение задает единственную экстремаль рассматриваемого функционала, которая не удовлетворяет данным краевым условиям. Следовательно, у исходной задачи нет решения. ▲

II случай. Функция $F(x,y,y')$ не зависит ни от x, ни от y, то есть имеет вид $F(y')$, тогда уравнение Эйлера имеет вид $y''=0$.

Дважды интегрируя его, находим общее решение $y(x)=C_1x+C_2$, а затем и единственное решение при краевых условиях (9.2).

III случай. Функция $F(x,y,y')$ не зависит от y, то есть имеет вид $F(x,y')$, тогда уравнение Эйлера имеет вид $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$, которое является дифференциальным уравнением первого порядка.

Отметим, что промежуточным интегралом данного уравнения является

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=C. \tag{9.7}$$

Пример 9.4. Найдите допустимую экстремаль функционала $J[y(x)]=\int\limits_1^2 y'(1+x^2y')dx$ при краевых условиях $y(1)=3, y(2)=5$.

Δ Так как $F(x,y,y')=y'(1+x^2y')$, то для записи промежуточного интеграла (9.7) найдем $\frac{\partial F}{\partial y'}=1+2x^2y' \quad\Rightarrow\quad 1+2x^2y'=C$.

Тогда $y' = \dfrac{C-1}{2x^2}$, а значит $y(x) = \dfrac{C_1}{x} + C_2$.

Далее найдем C_1 и C_2, потребовав, чтобы выполнялись краевые условия:

$$\begin{cases} y(1) = C_1 + C_2 = 3, \\ y(2) = \dfrac{C_1}{2} + C_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = -4, C_2 = 7.$$

Следовательно, $y(x) = 7 - \dfrac{4}{x}$ – искомая экстремаль.▲

IV случай. Функция $F(x, y, y')$ не зависит от x, то есть имеет вид $F(y, y')$. Распишем подробнее уравнение Эйлера (9.6):

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0. \qquad (9.8)$$

Покажем, что уравнение (9.8) имеет первый интеграл вида

$$F(y, y') - y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} = C_1. \qquad (9.9)$$

Действительно, продифференцировав (9.9) по x, получим

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y'' \frac{\partial F}{\partial y'} - y' \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' \right) = 0$$

или

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' \right) y' = 0.$$

Сократив последнее уравнение на y', получим уравнение (9.8).

Пример 9.5. Найдите допустимую экстремаль функционала $J[y(x)] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1 + y^2}{y'} dx$ при краевых условиях $y(0) = 0, y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Δ Так как $F(x,y,y')=\dfrac{1+y^2}{y'}$, то первый интеграл согласно формуле (9.9) имеет вид $\dfrac{1+y^2}{y'}+y'\cdot\dfrac{1+y^2}{(y')^2}=C_1 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{C_1}{2}\cdot y'=1+y^2 \quad\Leftrightarrow\quad C_2\cdot y'=1+y^2$.

Решив стандартным образом данное уравнение получим

$$C_2\cdot\frac{dy}{1+y^2}=dx \quad\Rightarrow\quad C_2\cdot\operatorname{arctg}y=x+C \quad\Rightarrow\quad y(x)=\operatorname{tg}\frac{x+C}{C_2}.$$

Далее найдем C и C_2 из равенства $x+C=C_2\cdot\operatorname{arctg}y$:

$$\begin{cases} y(0)=0: \quad C=0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1: \quad \dfrac{\pi}{4}=C_2\cdot\dfrac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad C_2=1. \end{cases}$$

Следовательно, $y(x)=\operatorname{tg}x$ – искомая экстремаль.▲

Замечание. Иногда на практике для решения уравнений данного типа удобнее использовать непосредственно уравнение Эйлера.

Задачи и упражнения

1. Найдите допустимую экстремаль функционала $J[y(x)]$ при заданных краевых условиях:

1.1. $J[y(x)]=\int\limits_0^1 (y'^2+y^2+2xy\cdot e^x)dx$ при $y(0)=y(1)=0.$

Ответ: $y(x)=\dfrac{x(x-1)}{4}e^x.$

1.2. $J[y(x)]=\int\limits_1^e (xy'^2-2y')dx$ при $y(1)=1,\ y(e)=2.$

Ответ: $y(x)=\ln x+1.$

1.3. $J[y(x)]=\int\limits_0^1 (2e^y-y^2)dx$ при $y(0)=1,\ y(1)=e.$

Ответ: нет решений.

1.4. $J[y(x)]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(y'^2-9y^2+4xy\sin x)dx$ при $y(0)=-\frac{1}{16},\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{48}.$

Ответ: $y(x)=\frac{\sqrt{3}}{32}\sin 3x-\frac{1}{16}\cos x+\frac{1}{4}x\sin x.$

1.5. $J[y(x)]=\int\limits_0^{\pi}(4y\cos x+y'^2-y^2)dx$ при $y(0)=y(\pi)=0.$

Ответ: $y(x)=(C+x)\sin x.$

1.6. $J[y(x)]=\int\limits_0^{1}(x+y'^2)dx$ при $y(0)=1,\ y(1)=2.$

Ответ: $y(x)=x+1.$

1.7. $J[y(x)]=\int\limits_1^{3}(12xy'+y'^2)dx$ при $y(1)=0,\ y(3)=26.$

Ответ: $y(x)=-3x^2+25x-22.$

1.8. $J[y(x)]=\int\limits_1^{3}xy'(6+x^2y')dx$ при $y(1)=5,\ y(3)=3.$

Ответ: $y(x)=\frac{3}{x}+2.$

1.9. $J[y(x)]=\int\limits_0^{1}yy'^2\,dx$ при $y(0)=1,\ y(1)=\sqrt[3]{4}.$

Ответ: $y(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}.$

1.10. $J[y(x)]=\int\limits_1^{2}\frac{x^3}{y'^2}dx$ при $y(1)=1,\ y(2)=4.$

Ответ: $y(x)=x^2.$

1.11. $J[y(x)]=\int\limits_0^{2}(y'^2-4y'e^{2x}+\sin^2 x)dx$ при $y(0)=1,\ y(2)=-2.$

Ответ: $y(x)=e^{2x}-\frac{x(2+e^4)}{2}.$

1.12. $J[y(x)]=\int\limits_0^2\left(e^{y'}+3\right)dx$ при $y(0)=0,\ y(2)=1.$

Ответ: $y(x)=\dfrac{x}{2}$.

10. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ[10]

10.1. Основные понятия

Определение 10.1. Любая комплексная функция $f(t)$ действительного переменного t называется **оригиналом**, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t)$ – кусочно-непрерывная при $t\ge 0$, это значит, что она либо непрерывна, либо на каждом конечном интервале имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода;

2) $f(t)\equiv 0$ при $t<0$;

3) при $t\to\infty$ функция $f(t)$ растет не быстрее некоторой показательной функции (имеет ограниченную степень роста), то есть существует такое положительное число $M>0$ и такое неотрицательное число $s_0\ge 0$, что для всех $t\ge 0$ выполняется неравенство $|f(t)|\le M\cdot e^{s_0 t}$ (число s_0 называется показателем роста функции $f(t)$).

Рассмотрим произведение функции $f(t)$ на комплексную функцию e^{-pt} действительной переменной t, где $p=a+ib$, при этом $a>s_0>0$, $f(t)\cdot e^{-pt}$, а также несобственный интеграл первого рода $\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$:

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int\limits_0^{\infty} e^{-at}f(t)\cos bt\,dt-i\int\limits_0^{\infty} e^{-at}f(t)\sin bt\,dt\,.$$

[10] При подготовке данного раздела использовались следующие источники: [8].

Покажем, что при $a > s_0$ данные интегралы сходятся, причем абсолютно:

$$\left|\int_0^{\infty} e^{-at} f(t)\cos bt dt\right| \le \int_0^{\infty} \left|e^{-at} f(t)\underbrace{\cos bt}_{\le 1}\right| dt \le \left\{f(t) \le Me^{s_0 t}\right\} \le \int_0^{\infty} e^{-at} Me^{s_0 t} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} Me^{-(a-s_0)t} dt = M \cdot \frac{1}{-(a-s_0)} e^{-(a-s_0)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{M}{a-s_0}.$$

Аналогичная оценка дается и второму интегралу.

Таким образом, интеграл $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ является сходящимся, то есть он определяет некоторую функцию от p: $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$.

Определение 10.2. Функция $F(p)$ называется **изображением** (Лапласовым изображением) оригинала $f(t)$: $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Пример 10.1. Найдите изображение функции Хевисайда $f(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Δ Вычислим изображение $F(p)$ по определению:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} e^{-pt}dt = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right)\Bigg|_0^{b} = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad 1 \risingdotseq \frac{1}{p}. \blacktriangle$$

Изображения основных функций приведены в таблице приложения 3.

Рассмотрим **свойства изображений и оригиналов.**

Свойство 10.1. Линейность. Изображение линейной комбинации нескольких оригиналов равно такой же линейной комбинации их изображений, а именно: если $f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)$, то $F(p) = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(t)$, где $f_i(t) \risingdotseq F_i(p)$, $c_i \in \mathbb{R}$.

Свойство 10.2. Подобие. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ при $\alpha > 0$.

Δ По определению

$$f(\alpha t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} f(\alpha t)e^{-pt}dt = \left\{ \begin{array}{l} \alpha t = y \;\Rightarrow\; t = \dfrac{y}{\alpha} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{\alpha}dy \\ t = 0 \Rightarrow y = 0 \qquad t = +\infty \Rightarrow y = +\infty \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} f(y)\cdot \exp\left(-\frac{py}{\alpha}\right)dy = \left\{ \begin{array}{l} \text{определенный интеграл не зависит} \\ \text{от способа обозначения переменной} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} f(t)\cdot \exp\left(-\frac{pt}{\alpha}\right)dt = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \ \blacktriangle$$

Свойство 10.3. Смещение. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p-\alpha)$.

Δ По определению

$$e^{\alpha t} f(\alpha t) \ \risingdotseq \int_0^{+\infty} f(t)e^{\alpha t}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-\alpha)t}dt = F(p-\alpha). \ \blacktriangle$$

Свойство 10.4. Запаздывание. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $f(t-\alpha) \risingdotseq$ $\risingdotseq \ e^{-p\alpha}F(p)$ при $\alpha > 0$.

Δ По определению

$$f(t-\alpha) \risingdotseq \int_0^{+\infty} f(t-\alpha)e^{-pt}dt = \left\{ \begin{array}{l} t-\alpha = y \;\Rightarrow\; dt = dy \\ t = 0 \Rightarrow y = -\alpha \\ t = +\infty \Rightarrow y = +\infty \end{array} \right\} = \int_{-\alpha}^{+\infty} f(y)e^{-p(y+\alpha)}dy =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f(y) \equiv 0 \\ \text{при } \ y < 0 \end{array} \right\} == \int_0^{+\infty} f(y)e^{-py}e^{-p\alpha}dy = e^{-p\alpha}\int_0^{+\infty} f(y)e^{-py}dy = e^{-p\alpha}\cdot F(p). \ \blacktriangle$$

Свойство 10.5. Дифференцирование изображения. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^n \cdot f(t)$.

Δ Докажем, что $F'(p) \risingdotseq -t\cdot f(t)$:

$$F'(p) = \left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right)_p' = \int_0^{+\infty} \left(f(t)e^{-pt}\right)_p' dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\cdot(-t)dt = \int_0^{+\infty} \left(-t\cdot f(t)\right)e^{-pt}dt \risingdotseq -t\cdot f(t)\,. \blacktriangle$$

Свойство 10.6. Дифференцирование оригинала. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, функции $f'(t),\ f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ также являются оригиналами, то справедливы следующие формулы:

$$f'(t) \doteqdot p\cdot F(p) - f(0),$$

$$f''(t) \doteqdot p^2\cdot F(p) - p\cdot f(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \doteqdot p^3\cdot F(p) - p^2\cdot f(0) - p\cdot f'(0) - f''(0),$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n\cdot F(p) - p^{n-1}\cdot f(0) - p^{n-2}\cdot f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Δ Докажем по определению, что $f'(t) \doteqdot p\cdot F(p) - f(0)$:

$$f'(t) \doteqdot \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \left\{\begin{matrix} u = e^{-pt} \Rightarrow du = -pe^{-pt}dt \\ dv = f'(t)dt \Rightarrow v(t) = f(t)\end{matrix}\right\} = \lim_{b\to+\infty}\left(f(t)e^{-pt}\Big|_0^b + p\int_0^b f(t)e^{-pt}dt\right) =$$

$$= -f(0) + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = -f(0) + pF(p) = pF(p) - f(0).$$

Здесь учтено, что $\lim\limits_{b\to+\infty} f(b)e^{-pb} = 0$, как произведение ограниченной функции $f(b)$ на бесконечно малую функцию e^{-pb} при $b\to+\infty$.

Далее $f^{//}(t) = \left(f^{/}(t)\right)^{/} \doteqdot p\left(pF(p) - f(0)\right) - f^{/}(0) = p^2F(p) - pf(0) - f^{/}(0)$.

Аналогичным образом можно получить формулы для изображений оригиналов $f^{///}(t),\ldots,f^{(n)}(t)$. ▲

Свойство 10.7. Умножение изображений. Для формулировки данного свойства необходимо дополнительное определение.

Определение 10.3. Сверткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется интеграл вида $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$.

Если $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$ и $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, то $F_1(p)\cdot F_2(p) \doteqdot f_1(t) * f_2(t)$.

Свойство 10.8. Интегрирование изображения. Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и несобственный интеграл $\int_p^{+\infty} F(\xi)d\xi$ является сходящимся, то $\int_p^{+\infty} F(\xi)d\xi \doteqdot \dfrac{f(t)}{t}$.

Δ По определению

$$\int_p^{+\infty} F(\xi)d\xi = \int_p^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\xi t}dt\right)d\xi = \int_0^{+\infty} f(t)\left(\int_p^{+\infty} e^{-\xi t}d\xi\right)dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\left(\lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{t}e^{-\xi t}\Big|_p^b\right)dt = \int_0^{+\infty} f(t)\cdot\frac{1}{t}\cdot e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\cdot e^{-pt}dt \risingdotseq \frac{f(t)}{t}. \blacktriangle$$

Свойство 10.9. Интегрирование оригинала. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

Пример 10.2. Найдите изображение $F(p)$ оригинала $f(t) = e^{-2t}\cdot\cos^2 t$.

Δ Преобразуем оригинал $f(t)$, используя формулу понижения степени для $\cos^2 t$: $f(t) = e^{-2t}\cdot\cos^2 t = \frac{1}{2}e^{-2t}(1+\cos 2t) = \frac{1}{2}\left(e^{-2t} + e^{-2t}\cos 2t\right)$.

Тогда по формулам 3) и 10) из таблицы изображений (см. прил. 3) получим $F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+2} + \frac{p+2}{(p+2)^2+4}\right)$. $\blacktriangle$

10.2. Нахождение оригинала по изображению

Рассмотрим вопрос о восстановлении оригинала $f(t)$ по его изображению $F(p)$.

Отметим, что в некоторых простейших случаях восстановить функцию-оригинал по ее изображению можно используя таблицу основных изображений, а также соответствующие свойства.

Пример 10.3. Найдите оригинал $f(t)$, если его изображение $F(p) = \frac{7}{p^2+10p+41}$.

Δ Преобразуем изображение, выделив полный квадрат в знаменателе:

$$F(p) = \frac{7}{p^2+10p+41} = \frac{7}{(p+5)^2+16} = \frac{7}{4}\cdot\frac{4}{(p+5)^2+4^2}.$$

Тогда по формуле 11) (см. прил. 3) таблицы изображений получим $f(t)=\frac{7}{4}e^{-5t}\sin 4t$. ▲

Пример 10.4. Найдите оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)=\frac{1}{p(p+1)^2}$.

Δ Представим дробь $F(p)=\frac{1}{p(p+1)^2}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{p(p+1)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{(p+1)^2}=\frac{A(p+1)^2+Bp(p+1)+Cp}{p(p+1)^2}.$$

Используя метод частных значений получим: $p=-1$: $C=-1$; $p=0$: $A=1$; $p=1$: $B=-1$.

Таким образом, $F(p)=\frac{1}{p(p+1)^2}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(p+1)^2}$, тогда по формулам 1), 3) и 5) (см. прил. 3) таблицы изображений можно записать

$$f(t)=1-e^{-t}-t\cdot e^{-t}=1-e^{-t}(1+t).\ ▲$$

Утверждение 10.1. Если $p_1, p_2, \ldots, p_k$ особые точки функции $F(p)$, лежащие внутри некоторого круга $|p|=R_1$, тогда оригинал $f(t)$ может быть найден по формуле

$$f(t)=\sum_{i=1}^{k}\operatorname*{Res}_{p=p_i}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right), \tag{10.1}$$

где $\operatorname*{Res}_{p=p_i}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)$ – вычет функции $F(p)\cdot e^{pt}$ в точке $p=p_i$, который может быть вычислен стандартным образом (формулы (П.1.2)–(П.1.4)).

Вернемся к условию примера 10.4 и решим его с помощью формулы (10.1), а также формул (П.1.2) и (П.1.4).

Δ По формуле (10.1)

$$f(t)=\operatorname*{Res}_{p=0}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)+\operatorname*{Res}_{p=-1}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right).$$

Точка $p_1 = 0$ является простым корнем знаменателя, а значит простым полюсом функции $F(p)$, точка $p_2 = -1$ является кратным корнем знаменателя $(k = 2)$, а значит кратным полюсом функции $F(p)$, поэтому по формулам (П.1.2) и (П.1.4) вычислим

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right) = \lim_{p\to 0}\left(p\cdot\frac{1}{p(p+1)^2}\cdot e^{pt}\right) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{(p+1)^2}\cdot e^{pt}\right) = 1,$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-1}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right) = \frac{1}{1!}\lim_{p\to -1}\left[F(p)e^{pt}(p+1)^2\right]^{/} = \lim_{p\to -1}\left[\frac{e^{pt}}{p}\right]^{/} =$$

$$= \lim_{p\to -1}\left[\frac{t\cdot e^{pt}\cdot p - e^{pt}}{p^2}\right] = -t\cdot e^{-t} - e^{-t} = -e^{-t}(t+1).$$

С учетом полученных выражений получим $f(t) = 1 - e^{-t}(t+1)$.▲

10.3. Приложения операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(t) \qquad (10.2)$$

и начальными условиями

$$y(0) = y_0,\ y^{/}(0) = y_0^{/},\ y^{//}(0) = y_0^{//}, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)},$$

где $y(t)$ – искомая функция.

Рассматривая функции $y(t)$ и $f(t)$ как оригиналы, перейдем к соответствующим изображениям $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$.

С учетом свойства дифференцирования оригинала получим:

$$y^{/} \risingdotseq p\cdot Y(p) - y(0) = p\cdot Y(p) - y_0,$$

$$y^{//} \risingdotseq p^2\cdot Y(p) - p\cdot y(0) - y^{/}(0) = p^2\cdot Y(p) - p\cdot y_0 - y_0^{/},$$

$$y^{///} \risingdotseq p^3\cdot Y(p) - p^2\cdot y(0) - p\cdot y^{/}(0) - y^{//}(0) = p^3\cdot Y(p) - p^2\cdot y_0 - p\cdot y_0^{/} - y_0^{//},$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} \risingdotseq p^n \cdot Y(p) - p^{n-1} \cdot y(0) - p^{n-2} \cdot y^{/}(0) - ... - y^{(n-1)}(0) = p^n \cdot Y(p) - p^{n-1} \cdot y_0 - p^{n-2} \cdot y_0^{/} - y_0^{(n-1)}.$$

Подставив данные выражения в исходное дифференциальное уравнение (10.2), а также сгруппировав подобные слагаемые, получим

$$Y(p)\left(p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + ... + a_{n-1} p + a_n\right) -$$
$$- y_0\left(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + a_2 p^{n-3} + ... + a_{n-2} p + a_{n-1}\right) -$$
$$- y_0^{/}\left(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + a_2 p^{n-4} + ... + a_{n-3} p + a_{n-2}\right) - ... - y_0^{(n-1)} = F(p).$$

Таким образом, получено операторное уравнение, которое необходимо решить относительно изображения $Y(p)$. Далее по найденному изображению известными методами необходимо восстановить оригинал $y(t)$, который и будет решением исходного дифференциального уравнения.

Пример 10.5. Решите операторным методом дифференциальное уравнение $y^{//} + 2y^{/} + y = e^{-t}(\cos t + t)$, если $y(0) = y^{/}(0) = 2$.

Δ Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$ тогда

$$y^{/} \risingdotseq p \cdot Y(p) - y(0) = p \cdot Y(p) - 2,$$

$$y^{//} \risingdotseq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y^{/}(0) = p^2 \cdot Y(p) - 2p - 2.$$

С учетом того, что

$$f(t) = e^{-t}(\cos t + t) = e^{-t}\cos t + t \cdot e^{-t} \risingdotseq \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{(p+1)^2}$$

уравнение примет вид

$$p^2 Y(p) - 2p - 2 + 2p \cdot Y(p) - 4 + Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Сгруппировав слагаемые получим

$$Y(p)\left(p^2 + 2p + 1\right) = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{(p+1)^2} + 2(p+1) + 4,$$

откуда $Y(p) = \dfrac{1}{(p+1)\left((p+1)^2 + 1\right)} + \dfrac{1}{(p+1)^4} + \dfrac{2}{(p+1)} + \dfrac{4}{(p+1)^2}$.

Для каждой из полученных дробей найдем оригинал по отдельности:

1) $\dfrac{1}{(p+1)^4} \doteqdot e^{-t}\cdot\dfrac{t^3}{3!}$;

2) $\dfrac{2}{(p+1)} = 2\cdot\dfrac{1}{(p+1)} \doteqdot 2e^{-t}$;

3) $\dfrac{4}{(p+1)^2} = 4\cdot\dfrac{1}{(p+1)^2} \doteqdot 4te^{-t}$;

4) $\dfrac{1}{(p+1)\left((p+1)^2+1\right)} = \dfrac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)}$.

Представим данную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{Bp+C}{p^2+2p+2} = \frac{A(p^2+2p+2)+(Bp+C)(p+1)}{(p+1)(p^2+2p+2)}.$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной p в числителях данных дробей получим систему

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 2A+B+C=0, \\ 2A+C=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=-1. \end{cases}$$

То есть $\dfrac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \dfrac{1}{p+1} - \dfrac{p+1}{p^2+2p+2} = \dfrac{1}{p+1} - \dfrac{p+1}{(p+1)^2+1}$, а значит, переходя к оригиналам получим $\dfrac{1}{p+1} - \dfrac{p+1}{(p+1)^2+1} \doteqdot e^{-t} - e^{-t}\cos t$.

Объединяя результаты 1)–4) запишем оригинал $y(t)$:

$$y(t) = e^{-t} - e^{-t}\cos t + e^{-t}\cdot\frac{t^3}{3!} + 2e^{-t} + 4te^{-t} = \frac{e^{-t}}{6}(t^3 + 24t + 18 - 6\cos t).\blacktriangle$$

Задачи и упражнения

1. Найдите изображение $F(p)$ оригинала $f(t)$:

1.1. $f(t) = \operatorname{ch} t \cdot \cos t.$ Ответ: $F(p) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p-1}{(p-1)^2+1} + \dfrac{p+1}{(p+1)^2+1}\right)$.

1.2. $f(t) = t^2 \cdot \cos t.$ Ответ: $F(p) = \dfrac{2p(p^2-6)}{(p^2+1)^3}$.

1.3. $f(t)=t^2e^{3t}\cdot \mathrm{ch}2t.$ Ответ: $F(p)=\dfrac{1}{(p-5)^3}+\dfrac{1}{(p-1)^3}.$

1.4. $f(t)=t\cdot\sin 2t\cdot \mathrm{sh}2t.$ Ответ: $F(p)=\dfrac{2p-4}{(p^2-4p+8)^2}-\dfrac{2p+4}{(p^2+4p+8)^2}.$

1.5. $f(t)=t\cdot e^t\cdot\cos 2t.$ Ответ: $F(p)=\dfrac{p^2-2p-3}{(p^2-2p+5)^2}.$

2. Найдите оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)$:

2.1. $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2+2p+10}.$ Ответ: $f(t)=e^{-t}\cos 3t+\dfrac{2}{3}e^{-t}\sin 3t.$

2.2. $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2-5p+6}.$ Ответ: $f(t)=-3\cdot e^{2t}+4\cdot e^{3t}.$

2.3. $F(p)=\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}.$ Ответ: $f(t)=\dfrac{13}{17}e^{2t}-\dfrac{e^{-2t}}{17}(13\cos t-16\sin t).$

2.4. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{(p+1)^3}.$ Ответ: $f(t)=e^{-t}(1-t^2).$

2.5. $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}.$ Ответ: $f(t)=\dfrac{3t^2+2t-2}{54}e^t+\dfrac{2t+1}{27}e^{-2t}.$

3. Решите дифференциальное уравнение соответствующего порядка при данных начальных условиях:

3.1. $x''-3x'+2x=12e^{3t}$ при $x(0)=2;\ x'(0)=6.$

Ответ: $x(t)=4e^t-8e^{2t}+6e^{3t}.$

3.2. $x''-x'=te^t$, если $x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $x(t)=-1+\dfrac{e^t}{2}(t^2-2t+2).$

3.3. $x'''+x''=\sin t$ при $x(0)=x'(0)=1,\ x''(0)=0.$

Ответ: $x(t)=2t+\dfrac{1}{2}(e^{-t}+\cos t-\sin t).$

3.4. $x''-9x=e^{-2t}$ при $x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $x(t)=\frac{1}{30}(e^{3t}+5e^{-3t}-6e^{-2t}).$

3.5. $x''-2x'+2x=2e^{t}\cos t$ при $x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $x(t)=t\cdot e^{t}\sin t.$

3.6. $x'''+4x'=1$ при $x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$

Ответ: $x(t)=\frac{t}{4}-\frac{1}{8}\sin 2t.$

3.7. $x''-2x'-3x=e^{3t}$ при $x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $x(t)=\frac{1}{16}e^{-t}+\left(\frac{t}{4}-\frac{1}{16}\right)e^{3t}.$

3.8. $x''+x'-2x=e^{t}$ при $x(0)=-1;\ x'(0)=0.$

Ответ: $x(t)=\frac{1}{3}te^{t}-\frac{7}{9}e^{t}-\frac{2}{9}e^{-2t}.$

4. Решите операторным методом систему дифференциальных уравнений:

4.1. $\begin{cases} x'=x+2y, \\ y'=2x+y+1 \end{cases}$ при начальных условиях $x(0)=0$, $y(0)=5.$

Ответ: $\begin{cases} x(t)=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}e^{3t}-2e^{-t}, \\ y(t)=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}e^{3t}+2e^{-t}. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} x'=-2x-2y+10e^{2t}, \\ y'=2x-y+7e^{2t} \end{cases}$ при начальных условиях $x(0)=1$, $y(0)=3.$

Ответ: $\begin{cases} x(t)=e^{2t}, \\ y(t)=3e^{2t}. \end{cases}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Краткие сведения из теории функций комплексной переменной

Определение 1. Комплексным числом называется число вида $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, i – мнимая единица: $i^2 = -1$.

Число x называется **действительной частью** комплексного числа z: $x = \operatorname{Re} z$. Число y называется **мнимой частью** комплексного числа z: $y = \operatorname{Im} z$.

Форма записи $z = x + iy$ называется **алгебраической формой** комплексного числа.

Функция комплексной переменной (ФКП) $f(z)$ может быть записана в виде $f(z) = \{z = x + iy\} = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – некоторые функции переменных x и y. Функция $u(x, y)$ называется действительной частью функции $f(z)$: $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$; функция $v(x, y)$ называется мнимой частью функции $f(z)$: $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Определение 2. Функция $f(z)$ называется **аналитической** в некоторой точке z_0, если она дифференцируема в ней, а также некоторой ее окрестности.

Теорема 1 (критерий дифференцируемости ФКП). Функция комплексной переменной $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является аналитической, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дважды непрерывно-дифференцируемы и удовлетворяют условиям $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$ которые называются **условиями Коши – Римана**.

Определение 3. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие условиям Коши – Римана, называются **сопряженными**.

Теорема 2. Пусть $0 \le r < R \le +\infty$. Любая аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ ФКП $f(z)$ однозначно может быть разложена в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \qquad (\text{П.1.1})$$

где коэффициенты $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_l \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$, где l – некоторая окружность с центром в точке z_0, лежащая в кольце аналитичности функции.

Определение 4. Ряд (П.1.1) называется **рядом Лорана** ФКП $f(z)$.

Определение 5. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ называется **правильной частью** ряда Лорана, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ – его **главной частью**.

Замечание. Правильная часть ряда Лорана сходится в круге $|z - z_0| < R$, а главная часть – в круге $|z - z_0| > r$.

Определение 6. Точки, в которых нарушается аналитичность функции $f(z)$, называются ее **особыми точками** (ОТ).

Определение 7. Особые точки, для каждой из которых существует такая ее окрестность, в которой нет других особых точек функции $f(z)$, называются **изолированными особыми точками** (ИОТ).

Определение 8. ИОТ z_0 функции $f(z)$ называется **полюсом**, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Утверждение 1. ИОТ z_0 является полюсом ФКП $f(z)$ порядка k $\Leftrightarrow$ $\exists$ аналитичная в точке z_0 функция $\varphi(z)$ (причем $\varphi(z_0) \neq 0$), что $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}$. Если $k = 1$, то полюс называется простым.

Определение 9. Вычетом аналитической ФКП $f(z)$ в ИОТ z_0 называется величина $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f = \operatorname{Res} f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz$, где L – окружность с центром в точке z_0, лежащая в области аналитичности функции $f(z)$, обходимая в положительном направлении (отметим, что величина вычета не зависит от радиуса окружности).

Рассмотрим **способы вычисления вычетов** в полюсах разных порядков.

1. Если точка z_0 является простым полюсом, то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot (z - z_0) \,. \qquad (\text{П.1.2})$$

Отметим, что при вычислении предела возникает неопределенность $\infty \cdot 0$.

Если ФКП $f(z)$ представима в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и точка z_0 является ее простым полюсом, то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi^{/}(z_0)}, \qquad (\text{П.1.3})$$

где $\psi^{/}(z_0) \neq 0$.

2. Если точка z_0 является полюсом кратности k, то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(f(z) \cdot (z - z_0)^k \right). \qquad (\text{П.1.4})$$

Отметим, что при вычислении предела возникает неопределенность $\infty \cdot 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица *Z*-преобразований

№ п/п	$f(n)$	$F(z)$
1	1	$\frac{z}{z-1}$
2	$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$
3	$e^{\alpha n}$	$\frac{z}{z-e^{\alpha}}$
4	a^n	$\frac{z}{z-a}$
5	$a^n \cdot e^{\alpha n}$	$\frac{z}{z-a\cdot e^{\alpha}}$
6	$\frac{a^n}{n!}$	$e^{\frac{a}{z}}$
7	$n\cdot a^{n-1}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
8	$(n+1)\cdot a^n$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
9	$a^n \cdot \sin\beta n$	$\frac{az\sin\beta}{z^2-2az\cos\beta+a^2}$
10	$a^n \cdot \cos\beta n$	$\frac{z(z-a\cos\beta)}{z^2-2az\cos\beta+a^2}$
11	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
12	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица оригиналов и изображений

№ п/п	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5	$t^n \cdot e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
6	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
7	$\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
8	$\mathrm{sh}\,\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
9	$\mathrm{ch}\,\alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
10	$e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
11	$e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
12	$t \cdot \sin \alpha t$	$\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$
13	$t \cdot \cos \alpha t$	$\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$

Список использованных источников

1. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2003. – 329 с.

2. Апатенок, Р.Ф. Элементы линейной алгебры / Р.Ф. Апатенок. – Минск : Выш. шк., 1977. – 257 с.

3. Борзенков, А. В. Специальные и математические методы и функции / А. В. Борзенков, Р. М. Жевняк. – Минск : Харвест, 2013. – 576 с.

4. Вся высшая математика : учебник. В 6 т. Т. 6 / сост. М. Л. Краснов [и др.]. – М. : УРСС, 2003. – 256 с.

5. Галеев, Э. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи : учеб. пособие / Э. М. Галеев. – М. : URSS, 2018. – 344 с.

6. Князев, П. Н. Функциональный анализ : учеб. пособие / П. Н. Князев. – Минск : Выш. шк., 1985. – 206 с.

7. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акимов. – 3-е изд., перераб. – М. : Наука, 1984. – 752 с.

8. Жевняк, Р. М. Высшая математика : учеб. пособие. В 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк. : Ч. 1, 1984. – 223 с.; Ч. 2, 1985. – 224 с., Ч. 3, 1985. – 208 с.; Ч. 4, 1987. – 240 с., Ч. 5, 1988. – 253 с.

9. Математика. Сборник тематических заданий с образцами решений. В 3 ч. Ч. 1. / Ж. А. Черняк [и др.]. – Минск : БГУИР, 2018. – 220 с.

10. Специальные математические методы и функции : метод. пособие / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2011. – 76 с.

Содержание

Св. план 2023, поз. 35

Учебное издание

Примичева Зоя Николаевна
Романчук Татьяна Анатольевна
Жук Светлана Николаевна

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

ПОСОБИЕ

Редактор *Е.С. Юрец*
Корректор *Е.Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет

Подписано в печать   Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л.   Уч.-изд. л. . Тираж 100 экз. Заказ 38.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск