

Типовой расчет «Обобщенные ряды Фурье»

Задание 9

Функция $f(x)$ задана графически.

1. Постройте разложение функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье, полагая, что функция определена:

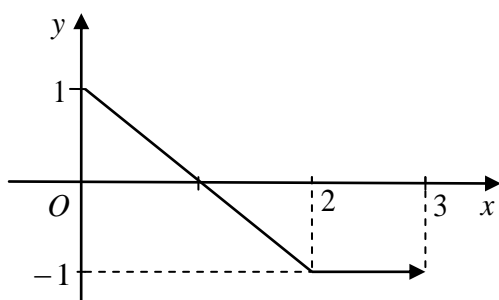
а) на полном периоде; б) на полупериоде и является четной; в) на полупериоде и является нечетной.

В каждом из случаев а)–в) постройте графики функции и суммы ряда Фурье.

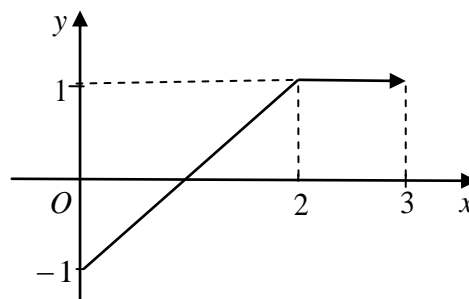
2. используя полученное в 1. а) разложение функции в действительный ряд Фурье, найдите комплексную форму ряда Фурье. Убедитесь в правильности нахождения полученного разложения, записав тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме непосредственным образом.

Варианты

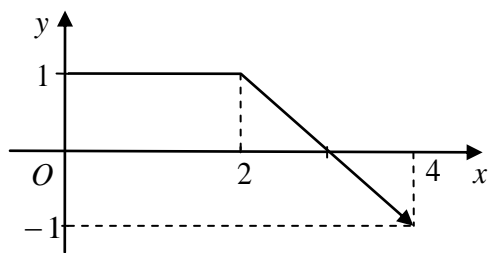
1) $n = 4$



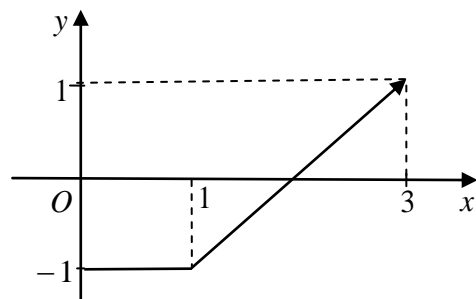
2) $n = 3$



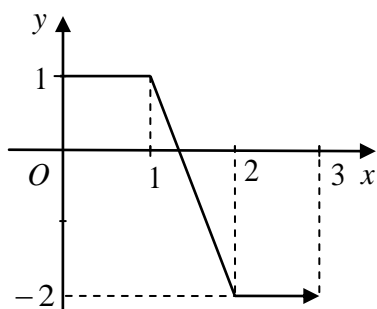
3) $n=5$



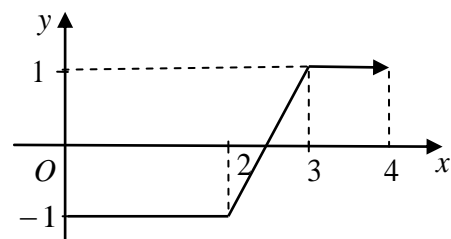
4) $n=6$



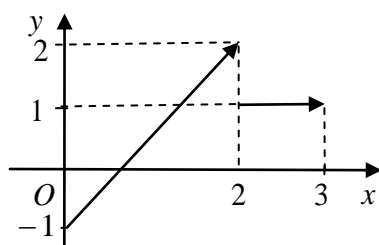
5) $n=7$



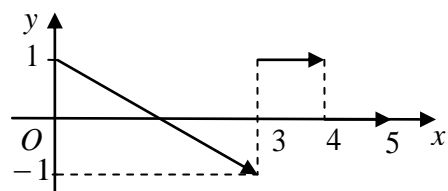
6) $n=8$



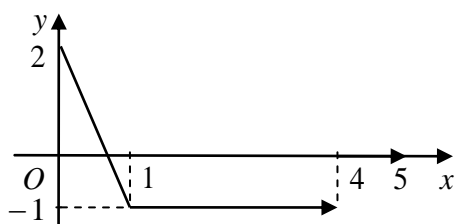
7) $n=9$



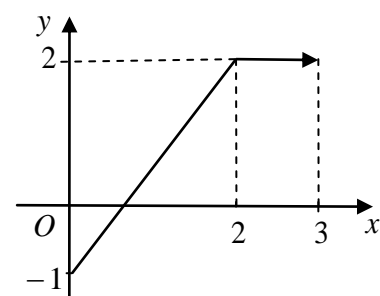
8) $n=3$



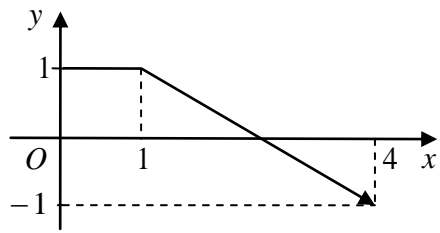
9) $n=4$



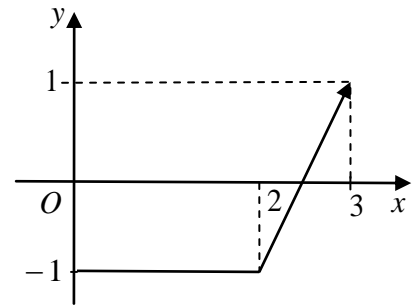
10) $n=5$



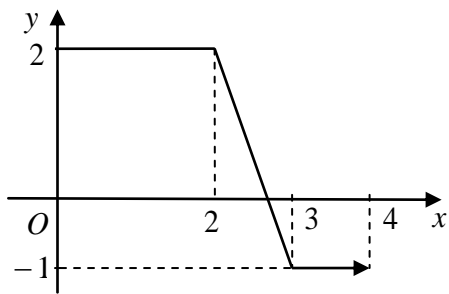
11) $n=6$



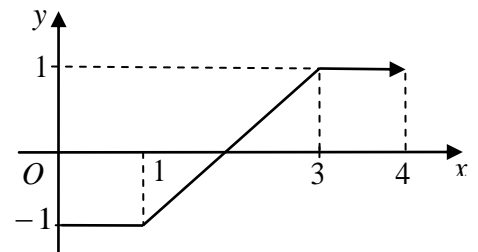
12) $n=7$



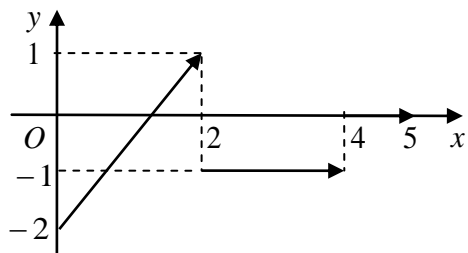
13) $n=8$



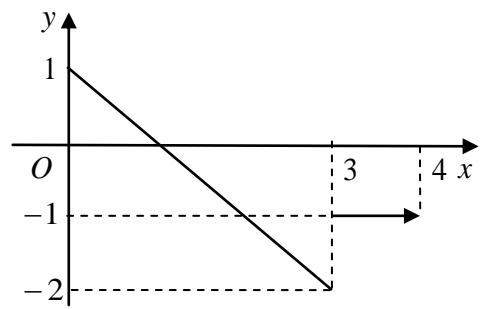
14) $n=9$



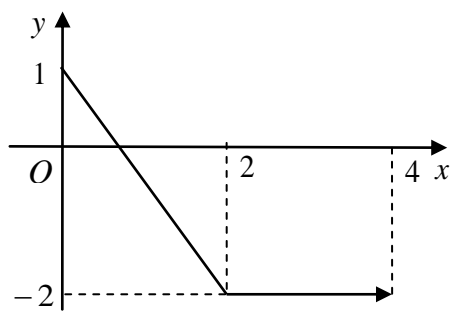
15) $n=3$



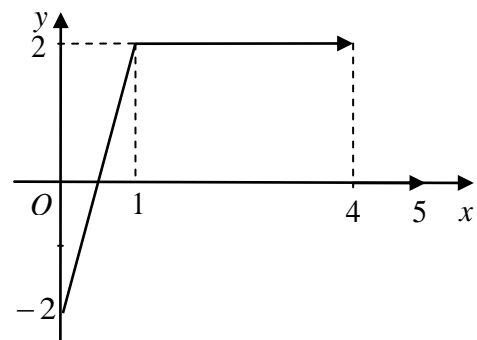
16) $n=4$



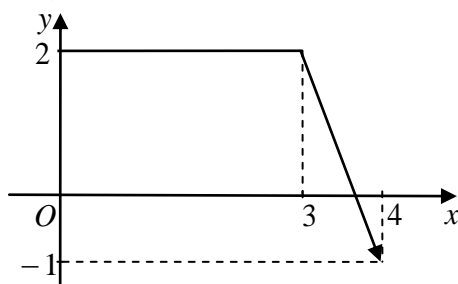
17) $n = 5$



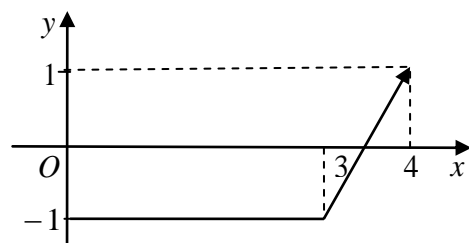
18) $n = 6$



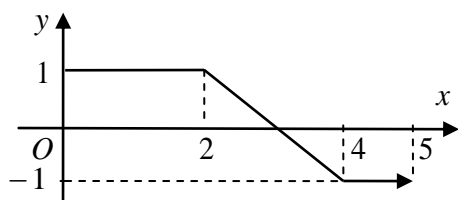
19) $n = 7$



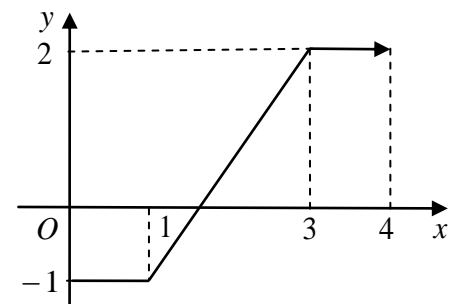
20) $n = 8$



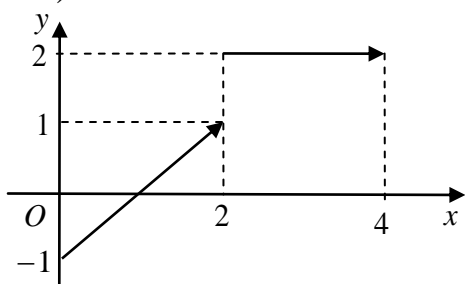
21) $n = 9$



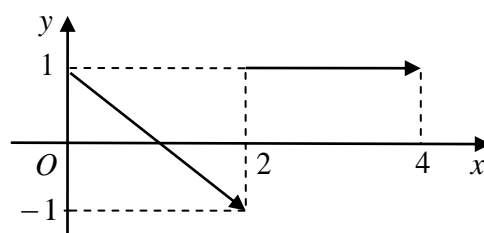
22) $n = 2$



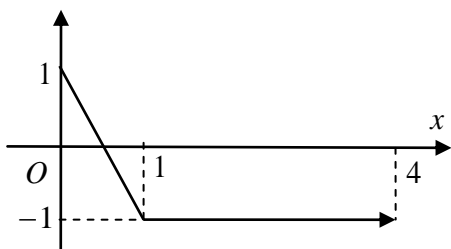
23) $n = 3$



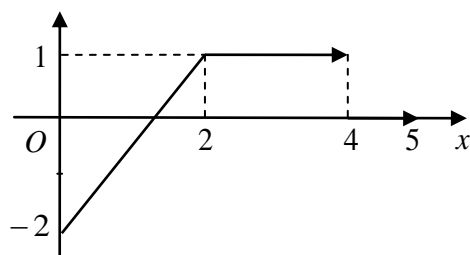
24) $n = 4$



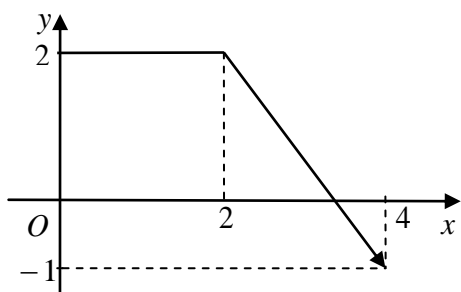
25) $n = 5$



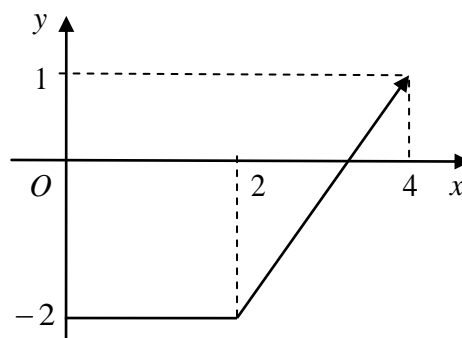
26) $n = 6$



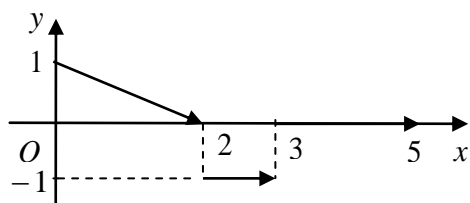
27) $n = 7$



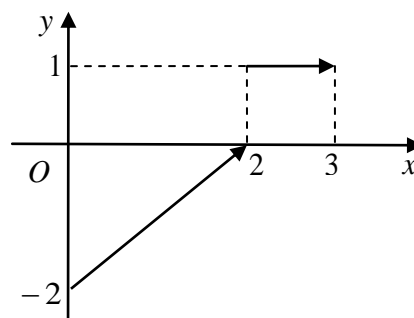
28) $n = 8$



29) $n = 9$



30) $n = 2$



Задание 2

Дана функция $f(x)$.

1. Представьте функцию $f(x)$ интегралом Фурье.

2. Найдите прямое преобразование Фурье $F(z)$ функции $f(x)$.

$$2.1. f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$2.2. f(x) = \begin{cases} e^{-2|x|}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$2.3. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 < |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

$$2.4. f(x) = \begin{cases} e^{-|x|}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$2.5. f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1, \\ 1, & 1 < |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

$$2.6. f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{2}}, & |x| < 4, \\ 0, & |x| > 4. \end{cases}$$

$$2.7. f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$2.8. f(x) = \begin{cases} 1 - 2|x|, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$2.9. f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{3}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$2.10. \quad f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$2.11. \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

$$2.12. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-3|x|}, & |x| \leq \frac{1}{3}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$2.13. \quad f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1, \\ 1, & 1 < |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

$$2.14. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-4|x|}, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}.$$

$$2.15. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 < |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

$$2.16. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{4}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$2.17. \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & |x| < 2\pi, \\ 0, & |x| > 2\pi. \end{cases}$$

$$2.18. \quad f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

$$2.19. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{5}}, & |x| \leq 5, \\ 0, & |x| > 5. \end{cases}$$

$$2.20. \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{x}{2}, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

$$2.21. \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{3}, & |x| \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

$$2.22. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & 0 < x < 2, \\ -e^{2x}, & -2 < x < 0, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

$$2.23. \quad f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 1, & 1 < |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

$$2.24. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{2}}, & 0 < x < 2, \\ -e^{\frac{x}{2}}, & -2 < x < 0, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

$$2.25. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 < |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

$$2.26. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{4}}, & 0 < x < 4, \\ -e^{\frac{x}{4}}, & -4 < x < 0, \\ 0, & |x| > 4. \end{cases}$$

$$2.27. \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{4}, & |x| \leq 4\pi, \\ 0, & |x| > 4\pi. \end{cases}$$

$$2.28. f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

$$2.29. f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{5}}, & 0 < x < 5, \\ -e^{\frac{x}{5}}, & -5 < x < 0, \\ 0, & |x| > 5. \end{cases}$$

$$2.30. f(x) = \begin{cases} \sin \frac{x}{2}, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

Задание 3

Найдите косинус-преобразование Фурье и синус-преобразование Фурье функции $f(x)$.

$$3.1. f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & \frac{3}{2} < x < +\infty. \end{cases}$$

$$3.2. f(x) = 2^{-x}, \quad x \geq 0.$$

$$3.3. f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

$$3.4. f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$3.5. f(x) = \begin{cases} 4x - 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 0, & \frac{1}{4} < x < +\infty. \end{cases}$$

$$3.6. f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

$$3.7. f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

$$3.8. f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

$$3.9. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 1, \\ 1 - \frac{x}{2}, & 1 < x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$3.10. f(x) = e^{-2x}, \quad x \geq 0.$$

$$3.11. f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 3-x, & 2 < x \leq 3, \\ 0, & 3 < x < +\infty. \end{cases}$$

$$3.12. f(x) = 2^{-3|x|}, \quad x \geq 0.$$

$$3.13. f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$3.14. f(x) = \begin{cases} -x, & 0 < x < 1, \\ x-2, & 1 < x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$3.15. f(x) = \begin{cases} 3x-2, & 0 \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ 0, & \frac{2}{3} < x < +\infty. \end{cases}$$

$$3.16. f(x) = \begin{cases} \sin \frac{x}{3}, & 0 \leq x \leq 3\pi, \\ 0, & x > 3\pi. \end{cases}$$

$$3.17. f(x) = e^{-\frac{x}{3}}, \quad x \geq 0.$$

$$3.18. f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

$$3.19. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 3-x, & 2 < x < 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

$$3.20. f(x) = e^{-3x}, \quad x \geq 0.$$

$$3.21. f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 4-2x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

$$3.22. f(x) = 3^{-x}, \quad x \geq 0.$$

$$3.23. f(x) = \begin{cases} \sin \frac{x}{4}, & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ 0, & x > 2\pi. \end{cases}$$

$$3.24. f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{3}{2} - \frac{x}{2}, & 1 < x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

$$3.25. f(x) = \begin{cases} 4x-3, & 0 \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 0, & \frac{3}{4} < x < +\infty. \end{cases}$$

$$3.26. f(x) = \begin{cases} \sin \frac{x}{5}, & 0 \leq x \leq 5\pi, \\ 0, & x > 5\pi. \end{cases}$$

$$3.27. f(x) = e^{-\frac{x}{5}}, \quad x \geq 0.$$

$$3.28. f(x) = \begin{cases} \cos 3x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

$$3.29. f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2} - 2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 3-x, & 2 < x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

$$3.30. f(x) = 4^{-x}, \quad x \geq 0.$$

Задание 4

Разложите в ряд Фурье по многочленам Лежандра функцию $f(x)$, $x \in [-1; 1]$. Выполните проверку.

$$4.1. f(x) = -x^3 + x^2 - x + 3.$$

$$4.2. f(x) = -2x^3 + x^2 - 3x + 1.$$

$$4.3. f(x) = x^3 - x + 2x - 3.$$

- 4.4. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 4x + 1$.
- 4.5. $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x + 2$.
- 4.6. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$.
- 4.7. $f(x) = -4x^3 + x^2 - 2x + 1$.
- 4.8. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$.
- 4.9. $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - x + 6$.
- 4.10. $f(x) = -5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$.
- 4.11. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 6x - 7$.
- 4.12. $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - x + 3$.
- 4.13. $f(x) = 5x^3 - 3x + 2x - 1$.
- 4.14. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5$.
- 4.15. $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 5x - 1$.
- 4.16. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 9$.
- 4.17. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x + 5$.
- 4.18. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$.
- 4.19. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$.
- 4.20. $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 4$.
- 4.21. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 5$.
- 4.22. $f(x) = -2x^3 - x^2 + 4x + 2$.
- 4.23. $f(x) = -x^3 + 3x - x + 4$.
- 4.24. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$.
- 4.25. $f(x) = -x^3 + x^2 - 3x + 5$.
- 4.26. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 3$.
- 4.27. $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 2x - 6$.
- 4.28. $f(x) = x^3 + 4x^2 - x + 8$.
- 4.29. $f(x) = -2x^3 + 8x^2 - x + 4$.
- 4.30. $f(x) = -x^3 + x^2 - 8x + 3$.