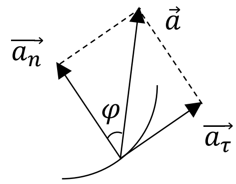
1.42 Материальная точка движется по окружности $R = 5$м. Когда нормальное ускорение точки становится $a_n = 3{,}2\,\frac{м}{с^2}$, угол между векторами полного и нормального ускорения $\varphi = 60°$. Найти модули скорости и тангенциального ускорения точки для этого момента времени.

$\vec{a} = \vec{a_\tau} + \vec{a_n}$ Т.к. $\vec{a_n} \perp \vec{a_\tau}$, то:

$a_n = a \cdot cos\varphi$

$a_\tau = a \cdot sin\varphi = \frac{a_n}{cos\varphi} \cdot sin\varphi = a_n \cdot tg\varphi = 3{,}2\,\frac{м}{с^2} \cdot \sqrt{3} = 5{,}54\,\frac{м}{с^2}$

$a_n = \frac{v^2}{R} => v = \sqrt{a_n \cdot R} = \sqrt{3{,}2\,\frac{м}{с^2} \cdot 5м} = 4\,\frac{м}{с}$



1.12 Частица движется по закону $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3$м, $B = 2{,}5\,\frac{м}{с}$, $C = 0{,}25\,\frac{м}{с^3}$. найдите средние значения скорости и ускорения за промежуток времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = 6$ с. Построить графики зависимостей скорости и ускорения от времени.

$v = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2$

$\langle v\rangle = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \frac{1}{t_2-t_1}\cdot x(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{t_2-t_1}(A + Bt + Ct^3)\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{t_2-t_1}\Big((A + Bt_2 + Ct_2^3) - (A + Bt_1 + Ct_1^3)\Big) = \frac{1}{t_2-t_1}\Big(B(t_2 - t_1) + C(t_2^3 - t_1^3)\Big) = B + C(t_2^2 + t_1 \cdot t_2 + t_2^2)$

$\langle v\rangle = 2{,}5 + 0{,}25(36 + 6 + 1) = 13{,}25\,\frac{м}{с}$

a(t)=6Ct

<a>=$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = \frac{1}{t_2-t_1}(B + 3Ct_2^2 - B - 3Ct_1^2)$=$\frac{1}{t_2-t_1}(3C(t_2^2 - t_1^2))$=$\frac{1}{t_2-t_1}\big(3C(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)\big) = 3 * 0.23 *= 5{,}25м\backslash с^2$

1.13 Материальная точка движется в плоскости xy по закону $x = At, y = B/t$, где A, B – положительные постоянные. Найти скорость и ускорения в зависимости от времени. Как направлен вектор ускорения? Записать ур-е траектории y(x), начертить ее график.

$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$ $v_x = \frac{dx}{dt} = A$ $v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{B}{t^2}$ $\vec{v} = A\vec{\imath} - \frac{B}{t^2}\vec{\jmath}$ $|\vec{v}| = \sqrt{A^2 + \frac{B^2}{t^4}}$ $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$

$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{2B}{t^3}$ $\vec{a} = \frac{2B}{t^3}\vec{\jmath}$ $|\vec{a}| = \frac{2B}{t^3}$

$t = \frac{x}{A} \;=>\; y = \frac{AB}{x}$

1.16 Б Частица движется прямолинейно с ускорением $a = 2B, B = -0{,}5\,\frac{м}{с^2}$. В момент $t = 0$ координата $x_0 = 0, v_0 = A, A = 2\,\frac{м}{с}$. Найти модуль средней скорости за первые 3 с движения.

$v(t) = \int a(t)dt + C$ $\quad v(t) = 2Bt + C$

константу C найдем из начальных условий:

$v_0 = A \;=>\; v(t) = 2Bt + A$

$x(t) = \int v(t)dt + C$ $\quad x(t) = Bt^2 + At + C$

константу C найдем из начальных условий:

$x_0 = 0 \;=>\; x(t) = Bt^2 + At$

Найдем координаты в начальный и конечный момент времени:

$x(0) = 0$ м

$x(3) = Bt^2 + At = -0{,}5 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = 1{,}5$ м

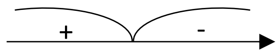
Считая ср. скорость как отношение изменения координаты за данное изменение времени:

$\langle v\rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} = \frac{1{,}5-0}{3-0} = 0{,}5\,\frac{м}{с}$

1,17 Б Скорость прямолинейно движ. частицы изменяется по закону $v = At - Bt^2$, где A и B – полож. константы. б) координату частицы для этого же момента времени, если при t = 0 $x_0 = 0$.

Экстремальное значение скорости частицы – наибольшее возможное ее значение. Исследуем $v(t)$

$v'(t) = A - 2Bt \quad v'(t) = 0$ при $t = \frac{A}{2B}$



$\frac{A}{2B}$ (> 0 по усл.)

$v_{\max} = \frac{A^2}{2B} - \frac{A^2}{4B} = \frac{A^2}{4B}$ $\quad x(t) = \int v(t)dt + C$

$x(t) = \frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{3} + C$

константу C найдем из начальных условий:

$x_0 = 0 \;=>\; x(t) = \frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{3}$

$x\left(\frac{A}{2B}\right) = \frac{A^3}{8B^2} - \frac{A^3}{3*2^3B^2} = \frac{A^3}{12B^2}$

1,19 А Компоненты ускорения частицы, движущейся в плоскости xy, равны: $a_x = 2A, a_y = 2B$, где A и B – полож. константы. В момент $t = 0$ $x_0 = 0,$ $y_0 = 0$ $v_0 = 0$. Найти модуль скорости и ускорения частицы в зависимости от времени.

$v_x(t) = \int a_x(t)dt + C$

$v_x(t) = 2Bt + C$

Константу С найдем из начальных условий.

$v_0 = 0 \;=>\; v_x(t) = 2At$

Аналогичные действия выполним для v_y

$v_0 = 0 \;=>\; v_y(t) = 2Bt$

Найдем модуль скорости частицы:

$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4A^2t^2 + 4B^2t^2} = 2\sqrt{A^2 + B^2} \cdot t$

Найдем модуль ускорения частицы:

$a(t) = \sqrt{a_x^2 + b_x^2} = \sqrt{4A^2 + 4B^2} = 2\sqrt{A^2 + B^2}$

1,19 Б Компоненты ускорения частицы, движущейся в плоскости xy, равны: $a_x = 2A, a_y = 2B$, где A и B – полож. константы. В момент $t = 0$ $x_0 = 0,$ $y_0 = 0$ $v_0 = 0$. Найти ур-е траектории y(x), построить ее график.

$v_x(t) = \int a_x(t)dt + C$ $\quad v_x(t) = 2At + C$

Константу С найдем из начальных условий.

$v_0 = 0 \;=>\; v_x(t) = 2At$

Аналогичные действия выполним для v_y

$v_0 = 0 \;=>\; v_y(t) = 2Bt$

$x(t) = \int v_x(t)dt + C$ $\quad x(t) = At^2 + C$

Константу С найдем из начальных условий.

$x_0 = 0 \;=>\; x(t) = At^2$

Аналогичные действия выполним для v_y

$y_0 = 0 \;=>\; y(t) = Bt^2$

Из первого у-я выразим t:

$t = \sqrt{\frac{x}{A}}$

И подставим его во второе:

$y(x) = \frac{Bx}{A}$

1,23 Радиус-вектор мат. точки изменяется по закону $\vec{r} = 3t^2\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath} + 1\vec{k}$. Найти зависимость от времени векторов скорости и ускорения и модулей этих величин.

$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{r(t)}}{dt} = 6t\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^2 + 1}$

$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d\overrightarrow{v(t)}}{dt} = 6\vec{\imath}$

$a(t) = 6 = const$

2,6 Материальная точка массой 20г движется без трения прямолинейно под действием силы, изменяющейся по закону $F = At$, где A – постоянный вектор, модуль которого $A = 0{,}03\,\frac{Н}{с}$. В момент $t = 0$ $x_0 = 0$ $v_0 = 5\,\frac{м}{с}$. Записать зависимость координаты x движущейся точки от времени и найти путь, пройденный ею за первые 4с.

Согласно второму закону Ньютона:

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \;=>\; \vec{v} = \int \frac{1}{m}\overrightarrow{F(t)}\,dt + C$

$\vec{v} = \frac{\vec{A}}{2m}t^2 + C$

Константу С найдем из начальных условий.

$v_0 = 5 \;=>\; v(t) = \frac{A}{2m}t^2 + 5$

$x(t) = \int v(t)dt + C$

$x(t) = \frac{A}{6m}t^3 + 5t + C$

Константу С найдем из начальных условий.

$x_0 = 0 \;=>\; x(t) = \frac{A}{6m}t^3 + 5t$

$x(t) = 0{,}25t^3 + 5t$

Найдем координаты в начальный и конечный момент времени:

$x(0) = 0$

$x(4) = 0{,}25 \cdot 64 + 5 \cdot 4 = 36$

Найдем пройденный путь:

$S = x_2 - x_1 = 36 - 0 = 36$(м)

2,7 В момент t = 0 частица $m = 0{,}2$ кг находилась в точке $x_0 = y_0 = 0$, и имела скорость $v_0 = Bi, B = 2\,\frac{м}{с}$. В этот момент времени на ее начала действовать сила $F = Aj, A = 3$ Н. Найти координаты x, y в момент времени $t = 3$ с.

2,7 В момент t $= 0$ частица $m = 0{,}2$ кг находилась в точке $x_0 = y_0 = 0$, и имела скорость $v_0 = Bi, B = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}$. В этот момент времени на ее начала действовать сила $F = Aj, A = 3$ Н. Найти координаты x, y в момент времени $t = 3$ с.

$$\vec{F} = \frac{md\vec{v}}{dt} \quad => \quad \vec{v} = \int \frac{1}{m}\overrightarrow{F(t)}\,dt + C$$

$$\vec{v} = \frac{A}{m}\vec{j} \cdot t + C$$

Константу С найдем из начальных условий:

$$\overrightarrow{v_0} = B\vec{\imath} \quad => \quad \overrightarrow{v(t)} = B\vec{\imath} + \frac{A}{m}\vec{j} \cdot t$$

$$\overrightarrow{r(t)} = \int \overrightarrow{v(t)}dt + C$$

$$\overrightarrow{r(t)} = Bt \cdot \vec{\imath} + \frac{At^2}{2m} \cdot \vec{j} + C$$

Константу С найдем из начальных условий:

$$x_0 = y_0 = 0 \quad => \quad \overrightarrow{r(t)} = Bt \cdot \vec{\imath} + \frac{At^2}{2m} \cdot \vec{j}$$

$$x(t) = Bt \qquad x(3) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ (м)}$$

$$y(t) = \frac{At^2}{2m} \qquad y(3) = \frac{3 \cdot 9}{2 \cdot 0{,}2} = 67{,}5 \text{ (м)}$$

3,3 Из залитого подвала, площадь пола которого $S = 50$ м^2, требуется выкачать воду на мостовую. Глубина воды в подвале $h = 1{,}5$ м, растояние от уровня воды до мостовой $H = 5$ м. Найти работу, которую надо совершить при откачке воды.

$$A = -A_{F_T} = -F_T \cdot \left(-\left(H + \frac{h}{2}\right)\right) =$$

$$= F_T \cdot \left(H + \frac{h}{2}\right)$$

$$F_T = mg = \rho V g = \rho h S g$$

$$A = \rho h S g \left(H + \frac{h}{2}\right) = 1000 \cdot 1{,}5 \cdot 50 \cdot 9{,}81 \cdot 5{,}75 = 4230{,}5 \text{ кДж}$$

3.9 Частица совершила перемещение по некоторой траектории в плоскости xy из точки 1с радиус вектором r1=1i+2j в точку 2 с радиус-вектором r2=2i-3j под действием силы F=3i+4j. Найти работу, совершенную силой F на этом перемещении.

A$=\int_{r1}^{r2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{r1}^{r2} 3it + 4jd\vec{r} = \int_{x1}^{x2} 3dx + \int_{y1}^{y2} 4\,dy$

X1=1; y1=2;

X2=2; y2=-3;

$$3x|_1^2 + 4y|_2^{-3} = 6 - 3 - 12 - 8 = 17$$

3.10

Тело массой m начинают поднимать с поверхности земли, приложив к нему силу, которую изменяют с высотой подьема y по закону F=(2ay-1)mg,где a- положительная постоянная. Найти работу этой силы на первой половине пути подьема

1.130 Дано:

$\vec{F} = 2(\alpha y - 1)m\vec{g}$

m; $\alpha > 0$

$A = ?$

$\Delta U = ?$

Решение:

$A = mgh + \frac{mv^2}{2}$ (1)

В верхней точке подъема $v = 0$, $h = H$, поэтому уравнение (1) примет вид

$A = mgH$ (2)

Проекция силы $\vec{F}$ на ось y:

$F = 2(1 - \alpha y)mg$

Найдем работу силы F ($A = \int F dS$):

$A = \int_0^H 2(1 - ay)mg\,dy = mg(2H - aH^2)$ (3)

Приравняем (2) и (3):

$mgH = mg(2H - aH^2)$

$\alpha H = 1 \Rightarrow H = \frac{1}{\alpha}$

На первой половине подъема

$y = H/2 = \frac{1}{2a}$

$\Delta U = mg\Delta H = \frac{mg}{2a}$

$A = \int_0^{\frac{1}{2a}} 2(1 - \alpha y)mg\,dy = mg\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{4\alpha^2}\right) = \frac{3mg}{4a}$

Ответ: $\Delta U = \frac{mg}{2a}$; $A = \frac{3mg}{4a}$

4.3 Вычислить момент инерции полого цилиндра массой m с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2 относительно оси, совпадающей с осью симметрии цилиндра.

Момент инерции – аддитивная величина.

Момент инерции цилиндра радиуса R_1:

$I = \int r^2 dm = \frac{1}{2}\int_{R2}^{R1} dm$

dI=$r^2 dm$;dm=$\rho dV = \rho 2\pi r h dr$

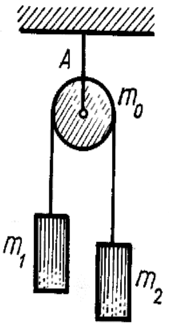
I= $\int_{R2}^{R1} \rho 2\pi r^3 h dr = 2\pi\rho h \int_{R2}^{R1} r^3 dr =$

$2\pi\rho h m\backslash \left.\frac{r^4}{4}\right|_{r1}^{r2}$=$2\pi\rho h(R1^4 - R2^4)$

$$I_1 = \frac{\pi\rho R_1^2 h R_1^2}{2} = \frac{\pi\rho R_1^4 h}{2}$$

m=m1+m2=$\pi\rho h(R1^2 - R2^2)$

$$I = \frac{m(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$



4.25 А На рис. $m_1 = 600$ г$, m_2 = 450$ г$, m_0 = 600$ г. Блок считать однородным диском, трением в оси пренебречь. Учитывая, что нить не соклызит по блоку, найти ускорения грузов m_1 и m_2

Из рисунка следует:

$m_1 g - N_1 = m_1 a \quad => \quad N_1 = m_1 g - m_1 a$

$m_2 g - N_2 = m_2 a \quad => \quad N_2 = m_2 g + m_2 a$

$I\frac{d\omega}{dt} = N_1 R - N_2 R$

$\omega = \frac{v}{R}$

$\frac{m_0 R^2}{2R} a = N_1 R - N_2 R$

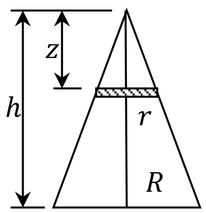
$\frac{m_0}{2} a = N_1 - N_2$

$\frac{m_0}{2} a = m_1 g - m_1 a - m_2 g + m_2 a$

$\left(\frac{m_0}{2} + m_1 + m_2\right) a = (m_1 - m_2) g$

$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{\left(\frac{m_0}{2} + m_1 + m_2\right)} = 1{,}09\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

4.9 Найти момент инерции прямого сплошного однородного конуса массой***m***и радиусом основания ***R***относительно его оси симметрии.



Решение:

Разбиваем конус на тонкие диски, перпендикулярные оси вращения.

Дифференциал масса: $dm = \frac{mr^2 dz}{\frac{1}{3}hR^2}$

Так как$r = Rz/h$, момент инерции такого диска: $dI = \frac{dmr^2}{2} = \frac{3mR^2 z^4 dz}{2h^5}$

Искомый момент инерции для конуса:

$I = \int_0^h \frac{3mR^2 z^4}{2h^5} dz = \frac{3mR^2}{2h^5}\int_0^h z^4 dz = \frac{3}{2} \cdot \frac{mR^2 h^5}{5h^5} = \frac{3}{10} mR^2$

7.26 Найти коэффициент затухания β и логарифмический декремент затухания λ математического маятника, если известно, что за t = 100 с колебаний полная механическая энергия маятника уменьшилась в десять раз. Длина маятника l = 0,98 м.

$E_2 = E_1 e^{-\frac{2}{\beta t}} => \frac{E_1}{E_2} = e^{\frac{2}{\beta t}} => e^{\frac{2}{\beta t}} = 10$

$\ln 10 = \frac{2}{\beta t} \quad => \beta = \frac{\ln 10}{2t}$

$$\lambda = \beta T = \beta 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

7.14 Написать уравнение движения x(t)частицы, одновременно участвующей в двух колебаниях одного направления:

$x_1 = 30\cos(\pi t/3)$ и $x_2 = 30\cos\left(\frac{\pi t}{3} + \pi/6\right)$

Здесь требуется сложить два уравнения, чтобы получить новое:

$$A(\text{амплитуда нового уравнения}) = \sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)} =$$

$$= \sqrt{900 + 900 + 2 * 30 * 30\cos\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi t}{3}\right)}$$

$$= \sqrt{1800 + \frac{1800 * \sqrt{3}}{2}} = 58$$

$tg\,\alpha$ (тангенс нового угла)

$$= \frac{A_1 sin\alpha_1 + A_2 sin\alpha_2}{A_1 cos\alpha_1 + A_2 cos\alpha_2}$$

$$= \left(\begin{array}{c}\text{применяем формулы сумм косинусов} \\ \text{и синусов, равные амплитуды сокращаются}\end{array}\right)$$

$$= \frac{2\sin\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}\cos\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{2}}{2\cos\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{2}\cos\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}}$$

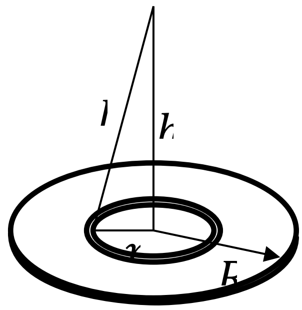
$= (2$ и косинусы разности сокращаются$)$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)}{\cos\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}} = tg\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}$$

$\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2} -$ угол в новом уравнении

Ответ: $x = 58\cos(\frac{\pi t}{3} + \pi/12)$

12.2б По тонкому диску радиуса $\text{R} = 10$ см равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ нКл/м^2. Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска на расстоянии 6 см от плоскости диска.

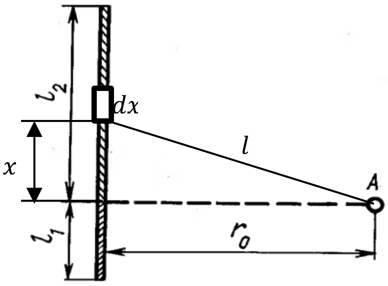


Будем разбивать диск на кольца. Заряд каждого кольца $dq = \sigma dS = \sigma d(\pi r^2) = 2\sigma\pi r dr$.

В силу симметрии и равноудаленности всех точек кольца от точки расчета потенциал, создаваемый данным кольцом: $d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{\sqrt{r^2 + h^2}}$.

Так как потенциал – скаляр, то общий потенциал $\varphi = \int_0^R d\varphi = \int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{2\sigma\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^R \frac{d(r^2+h^2)}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left.\sqrt{r^2 + h^2}\right|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + h^2} - h\right)$

12.4 Найти потенциал в точке A, удаленной на расстоянии r_0 от заряженной нити длиной $(l_1 + l_2)$. Линейная плотность зарядов τ.

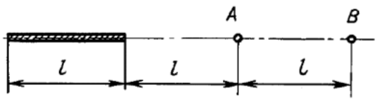


$dq = \tau dx$

$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \cdot l} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dx}{\sqrt{x^2+r_0^2}}$

$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l_1}^{l_2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+r_0^2}} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\sqrt{x^2+r_0^2} + x\right)\Big|_{-l_1}^{l_2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left(\sqrt{l_2^2+r_0^2}+l_2\right) - \ln\left(\sqrt{l_1^2+r_0^2}-l_1\right)\right) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{l_2^2+r_0^2}+l_2}{\sqrt{l_1^2+r_0^2}-l_1}\right)$

12.6 На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 2{,}5\ \text{нКл/м}$. Найти разность потенциалов точек А и В.



$dq = \tau dr \quad d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$

$\varphi_A = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l}^{2l}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_{l}^{2l} = \frac{\tau\ln 2}{4\pi\varepsilon_0}$

$\varphi_B = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_{2l}^{3l}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_{2l}^{3l} = \frac{\tau\ln\frac{3}{2}}{4\pi\varepsilon_0}$

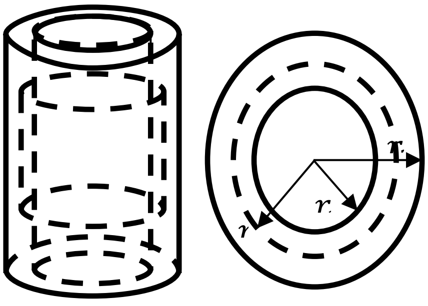
$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln 2 - \ln\frac{3}{2}\right) = \frac{\tau\ln\frac{4}{3}}{4\pi\varepsilon_0}$

12.12 Потенциал некоторого поля имеет вид $\varphi = axz$. Найти вектор напряженности поля и его модуль

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = -az\vec{\imath} - ax\vec{k}$

$E = \sqrt{a^2z^2 + a^2x^2} = a\sqrt{z^2+x^2}$

12.9 Два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами $r_1 = 10$ и $r_2 = 20$ мм заряжены одноименными зарядами, причем поверхностная плотность зарядов на внешнем цилиндре $\sigma_2 = 6{,}66\ \text{нКл/м}^2$, а на внутреннем $\sigma_1 = 3{,}333\ \text{нКл/м}^2$. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$ между цилиндрами.



Выберем между цилиндрами 1 и 2 Гауссову поверхность в форме цилиндра.

$\Phi = \int_{(S_{\text{пов}})}\vec{E}\vec{dS} = \int_{(S_{б})} EdS\cos 0 + 2\int_{(S_{\text{осн}})} EdS\cos 90 = 2\pi rE\int_{(0)}^{h} dh = 2\pi rEh$

$dq_1 = \sigma_1 dS_1 = 2\pi r_1\sigma_1 dh$

$q_{\text{вн}} = \int_0^h 2\pi r_1 dh = 2\pi r_1 h$

$\Phi = \frac{q_{\text{вн}}}{\varepsilon_0} \ \rightarrow\ 2\pi rEh\varepsilon_0 = 2\pi r_1\sigma_1 h$

$Er\varepsilon_0 = r_1 \ \rightarrow\ E = \frac{r_1\sigma_1}{\varepsilon_0 r}$

В силу симметрии задачи вектора E и dr коллинеарные.

$\varphi = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \frac{r_1\sigma_1}{\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{r_1\sigma_1}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$

12.14 Потенциал некоторого поля имеет вид $\varphi = a(x^2+y^2) - bz^2$. Найти вектор напряженности поля и его модуль

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = -2ax\vec{\imath} - 2ay\vec{\jmath} + 2bz\vec{k}$

$$E = 2\sqrt{a^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2}$$

12.19 Потенциал поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния от центра шара по закону $\varphi = ar^2 + b\ (a, b = const)$. Найти объемную плотность заряда ρ внутри шара.

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Найдем $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = -2a\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right)$

$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -2a - 2a - 2a = -6a$

$\rho = -6a\varepsilon_0$

16.6 Непроводящий тонкий диск радиусом R, равномерно заряженный с одной стороны с поверхностной плотностью заряда σ, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Определить магнитную индукцию B в центре диска

Будем разбивать диск на кольца.

$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$

Крутящийся диск является своеобразным током.

$dI = \frac{dq}{T} = 2\sigma\pi r\frac{dr}{T} = \frac{2\sigma\pi r\omega dr}{2\pi} = \sigma\omega r dr$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

По закону БСЛ

$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi}\int_{(L)}\frac{(\overrightarrow{dl}\times\vec{r})}{r^3} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi r^2}\int_{(L)} dl = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega r dr}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}dr$

$B = \int_0^R dB = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R dr = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$

16.8 Плоское диэлектрическое кольцо, внешний и внутренний радиусы которого R_1 и R_2, равномерно заряжено зарядом q и вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Определить магнитную индукцию в центре кольца.

Будем разбивать плоское кольцо на кольца.

$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr \qquad q = \int_{R_1}^{R_2} dq = \pi(R_2^2 - R_1^2)\sigma \rightarrow \sigma = \frac{q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$

Крутящийся диск является своеобразным током.

$dI = \frac{dq}{T} = 2\sigma\pi r\frac{dr}{T} = \frac{2\sigma\pi r\omega dr}{2\pi} = \sigma\omega r dr$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

По закону БСЛ

$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi}\int_{(L)}\frac{(\overrightarrow{dl}\times\vec{r})}{r^3} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi r^2}\int_{(L)} dl = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega r dr}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}dr$

$B = \int_{R_1}^{R_2} dB = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_{R_1}^{R_2} dr = \frac{\mu_0\sigma\omega(R_2 - R_1)}{2} = \frac{\mu_0 q\omega(R_2 - R_1)}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi(R_1 + R_2)}$

13,15

13.15

Дано:

$r = 0{,}1$ м

$p = 1{,}3 \cdot 10^{-11}$ Кл·м

$\Delta\varphi - ?$

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\, d\vec{l}$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos\theta}$$

$$E = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\varphi = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r-\frac{l}{2}} - \frac{q}{r+\frac{l}{2}}\right) = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2p}{r^2} = 23{,}4\text{ В}$$

Ответ: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2p}{r^2}$

16,10

Решение задачи:

3.247

R

ω

σ

B

Рассмотрим произвольный слой сферы бесконечно малой высоты Δx. Шаровой слой может быть заменен цилиндрической поверхностью. Пусть

dS - произвольная площадка на этой поверхности

dB - магнитная индукция, создаваемая поверхностью dS в центре сферы.

r - радиус вращения слоя вокруг оси сверы

v - скорость вращения, dq - заряд на dS

$$dB = \frac{\mu}{4\cdot\pi}\cdot\frac{dq\cdot v\cdot R}{R^3} \qquad v = \omega\cdot r \qquad dq = dS\cdot\sigma \qquad dB = \frac{\mu}{4\cdot\pi}\cdot\frac{dS\cdot\sigma\cdot\omega\cdot r}{R^2}$$

Весь слой создает в центре сферы поле индукции ΔB

$$\Delta B = \int \frac{\mu}{4\cdot\pi}\cdot\frac{\sigma\cdot\omega\cdot r}{R^2}\, dS \qquad S_{сл} = 2\cdot\pi\cdot r\cdot\Delta x \qquad \Delta B = \frac{\mu}{4\cdot\pi}\cdot\frac{\sigma\cdot\omega\cdot r}{R^2}\cdot(2\cdot\pi\cdot r\cdot\Delta x)$$

Сфера может быть разбита на бесконечное колоничество слоев. Каждый из них создает поле ΔB_i, дающее в сумме поле B в центре сферы. Слой можно характеризовать положением x по оси сферы, считая от центра. Для каждого слоя $r_i = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$B = \int_{-R}^{R} \Delta B\, dx \qquad dx = \Delta x \qquad B = \int_{-R}^{R} \frac{\mu}{4\cdot\pi}\cdot\frac{\sigma\cdot\omega\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot r}{R^2}\, dx = \int_{-R}^{R} \frac{\mu}{4\cdot\pi}\cdot\frac{\sigma\cdot\omega\cdot 2\cdot\pi\cdot\left(R^2 - x^2\right)}{R^2}\, dx = \frac{2}{3}\cdot R\cdot\omega\cdot\mu\cdot\sigma$$

16,20

16.20

Дано:

a, I

$B - ?$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4$$

$$B = 4B_1\cos\alpha$$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ из рис.

$$B = \frac{4}{\sqrt{3}} B_1$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right), \quad \cos\beta_1 = -\cos\beta_2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cos\beta_1 \qquad \beta_1 = 60^\circ \qquad r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$B = \frac{2\mu_0 I}{\pi r\sqrt{3}}\cos\beta_1 = \frac{2\mu_0 I}{3\pi a}$$

Ответ: $\frac{2\mu_0 I}{3\pi a}$

16.25 Прямой длинный провод на одном из участков переходит в полуокружность радиусом R. По проводу проходит ток I. Определить магнитную индукцию B поля в центре полуокружности.

Можно разбить проводник на три сегмента: до полуокружности, полуокружность, после полуокружности. В законе БСЛ присутствует $\overrightarrow{dl} \times \vec{r}$, и для линейного проводника (1 и 3 сегменты) векторное произведение обращается в 0 (т.к. $\overrightarrow{dl}$ и $\vec{r}$ коллинеарные. Остается подсчитать индукцию полукольца.

БСЛ: $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\overrightarrow{dl}\times\vec{r}}{r^3}$. На всем участке радиус будет перпендикулярен окружности и постоянен. $\mathrm{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}dl$. Интегрируем: $B = \int\ dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int_{(L)} dl = \frac{\mu_0 I\pi R}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4R}$

16,49

16.49

Дано:

R, r, N, I

$B_{max}, B_{min} - ?$

$$\int H_l\, dl = \sum_{i=1}^{k} I_i$$

Зак. полного тока

Для внутренней стороны тороида

$$\oint H_l\, dl = \frac{B}{\mu_0}\oint_L dl$$

$$\oint dl = 2\pi x_1, \text{ где } x_1 = R - r$$

$$B_{max} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi(R-r)}$$

Для внешней стороны, $x_2 = R + r$

$$B_{min} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi(R+r)}$$

Ответ: $B_{min} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi(R+r)}$, $B_{max} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi(R-r)}$