1.23) Найти общее решение дифференциального уравнения.

$(1+e^{3y})xdx = e^{3y}dy$

$\int xdx = \int \frac{e^{3y}dy}{1+e^{3y}} \Rightarrow \int xdx = \frac{1}{3}\int \frac{d(1+e^{3y})}{1+e^{3y}}$

$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{3}\ln\left|1+e^{3y}\right| + C$

Ответ: $C = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}\ln\left|1+e^{3y}\right|$

2.23) Найти общее решение дифференциального уравнения.

$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$

$arctgy = arctgx + C$

Ответ: $C = arctgy - arctgx$

3.23) Найти общее решение дифференциального уравнения.

$xy' + y(\ln\frac{y}{x} - 1) = 0 / : x$

$y' + \frac{y}{x}(\ln\frac{y}{x} - 1) = 0$

Замена: $\frac{y}{x} = t \Rightarrow y = tx \Rightarrow dy = tdx + xdt$

$\frac{tdx + xdt}{dx} + t(\ln t - 1) = 0 \Rightarrow t + \frac{xdt}{dx} + t\ln t - t = 0 \Rightarrow \frac{xdt}{dx} = -t\ln t$

$\int \frac{dt}{t\ln t} = -\int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{d(\ln t)}{\ln t} = -\int \frac{dx}{x}$

$\ln\ln t = -\ln x + \ln C = \ln\frac{C}{x}$

$\ln t = \frac{C}{x} \Rightarrow \ln\frac{y}{x} = \frac{C}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = e^{\frac{C}{x}}$

$y = xe^{\frac{C}{x}}$

Ответ: $y = xe^{\frac{C}{x}}$

4.23) Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

$$xy' + y = \sin x \qquad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

Решаем без правой части.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$y = \frac{C}{x}$$

$$C = C(x) \Rightarrow y = \frac{C(x)}{x}$$

$$y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{\sin x}{x}$$

$$C'(x) = \sin x \Rightarrow C(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C_1$$

$$y = \frac{-\cos x + C_1}{x}$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{-\cos\frac{\pi}{2} + C_1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{0 + C_1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot C_1 \Rightarrow C_1 = 1$$

Ответ: $y = \dfrac{1 - \cos x}{x}$

5.23) Решить дифференциальное уравнение

$$xy' + y = y^2 \ln x \,/ : x$$

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x}$$

Замена: $z = y^{1-2} = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$

$$-z' + \frac{z}{x} = \frac{\ln x}{x} / \cdot (-1) \qquad z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x}$$

Решаем без правой части:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln z = \ln|x| + \ln C = \ln C|x|$$

$$z = C(x)x \Rightarrow z' = C'(x)x + C(x)$$

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = -\frac{\ln x}{x} \Rightarrow C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$$C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = U \Rightarrow dU = \dfrac{dx}{x} \\ \dfrac{dx}{x^2} = dV \Rightarrow V = -\dfrac{1}{x} \end{array} \right| = -(-\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{dx}{x^2}) = \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + C_1 = \frac{\ln x + 1}{x} + C_1$$

$$z = (\frac{\ln x + 1}{x} + C_1)x = \ln x + 1 + C_1 x = \frac{1}{y}$$

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + C_1 x}$$