1.23) Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру.

$\int\limits_L 2xydx + y^2dy + z^2dz$ где L первый виток винтовой линии

$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = 2t$

$dx = -\sin tdt$

$dy = \cos tdt$

$dz = 2dt$

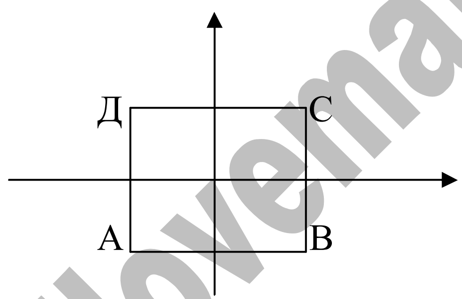
$0 \le t \le 2\pi$

$$\int\limits_L 2xydx + y^2dy + z^2dz = \int\limits_0^{2\pi} (2\cos t \sin x \cdot (-\sin tdt) + \cos^2 t \cdot \cos tdt + 4t^2 \cdot 2dt) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (-2\cos t \sin^2 x + \cos^3 t + 8t^2)dt = (\frac{2}{3}\sin^3 t + \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t + \frac{8}{3}t^3)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= (\frac{1}{3}\sin^3 t + \sin t + \frac{8}{3}t^3)\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3} \cdot 8\pi^3 = \frac{64\pi^3}{3}$$

2.23) Вычислить $\int xydL$, где L - контур квадрата $x = \pm 1 \quad y = \pm 1$.



Вычислим криволинейный интеграл вдоль контура.

$A(-1,-1) \quad B(1,-1) \quad C(1,1) \quad D(-1,1)$

Найдём параметрические уравнения сторон:

$$AB \Rightarrow \frac{x+1}{1+1} = \frac{y+1}{-1+1} \Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{0} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 2dt \\ dy = 0 \end{cases}$$

$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{4+0}dt = 2dt$

$0 < t < 1$

$$\int xydL = \int\limits_0^1 (2t-1) \cdot (-1) \cdot 2dt = -2\int\limits_0^1 (2t-1)dt = -2(t^2 - t)\Big|_0^1 = -2(1-1) = 0$$

$$BC \Rightarrow \frac{x-1}{1-1} = \frac{y+1}{1+1} \Rightarrow \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = 2dt \end{cases}$$

$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{0+4}dt = 2dt$

$0 < t < 1$

$$\int xydL = \int_0^1 (2t-1)\cdot 1 \cdot 2dt = 2\int_0^1 (2t-1)dt = 2(t^2-t)\Big|_0^1 = 2(1-1) = 0$$

$$CD \Rightarrow \frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-1}{1-1} \Rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{0} = t \Rightarrow \begin{cases} x = -2t+1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -2dt \\ dy = 0 \end{cases}$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{4+0}dt = 2dt$$

$$0 < t < 1$$

$$\int xydL = \int_0^1 (-2t+1)\cdot 1 \cdot (-2)dt = -2\int_0^1 (-2t+1)dt = -2(-t^2+t)\Big|_0^1 = -2(-1+1) = 0$$

$$DA \Rightarrow \frac{x+1}{-1+1} = \frac{y-1}{-1-1} \Rightarrow \frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{-2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = -2dt \end{cases}$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{0+4}dt = 2dt$$

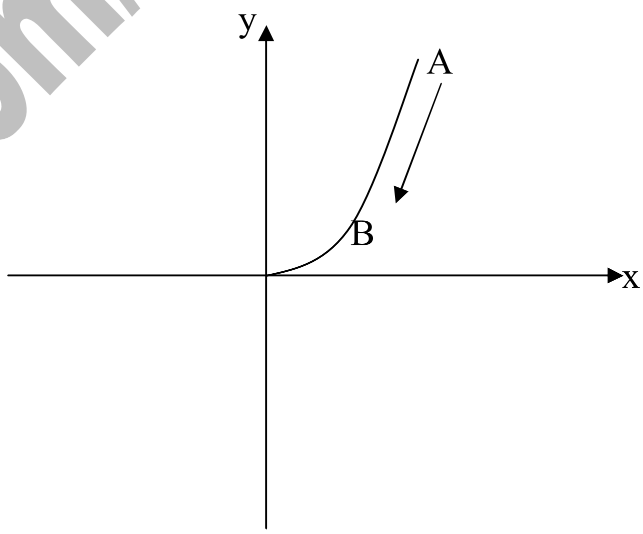
$$0 < t < 1$$

$$\int xydL = \int_0^1 (-2t+1)\cdot(-1)\cdot(-2)dt = -2\int_0^1 (2t-1)dt = -2(t^2-t)\Big|_0^1 = -2(1-1) = 0$$

$$\int_L xydL = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} = 0$$

3.23) Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L_{AB}} xdl$, где L_{AB} - дуга параболы $y = x^2$ от точки A(2;4) до точки B(1;1).

Решение:



Запишем уравнение параболы параметрически.

$y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 2tdt \end{cases} \Rightarrow dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1+4t^2}\,dt$$

$x = 2 \Rightarrow t = 2$

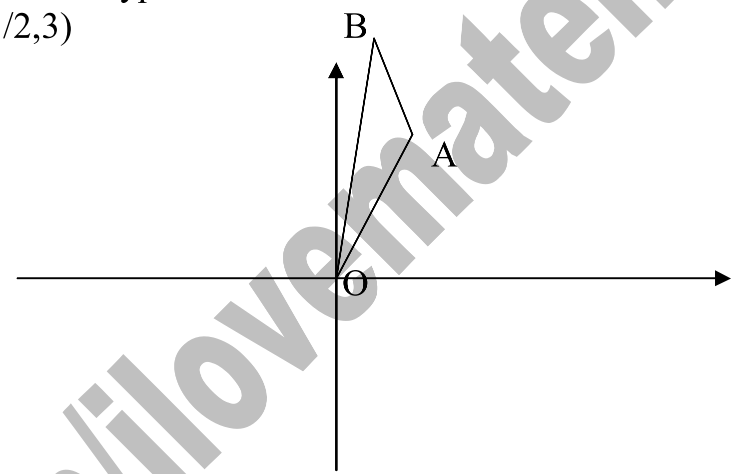
$x = 1 \Rightarrow t = 1$

$$\int\limits_L xdl = \int\limits_2^1 t \cdot \sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{8}\int\limits_2^1 \sqrt{1+4t^2}\,d(1+4t^2) = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(1+4t^2)^3}\Big|_2^1 =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\sqrt{(1+4)^3} - \sqrt{(1+16)^3}\right) = \frac{1}{12}\left(\sqrt{5^3} - \sqrt{17^3}\right) = \frac{5\sqrt{5} - 17\sqrt{17}}{12}$$

4.23) Вычислить $\int\limits_{LABO} (xy - x)dx + \frac{x^2}{2}dy$ вдоль ломаной ABO при положительном направлении обхода контура.

O(0,0), A(1,2), B(1/2,3)



Найдём уравнения сторон OA, AB и BO.

$O(0,0) \quad A(1,2) \quad B(\frac{1}{2},3)$

$$OA \Rightarrow \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{2-0} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 2dt \end{cases}$$

$0 < t < 1$

$$\int\limits_{OA} (xy - x)dx + \frac{x^2}{2}dy = \int\limits_0^1 (t \cdot 2t - t)\cdot dt + \frac{1}{2}t^2 \cdot 2dt = \int\limits_0^1 (2t^2 - t + t^2)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (3t^2 - t)dt = \left(t^3 - \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$AB \Rightarrow \frac{x-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{y-2}{3-2} \Rightarrow \frac{x-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-2}{1} = t \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t+1 \\ y = t+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\frac{1}{2}dt \\ dy = dt \end{cases}$$

$0 < t < 1$

$$\int\limits_{AB} (xy-x)dx + \frac{x^2}{2}dy = \int\limits_0^1 ((-\frac{1}{2}t+1)\cdot(t+2) - (-\frac{1}{2}t+1))\cdot(-\frac{1}{2}dt) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}t+1)^2 dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (-\frac{1}{2}t^2 + t - t + 2 + \frac{1}{2}t - 1)\cdot(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4}t^2 - t + 1))dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2})dt = \int\limits_0^1 (\frac{3}{8}t^2 - \frac{3}{4}t)dt = (\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}t^2)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$BO \Rightarrow \frac{x-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{0-3} \Rightarrow \frac{x-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{-3} = t \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \\ y = -3t+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\frac{1}{2}dt \\ dy = -3dt \end{cases}$$

$0 < t < 1$

$$\int\limits_{BO} (xy-x)dx + \frac{x^2}{2}dy = \int\limits_0^1 ((-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})\cdot(-3t+3) - (-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}))\cdot(-\frac{1}{2}dt) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})^2(-3dt) =$$

$$= \int\limits_0^1 (\frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}t + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}))(-3)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (\frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + 1)\cdot(-\frac{1}{2}) - \frac{3}{2}(\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}))dt = \int\limits_0^1 (-\frac{3}{4}t^2 + \frac{5}{4}t - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{3}{8})dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (-\frac{9}{8}t^2 + 2t - \frac{7}{8})dt = (-\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{3}t^3 + t^2 - \frac{7}{8}t)\Big|_0^1 = -\frac{3}{8} + 1 - \frac{7}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$\int\limits_{LABO} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$