|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1  **Вопрос 1. Элементы теории множеств.**  **Множество** — совокупность некоторых объектов, объединённых по какому-либо признаку, каждый из этих объектов — **элемент данного множества.**  Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита (A, B, C …), а их элементы — малыми буквами (a, b, c …).  Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым**, обозначается символом Ø.  Запись A = {1,3,15} означает, что множество A состоит из 3х чисел 1, 3 и 15; запись A = {x: 0<x<2} означает, что множество A состоит из всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству 0<x<2.  Множество A называется **подмножеством** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Символически это обозначается A *http://nuclphys.sinp.msu.ru/mathan/img/incl.gif* B.  Говорят, что множества A и B **равны** или **совпадают**, и пишут A=B, если A *http://nuclphys.sinp.msu.ru/mathan/img/incl.gif* B и B *http://nuclphys.sinp.msu.ru/mathan/img/incl.gif* A (множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными).  **Объединением** множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. A U B = {x: x ∈ A или x ∈ B}.  **Пересечением** множеств A и B называется множество, каждый элемент которого принадлежит множеству A и множеству B. A ∩ B = {x: x ∈ A и x ∈ B}.  Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Примерами числовых множеств являются:  N = {1; 2; 3; ... ; n; ... } - множество натуральных чисел;  Zo = {О; 1; 2; ... ; n; ... } - множество целых неотрицательных чисел;  Z = {О; ±1; ±2; ... ; ±n; ... } - множество целых чисел;  Q = {m/n: m ∈ Z, n ∈ N} - множество рациональных чисел.  R - множество действительных чисел. Существует соотношение  N *http://nuclphys.sinp.msu.ru/mathan/img/incl.gif* Zo *http://nuclphys.sinp.msu.ru/mathan/img/incl.gif* Z *http://nuclphys.sinp.msu.ru/mathan/img/incl.gif* Q *http://nuclphys.sinp.msu.ru/mathan/img/incl.gif* R. | 2  **Вопрос 2. Понятие функции.**  Пусть даны два непустых множества Х и У. Соответствие f, которое каждому элементу х ∈ Х сопоставляет один и только один элемент y ∈ Y, называется **функцией** и записывается у = f(x), х ∈ Х или f : Х → Y. Говорят еще, что функция f **отображает** множество Х на множество У.  Например, соответствия f и g, изображенные на рисунке, а и б, являются функциями, а на рисунке в и г - нет. Множество Х называется *областью определения* функции f и обозначается D(f). Множество всех у ∈ У называется *множеством значений* функции f и обозначается Е(f).  Если элементами множеств Х и У являются действительные числа, то функцию f называют **числовой функцией**. Переменная х называется при этом аргументом или *независимой переменной*, а у – *функцией* или *зависимой переменной*. Относительно самих величин х и у говорят, что они находятся в *функциональной зависимости*.  *Графиком функции* у = f(x) называется множество всех точек плоскости Оху, для каждой из которых х является значением аргумента, а у - соответствующим значением функции.  Чтобы задать функцию у = f(x), необходимо указать правило, позволяющее, зная х, находить соответствующее значение y. Наиболее часто встречаются три способа задания функции: *аналитический, табличный, графический.*  **Четная функция:** f(-x)=f(x). **Нечетная функция:** f(-x)=-f(x) **Возрастающая:** f(x1)<f(x2) **Неубывающая:** f(x1)≤f(x2) **Убывающая:** f(x1)>f(x2) **Невозрастающая:** f(x1)≥f(x2) | 3  **Вопрос 3. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола.**  Простейшей кривой второго порядка является окружность. Напомним, что **окружностью** радиуса R с центром в точке Мо называется множество всех точек М плоскости, удовлетворяющих условию МоМ = R.  **Каноническое уравнение окружности: (x-xо)^2+(y-yо)^2=R^2**  **Эллипсом** называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.  **Каноническое уравнение эллипса: x^2/a^2+y^2/b^2=1**  Точки A1, A2, B1, B2 – *вершины* эллипса. Отрезки A1A2 и B1B2 — большая и малая *оси*. Числа a и b называются большой и малой *полуосями*.  Отношение с/a половины расстояния между фокусами к большой полуоси эллипса называется **эксцентриситетом эллипса** и обозначается буквой ε (степень выпуклости) ε =с/a  Прямые x=±a/ε называют **директрисами.** Если r - расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d - расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение r/d есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса: r/d= ε  **Гиперболой**, называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами. | | 4  **Вопрос 4. Бином Ньютона.**  **Бином Ньютона** — формула разложения произвольной натуральной степени двучлена (a+b)^n в многочлен  Треугольник Паскаля: |
| 5  **Вопрос 5. Числовая последовательность и ее предел. Свойства сходящихся последовательностей.**  Под **числовой последовательностью** x1, x2, x3, … , xn, … понимается функция xn=f(n) где xn — **общий** или **n-ый член последовательности**  Последовательность {xn} называется **ограниченной**, если существует такое число M>0, что для любого n ∈ N выполняется неравенство: |xn| ≤ M, в противном случае, последовательность **неограниченна** Последовательность {xn} называется **возрастающей (неубывающей)**, если для любого n выполняется неравенство X(n+1) > xn (X(n+1) ≥ xn). Все эти последовательности называются **монотонными.**  Если все элементы последовательности {xn} равны одному и тому же числу c, то ее называют *постоянной*.  *Рекуррентный способ задания числовых последовательностей*: задается начальный элемент x1 и правило определения n-го элемента по (n-1)-му. Xn=f(X(n-1)) таким образом x2=f(x1), x3=f(x2) и тд.  Число а называется **пределом последовательности** {хn}, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех n > N выполняется неравенство |xn-a| < ε  Последовательность {xn} имеет предел a (*сходится* к a) | 6  **Вопрос 6. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их св-ва.**  Последовательность {Xn} называется **бесконечно большой**, если для любого ε > 0 найдется N >0 для любого n ≥ N |Xn| ≥ ε, или  \lim\limits_{n\to\infty}x_{n}=\infty  При **бесконечно малой** |Xn| ≤ ε (предел равен 0)  Если {Xn} – Б.Б.П., то начиная с некоторого номера n определена последовательность {1/Xn}, которая является бесконечно малой (работает в обратную сторону, если {Xn} — Б.М.П. и ее элементы> 0  *Свойства Б.Б.П*: 1) Сумма Б.Б.П. одного знака есть Б.Б.П. этого же знака; 2) Б.Б.П. и ограниченной последовательности есть Б.Б.П.; 3) Произведение Б.Б.П. есть Б.Б.П.; 4) Произведение Б.Б.П. на константу есть Б.Б.П. (Аналогично для Б.М.П.) | 7  **Вопрос 7. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса.**  Последовательность {xn} называется **возрастающей (неубывающей)**, если для любого n выполняется неравенство X(n+1) > xn (X(n+1) ≥ xn).  Последовательность называется **монотонной**, если она является неубывающей, либо невозрастающей. Последовательность называется **строго монотонной**, если она является возрастающей, либо убывающей  **Теорема Вейерштрасса:** Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел. | | 8  **Вопрос 8. Число e.**  См. предыдущий вопрос. Число e играет важную роль в дифференциальном и интегральном исчислении, а также во многих других разделах математики. Поскольку показательная функция e^x интегрируется и дифференцируется в саму себя, логарифмы именно по основанию e принимаются как *натуральные*. |
| 4 | 3  **Каноническое уравнение гиперболы: x^2/a^2-y^2/b^2=1**  Точка (0;0) — **центр.** Точки A1 и A2 — **вершины.** Отрезок A1A2 — **действительная ось**, OA1 и OA2 — **действительные полуоси**. B1B2 — **мнимая ось**, OB1 и OB2 — **мнимые полуоси**. Прямоугольник со сторонами 2a и 2b — **основной прямоугольник гиперболы.** X=a правая ветвь, x=-a левая ветвь. Есть еще *асимптоты* L.  Гипербола называется **равносторонней**, если ее полуоси равны (a=b) Ее каноническое уравнение x^2-y^2=a^2  **Эксцентриситет** гиперболы ε =с/a  **Параболой** называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой**. Расстояние от фокуса F до директрисы называется **параметром** параболы и обозначается через р (р > О).  **Каноническое уравнение параболы: y^2=2px**  Уравнение **Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0**  всегда определяет: либо окружность (при А = С). либо эллипс (при А . С > О). либо гиперболу (при А·С < О). либо параболу (при А·С = О). При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) - в точку или мнимый эллипс (окружность). для гиперболы - в пару пересекающихся прямых. для параболы - в пару параллельных прямых. | 2  Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве D1 называются **монотонными** на этом множестве, а возрастающие и убывающие – **строго монотонными**. Интервалы, в которых функция монотонна, называются **интервалами монотонности**.  Функцию у = f(x), определенную на множестве D, называют **ограниченной** на этом множестве, если существует такое число М > О, что для всех х ∈ D выполняется неравенство |f(x)| ≤ М.  Функция у = f(x), определенная на множестве D, называется **периодической** на этом множестве, если существует такое число Т > О, что при каждом х ∈ D значение (х + Т) ∈ D и f(x + Т) = f(x). T — **период**.  функция ϕ(у) называется **обратной** к функции f(x) и записывается в следующем виде: х = ϕ(y) = f^-1(y). Про функции y = f(x) и х = ϕ(y) говорят, что они являются взаимно обратными. Любая **строго монотонная функция имеет обратную. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.**  Пусть функция y = f(u) определена на множестве D, а функция u = ϕ(x) на множестве D1, причем для x ∈ D1 соответствующее значение u = ϕ(x) ∈ D. Тогда на множестве D1 определена функция y=f(ϕ(x)), которая называется **сложной функцией.**  **Основными элементарными функциями** называются: Показательная(y=a^x), Степенная(y=x^a), Логарифмическая, Тригонометрическая, Обратная тригонометрическая. | | 1  **Теорема:** Не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2.  **Док-во.** Допустим, что существует рациональное число, представленное несократимой дробью m/n, квадрат которого равен 2. Тогда имеем: (m/n)^2 =2, т.е. m^2 =2n^2 . Отсюда следует, что m - четное число, т. е. m = 2k. Подставив, получим 4k^2 = 2n^2 … 2k^2 = n^2 • Отсюда следует, что число n - четное, т. е. n = 2l. Но тогда дробь m/n = 2k/2l сократима. Это противоречит допущению, что m/n дробь несократима.  Множество R действительных чисел обладает следующими свойствами**: 1**) Оно *упорядоченное*: для любых двух различных чисел а и b имеет место одно из двух соотношений а < b либо b < а. **2**) Множество R *плотное*: между любыми двумя различными числами а и Ь содержится бесконечное множество действительных чисел х, т. е. чисел, удовлетворяющих неравенству а < х < Ь. Так, если а < b, то одним из них является число (а + b)/2 **3**) Множество R *непрерывное*.  **Числовые промежутками** называют подмножества всех действительных чисел, имеющий следующий вид:  [a;b] = {x: a≤x≤b}, аналогично: (a;b), [a;b), (a;b], (-∞;b], (a;+ ∞) и т.д. Числа а и b называются соответственно левым и правым *концами* этих промежутков.  Пусть хо - любое действительное число. **Окрестностью** точки хо называется любой интервал (а; b), содержащий точку хо. В частности, интервал (хо - **ε**, хо + **ε**), где **ε** > О, называется **ε**-окрестностью точки хо. Число хо называется **центром**, а число **ε** - радиусом.  Если х ∈ (ха - **ε**; хо + **ε**), то выполняется неравенство хо - **ε** < х < хо+ **ε**, или, что то же, |x-x|< **ε**. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки х в **ε** -окрестность точки хо. |
| 8 | 7    Монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена с обеих сторон. Сходящаяся неубывающая последовательность ограничена сверху своим пределом. Сходящаяся невозрастающая последовательность ограничена снизу своим пределом. | 6 | | 5  - ε < xn-a < ε или a - ε < xn < a + ε это показывает, что элемент xn находится в ε-окрестности точки a.  **Сходящаяся последовательность имеет только один предел.** Последовательность, не имеющая предела, называется **расходящейся**. Постоянная последовательность xn = c имеет предел равный числу c. |
| 9  **Вопрос 9. Предел функции в точке и на бесконечности. Односторонние пределы.**    Пусть функция у = f(x) определена в промежутке (-∞; ∞). Число А называется **пределом функции f(x) при х → ∞**, если для любого положительного числа ε существует такое число М = М (ε) > О, что при всех , удовлетворяющих неравенству |x| > М выполняется неравенство |f(x) – А| < ε.  Пределы функции слева и справа называются *односторонними пределами*. | 10  **Вопрос 10. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.** | 11  **Вопрос 11. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций.** | 12  **Вопрос 12. Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы.** | |
| 13  **Вопрос 13. Сравнение функций. Эквивалентные функции.** | 14  **Вопрос 14. Точки разрыва функции и их классификация.** | 15  **Вопрос 15. Функции, непрерывные на отрезке. Теорема Вейерштрасса.** | 16  **Вопрос 16. Функции, непрерывные на отрезке. Теорема Коши о прохождении через ноль. Теорема Коши о промежуточном значении.**  См. предыдущий вопрос. | |
| 12 | 11 | 10    Работает в обратную сторону | 9 | |
| 16 | 15 | 14 | 13 | |
| 17  **Вопрос 17. Производная функции. Односторонние производные.** | 18  **Вопрос 18. Уравнение касательной и нормали к графику функции.** | 19  **Вопрос 19. Основные правила дифференцирования. Производные элементарных функций.** | 20  **Вопрос 20. Дифференциал функции.** | |
| 21  **Вопрос 21. Производные и дифференциалы высших порядков.** | 22  **Вопрос 22. Дифференцирование функции, заданной параметрически.** | 23  **Вопрос 23. Локальный экстремум функции. Теорема Ферма.**    Строгие максимумы и минимумы при < и >    [**Ле́мма**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B5%D0%BC%D0%BC%D0%B0)[**Ферма́**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B5%D1%80%D0%BC%D0%B0,_%D0%9F%D1%8C%D0%B5%D1%80) утверждает, что производная дифференцируемой функции в точке локального экстремума равна нулю. | 24  **Вопрос 24. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.** | |
| 20 | 19 | 18 | 17    См. вопрос 20 | |
| 24 | 23  Экстремумы на отрезке: | 22 | 21 | |
| 25  **Вопрос 25. Правила Лопиталя.** | 26  **Вопрос 26. Формулы Тейлора и Маклорена.** | 27  **Вопрос 27. Признаки монотонности функции.** | 28  **Вопрос 28. Необходимое и достаточное условие существования экстремума функции.** | |
| 29  **Вопрос 29. Направление выпуклости и точки перегиба кривой.+ассимптоты** | 30  **Вопрос 30. Комплексные числа. Формы записи комплексного числа. (31)** | 31  **Вопрос 31. Действия над комплексными числами. (30)** | 32  **Вопрос 32. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.** | |
| 28 | 27 | 26    Можно рассписать (как в лабе) | 25 | |
| 32 | 31 | 30 | 29 | |
| 33  **Вопрос 33. Основные методы интегрирования. (34)** | 34  **Вопрос 34. Интегрирование рациональных функций. (33)** | 35  **Вопрос 35. Определенный интеграл и его свойства.** | 35-2 | |
| 36 и 37  **Вопрос 36. Формула Ньютона-Лейбница.**    **Вопрос 37. Несобственные интегралы, их свойства и вычисление.** | 37 | 38  **Вопрос 38. Матрицы и операции над ними.** | 39  **Вопрос 39. Определители матриц второго и третьего порядка.** | |
| 35-2 | 35 | 34 | 33 | |
| 39 | 38 | 37 | 36 и 37 | |
| 40  **Вопрос 40. Векторы и линейные операции над ними.**  **Есть скалярные и векторные величины** | 41 и 42  **Вопрос 41. Линейная зависимость и независимость векторов.**  1) 2 вектора линейно зависимы, когда они коллинеарные  2) 3 вектора линейно зависимы, когда они компланарные  3) 4 вектора в 3хмерном пространстве линейно зависимы  См. вопрос выше  **Вопрос 42. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.** | 42 | 43  **Вопрос 43. Прямая на плоскости.** | |
| 44  **Вопрос 44. Уравнение плоскости в пространстве.**    **Теорема:** | 45  **Вопрос 45. Прямая в пространстве.** | 46-47  **Вопрос 46. Поверхности второго порядка. Метод сечения.** | 47-46 | |
| 43 | 42 | 41-42 | 40 | |
| 47-46  **Вопрос 47. Поверхности вращения.**  Пусть в пространстве задана некоторая линия ɣ и прямая d. Фигура, получающаяся при вращении линии ɣ вокруг прямой d, называется **поверхностью вращения**, при этом d называется **осью вращения**.  *Основные поверхности вращения*: тор, сфера, глобоид, эллипсоид вращения, параболоид вращения, гиперболоид вращения, коническая и цилиндрическая поверхности вращения.  См. вопрос выше (ур-я поверхностей). | 46-47 | 45 | 44 | |
| 48  **Вопрос 48. Цилиндрические поверхности.** | 49  **Вопрос 49. Конические поверхности.** | 50-1  **Вопрос 50. Эллипсоид, параболоиды, гиперболоиды.**  См. вопрос 46 (ур-я поверхностей) | 50-2 | |
| 50-3 |  |  |  | |
| 50-2 | 50-1 | 49 | 48    См. вопрос 46 (ур-я поверхностей) | |
|  |  |  | 50-3 | |