Типовой расчет по теме «Линейные операторы»

Выясните, являются ли линейными операторы $f: R^3 \to R^3$, заданные условиями а)–в).

В случае положительного ответа найдите:

1. матрицу линейного оператора f в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$;

2. ядро и область значений линейного оператора f.

3. собственные значения и собственные векторы оператора f.

Варианты

1) а) $f(\vec{x}) = (2x_1 + x_2 - 3x_3;\ 1;\ x_1 + x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$;

б) $f(\vec{x}) = (\vec{i}, \vec{x}) \cdot \vec{j}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость $x - \sqrt{3}z = 0$.

2) а) $f(\vec{x}) = (3x_1 - x_2 + x_3;\ 2x_2;\ -x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$;

б) $f(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$, $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$;

в) f – оператор поворота векторов пространства R^3 относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$.

3) а) $f(\vec{x}) = (x_1^2;\ x_1 - x_3;\ x_2 + x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$;

б) $f(\vec{x}) = \frac{(\vec{x}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{b})} \cdot \vec{a}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$, $\vec{a} = (1; -1; 0)$, $\vec{b} = (2; 1; 4)$;

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства R^3 относительно плоскости Oxz.

4) а) $f(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 - x_3;\ x_1 + x_2;\ -3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$;

б) $f(\vec{x}) = 2 \cdot (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$, $\vec{a} = (1; 0; -1)$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость $y + \sqrt{3}z = 0$.

5) а) $f(\vec{x}) = (5x_1;\ -x_2 + 3x_3;\ x_1 + 2x_2 + 4x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$;

б) $f(\vec{x}) = [\vec{a}, \vec{x}]$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$, $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$;

в) f – оператор поворота векторов пространства R^3 относительно оси Oy в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$.

6) а) $f(\vec{x})=\left(2x_1-x_3;\ x_2;\ x_3^2\right),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3$;

б) $f(\vec{x})=(\vec{j},\vec{x})\cdot\vec{i},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3$;

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства R^3 относительно плоскости $x-y=0$.

7) а) $f(\vec{x})=(1;\ x_1-x_2-x_3;\ 2x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3$;

б) $f(\vec{x})=3\cdot(\vec{a},\vec{x})\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3,\ \vec{a}=(1;-1;1)$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость $x+y=0$.

8) а) $f(\vec{x})=(x_2-3x_3;\ x_1+2x_2;\ x_1+x_2-x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3$;

б) $f(\vec{x})=\dfrac{(\vec{x},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{b})}\cdot\vec{a},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3,\ \vec{a}=(2;1;3),\ \vec{b}=(-1;0;1)$;

в) f – оператор поворота векторов пространства R^3 относительно оси Oz в отрицательном направлении на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

9) а) $f(\vec{x})=(x_1+2-x_3;\ x_2+4x_3;\ x_1-x_2+x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3$;

б) $f(\vec{x})=(\vec{i},\vec{x})\cdot\vec{k},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3$;

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства R^3 относительно плоскости $x-z=0$.

10) а) $f(\vec{x})=\left(x_1+x_2-4x_3;\ x_2+3x_3;\ x_3^2\right),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3$;

б) $f(\vec{x})=3\cdot(\vec{a},\vec{x})\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-2\vec{x},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3,\ \vec{a}=(1;2;-2)$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость Oxy.

11) а) $f(\vec{x})=(4x_1-2x_2;-2x_1+3x_2-2x_3;\ -2x_2+2x_3),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in \mathrm{R}^3$;

б) $f(\vec{x})=(\vec{k},\vec{x})\cdot\vec{i},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3$;

в) f – оператор поворота векторов пространства R^3 относительно оси Oy в отрицательном направлении на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

12) а) $f(\vec{x})=\left(2x_1^2;\ x_2+x_3;\ 3x_1-5x_3\right),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3$;

б) $f(\vec{x})=[\vec{a},\vec{x}],\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3,\ \vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на ось Ox.

13) а)

$f(\vec{x}) = (4x_1 - x_2 - x_3;\ x_1 + 2x_2 - x_3;\ x_1 - x_2 + 2x_3),\ \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathrm{R}^3;$

б) $f(\vec{x}) = \vec{x} - 6 \cdot (\vec{x}, \vec{a}) \cdot \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2},\ \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3,\ \vec{a} = (-1; -2; 1);$

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость Oyz.

14) а) $f(\vec{x}) = (x_1 + x_2;\ x_2 + 5;\ x_1 + 3x_2 - 2x_3),\ \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3;$

б) $f(\vec{x}) = 5 \cdot (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\ \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3,\ \vec{a} = (0; -4; 3);$

в) f – оператор поворота векторов пространства R^3 относительно оси Ox в положительном направлении на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

15) а) $f(\vec{x}) = (4x_1 + 5x_3;\ 7x_1 - 2x_2 + 9x_3;\ 3x_1 + 6x_3),\ \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathrm{R}^3;$

б) $f(\vec{x}) = (\vec{j}, \vec{x}) \cdot \vec{k},\ \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3;$

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства R^3 относительно плоскости Oyz.

16) а) $f(\vec{x}) = (x_1 + x_2^2;\ x_1 - x_2;\ x_2 + x_3),\ \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3;$

б) $f(\vec{x}) = \dfrac{(\vec{x}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{b})} \cdot \vec{a},\ \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3,\ \vec{a} = (2; 3; 1),\ \vec{b} = (-3; 2; -1);$

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на ось Oy.

17) а)

$f(\vec{x}) = (-3x_1 + 2x_2;\ -2x_1 + x_2;\ 15x_1 - 7x_2 + 4x_3),\ \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3;$

б) $f(\vec{x}) = (\vec{k}, \vec{x}) \cdot \vec{j},\ \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3;$

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость Oxz.

18) а) $f(\vec{x}) = (3x_1 - x_3;\ x_2^2 + x_3;\ x_1 + x_2),\ \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3;$

б) $f(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a},\ \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3,\ \vec{a} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k};$

в) f – оператор поворота векторов пространства R^3 относительно оси Ox в отрицательном направлении на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

19) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(x_1+x_2+x_3;\ x_1-x_2;\ -4\right),\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=-3\cdot\left(\vec{a},\vec{x}\right)\cdot\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}+2\vec{x},\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3,\ \vec{a}=\left(-1;-2;\ 2\right)$;

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства R^3 относительно плоскости $x+z=0$.

20) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(x_1+2;\ x_2-x_3;\ x_1+4x_3\right),\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=\left[\vec{a},\ \vec{x}\right],\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3,\ \vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на ось Oz.

21) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(2x_1+3x_3;\ x_1+x_2+x_3;\ -3x_1+4x_3\right),\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=-2\vec{x}+\left[\vec{a},\ \vec{x}\right],\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3,\ \vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость $y+\sqrt{3}z=0$.

22) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(2x_1-3x_2;\ -7;\ x_1+x_3\right),\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=6\cdot\left(\vec{a},\vec{x}\right)\cdot\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|^2}+\vec{x},\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3,\ \vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость $y-z=0$.

23) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(3x_2;\ x_1-2x_2;\ 2x_2+x_3\right),\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=\left[\vec{a},\ \vec{x}\right],\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3,\ \vec{a}=-3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$;

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства R^3 относительно плоскости $y-\sqrt{3}x=0$.

24) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(-2x_3;\ x_2+x_3;\ x_1^2\right),\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=\dfrac{\left(\vec{x},\vec{b}\right)}{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}\cdot\vec{a},\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3,\ \vec{a}=\left(-1;\ 3;\ 2\right),\ \vec{b}=\left(\ 2;\ 1;\ 0\right)$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость $x+z=0$.

25) а)
$f\left(\vec{x}\right)=\left(-10x_1+54x_2+36x_3;\ -x_2;\ -3x_1+18x_2+11x_3\right),\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=\left(\vec{a},\vec{x}\right)\cdot\vec{a}+\vec{x},\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3,\ \vec{a}=-4\vec{i}+\overrightarrow{3j}-2\vec{k}$;

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства R^3 относительно плоскости $y+z=0$.

26) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(x_1+2x_2-5x_3;\ 0;\ x_2+x_3\right),\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=\vec{x}-3\cdot\left(\vec{a},\vec{x}\right)\cdot\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|^2},\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3,\ \vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость $x+\sqrt{3}z=0$.

27) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(x_1+x_3^2;\ -x_2+x_3;\ x_1+x_2+4x_3\right),\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=\left[\vec{a},\ \vec{x}\right],\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3,\ \vec{a}=4\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$;

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства R^3 относительно плоскости $y-\sqrt{3}z=0$.

28) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(5x_1+x_2;\ 5x_2+x_3;\ 5x_3\right),\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=\dfrac{\left(\vec{x},\vec{b}\right)}{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}\cdot\vec{a},\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3,\ \vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость $y-z=0$.

29) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(x_1;\ 2x_3-3;\ x_2+5x_3\right),\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=\left[\vec{a},\vec{x}\right]-\left(\vec{a},\vec{x}\right)\cdot\vec{a},\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3,\ \vec{a}=\vec{i}-\vec{k}$;

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства R^3 относительно плоскости $x+\sqrt{3}y=0$.

30) а) $f\left(\vec{x}\right)=\left(4x_1-3x_2;\ x_1+2x_3;\ 0\right),\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3$;

б) $f\left(\vec{x}\right)=\dfrac{\left(\vec{x},\vec{b}\right)}{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}\cdot\vec{a},\ \vec{x}=\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3,\ \vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k},\ \vec{b}=3\vec{i}-5\vec{j}$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость $\sqrt{3}x+y=0$.