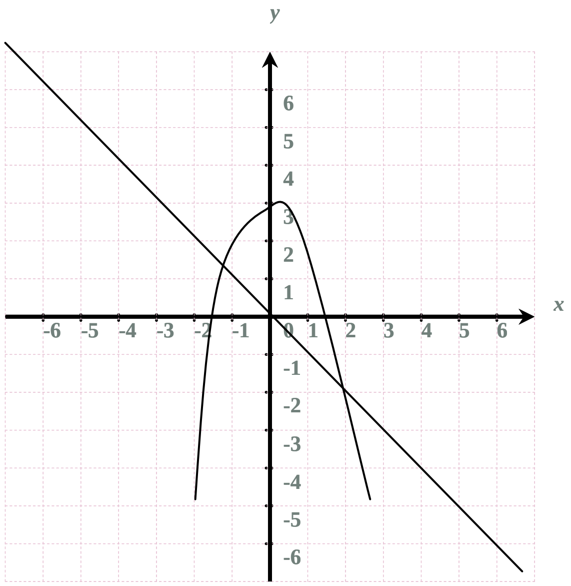
1.23) Представить двойной интеграл $\iint f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по y, если область интегрирования задана указанными линиями.

$D:\ y=3-x^2 \qquad y=-x$

Строим данную область.



Найдём абсциссы точек пересечения графиков.

$$3-x^2=-x \Rightarrow x^2-x-3=0 \Rightarrow D=1^2+4\cdot1\cdot3=13 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

$$x=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{3-y}=-y \Rightarrow 3-y=y^2 \Rightarrow y^2+y-3=0 \Rightarrow D=1^2+4\cdot3=13$$

$$y_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

Интеграл с внешним интегрированием по y запишется в виде:

$$\iint f(x,y)dxdy=\int\limits_{\frac{1-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}dx\int\limits_{3-x^2}^{-x}f(x,y)dy$$

Интеграл с внешним интегрированием по x запишется в виде:

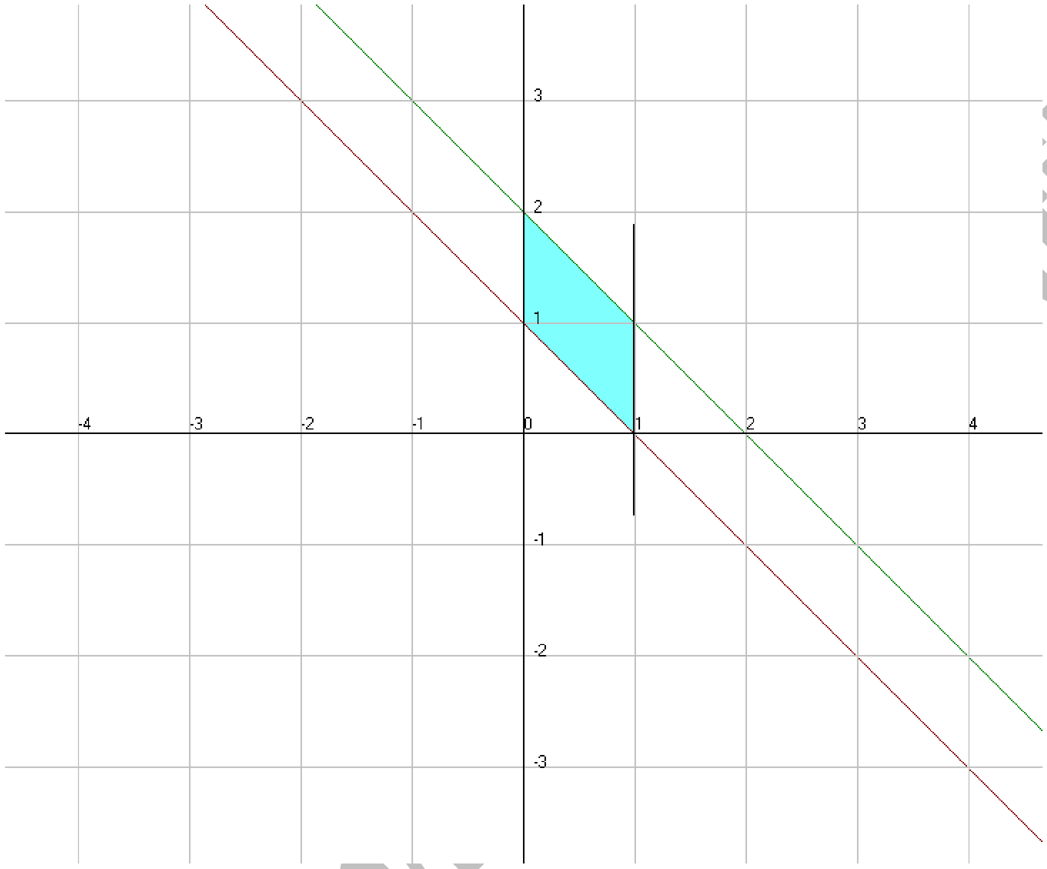
$$\iint f(x,y)dxdy=\int\limits_{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}dy\int\limits_{-y}^{\sqrt{3-y}}f(x,y)dx+\int\limits_{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}^{3}dy\int\limits_{-\sqrt{3-y}}^{\sqrt{3-y}}f(x,y)dx$$

2.23) Вычислить двойной интеграл по области Д, ограниченной указанными линиями.

Решение:

$$\iint\limits_{Д}(x^3+y)dxdy \qquad Д:\ x+y=1 \quad x+y=2 \quad x\le 1 \quad x\ge 0$$

Строим область Д:



$$\iint\limits_{Ä}=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{1-x}^{2-x}(x^3+y)dy=\int\limits_0^1 dx(x^3y+\frac{1}{2}y^2)\Big|_{1-x}^{2-x}=\int\limits_0^1 dx(x^3(2-x)+\frac{1}{2}(2-x)^2-x^3(1-x)-$$

$$-\frac{1}{2}(1-x)^2)=\int\limits_0^1 dx(2x^3-x^4+2-2x+\frac{1}{2}x^2-x^3+x^4-\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}x^2)=$$

$$=\int\limits_0^1(x^3+\frac{3}{2}-x)dx=(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+1=1,25$$

3.23) Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты.

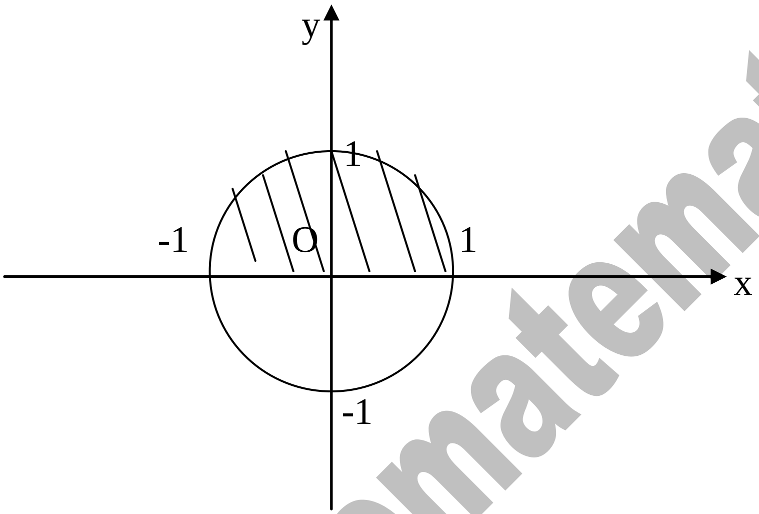
Решение:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$$

Имеем:

$$-1 \le x \le 1 \qquad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

$x^2 + y^2 = 1$ - окружность



Перейдем к полярным координатам

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$0 \le \varphi \le \pi \qquad 0 \le \rho \le 1$$

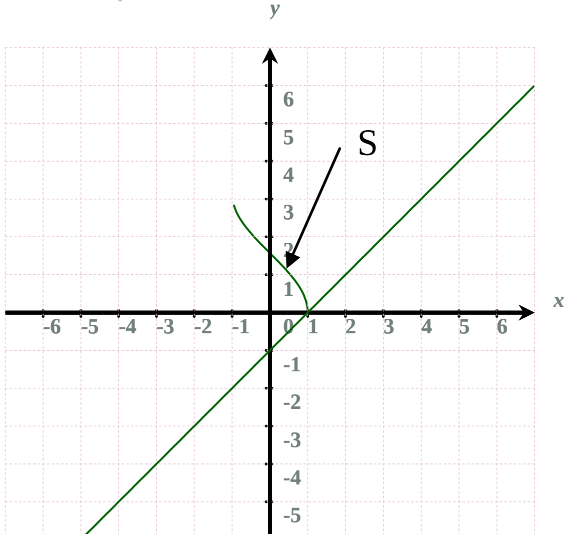
$$\int\limits_{Д} = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho = \int_0^{\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(1+\rho^2)^3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} d\varphi \cdot \sqrt{(1+\rho^2)^3}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} d\varphi\left(\sqrt{(1+1)^3} - \sqrt{(1+0)^3}\right) = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} d\varphi\left(\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3}\right) = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\cdot\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\pi$$

4.23) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

$$x = \cos y \qquad x \le y+1 \qquad x \ge 0$$

Строим данную фигуру



$$S=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x-1}^{\arccos x} dy=\int\limits_0^1(\arccos x-x+1)dx=\left|\begin{matrix}\arccos x=U\Rightarrow dU=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ dx=dV\Rightarrow V=x\end{matrix}\right|=$$

$$=\left.(x\arccos x-\frac{1}{2}x^2+x)\right|_0^1+\int\limits_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\left.(x\arccos x-\frac{1}{2}x^2+x-\sqrt{1-x^2})\right|_0^1=$$

$$=1\cdot\arccos 1-\frac{1}{2}\cdot 1^2+1-\sqrt{1-1}-0+\sqrt{1-0}=0-\frac{1}{2}+1+1=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

5.23) Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в декартовых координатах.

$$(x^2+y^2)^3=4a^2xy(x^2-y^2)$$

Перейдём к полярным координатам

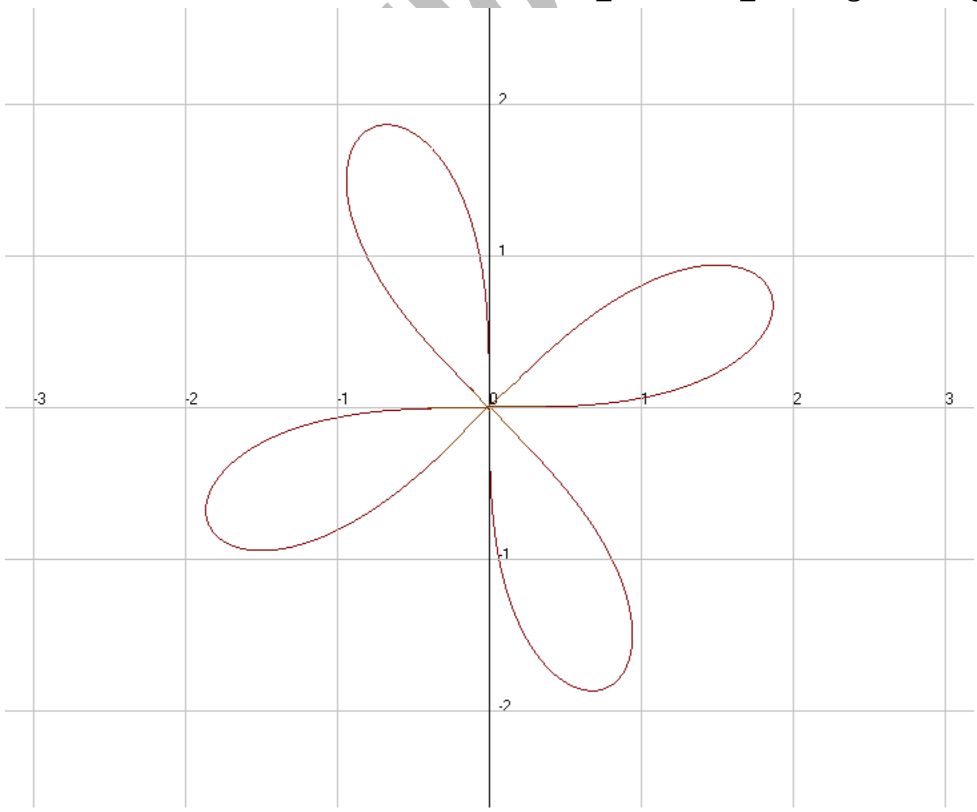
$$x=\rho cos\varphi \qquad y=\rho\sin\varphi$$

$$x^2+y^2=\rho^2 \qquad \rho^6=4a^2\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cdot(\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi)$$

$$\rho^6=4a^2\rho^4\cos\varphi\sin\varphi\cdot(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi) \quad \backslash:\rho^4$$

$$\rho^2=2a^2\sin 2\varphi\cdot\cos 2\varphi\Rightarrow\rho=a\sqrt{\sin 4\varphi}$$

$\rho\ge 0\Rightarrow\sin 4\varphi\ge 0$ Следовательно $-\dfrac{\pi}{2}\le 4\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow-\dfrac{\pi}{8}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{8}$



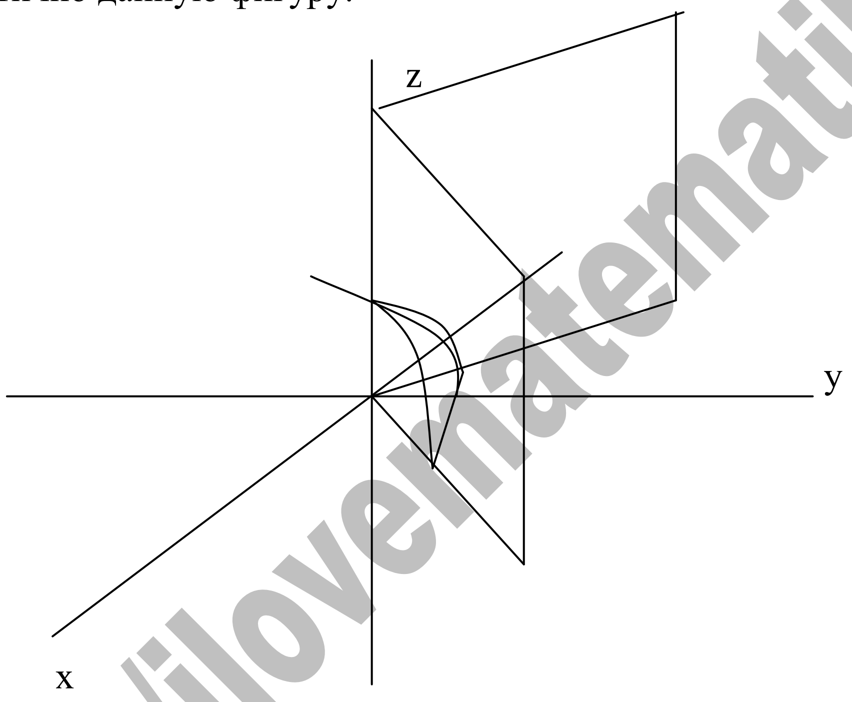
$$S=8\int_0^{\frac{\pi}{8}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 4\varphi}} \rho d\rho = 8\int_0^{\frac{\pi}{8}} d\varphi \cdot \frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^{a\sqrt{\sin 4\varphi}} = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 4\varphi d\varphi = -a^2\cos 4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} =$$

$$= -a^2(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = -a^2(0-1) = a^2$$

6.23) Вычислить объём тела, ограниченного заданными поверхностями.

$y=1-z^2 \quad y=x \quad y=-x \quad z\ge 0 \quad y\ge 0$

Строим схематично данную фигуру.



$$V=2\int_0^1 dy\int_0^y dx\int_0^{\sqrt{1-y}} dz = 2\int_0^1 \sqrt{1-y}dy\int_0^y dx = 2\int_0^1 y\sqrt{1-y}dy = \left| \begin{array}{l} 1-y=t^2 \Rightarrow -dy=2tdt \\ dy=-2tdt \\ y=0 \Rightarrow t=1 \\ y=1 \Rightarrow t=0 \end{array} \right| =$$

$$=2\int_1^0 (1-t^2)\cdot t\cdot(-2tdt) = -4\int_1^0 (t^2-t^4)dt = 4\int_0^1 (t^2-t^4)dt =$$

$$=4(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5)\Big|_0^1 = 4(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) = 4\cdot\frac{5-3}{15} = 4\cdot\frac{2}{15} = \frac{8}{15}$$