Министерство образования Республики Беларусь Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра электронных вычислительных машин

Д. В. Куприянова, И. В. Лукьянова, Ю. А. Луцик

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ И ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве пособия для специальности 1-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети»

УДК 004.31(075) ББК 32.973я7 К92

Рецензенты:

кафедра робототехнических систем Белорусского национального технического университета (протокол №5 от 27.12.2019);

заведующий лабораторией идентификации систем государственного научного учреждения «Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси» доктор технических наук, профессор А. А. Дудкин

Куприянова, Д. В.

К92

Арифметические и логические основы вычислительной техники : пособие /Д. В. Куприянова, И. В. Лукьянова, Ю. А. Луцик. – Минск : БГУИР, 2020. – 70 с. : ил.

ISBN 978-985-543-573-1.

Приведены контрольные вопросы для проверки знаний по теме занятия, примеры выполненных заданий и задания для выполнения на практических занятиях.

УДК 004.31(075) ББК 32.973я7

ISBN 978-985-543-573-1

[©] Куприянова Д. В., Лукьянова И. В., Луцик Ю. А., 2020

[©] УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2020

Введение

В пособии к каждой изучаемой теме приводится список контрольных вопросов, владение которыми необходимо для успешного выполнения практических заданий по теме занятия. Перед выполнением заданий по теме студент может ознакомиться с выполненными примерами, аналогичными тем заданиям, которые он будет выполнять. В решении примеров приводятся пояснения и ссылки на литературу, где рассматривается теоретический материал по теме.

Данное пособие может быть использовано студентами как на занятиях, так и при подготовке к ним.

Тема 1. Системы счисления и операции с числами

Контрольные вопросы

- 1. Что такое система счисления (c/c)?
- 2. Какая система счисления называется позиционной?
- 3. Какие категории систем счисления можно выделить?
- 4. Какие существуют способы перевода чисел из одной системы счисления в другую?
 - 5. Перечислите существующие критерии выбора системы счисления.

Арифметические операции над числами в различных системах счисления

Прежде чем приступать к выполнению практических заданий рекомендуется ознакомиться с материалом в [4, с. 10–22]. Следует помнить, что правила арифметики для всех позиционных систем счисления одинаковы.

Рассмотрим несколько примеров на сложение и вычитание чисел в различных системах счисления.

Пример 1. Выполнить сложение и вычитание чисел в двоичной системе счисления: $A_2=10010111$ и $B_2=01001101$.

$$\begin{array}{c} A_2 = 10010111 \\ \underline{B_2} = 01001101 \\ A_2 - B_2 = 01001010 \end{array} \qquad \begin{array}{c} A_2 = 10010111 \\ \underline{B_2} = 01001101 \\ A_2 + B_2 = 11100100 \end{array}$$

Пример 2. Выполнить сложение и вычитание чисел в восьмеричной системе счисления: $A_8 = 5726$ и $B_8 = 1267$.

$$A_8 = 5726$$
 $A_8 = 5726$ $B_8 = 1267$ $A_8 - B_8 = 4437$ $A_8 + B_8 = 7215$

Пример 3. Выполнить сложение и вычитание чисел в шестнадцатеричной системе счисления: $A_{16} = A7F6$ и $B_{16} = 4D69$.

$$\begin{array}{ccc} A_{16} = A7F6 & A_{16} = A7F6 \\ \underline{B_{16}} = 4D69 & \underline{B_{16}} = 4D69 \\ A_{16} - B_{16} = 5A8D & A_{16} = F55F \end{array}$$

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

Необходимо отметить, что для перевода целых и дробных чисел используются разные способы. В примерах используем универсальные методы — метод деления на основание системы счисления, в которую выполняется перевод, для целой части числа и метод умножения на основание системы счисления, в которую выполняется перевод, для дробной части числа. Необходимо отметить,

что все действия будут производиться в той системе счисления, из которой осуществляется перевод.

Пример 4. Выполнить перевод числа $A_{10} = 713,793$ из десятичной в двоичную систему счисления.

Старшая цифра нового целого числа определяется последним результатом деления, а дальше записываются остатки от деления, начиная с последнего. В дробной части числа старшей цифрой новой дроби (после запятой) будет целая часть от первого умножения, далее производится умножение только дробной части числа, а цифры, которые получаются в результате последующих умножений в целой части результата, будут определять последующие цифры дроби (слева направо).

В результате получено двоичное число $A_2 = 1011001001,110010110$.

Пример 5. Выполнить перевод числа $A_8 = 265$ из восьмеричной системы счисления в десятичную, используя разложение в ряд.

$$265_8 = 2 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 181_{10}$$
.

Пример 6. Выполнить перевод числа $A_2 = 10110101$ из двоичной системы счисления в четверичную. Перевод будет выполняться по основанию кратному степени двойки. Исходное число разобьем на диады, после чего запишем четверичный эквивалент каждой диады. В результате получим четверичное число:

$$10\ 11\ 01\ 01_2 = 2311_4$$
.

Пример 7. Выполнить перевод числа $A_4=2311$ из четверичной системы счисления в восьмеричную, используя метод деления на основание системы счисления. Число делим на основание новой системы счисления в старой системе счисления ($8=20_4$).

В результате деления мы получили три остатка от деления, теперь запишем результат перевода числа из одной системы счисления в другую: $A_8 = 265$.

Пример 8. Выполнить перевод числа $A_{10} = 181$ в шестнадцатеричную систему счисления. Для перевода числа использовать метод деления на основание системы счисления.

$$\begin{array}{c|cccc}
181 & |\underline{16} \\
\underline{16} & 11 \\
21 & & B \\
\hline
5 & & 5
\end{array}$$

В результате деления получилось два остатка от деления, результат перевода числа: $A_{16} = B5$.

Практические задания

- 1. Вычислить сумму и разность чисел в указанной системе счисления:
- a) $A_2 = 1001,0010; B_2 = 0101,1011;$
- б) $A_2 = 1010,10001$; $B_2 = 0101,01010$;
- B) $A_2 = 10101,0101$; $B_2 = 01101,1001$;
- Γ) $A_4 = 2232,13$; $B_4 = 1312,12$;
- д) $A_4 = 2312,231$; $B_4 = 1232,313$;
- e) $A_8 = 5421,72$; $B_8 = 1463,16$;
- ж) $A_8 = 4576,17$; $B_8 = 2541,75$;
- 3) $A_{16} = 94A,5FE; B_{16} = 5C7,B45;$
- и) $A_{16} = A23F,E8$; $B_{16} = 3CA9,5B$;
- κ) $A_8 = 4712,26$; $B_8 = 1561,72$.
- 2. Перевести числа, заданные в десятичной системе счисления, в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления методом деле-

ния и умножения на основание системы счисления, в которую выполняется перевод. Проверить правильность выполненного перевода чисел, для этого перевести полученный результат обратно в десятичную систему счисления.

e) $A_{10} = 802,299;$
ж) $A_{10} = 658,315;$
3) $A_{10} = 413,718;$
и) $A_{10} = 813,922;$
κ) $A_{10} = 592,712$.

Тема 2. Коды чисел

Контрольные вопросы

- 1. Какие виды кодов чисел существуют?
- 2. Как заменить операцию вычитания операцией сложения?
- 3. Что такое дополнение числа?
- 4. Как записать число из естественной формы записи в дополнительном коде?
- 5. Как записать число из естественной формы записи в обратном коде?

Сложение чисел с фиксированной запятой в дополнительном и обратном коде

Прежде чем приступать к выполнению практического задания, рекомендуется ознакомиться с материалом в [4, с. 22–25].

Пример 1. Представить заданные числа в прямом, обратном и дополнительном коде:

$$A_2 = 10110110$$
 $A_{10} = 3759$ $A_8 = 5723$ $A_{16} = A75C$ $B_2 = -10110110$ $B_{10} = -3759$ $B_8 = -5723$ $A_{16} = -A75C$ Прямой код Обратный код Дополнительный код $[A_2]_{\rm np} = 0.10110110$ $[A_2]_{\rm oбp} = 0.10110110$ $[A_2]_{\rm np} = 1.10110110$ $[B_2]_{\rm np} = 1.01001001$ $[B_2]_{\rm np} = 1.01001010$ $[B_1]_{\rm np} = 0.3759$ $[A_{10}]_{\rm np} = 0.3759$ $[A_{10}]_{\rm np} = 9.3759$ $[A_{10}]_{\rm ofp} = 9.6240$ $[A_{10}]_{\rm np} = 9.6241$ $[A_8]_{\rm np} = 0.5723$ $[A_8]_{\rm np} = 7.5723$ $[A_8]_{\rm ofp} = 7.2054$ $[A_8]_{\rm np} = 0.475C$ $[A_{16}]_{\rm np} = 0.475C$ $[A_{16}]_{\rm np} = 0.475C$ $[A_{16}]_{\rm np} = F.5843$ $[A_{10}]_{\rm np} = F.5844$

Пример 2. Выполнить сложение чисел $A_2 = 1001101$ и $B_2 = 0100011$ в дополнительном коде. Здесь и далее (в пределах темы 2) сложение выполнять при всех случаях сочетания знаков слагаемых:

B) A < 0, B > 0;

 Γ) A < 0, B < 0.

a)
$$[A]_{\text{доп}} = 0.1001101$$

 $[B]_{\text{доп}} = 0.0100011$
 $[A+B]_{\text{доп}} = 0.1110000$
B) $[A]_{\text{доп}} = 1.0110011$
 $[B]_{\text{доп}} = 1.0110011$
 $[B]_{\text{доп}} = 0.0100011$
 $[A+B]_{\text{доп}} = 1.1011101$
 $[A+B]_{\text{доп}} = 1.1010110$
 $[A+B]_{\text{доп}} = 1.1010110$
 $[A+B]_{\text{доп}} = 1.101010000$
 $[A+B]_{\text{доп}} = 1.10010000$

б) A > 0, B < 0;

a) A > 0, B > 0;

В примерах «б» и «г» выделенный серым цветом разряд (единица) выходит за пределы разрядной сетки и отбрасывается.

Пример 3. Выполнить сложение чисел $A_2 = 0,010010$ и $B_2 = 0,101101$ в обратном коде.

a)
$$[A]_{\text{oбp}} = 0.010010$$

 $\underline{[B]_{\text{oбp}} = 0.101101}$
 $[A+B]_{\text{oбp}} = 0.111111$

б)
$$[A]_{\text{oбp}} = 0.010010$$

 $\underline{[B]_{\text{oбp}}} = 1.010010$
 $[A+B]_{\text{oбp}} = 1.100100$

B)
$$[A]_{\text{oбp}} = 1,101101$$

 $\underline{[B]_{\text{oбp}}} = 0,101101$
 $\underline{[A+B]_{\text{oбp}}} = 10,011010$
 $\underline{\qquad \qquad } 1$
 $0,011011$

$$\Gamma) \quad [A]_{\text{oбp}} = 1,101101$$

$$\underline{[B]_{\text{oбp}}} = 1,010010$$

$$\underline{[A+B]_{\text{oбp}}} = 10,111111$$

$$\underline{\qquad \qquad } 1$$

$$1,000000$$

В примерах «б» и «г» разряд (единица) выходит за пределы разрядной сетки и в случае обратного кода выполняется циклический перенос с добавлением единицы в младший разряд.

Пример 4. Выполнить сложение чисел $A_2 = 101101$ и $B_2 = 110001$ в обратном модифицированном коде.

а)
$$[A]_{\text{обр}}^{\text{м}} = 00.101101$$

$$\underline{[B]_{\text{обр}}^{\text{м}} = 00.110001}$$
 $[A+B]_{\text{обр}}^{\text{м}} = 01.011110$
(переполнение)

В) $[A]_{\text{обр}}^{\text{м}} = 11.010010$

$$\underline{[B]_{\text{обр}}^{\text{м}} = 00.110001}$$
 $[A+B]_{\text{обр}}^{\text{м}} = 100.000011$

$$\underline{00.000100}$$

6)
$$[A]_{\text{oбp}}^{\text{M}} = 00.101101$$

 $\underline{[B]_{\text{oбp}}^{\text{M}} = 11.001110}$
 $\underline{[A+B]_{\text{oбp}}^{\text{M}} = 11.111011}$

$$\Gamma$$
) $[A]_{\text{обр}}^{\text{M}} = 11.010010$
 $\underline{[B]_{\text{обр}}^{\text{M}} = 11.001110}$
 $[A+B]_{\text{обр}}^{\text{M}} = 110.100000$
(переполнение)

В примерах «а» и «г» было зафиксировано переполнение разрядной сетки, признаком которого является различие значений знаковых разрядов (01 или 10).

Пример 5. Выполнить сложение чисел $A_2 = 101101$ и $B_2 = 111001$ в дополнительном модифицированном коде.

а)
$$[A]_{\text{доп}}^{\text{M}} = 00.101101$$

$$\underline{[B]_{\text{доп}}^{\text{M}} = 00.111001}$$
 $[A+B]_{\text{доп}}^{\text{M}} = \overline{01.101000}$
(переполнение)

в) $[A]_{\text{доп}}^{\text{M}} = 11.010011$

$$\underline{[B]_{\text{доп}}^{\text{M}} = 00.111001}$$
 $[A+B]_{\text{доп}}^{\text{M}} = 100.001100$
—отбрасывается

б)
$$[A]_{\text{доп}}^{\text{M}} = 00.101101$$

 $\underline{[B]_{\text{доп}}^{\text{M}} = 11.000111}$
 $[A+B]_{\text{доп}}^{\text{M}} = 11.110100$

$$[A]_{\text{доп}}^{\text{M}} = 11.010011$$
 $[B]_{\text{доп}}^{\text{M}} = 11.000111$
 $[A+B]_{\text{доп}}^{\text{M}} = 110.011010$
(переполнение)

В примерах «а» и «г» знаковые разряды различаются (01 или 10), это свидетельствует о наличии переполнения разрядной сетки.

Практическое задание

Вычислить сумму чисел в обратном и дополнительном модифицированном коде при всех случаях сочетания знаков слагаемых:

а) A = 11110011, B = 11001111; б) A = 10110001, B = 10111101; в) A = 11011111, B = 01110111; г) A = 11101101, B = 00110010; д) A = 10101111, B = 00011011; е) A = 00001001, B = 11001111; ж) A = 00000111, B = 11111101; и) A = 00000001, B = 01101100; к) A = 00011110, B = 01111100.

Тема 3. Формы представления чисел. Числа с фиксированной и плавающей запятой. Сложение чисел с плавающей запятой

Контрольные вопросы

- 1. Приведите общую форму записи числа с фиксированной запятой.
- 2. Приведите общую форму записи числа с плавающей запятой.
- 3. Какое число называется нормализованным?
- 4. Какие варианты денормализации возможны при выполнении арифметических операций над числами с плавающей запятой?
- 5. Приведите пример классической разрядной сетки для чисел с плавающей запятой (мантисса, порядок).
- 6. Приведите пример разрядной сетки используемой в ЭВМ для чисел с плавающей запятой (мантисса, характеристика).
- 7. Приведите последовательность действий при сложении чисел с плавающей запятой.

Сложение чисел с плавающей запятой

Пример 1.
$$M_A = +0.01010, \quad p_A = +101;$$
 $M_B = +0.10101, \quad p_B = +010.$
$$[M_A]_{\text{доп}} = 0.01010.$$

$$[M_B]_{\text{доп}} = 0.10101.$$
 Разность порядков $p = [p_A]_{\text{доп}} + [-p_B]_{\text{доп}} = 0.101$ $\frac{1.110}{1.0.011} > 0$

Так как разность порядков $[p_A - p_B]_{\text{доп}} > 0$, то сдвигу подвергается мантисса M_B . При каждом сдвиге мантиссы на один разряд из положительной разности порядков производим последовательное вычитание единицы до тех пор, пока в результате не будет получен ноль (т. е. порядки чисел A и B не будут выравнены):

$$[M_B]_{\text{доп}} = 0,10101$$
 0.011 $[-1]_{\text{доп}} = \frac{1.111}{0.010} \neq 0$ $[M_B]_{\text{доп}} = 0,0010101$ $[-1]_{\text{доп}} = \frac{1.111}{0.001} \neq 0$ $[M_B]_{\text{доп}} = 0,00010101$ $[-1]_{\text{доп}} = \frac{1.111}{0.000} \neq 0$ $[-1]_{\text{доп}} = \frac{1.111}{0.000} = 0$

Порядки чисел A и B выравнены (мантисса M_B числа B сдвинута). Теперь можно выполнять сложение мантисс M_A и M_B .

$$[M_A]_{\text{доп}} = 0,01010$$
 $[M_B]_{\text{доп}} = 0,00010$ 101 $[M_{A+B}]_{\text{доп}} = 0,01100$ 101 — произошла денормализация результата.

При этом порядок суммы равен $p_{A+B} = \max(p_A, p_B) = p_A = +101$, $[p_{A+B}]_{\text{доп}} = 0.101$. Так как полученный результат денормализован (вправо), то необходимо выполнить операцию его нормализации (сдвиг $[M_{A+B}]_{\text{доп}}$ влево). При каждом сдвиге мантиссы порядок результата $[p_{A+B}]_{\text{доп}}$ уменьшается на единицу (т. к. мантисса увеличивается в два раза):

$$[M_{A+B}]_{\text{доп}} = 0,01100 \ 101$$
 $[p_{A+B}]_{\text{доп}} = 0.101$ $0,11001 \ 010$ $[p_{A+B}]_{\text{доп}} = 0.101$ $[-1]_{\text{доп}}$

После выполнения операции округления мантисса результата будет иметь вид $[M_{A+B}]_{\text{поп}} = 0,11001$.

Далее представим полученный результат в классической разрядной сетке:

<u>0 11001</u> <u>0 100</u>

Характеристика (смещенный порядок) p' = 7 + 3 = 10. Результат сложения в разрядной сетке ЭВМ имеет следующий вид (после нормализации мантиссы):

Полученный результат представим в разрядной сетке ЭВМ:

0 1010 10010

Пример 2.
$$M_A$$
 = -0,11110, p_A = -0001; M_B = -0,11111, p_B = +0010.

Данный пример выполним в модифицированном дополнительном коде.

$$\begin{bmatrix} M_A \end{bmatrix}_{\text{ДОП}}^{\text{МОД}} = 1,00010.$$
 $\begin{bmatrix} M_B \end{bmatrix}_{\text{ДОП}}^{\text{МОД}} = 1,00001.$

Разность порядков
$$p = [p_A]_{\text{доп}} + [-p_B]_{\text{доп}} = 1.1111$$
 $\frac{1.1110}{1.1101} < 0$

Так как разность порядков $[p_A - p_B]_{\text{доп}} < 0$, то сдвигу подвергается мантисса M_A . В этом случае при каждом сдвиге мантиссы числа A на один раз-

ряд к отрицательной разности порядков производим последовательное добавление единицы до тех пор, пока в результате не будет получен нуль (т. е. порядки чисел A и B не будут выравнены).

$$[M_A]_{\text{доп}}^{\text{мод}} = 11,00010$$
 1.1101
$$[+1]_{\text{доп}} = \underline{0.0001}$$

$$[M_A]_{\text{доп}}^{\text{мод}} = 11,100010$$
 1.1110 $\neq 0$
$$[M_A]_{\text{доп}}^{\text{мод}} = 11,1100010$$

$$[+1]_{\text{доп}} = \underline{0.0001}$$
 1.1111 $\neq 0$
$$[M_A]_{\text{доп}}^{\text{мод}} = 11,11100010$$

$$[+1]_{\text{доп}} = \underline{0.0001}$$

$$[+1]_{\text{доп}} = \underline{0.0001}$$

$$[0.0000] = 0$$

Порядки чисел A и B выравнены, далее выполняем сложение мантисс M_A и M_B :

$$[M_A]_{\text{доп}}^{\text{мод}} = 11,11100 010$$

 $[M_B]_{\text{доп}}^{\text{мод}} = \underline{11,00001}$

 $[M_{A+B}]_{\text{доп}}^{\text{мод}} = 110,11101\ 010$ — произошла денормализация (переполнение разрядной сетки) результата.

Как и в предыдущем примере, порядок суммы равен $p_{A+B} = \max(p_A, p_B) = p_B = +0010$, $[p_{A+B}]_{\text{доп}} = 0.0010$.

Как и ранее, выполним операцию нормализации $[M_{A+B}]_{\text{доп}}^{\text{мод}}$. В примере при каждом сдвиге (вправо) мантиссы результата порядок результата $[p_{A+B}]_{\text{доп}}$ увеличивается на единицу (т. к. мантисса результата уменьшается в два раза):

$$\begin{bmatrix} M_{A+B} \end{bmatrix}_{\text{доп}}^{\text{мод}} = 10,11101\ 010$$
 $\begin{bmatrix} p_{A+B} \end{bmatrix}_{\text{доп}} = 0.0010$ $\frac{0.0001}{0.0011}$ $\begin{bmatrix} +1 \end{bmatrix}_{\text{доп}}$

После выполнения операции округления (например, по дополнению) мантисса результата будет иметь вид:

$$[M_{A+B}]_{\text{поп}}^{\text{мод}} = 11,01111.$$

Далее представим полученный результат в классической разрядной сетке:

Характеристика (смещенный порядок) p' = 7 + 2 = 9. Результат сложения в разрядной сетке ЭВМ имеет следующий вид (после нормализации мантиссы):

$$\begin{bmatrix} M_{A+B} \end{bmatrix}_{\text{доп}}^{\text{мод}} = 11,01110 \ 1010 \ \begin{bmatrix} p_{A+B} \end{bmatrix}_{\text{доп}} = 0.0011 \ 10,11101 \ 0100 \ \begin{bmatrix} 1.1111 \ 0.0010 \ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}_{\text{доп}}$$

Полученный результат представим в разрядной сетке ЭВМ:

<u>1 10001</u> <u>00011</u>

Пример 3. Выполнить преобразование числа с плавающей запятой С2290000 из формы представления его в ЭВМ в естественную форму записи.

Запишем число *C*2290000 (в памяти число занимает 4 байта, это тип числа с плавающей запятой одинарной точности) в двоичном виде:

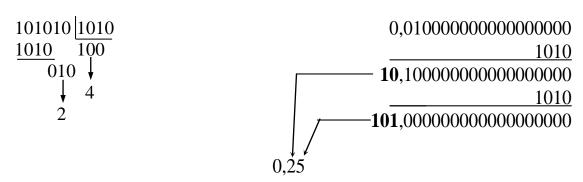
3десь 1 — знак числа, 2 — характеристика (132), 3 — мантисса (нормализованная).

Порядок числа p = 132 - 127 = 5.

Мантисса $\underline{1,01010}$ 010000000000000000000

Здесь 1 – целая, 2 – дробная части.

Выполним перевод числа из двоичной системы счисления в десятичную.



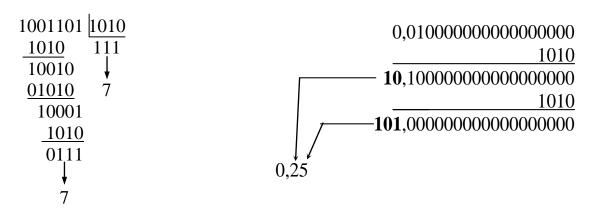
Таким образом, мы получили, что число C2290000 в естественной (десятичной) форме записи будет равно -42,25.

Пример 4. Выполнить преобразование числа с плавающей запятой 429А8000 из формы представления его в ЭВМ в естественную форму записи.

Как и в предыдущем примере запишем число 429А8000 в двоичном виде:

Здесь 1 – целая, 2 – дробная части.

Выполним перевод числа из двоичной системы счисления в десятичную.



Таким образом, мы получили, что число C2290000 в естественной (десятичной) форме записи будет равно +77,25.

Практические задания

- 1. Выполнить сложение чисел с плавающей запятой и записать результат в разрядную сетку:
 - a) $M_A = -0.10010, p_A = -0001;$ $M_B = -0.10101, p_B = -0100;$
 - B) $M_A = +0.10110, p_A = -0001;$ $M_B = -0.11001, p_B = +0010;$
 - д) $M_A = -0.10110, p_A = -101;$ $M_B = -0.11111, p_B = -001;$
 - ж) $M_A = +0,11110, p_A = +101;$ $M_B = -0,10100, p_B = +010;$
 - и) $M_A = +0.11010, p_A = +0001;$ $M_B = +0.10101, p_B = +0011;$

- б) $M_A = +0,11001, p_A = +0010;$ $M_B = +0,11111, p_B = +0110;$
- r) $M_A = -0.11100, p_A = +0001;$ $M_B = -0.10100, p_B = -0001;$
- e) $M_A = -0.11110$, $p_A = -010$; $M_B = -0.11101$, $p_B = +010$;
- 3) $M_A = -0.11010, p_A = -0001;$ $M_B = -0.11011, p_B = +0001;$
- κ) $M_A = -0.10011, p_A = +0010;$ $M_B = +0.11101, p_B = -0010.$
- 2. Выполнить преобразование числа с плавающей запятой из формы представления его в ЭВМ в естественную форму записи.
 - а) C1240000; б) C2060000; в) 42С68000; г) 42870000; д) 42590000;
 - е) С2010000; ж) С2В18000; з) 42СВ000; и) 429Г0000; к) 42СА8000.
- 3. Выполнить преобразование числа с плавающей запятой из естественной формы записи в форму представления его в ЭВМ.
 - a) +22,25;
- б) +77,75;
- B) -88,25;
- г) +96**,**5;
- $_{\rm J}$) -65.5;

- e) +100,5;
- κ) -93,75;
- 3) +15,625;
- и) -44,25;
- к) +88,25.

Тема 4. Машинные методы умножения чисел

Контрольные вопросы

- 1. Что такое частичное произведение и частичная сумма?
- 2. По какому признаку разделяются четыре алгоритма умножения на группы?
 - 3. В каких алгоритмах умножения выполняется сдвиг частичных сумм?
- 4. В каких алгоритмах умножения выполняется сдвиг частичных произведений?
- 5. Какие основные элементы образуют структурную схему устройства умножения?

Умножение чисел в прямых кодах

Прежде чем приступать к выполнению практического задания рекомендуется ознакомиться с материалом в [4, с. 37–42].

Рассмотрим примеры умножения чисел алгоритмами умножения А, Б, В и Г.

Пример 1. Выполнить умножение двух чисел Mh = 0,10101 и Mt = 0,10111, используя алгоритм A.

$M_H = 0,10$	0101	$M_T = 0.10111$
		b_5 b_1
0,00000		
0,10101		$\Pi_1 = M H \cdot b_1$
0,10101		Σ_1
0,01010	1	$\sum_{1}^{2} \cdot 2^{-1}$
0,10101		$\Pi_2 = M_H \cdot b_2$
0,11111	1	\sum_2^-
0,01111	11	$\sum_{2}^{2} \cdot 2^{-1}$
0,10101		$\overline{\Pi}_3^- = \mathrm{Mh} \cdot b_3$
1,00100	11	\sum_3
0,10010	011	$\sum_{3}^{3} \cdot 2^{-1}$
0,00000		$\Pi_4 = M_{H} \cdot b_4$
0,10010	011	\sum_4
0,01001	0011	$\sum_{4}^{1} \cdot 2^{-1}$
0,10101		$\Pi_5 = \mathrm{Mh} \cdot b_5$
0,11110	0011	Σ_5
0,01111	00011	$\sum_{5}^{6} \cdot 2^{-1} = M_{\rm H} \cdot M_{\rm T}$
		- -

В результате получаем $MH \cdot MT = +0.0111100011$.

Пример 2. Выполнить умножение двух чисел Mh = 0,10101 и Mt = 0,10111, используя алгоритм F.

$$\begin{array}{c} \mathsf{MH} = 0{,}10101 & \mathsf{MT} = 0{,}10111 \\ b_5 & b_1 & \\ \\ \hline 0{,}00000000000 & \\ \hline 0{,}0000010101 & \\ \hline 0{,}00000101010 & \\ \hline 0{,}00001011010 & \\ \hline 0{,}0001010100 & \\ \hline 0{,}00010010011 & \\ \hline 0{,}00010010011 & \\ \hline 0{,}0010010010 & \\ \hline 0{,}0101010000 & \\ \hline 0{,}0111100011 & \\ \hline \end{array}$$

В результате получаем $MH \cdot MT = +0.0111100011$.

Пример 3. Выполнить умножение двух чисел Mh = 0,10101 и MT = 0,10111, используя алгоритм B.

$M_H = 0.10101$	$M_T = 0.10111$
	b_5 b_1
0,0000000000	\sum_0 сдвиг
0,0000000000	$\sum_0 \cdot 2$
0,0000010101	$\Pi_1 = M_{H} \cdot b_{5}$
0,0000010101	Σ_1
0,0000101010	$\Sigma_1 \cdot 2$
0,0000000000	$\Pi_2 = M_{H} \cdot b_4$
0,0000101010	Σ_2
0,0001010100	$\Sigma_2 \cdot 2$
0,0000010101	$\Pi_3 = M_H \cdot b_3$
0,0001101001	Σ_3
0,0011010010	$\sum_{3}^{5} \cdot 2$
0,0000010101	$\Pi_4 = \mathrm{M}_{\mathrm{H}} \cdot b_2$
0,0011100111	Σ_4
0,0111001110	$\sum_4 \cdot 2$
0,0000010101	$\Pi_5 = \mathrm{M}_{\mathrm{H}} \cdot b_1$
0,0111100011	Σ_5

В результате получаем $MH \cdot MT = +0.0111100011$.

Пример 4. Выполнить умножение двух чисел Mh = 0,10101 и Mt = 010111, используя алгоритм Γ .

$$\begin{array}{c} \mathbf{M}_{\mathrm{H}} = 0{,}10101 & \mathbf{M}_{\mathrm{T}} = 0{,}10111 \\ b_{5} & b_{1} & \\ \hline \\ 0{,}00000000000 & \\ \hline \\ 0{,}01010100000 & \\ \hline \\ 0{,}01010100000 & \\ \hline \\ 0{,}0000000000 & \\ \hline \\ 0{,}0101010000 & \\ \hline \\ 0{,}0110100100 & \\ \hline \\ 0{,}0111001110 & \\ \hline \\ 0{,}00111001110 & \\ \hline \\ 0{,}001111001110 & \\ \hline \\ 0{,}0111100011 & \\ \hline \\ 0{,}0111100011 & \\ \hline \\ \hline \\ 0{,}0111100011 & \\ \hline \\ \hline \\ 0{,}0111100011 & \\ \hline \\ \hline \\ \end{array}$$

В результате получаем $MH \cdot MT = +0.0111100011$.

В алгоритме Γ производится сдвиг частичных произведений вправо. В этом случае в освобождающийся разряд (справа от запятой) заносится значение, совпадающее со знаковым разрядом.

Практическое задание

Выполнить умножение чисел, используя алгоритмы умножения А, Б, В и Г:

- a) $M_H = 0.10001$, $M_T = 0.10111$;
- б) $M_H = 0,10101, M_T = 0,11001;$
- B) MH = 0.00110, MT = 0.11101;
- Γ) MH = 0,11111, MT = 0,11011;
- д) $M_H = 0.01010$, $M_T = 0.00110$;
- e) $M_H = 0.01110$, $M_T = 0.11111$;
- ж) $M_H = 0.11011$, $M_T = 0.01111$; 3) $M_H = 0.11100$, $M_T = 0.11111$;
- $^{\prime\prime}$) MH = 0,00100, MT = 0,10000;
- κ) MH = 0,01110, MT = 0,01011.

Тема 5. Умножение с хранением переносов

Контрольные вопросы по теме

- 1. В чем основное отличие умножения с хранением переносов от четырех рассмотренных ранее обычных методов умножения?
- 2. В чем состоит преимущество умножения с хранением переносов от рассмотренных ранее методов умножения?
- 3. Какие изменения необходимо внести в схему, чтобы она реализовывала умножение с хранением переносов?
- 4. Какой алгоритм умножения (А, ..., Г) используется при умножении с хранением переносов? Ответ обоснуйте.
- 5. Обязательно ли на последнем шаге выполнять умножение с учетом переносов?

Умножение с хранением переносов

Прежде чем приступать к выполнению практического задания, рекомендуется ознакомиться с материалом в [4, с. 42–43].

Рассмотрим пример умножения двух чисел с хранением переносов. Применяется алгоритм А.

$M_H=0,1$	11101	$M_T = 0,10111$
		b_5 b_1
0,00000		Σ_0
0,00000		перенос
0,11101		$\Pi_1 = \mathrm{M}_{\mathrm{H}} \cdot b_1$
0,11101		Σ_1
0,00000		перенос
0,00110	1	$\sum_{1} \cdot 2^{-1}$
0,11101		$\Pi_2 = M_{\rm H} \cdot b_2$
0,11011	1	Σ_2
0,00100		перенос
0,01101	11	$\Sigma_2 \cdot 2^{-1}$
0,11101		$\Pi_3 = M_H \cdot b_3$
0,10100	11	Σ_3
0,01101		перенос
0,01010	011	$\Sigma_3 \cdot 2^{-1}$
0,00000		$\Pi_4 = \mathrm{M}_{\mathrm{H}} \cdot b_4$
0,00111	011	\sum_4
0,01000		перенос
0,00011	1011	$\Sigma_4 \cdot 2^{-1}$
0,11101		$\overline{\Pi}_5 = \mathrm{MH} \cdot b_5$
1,01000	1011	Σ_5
0,10100	01011	\sum_{5} · 2 ⁻¹

В результате получаем $MH \cdot MT = +0,1010001011$.

При использовании этого метода, в отличие от рассмотренных в предыдущей теме, межразрядный перенос при формировании частичной суммы не выполняется, а сохраняется в специальном выделенном для этого регистре. В каждом такте при формировании очередной частичной суммы выполняется суммирование трех значений: предыдущей частичной суммы, сохраненного переноса и очередного частичного произведения. В последнем такте сложение выполняется уже с учетом межразрядного переноса.

Необходимо отметить, что данный метод может применяться только для алгоритма А (это связано с направлением сдвига частичных сумм).

Практическое задание

Перемножить числа с хранением переносов:

- a) $M_H = 0.11011$, $M_T = 0.10111$;
- б) $M_H = 0.01101$, $M_T = 0.10101$;
- B) MH = 0.10111, MT = 0.01011;
- Γ) MH = 0,11101, MT = 0,11011;
- д) $M_H = 0.11010$, $M_T = 0.11101$;
- e) $M_H = 0.11001$, $M_T = 0.11111$;
- ж) $M_H = 0,11101, M_T = 0,10111;$
- 3) MH = 0.01110, MT = 0.01101;
- и) $M_H = 0,11011, M_T = 0,111111;$
- κ) MH = 0,11010, MT = 0,11011.

Тема 6. Умножение чисел на два разряда множителя одновременно в прямом коде

Контрольные вопросы

- 1. Какое основное требование должно выполняться при умножении на два разряда множителя одновременно?
 - 2. Какая из пар множителя подвергается преобразованию? Почему?
- 3. Можно ли умножать на 4, 8, ... разрядов множителя? Если да, то какие преимущества и проблемы будут при этом?
 - 4. Какие проблемы могут возникнуть при умножении по алгоритму В и Г?
- 5. Почему при преобразовании пары вначале надо сделать перенос в нее (из младшей пары), а затем ее преобразовать?

Умножение чисел на два разряда в прямом коде

Прежде чем приступать к выполнению практического задания рекомендуется ознакомиться с материалом в [4, с. 43–46].

Рассмотрим пример умножения чисел на два разряда множителя одновременно в прямом коде (алгоритм A): MH = 0101, MT = 0111101101.

Для преобразования множителя необходимо разбить его на пары. Разбиение на пары для целых чисел следует начинать с младших разрядов.

Вначале выполним преобразование множителя, начиная с младшей пары:

$$\begin{split} M_T &= \ \, \underline{01}\,\underline{11}\,\underline{10}\,\underline{11}\,\underline{01};\\ M_{T}^{\pi} &= \ \, \underline{10000}\,\overline{1}\,\underline{0}\,\overline{1}\,\underline{01}. \end{split}$$

Из преобразованного множителя видно, что в нем содержатся пары: 00, 01, $0\overline{1}$ и 10. В соответствии с этим возможны следующие частичные произведения:

$$[M_H]_{\text{доп}} = 0.0101; \quad [-M_H]_{\text{доп}} = 1.1011; \quad [2M_H]_{\text{доп}} = 0.1010$$

Умножение выполняется по алгоритму А.

0.0000		Σ_0
0.0101		$\Pi_1 = [M_H]_{\text{доп}}$
0.0101		Σ_1
0. <u>00</u> 01	01	$\Sigma_1 \cdot 2^{-2}$
1.1011		$\Pi_2 = \left[-M_{\rm H} \right]_{\rm доп} (0\overline{1})$
1.1100	01	Σ_2
1. <u>11</u> 11	0001	$\sum_{2}^{2} \cdot 2^{-2}$
1.1011		$\Pi_3 = [-M_{\rm H}]_{\rm доп} (0\overline{1})$
1.1010	0001	Σ_3
	•	

11.1110		$\sum_3 \cdot 2^{-2}$
11.1111	10100001	$\sum_4 \cdot 2^{-2}$
00.1010		$\Pi_5 = [2MH]_{\text{доп}}$
00.1001	10100001	Σ_5
00.0010	0110100001	\sum_{5} · 2 ⁻²

В результате получим $MH \cdot MT = +00.00100110100001$.

Практическое задание

Перемножить следующие числа, используя метод умножения на два разряда множителя одновременно, для всех алгоритмов умножения (A, Б, В и Γ):

- a) $M_H = 01011$, $M_T = 110011110$;
- б) $M_H = 0110$, $M_T = 011101010$;
- B) $M_H = 01100$, $M_T = 111000111$;
- Γ) MH = 01101, MT = 001001001;
- д) $M_H = 0110$, $M_T = 101010110$;
- e) $M_H = 01110$, $M_T = 110010011$;
- ж) $M_H = 011111, M_T = 101101101;$
- 3) $M_H = 0011$, $M_T = 010010001$;
- и) $M_H = 0100$, $M_T = 000111000$;
- κ) MH = 0010, MT = 001111100.

Тема 7. Умножение чисел в дополнительном коде

Контрольные вопросы

- 1. Какие алгоритмы машинного умножения можно использовать для умножения чисел в дополнительном коде?
- 2. Какие поправки необходимо выполнить при умножении целых чисел в дополнительном коде?
- 3. Какие поправки необходимо выполнить при умножении дробных чисел при умножении чисел в дополнительном коде?
 - 4. При каком знакосочетании сомножителей поправка на требуется и почему?
- 5. Когда вводится поправка при умножении чисел (в начале, в конце или на любом этапе умножения)?

Умножение чисел в дополнительном коде

Прежде чем приступать к выполнению практического задания рекомендуется ознакомиться с материалом в [4, с. 46–51].

Умножение чисел в дополнительном коде отличается от умножения в прямом коде тем, что в некоторых случаях в конце операции умножения необходимо выполнить добавление поправки. Величина поправки и ее вывод приведены в [4].

Пример 1. Выполнить умножение чисел в дополнительном коде (алгоритм В). Если MH < 0, MT > 0, то поправка может и не вводится [4], но в этом случае частичное произведение берется вместе со знаком.

В результате получим $M_H \cdot M_T = -0,1000011101$.

Пример 2. Выполнить умножение чисел в дополнительном коде (алгоритм Γ): Мн = -0.0110, Мт = -0.0011.

$$\begin{split} [M_H]_{\pi} &= 1{,}1010 \\ [M_T]_{\pi} &= 1{,}1101 \\ \Delta &= [-M_H]_{\pi \text{o}\pi} = 0{,}0110 \end{split}$$

0,000 0000	$\Sigma_0^{ ext{ iny q}}$
1,1101 0000	$\Pi_1 = M_H \cdot 2^{-1}$
1,1101 0000	$\Sigma_1^{ ext{ iny q}}$
1,1110 1000	$\Pi_2 = MH \cdot 2^{-2}$
1,1011 1000	\sum_2^{u}
1,1111 1010	$\Pi_4^- = M_H \cdot 2^{-3}$
1,1011 0010	\sum_4^{u}
0,0110	$\Delta = [-M_{ m H}]_{ m доп}$
0,0001 0010	$[\mathrm{M}_\mathrm{H}\cdot\mathrm{M}_\mathrm{T}]_{_\mathrm{ДОП}}$

В результате получим $MH \cdot MT = +0,00010010$.

Практическое задание

Перемножить числа в дополнительном коде для следующих случаев сочетания знаков сомножителей: MH > 0, MT < 0; MH < 0, MT > 0; MH < 0, MT < 0.

- a) $M_H = 0,11011$, $M_T = 0,00110$;
- б) $M_H = 0.01011$, $M_T = 0.10010$;
- B) $M_H = 0.11101$, $M_T = 0.00101$;
- Γ) MH = 0,11010, MT = 0,11110;
- д) MH = 0.01001, MT = 0.01010;
- e) MH = 0.00011, MT = 0.00110;
- ж) $M_{\rm H} = 0.10101$, $M_{\rm T} = 0.10000$;
- 3) $M_H = 0.11000$, $M_T = 0.00111$; и) $M_H = 0.11011$, $M_T = 0.11001$;
- κ) MH = 0,11011, MT = 0,11001, κ) MH = 0,00111, MT = 0,10101.

Тема 8. Умножение чисел на два разряда в дополнительном коде

Контрольные вопросы

- 1. Какие алгоритмы умножения допускают некорректное преобразование множителя при умножении в прямых кодах на два разряда множителя?
- 2. В чем заключается основное отличие в преобразовании пар множителя в дополнительном коде от преобразования в прямом коде?
- 3. Вводятся ли поправки при умножении в дополнительном коде на два разряда множителя? Поясните.
- 4. Что происходит с переносом (если он возникает) из старшей пары множителя?
- 5. Почему при преобразовании очередной пары вначале надо сделать ее преобразование, а затем добавить в нее перенос?

Умножение чисел на два разряда в дополнительном коде

Прежде чем приступать к выполнению практического задания, необходимо ознакомиться с материалом в [4, c. 51-54].

Рассмотрим пример умножения чисел на два разряда множителя одновременно (алгоритм Γ): Мн = -0101, Мт = -1011111, [Мт]_{доп} = 10100001.

Выполним преобразование множителя в дополнительном коде. Данный метод умножения отличается от аналогичного метода умножения в прямом коде тем, что преобразованию подвергается не только пара 11, а также пара 10. Обоснование этому приведено в [4].

$$[M_T]_{\text{доп}}^{\Pi} = 0\overline{1}\overline{1}00001.$$

В результате преобразования множителя получены пары $00, 01, 0\overline{1}$ и $\overline{1}0$. Подготовим соответствующие этим парам множимые:

$$[-M_H] = 0.0101;$$

 $[M_H] = 1.1011;$
 $[-2M_H] = 0.1010.$

В рассматриваемом примере выделенные разряды показывают сдвиг частичного произведения.

0,0000	\sum_0
0, 00 0101	$\Pi_1 = [-M_H] \cdot 2^{-2}$
0,000101	Σ_1
0, 0000 1010	$\Pi_2 = [-2MH] \cdot 2^{-4}$
0,00011110	$\Sigma_2 = \Sigma_3$
1, 11111111 1011	$\Pi_4 = [M_H] \cdot 2^{-8}$
0,000111011011	$\sum_4 = [\mathrm{M}_\mathrm{H} {\cdot} \mathrm{M}_\mathrm{T}]_{\mathrm{доп}}$

В результате получим $M_H \cdot M_T = +0,000111011011$.

Практическое задание

Перемножить числа, используя метод умножения на два разряда множителя одновременно в дополнительном коде для следующих случаев сочетания знаков сомножителей: MH > 0, MT < 0; MH < 0, MT > 0; MH < 0, MT < 0.

- a) $M_H = 1010$, $M_T = 1011110$;
- б) $M_H = 0111$, $M_T = 0101010$;
- B) MH = 1100, MT = 1000111;
- Γ) MH = 1101, MT = 0010011;
- д) $M_H = 1011$, $M_T = 1010110$;
- e) MH = 1110, MT = 1110011;
- ж) $M_H = 0001$, $M_T = 1001101$;
- 3) $M_H = 1011$, $M_T = 0110001$;
- и) $M_H = 0110$, $M_T = 0001000$;
- κ) MH = 1010, MT = 0011100.

Тема 9. Машинные методы деления чисел

Контрольные вопросы

- 1. Какие существуют подходы к выполнению операции деления?
- 2. Какова последовательность действий в алгоритме деления с восстановлением остатка?
- 3. Какова последовательность действий в алгоритме деления без восстановления остатка?
- 4. Какова последовательность действий в алгоритме деления в дополнительных кодах?
 - 5. Приведите схему устройства деления?

Машинные методы деления чисел

Прежде чем приступать к выполнению практического задания рекомендуется ознакомиться с материалом в [4, с. 56–60].

Пример 1. Выполнить деление чисел в прямом коде с восстановлением остатка.

Выделенные жирным шрифтом знаковые разряды остатков определяют очередную цифру частного и надо или не надо восстанавливать предыдущий

0,01100

1,00101

 $(A_3 \cdot 2) \cdot 2$

 $[-Д_T]_{\text{доп}}$

остаток. Если знаковый разряд остатка равен «1» (остаток отрицателен), то в очередной разряд частного заносится «0» и выполняется восстановление предыдущего остатка. Если же знаковый разряд равен «0», то в частное пишется «1» и восстанавливать остаток не надо.

В результате выполнения деления получим Чт = 0,1100.

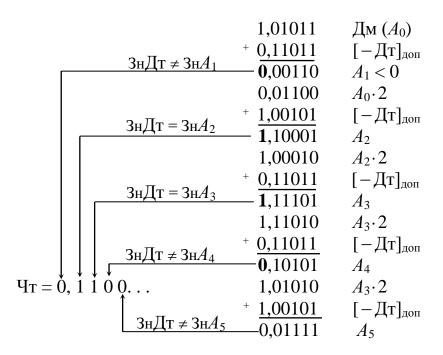
Пример 2. Выполнить деление чисел в прямом коде без восстановления остатка.

В этом случае цифра частного определяется так же, как и в предыдущем примере, кроме того, знак остатка определяет, с каким знаком добавлять делитель к остатку после его сдвига. Если знак остатка положительный, он сдвигается влево и делитель добавляется к нему со знаком минус; если же знак остатка отрицательный, он сдвигается влево и делитель добавляется к нему со знаком плюс.

В результате получим Чт = 0,11000.

Пример 3. Выполнить деление чисел в дополнительном коде.

В этом случае цифра частного определяется из сравнения знаков получаемого остатка и делителя. При совпадении знаков в очередной разряд частного заносится «1», иначе «0». Из этого же сравнения знаков определяется и то действие (добавлять или вычитать делитель), которое будет выполнено на следующем шаге деления. То есть если знаки остатка и делителя не совпадают, то к сдвинутому остатку добавляется делитель, иначе (при совпадении знаков) к сдвинутому остатку добавляется делитель с противоположным знаком.



Далее вычисляется знак полученного частного:

$$3$$
н 4 т = 3 н $Д$ м \oplus 3 н $Д$ т = 1 \oplus 1 = 0 .

В результате получим 4T = +0.110001.

Практическое задание

Выполнить деление чисел в прямом коде с восстановлением остатков, без восстановления остатков и в дополнительном коде для следующих случаев сочетания знаков: Дм > 0, ДT < 0; Дm < 0, ДT > 0; Дm < 0, ДT < 0.

- a) $\mu_{\text{M}} = 0.11010$, $\mu_{\text{T}} = 0.11110$;
- б) Дм = 0,00111, Дт = 0,01010;
- в) Дм = 0,10100, Дт = 0,11001;
- г) Дм = 0,01101, Дт = 0,10011;
- д) Дм = 0,10011, Дт = 0,11101;
- e) Дм = 0,01110, Дт = 0,10011;
- ж) Дм = 0,10001, Дт = 0,11001;
- и) Дм = 0,10110, Дт = 0,11010;
- к) Дм = 0.01010, Дт = 0.11100.