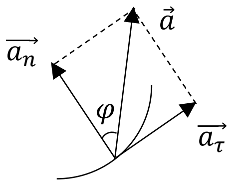
1.42 Материальная точка движется по окружности $R = 5$м. Когда нормальное ускорение точки становится $a_n = 3{,}2\,\frac{м}{с^2}$, угол между векторами полного и нормального ускорения $\varphi = 60°$. Найти модули скорости и тангенциального ускорения точки для этого момента времени.

$\vec{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}$ Т.к. $\overrightarrow{a_n} \perp \overrightarrow{a_\tau}$, то:

$a_n = a \cdot cos\varphi$

$a_\tau = a \cdot sin\varphi = \frac{a_n}{cos\varphi} \cdot sin\varphi = a_n \cdot tg\varphi = 3{,}2\,\frac{м}{с^2} \cdot \sqrt{3} = 5{,}54\,\frac{м}{с^2}$

$a_n = \frac{v^2}{R} => v = \sqrt{a_n \cdot R} = \sqrt{3{,}2\,\frac{м}{с^2} \cdot 5м} = 4\,\frac{м}{с}$



1.12 Частица движется по закону $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3$м, $B = 2{,}5\,\frac{м}{с}$, $C = 0{,}25\,\frac{м}{с^3}$. найдите средние значения скорости и ускорения за промежуток времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = 6$ с. Построить графики зависимостей скорости и ускорения от времени.

Сложно и долго:

$v = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2$

$\langle v\rangle = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \frac{1}{t_2-t_1} \cdot x(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{t_2-t_1}(A + Bt + Ct^3)\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{t_2-t_1}\Big((A + Bt_2 + Ct_2^3) - (A + Bt_1 + Ct_1^3)\Big) = \frac{1}{t_2-t_1}\Big(B(t_2 - t_1) + C(t_2^3 - t_1^3)\Big) = B + C(t_2^2 + t_1 \cdot t_2 + t_2^2)$

$\langle v\rangle = 2{,}5 + 0{,}25(36 + 6 + 1) = 13{,}25\,\frac{м}{с}$

Быстро и понятно:

Найдем координаты x_1 и x_2:

$x_1 = 3 + 2{,}5 + 0{,}25 = 5{,}75$ м

$x_2 = 3 + 2{,}5 \cdot 6 + 0{,}25 \cdot 216 = 72$ м

Считая ср. скорость как отношение изменения координаты за данное изменение времени:

$\langle v\rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} = \frac{72-5{,}75}{6-1} = 13{,}25\,\frac{м}{с}$

$v = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2$

Найдем скорости v_1 и v_2:

$v_1 = 2{,}5 + 3 \cdot 0{,}25 = 3{,}25\,\frac{м}{с}$

$v_2 = 2{,}5 + 3 \cdot 0{,}25 \cdot 36 = 29{,}5\,\frac{м}{с}$

$\langle a\rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2-v_1}{t_2-t_1} = \frac{29{,}5-3{,}25}{6-1} = 5{,}25\,\frac{м}{с^2}$

1.13 Материальная точка движется в плоскости xy по закону $x = At, y = B/t$, где A, B – положительные постоянные. Найти скорость и ускорения в зависимости от времени. Как направлен вектор ускорения? Записать ур-е траектории y(x), начертить ее график.

$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$ $v_x = \frac{dx}{dt} = A$ $v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{B}{t^2}$ $\vec{v} = A\vec{\imath} - \frac{B}{t^2}\vec{\jmath}$ $|\vec{v}| = \sqrt{A^2 + \frac{B^2}{t^4}}$ $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$

$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{2B}{t^3}$ $\vec{a} = \frac{2B}{t^3}\vec{\jmath}$ $|\vec{a}| = \frac{2B}{t^3}$

$t = \frac{x}{A} => y = \frac{AB}{x}$

1.16 Б Частица движется прямолинейно с ускорением $a = 2B, B = -0{,}5\,\frac{м}{с^2}$. В момент $t = 0$ координата $x_0 = 0, v_0 = A, A = 2\,\frac{м}{с}$. Найти модуль средней скорости за первые 3 с движения.

$v(t) = \int a(t)dt + C$ $v(t) = 2Bt + C$

константу C найдем из начальных условий:

$v_0 = A => v(t) = 2Bt + A$

$x(t) = \int v(t)dt + C$ $x(t) = Bt^2 + At + C$

константу C найдем из начальных условий:

$x_0 = 0 => x(t) = Bt^2 + At$

Найдем координаты в начальный и конечный момент времени:

$x(0) = 0$ м

$x(3) = Bt^2 + At = -0{,}5 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = 1{,}5$ м

Считая ср. скорость как отношение изменения координаты за данное изменение времени:

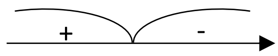
$\langle v\rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} = \frac{1{,}5-0}{3-0} = 0{,}5\,\frac{м}{с}$

1,17 Б Скорость прямолинейно движ. частицы изменяется по закону $v = At - Bt^2$, где A и B – полож. константы. Найти а) экстремальное значение скорости частицы и б) координату частицы для этого же момента времени, если при t = 0 $x_0 = 0$.

Экстремальное значение скорости частицы – наибольшее возможное ее значение.

Исследуем $v(t)$

$v'(t) = A - 2Bt$ $v'(t) = 0$ при $t = \frac{A}{2B}$



$\frac{A}{2B}$ (> 0 по усл.)

$v_{\max} = \frac{A^2}{2B} - \frac{A^2}{4B} = \frac{A^2}{4B}$ $x(t) = \int v(t)dt + C$

$x(t) = \frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{3} + C$

константу C найдем из начальных условий:

$x_0 = 0 => x(t) = \frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{3}$

$x\left(\frac{A}{2B}\right) = \frac{A^3}{8B^2} - \frac{A^3}{24B^2} = \frac{A^3}{12B^2}$

1,19 А Компоненты ускорения частицы, движущейся в плоскости xy, равны: $a_x = 2A, a_y = 2B$, где A и B – полож. константы. В момент $t = 0$ $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ $v_0 = 0$. Найти модуль скорости и ускорения частицы в зависимости от времени.

$v_x(t) = \int a_x(t)dt + C$

$v_x(t) = 2Bt + C$

Константу C найдем из начальных условий.

$v_0 = 0 => v_x(t) = 2At$

Аналогичные действия выполним для v_y

$v_0 = 0 => v_y(t) = 2Bt$

Найдем модуль скорости частицы:

$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4A^2t^2 + 4B^2t^2} = 2\sqrt{A^2 + B^2} \cdot t$

Найдем модуль ускорения частицы:

$a(t) = \sqrt{a_x^2 + b_x^2} = \sqrt{4A^2 + 4B^2} = 2\sqrt{A^2 + B^2}$

1,19 Б Компоненты ускорения частицы, движущейся в плоскости xy, равны: $a_x = 2A, a_y = 2B$, где A и B – полож. константы. В момент $t = 0$ $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ $v_0 = 0$. Найти ур-е траектории y(x), построить ее график.

$v_x(t) = \int a_x(t)dt + C$ $v_x(t) = 2At + C$

Константу C найдем из начальных условий.

$v_0 = 0 => v_x(t) = 2At$

Аналогичные действия выполним для v_y

$v_0 = 0 => v_y(t) = 2Bt$

$x(t) = \int v_x(t)dt + C$ $x(t) = At^2 + C$

Константу C найдем из начальных условий.

$x_0 = 0 => x(t) = At^2$

Аналогичные действия выполним для v_y

$y_0 = 0 => y(t) = Bt^2$

Из первого у-я выразим t:

$t = \sqrt{\frac{x}{A}}$

И подставим его во второе:

$y(x) = \frac{Bx}{A}$

1,23 Радиус-вектор мат. точки изменяется по закону $\vec{r} = 3t^2\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath} + 1\vec{k}$. Найти зависимость от времени векторов скорости и ускорения и модулей этих величин.

$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{r(t)}}{dt} = 6t\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^2 + 1}$

$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d\overrightarrow{v(t)}}{dt} = 6\vec{\imath}$

$a(t) = 6 = const$

2,6 Материальная точка массой 20г движется без трения прямолинейно под действием силы, изменяющейся по закону $F = At$, где A – постоянный вектор, модуль которого A = $0{,}03\,\frac{Н}{с}$. В момент $t = 0$ $x_0 = 0$ $v_0 = 5\,\frac{м}{с}$. Записать зависимость координаты x движущейся точки от времени и найти путь, пройденный ею за первые 4с.

Согласно второму закону Ньютона:

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} => \vec{v} = \int \frac{1}{m}\overrightarrow{F(t)}\,dt + C$

$\vec{v} = \frac{\vec{A}}{2m}t^2 + C$

Константу C найдем из начальных условий.

$v_0 = 5 => v(t) = \frac{A}{2m}t^2 + 5$

$x(t) = \int v(t)dt + C$

$x(t) = \frac{A}{6m}t^3 + 5t + C$

Константу C найдем из начальных условий.

$x_0 = 0 => x(t) = \frac{A}{6m}t^3 + 5t$

$x(t) = 0{,}25t^3 + 5t$

Найдем координаты в начальный и конечный момент времени:

$x(0) = 0$

$x(4) = 0{,}25 \cdot 64 + 5 \cdot 4 = 36$

Найдем пройденный путь:

$S = x_2 - x_1 = 36 - 0 = 36$(м)

2,7 В момент $t = 0$ частица $m = 0{,}2$ кг находилась в точке $x_0 = y_0 = 0$, и имела скорость $v_0 = Bi, B = 2\frac{м}{с}$. В этот момент времени на ее начала действовать сила $F = Aj, A = 3$ Н. Найти координаты x, y в момент времени $t = 3$ с.

$\vec{F} = \frac{md\vec{v}}{dt} \quad => \quad \vec{v} = \int \frac{1}{m}\overrightarrow{F(t)}\,dt + C$

$\vec{v} = \frac{A}{m}\vec{j} \cdot t + C$

Константу С найдем из начальных условий:

$\overrightarrow{v_0} = B\vec{\imath} \quad => \quad \overrightarrow{v(t)} = B\vec{\imath} + \frac{A}{m}\vec{j} \cdot t$

$\overrightarrow{r(t)} = \int \overrightarrow{v(t)}dt + C$

$\overrightarrow{r(t)} = Bt \cdot \vec{\imath} + \frac{At^2}{2m} \cdot \vec{j} + C$

Константу С найдем из начальных условий:

$x_0 = y_0 = 0 \quad => \quad \overrightarrow{r(t)} = Bt \cdot \vec{\imath} + \frac{At^2}{2m} \cdot \vec{j}$

$x(t) = Bt \quad x(3) = 2 \cdot 3 = 6$ (м)

$y(t) = \frac{At^2}{2m} \quad y(3) = \frac{3 \cdot 9}{2 \cdot 0{,}2} = 67{,}5$ (м)

3,3 Из залитого подвала, площадь пола которого $S = 50$ м^2, требуется выкачать воду на мостовую. Глубина воды в подвале $h = 1{,}5$ м, растояние от уровня воды до мостовой $H = 5$ м. Найти работу, которую надо совершить при откачке воды.

$A = -A_{F_T} = -F_T \cdot \left(-\left(H + \frac{h}{2}\right)\right) =$

$= F_T \cdot \left(H + \frac{h}{2}\right)$

$F_T = mg = \rho V g = \rho h S g$

$A = \rho h S g \left(H + \frac{h}{2}\right) = 1000 \cdot 1{,}5 \cdot 50 \cdot 9{,}81 \cdot 5{,}75 = 4230{,}5$ кДж

3.7 Тело массой m под действием постоянной силы движется прямолинейно согласно ур-ю $x = B + Ct + Dt^2$; $B, C, D - const$. Найти работу силы за интервал времени от 0 до t_1.

$F = \frac{mdv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad F = 2Dm$

$x(0) = B \quad x(t_1) = B + Ct_1 + Dt_1^2$

$A = F \cdot r = F\big(x(t_1) - x(0)\big) = 2Dm(B + $
$+ Ct_1 + Dt_1^2 - B) = 2Dmt_1(C + Dt_1)$

4.3 Вычислить момент инерции полого цилиндра массой m с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2 относительно оси, совпадающей с осью симметрии цилиндра.

Момент инерции – аддитивная величина.

Момент инерции цилиндра радиуса R_1:

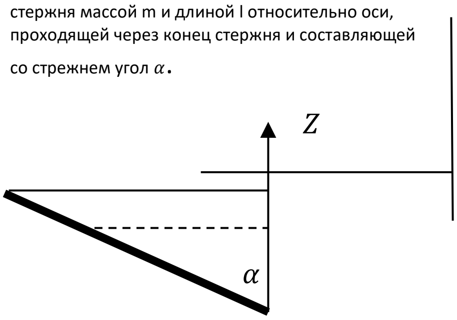
$I_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2}; \quad m_1 = \rho V_1 = \rho S_1 h = \pi\rho R_1^2 h$

Момент инерции цилиндра радиуса R_2:

$I_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2}; \quad m_2 = \pi\rho R_2^2 h$

$I = I_2 - I_1 = \frac{\pi\rho h}{2}(R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi\rho h}{2}(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) = \frac{m_2 - m_1}{2} \cdot (R_2^2 + R_1^2) = \frac{m(R_2^2 + R_1^2)}{2}$

4.6 Найти момент инерции тонкого однородного стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через конец стержня и составляющей со стрежнем угол α.



$$I = \int_0^R r^2 dm = \rho \int_0^R r^2 dV = \rho S \int_0^R r^2\, dr$$

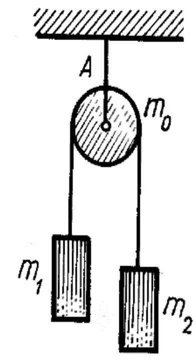
$R = l \cdot \sin\alpha \quad I = \frac{\rho S r^3}{3}\Big|_0^{l\sin\alpha} =$

$\frac{\rho S l \sin\alpha l^2 \sin^2\alpha}{3} = \frac{ml^2 \sin^2\alpha}{3}$

4.25 А На рис. $m_1 = 600$ г, $m_2 = 450$ г, $m_0 = 600$ г. Блок считать однородным диском, трением в оси пренебречь. Учитывая, что нить не сокльзит по блоку, найти ускорения грузов m_1 и m_2

Из рисунка следует:

$m_1 g - N_1 = m_1 a \quad => \quad N_1 = m_1 g - m_1 a$



$m_2 g - N_2 = m_2 a \quad => \quad N_2 = m_2 g + m_2 a$

$I\frac{d\omega}{dt} = N_1 R - N_2 R$

$\omega = \frac{v}{R}$

$\frac{m_0 R^2}{2R} a = N_1 R - N_2 R$

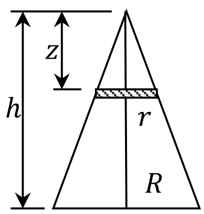
$\frac{m_0}{2} a = N_1 - N_2$

$\frac{m_0}{2} a = m_1 g - m_1 a - m_2 g + m_2 a$

$\left(\frac{m_0}{2} + m_1 + m_2\right) a = (m_1 - m_2) g$

$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{\left(\frac{m_0}{2} + m_1 + m_2\right)} = 1{,}09\frac{м}{с^2}$

4.9 Найти момент инерции прямого сплошного однородного конуса массой m и радиусом основания R относительно его оси симметрии.



Решение:

Разбиваем конус на тонкие диски, перпендикулярные оси вращения.

Дифференциал масса: $dm = \frac{mr^2 dz}{\frac{1}{3}hR^2}$

Так как $r = Rz/h$, момент инерции такого диска: $dI = \frac{dmr^2}{2} = \frac{3mR^2 z^4 dz}{2h^5}$

Искомый момент инерции для конуса:

$I = \int_0^h \frac{3mR^2 z^4}{2h^5} dz = \frac{3mR^2}{2h^5}\int_0^h z^4 dz = \frac{3}{2} \cdot \frac{mR^2 h^5}{5h^5} = \frac{3}{10} mR^2$

$I_1 = \frac{\pi\rho h R_1^4}{2}$

$I_2 = \frac{\pi\rho R_2^4 h}{2}$

4.8 Найти момент инерции стальной прямоугольной пластины толщиной $\boldsymbol{d} = \mathbf{0.1}$ см со сторонами $\boldsymbol{a} = \mathbf{10}$ см и $\boldsymbol{b} = \mathbf{20}$ см относительно оси, проходящей через центр масс пластины параллельно меньшей стороне.

Решение:

Момент инерции однородного тела можно найти по формуле: $J = \rho \int r^2 dV$

где r -расстояние элемента от оси вращения $dV = ahdr$

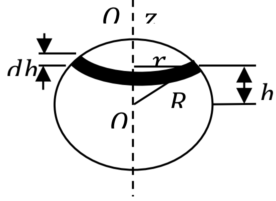
Получаем: $J = \rho \int_0^b r^2 ahdr = \frac{\rho a h b^3}{3}$

Произведем вычисления: $J = \frac{7.7 \cdot 10^3 \cdot 0.1 \cdot 0.001 \cdot 0.2^3}{3} = 0.0021$ кг $\cdot$ м^2

4.10 Найти момент инерции сплошного однородного шара массой $\boldsymbol{m}$ и радиусом $\boldsymbol{R}$ относительно: а) оси симметрии; б) оси, проходящей через конец диаметра перпендикулярно к нему.

Решение:

а)



Можем записать:

$dI = \frac{mr_1^2}{2} = \frac{\rho\pi r^2 dh r^2}{2} = \frac{\rho\pi r^4}{2} dh$

$r^2 = R^2 - h^2$

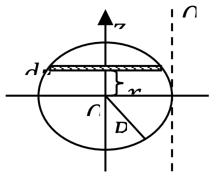
Момент инерции:

$$I = \int dI = 2\int_0^R \frac{\rho\pi}{2}(R^2 - h^2)^2 dh = \rho\pi \frac{8}{15} R^5$$

Учитывая что $\quad m = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$

Получаем: $I = \frac{2}{5}\left(\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3\right) R^2 = \frac{2}{5} mR^2$

б)



С учетом аддитивности момента инерции представим момент инерции шара I как сумму моментов инерции двух полушаров, то есть $I = 2I_1$

Из соображений симметрии возьмем элементарный объем dV в виде диске толщиной dz и радиусом r: $\quad dV = \pi r^2 dz$

Момент инерции диска относительно оси O':

$dI_1 = \frac{1}{2} r^2 dm + R^2 dm = \left(\frac{1}{2} r^2 + R^2\right) dm = \left(\frac{1}{2} r^2 + R^2\right) \rho dV = \pi\rho\left(\frac{1}{2} r^2 + R^2\right) r^2 dz$

$I = 2I_1 = \pi\rho \int_0^R (2R^2 + r^2) r^2 dz =$

$\pi\rho \int_0^R (2R^2 + R^2 - z^2)(R^2 - z^2) dz =$

$\pi\rho \int_0^R (3R^4 - 4R^2 z^2 + z^4) dz = \frac{28}{15}\rho\pi R^5$

Масса шара: $m = \rho V = \frac{4}{3}\rho\pi R^3; \quad \rho = \frac{3m}{4\pi R^3}$

Искомый момент инерции:

$$I = \frac{28}{15} \cdot \frac{3m}{4\pi R^3} \cdot \pi R^5 = \frac{7}{5} mR^2$$

Ответ:

а) $I = \frac{2}{5} mR^2$

б) $I = \frac{7}{5} mR^2$

4.11 *К точке, радиус-вектор которой относительно начала координат* $\boldsymbol{O}$ *равен* $\vec{r} = \boldsymbol{a}\vec{\imath} + \boldsymbol{b}\vec{j}$, *приложена сила* $\vec{F} = \boldsymbol{A}\vec{\imath} + \boldsymbol{B}\vec{j}$, *где* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ *-постоянные. Найти момент* $\boldsymbol{M}$ *и плечо* $\boldsymbol{l}$ *силы* $\boldsymbol{F}$ *относительно точки* $\boldsymbol{O}$.

Решение:

Плечо силы: $l = \left|\vec{F} - \vec{r}\right| = \sqrt{(a - A)^2 + (b - B)^2}$

Искомый момент силы будет равен векторному произведению векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \left(\vec{F} - \vec{r}\right) \times \vec{F} =$$

$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{j} & \vec{k} \\ a - A & b - B & 0 \\ A & B & 0 \end{vmatrix} = \big((a - A)B - A(b - B)\big)\vec{k} = (aB - Ab)\vec{k}$

Модуль момента: $M = \sqrt{(aB - Ab)^2} = aB - Ab$

Ответ:

$M = aB - Ab$

$l = \sqrt{(a-A)^2 + (b-B)^2}$

4.47 Горизонтальная платформа в виде однородного диска радиусом $\boldsymbol{R} = \mathbf{1.2}$ м вращается с частотой $\boldsymbol{n_1} = \mathbf{4.5}$ об/мин. На краю платформы стоит человек массой $\boldsymbol{m} = \mathbf{60}$ кг. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы $\boldsymbol{I} = \mathbf{144}$ кг · м^2; человека принять за материальную точку.

По закону сохранения импульса:

$L = J\omega = const$

Получаем: $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$

где $J_1 = J_{пл} + J_ч$; $J_2 = J_{пл}$

Момент инерции человека: $J_ч = m_1R^2$

Получаем:

$(J_{пл} + m_1R^2)\omega_1 = J_{пл}\omega_2$

$(J_{пл} + m_1R^2)2\pi n_1 = J_{пл}2\pi n_2$

$(J_{пл} + m_1R^2)n_1 = J_{пл}n_2$

Откуда искомая частота: $n_2 = \frac{(J_{пл}+m_1R^2)n_1}{J_{пл}}$

Произведем вычисления: $n_2 = \frac{(144+60\cdot1.2^2)\cdot0.075}{144} = 0.12\ \text{с}^{-1}$

Ответ: $n_2 = 0.12\ \text{с}^{-1}$

6.9

Фотонная ракета движется относительно Земли со скоростью $V = 0{,}6$ с. Во сколько раз замедлится ход времени в ракете с точки зрения земного наблюдателя?

Релятивистское замедление времени: $t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

Ответ: $\frac{t}{t'} = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$

6.37 Сравнить модули релятивистского и ньютоновского импульсов для электрона при скорости $V = 0{,}96$ с.

Ньютоновский импульс: $p = mv$

Релятивистский импульс: $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

Ответ: $\frac{p_р}{p_н} = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{1}{mv} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

7.7 Точка совершает прямолинейные гармонические колебания. Циклическая частота w = 4 с, амплитуда ускорения - 72 см/с^2. Найти скорость точки в момент времени, когда смещение точки от положения равновесия x = 2,2 см.

Амплитуда ускорения, она же максимальное ускорение: $Aa = A\omega^2$ $\quad A = \frac{Aa}{\omega^2}$

$x = Asin\,(wt)$ => $\sin(wt) = \frac{x}{A} = \frac{x\omega^2}{Aa}$ $\quad V = x' = (Asin(wt))' = A\omega cos(wt)$

По основному тригонометрическому тождеству: $\cos(wt) = \sqrt{1-\sin(wt)^2} = \sqrt{1-\frac{x^2\omega^4}{Aa^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2\omega^4}}{Aa}$

Ответ: $V = A\omega cos(wt) = \frac{Aa}{\omega^2}\omega\,\frac{\sqrt{a^2-x^2\omega^4}}{Aa} = \frac{\sqrt{a^2-x^2\omega^4}}{\omega}$

7.26 Найти коэффициент затухания β и логарифмический декремент затухания λ математического маятника, если известно, что за t = 100 с колебаний полная механическая энергия маятника уменьшилась в десять раз. Длина маятника l = 0,98 м.

$E_2 = E_1e^{-\frac{2}{\beta t}}$ => $\frac{E_1}{E_2} = e^{\frac{2}{\beta t}}$ => $e^{\frac{2}{\beta t}} = 10$

$\ln 10 = \frac{2}{\beta t}$ => $\beta = \frac{\ln 10}{2t}$

$\lambda = \beta T = \beta 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

7.14 Написать уравнение движения x(t)частицы, одновременно участвующей в двух колебаниях одного направления:

$x_1 = 30\cos(\pi t/3)$ и $x_2 = 30\cos(\frac{\pi t}{3} + \pi/6)$

Здесь требуется сложить два уравнения, чтобы получить новое:

$$A(\text{амплитуда нового уравнения}) = \sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)} =$$

$$= \sqrt{900 + 900 + 2*30*30\cos\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi t}{3}\right)}$$

$$= \sqrt{1800 + \frac{1800*\sqrt{3}}{2}} = 58$$

$$tg\,\alpha\ (\text{тангенс нового угла}) = \frac{A_1sin\alpha_1 + A_2sin\alpha_2}{A_1cos\alpha_1 + A_2cos\alpha_2}$$

$$= \begin{pmatrix}\text{применяем формулы сумм косинусов}\\ \text{и синусов, равные амплитуды сокращаются}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{2\sin\frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{2}\cos\frac{(\alpha_1-\alpha_2)}{2}}{2\cos\frac{(\alpha_1-\alpha_2)}{2}\cos\frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{2}}$$

$$= (2 \text{ и косинусы разности сокращаются})$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)}{\cos\frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{2}} = tg\,\frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$$

$$\frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{2} - \text{ угол в новом уравнении}$$

Ответ: $x = 58\cos(\frac{\pi t}{3} + \pi/12)$

8.30 (а) Какая часть $\Delta N/N$ молекул азота при температуре $t = 230°$ обладает скоростями в интервале от $V_1 = 290\frac{м}{с}$ до $V_2 = 310$ м/с

Подставить свои числа:

Решение:

Распределение Максвелла

$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}u^2e^{-u^2}\Delta u$

Наиболее вероятная скорость

$v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2\cdot8,31\cdot423}{28\cdot10^{-3}}} = 501,08\,\frac{м}{с}$

Относительная скорость

$u = \frac{v}{v_в} = \frac{300}{501,08} = 0,59871$

Интервал скоростей

$\Delta u = \frac{\Delta v}{v_в} = \frac{25}{501,08} = 0,049892$

Число молекул, скорости которых лежат в интервале Δu

$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}u^2e^{-u^2}\Delta u = \frac{4}{\sqrt{3,14}}\cdot0,59871^2\cdot e^{-0,59871^2}\cdot0,049892 = 0,028202 = 2,8202\ \%$

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 0,028202 = 2,8202\ \%$

8.31 При какой температуре Т наиболее вероятная скорость молекул азота меньше их средней квадратичной скорости на 50 м/с?

Среднеквадратичная скорость: $V = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

Вероятная скорость: $V = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = V_{кв} - 50$ м/с

Выразить скорость не составляет труда.

9.10(б) Сто молей газа нагреваются изобарически от температуры T_1 до температуры T_2. При этом галл получает количество теплоты Q = 0,28 МДж и совершает работу A = 80 кДж. Найти $\gamma = C_p/C_V$

$\Delta U = Q - A = 280 - 80 = 200$ кДж

$\Delta U = \frac{1}{\gamma-1}p\Delta V$ => $\frac{1}{\gamma-1} = \frac{\Delta U}{p\Delta V} = \frac{\Delta U}{A} = \frac{200}{80}$ => $\gamma = 1{,}4$

9.21 Газ расширяется адиабатически так, что его давление падает от $p_1 = 600$ кПа до $p_2 = 300$ кПа. Потом газ нагревается при постоянном объеме до первоначальной температуры. При этом его давление возрастает до $p_3 = 360$ кПа. Найти для этого газа $\gamma = C_p/C_V$

Так как $T_1 = T_3$, $p_1V_1 = p_3V_2$ => $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_3}$

Уравнение Пуассона : $p_1V_1{}^\gamma = p_2V_2{}^\gamma$ => $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$

$\gamma = \frac{\log\frac{p_1}{p_2}}{\log\frac{V_2}{V_1}} = \frac{\log\frac{p_1}{p_2}}{\log\frac{p_1}{p_3}} = \frac{\log 2}{\log\frac{5}{4}} = \log_{5/4}2 = 1{,}4$