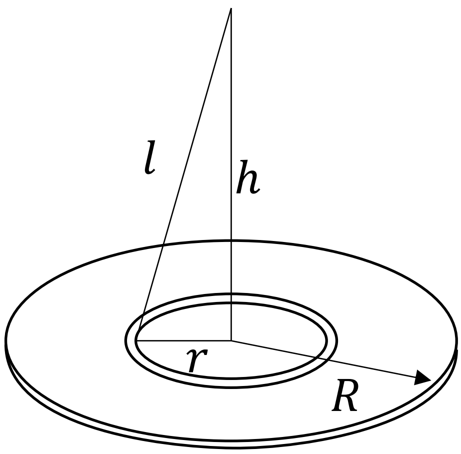
12.2б По тонкому диску радиуса $\mathrm{R} = 10$ см равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ нКл/м^2. Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска на расстоянии 6 см от плоскости диска.

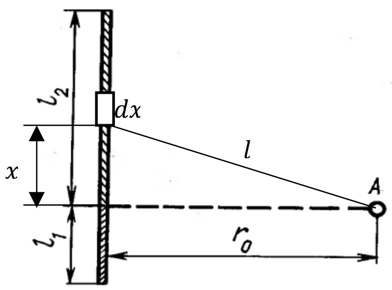


Будем разбивать диск на кольца. Заряд каждого кольца $dq = \sigma dS = \sigma d(\pi r^2) = 2\sigma\pi r dr$.

В силу симметрии и равноудаленности всех точек кольца от точки расчета потенциал, создаваемый данным кольцом: $d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{\sqrt{r^2+h^2}}$.

Так как потенциал – скаляр, то общий потенциал $\varphi = \int_0^R d\varphi = \int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{2\sigma\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \int_0^R \frac{d\left(r^2+h^2\right)}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \sqrt{r^2+h^2}\Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+h^2} - h\right)$

12.4 Найти потенциал в точке A, удаленной на расстоянии r_0 от заряженной нити длиной $(l_1 + l_2)$. Линейная плотность зарядов τ.



$$dq = \tau dx$$

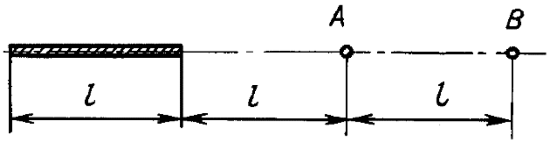
$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \cdot l} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + r_0^2}}$$

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + r_0^2}} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\sqrt{x^2 + r_0^2} + x\right)\Big|_{-l_1}^{l_2} =$$

$$\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left(\sqrt{l_2^2 + r_0^2} + l_2\right) - \ln\left(\sqrt{l_1^2 + r_0^2} - l_1\right)\right) =$$

$$\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\sqrt{l_2^2 + r_0^2} + l_2}{\sqrt{l_1^2 + r_0^2} - l_1}\right)$$

12.6 На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 2{,}5\ \text{нКл/м}$. Найти разность потенциалов точек A и B.



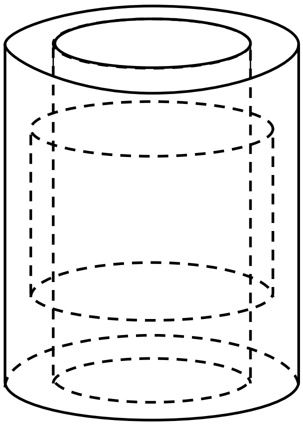
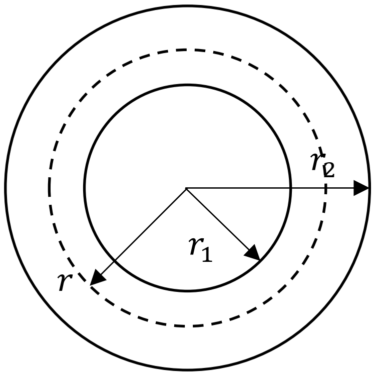
$dq = \tau dr \qquad d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$

$$\varphi_A = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_l^{2l}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_l^{2l} = \frac{\tau\ln 2}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\varphi_B = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_{2l}^{3l}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_{2l}^{3l} = \frac{\tau\ln\frac{3}{2}}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln 2 - \ln\frac{3}{2}\right) = \frac{\tau\ln\frac{4}{3}}{4\pi\varepsilon_0}$$

12.9 Два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами $r_1 = 10$ и $r_2 = 20\ \text{мм}$ заряжены одноименными зарядами, причем поверхностная плотность зарядов на внешнем цилиндре $\sigma_2 = 6{,}66\ \text{нКл/м}^2$, а на внутреннем $\sigma_1 = 3{,}333\ \text{нКл/м}^2$. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$ между цилиндрами.

Выберем между цилиндрами 1 и 2 Гауссову поверхность в форме цилиндра.

$$\Phi = \int_{(S_{\text{пов}})} \vec{E}\overrightarrow{dS} = \int_{(S_{\text{б}})} EdS\cos 0 + 2\int_{(S_{\text{осн}})} EdS\cos 90 =$$

$$2\pi r E\int_{(0)}^{h} dh = 2\pi r E h$$

$$dq_1 = \sigma_1 dS_1 = 2\pi r_1\sigma_1 dh$$

$$q_{\text{вн}} = \int_0^h 2\pi r_1 dh = 2\pi r_1 h$$

$$\Phi = \frac{q_{\text{вн}}}{\varepsilon_0} \ \rightarrow\ 2\pi r E h\varepsilon_0 = 2\pi r_1\sigma_1 h$$

$$Er\varepsilon_0 = r_1 \ \rightarrow\ E = \frac{r_1\sigma_1}{\varepsilon_0 r}$$

В силу симметрии задачи вектора E и dr коллинеарные.

$$\varphi = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \frac{r_1\sigma_1}{\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{r_1\sigma_1}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

12.12 Потенциал некоторого поля имеет вид $\varphi = axz$. Найти вектор напряженности поля и его модуль

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = -az\vec{i} - ax\vec{k}$$

$$E = \sqrt{a^2z^2 + a^2x^2} = a\sqrt{z^2 + x^2}$$

12.14 Потенциал некоторого поля имеет вид $\varphi = a(x^2 + y^2) - bz^2$. Найти вектор напряженности поля и его модуль

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = -2ax\vec{\imath} - 2ay\vec{\jmath} + 2bz\vec{k}$$

$$E = 2\sqrt{a^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2}$$

12.19 Потенциал поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния от центра шара по закону $\varphi = ar^2 + b\ (a, b = const)$. Найти объемную плотность заряда ρ внутри шара.

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Найдем $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = -2a\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$

$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -2a - 2a - 2a = -6a$

$\rho = -6a\varepsilon_0$

12.50 Пользуясь теоремой Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме, найти вектор напряженности E внутри и вне шара радиусом R, равномерно заряженного с объемной плотностью ρ.

$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ – теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной формулировке.

Работаем в <u>сферических</u> координатах (r, φ, θ). Т.к. задача сферически симметрична, то $\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$ и $\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0$.

Дивергенция в сквернических координатах: $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\vec{E}\overrightarrow{r^2}\right)$

т.к. $\mathrm{E}||\mathrm{r}$, то $\vec{E}\overrightarrow{r^2} = Er^2$

$\frac{d}{dr}(Er^2) = \frac{\rho r^2}{\varepsilon_0}$

При $\mathrm{r} \leq \mathrm{R}$: $\int_0^r d(Er^2) = \int_0^r \frac{\rho r^2}{\varepsilon_0} dr \quad E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$

При $\mathrm{r} \geq \mathrm{R}$: $\int_0^r d(Er^2) = \int_0^r \frac{\rho r^2}{\varepsilon_0} dr$

Т.к. весь заряд сосредоточен в шаре радиусом R, то получим

$$\int_0^r d(Er^2) = \int_0^R \frac{\rho r^2}{\varepsilon_0} dr$$

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^3} r \quad \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

13.25 Найти поляризованность $\vec{\mathrm{P}}$ кристаллической пластинки, диэлектрическая проницаемость которой $\varepsilon = 3$, если напряженность нормального к пластинке внешнего электрического поля $\overrightarrow{E_0} = 1\ \text{МВ/м}$.

$D_0 = D_1$

$D_0 = \varepsilon_0 E_0$

$D_1 = \varepsilon\varepsilon_0 E_1$ – (экспериментальное соотношение)

$P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E_1 = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\varepsilon_0 E_0$

13.26 В некоторой точке изотропного диэлектрика с проницаемостью ε смещение равно $\vec{D}$**.** Чему равна поляризованность $\vec{P}$ в этой точке?

$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$

$$\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\vec{E} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\vec{D}$$

16.6 Непроводящий тонкий диск радиусом R, равномерно заряженный с одной стороны с поверхностной плотностью заряда σ, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Определить магнитную индукцию B в центре диска

Будем разбивать диск на кольца.

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$$

Крутящийся диск является своеобразным током.

$$dI = \frac{dq}{T} = 2\sigma\pi r \frac{dr}{T} = \frac{2\sigma\pi r\omega dr}{2\pi} = \sigma\omega r dr$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

По закону БСЛ

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi}\int_{(L)}\frac{(\overrightarrow{dl}\times\vec{r})}{r^3} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi r^2}\int_{(L)} dl = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega r dr}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2} dr$$

$$B = \int_0^R dB = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R dr = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

16.8 Плоское диэлектрическое кольцо, внешний и внутренний радиусы которого R_1 и R_2, равномерно заряжено зарядом q и вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Определить магнитную индукцию в центре кольца.

Будем разбивать плоское кольцо на кольца.

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr \qquad q = \int_{R_1}^{R_2} dq = \pi(R_2^2 - R_1^2)\sigma \rightarrow \sigma = \frac{q}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}$$

Крутящийся диск является своеобразным током.

$$dI = \frac{dq}{T} = 2\sigma\pi r\frac{dr}{T} = \frac{2\sigma\pi r\omega dr}{2\pi} = \sigma\omega r dr$$

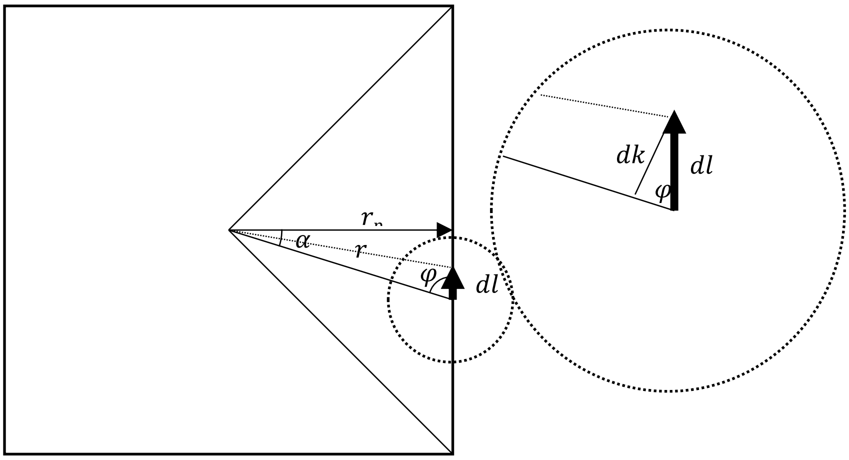
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

По закону БСЛ

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi}\int_{(L)}\frac{\left(\overrightarrow{dl}\times\vec{r}\right)}{r^3} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi r^2}\int_{(L)} dl = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega r dr}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}dr$$

$$B = \int_{R_1}^{R_2} dB = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_{R_1}^{R_2} dr = \frac{\mu_0\sigma\omega(R_2 - R_1)}{2} = \frac{\mu_0 q\omega(R_2 - R_1)}{2\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)} = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi(R_1 + R_2)}$$

16.15 Определить магнитную индукцию квадратной рамки со стороной а $= 100$ мм, если по рамке течет ток $I = 2$А.



Для одной из четырех сторон

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\overrightarrow{dl}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I r \sin\varphi\, dl}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I \cos\alpha}{4\pi r^2} dl$$

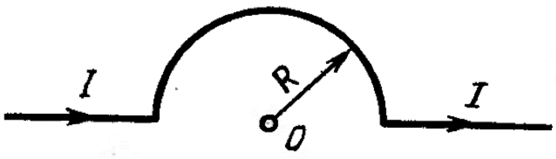
$$dk = r d\alpha; dl = \frac{dk}{\cos\alpha}; dl = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha}; \quad r = \frac{r_n}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\cos\alpha}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I \cos\alpha}{4\pi r \cos\alpha} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2a\pi} \cos\ \alpha\, d\alpha$$

$$B = \int \quad dB = \frac{\mu_0 I}{2a\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\ \alpha\, d\alpha\ = \frac{\mu_0 I}{2a\pi} = \frac{\mu_0 I}{2a\pi} \cdot \sin\alpha \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{2a\pi}$$

$$B_{\text{общ}} = 4B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{a\pi}$$

16.25 Прямой длинный провод на одном из участков переходит в полуокружность радиусом R. По проводу проходит ток I. Определить магнитную индукцию B поля в центре полуокружности.



Можно разбить проводник на три сегмента: до полуокружности, полуокружность, после полуокружности. В законе БСЛ присутствует $\overrightarrow{dl} \times \vec{r}$, и для линейного проводника (1 и 3 сегменты) векторное произведение обращается в 0 (т.к. $\overrightarrow{dl}$ и $\vec{r}$ коллинеарные. Остается подсчитать индукцию полукольца.

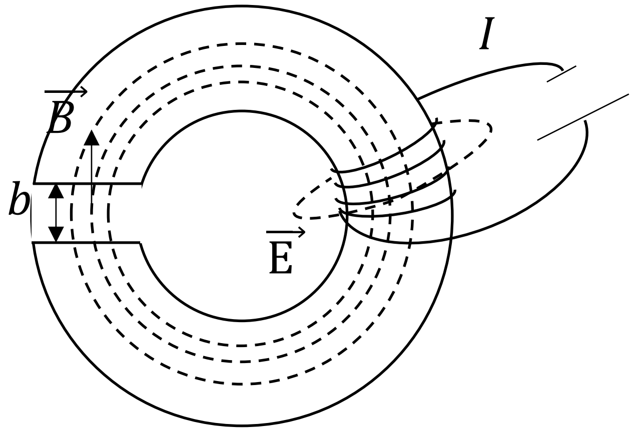
БСЛ: $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\overrightarrow{dl}\times\vec{r}}{r^3}$. На всем участке радиус будет перпендикулярен окружности и постоянен. $\mathrm{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} dl$. Интегрируем: $B = \int \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int_{(L)} dl = \frac{\mu_0 I \pi R}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4R}$

16.45 Вычислить циркуляцию магнитной индукции вдоль контура, охватывающего прямые бесконечные токи $I_1 = 10\ \mathrm{A}$, $I_2 = 15\ \mathrm{A}$, проходящие в одном направлении, и тока $I_3 = 20\ \mathrm{A}$, проходящего в противоположном направлении.

$$\oint_{(L)} Bdl = \mu_0 \sum I_{\text{охв}\,i}$$

$$\oint_{(L)} Bdl = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3)$$

17.48 На железном тороидальном сердечнике со средним радиусом R имеется обмотка с общим числом витков N. В сердечнике сделана поперечная прорезь малой ширины b $(b \ll 2\pi R)$. При токе силой I в обмотке магнитная индукция в зазоре B. Пренебрегая рассеиванием магнитного потока на краях зазора, определить магнитную проницаемость железа μ в этих условиях.



B_1, H_1 μ—? – в сердечнике

$B_2, H_2, \mu = 1$ – в зазоре

Т.к $b \ll 2\pi R$, то можно считать в соответствии с условием, что на границе раздела зазора и сердечника у вектора $\vec{B}$ есть только нормально площадке зазора составляющая, а значит $B = B_1 = B_2$.

Получим. $H_1 = \frac{B}{\mu\mu_0}$ $\quad H_2 = \frac{B}{\mu_0}$

Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора $\vec{H}$. $\oint_{(L)} \vec{H}\vec{dl} = I_{\text{проводимости}}$

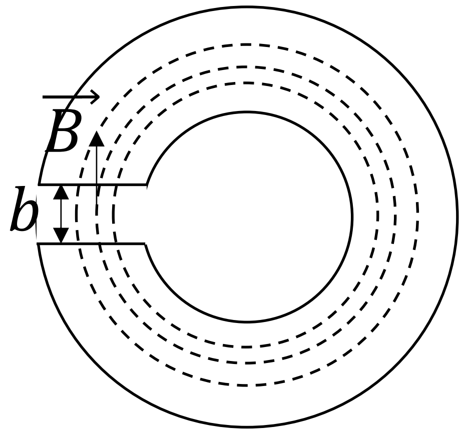
Выберем в качестве замкнутого контура кольцо в сердечнике. $I_{\text{проводимости}} = NI$. $\oint_{(L)} \vec{H}\vec{dl} = \int_0^b H_2 dl + \int_b^{2\pi R} H_1 dl = H_2 b + H_1(2\pi R - b) = \frac{B}{\mu_0}\left(b + \frac{2\pi R - b}{\mu}\right)$

$$\frac{B}{\mu_0}\left(b + \frac{2\pi R - b}{\mu}\right) = NI$$

$$\frac{2\pi R - b}{\mu} = \frac{NI\mu_0}{B} - b = \frac{NI\mu_0 - bB}{B}$$

$$\mu = \frac{B(2\pi R - b)}{NI\mu_0 - bB}$$

17.49 Постоянный магнит изготовлен в виде кольца с узким зазором между полюсами. Средний диаметр кольца D, ширина зазора $b \ll \pi D$. Индукция магнитного поля в зазоре B. Пренебрегая рассеиванием магнитного потока на краях зазора, определить напряженность магнитного поля H внутри магнита.



B_1, H_1—? – в магните

$B_2, H_2, \mu = 1$ – в зазоре

Т.к $b \ll 2\pi R$, то можно считать в соответствии с условием, что на границе раздела зазора и сердечника у вектора $\vec{B}$ есть только нормально площадке зазора составляющая, а значит $B = B_1 = B_2$.

Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора $\vec{\mathrm{H}}$.

$\oint_{(L)} \vec{H}\vec{dl} = I_{\text{проводимости}}$

Выберем в качестве замкнутого контура кольцо в сердечнике. $I_{\text{проводимости}} = 0$.

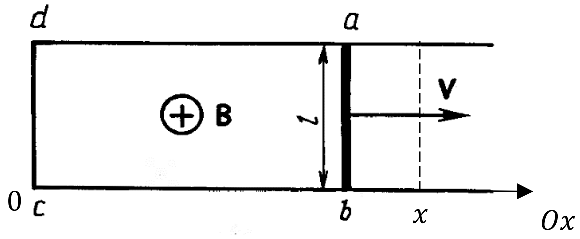
$\oint_{(L)} \vec{H}\vec{dl} = \int_0^b H_2 dl + \int_b^{2\pi R} H_1 dl = H_2 b + H_1(2\pi R - b) =$
$\frac{B}{\mu_0} b + H_1(2\pi R - b)$

$\frac{B}{\mu_0} b + H_1(2\pi R - b) = 0$

$\frac{B}{\mu_0} b = H_1(b - 2\pi R)$

$H_1 = \frac{B}{\mu_0}\frac{b}{b-2\pi R} = \frac{B}{\mu_0}\frac{b}{b-\pi D}$

18.7 В однородном магнитном поле, индукция которого 20 мтл, расположена прямоугольная рамка $abcd$, подвижная сторона которой



длиной $\mathrm{l} = 20$ см перемещается со скоростью $v = 20$ м/с перпендикулярно к направлению поля.Найти ЭДС ε_i, индуцируемую в контуре.

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \int_{(S)} \vec{B}\overrightarrow{dS} = \int_{(S)} BdS = B\int_{(S)} dS = B\int_{(S)} dS = Bl\int_b^{x+b} dx = Blx$$

$$v = x'(t) => x = vt + b$$

$$\Phi = Blx = Blvt + Blb$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv$$

19.43 Плоская электромагнитная волна $\vec{\mathrm{E}} = \overrightarrow{\mathrm{E_{max}}} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ распространяется в вакууме. Найти модуль вектора Пойнтинга $\left|\vec{\Pi}\right|$ этой волны.

$\vec{H} = \overrightarrow{H_{max}} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\overrightarrow{E_{max}} = \sqrt{\mu\mu_0}\overrightarrow{H_{max}}$

$\left|\vec{S}\right| = \left|\vec{E} \times \vec{H}\right| = E_{max}H_{max} \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r}) =$

$E_{max}^2 \frac{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu\mu_0}} \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r})$

19.44 Плоская гармоническая линейно-поляризованная волна распространяется в вакууме. Амплитуда напряженности электрической составляющей волны E_{max}. Определить среднюю за период колебания плотность потока энергии $|\vec{\Pi}|$.

$$\vec{\mathrm{E}} = \overrightarrow{\mathrm{E}_{\mathrm{max}}} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

$$\vec{H} = \overrightarrow{H_{max}} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\overrightarrow{E_{max}} = \sqrt{\mu\mu_0}\overrightarrow{H_{max}}$$

$$\langle\vec{S}\rangle = E_{max}^2 \frac{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu\mu_0}} \langle\cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r})\rangle$$

Найдем среднее значение функции $\cos^2$ учитывая что колебание пробегает период.

$$\langle\cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r})\rangle = \frac{1}{2\pi - 0}\int_0^{2\pi} \cos^2\alpha\, d\alpha = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}(1 + \cos 2\alpha) d2\alpha = \frac{1}{8\pi}(2\alpha + \sin 2\alpha)\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{8\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{E_{max}^2}{2} \frac{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu\mu_0}}$$

20.1 Показать, что если разность двух складываемых колебаний беспорядочно меняется во времени, то средняя по времени энергия результирующего колебания равна сумме энергий исходных колебаний.

$E_1 = A_1 \cos(\omega t - \alpha_1)$

$E_2 = A_2 \cos(\omega t - \alpha_2)$

$\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$

Так как все значения разности фаз $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ равновероятны, то можно попытаться найти среднее значение функции cos:

$$\langle\cos\delta\rangle = \frac{1}{2\pi - 0}\int_0^{2\pi}\cos(\delta)\,d\delta = \frac{\sin\delta}{2\pi}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Таким образом:

$\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}_1^2 + A_2^2;\ I \sim A^2;\ \ I = I_1 + I_2$

Интенсивность является показателем переносимой энергии

20.2 На сколько полос Δm сместится интерференционная картина, если на пути одного из интерферирующих лучей ввести пластинку толщиной $d = 3{,}67$ мкм и показателем преломления $n = 1{,}6$? Длина волны $\lambda = 550\ \text{нм}$.

Т.к. источники интерферируют, то они когерентны. $\Delta = \frac{\lambda}{2\pi}(\alpha_2 - \alpha_1)$

Условие максимума: $\alpha_1 - \alpha_2 = m\lambda; m \in Z$.

в центре интерференционной картины до внесения пластины

$$\frac{\lambda}{2\pi}(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$$

учитывая, что $\alpha_1 = \omega t_{\text{обыкн}} - kx = \omega\frac{l}{c} - kx$

$$\alpha_{2_{\text{изм}}} = \omega(t_{\text{ост}} + t_{\text{доп}}) - kx = \omega\left(\frac{l-d}{c} + \frac{d}{v}\right) - kx = \omega\left(\frac{l-d}{c} + \frac{dn}{c}\right) - kx = \omega\frac{l-d+nd}{c} - kx = \omega\left(\frac{l}{c} + \frac{d(n-1)}{c}\right) - kx = \omega t_{\text{обыкн}} + \omega\frac{d(n-1)}{c} - kx$$

$$\alpha_{2_{\text{изм}}} - \alpha_1 = \frac{\Delta m\lambda^2}{2\pi}$$

$$\frac{\lambda}{2\pi}\omega\frac{d(n-1)}{c} = \Delta m\lambda; \qquad \omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{c}{\lambda};$$

$$d(n-1) = \Delta m\lambda; \quad \Delta m = \frac{d(n-1)}{\lambda}.$$

20.21 Найти расстояние l между десятым и одиннадцатым кольцом Ньютона, наблюдаемым в отраженном свете, если расстояние между вторым и третьим $l_1 = 3$ мм. Свет падает нормально.

Согласно формуле для радиус светлого кольца:

$r_m = \sqrt{\frac{\lambda R(2m-1)}{2}}$; темного: $r_m = \sqrt{\frac{2\lambda Rm}{2}}$

для любого кольца: $\sqrt{\frac{\lambda R(m-1)}{2}}; m \in N \neq 0$

Тогда $l_1 = r_3 - r_2 = \sqrt{\frac{\lambda R}{2}} \cdot \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right)$

$l\ = r_{11} - r_{10} = \sqrt{\frac{\lambda R}{2}} \cdot \left(\sqrt{10} - \sqrt{9}\right)$

$l = \frac{\left(\sqrt{10}-3\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)} l_1$

21.1а Монохроматический свет $(\lambda = 550\,\text{нм})$ падает нормально на диафрагму с круглым отверстием $R = 1/5$ мм. На каком расстоянии от диафрагмы находится точка наблюдения если отверстие равно двум зонам Френеля.

$r_m^2 + b^2 = s_m^2$

$r_m^2 + b^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 = b^2 + bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4} = \left|\begin{matrix}\lambda \ll b \\ \lambda^2 \approx 0\end{matrix}\right| = b^2 + bm\lambda$

$r_m^2 = bm\lambda \;\rightarrow\; b = \frac{r_m^2}{m\lambda} = 3{,}63\text{ см}$

21.16 Монохроматический свет $(\lambda = 550\,\text{нм})$ падает нормально на диафрагму с круглым отверстием $R = 1/5\ \text{мм}$. На каком расстоянии от диафрагмы находится точка наблюдения если отверстие равно пяти зонам Френеля.

$$r_m^2 + b^2 = s_m^2$$

$$r_m^2 + b^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 = b^2 + bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4} = \left|\begin{matrix}\lambda \ll b \\ \lambda^2 \approx 0\end{matrix}\right| = b^2 + bm\lambda$$

$$r_m^2 = bm\lambda \ \rightarrow \ \ b = \frac{r_m^2}{m\lambda} = 1{,}45\ \text{см}$$

21.3 Найти радиус девятой зоны френеля для плоского волнового фронта, если радиус четвертой зоны Френеля $r_4 = 3$ мм

$$r_m^2 + b^2 = s_m^2$$

$$r_m^2 + b^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 = b^2 + bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4} = \left|\begin{matrix}\lambda \ll b \\ \lambda^2 \approx 0\end{matrix}\right| = b^2 + bm\lambda$$

$$r_m^2 = bm\lambda \ \rightarrow \ r_4^2 = 4b\lambda;\ r_9^2 = 9m\lambda \rightarrow \frac{r_4}{r_9} = \frac{2}{3} \rightarrow r_9 = 4{,}5 \text{ мм}$$

21.5 На диафрагму с отверстиями радиусом $r = 1{,}5\ \text{мм}$ нормально падает монохроматическая плоская световая волна. Когда расстояние от диафрагмы до установленного за ней экрана $b = 0{,}58\ \text{м}$, в центре дифракционной картины наблюдается максимум интерференции. При увеличении расстояния на $\Delta b = 0{,}11\ \text{м}$ максимум интенсивности сменяется минимумом. Определить длину волны λ света.

$$r_m^2 + b^2 = s_m^2$$

$$r_m^2 + b^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 = b^2 + bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4} = \left|\begin{matrix}\lambda \ll b \\ \lambda^2 \approx 0\end{matrix}\right| = b^2 + bm\lambda$$

$$r_m = \sqrt{bm\lambda}$$

Чтобы добиться максимума, для точки наблюдения необходимо чтобы все разбилось на нечетное количество зон. А чтобы добиться минимума – четное.

$\lambda = \frac{r^2}{bm}$ – для случая макс $m -$ номер последней зоны (край отверстия как ограничение)

$\lambda = \frac{r^2}{(b+\Delta b)n}$ - для случая мин $\mathrm{n} -$ номер последней зоны

Исходя из предположения, что n уменьшилось на 1 по сравнению с m (поменялось с нечетного на четное)

$$\lambda = \frac{r^2}{b(n+1)}$$

$$\lambda = \frac{r^2}{(b+\Delta b)n}\ (1)$$

$$\frac{1}{b(n+1)} = \frac{1}{(b+\Delta b)n}$$

$$b(n+1) = (b+\Delta b)n$$

$$\frac{n+1}{n} = \frac{b+\Delta b}{b}$$

$$1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = \frac{b+\Delta b}{b} = 1 + \frac{\Delta b}{b}$$

$n = \frac{b}{\Delta b} = 5{,}27272$ – это невозможно, число должно быть четным, но мы продолжим ☺

подставим в формульном виде (1)

$$\lambda = \frac{r^2\Delta b}{(b+\Delta b)b} = 6{,}18 \cdot 10^{-7}\text{м} = 618\ \text{нм}$$

21.7 Расстояние от источника до зонной пластинки $a = 10$ м, расстояние от пластины до места наблюдения $\mathrm{b} = 10$ м. Длина волны $\lambda = 450$ нм. Найти радиус четвертой зоны Френеля.

Краткие достижения §55:

$$a^2 = (a - h_m)^2 + r_m^2 = \begin{vmatrix} h_m \ll a \\ h_m^2 \approx 0 \end{vmatrix} = a^2 - 2ah_m + r_m^2$$

$$(b + h_m)^2 + r_m^2 = \left(b + \frac{m\lambda}{2}\right)^2 = \begin{vmatrix} \lambda \ll b \\ \lambda^2 \approx 0 \end{vmatrix} = b^2 + bm\lambda$$

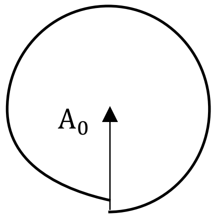
$$b^2 + bm\lambda - r_m^2 = (b + h_m)^2 = \begin{vmatrix} h_m \ll b \\ h_m^2 \approx 0 \end{vmatrix} = b^2 + 2bh_m$$

$$r_m^2 = 2ah_m; r_m^2 = bm\lambda - 2bh_m \;\; => 2ah_m = bm\lambda - 2bh_m$$

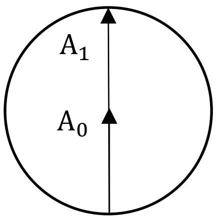
$$2h_m(a + b) = bm\lambda \;\; => \quad h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}$$

$$r_m = \sqrt{2ah_m} = \sqrt{\frac{abm\lambda}{a+b}} = 3 \text{ мм}$$

21.8аб+ На пути плоской монохроматичной волны интенсивностью I_0 поставлен экран, а перед экраном – диафрагма с круглым отверстием. Найти интенсивность света в центре экрана напротив отверстия, если а) отверстие сделать равным первой зоне б) половине первой зоны. +) Найти интенсивность, если диафрагму заменить круглым диском, который закроет только 1 зону Френеля.

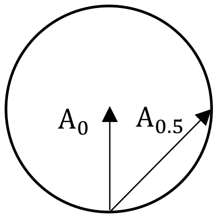


В соответствии со спираль. Френеля действие всех зон френеля не может превышать половины амплитуды



а) Для одной зоны исходя из рисунка

$2A_0 = A_1$ $(A^2 \sim I)$ => $4I_0 = I_1$



б) Для половины 1 зоны исходя из рисунка: $\sqrt{2}A_0 = A_{0.5} \Rightarrow 2I_0 = I_{0.5}$

+) При закрытии 1 зоны все остальные зоны останутся на месте, спиралька Френеля крутанется на 180, но ее свойства почти сохранятся.

$A_0 = A \;\Rightarrow\; I_0 = I$

21.31

Теория:

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля все открытыее участки волновой поверхности являются источником вторичных волн, которые интерферируя создают дифракционную картину (элементы свободной волновой поверхности от одной щели и от N щелей)

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{\beta}N\alpha}{N\sin\frac{\alpha}{\beta}\alpha}\right)^2$$

где $\alpha = \frac{kb}{2}\sin\theta$ ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$; θ – угол направления на max или min)

I_0 – интенсивность нулевого максимума (в центре дифракционной картины)

Условие минимумов ($I = 0$):

1) $\mathrm{b}\sin\theta = p\lambda, p \in Z; p \neq 0$ (1)

2) дополнительные минимумы: $d\sin\theta = \frac{q}{N}\lambda; q \in Z, q \neq mN, m \in Z$ (2)

Условие максимумов (главных): ($I \neq 0$): $d\sin\theta = m\lambda; m \in Z$ (3)

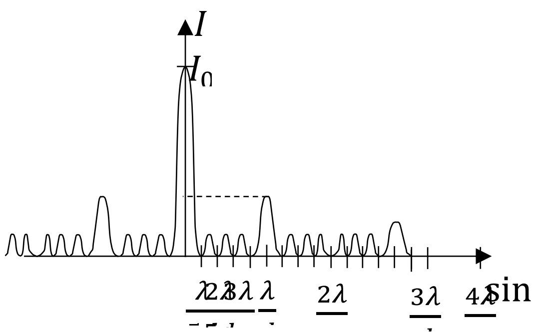
Если совпадает условие (3) и (1), то максимума не будет, будет минимум. Это зависит от N и соотношения $\frac{d}{b}$.

Между главными максимумами: $N-1$ дополнительный минимум и $N-2$ дополнительных максимумов.

Количество главных максимумов: $m = \left[\frac{b}{\lambda}\right]$ (целая часть)

Непосредственно задача:

$N = 5; \frac{d}{b} = 2; I(\sin\varphi) - ?$



главные максимумы:

0	$\frac{\lambda}{d}$	$\frac{2\lambda}{d}$	$\frac{3\lambda}{d}$	...
$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	...

главные минимумы: $\frac{\lambda}{b} = \frac{2\lambda}{d}; \frac{2\lambda}{b} = \frac{4\lambda}{d}; \frac{3\lambda}{b} = \frac{6\lambda}{d}; \frac{4\lambda}{b} = \frac{8\lambda}{d}$ ...

Таким образом при $\sin\varphi = \frac{2\lambda}{d}; \frac{4\lambda}{d}$ ... будет минимум.

дополнительный минимум (3): $\frac{\lambda}{5d}; \frac{2\lambda}{5d}; \frac{3\lambda}{5d}; \frac{4\lambda}{5d}$ ...

21.36 Найти угловую дисперсию D (в угл. мин/нм) дифракционной решетки для длины волны $\lambda = 550$ нм, в спектре третьего порядка. Ширина решетки $\mathrm{l} = 2$ см, общее число штрихов $N = 4000$. Свет падает на решетку нормально.

$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$ $\quad d\sin\varphi = m\lambda \rightarrow$ Возьмем дифференциал от лев. и прав. части.

$\delta(d\sin\varphi) = \delta(m\lambda); d\delta(\sin\varphi) = m\delta\lambda; \quad d\cos\varphi\,\delta\varphi = m\delta\lambda$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi} \qquad d = \frac{l}{N}$$

$$d\sin\varphi = m\lambda \;\rightarrow\; \sin\varphi = \frac{m\lambda}{d} \;\rightarrow\; \cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{m^2\lambda^2}{d^2}} = \frac{\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}}{d}$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}} = \frac{mN}{\sqrt{l^2 - m^2\lambda^2N^2}} = \frac{mN}{m\lambda N\sqrt{\frac{l^2}{m^2\lambda^2N^2} - 1}} = \frac{1}{\lambda\sqrt{\frac{l^2}{m^2\lambda^2N^2} - 1}}$$

§1. Электр. поле в вакууме, его характеристики
§2 Пример расчета эл.стат. поля на основе принципа суперпоз..
§3. Поток вкт-ра E. Т-ма Гаусса в интегр. и диф. форм-ках.
§4. Пример расчета поля вкт-ра $\boldsymbol{E}$ с помощью т-мы Гаусса
§5.Теорема о циркуляции вектора напряженности.
§6. Электр. диполь. Сила, дейс. на дип. Эн. дип. в эл. поле.
§7. Проводники в электрич. поле. Поля внутри проводника и у его поверхности. Электроемкость уединенного проводника.
§8. Электрическое поле в веществе. Связанные и сторонние заряды. Поляризованность вещества P(вект).
§9. Теорема Гаусса для вектора $\vec{P}$.
§10. Вектор электрического смещения $\vec{D}$. Теорема Гаусса для $\vec{D}$.
§11. Электрические условия на границе раздела двух диэлектриков.
§12. Электрическая энергия системы зарядов.
Энергия электрического поля. Плотность энергии.
§13. Сила и плотн.тока. Ур-ие непрер-сти. Усл-ие стацион. Тока
§14.Закон Ома для однородных проводников. Закон Ома в локальной дифференциальной форме
§15.Сторонние силы. Обобщенный закон Ома в дифференциальной форме
§16. Закон Джоуля-Ленца. Мощность.
§17.Вектор магнитной индукции $\vec{\mathrm{B}}$. Магнитное поле равномерно движущегося заряда. Принцип суперпозиции полей
§18.Закон Био-Савара-Лапласа. Примеры расчета магн. полей
§19.Пример расчета поля линейного проводника с током
§20 Т-ма Гаусса для вкт-ра B
§21 Т-ма о циркуляции для вкт-ра B
§22 Примеры расчета вкт-ра B с помощью т-мы о циркуляции
§23. Эффект Холла
§24 Конур с током в магнитном поле
§25. Намагниченность. Токи намагничивания
§26. Циркуляция вектора намагниченности
§27. Вектор напряжённости магнитного поля H. Теорема о циркуляции вектора H
§28. Условия для магнитного поля на границе 2-х магнитов
§29. Кривая намагничивания для ферромагнетиков. Гистерезис.
§30. Явление электромагнитной индукции. Опыты Фарадея. Закон электромагнитной индукции (ЭМИ).
§31. Явление самоиндукции. Индуктивность.
§32.Ток при размыкании цепи
§33.Ток при замыкании цепи
§34.Взаимная индукция

§35.Энергия магнитного поля. Плотность энергии
§36. Свободные колебания в контуре без активного сопр.
§37. Свободные затухающие колебания в контуре.
§38. Уравнение Максвелла. Ток смещения.
§39 .Основные свойства электромагнитных волн
Электромагнитные волны
§40. Поперечность эл/магн волн. Связь мгновенных значений Е и Н
Поперечность эл/магн волн
§41. Вектор Пойдинга
§42. Давление производимое эл/магн волной
§43. Эффект Доплера для электромагнитных волн.
§44. Шкала электромагнитной волны. Показатель преломления. Оптическая длина пути
§45. Волновой пакет. Монохромотичность световой волны. Интенсивность световой волны
§46. Когерентность световых волн. Поперечная когерентность.
§47. Явление интерференции световых волн.
§48. Опыт Юнга. Интерфер. света от двух когерентн. Источников
§49. Изменение фазы световой волны при отражении от границы раздела двух сред
§50. Интерференция световой волны на тонкой пленке
§51. Интерференция когерентных волн: Кольца Ньютона
§52. Многолучевая интерференция
§53.Интерферометр Майкельсона
§54. Дифракция. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракция Френеля и Фраунгофера.
§55. Метод зон Френеля.
§ 56. Спираль Френеля
§ 57. Дифракция Френеля на круглом отверстии.
§58. Дифракция Френеля на круглом диске.
§59. Дифракция Фраунгофера на плоской щели
§60. Дифракция Фраунгофера на диф. решетке.
§61. Дифракция волн на двумерных структурах.
§62. Понятие о голограмме
§63. Естественный и поляризованный свет. Плоско-эллиптически- и по кругу поляризованная световая волна.
§64. Закон Малюса
§65. Поляризация света при отражении и преломлении
§66.Двулучепреломление
§67.Интерференция поляризованного света
§68. Искусственная анизотропия.