1.23) Найти область определения функции.

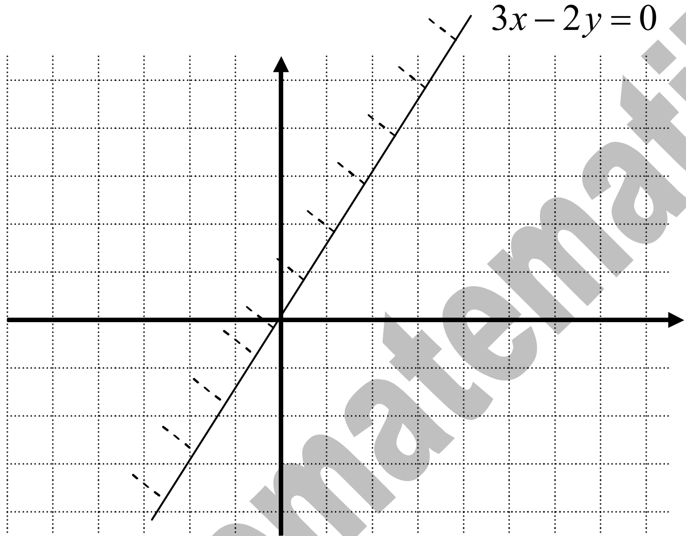
$$z = \frac{\sqrt{3x-2y}}{x^2+y^2+4}$$

Учитываем, что знаменатель функции не может быть равен нулю и выражение под знаком квадратного радикала больше либо равно нулю.

$$\begin{cases} 3x-2y \ge 0 \\ x^2+y^2+4 \ne 0 \end{cases}$$

Второе условие выполняется всегда.

Строим на плоскости.



Область определения – все точки декартовой плоскости, лежащие выше прямой $3x-2y=0$ и на этой прямой.

2.23) Найти частные производные и частные дифференциалы функции.

$$z = ctg\sqrt{\frac{x}{x-y}}$$

Найдём частные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(ctg\sqrt{\frac{x}{x-y}} \right)'_x = -\frac{1}{\sin^2\sqrt{\frac{x}{x-y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x-y}}} \cdot \frac{x-y-x}{(x-y)^2} =$$

$$= -\frac{y}{2(x-y)^2}\sqrt{\frac{x-y}{x}}\operatorname{cosec}^2\sqrt{\frac{x}{x-y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(ctg\sqrt{\frac{x}{x-y}} \right)'_x = -\frac{1}{\sin^2\sqrt{\frac{x}{x-y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x-y}}} \cdot \frac{1}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{1}{2(x-y)^2}\sqrt{\frac{x-y}{x}}\operatorname{cosec}^2\sqrt{\frac{x}{x-y}}$$

Частные дифференциалы:

$$d_x z = -\frac{y}{2(x-y)^2}\sqrt{\frac{x-y}{x}}\operatorname{cosec}^2\sqrt{\frac{x}{x-y}}dx$$

$$d_y z = \frac{1}{2(x-y)^2}\sqrt{\frac{x-y}{x}}\operatorname{cosec}^2\sqrt{\frac{x}{x-y}}dy$$

3.23) Вычислить значения частных производных $f_x'(M_0)$, $f_y'(M_0)$, $f_z'(M_0)$ для данной функции $f(x,y,z)$ в данной точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$f(x,y,z) = -\frac{2x}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

$M_0(3,0,1)$

Найдём частные производные и их значения в точке M_0

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2xz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right/_{M_0} = -\frac{2}{\sqrt{0^2+1^2}} = -2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right/_{M_0} = \frac{2\cdot 3\cdot 0}{\sqrt{(0^2+1^2)^3}} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right/_{M_0} = \frac{2\cdot 3\cdot 1}{\sqrt{(0^2+1^2)^3}} = 6$$

4.23) Найти полный дифференциал функции.

$$z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}$$

Найдём сначала частные производные.

$$(\sqrt{3x^2-y^2+x})_x' = \frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2-y^2+x}}$$

$$(\sqrt{3x^2-y^2+x})_y' = -\frac{y}{\sqrt{3x^2-y^2+x}}$$

Полный дифференциал:

$$dz = \frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2-y^2+x}}dx - \frac{y}{\sqrt{3x^2-y^2+x}}dy$$

5.23) Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$$

$$x = \sin 2t$$

$$y = tg^2 t$$

$$t_0 = \frac{\pi}{4}$$

Производную сложной функции ищем в виде:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2tgt}{\cos^2 t}$$

$$\frac{du}{dt} = (\frac{1}{tg^2 t} + \frac{tg^2 t}{\sin^2 2t}) \cdot 2\cos 2t + (-\frac{\sin 2t}{tg^4 t} - \frac{1}{\sin 2t}) \cdot (\frac{2tgt}{\cos^2 t})$$

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t_0 = \frac{\pi}{4}} = (\frac{1}{tg^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{tg^2 \frac{\pi}{4}}{\sin^2 \frac{\pi}{2}}) \cdot 2\cos\frac{\pi}{2} + (-\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{tg^4 \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}) \cdot (\frac{2tg\frac{\pi}{4}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}}) =$$

$$= (\frac{1}{1} + \frac{1}{1}) \cdot 2 \cdot 0 + (-\frac{1}{1} - \frac{1}{1}) \cdot \frac{2 \cdot 1}{\frac{1}{2}} = 0 + (-2) \cdot 4 = -8$$

6.23) Вычислить значения частных производных функции $z=(x,y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

$x^2-y^2-z^2+6z+2x-4y+12=0 \qquad M_0(0,1,-1)$

В данном случае

$F(x,y,z)=x^2-y^2-z^2+6z+2x-4y+12$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$$

$F'_x=2x+2$

$F'_z=-2z+6$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x+2}{-2z+6}=-\frac{x+1}{-z+3}=\frac{x+1}{z-3}$$

В точке M_0

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right/_{M_0}=\frac{0+1}{-1-3}=-\frac{1}{4}=-0,25$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

$F'_y=-2y-4$

$F'_z=-2z+6$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-2y-4}{-2z+6}=-\frac{-y-2}{-z+3}=\frac{y+2}{3-z}$$

В точке M_0

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right/_{M_0}=\frac{1+2}{3+1}=\frac{3}{4}=0,75$$