КОНСТРУИРОВАНИЕ ПРОГРАММ

Лекция № 02. Представление данных в ЭВМ

Преподаватель:
Поденок Леонид Петрович
505а-5, + 375 17 293 8039
prep@lsi.bas-net.by

ftp://student@lsi.bas-net.by/

Кафедра ЭВМ, 2021

Оглавление

Взаимодействие и правила поведения на занятиях

Язык общения — русский
Фото- и видеосъемка запрещается, болтовня и прочее мычание тоже
Использование мобильных гаджетов может вызвать проблемы

`prep@lsi.bas-net.by`
`ftp://student@lsi.bas-net.by/`

Старосты групп отправляют на **prep@** со своего личного ящика сообщение, в котором указывают свой телефон и ящик, к которому имеют доступ все студенты группы. В этом же сообщении в виде вложения приводят списки своих групп.

Формат темы этого сообщения: 010901 Фамилия И.О. Список группы

```
Subj: [010901 Фамилия И.О. Суть сообщения     ]
```

Правила составления сообщений

- текстовый формат сообщений;

Удаляется на сервере присланное в ящик prep@ все, что:

- без темы;
- имеет тему не в формате;
- содержит html, xml и прочий мусор;
- содержит рекламу, в том числе и сигнатуры web-mail серверов;
- содержит ссылки на облака и прочие гуглопомойки вместо прямых вложений.

Системы счисления и представление чисел в ЭВМ

Математическое понятие числа

– натуральные – $\mathbb{N}$ (natural);
– целые – $\mathbb{Z}$ (integer, integral);
– рациональные – $\mathbb{Q}$ (rational);
– действительные (вещественные) – $\mathbb{R}$ (real);
– комплексные – $\mathbb{C}$ (complex);
– гиперкомплексные (кватернионы) $\mathbb{H}$ (quaternion, hypercomplex).

Свойства числовых множеств
- замкнутость;
- коммутативность (переставновочность);
- ассоциативность (сочетательность);
- дистрибутивность (распределительность);
- существование обратного числа;
- существование противоположного числа.

Свойство замкнутости некоторого множества относительно математической операции означает, что результат операции принадлежит этому множеству

$$c = a \star b \quad a \in M, b \in M, c \in M.$$

Свойство коммутативности бинарной операции $\star$ (переместительности)

$$a \star b = b \star a.$$

Пример: $$a + b = b + a; \quad a \cdot b = b \cdot a;$$

Свойство ассоциативности бинарной операции $\star$ (сочетательности)

$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c).$$

Пример: $$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c),$$

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Свойство дистрибутивности бинарной операции $\circ$ (распределительности) относительно бинарной операции $\star$

$$a \circ (b \star c) = (a \circ b) \star (a \circ c).$$

Пример: $$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Обратное и противоположное числа

$$b \cdot a = 1,$$

$$b + a = 0.$$

Множество целых чисел $\mathbb{Z}$

Целые числа — числа, получаемые объединением натуральных чисел с множеством чисел противоположных натуральным и нулём

$$\mathbb{Z} = \{\cdots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}\,.$$

Противоположное число

$$b + a = 0.$$

Множество натуральных чисел входит в множество целых чисел

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Любое целое число можно представить как разность двух натуральных.

Целые числа замкнуты относительно сложения, вычитания и умножения (но не деления); в общей алгебре такая алгебраическая структура называется кольцом (ring).

Вычеты по модулю $\mathbb{Z}/n$

Сравнение целых по модулю натурального числа.

Вычеты — остатки от деления целых чисел на некоторое фиксированное натуральное число, называемое модулем. Арифметические операции с остатками чисел по фиксированному модулю образуют модульную (модулярную) арифметику, которая широко применяется в математике, информатике и криптографии.

Вычеты по модулю простого числа $\mathbb{Z}/p$ замкнуты также относительно деления — в общей алгебре такая алгебраическая структура называется конечным полем или полем Галуа (finite field или Galois field).

Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$

Рациональные числа — числа, представимые в виде дроби

$$\frac{m}{n}, \quad (n \neq 0).$$

где m и n — целые числа. Иногда n полагают натуральным числом, возлагая ответственност за знак дроби на числитель.

Рациональные числа замкнуты относительно всех четырёх арифметических действий — сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на ноль). В общей алгебре такая алгебраическая структура называется полем (field).

Обратное число

$$b \cdot a = 1,$$

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$

Действительные (вещественные) числа – числа, представляющие собой расширение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$, замкнутое относительно некоторых важных для математического анализа операций (*квадратура круга, соизмеримость*...).

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ включает множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и множество иррациональных чисел $\mathbb{I}$, не представимых в виде отношения целых.

Действительные числа подразделяются на алгебраические и трансцендентные. При этом каждое действительное трансцендентное является иррациональным, а каждое рациональное число – действительным алгебраическим.

Алгебраическое число – корень многочлена (не равного тождественно нулю) с коэффициентами из $\mathbb{Q}$

$$0 = P^n(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n \quad a_k \in \mathbb{F}. \tag{1}$$

Поле алгебраических чисел обычно обозначается $\mathbb{A}$.

Трансцендентное число – это вещественное или комплексное число, не являющееся алгебраическим – иными словами, число, которое не может быть корнем многочлена с рациональными коэффициентами (не равного тождественно нулю).

Примеры трансцендентных чисел: число π; число e; десятичный логарифм любого натурального числа, кроме чисел вида $10^{\pm n}$; $\sin a$, $\cos a$ и $\operatorname{tg} a$ для любого ненулевого алгебраического числа a.

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$

Комплексные числа – числа, являющиеся расширением множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Они могут быть записаны в виде

$$z = x + i\,y,$$

где i – т. н. «мнимая» единица, для которой выполняется равенство $i^2 = 1$.

Комплексные числа используются при решении задач электротехники, гидродинамики, картографии, квантовой механики, теории упругости и многих других.

Комплексные числа подразделяются на алгебраические и трансцендентные, как и действительные.

Множество гиперкомплексных чисел $\mathbb{H}$

Гиперкомплексные числа – числа, являющиеся расширением множества комплексных чисел $\mathbb{C}$. Они могут быть записаны в виде

$$\lambda = a + i\,b + j\,c + k\,d,$$

где a, b, c и d – действительные числа; i, j и k – «мнимые» единицы, для которых выполняются следующие соотношения

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k.$$

Гиперкомплексные числа (кватеринионы) широко используются в теоретической механике для представления поворотов, а также в инерциальной навигации.

Представление чисел

Для перечисленных множеств чисел справедливо следующее выражение

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}.$$

При этом каждое множество из указанных справа от символа «$\subset$» может быть сконструировано из множеств, указанных слева.

Система счисления (numeral system/system of numeration) — символический метод записи чисел, представление чисел с помощью письменных знаков, например букв или цифр.

Система счисления должна:

- дать каждому числу уникальное (или, по крайней мере, стандартное) представление;
- отражать алгебраическую и арифметическую структуру чисел.

Системы счисления подразделяются на:

- позиционные;
- непозиционные;
- смешанные.

Позиционная система счисления

Позиционная система счисления – система счисления, в которой значение каждого числового знака (цифры) в записи числа зависит от его позиции (разряда).

Позиционная система счисления определяется целым числом $b > 1$, называемым основанием системы счисления.

Система счисления с основанием b также называется b-ичной (двоичной, троичной, восьмеричной, десятичной и т.п.).

Целое число без знака x (натуральное с нулем) в b-ичной системе счисления представляется в виде конечной линейной комбинации степеней числа b:

$$x = a_0 + a_1\,b + a_2\,b^2 + \cdots + a_{n-2}\,b^{n-2} + a_{n-1}\,b^{n-1} = \qquad (2)$$

где a_k – целые числа, называемые ***цифрами***, удовлетворяющими неравенству $0 \leqslant a_k < b$.

Данное представление является единственным.

Каждый базисный элемент b^k таком представлении называется разрядом (позицией).

Старшинство разрядов и соответствующих им цифр определяется номером разряда (позиции) k, который является показателем степени.

С помощью n позиций в системе счисления с основанием b можно записать целые числа в диапазоне от 0 до $b^n - 1$, т.е. всего b^n различных чисел.

Непозиционные системы счисления

В непозиционных системах счисления величина, которую обозначает цифра, не зависит от положения в числе.

Система остаточных классов (СОК). Residue number system (RNS)

Представление числа в системе остаточных классов основано на понятии вычета и китайской теореме об остатках.

Вычет числа n по модулю p – остаток от деления n на p

$$a = k \cdot p + r, \quad r < p.$$

Записывается, как

$r = a \mod p = \langle a \rangle_p$ – математическая запись

`r = a % p; -- в языке программирования Си.`

СОК определяется набором попарно взаимно простых модулей $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ с произведением $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$ так, что каждому целому числу x из отрезка $[0, M-1]$ ставится в соответствие набор вычетов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_k = \langle x \rangle_{m_k}$.

При этом **китайская теорема об остатках** гарантирует однозначность такого представления для чисел из отрезка $[0, M-1]$.

Преимущества:

В СОК арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление) выполняются покомпонентно, если про результат известно, что он является целочисленным и также лежит в диапазоне $[0, M-1]$.

Недостатки:

– возможность представления только ограниченного количества чисел;
– отсутствие эффективных алгоритмов для сравнения чисел, представленных в СОК;
– вычислительная сложность деления (нахождения обратной величины).

Используется для выполнения операций с большими целыми числами, в частности в криптографии и для точного решения плохо обусловленных линейных систем высокого порядка.

Двоичная система счисления

Двоичная система счисления — позиционная система счисления с основанием 2. Непосредственно реализуется в цифровых электронных схемах на логических вентилях, в связи с чем используется практически во всех современных компьютерах и прочих вычислительных электронных устройствах.

Двоичная запись чисел

В двоичной СС числа записываются с помощью пары символов (0 и 1). Обычно записанное число снабжают указателем справа внизу. Например, число в десятичной системе 5_{10}, в двоичной 101_2.

Иногда двоичное число обозначают префиксом **`0b`**, например **`0b101`**.

Натуральные числа

Натуральное число, записываемое в двоичной системе счисления как

$$(a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0)_2,$$

имеет значение:

$$(a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0)_2 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k 2^k, \tag{3}$$

где: n — количество цифр (знаков) в числе, a_k — цифры из множества $\{0, 1\}$, k — порядковый номер цифры.

Отрицательные числа

Отрицательные двоичные числа обозначаются так же как и десятичные — знаком «−» перед числом. Отрицательное целое число, записываемое в двоичной системе счисления $(-a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0)_2$, имеет величину:

$$(-a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0)_2 = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k 2^k.$$

В вычислительной технике широко используется запись отрицательных двоичных чисел в **дополнительном коде**.

```
0100 — +4
0011 — +3
0010 — +2
0001 — +1
0000 —  0               Инверсия
1111 — -1       -0001     →     1110 + 1 → 1111        | → 0000 +1 → 0001 (1)
1110 — -2       -0010     →     1101 + 1 → 1110        | → 0001 +1 → 0010 (2)
1101 — -3       -0011     →     1100 + 1 → 1101        | → 0010 +1 → 0011 (3)
1100 — -4       -0100     →     1011 + 1 → 1100        | → 0011 +1 → 0100 (4)
       -8       -1000     →     0111 + 1 = 1000 = 8


-1    1111...1111 1111
```

Дробные числа

Дробное число можно представить, используя отрицательные степени основания

$$x = a_{n-1}\, b^{n-1} + a_{n-2}\, b^{n-2} + \cdots + a_2\, b^2 + a_1\, b + a_0 + a_{-1}\frac{1}{b} + a_{-2}\frac{1}{b^2} + \cdots \qquad (4)$$

и отделять в записи дробную часть от целой с помощью запятой. Тогда число, записываемое в двоичной системе счисления как $(a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1\, a_0\ ,\ a_{-1}\, a_{-2} \ldots a_{-(m-1)}\, a_{-m})_2$, будет иметь величину:

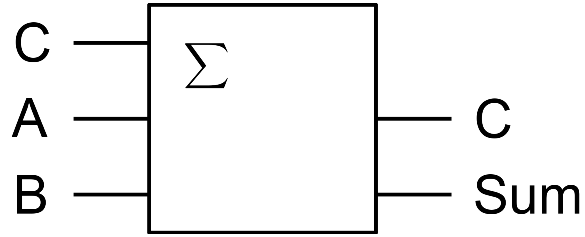
$$(a_{n-1}a_{n-2} \ldots a_1a_0\ ,\ a_{-1}a_{-2} \ldots a_{-(m-1)}a_{-m})_2 = \sum_{k=-m}^{n-1} a_k 2^k,$$

где: m – число цифр дробной части числа, a_k – цифры из множества $\{0, 1\}$.

Сложение чисел, записанных в двоичной СС

Таблица сложения (наивная)

	0	1
0	0	1
1	1	10

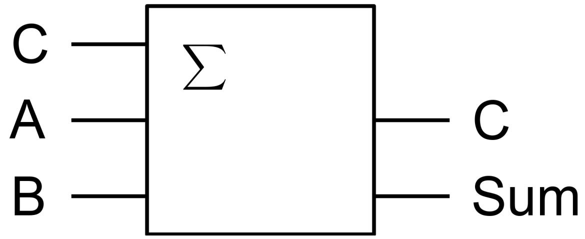


	C	7 (128)	6 (64)	5 (32)	4 (16)	3 (8)	2 (4)	1 (2)	0 (0)
Перенос C (Carry)		1	1	1	0	0	0	0	?
Слагаемое A ($1101\ 0010_2 = 210_{10}$)		1	1	0	1	0	0	1	0
Слагаемое B ($1011\ 1001_2 = 185_{10}$)		1	0	1	1	1	0	0	1
Сумма S		1	0	0	0	1	0	1	1
Перенос C	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Сложение чисел, записанных в двоичной СС

Таблица сложения

C	A	B	$\sum$	C	Sum
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	2	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	2	1	0
1	1	0	2	1	0
1	1	1	3	1	1



Умножение чисел, записанных в двоичной СС

Таблица умножения

	0	1
0	0	0
1	0	1

	C	7 (128)	6 (64)	5 (32)	4 (16)	3 (8)	2 (4)	1 (2)	0 (0)
Сомножитель A ($1101_2 = 13_{10}$)						1	1	0	1
Сомножитель B ($1010_2 = 10_{10}$)						1	0	1	0
						0	0	0	0
					1	1	0	1	
				0	0	0	0		
			1	1	0	1			
Произведение P		1	0	0	0	0	0	1	0
Перенос C				1	1	1			

Вычитание. Представление отрицательных чисел в дополнительном коде

Вычитание можно представить так

$$c = a - b = a + (-b).$$

Число 210:

1	1	0	1	0	0	1	0

1) наивное представление — добавляем знаковый разряд

S	1	1	0	1	0	0	1	0

s = 0 — число положительное 210, s = 1 — число отрицательное -210.

Вычитание, однако, не упрощается — необходимо иметь разную аппаратуру для сложения положительных отрицательных чисел. Плюс, у нас появилось два нуля.

2) Число в дополнительном коде

Исходное число	210	1	1	0	1	0	0	1	0

Но отрицательное число формируем следующим образом:

Инвертируем все разряды	45	0	0	1	0	1	1	0	1
Добавляем единицу		0	0	0	0	0	0	0	1
Число в дополнительном коде	46	0	0	1	0	1	1	1	0
Проверяем	(210 + 46) % 256 = 0	0	0	0	0	0	0	0	0

Операции над двоичными представлениями [целых чисел]

Кроме целых чисел упорядоченные последовательности 0 и 1 используются для двоичного представления и других информационных объектов, например, битовых строк, символов некоторого алфавита, символьных строк и прочих.

Операции над числами и прочими двоичными представлениями делятся на арифметические и логические.

Они бывают одноместные (унарные) и двуместные (бинарные).

Одноместные:

– логические – поразрядная инверсия 0010 1101 → 1101 0010; (not)

– арифметические – смена знака 0010 1101 → 1101 0011; (neg)

– сдвиги.

Двуместные:

– арифметические – сложение, вычитание, умножение, целочисленное деление.

– логические – поразрядные AND, OR, XOR.

AND

	0	1
0	0	0
1	0	1

OR

	0	1
0	0	1
1	1	1

XOR

	0	1
0	0	1
1	1	0

	0	1
0	1	0
1	0	1

Сдвиги

c	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	x	
a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	**0**	влево (логический/арифметический)	sal, sll
a_0	**0**	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	вправо логический	slr
a_0	$\mathbf{a_7}$	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	вправо арифметический	sar
a_0	$\mathbf{a_0}$	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	вправо циклический	ror
a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	a_7	влево циклический	rol
a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	c	влево циклический через перенос	rcr
a_0	c	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	вправо циклический через перенос	rcl

s – shift
r – roll

a – arithmetic
l – logic
c – carry

l – left
r – right

Другие типы данных

Кроме чисел есть другие типы данных, которые могут быть представлены в двоичном виде.

В области телекоммуникаций и компьютерных технологий используется стандарт, описывающий структуры данных для представления, кодирования, передачи и декодирования данных — **ASN.1** (Abstract Syntax Notation One).

Начиная с 1995 года, существенно пересмотренный ASN.1 описывается стандартом X.680.

В России ASN.1 стандартизирован по:

ГОСТ Р ИСО/МЭК 8824-1-2001

ГОСТ Р ИСО/МЭК 8825-93