Aufgabenstellung

Beantworten Sie die folgenden Fragen:
(Beweisen Sie oder finden Sie ein Gegenbeispiel.)

1. Sei $(A, +, 0, -)$ eine Gruppe (und daher auch eine Halbgruppe), und $(B, +)$ eine Unterhalbgruppe von $(A, +)$.
   Kann B durch geeignete Wahl von Operationen $0'$, $-'$ zu einer Gruppe $(B, +, 0', -')$ gemacht werden?
   (Analog sind die folgenden Aufgaben zu verstehen, d.h., es geht immer darum, neue Operationen/Konstante hinzuzufügen, niemals neue Elemente.)
2. Sei $(A, +, 0)$ ein Monoid (und daher auch eine Halbgruppe $(A, +)$), und B eine Unterhalbgruppe von A, die zu einem Monoid gemacht werden kann.
   Ist B ein Untermonoid?
3. Sei A eine Gruppe (und daher auch eine Halbgruppe), und B eine Unterhalbgruppe von A, die zu einer Gruppe gemacht werden kann.
   Ist B eine Untergruppe?
4. Sei A ein 1-Ring und B ein Unterring, der zu einem 1-Ring gemacht werden kann.
   Ist B ein Unter-1-Ring?

---

1) Frage: Kann B durch Definition von $0'$ und $-'$ zu einer Gruppe gemacht werden?

Behauptung: Falsch

Gegenbeispiel:

- $A = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ ist eine Gruppe
- $B = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Unterhalbgruppe

Wähle 1 als neutrales Element ⇒ dann müsste für jedes $n \in B$ auch $n^{-1} \in B$ gelten
Aber z. B. $1/2 \notin \mathbb{N}$ ⇒ kein Inverses
$\Rightarrow$ B kann **nicht** zu einer Gruppe gemacht werden

---

2) $(A, +, 0)$ Monoid, $B \subseteq A$ Unterhalbgruppe Frage: Kann B mit neutralem Element $0' \in B$ zu einem Monoid gemacht werden?

Behauptung: Falsch

Beispiel:

- $A = (\mathbb{N}, \max, 0)$ ist ein Monoid
- $B = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \max)$ ist Halbgruppe, **aber** $0 \notin B$ ⇒ kein neutrales Element in B
  $\Rightarrow B$ ist **kein** Untermonoid

---

3) $(A, +, 0, -)$ Gruppe, $B \subseteq A$ Unterhalbgruppe Frage: Kann B durch Definition von $-'$ und $0'$ zu einer Gruppe gemacht werden?

Behauptung: Wahr

Beweis: Zeige, dass $0' = 0$

Sei $b \in B$, dann:

$$b + 0' = b \Rightarrow 0' = -b + b = 0 \tag{1}$$

Außerdem:

$$b + (-b) = 0 \Rightarrow -b = -_B b \tag{2}$$

⇒ Da B eine Unterhalbgruppe ist und $(B, +, 0, -)$ eine Gruppe ist, folgt:
B ist **Untergruppe** von A

---

4) A ist 1-Ring: $(A, +, -, 0)$ abelsche Gruppe, $(A, \cdot, 1)$ kommutatives Monoid, mit distributivem Gesetz Frage: Wenn $B \subseteq A$ ein Unterring ist, der zu einem 1-Ring gemacht werden kann (mit $1 \in B$), ist B dann ein Unter-1-Ring?

Behauptung: Falsch

Gegenbeispiel:

- $A = (\mathbb{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$
- $B = 2\mathbb{Z}$ (gerade Zahlen)

⇒ B ist Unterring von $\mathbb{R}$
aber: $1 \notin 2\mathbb{Z}$ ⇒ B ist **kein** Unter-1-Ring
