

# 1 Grundlagen zu Differentialgleichungen

schau nochmal drüber: zu redundant, zu ausführlich, Übergang zum nächsten Kapitel, etc...

richtige Quelle zu Seminarpaper aus Slobodeckij, dortige Quellen z.b.

In diesem Abschnitt möchten wir eine kurze Einführung in die für diese Arbeit nötigen Grundlagen zur Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen geben. Im Folgenden werden wir uns an die Werke [9], [3] und [6] halten, und verweisen für weitere Details und Beweise auch auf diese.

Da wir in dieser Arbeit Formoptimierung bei Differentialgleichungen betreiben möchten, stellen wir hier die von uns ausgewählte Modellgleichung, später im Kontext der Formoptimierung auch *Zustandsgleichung* (engl. *state equation*) genannt, vor. Es handelt sich dabei um das bekannte Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta y &= f \text{ in } \Omega \\ y &= 0 \text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei  $\Delta$  den Laplace-Operator meint, und  $\Omega$  ein offenes, beschränktes, zusammenhängendes Gebiet des  $\mathbb{R}^n$  ist. Funktionen  $y \in C^2(\Omega)$ , welche die obigen Gleichungen erfüllen, werden klassische oder auch starke Lösungen des Poissonproblems genannt. Betrachtet man das Poisson-Problem für kompliziertere Gebiete  $\Omega$  und Funktionen  $f$  auf  $\Omega$ , so ist im Allgemeinen nicht klar, ob eine Lösung existiert und welche Regularität diese besitzt. Aus diesem Grund führen wir die bekannten Sobolev-Räume und exemplarische Elemente der schwachen Lösungstheorie des Poisson-Problems ein. Wir beginnen mit der Definition von Sobolev-Räumen.

**Definition 1** (Sobolev-Räume). Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein offenes, beschränktes, zusammenhängendes Gebiet, weiterhin sei  $1 \leq p < \infty$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Wir definieren eine Norm durch

$$\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)} : C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, y \rightarrow \sum_{|\alpha| \leq m} \left( \int_{\Omega} |D^\alpha y(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

genannt *m,p-Sobolev-Norm*, wobei  $\alpha$  ein Multiindex ist. Dann heißt die Vervollständigung von  $C^\infty(\Omega)$  bezüglich  $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$  *Sobolev-Raum der Ordnung m*, bezeichnet mit  $W^{m,p}(\Omega)$ . Die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\Omega)$  bezüglich  $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$  bezeichnen wir mit  $W_0^{m,p}(\Omega)$ . Im Falle  $p = 2$  nennen wir diese Sobolev-Räume  $H^m(\Omega)$ , beziehungsweise  $H_0^m(\Omega)$ .

## 1 Grundlagen zu Differentialgleichungen

Beweise zu der in der obigen Definition getroffene Behauptung, die Abbildung  $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$  definiere eine Norm, finden sich in den Eingang dieses Abschnittes genannten Werken. Die so definierten Sobolev-Räume enthalten per Konstruktion die  $C^\infty$ - beziehungsweise  $C_0^\infty$ -Funktionen als dichte Teilmenge, was als Satz von Meyers-Serrin bekannt ist. Ein alternativer Zugang zu den Sobolev-Räumen bietet die Definition über Abbildungen mit existierenden m-ten schwachen Ableitungen. In der Tat sind diese Definitionen äquivalent, weshalb wir uns im Hinblick auf die weiteren Sätze hier eine kurze Definition geben. Bei Interesse verweisen wir auf [3].

**Definition 2** (schwache Ableitung). Sei ein  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränktes, offenes, zusammenhängendes Gebiet. Sei  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  und  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  ein Multiindex. Dann heißt eine Funktion  $u \in \mathbb{L}^1(\Omega)$   $\alpha$ -te schwache Ableitung von  $f$ , falls gilt

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

wobei  $C_c^\infty(\Omega)$  der Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger ist.

In Anlehnung an das Fundamentallemma der Variationsrechnung verwenden wir nun, ausgehend von 1.1, die Green'schen Formeln und Testfunktionen  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ , um die sogenannte schwache Formulierung des Poisson-Problems herzuleiten. Es sei  $n$  das äußere Normalenvektorfeld von  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (-\Delta y(x)) v(x) dx \\ & \stackrel{\text{Green}}{=} \int_{\Omega} \nabla y(x) \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y(s)}{\partial n(s)} v(s) ds \\ & \stackrel{v|_{\partial\Omega}=0}{=} \int_{\Omega} \nabla y(x) \nabla v(x) dx \end{aligned}$$

Somit lässt sich Problem 1.1 im schwachen Sinne wie folgt definieren, vgl. [6]:

**Definition 3** (schwache Formulierung des Poisson-Problems). Sei  $\Omega$  ein offenes, beschränktes Gebiet des  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ . Dann heißt  $y \in H_0^1(\Omega)$  *schwache Lösung* des Poisson-Problems, falls gilt:

## 1 Grundlagen zu Differentialgleichungen

$$\int_{\Omega} \nabla y(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.2)$$

Aus theoretischer Sicht ist es wichtig zu klären, unter welchen Bedingungen an das Gebiet  $\Omega$  und die Funktion  $f$  Lösungen und Eindeutigkeit dieser gegeben sind. Das klassische Theorem, welches Auskunft hierüber gibt, ist das Lemma von Lax-Milgram, vgl. [6], welchen wir hier nicht in vollster Allgemeinheit und ohne Beweis angeben.

**Theorem 4** (Lemma von Lax-Milgram). Seien  $H$  ein Hilbertraum,  $H^*$  der zugehörige Dualraum und  $a(\cdot, \cdot)$  eine stetige, *koerzive* Bilinearform, d.h. es existiert eine Konstante  $c > 0$ , so dass gilt

$$|a(y, y)| \geq c \|y\|^2 \quad \forall y \in V.$$

Weiterhin sei  $b \in H^*$ . Dann gibt es genau ein  $\tilde{y} \in V$ , so dass gilt

$$a(\tilde{y}, v) = b(v) \quad \forall v \in V.$$

Betrachtet man die linke Seite von 1.2, so sieht man, dass das Integral eine Bilinearform auf dem zugehörigen Sobolevraum definiert. Die Koerzivität dieser Bilinearform ist gesichert durch eine Anwendung der sogenannten Poincaré-Ungleichung, siehe [6] Theorem 6.6. Das Lemma von Lax-Milgram sichert somit für das Poisson-Problem in schwacher Formulierung die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, und wir können im Laufe dieser Arbeit Wohlgestelltheit dieser Modellgleichung voraussetzen. Die Koerzivität als Bedingung an die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  wird in diesem Kontext oft auch *V-Elliptizität* genannt, da die Bilinearform Koerzivität bezüglich der Funktionen  $y \in V$  erfüllt.

Offensichtlich ist jede starke Lösung des Problems 1.1 auch eine schwache Lösung in dem obigen Sinne. Andersherum gilt diese Aussage im Allgemeinen nicht, denn nicht alle schwach differenzierbaren Funktionen besitzen Ableitungen im herkömmlichen/ starken Sinne. Um sich Klarheit über die Regularität bestimmter Lösungen zu verschaffen führen wir hier die sogenannten Sobolev-Einbettungssätze zusammengefasst, und ohne Beweise, auf, vgl. [6], sowie [1].

**Theorem 5** (Einbettungssätze für Sobolevräume). Sei  $\Omega$  ein offenes, beschränktes Gebiet des  $\mathbb{R}^n$  mit Lipschitz-Rand  $\partial\Omega$ . Seien  $k, l, m \in \mathbb{N}$  und  $\alpha \in (0, 1]$ , sowie  $p, q \in [1, \infty)$ . Bezeichne mit  $C^{k, \alpha}(\Omega)$  den Hölderraum der Funktionen mit  $\alpha$ -hölderstetigen  $m$ -ten Ableitungen. Dann gilt:

## 1 Grundlagen zu Differentialgleichungen

(i) (*Morrey*)

Falls  $p < n$  und  $m - \frac{n}{p} \geq k + \alpha$ , so existiert eine Einbettung

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\Omega).$$

Falls  $m - \frac{n}{p} > k + \alpha$ , so ist die Einbettung kompakt.

(ii) (*Rellich-Kondrachov*)

Falls gilt  $k > l$  und  $m - \frac{n}{p} > l - \frac{n}{q}$ , so existiert eine kompakte Einbettung

$$W^{l,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega).$$

Diese Theoreme bieten uns die Möglichkeit, Regularität der Lösung einer PDE zu erhalten. Durch den Satz von Morrey wird auch klar, in welchen Fällen glatte, und somit starke Lösungen für das Poisson-Problem zu erhalten sind, d.h. schwache Lösungen auch starke Lösungen darstellen. Weiterhin möchten wir bemerken, dass die hier genannten Einbettungssätze auch für die sogenannten Sobolev-Slobodeckij-Räume, welche eine Verallgemeinerung der Sobolevräume auf gebrochene Ordnungen  $m \in (0, \infty)$  sind, im selben Wortlaut gelten. Diese werden im Laufe dieser Arbeit bei der Einführung in l-BFGS-Methoden für die Formoptimierung benötigen, weshalb wir diese im Folgenden definieren, vgl [1] und dort angegebene Quellen.

**Definition 6** (Sobolev-Slobodeckij-Räume). Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , sowie  $p \in [1, \infty)$  und  $\sigma \in (0, 1)$ . Wir für messbare Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die sogenannte *Slobodeckij-Halbnorm* durch

$$|u|_{\sigma,p} := \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+\sigma p}} dx dy \right)^{1/p}.$$

Für  $s = m + \sigma$  definieren wir den *Sobolev-Slobodeckij-Raum*  $W^{s,p}(\Omega)$  durch

$$W^{s,p}(\Omega) := \{u \in W^{m,p}(\Omega) : |D^{\alpha}u|_{\sigma,p} < \infty \quad \forall |\alpha| = m\},$$

wobei  $\alpha$  ein Multiindex,  $W^{m,p}(\Omega)$  ein gewöhnlicher Sobolev-Raum und  $D^{\alpha}u$  die  $\alpha$ -te schwache Ableitung von  $u$  ist. Weiterhin definieren wir eine Norm auf diesem Raum durch

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := (\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=m} |D^{\alpha}u|_{\sigma,p}^p)^{1/p}.$$

Mit dieser Norm ist  $W^{s,p}$  ein separabler Banachraum.

## 1 Grundlagen zu Differentialgleichungen

Man sieht, dass in dieser Definition Räume für  $s \in \mathbb{N}$  nicht definiert wurden. Aus diesem Grund verwenden wir im Falle  $s \in \mathbb{N}$  die klassische Definition der Sobolevräume aus 1, womit die Sobolev-Slobodeckij-Räume für alle  $s \in [0, \infty)$  definiert sind. Die Intuition hinter der definierten Halbnorm ist eine Quantifizierung der Regularität der Ableitungen der Ordnung  $m$ . In gewisser Hinsicht sind die Sobolev-Slobodeckij-Räume somit eine Analogie der Hölder Räume  $C^{m,\alpha}(\Omega)$  für schwach differenzierbare Funktionen, für Details siehe etwa [1]. Da die Einbettungssätze 5 wie erwähnt auch für beliebige Ordnungen  $s \in [0, \infty)$  gültig sind, rechtfertigt sich auch die Bezeichnung *Interpolationsraum* für diese Art von Räumen. Zum Abschluss sei zu bemerken, dass die Sobolev-Slobodeckij-Räume nicht mit den Bessel'schen Potentialräumen zu verwechseln sind, welche auch oft die Bezeichnung  $W^{s,p}(\Omega)$  tragen und die klassischen Sobolevräume für gebrochene Ordnungen mittels Fouriermethoden verallgemeinern.

Wir kommen nun abschließend zu dem Spursatz, welcher die Auswertung von schwach differenzierbaren Funktionen auf einem Rand betrachtet. Dieser ist für uns deshalb von Interesse, da im Rahmen der Formoptimierung Auswertungen auf dem Rand, einer Form, natürlich auftreten. Er beschreibt, wieviel Regularität bei Auswertung auf dem Rand verloren geht. Die hier aufgeführt Variante betrachtet allgemeine  $C^{m,1}$ -Ränder, d.h. Ränder die sich als Graph einer Funktion mit Lipschitz-stetiger  $m$ -ten Ableitung darstellen lassen, vgl. [1]. Wir beschränken uns auf den für unsere Zwecke ausreichenden Hilbertraumfall  $p = 2$ , für allgemeinere Varianten und Bedingungen hierzu, siehe etwa [2] oder [1].

**Theorem 7** (Spursatz). Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend mit  $C^{m,1}$ -Rand  $\partial\Omega$ . Zudem sei  $s = m + \sigma > \frac{1}{2}$  mit  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma \in [0, 1)$ . Dann gilt

- (i) Es existiert ein eindeutiger, stetiger Spuroperator  $S : W^{s,2}(\Omega) \rightarrow W^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , mit  $S(u) = u|_{\partial\Omega}$  für alle  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ .
- (ii) Es existiert ein eindeutiger, stetiger Fortsetzungsoperator  $F : W^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow W^{s,2}(\Omega)$  mit  $S \circ F = \text{id}_{W^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$ .

Der Spursatz (engl. *trace theorem*) besagt also unter anderem, dass bei Auswertung einer  $W^{1,2}(\Omega)$ -Funktion auf dem Rand eine halbe Ordnung verloren geht. Aus diesem Grunde werden in folgenden Kapiteln die Räume  $W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$  als die natürlichen Räume für die meisten auf Formen definierten Funktionen auftauchen.

## 1 Grundlagen zu Differentialgleichungen

Zuletzt werden wir im Laufe der Arbeit noch hinreichend starke Regularität für Lösungen des Poisson-Problems benötigen. Aus diesem Grund führen wir hier noch den Satz über Regularität von schwachen Lösungen auf, vgl. [10], 2.13., wobei wir hier den Satz auf den Fall unseres Poisson-Problems spezialisieren.

**Theorem 8** (höhere Regularität schwacher Lösungen). Betrachte das Poisson-Problem 1.1 in schwacher Formulierung. Sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f \in H^m(\Omega)$  und der Rand  $\partial\Omega$  sei von der Ordnung  $C^{m+2}$ . Sei  $y \in H_0^1(\Omega)$  die schwache Lösung des Poisson-Problems. Dann gilt  $y \in H^{m+2}(\Omega)$ .

Im allgemeineren Fall elliptischer Probleme gilt der Satz weiterhin, falls die Koeffizientenfunktionen  $a^{i,j}, b^j, c \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$  sind, vgl. die oben genannte Quelle, wobei  $\bar{\Omega}$  wie üblich der Abschluss von  $\Omega$  bezüglich der euklidischen Metrik ist. Fordert man keine Regularität des Randes  $\partial\Omega$ , so gilt die obige Aussage zwar nicht bis zum Rand, jedoch lokal im Sinne  $y \in H_{loc}^{m+2}(\Omega)$ .

## LITERATUR

### Literatur

- [1] M. Genzen, A. Staab, Prof. E. Emmrich. Sobolew-Slobodeckij-Räume - die Theorie der gebrochenen Sobolew-Räume, Technische Universität Berlin. 2014.
- [2] G. Geymonat. Trace Theorems for Sobolev Spaces on Lipschitz Domains. Necessary Conditions. 2007.
- [3] K. Burg, H. Haf, F. Wille, A. Meister. *Partielle Differentialgleichungen und funktionalanalytische Grundlagen*, 5. Auflage. Vieweg + Teubner Verlag, Springer Fachmedien, 2010.
- [4] B. Zhong P.A. Sherar, C.P. Thompson, B. Xu. An optimization method based on b-spline shape functions & the knot insertion algorithm. *Proceedings of the World Congress on Engineering*, II, 2007.
- [5] Volker Schulz. A riemannian view on shape optimization. *Foundations of computational Mathematics*, 14:483-501, 2014.
- [6] B. Schweizer. *Partielle Differentialgleichungen - Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer Spektrum, 2013.
- [7] Volker Schulz, Martin Siebenborn. Computational comparison of surface metrics for pde constrained shape optimization. *Comput. Methods Appl. Math 2016*, 2016.
- [8] Kevin Sturm. *On shape optimization with non-linear partial differential equations*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2015.
- [9] W. Arendt, K. Urban. *Partielle Differenzialgleichungen - Eine Einführung in analytische und numerische Methoden*. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, 2010.
- [10] Kathrin Welker. *Efficient PDE Constrained Shape Optimization in Shape Spaces*. PhD thesis, Universität Trier, 2016.
- [11] Volker Schulz, Martin Siebenborn, Kathrin Welker. Towards a lagrange-newton approach for constrained shape optimization. *arXiv: 1405.3266v2*, 2014.

## LITERATUR

- [12] Volker Schulz, Martin Siebenborn, Kathrin Welker. Pde constrained shape optimization as optimization on shape manifolds. *Geometric Science of Information, Lecture Notes in Computer Science*, 9389:pp. 499–508, 2015.
- [13] Volker Schulz, Martin Siebenborn, Kathrin Welker. Efficient pde constrained shape optimization based on steklov-poincaré-type metrics. *SIAM J. OPTIM.*, Vol. 26, No. 4, pp. 2800-2819, 2016.
- [14] Jorge Nocedal, Stephen J. Wright. *Numerical Optimization, Second Edition*. Springer, 2006.
- [15] M. C. Delfour, J. P. Zolésio. *Shapes and Geometries: Metrics, Analysis, Differential Calculus, and Optimization, 2nd ed.* SIAM Advances in Design and Control, 2011.