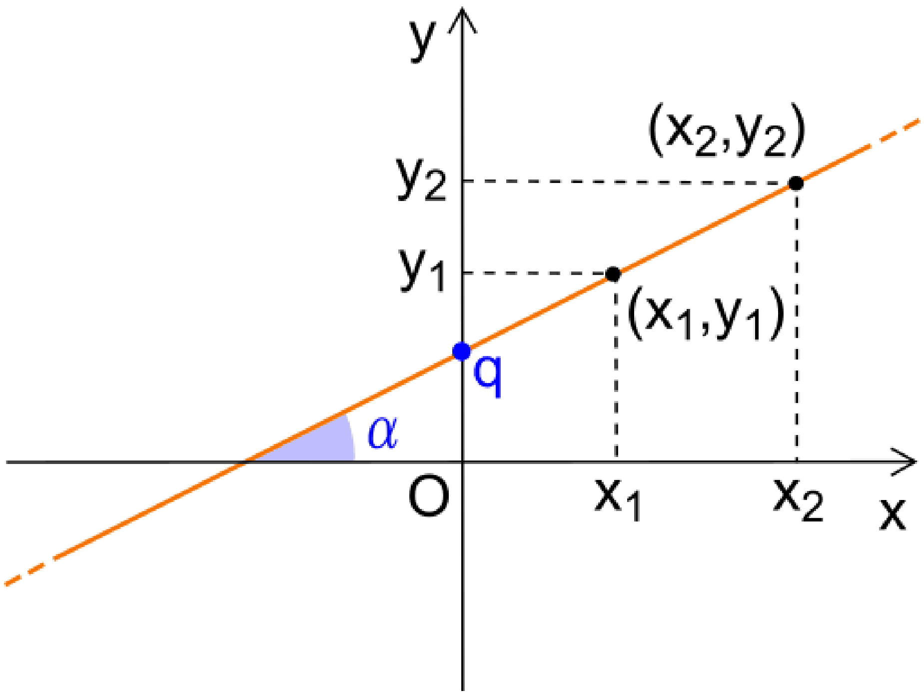
Calcolo differenziale

November 9, 2022

Contents

0.1 Equazioni e disequazioni

0.1.1 La retta



La retta è **lineare** in x e y.
Se $m > 0$ è **crescente**, se $m < 0$ è **decrescente**. **Forma esplicita** $y = mx + q$.
Questa forma descrive tutte le rette tranne quella **verticale**: $y = c$
Forma implicita $ax + by + c = 0$

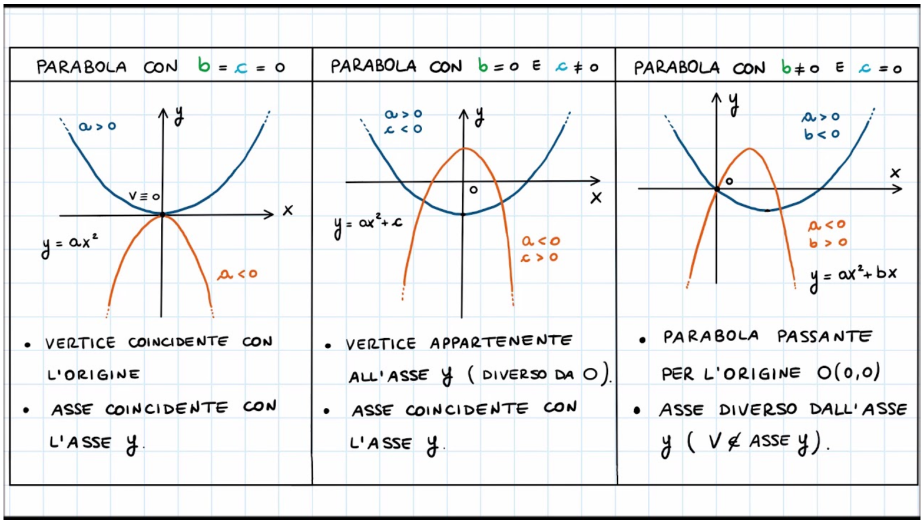
$$m = tg\Theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y = m(x - x_0) + y_0 \Longleftrightarrow q = y_0 - mx_0$$

$$ax \geq -b \Longrightarrow$$

- se $a > 0 : x \geq \frac{-b}{a}$
- se $a < 0 : x \leq \frac{-b}{a}$

0.1.2 Polinomi di secondo grado: le parabole



$$P_2(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$
$$x^2 = c \Longrightarrow$$

- se $c > 0 : x \pm \sqrt[2]{c}$
- se $c = 0 : x = 0$
- se $c < 0 : \nexists x \in IR$

Dimostrazione della correttezza della formula risolutiva per le equazioni di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$
$$a * \left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right] = 0$$
$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt[2]{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt[2]{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In questa situazione abbiamo 3 opzioni:

- $b^2 - 4ac > 0 \iff 2$ soluzioni
- $b^2 - 4ac = 0 \iff 1$ soluzione
- $b^2 - 4ac < 0 \iff 0$ soluzioni

0.1.3 Modulo

$|x| = \sqrt[2]{x^2} =$

- se $x > 0 : x$
- se $x < 0 : -x$

Geometricamente, il modulo è **la distanza** di x dal punto **0** sull'asse dei numeri *IR*.

$$|x| \leq a \iff [-a, a]$$
$$|x| \geq a \iff (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$$
$$-|x| \leq x \leq |x|$$

Disuguaglianza triangolare: $|x + y| \leq |x| + |y|$

$$|x * y| = |x| * |y|$$

0.2 Insiemi numerici

E' detta **insieme** una **collezione** di elementi per i quali è sempre possibile rispondere alla domanda $x \in A$.

0.2.1 Applicazioni

Tramite un'applicazione, associo gli elementi dell'insieme A agli elementi dell'insieme B, detto **immagine** di A.
Un'applicazione è:

- **Iniettiva**: $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \neq x_2 : x_1 \to b_1 \neq x_2 \to b_2$
- **Suriettiva**: $\forall b \in B : \exists a \in A$ t.c. $a \to b$
- **Biunivoca**: Suriettiva $\wedge$ Iniettiva

Se esiste un'applicazione suriettiva ed iniettiva fra A e B questi sono detti in **biezione**.

0.2.2 Definizione di N tramite gli insiemi

A questo punto possiamo definire i numeri naturali positivi partendo dagli insiemi.

- **0**: classe degli insiemi in biezione con $A = \emptyset$
- **1**: classe degli insiemi in biezione con $A = \{\emptyset\}$
- **2**: Classe degli insiemi in biezione con $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- **...**: ...

Possiamo accorgerci quindi come l'insieme **N** definisce la **cardinalità** degli insiemi.
Da qui possiamo continuare:

- **N+**: poichè **N** definisce la cardinalità degli insiemi, la somma di due numeri $\in$ **N** è uguale alla cardinalità di $(A \cup B) \forall A, B$ t.c. $A \cap B = \emptyset$.
- **-1**: quel numero t.c. $-1 + 1 = 0$. Da qui definiamo **Z**.
- $\frac{n}{m}$: $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{Z}, 0 \leq a_2, ..., a_n \leq 9 : a_1 + \Sigma_{i=1}^{n} \frac{a^i}{10^i}$
- **Q**: $\frac{n}{m}, \frac{n_1}{m_1} \in \mathbf{Z}, m, m_1 \neq 0 : (n, m) = (n_1, m_1) \iff (n * m_1) = (n_1 * m)$.
  La struttura **periodica** è valida se si conviene che $a, \overline{9} = a + 1$.
- **Q+**: $\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1} = \frac{n*m_1 + m*n_1}{m*m_1}$
- **Q$*$**: $\frac{n}{m} * \frac{n_1}{m_1} = \frac{n*n_1}{m*m_1}$
- **Q inverso**: $\frac{n}{m} * \frac{n}{m}^{-1} = 1 \Longrightarrow \frac{n}{m}^{-1} = \frac{m}{n}, n \neq 0$

- **R**: Tutti i numeri scritti in forma decimale anche con **infinite** cifre **non periodiche** dopo la virgola

Possiamo infine definire le n-tuple di numeri $(a, b, ...)$ come **prodotto cartesiano** degli insiemi $A * B * ... = \{(a, b, ...) \forall a \in A \wedge \forall b \in B \wedge ...\}$

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

0.3 Coefficiente binomiale

$$q \in R, q \neq 1 \Longrightarrow \Sigma_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Longleftrightarrow$$
$$(1-q) * \Sigma_{k=0}^{n} q^k = 1-q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\Sigma_{k=0}^{n} q^k - q * \Sigma_{k=0}^{n} q^k = 1-q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\Sigma_{k=0}^{n} q^k - \Sigma_{k=1}^{n+1} q^k = 1-q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\left(\Sigma_{k=1}^{n} q^k + 1\right) - \left(\Sigma_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1}\right) = 1-q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\Sigma_{k=1}^{n} q^k - \Sigma_{k=1}^{n} q^k + 1 - q^{n+1} = 1-q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\Sigma_{k=1}^{n} q^k = \Sigma_{k=1}^{n} q^k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k\,(k-1)!\,(n-1-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{k\,(n-1)! + (n-k)\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,(k+n-k)!}{k!\,(n-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n*(n-1)!}{k!\,(n-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k\right)$$

Dimostriamolo per induzione usando il seguente schema.

1. $P(n)$ è vera con $n = 1$
2. Supponiamo che $P(n)$ vera $\Longrightarrow P(n+1)$ vera

Procediamo al primo passo:

$$(a+b)^1 = \Sigma_{k=0}^{1}\left(\binom{1}{k} * a^{1-k} * b^k\right) \Longleftrightarrow$$

$$a+b = \binom{1}{0} * a^1 * b^0 + \binom{1}{1} * a^{1-1} * b^1 \Longleftrightarrow$$

$$a+b = 1 * a * 1 + 1 * 1 * b = a + b$$

Abbiamo dimostrato che $P(1)$ è vera, procediamo quindi col secondo passaggio.

$$(a+b)^{n+1} = \Sigma_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k} * a^{n+1-k} * b^k\right)$$

$$(a+b)(a+b)^n =$$

$$(a+b) * \Sigma_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k\right) =$$

$$\Sigma_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} * a^{n+1-k} * b^k\right) + \Sigma_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} * a^{n-k} * b^{k+1}\right) =$$

$$\Sigma_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} * a^{n+1-k} * b^k\right) + \Sigma_{k=1}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1} * a^{n-k+1} * b^k\right) =$$

$$\binom{n}{0} * a^{n+1} * b^0 + \Sigma_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} * a^{n+1-k} * b^k\right) + \Sigma_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} * a^{n-k+1} * b^k\right) + \binom{n}{n} * a^0 * b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \Sigma_{k=1}^{n}\left[\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) * a^{n+1-k} * b^k\right] b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \Sigma_{k=1}^{n}\left(\binom{n+1}{k} * a^{n+1-k} * b^k\right) + b^{n+1} =$$

$$\Sigma_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k} * a^{n+1-k} * b^k\right)$$

0.4 Funzioni

0.4.1 Definizione

Dati due insiemi A e B, una funzione con **dominio** A e **codominio** B è una qualunque legge che **ad ogni** elemento di A associa **uno ed uno solo** elemento di B.
Può anche essere ad **n variabili** ed avere quindi n insiemi di partenza

$$f : A \longrightarrow B \text{ t.c. } \forall x \in A \longrightarrow f(x) \in B$$

Le funzioni **reali** a variabile **reale** sono le funzioni

$$f : A \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

0.4.2 Immagine

$$\{f(x)\forall x \in A\} \subset B$$

0.4.3 Grafico di una funzione

Definizione

L'insieme dei punti $\mathbf{R}^2$ definiti da

$$g_{\mathbf{R}} = \{(x, f(x))\forall x \in A\}$$

Rappresentazione sul piano

Poichè $\mathbf{R}^2$ è rappresentabile sul piano cartesiano anche $g_{\mathbf{R}}$ lo è

Proprietà fondamentale della funzione espressa col grafico

$$\forall x_0 \in A\, \exists! y_0 \text{ t.c. } x = x_0 \cap g_{\mathbf{R}} = (x_0, f(x_0))$$

0.4.4 Proprietà delle funzioni

Una funzione è detta

- **pari**: $\forall x \in A : f(x) = f(-x)$
- **dispari**: $\forall x \in A : -f(x) = f(-x)$
- **limitata superiormente**: $\exists M \in \mathbf{R}$ t.c. $M \geq f(x)\forall x \in A$
- **limitata inferiormente**: $\exists m \in \mathbf{R}$ t.c. $m \leq f(x)\forall x \in A$
- **limitata**: $f(x)$ è limitata superiormente e inferiormente
- **monotona crescente in A**: $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \leq x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$
- **monotona decrescente in A**: $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \leq x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$
- **periodica di periodo T**: $\forall x \in A, x + kT \in A, k \in \mathbf{Z} : f(x + kT) = f(x)$
- **successione**: il dominio è $\mathbf{N}$, $f(n) = a_n$

0.4.5 Funzioni composte

- $g(f(x)) = g \circ f(x)$
- **funzione neutra o identità**: $f(x) = x = I(x)$
- **funzione inversa**: $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = I(x)$
- f: $\mathrm{Img}_{f^{-1}} \longrightarrow \mathrm{Def}_{f^{-1}}$

- f^{-1}: $\mathrm{Img}_f \longrightarrow \mathrm{Def}_f$
- $f \circ f^{-1}$: $\mathrm{Img}_f \longrightarrow \mathrm{Def}_f$
- $f^{-1} \circ f$: $\mathrm{Img}_{f^{-1}} \longrightarrow \mathrm{Def}_{f^{-1}}$

0.4.6 Condizioni di esistenza della funzione inversa

- $\mathrm{Img}_f \subset Def_g$
- f **iniettiva**: se, per assurdo, non lo fosse vorrebbe dire che $\exists x_1, x_2$ t.c. $x_1 \neq x_2,\ y_1 = f(x_1) = f(x_2)$ e quindi $f^{-1}(y)$ potrebbe essere sia x_1 che x_2, e quindi f^{-1} non sarebbe una funzione

0.4.7 Operazioni sui grafici

- $f(x + k)$: spostamento a sx
- $f(x - k)$: spostamento a dx
- $f(x) + k$: spostamento in alto
- $f(x) - k$: spostamento in basso
- $-f(x)$: ribaltamento su asse y
- $(f(-x))$: ribaltamento su asse x
- $|f(x)|$: ribaltamento su asse y degli $y < 0$
- $f(|x|)$: Ribaltamento su asse x degli $x < 0$

0.5 Limiti

0.5.1 Disuguaglianza di bernoulli

$$n \geq 0,\, x > -1, \Longleftrightarrow (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

0.5.2 Limiti convergenti

Una successione è detta **convergente** a l, o $\lim_{x\to\infty} = l$ se

$$\forall \epsilon > 0,\, \exists N = N\left(\epsilon\right)\ \text{ t.c. } \forall n > N \Longrightarrow |a_n - l| \leq \epsilon$$

Non tutte le successioni convergono.

0.5.3 Limiti divergenti

Una successione è detta **divergente** a $+\infty$, o $\lim_{x\to\infty} = +\infty$, se

$$\forall M > 0, \exists N = N\left(M\right) \text{ t.c. } \forall n > N \Longrightarrow a_n \geq M$$

e divergente a $-\infty$ se $a \leq -M$.
Non tutte le successioni divergono.

Convergenza per eccesso e per difetto

Una successione è detta tendere ad l per **eccesso** (l^+) nel caso in cui a$_n$ ¿ l, per **difetto**(l^-) in caso contrario.

0.5.4 Monotonia e limiti

Preso $A = \{a_n \forall n \in \mathbf{N}\}$, se $a_{n\in\mathbf{N}}$ è una successione **monotona**:

- **crescente**: converge a $\sup_A$ se limitata, se no diverge a $+\infty$
- **decrescente**: converge ad $\inf_A$ se limitata, se no diverge a $-\infty$

0.5.5 Esempi di successioni limitate

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\Longrightarrow |\frac{1}{N} - 0| \leq \epsilon \Longrightarrow \frac{1}{\epsilon} \leq n$$

$$\Longrightarrow \text{ per } N = \frac{1}{\epsilon} \text{ esiste sempre } n > N$$

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$$

$$\Longrightarrow 2^n \geq M \Longrightarrow n \geq \log_2 M$$

$$\Longrightarrow \text{ per } N = \log_2 M \text{ esiste sempre } n > log_2 M$$

$$\lim n \to \infty \frac{n+1}{n-1} = 1$$

$$\Longrightarrow |\frac{n+1}{n-1} - 1| \leq \epsilon \Longrightarrow \geq -\epsilon \forall n \in \mathbf{N}$$

$$\Longrightarrow \frac{n+1}{n-1} < 1 + \epsilon \Longrightarrow n + 1 \leq n + n\epsilon - 1 - \epsilon$$

$$\Longrightarrow 2 + \epsilon \leq n\epsilon \Longrightarrow n \geq \frac{2}{\epsilon} + 1$$

Successioni limitate a e

Data la successione divergente a_n: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^n = e$

0.5.6 Algebra dei limiti

$\lim_{n\to n_0} a_n = a$ $\lim_{n\to\infty} b_n = b$
$\lim_{n\to n_0} a_n + b_n = a + b$
$\lim_{n\to n_0} a_n * b_n = a * b$
$\lim_{n\to n_0} a_n^{b_n} = a^b$
$\lim_{n\to n_0} f(a_n) = f(a)$

0.5.7 Teorema di permanenza del segno

$\lim_{n\to n_0} a_n = a,\ a \geq 0 \Longrightarrow \exists N \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n > N : a_n \geq 0$
$\lim_{n\to n_0} a_n = a,\ a \leq 0 \Longrightarrow \exists N \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n > N : a_n \leq 0$
E' quindi implicato:
$\lim_{n\to n_0} a_n = a,\ \lim_{n\to n_0} b_n = b,\ a_n > b_n \Longrightarrow a > b$

0.5.8 Teorema dei carabinieri

$a_n \leq b_n \leq c_n$ $a = c \Longrightarrow a = b = c$

0.5.9 Stime asintotiche

Prese due successioni che tendono a $\infty/0$, considerando

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} =$$

- 0: a_n è un infinito/infinitesimo di ordine inferiore/superiore a b_n
- l, finito e $\neq 0$: a_n e b_n sono dello stesso ordine.

- $\pm\infty$: a_n è un infinito/infinitesimo di ordine superiore/inferiore a b_n
- $\nexists$: a_n e b_n non sono confrontabili.

Ordine delle stime asintotiche

$$\log_\alpha n < n^\alpha < \alpha^n < n! < n^n$$

$a_n \sim b_n$

Nel caso analizzato, quando $l = 1$, diciamo che a_n e b_n sono asintotiche ($a_n \sim b_n$).

- $a_n \sim b_n \Longrightarrow$ le due successioni hanno lo stesso comportamento
- $a_n \sim b_n \sim c_n \Longrightarrow a_n \sim c_n$
- $a_n \sim a_n^{'}, b_n \sim b_n^{'}, c_n \sim c_n^{'} \Longrightarrow \frac{a_n b_n}{c_n} \sim \frac{a_n^{'} b_n^{'}}{c_n^{'}}$

Criterio del rapporto

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

- $l < 1$: $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
- $l > 1$: $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$
- $= 1$: non possiamo concludere nulla