Probabilità I

March 6, 2023

1 Introduzione alla probabilità

Definizione 1.1 (Evento)
*Un evento è una **proposizione** relativa al modo di risultare di un esperimento*

Definiamo ε una famiglia di possibili eventi distinti di un esperimento.
E' naturale introdurre all'interno di ε le operazioni logiche:

- OR: $\varepsilon_1 \vee \varepsilon_2$ si verifica almeno uno dei due eventi
- AND: $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$ si verificano entrambi gli eventi
- NOT: $\neg \varepsilon_1$ non si verifica l'evento

Definizione 1.2 (Evento composto)
Un evento $E \in \varepsilon$ è composto se $\exists E_1 \neq E_2 \neq E \in \varepsilon$ t.c. $E = E_1 \vee E_2$

Definizione 1.3 (Evento elementare)
Un evento $\omega \in \varepsilon$ non composto.

Definizione 1.4 (Decomposizione di un evento)

$$\forall E \in \varepsilon, \mathcal{H}(E) = \{\omega_1, ..., \omega_n\} \textit{ t.c. } E = \omega_1 \vee ... \vee \omega_n$$

Si dice che *un evento composto E si è verificato $\iff$ si è verificato un evento elementare ω_i della decomposizione di E*

Definizione 1.5 (Spazio campione)
Lo spazio campione $\Omega \subset \varepsilon$ è l'insieme degli eventi elementari di ε

Teorema 1.1 (Modelizzazione dello spazio campione)

$$\forall E \in \varepsilon, \exists! \omega_1, ..., \omega_n \textit{ t.c. } E = \omega_1 \vee ... \vee \omega_n$$

Definizione 1.6 (Famiglia delle parti)
E' detta famiglia delle parti di Ω l'insieme potenza $\mathcal{P}(\Omega)$

Corollario 1.1.1 (Completezza della famiglia delle parti)

$$\forall E \in \varepsilon, \exists! \mathcal{H}(E) \in \mathcal{P}(\Omega)$$

Osservazione 1.1 (Quanti sono i sottoinsiemi di k elementi di $\mathcal{P}(\Omega)$)

$$C_k = \{S : S \in \mathcal{P}(\Omega) \textit{ t.c. } |S| = k\} \implies |C_k| = \binom{|\Omega|}{k}$$

1.1 Eventi come insiemi

Da ciò che abbiamo appena visto ne deriva che ogni evento, e di conseguenza le operazioni logiche sugli eventi, si possono anche vedere come insiemi correlati da operazioni insiemistiche:

- $E_1 \vee E_2 = \mathcal{H}(E_1) \cup \mathcal{H}(E_2)$
- $E_1 \wedge E_2 = \mathcal{H}(E_1) \cap \mathcal{H}(E_2)$
- $\neg E_1 = \overline{\mathcal{H}(E)}$
- $E_1 \oplus E_2 = \mathcal{H}(E_1) \Delta \mathcal{H}(E_2) = \left(\mathcal{H}(E_1) \cap \overline{\mathcal{H}(E_2)}\right) \cup \left(\mathcal{H}(E_2) \cap \overline{\mathcal{H}(E_1)}\right)$
- $E_1 \implies E_2 = \mathcal{H}(E_1) \subset \mathcal{H}(E_2)$

Alcune osservazioni importanti sono che:

- Ω è **l'evento certo** (sempre vero)
- $\emptyset$ è **l'evento impossibile** (sempre falso)
- $A \cup B = \Omega$ allora A, B sono **esaustivi**
- $A \cap B = \emptyset$ allora A, B sono **incompatibili**

Definizione 1.7 (Partizione dell'evento certo)
$\forall \mathcal{H} \subset \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{H}$ *è detta partizione di* $\Omega \iff$

$$\forall H_1, H_2 \in \mathcal{H}, H_1 \cap H_2 = \emptyset \wedge \bigcup_{i=0}^{|\mathcal{H}|} H_i = \Omega$$

Teorema 1.2 (Proprietà distributiva e leggi di De Morgan)

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

2 Spazi di probabilità

Definizione 2.1 (Probabilità)
Una probabilità su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *è una funzione* $\mathbb{P}$ *che soddisfa gli assiomi di probabilità:*

1. $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(condizione di normalizzazione)*
3. $E_1, ..., E_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ *incompatibili,* $\mathbb{P}(E_1 \cup ... \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + ... + \mathbb{P}(E_2)$ *(proprietà di additività finita)*

Definizione 2.2 (Spazio finito di probabilità)
E' uno spazio finito di probabilità la terna $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *con* Ω *insieme finito*

Teorema 2.1 (Passaggio al complemento)

$$\forall E, \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{E}\right)$$

Dimostrazione:

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}\left(E \cup \overline{E}\right) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \iff \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \blacksquare$$

Teorema 2.2 (Probabilità dell'evento nullo)

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Dimostrazione:

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) \iff 2\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) \iff \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \blacksquare$$

Teorema 2.3 (Proprietà di monotonia)

$$E_1 \subseteq E_2, \mathbb{P}(E_2) \geq \mathbb{P}(E_1)$$

Dimostrazione:

$$E_2 = E_1 \cup E_2 \cap \overline{E_1} \implies \mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}\left(E_2 \cap \overline{E_1}\right)$$

Per l'assioma di non negatività ne segue che $\mathbb{P}(E_2) \geq \mathbb{P}(E_1)$ $\blacksquare$

Corollario 2.3.1 (Probabilità della differenza)

$$E_1 \subseteq E_2, \mathbb{P}(E_2 \setminus E_1) = \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1)$$

Teorema 2.4 (Principio probabilistico di inclusione esclusione (PIE))

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$$

Dimostrazione:
Prendiamo $I = E_1 \cap E_2$, allora $E_1 = I \cup E_1 \cap \overline{I}$ e $E_2 = I \cup E_2 \cap \overline{I}$, il che implica

$$\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) = 2\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}\left(E_1 \cap \overline{I}\right) + \mathbb{P}\left(E_2 \cap \overline{I}\right)$$

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}\left(I \cup E_1 \cap \overline{I} \cup I \cup E_2 \cap \overline{I}\right) = \mathbb{P}(I) + \mathbb{P}\left(E_1 \cap \overline{I}\right) + \mathbb{P}\left(E_2 \cap \overline{I}\right)$$

Ma quindi

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(I) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \blacksquare$$

Teorema 2.5 (Probabilità della partizione)

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}) = 1 = \sum_{i=0}^{|\mathcal{H}|} H_i$$

Corollario 2.5.1 (Probabilità della partizione elementare)

$$\forall w_i \in \Omega, \mathbb{P}(\{w_i\}) = p(w_i) \implies \sum_{i=0}^{|\Omega|} \mathbb{P}(\{w_i\}) = 1$$

Definizione 2.3 (Funzione densità)
*La funzione $p : \Omega \to [0,1]$ definita o come funzione tale che $\sum_{w \in \Omega} p(w_i) = 1$ o come $\forall w_i \in \Omega, p(w_i) = \mathbb{P}(\{w_i\})$ è detta **funzione densità***

Teorema 2.6 (Probabilità dell'evento E data una partizione $\mathcal{H}$)

$$\forall E \in \mathcal{P}(\Omega), \forall \mathcal{H} \text{ partizione di } \Omega, \mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{|\mathcal{H}|} \mathbb{P}(E \cap H_i)$$

Dimostrazione:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap \Omega) = \mathbb{P}\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{H}|} H_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{|\mathcal{H}|} E \cap H_i\right) = \sum_{i=1}^{|\mathcal{H}|} \mathbb{P}(E \cap H_i) \blacksquare$$

Osservazione 2.1 (Costruire uno spazio di probabilità)

1. *definiamo $\mathbb{P}$ come probabilità su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, e definiamo $\forall w_i \in \Omega, p(w_i) = \mathbb{P}(\{w_i\})$*
2. *definiamo $p : \Omega \to [0,1]$ tale che $\sum_{w \in \Omega} p(w_i) = 1$ e definiamo $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $\mathbb{P}(E) = \sum_{w \in E} p(w_i)$*

Osservazione 2.2 (Probabilità definite a meno di un fattore di proporzionalità)
Supponiamo di avere una tupla $g = \left(g_1, ..., g_{|\Omega|}\right)$ tale che $\forall 0 < i < |\Omega|, 0 \leq g_i \leq 1 \land \exists 0 < j < |\Omega|$ t.c. $g_j \neq 0$ ed una funzione $p : \Omega \to \mathbb{R}^+, p(w_i) = \mathbb{P}(\{w_i\}), p(w_i) \propto g_i$, allora

$$\forall w_i \in \Omega, p(w_i) = \frac{g_i}{\sum_{j=0}^{|} \Omega | g_j}$$

Definizione 2.4 (Spazio di probabilità numerabili) *E' detta* ***spazio di probabilità numerabile*** *la terna* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$*, con* Ω *numerabile* $(|\Omega| = \aleph_0)$*, e* $\mathbb{P}$ *soddisfa* ***proprietà di additività numerabile:***

$$\forall i \neq j \in \mathbb{N} E_i, E_j \text{ incompatibili } \implies \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$$

Teorema 2.7 (Probabilità dell'evento nullo)

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

La dimostrazione è analoga (con n insiemi) a quella in spazio finito.

Teorema 2.8 (Additività numerabile $\implies$ additività finita)
Dato la spazio di probabilità numerabile $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$*, su questo spazio vale anche la proprietà di additività finita.*

Dimostrazione: Prendiamo l'eventi $E_n, n \in \mathbb{N}^+$, fra loro incompatibili, e definiamo

$$E_j = \emptyset \forall j \in \mathbb{N} \text{ t.c. } j > n$$

Per definizione, questi eventi sono incompatibili con tutti gli altri eventi, ed inoltre risulta che $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup i = 1^{\infty} E_i$. Ne segue allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(E_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) \blacksquare$$

Corollario 2.8.1 (Proprietà dello spazio di probabilità numerabile)
Tutte le proprietà degli spazi di probabilità finiti valgono per gli spazi di probabilità numerabili

3 Probabilità uniformi e cenni di calcolo combinatorio

Definizione 3.1 (Distribuzione di probabilità uniforme)
Si ha una ***distribuzione di probabilità uniforme*** *quando*

$$|\Omega| \in \mathbb{N}, \forall w \in \Omega, p(w) = 1/|\Omega|$$

Corollario 3.0.1 (Probabilità di un evento E data una distribuzione uniforme)

$$\forall E \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Ovvero la probabilità di un evento E è data dal rapporto dei casi favorevoli sui casi totali

In queste condizioni risulta molto importante contare quanti sono i casi favorevoli e quanti i casi totali, che risulta essere un problema di combinatoria.

3.1 Cenni di calcolo combinatorio

N.B: A è un insieme con cardinalità n.

Definizione 3.2 (Disposizioni con ripetizioni di classe k di n elementi)

Corrisponde ad una singola k-upla ordinata di A.
L'insieme di tutte le k-uple ordinate di A ha cardinalità n^k

Definizione 3.3 (Disposizioni senza ripetizioni di classe k con n elementi)

Corrisponde ad singola k-upla ordinata, con tutti gli elementi distinti, di A.
L'insieme di tutte le k-uple che rispettano questo vincolo ha cardinalità $\frac{n!}{(n-k)!}$

Definizione 3.4 (Permutazione)
Disposizione senza ripetizione di classe n con n elementi.

Definizione 3.5 (Combinazione di classe k con n elementi)
Corrisponde ad un sottoinsieme di cardinalità k di A.
L'insieme di tutti questi sottoinsiemi ha cardinalità $\binom{n}{k}$

Osservazione 3.1 (Correlazione fra combinazioni, permutazioni e disposizioni senza ripetizioni)

Prendiamo le disposizioni senza ripetizioni di classe k. Questo corrisponde ad un insieme di k-uple nel quale conta l'ordine.
Le combinazioni invece hanno sì cardinalità k, ma l'ordine non conta: ne consegue che tutte le possibili permutazioni di una k-upla ordinata di elementi distinti corrispondono alla stessa combinazione. Ne segue quindi che $C_k^n = D_k^n / P_k$