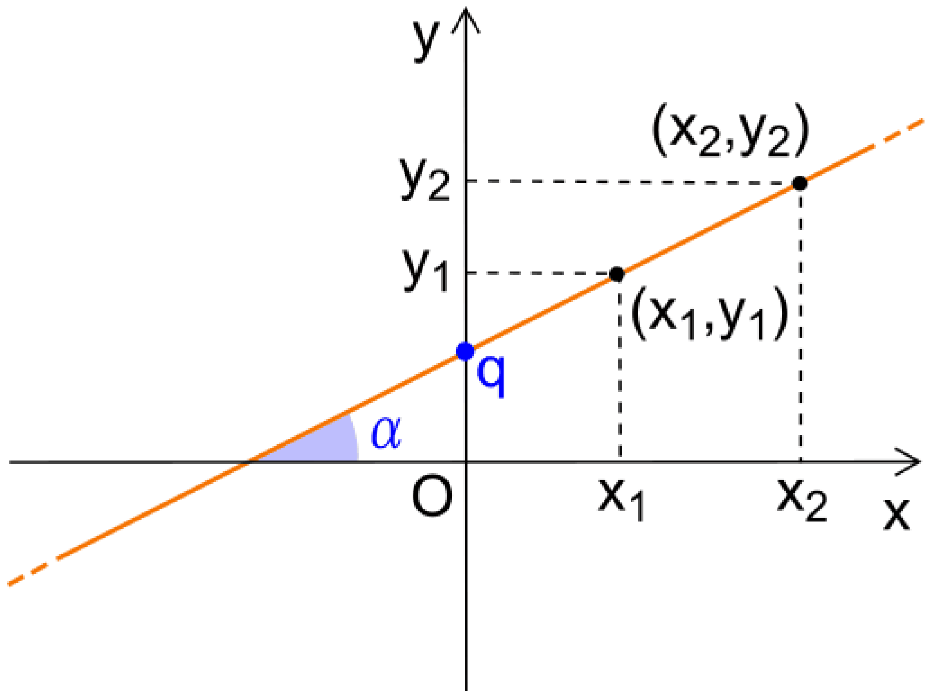
Calcolo differenziale

November 16, 2022

Contents

0.1 Equazioni e disequazioni

0.1.1 La retta



La retta è **lineare** in x e y.
Se $m > 0$ è **crescente**, se $m < 0$ è **decrescente**. **Forma esplicita** $y = mx+q$.
Questa forma descrive tutte le rette tranne quella **verticale**: $y = c$
Forma implicita $ax + by + c = 0$

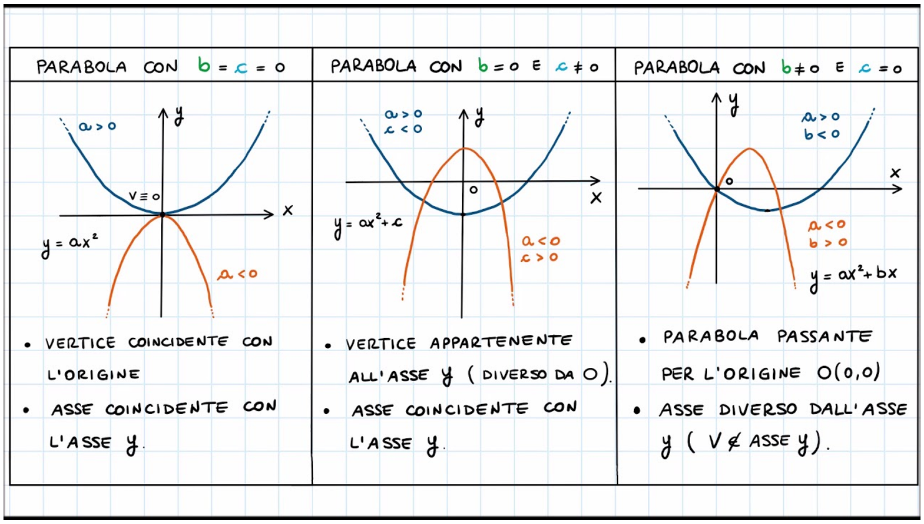
$$m = tg\Theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y = m(x - x_0) + y_0 \iff q = y_0 - mx_0$$

$$ax \geq -b \implies$$

- se $a > 0 : x \geq \frac{-b}{a}$
- se $a < 0 : x \leq \frac{-b}{a}$

0.1.2 Polinomi di secondo grado: le parabole



$$P_2(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

$$x^2 = c \Longrightarrow$$

- se $c > 0 : x \pm \sqrt[2]{c}$
- se $c = 0 : x = 0$
- se $c < 0 : \nexists x \in IR$

Dimostrazione della correttezza della formula risolutiva per le equazioni di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$
$$a * \left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right] = 0$$
$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt[2]{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt[2]{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In questa situazione abbiamo 3 opzioni:

- $b^2 - 4ac > 0 \iff 2$ soluzioni
- $b^2 - 4ac = 0 \iff 1$ soluzione
- $b^2 - 4ac < 0 \iff 0$ soluzioni

0.1.3 Modulo

$|x| = \sqrt[2]{x^2} =$

- se $x > 0 : x$
- se $x < 0 : -x$

Geometricamente, il modulo è **la distanza** di x dal punto **0** sull'asse dei numeri *IR*.

$$|x| \leq a \iff [-a, a]$$
$$|x| \geq a \iff (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$$
$$-|x| \leq x \leq |x|$$

Disuguaglianza triangolare: $|x + y| \leq |x| + |y|$

$$|x * y| = |x| * |y|$$

0.2 Insiemi numerici

E' detta **insieme** una **collezione** di elementi per i quali è sempre possibile rispondere alla domanda $x \in A$.

0.2.1 Applicazioni

Tramite un'applicazione, associo gli elementi dell'insieme A agli elementi dell'insieme B, detto **immagine** di A.
Un'applicazione è:

- **Iniettiva**: $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \neq x_2 : x_1 \to b_1 \neq x_2 \to b_2$
- **Suriettiva**: $\forall b \in B : \exists a \in A$ t.c. $a \to b$
- **Biunivoca**: Suriettiva $\wedge$ Iniettiva

Se esiste un'applicazione suriettiva ed iniettiva fra A e B questi sono detti in **biezione**.

0.2.2 Definizione di N tramite gli insiemi

A questo punto possiamo definire i numeri naturali positivi partendo dagli insiemi.

- **0**: classe degli insiemi in biezione con $A = \emptyset$
- **1**: classe degli insiemi in biezione con $A = \{\emptyset\}$
- **2**: Classe degli insiemi in biezione con $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- **...**: ...

Possiamo accorgerci quindi come l'insieme **N** definisce la **cardinalità** degli insiemi.
Da qui possiamo continuare:

- **N+**: poichè **N** definisce la cardinalità degli insiemi, la somma di due numeri $\in$ **N** è uguale alla cardinalità di $(A \cup B) \forall A, B$ t.c. $A \cap B = \emptyset$.
- **-1**: quel numero t.c. $-1 + 1 = 0$. Da qui definiamo **Z**.
- $\frac{n}{m}$: $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{Z}, 0 \leq a_2, ..., a_n \leq 9 : a_1 + \Sigma_{i=1}^{n} \frac{a^i}{10^i}$
- **Q**: $\frac{n}{m}, \frac{n_1}{m_1} \in \mathbf{Z}, m, m_1 \neq 0 : (n, m) = (n_1, m_1) \iff (n * m_1) = (n_1 * m)$.
  La struttura **periodica** è valida se si conviene che $a, \overline{9} = a + 1$.
- **Q+**: $\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1} = \frac{n * m_1 + m * n_1}{m * m_1}$
- **Q***: $\frac{n}{m} * \frac{n_1}{m_1} = \frac{n * n_1}{m * m_1}$
- **Q inverso**: $\frac{n}{m} * \frac{n}{m}^{-1} = 1 \Longrightarrow \frac{n}{m}^{-1} = \frac{m}{n}, n \neq 0$

- **R**: Tutti i numeri scritti in forma decimale anche con **infinite** cifre **non periodiche** dopo la virgola

Possiamo infine definire le n-tuple di numeri $(a, b, ...)$ come **prodotto cartesiano** degli insiemi $A * B * ... = \{(a, b, ...)\forall a \in A \wedge \forall b \in B \wedge ...\}$

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

0.3 Coefficiente binomiale

$$q \in R, q \neq 1 \Longrightarrow \Sigma_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Longleftrightarrow$$
$$(1-q) * \Sigma_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\Sigma_{k=0}^{n} q^k - q * \Sigma_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\Sigma_{k=0}^{n} q^k - \Sigma_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\left(\Sigma_{k=1}^{n} q^k + 1\right) - \left(\Sigma_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1}\right) = 1 - q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\Sigma_{k=1}^{n} q^k - \Sigma_{k=1}^{n} q^k + 1 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\Sigma_{k=1}^{n} q^k = \Sigma_{k=1}^{n} q^k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k\,(k-1)!\,(n-1-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{k\,(n-1)! + (n-k)\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,(k+n-k)!}{k!\,(n-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n * (n-1)!}{k!\,(n-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k \right)$$

Dimostriamolo per induzione usando il seguente schema.

1. $P(n)$ è vera con $n = 1$
2. Supponiamo che $P(n)$ vera $\Longrightarrow P(n+1)$ vera

Procediamo al primo passo:

$$(a+b)^1 = \Sigma_{k=0}^{1} \left(\binom{1}{k} * a^{1-k} * b^k \right) \Longleftrightarrow$$

$$a + b = \binom{1}{0} * a^1 * b^0 + \binom{1}{1} * a^{1-1} * b^1 \Longleftrightarrow$$

$$a + b = 1 * a * 1 + 1 * 1 * b = a + b$$

Abbiamo dimostrato che $P(1)$ è vera, procediamo quindi col secondo passaggio.

$$(a+b)^{n+1} = \Sigma_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} * a^{n+1-k} * b^k \right)$$

$$(a+b)(a+b)^n =$$

$$(a+b) * \Sigma_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k \right) =$$

$$\Sigma_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} * a^{n+1-k} * b^k \right) + \Sigma_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} * a^{n-k} * b^{k+1} \right) =$$

$$\Sigma_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} * a^{n+1-k} * b^k \right) + \Sigma_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} * a^{n-k+1} * b^k \right) =$$

$$\binom{n}{0} * a^{n+1} * b^0 + \Sigma_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} * a^{n+1-k} * b^k \right) + \Sigma_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} * a^{n-k+1} * b^k \right) + \binom{n}{n} * a^0 * b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \Sigma_{k=1}^{n} \left[\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) * a^{n+1-k} * b^k \right] b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \Sigma_{k=1}^{n} \left(\binom{n+1}{k} * a^{n+1-k} * b^k \right) + b^{n+1} =$$

$$\Sigma_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} * a^{n+1-k} * b^k \right)$$

0.4 Funzioni

0.4.1 Definizione

Dati due insiemi A e B, una funzione con **dominio** A e **codominio** B è una qualunque legge che **ad ogni** elemento di A associa **uno ed uno solo** elemento di B.
Può anche essere ad **n variabili** ed avere quindi n insiemi di partenza

$$f : A \longrightarrow B \text{ t.c. } \forall x \in A \longrightarrow f(x) \in B$$

Le funzioni **reali** a variabile **reale** sono le funzioni

$$f : A \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

0.4.2 Immagine

$$\{f(x)\forall x \in A\} \subset B$$

0.4.3 Grafico di una funzione

Definizione

L'insieme dei punti $\mathbf{R}^2$ definiti da

$$g_{\mathbf{R}} = \{(x, f(x))\forall x \in A\}$$

Rappresentazione sul piano

Poichè $\mathbf{R}^2$ è rappresentabile sul piano cartesiano anche $g_{\mathbf{R}}$ lo è

Proprietà fondamentale della funzione espressa col grafico

$$\forall x_0 \in A\, \exists! y_0 \text{ t.c. } x = x_0 \cap g_{\mathbf{R}} = (x_0, f(x_0))$$

0.4.4 Proprietà delle funzioni

Una funzione è detta

- **pari**: $\forall x \in A : f(x) = f(-x)$
- **dispari**: $\forall x \in A : -f(x) = f(-x)$
- **limitata superiormente**: $\exists M \in \mathbf{R}$ t.c. $M \geq f(x)\forall x \in A$
- **limitata inferiormente**: $\exists m \in \mathbf{R}$ t.c. $m \leq f(x)\forall x \in A$
- **limitata**: $f(x)$ è limitata superiormente e inferiormente
- **monotona crescente in A**: $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \leq x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$
- **monotona decrescente in A**: $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \leq x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$
- **periodica di periodo T**: $\forall x \in A, x + kT \in A, k \in \mathbf{Z} : f(x + kT) = f(x)$
- **successione**: il dominio è $\mathbf{N}$, $f(n) = a_n$

0.4.5 Funzioni composte

- $g(f(x)) = g \circ f(x)$
- **funzione neutra o identità**: $f(x) = x = I(x)$
- **funzione inversa**: $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = I(x)$
- f: $\mathrm{Img}_{f^{-1}} \longrightarrow \mathrm{Def}_{f^{-1}}$

- f^{-1}: $\mathrm{Img}_f \longrightarrow \mathrm{Def}_f$
- $f \circ f^{-1}$: $\mathrm{Img}_f \longrightarrow \mathrm{Def}_f$
- $f^{-1} \circ f$: $\mathrm{Img}_{f^{-1}} \longrightarrow \mathrm{Def}_{f^{-1}}$

0.4.6 Condizioni di esistenza della funzione inversa

- $\mathrm{Img}_f \subset Def_g$
- f **iniettiva**: se, per assurdo, non lo fosse vorrebbe dire che $\exists x_1, x_2$ t.c. $x_1 \neq x_2,\ y_1 = f(x_1) = f(x_2)$ e quindi $f^{-1}(y)$ potrebbe essere sia x_1 che x_2, e quindi f^{-1} non sarebbe una funzione

0.4.7 Operazioni sui grafici

- $f(x+k)$: spostamento a sx
- $f(x-k)$: spostamento a dx
- $f(x)+k$: spostamento in alto
- $f(x)-k$: spostamento in basso
- $-f(x)$: ribaltamento su asse y
- $(f(-x))$: ribaltamento su asse x
- $|f(x)|$: ribaltamento su asse y degli $y < 0$
- $f(|x|)$: Ribaltamento su asse x degli $x < 0$

0.4.8 Funzioni continue

Criterio di continuità

Riferirsi al capitolo presente nei limiti di funzioni

Teorema di esistenza degli zeri

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R},\ f \text{ continua}$$

$$f(a) * f(b) < 0 \Longrightarrow \exists x_0 \in (a, b) \text{ t.c. } f(x_0) = 0$$

Dimostrazione
Ipotizziamo $f(a) < 0 \wedge f(b) > 0$.
Usiamo **l'algoritmo di biezione** per arrivare a x_0 t.c. $f(x_0) = 0$.

1. $c = \frac{a+b}{2}$
2. 3 casi:
   (a) $f(c) > 0 \Longrightarrow x_0 \in [a, c]$
   (b) $f(c) = 0 \Longrightarrow x_0 = c$. Abbiamo dimostrato che esiste x_0
   (c) $f(c) > 0 \Longrightarrow x_0 \in [c, b]$
3. Applico ricorsivamente l'algoritmo sul nuovo intervallo ottenuto al passo 2

Dobbiamo quindi dimostrare che, eventualmente, questo procedimento arrivi al caso 2 del punto 2.
Prendiamo ora la successione di tutti gli estremi sinistri costruiti fino al punto n degli intervalli (tutte le a) e chiamiamola $\{a_n\}_n$ e la successione di tutti gli estremi destri (tutte le b) e chiamiamola $\{b_n\}_n$.
Per come lo costruiamo, sappiamo che:

- $a_n > a_{n-1}$, $a_n < b \forall n$
- $b_n < b_{n-1}$, $b_n > a \forall n$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = sup_a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = inf_b$, $inf_b \geq sup_a$
- $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$

L'ultimo punto in particolare ci permette di concludere che:

$$\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$\Longrightarrow sup_a = inf_b$$

Quindi, posto $c = sup_a = inf_b$, volendo dimostrare che $f(c) = 0$ per l'algoritmo di biezione, partiamo dalle cose che sappiamo:

$$f(a_n) * f(b_n) \leq 0$$

$$\lim_{nto\infty} f(a_n) * f(b_n) = f(c)^2 \geq 0 \text{ in quanto quadrato}$$

$$\Longrightarrow f(c)^2 \geq 0 \wedge f(c)^2 \leq 0 \Longrightarrow f(c)^2 = 0$$
$$\Longrightarrow f(c) = 0 \text{ c.v.d.}$$

I Corollario

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R},\ f \text{ continua}$$
$$f(a) \neq f(b) \Longrightarrow \forall y \in [f(a), f(b)]\, \exists x_0 \in [a, b] \text{ t.c. } f(x_0) = y$$

II Corollario

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R},\ f \text{ continua e monotona}$$
$$f(a) * f(b) < 0 \Longrightarrow \exists! x_0 \in [a, b] \text{ t.c. } f(x_0) = 0$$

Teorema di Weiestrass

$$f : [a, b], a \neq -\infty, b \neq +\infty, \longrightarrow \mathbf{R},\ f \text{ continua}$$
$$\exists m, M \text{ di } f \text{ in } [a, b]$$

Corollario

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R},\ f \text{ continua}$$
$$\forall y \in [m, M]\, \exists x_0 \in [a, b] \text{ t.c. } f(x_0) = y$$

Teorema del valore intermedio avanzato

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}, f \text{ continua}$$
$$\Longrightarrow f([a, b]) = [m, M]$$

Algebra delle funzioni continue

$$f, g : [a, b], x_0 \in [a, b],\ f, g \text{ continue } \Longrightarrow$$

- $f(x_0) \pm g(x_0)$ continua
- $f(x_0) * g(x_0)$ continua
- $f(x_0) / g(x_0)$ continua purchè $g(x_0) \neq 0$

Teorema del cambio di variabile

$$f, g,\ f \circ g \text{ ben definita per } x \to x_0$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = t_0, \exists lim_{t \to t_0} f(t) = l$$

Inoltre, nel caso f sia non continua in t_0 o $t_0 = \pm\infty, g(x_0) \neq t_0$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{t \to t_0} f(t)$$

Continuità della funzione composta

$$g : [a, b] \, , f : [c, d] \, , x_0 \in [a, b] \, , g\left(x_0\right) \in [c, d]$$
$$f, g \text{ continue } \Longrightarrow f\left(g\left(x_0\right)\right) : [a, b] \text{ e continua in } x_0$$

Teorema di esistenza della radice i-esima

$$\forall y \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}, \text{ t.c. } y > 0, n \geq 1$$
$$\Longrightarrow \exists! x \in \mathbf{R}, x > 0 \text{ t.c. } x^n = y$$

Dimostrazione

$$g\left(x\right) = x, \text{ continua }, f\left(x\right) = x^n = \Pi_1^n g\left(x\right) \Longrightarrow, f\left(x\right) \text{ continua}$$
$$\left.\begin{cases} 1^n \leq y \leq y^n & y \geq 1, \, x_1 = 1, x_2 = y \\ y^n \leq y \leq 1^n & y < 1, \, x_1 = y, x_2 = 1 \end{cases}\right\} f\left(x\right) \text{ monotona } \in [x_1, x_2] \Longrightarrow x_1^n = m, x_2^n = M$$
$$\Longrightarrow \text{ per il teorema dei valori intermedi } \exists x_0 \in [x_1, x_2] \text{ t.c. } f\left(x_0\right) = x_0^n = y$$

0.4.9 Funzioni monotone

Teorema di monotonia

$$f : (a, b) \, , f \text{ monotona}$$
$$\Longrightarrow \forall c \in (a, b) \, \exists \text{ finiti limite destro e sinistro per } x \to c \text{ e limite sinistro/destrp } per x \to a/b$$

Dimostrazione

$S = sup f\left(x\right); \forall x \in (a, c), S$ finito per proprietà dell'estremo superiore in quanto $f\left(c\right)$ maggiorante

Dobbiamo provare che
$$\lim_{x \to c^-} f\left(x\right) = S$$
ovvero che, presa la successione $x_n \in (a, c)$ t.c. $x_n \to c$,
$$\forall \epsilon > 0, S - \epsilon < f\left(x_n\right) < S + \epsilon$$
$$S > f\left(x\right) \forall x \in (a, c) \Longrightarrow S + \epsilon > f\left(x_n\right) \forall x_n$$
$$S > S - \epsilon \Longrightarrow \exists x_0 \in (a, c) \text{ t.c. } f\left(x_0\right) > S - \epsilon$$
$$\Longrightarrow f\left(x\right) \geq S - \epsilon \forall x \in (x_0, c) \Longrightarrow f\left(x_n\right) \geq S - \epsilon \text{ definitivamente}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x \to c^-} f\left(x\right) = S$$
Analogamente possiamo fare con $\lim_{x \to c^+} f\left(x\right)$.
Per i limiti agli estremi possiamo usare lo stesso procedimento, ricordando però

che S, s non sono necessariamente finiti in quanto $f(b/a)$ non sono maggioranti/minoranti in quanto la funzione non è definita in a, b. In questi casi, possiamo procedere ragionando che

$$\forall K > 0 \exists x_0 \in (a, b) \text{ t.c. } f(x_0) \geq 0$$

$$\implies f(x) > K \forall x \in (x_0, b)$$

Presa una successione $x_n \to b, x_n \in (x_0, b)$

$$\implies f(x_n) > K \text{ definitivamente}$$

$$\implies \lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$$

Nel caso la funzione sia decrescente anzichè crescente cambiare in modo appropriato.

Corollario

$$f : (a, b), f \text{ monotona}$$

Se esistono dei punti di discontinuità in (a, b) questi sono necessariamente **punti di salto**

0.4.10 Teorema di invertibilità della funzione continua

$$f : [a, b], f \text{ continua}$$

$$\implies \exists f^{-1} : [a, b], f^{-1} \text{ strettamente monotona e continua } \iff f \text{ strettamente monotona}$$

Dimostrazione

Dimostrazione prima parte
Ipotizziamo per assurdo che f non sia strettamente monotona. Vuol dire che

$$\exists x_0 < x_1 < x_2 \in [a, b] \text{ t.c. } f(x_0) < f(x_1) > f(x_2)$$

Per il teorema dei valori intermedi

$$\exists c \in (x_0, x_1) \text{ t.c. } f(c) = f(x_2) \wedge c \neq x_2$$

La funzione non è quindi invertibile

Dimostrazione seconda parte
Prendiamo f^{-1} che sappiamo essere monotona ed ipotizziamo non sia continua. Per il teorema di monotonia sappiamo che i suoi punti di discontinuità in f^{-1} sono punti di salto, e quindi l'immagine di f^{-1} non sarebbe un intervallo. Impossibile in quanto, essendo f definita in un intervallo, l'immagine di f^{-1} deve essere un intervallo

0.5 Limiti di successioni

0.5.1 Disuguaglianza di bernoulli

$$n \geq 0,\, x > -1, \Longleftrightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx$$

0.5.2 Limiti convergenti

Una successione è detta **convergente** a l, o $\lim_{x \to \infty} = l$ se

$$\forall \epsilon > 0,\, \exists N = N(\epsilon) \text{ t.c. } \forall n > N \Longrightarrow |a_n - l| \leq \epsilon$$

Non tutte le successioni convergono.

0.5.3 Limiti divergenti

Una successione è detta **divergente** a $+\infty$, o $\lim_{x \to \infty} = +\infty$, se

$$\forall M > 0, \exists N = N(M) \text{ t.c. } \forall n > N \Longrightarrow a_n \geq M$$

e divergente a $-\infty$ se $a \leq -M$.
Non tutte le successioni divergono.

Convergenza per eccesso e per difetto

Una successione è detta tendere ad l per **eccesso** (l^+) nel caso in cui a_n ¿ l, per **difetto**(l^-) in caso contrario.

0.5.4 Monotonia e limiti

Preso $A = \{a_n \forall n \in \mathbf{N}\}$, se $a_{n \in \mathbf{N}}$ è una successione **monotona**:

- **crescente**: converge a $\sup_A$ se limitata, se no diverge a $+\infty$
- **decrescente**: converge ad $\inf_A$ se limitata, se no diverge a $-\infty$

0.5.5 Esempi di successioni limitate

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$
$$\Longrightarrow |\frac{1}{N} - 0| \leq \epsilon \Longrightarrow \frac{1}{\epsilon} \leq n$$
$$\Longrightarrow \text{ per } N = \frac{1}{\epsilon} \text{ esiste sempre } n > N$$

$$\lim_{n \to \infty} 2^n = \infty$$
$$\Longrightarrow 2^n \geq M \Longrightarrow n \geq \log_2 M$$

$$\Longrightarrow \text{ per } N = \log_2 M \text{ esiste sempre } n > log_2 M$$

$$\lim n \to \infty \frac{n+1}{n-1} = 1$$

$$\Longrightarrow |\frac{n+1}{n-1} - 1| \leq \epsilon \Longrightarrow \geq -\epsilon \forall n \in \mathbf{N}$$

$$\Longrightarrow \frac{n+1}{n-1} < 1 + \epsilon \Longrightarrow n + 1 \leq n + n\epsilon - 1 - \epsilon$$

$$\Longrightarrow 2 + \epsilon \leq n\epsilon \Longrightarrow n \geq \frac{2}{\epsilon} + 1$$

Successioni limitate a e

Data la successione divergente a_n: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^n = e$

0.5.6 Algebra dei limiti

$\lim_{n\to n_0} a_n = a \;\; \lim_{n\to\infty} b_n = b$
$\lim_{n\to n_0} a_n + b_n = a + b$
$\lim_{n\to n_0} a_n * b_n = a * b$
$\lim_{n\to n_0} a_n^{b_n} = a^b$
$\lim_{n\to n_0} f(a_n) = f(a)$

0.5.7 Teorema di permanenza del segno

$\lim_{n\to n_0} a_n = a$, $a \geq 0 \Longrightarrow \exists N \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n > N : a_n \geq 0$
$\lim_{n\to n_0} a_n = a$, $a \leq 0 \Longrightarrow \exists N \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n > N : a_n \leq 0$
E' quindi implicato:
$\lim_{n\to n_0} a_n = a$, $\lim_{n\to n_0} b_n = b$, $a_n > b_n \Longrightarrow a > b$

0.5.8 Teorema dei carabinieri

$a_n \leq b_n \leq c_n \;\; a = c \Longrightarrow a = b = c$

0.5.9 Stime asintotiche

Prese due successioni che tendono a $\infty/0$, considerando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =$$

- 0: a_n è un infinito/infinitesimo di ordine inferiore/superiore a b_n
- l, finito e $\neq 0$: a_n e b_n sono dello stesso ordine.

- $\pm\infty$: a_n è un infinito/infinitesimo di ordine superiore/inferiore a b_n
- $\nexists$: a_n e b_n non sono confrontabili.

Ordine delle stime asintotiche

$$\log_\alpha n < n^\alpha < \alpha^n < n! < n^n$$

$a_n \sim b_n$

Nel caso analizzato, quando $l = 1$, diciamo che a_n e b_n sono asintotiche ($a_n \sim b_n$).

- $a_n \sim b_n \Longrightarrow$ le due successioni hanno lo stesso comportamento
- $a_n \sim b_n \sim c_n \Longrightarrow a_n \sim c_n$
- $a_n \sim a_n^{'}, b_n \sim b_n^{'}, c_n \sim c_n^{'} \Longrightarrow \frac{a_n b_n}{c_n} \sim \frac{a_n^{'} b_n^{'}}{c_n^{'}}$

Criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

- $l < 1$: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- $l > 1$: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
- $= 1$: non possiamo concludere nulla

0.6 Limiti di funzioni

0.6.1 Definizione tramite limiti di successioni

$$x_0 \in I \subset \mathbf{R}, \, l \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$f : I \backslash \{x_0\} \longrightarrow \mathbf{R}, \text{ se}$$

$$\forall \text{ successione } \{x_n\} \in I \backslash \{x_0\} \text{ t.c. } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \text{ si ha che } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

0.6.2 Limite da destra e da sinistra

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = l$$

studia il comportamento della funzione da destra/sinistra.

0.6.3 Criterio d'esistenza del limite

Il limite esiste $\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

0.6.4 Teorema di unicità del limite

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l \Longrightarrow \exists! \lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

0.6.5 Limite per eccesso o per difetto

$\exists I\backslash\{x_0\}$ t.c. $\forall x \in I f(x) \geq / \leq l \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = l$ per eccesso/difetto

0.6.6 Asintoti

Gli asintoti sono rette che approssimano il comportamento della funzione in determinati punti, o verso gli estremi,della stessa. I limiti possono tendere da sinistra/destra/bilateralmente

Asintoto orizzontale

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l \Longrightarrow \exists \text{ asintoto orizzontale } y = l \in \mathbf{R}$$

Asintoto verticale

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Longrightarrow \exists \text{ asintoto verticale } x = \pm\infty$$

Asintoto obliquo

Se f presenta limiti infiniti all'infinito, può capitare che presenti limiti obliqui.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m,\ lim_{x\to\pm\infty} |f(x) - mx| = q$$

0.6.7 Continuità di una funzione tramite limite

$$f : I \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$\forall x_0 \in I \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x) \Longrightarrow \text{ f è continua in } I$$

0.6.8 Punti di discontinuità

Se $lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq lim_{x\to x_0^-} f(x) \Longrightarrow$
$\exists$ punto di salto in x_0, salto in $x_0 = \lim^+ - \lim^-$

0.7 Limiti notevoli

esponenziali e logaritmici

1) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

2) $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

3) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

4) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$

5) $\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

6) $\lim_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$

7) $\lim_{x \to 0} \lg_a (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\lg_e a}$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{\lg_a (1 + x)}{x} = \lg_a e = \frac{1}{\ln a}$

9) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

10) $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^a - 1}{x} = a$

11) $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^a - 1}{ax} = 1$

goniometrici

1) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, ax}{bx} = \frac{a}{b}$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{tg\, x}{x} = 1$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{tg\, ax}{bx} = \frac{a}{b}$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

7) $\lim_{x \to 0} \frac{arcsen\, x}{x} = 1$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{arcsen\, ax}{bx} = \frac{a}{b}$

9) $\lim_{x \to 0} \frac{arctg\, x}{x} = 1$

10) $\lim_{x \to 0} \frac{arctg\, ax}{bx} = \frac{a}{b}$

11) $\lim_{x \to 0} \frac{senh\, x}{x} = 1$

$$12)\ \lim_{x\to 0} x^r \lg_a x = 0 \quad \forall a \in R^+ - \{1\}, \forall r \in R^+$$

$$14)\ \lim_{x\to +\infty} x^r a^x = \lim_{x\to +\infty} a^x \qquad \forall a \in R^+ - \{1\}, \forall r \in R^+$$

$$15)\ \lim_{x\to -\infty} |x|^r a^x = \lim_{x\to -\infty} a^x \quad \forall a \in R^+ - \{1\}, \forall r \in R^+$$

$$16)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^r} = \lim_{x\to +\infty} a^x \qquad \forall r \in R^+$$

$$17)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x^r}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} a^x \qquad \forall r \in R^+$$

$$18)\ \lim_{x\to -\infty} e^x x^r = 0 \qquad \forall r \in R^+$$

$$12)\ \lim_{x\to 0} \frac{settsenh\ x}{x} = 1$$

$$13)\ \lim_{x\to 0} \frac{tgh\ x}{x} = 1$$

$$14)\ \lim_{x\to 0} \frac{settgh\ x}{x} = 1$$

$$15)\ \lim_{x\to 0} \frac{x - sen\ x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$$16)\ \lim_{x\to 0} \frac{x - arctg\ x}{x^3} = \frac{1}{3}$$