

Calcolo Integrale

March 5, 2023

1 Serie

1.1 Definizione

Una serie $\{S_n\}$ della serie $\{a_n\}$ è la **successione delle somme parziali** di a_n , ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

1.2 Carattere di una serie

Una serie, per $n \rightarrow \infty$, può fare 3 cose, esattamente come una successione può:

- **Divergere:** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \pm\infty$
- **Convergere:** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$
- **Non convergere:** $\nexists \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

1.3 Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Theorem 1.1 (Condizione necessaria per la convergenza della serie)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \in \mathbb{R} \implies a_k \rightarrow 0$$

La dimostrazione è alquanto semplice:

Se S_n converge per $n \rightarrow \infty$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_{n+1} = S \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n+1} a_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$$

Una riformulazione equivalente è la seguente

Theorem 1.2 (Criterio di Cauchy per la convergenza di una serie)

$$\{S_n\} \text{ converge} \iff \forall m > n, |S_m - S_n| = 0 \text{ definitivamente}$$

Dimostrazione:

Se $\{S_n\}$ converge ad l , allora $|\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{m \rightarrow \infty} S_m| = l - l = 0$.

Ipotizziamo ora che $|S_m - S_n| \neq 0$ definitivamente. Questo implica che,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m > n \in \mathbb{N}, \exists \Delta \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |S_m - S_n| = \Delta = \sum_{i=n+1}^m a_i \implies a_m \neq 0$$

Per il criterio di convergenza di una serie ne consegue che $\{S_n\}$ non converge.

1.3.1 Nota bene

Il criterio non implica che se $a_n \rightarrow 0$ allora S_n converge. Un esempio è la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \infty$$

1.4 Serie a termini costanti

Theorem 1.3 (Carattere di serie a termini costanti)

$$a_n \geq / \leq 0 \text{ definitivamente} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathbb{R} \vee = \pm \infty$$

Questa proprietà è una semplice conseguenza delle successioni monotone

Corollary 1.3.1

$$\{a_k\} \text{ definitivamente di segno costante} \wedge a_k \not\rightarrow 0 \implies \{S_n\} \text{ diverge}$$

Corollary 1.3.2

$$\{S_n\} \text{ limitata dall'alto/basso} \wedge \{a_k\} \text{ definitivamente } \geq / \leq 0 \implies \{S_n\} \text{ converge}$$

1.5 Serie geometriche

$$\{S_n\} \text{ è una serie geometrica} \iff \forall k \in \mathbb{N} a_k = q^k \wedge q \in \mathbb{R}$$

Theorem 1.4 (Carattere della serie geomtrica) Una serie geometrica ha carattere diverso in base al valore di q , detto ragione della serie:

- $q = 0$: $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 0$. Converge a 0 per $n \rightarrow \infty$
- $q = 1$: $S_n = n + 1$. Diverge a ∞ per $n \rightarrow \infty$
- $q = -1$: Se $2|n$, $S_n = 1$, in alternativa $S_n = 0$. Non converge per $n \rightarrow \infty$
- Per i restanti q , $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

1.5.1 Dimostrazione della formula per il calcolo dell' n -esimo valore della serie geometrica

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k \implies q \cdot S_n = \sum_{k=0}^n q^{k+1} \implies S_n - qS_n = 1 - q^{n+1} = S_n(1 - q) \implies$$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1.6 Serie armoniche

$$\{S_n\} \text{ è una serie armonica } \iff \forall k \in \mathbb{N}, a_k = k^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

Theorem 1.5 (Convergenza della serie armonica generalizzata)

$$\{S_n\} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

La dimostrazione usa il criterio dell'integrale (vedremo la dimostrazione quando parleremo del criterio)

1.7 Criteri per studiare il carattere di una serie

Theorem 1.6 (Criterio del confronto)

$$\forall \{A_n\}, \{B_n\} \text{ di termini a segno definitivamente costante, } a_n \leq b_n \text{ definitivamente } \implies$$

$$(A_n \rightarrow \infty \implies B_n \rightarrow \infty) \wedge (B_n \rightarrow l_B \in \mathbb{R} \implies A_n \rightarrow l_A \in \mathbb{R})$$

La dimostrazione è alquanto ovvia e la lascio per esercizio al lettore

Theorem 1.7 (Criterio del confronto asintotico)

$$\forall \{A_n\}, \{B_n\} \text{ di termini a segno definitivamente costante, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

$$\begin{cases} A_n \rightarrow +\infty & \iff B_n \rightarrow \infty & L \in \mathbb{R}^+ \\ B_n \rightarrow \infty & \implies A_n \rightarrow \infty & L = \infty \\ B_n \rightarrow l_B \in \mathbb{R} & \implies A_n \rightarrow l_A \in \mathbb{R} & L = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Anche qui la dimostrazione è simile a quella del confronto e la lascio al lettore

Theorem 1.8 (Criterio del rapporto)

$$\{A_n\} \text{ di termini a segno definitivamente costante, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

$$\begin{cases} A_n \rightarrow +\infty & L > 1 \\ A_n \rightarrow l_A \in \mathbb{R} & L < 1 \\ Inconcludente & L = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Dimostrazione: se il limite per $n \rightarrow \infty$ del rapporto tende a $L < 1$, per la completezza di \mathbb{R} esistono $N \in \mathbb{N}, r \in [L, 1)$ tale che $a_{n+1} < ra_n \forall n > N$, che iterativamente implica che

$$\forall i \in \mathbb{N}, a_{n+i} < r^i a_n \implies \sum_{i=1}^{\infty} a_{n+i} < \sum_{i=1}^{\infty} r^i a_n$$

Essendo la seconda una serie geometrica con $0 < r < 1$, questa converge, e per il criterio del confronto $\{A_n\}$ converge

Theorem 1.9 (Criterio della radice)

$\{A_n\}$ di termini a segno definitivamente costante, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

$$\begin{cases} A_n \rightarrow +\infty & L > 1 \\ A_n \rightarrow l_A \in \mathbb{R} & L < 1 \\ Inconcludente & L = 1 \end{cases} \quad (3)$$

La dimostrazione è simile a quella di prima: se $L < 1$ allora esistono $N \in \mathbb{N}, r \in [L, 1)$ tale che $\forall n > N, L^n = a_n < r^n < 1$, quindi

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \sum_{n=N}^{\infty} r^n$$

Essendo la seconda una serie geometrica convergente, per il teorema del confronto $\{A_n\}$ converge

Theorem 1.10 (Criterio di Leibniz)

$\{A_n\}$ con $A_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k, \{a_n\}$ definitivamente monotona decrescente e di segno costante

$$\implies \{A_n\} \rightarrow l_A \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione: In quanto la serie è monotona decrescente, ne segue che $|a_n - a_{n+1}| \leq |a_n| \forall n$

Da questa idea ne segue facilmente (dimostrabile per induzione) che vale la disuguaglianza

$$|a_m - \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i| \leq |a_m - a_{m+1}| \leq |a_m| \forall m$$

Ma in quanto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ abbiamo che

$$\forall m > n > N \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} |S_m - S_n| = |a_m - \sum_{i=n+1}^{\infty} \pm a_i| \leq a_m = 0$$

Ne consegue per il criterio di Cauchy che la serie converge.

Theorem 1.11 (Criterio della convergenza assoluta)

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \implies \sum_{i=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

2 Formule importanti

Definition 2.1 (Formula di approssimazione di Stirling)

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Definition 2.2 (e^x come serie)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Definition 2.3 (Comportamento asintotico del logaritmo del fattoriale)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x!}{x} = \infty$$

Dimostrazione: Sappiamo che, per $x \rightarrow \infty$, $x! > \alpha^x \forall \alpha$. Consideriamo allora tutti gli α nella forma

$$\alpha = e^k, k \in \mathbb{N}$$

Consideriamo ora

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{kx}}{x} = \frac{kx}{x} = k$$

Poichè ciò vale $\forall k$, vale per k grande a piacere, di conseguenza per $k \rightarrow \infty$, il che implica che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x!}{x} > \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{kx}}{x} \rightarrow \infty \blacksquare$$

Definition 2.4 (e come limite)

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[x]{x!}}$$

Dimostrazione: Usando l'approssimazione di Stirling otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[2x]{2x\pi}} \times \left(\frac{e}{x}\right)^{x \times 1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[2x]{2x\pi}} \times \frac{e}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt[2x]{2x\pi}^{1/2}}$$

Recall that for $x \rightarrow \infty$, $x^{1/x} \sim 1$, we get for $x \rightarrow \infty$ that our limit $\sim e/1 = e$ \blacksquare
Ricordarsi bene anche limiti notevoli ed espansioni di Taylor-MacLaurin