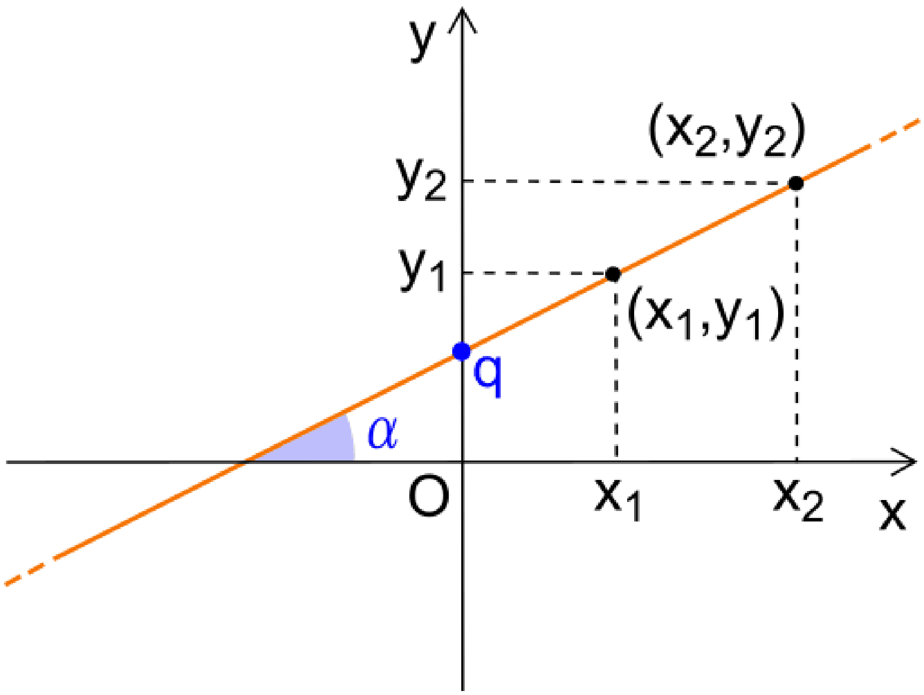
# Calcolo differenziale

October 23, 2022

# Contents

## 0.1 Equazioni e disequazioni

### 0.1.1 La retta




La retta è **lineare** in x e y.
Se $m > 0$ è **crescente**, se $m < 0$ è **decrescente**. **Forma esplicita** $y = mx + q$. Questa forma descrive tutte le rette tranne quella **verticale**: $y = c$ **Forma implicita** $ax + by + c = 0$

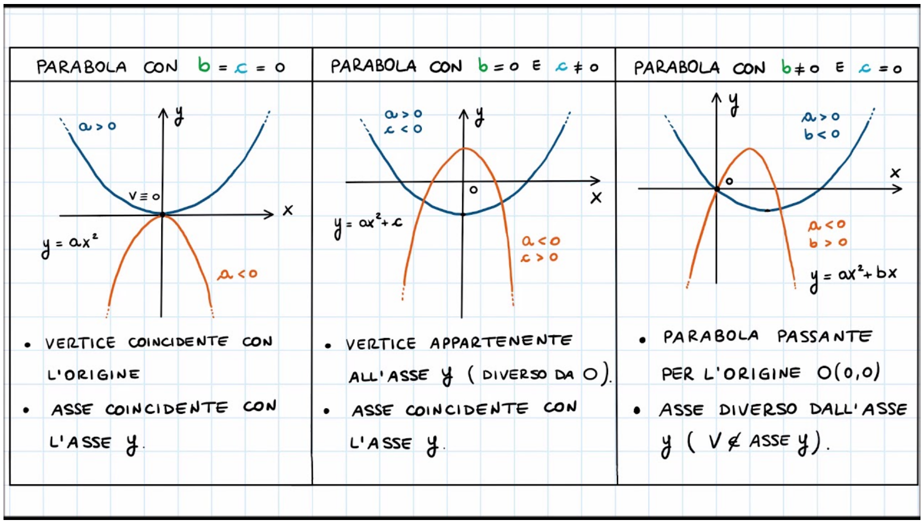
$$m = tg\Theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y = m(x - x_0) + y_0 \Longleftrightarrow q = mx_0 + y_0$$

$$ax \geq -b \Longrightarrow$$

- se $a > 0 : x \geq \frac{-b}{a}$
- se $a < 0 : x \leq \frac{-b}{a}$

### 0.1.2 Polinomi di secondo grado: le parabole




$$P_2(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

$$x^2 = c \Longrightarrow$$

- se $c > 0 : x \pm \sqrt[2]{c}$
- se $c = 0 : x = 0$
- se $c < 0 : \nexists x \in IR$

**Dimostrazione della correttezza della formula risolutiva per le equazioni di secondo grado**

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$
$$a * \left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right] = 0$$
$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt[2]{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt[2]{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In questa situazione abbiamo 3 opzioni:

- $b^2 - 4ac > 0 \iff$ 2 soluzioni
- $b^2 - 4ac = 0 \iff$ 1 soluzione
- $b^2 - 4ac < 0 \iff$ 0 soluzioni

### 0.1.3 Modulo

$|x| = \sqrt[2]{x^2} =$

- se $x > 0 : x$
- se $x < 0 : -x$

Geometricamente, il modulo è **la distanza** di x dal punto **0** sull'asse dei numeri *IR*.

$$|x| \leq a \iff [-a, a]$$
$$|x| \geq a \iff (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$$
$$-|x| \leq x \leq |x|$$

**Disuguaglianza triangolare**: $|x + y| \leq |x| + |y|$

$$|x * y| = |x| * |y|$$

## 0.2 Insiemi numerici

E' detta **insieme** una **collezione** di elementi per i quali è sempre possibile rispondere alla domanda $x \in A$.

### 0.2.1 Applicazioni

Tramite un'applicazione, associo gli elementi dell'insieme A agli elementi dell'insieme B, detto **immagine** di A.
Un'applicazione è:

- **Iniettiva**: $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \neq x_2 : x_1 \to b_1 \neq x_2 \to b_2$
- **Suriettiva**: $\forall b \in B : \exists a \in A$ t.c. $a \to b$
- **Biunivoca**: Suriettiva $\wedge$ Iniettiva

Se esiste un'applicazione suriettiva ed iniettiva fra $A$ e $B$ questi sono detti in **biezione**.

### 0.2.2 Definizione di N tramite gli insiemi

A questo punto possiamo definire i numeri naturali positivi partendo dagli insiemi.

- **0**: classe degli insiemi in biezione con $A = \emptyset$
- **1**: classe degli insiemi in biezione con $A = \{\emptyset\}$
- **2**: Classe degli insiemi in biezione con $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- **...**: ...

Possiamo accorgerci quindi come l'insieme **N** definisce la **cardinalità** degli insiemi.
Da qui possiamo continuare:

- **N+**: poichè **N** definisce la cardinalità degli insiemi, la somma di due numeri $\in$ **N** è uguale alla cardinalità di $(A \cup B) \forall A, B$ t.c. $A \cap B = \emptyset$.
- **-1**: quel numero t.c. $-1 + 1 = 0$. Da qui definiamo **Z**.
- $\frac{n}{m}$: $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{Z}, 0 \leq a_2, ..., a_n \leq 9 : a_1 + \Sigma_{i=1} n \frac{a^i}{10^i}$
- **Q**: $\frac{n}{m}, \frac{n_1}{m_1} \in \mathbf{Z}, m, m_1 \neq 0 : (n, m) = (n_1, m_1) \Longleftrightarrow (n * m_1) = (n_1 * m)$.
  La struttura **periodica** è valida se si conviene che $a, \overline{9} = a + 1$.
- **Q+**: $\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1} = \frac{n*m_1+m*n_1}{m*m_1}$
- **Q$*$**: $\frac{n}{m} * \frac{n_1}{m_1} = \frac{n*n_1}{m*m_1}$
- **Q inverso**: $\frac{n}{m} * \frac{n}{m}^{-1} = 1 \Longrightarrow \frac{n}{m}^{-1} = \frac{m}{n}, n \neq 0$

- **R**: Tutti i numeri scritti in forma decimale anche con **infinite** cifre **non periodiche** dopo la virgola

Possiamo infine definire le n-tuple di numeri $(a, b, ...)$ come **prodotto cartesiano** degli insiemi $A * B * ... = \{(a, b, ...) \forall a \in A \wedge \forall b \in B \wedge ...\}$

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

## 0.3 Coefficiente binomiale

$$q \in R, q \neq 1 \Longrightarrow \Sigma_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \Longleftrightarrow$$
$$(1 - q) * \Sigma_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\Sigma_{k=0}^{n} q^k - q * \Sigma_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\Sigma_{k=0}^{n} q^k - \Sigma_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\left(\Sigma_{k=1}^{n} q^k + 1\right) - \left(\Sigma_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1}\right) = 1 - q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\Sigma_{k=1}^{n} q^k - \Sigma_{k=1}^{n} q^k + 1 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \Longleftrightarrow$$
$$\Sigma_{k=1}^{n} q^k = \Sigma_{k=1}^{n} q^k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k\,(k-1)!\,(n-1-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{k\,(n-1)! + (n-k)\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(k+n-k)!}{k!\,(n-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n * (n-1)!}{k!\,(n-k)!} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^{n} \left( \binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k \right)$$

Dimostriamolo per induzione usando il seguente schema.

1. $P(n)$ è vera con $n = 1$
2. Supponiamo che $P(n)$ vera $\Longrightarrow P(n+1)$ vera

Procediamo al primo passo:

$$(a+b)^1 = \Sigma_{k=0}^{1}\left(\binom{1}{k} * a^{1-k} * b^k\right) \Longleftrightarrow$$

$$a+b = \binom{1}{0} * a^1 * b^0 + \binom{1}{1} * a^{1-1} * b^1 \Longleftrightarrow$$

$$a+b = 1 * a * 1 + 1 * 1 * b = a+b$$

Abbiamo dimostrato che $P(1)$ è vera, procediamo quindi col secondo passaggio.

$$(a+b)^{n+1} = \Sigma_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k} * a^{n+1-k} * b^k\right)$$

$$(a+b)(a+b)^n =$$

$$(a+b) * \Sigma_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k\right) =$$

$$\Sigma_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} * a^{n+1-k} * b^k\right) + \Sigma_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} * a^{n-k} * b^{k+1}\right) =$$

$$\Sigma_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} * a^{n+1-k} * b^k\right) + \Sigma_{k=1}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1} * a^{n-k+1} * b^k\right) =$$

$$\binom{n}{0} * a^{n+1} * b^0 + \Sigma_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} * a^{n+1-k} * b^k\right) + \Sigma_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} * a^{n-k+1} * b^k\right) + \binom{n}{n} * a^0 * b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \Sigma_{k=1}^{n}\left[\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) * a^{n+1-k} * b^k\right] b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \Sigma_{k=1}^{n}\left(\binom{n+1}{k} * a^{n+1-k} * b^k\right) + b^{n+1} =$$

$$\Sigma_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k} * a^{n+1-k} * b^k\right)$$

## 0.4 Funzioni

### 0.4.1 Definizione

Dati due insiemi $A$ e $B$, una funzione con **dominio** $A$ e **codominio** B è una qualunque legge che **ad ogni** elemento di $A$ associa **uno ed uno solo** elemento di $B$.
Può anche essere ad **n variabili** ed avere quindi n insiemi di partenza

$$f : A \longrightarrow B \text{ t.c. } \forall x \in A \longrightarrow f(x) \in B$$

Le funzioni **reali** a variabile **reale** sono le funzioni

$$f : A \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

### 0.4.2 Immagine

$$\{f(x) \forall x \in A\} \subset B$$

### 0.4.3 Grafico di una funzione

#### Definizione

L'insieme dei punti $\mathbf{R}^2$ definiti da

$$g_{\mathbf{R}} = \{(x, f(x)) \forall x \in A\}$$

#### Rappresentazione sul piano

Poichè $\mathbf{R}^2$ è rappresentabile sul piano cartesiano anche $g_{\mathbf{R}}$ lo è

#### Proprietà fondamentale della funzione espressa col grafico

$$\forall x_0 \in A \exists ! y_0 \text{ t.c. } x = x_0 \cap g_{\mathbf{R}} = (x_0, f(x_0))$$

### 0.4.4 Proprietà delle funzioni

Una funzione è detta

- **pari**: $\forall x \in A : f(x) = f(-x)$
- **dispari**: $\forall x \in A : -f(x) = f(-x)$
- **limitata superiormente**: $\exists M \in \mathbf{R}$ t.c. $M \geq f(x) \forall x \in A$
- **limitata inferiormente**: $\exists m \in \mathbf{R}$ t.c. $m \leq f(x) \forall x \in A$
- **limitata**: $f(x)$ è limitata superiormente e inferiormente
- **monotona crescente in A**: $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \leq x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$
- **monotona decrescente in A**: $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \leq x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$
- **periodica di periodo T**: $\forall x \in A, x + kT \in A, k \in \mathbf{Z} : f(x + kT) = f(x)$

### 0.4.5 Funzioni composte

- $g(f(x)) = g \circ f(x)$
- **funzione neutra o identità**: $f(x) = x = I(x)$
- **funzione inversa**: $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = I(x)$
- $f$: $\mathrm{Img}_f^{-1} \longrightarrow \mathrm{Def}_f^{-1}$
- $f^{-1}$: $\mathrm{Img}_f \longrightarrow \mathrm{Def}_f$
- $f \circ f^{-1}$: $\mathrm{Img}_f \longrightarrow \mathrm{Def}_f$
- $f^{-1} \circ f$: $\mathrm{Img}_f^{-1} \longrightarrow \mathrm{Def}_f^{-1}$

### 0.4.6 Condizioni di esistenza della funzione inversa

- $\text{Img}_f \subset Def_g$
- f **iniettiva**: se, per assurdo, non lo fosse vorrebbe dire che $\exists x_1, x_2$ t.c. $x_1 \neq x_2,\ y_1 = f(x_1) = f(x_2)$ e quindi $f^{-1}(y)$ potrebbe essere sia $x_1$ che $x_2$, e quindi $f^{-1}$ non sarebbe una funzione

### 0.4.7 Operazioni sui grafici

- $f(x+k)$: spostamento a sx
- $f(x-k)$: spostamento a dx
- $f(x)+k$: spostamento in alto
- $f(x)-k$: spostamento in basso
- $-f(x)$: ribaltamento su asse y
- $(f(-x))$: ribaltamento su asse x
- $|f(x)|$: ribaltamento su asse y degli $y<0$
- $f(|x|)$: Ribaltamento su asse x degli $x<0$