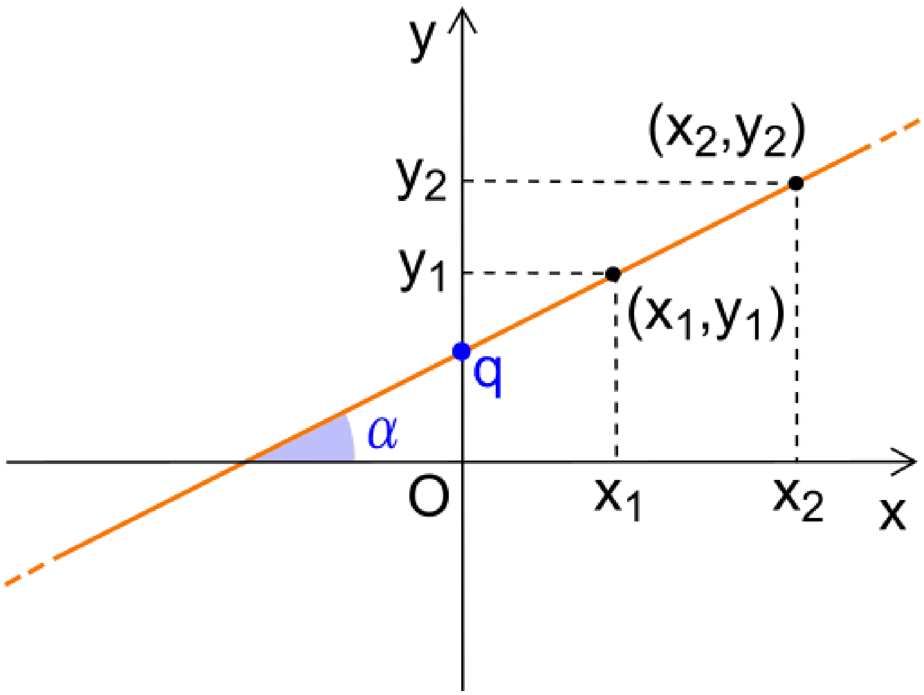
Calcolo differenziale

January 23, 2023

0.1 Equazioni e disequazioni

0.1.1 La retta



La retta è **lineare** in x e y.
Se $m > 0$ è **crescente**, se $m < 0$ è **decrescente**. **Forma esplicita** $y = mx + q$.
Questa forma descrive tutte le rette tranne quella **verticale**: $y = c$
Forma implicita $ax + by + c = 0$

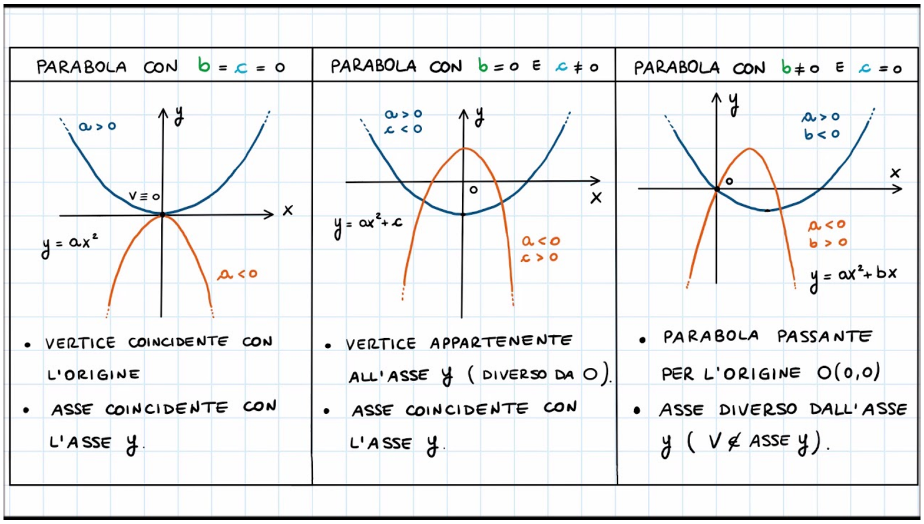
$$m = tg\Theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y = m(x - x_0) + y_0 \iff q = y_0 - mx_0$$

$$ax \geq -b \implies$$

- se $a > 0 : x \geq \frac{-b}{a}$
- se $a < 0 : x \leq \frac{-b}{a}$

0.1.2 Polinomi di secondo grado: le parabole



$$P_2(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

$$x^2 = c \Longrightarrow$$

- se $c > 0 : x \pm \sqrt[2]{c}$
- se $c = 0 : x = 0$
- se $c < 0 : \nexists x \in IR$

Dimostrazione della correttezza della formula risolutiva per le equazioni di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

$$a \cdot \left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right] = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt[2]{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt[2]{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In questa situazione abbiamo 3 opzioni:

- $b^2 - 4ac > 0 \iff 2$ soluzioni
- $b^2 - 4ac = 0 \iff 1$ soluzione
- $b^2 - 4ac < 0 \iff 0$ soluzioni

0.1.3 Modulo

$|x| = \sqrt[2]{x^2} =$

- se $x > 0 : x$
- se $x < 0 : -x$

Geometricamente, il modulo è **la distanza** di x dal punto **0** sull'asse dei numeri $I\!R$.

$$|x| \leq a \iff [-a, a]$$
$$|x| \geq a \iff (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$$
$$-|x| \leq x \leq |x|$$

Disuguaglianza triangolare: $|x + y| \leq |x| + |y|$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

0.2 Insiemi numerici

E' detta **insieme** una **collezione** di elementi per i quali è sempre possibile rispondere alla domanda $x \in A$.

0.2.1 Applicazioni

Tramite un'applicazione, associo gli elementi dell'insieme A agli elementi dell'insieme B, detto **immagine** di A.
Un'applicazione è:

- **Iniettiva**: $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \neq x_2 : x_1 \to b_1 \neq x_2 \to b_2$
- **Suriettiva**: $\forall b \in B : \exists a \in A$ t.c. $a \to b$
- **Biunivoca**: Suriettiva $\wedge$ Iniettiva

Se esiste un'applicazione suriettiva ed iniettiva fra A e B questi sono detti in **biezione**.

0.2.2 Definizione di N tramite gli insiemi

A questo punto possiamo definire i numeri naturali positivi partendo dagli insiemi.

- **0**: classe degli insiemi in biezione con $A = \emptyset$
- **1**: classe degli insiemi in biezione con $A = \{\emptyset\}$
- **2**: Classe degli insiemi in biezione con $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- **...**: ...

Possiamo accorgerci quindi come l'insieme **N** definisce la **cardinalità** degli insiemi.
Da qui possiamo continuare:

- **N+**: poichè **N** definisce la cardinalità degli insiemi, la somma di due numeri $\in \mathbf{N}$ è uguale alla cardinalità di $(A \cup B) \forall A, B$ t.c. $A \cap B = \emptyset$.
- **-1**: quel numero t.c. $-1 + 1 = 0$. Da qui definiamo **Z**.
- $\frac{n}{m}$: $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{Z}, 0 \leq a_2, ..., a_n \leq 9 : a_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a^i}{10^i}$
- **Q**: $\frac{n}{m}, \frac{n_1}{m_1} \in \mathbf{Z}, m, m_1 \neq 0 : (n, m) = (n_1, m_1) \Longleftrightarrow (n \cdot m_1) = (n_1 \cdot m)$.
  La struttura **periodica** è valida se si conviene che $a, \overline{9} = a + 1$.
- **Q+**: $\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1} = \frac{n \cdot m_1 + m \cdot n_1}{m \cdot m_1}$
- **Q·**: $\frac{n}{m} \cdot \frac{n_1}{m_1} = \frac{n \cdot n_1}{m \cdot m_1}$
- **Q inverso**: $\frac{n}{m} \cdot \frac{n}{m}^{-1} = 1 \Longrightarrow \frac{n}{m}^{-1} = \frac{m}{n}, n \neq 0$
- **R**: Tutti i numeri scritti in forma decimale anche con **infinite** cifre **non periodiche** dopo la virgola

Possiamo infine definire le n-tuple di numeri $(a, b, ...)$ come **prodotto cartesiano** degli insiemi $A \cdot B \cdot ... = \{(a, b, ...) \forall a \in A \land \forall b \in B \land ...\}$

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

0.3 Funzioni

0.3.1 Definizione

Dati due insiemi A e B, una funzione con **dominio** A e **codominio** B è una qualunque legge che **ad ogni** elemento di A associa **uno ed uno solo** elemento di B.
Può anche essere ad **n variabili** ed avere quindi n insiemi di partenza

$$f : A \longrightarrow B \text{ t.c. } \forall x \in A \longrightarrow f(x) \in B$$

Le funzioni **reali** a variabile **reale** sono le funzioni

$$f : A \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

0.3.2 Immagine

$$\{f(x)\forall x \in A\} \subset B$$

0.3.3 Grafico di una funzione

Definizione

L'insieme dei punti $\mathbf{R}^2$ definiti da

$$g_{\mathbf{R}} = \{(x, f(x))\forall x \in A\}$$

Rappresentazione sul piano

Poichè $\mathbf{R}^2$ è rappresentabile sul piano cartesiano anche $g_{\mathbf{R}}$ lo è

Proprietà fondamentale della funzione espressa col grafico

$$\forall x_0 \in A\, \exists ! y_0 \text{ t.c. } x = x_0 \cap g_{\mathbf{R}} = (x_0, f(x_0))$$

0.3.4 Proprietà delle funzioni

Una funzione è detta

- **pari**: $\forall x \in A : f(x) = f(-x)$
- **dispari**: $\forall x \in A : -f(x) = f(-x)$
- **limitata superiormente**: $\exists M \in \mathbf{R}$ t.c. $M \geq f(x)\forall x \in A$
- **limitata inferiormente**: $\exists m \in \mathbf{R}$ t.c. $m \leq f(x)\forall x \in A$
- **limitata**: $f(x)$ è limitata superiormente e inferiormente
- **monotona crescente in A**: $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \leq x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$
- **monotona decrescente in A**: $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \leq x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$
- **periodica di periodo T**: $\forall x \in A, x + kT \in A, k \in \mathbf{Z} : f(x + kT) = f(x)$
- **successione**: il dominio è $\mathbf{N}$, $f(n) = a_n$

0.3.5 Funzioni composte

- $g(f(x)) = g \circ f(x)$
- **funzione neutra o identità**: $f(x) = x = I(x)$
- **funzione inversa**: $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = I(x)$
- $f^{-1} : \mathrm{Img}_f \rightarrow \mathrm{Def}_f$

0.3.6 Condizioni di esistenza della funzione inversa

- $\text{Img}_f \subset Def_g$
- f **iniettiva**: se, per assurdo, non lo fosse vorrebbe dire che $\exists x_1, x_2$ t.c. $x_1 \neq x_2,\ y_1 = f(x_1) = f(x_2)$ e quindi $f^{-1}(y)$ potrebbe essere sia x_1 che x_2, e quindi f^{-1} non sarebbe una funzione

0.3.7 Operazioni sui grafici

- $f(x+k)$: spostamento a sx
- $f(x-k)$: spostamento a dx
- $f(x)+k$: spostamento in alto
- $f(x)-k$: spostamento in basso
- $-f(x)$: ribaltamento su asse y
- $(f(-x))$: ribaltamento su asse x
- $|f(x)|$: ribaltamento su asse x degli $y<0$
- $f(|x|)$: Ribaltamento su asse y della funzione quando $x<0$

0.3.8 Funzioni continue

Criterio di continuità

Riferirsi al capitolo presente nei limiti di funzioni

Teorema di esistenza degli zeri

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R},\ f \text{ continua}$$
$$f\left(a\right) \cdot f\left(b\right) < 0 \Longrightarrow \exists x_0 \in (a,b) \text{ t.c. } f\left(x_0\right) = 0$$

Dimostrazione
Ipotizziamo $f\left(a\right) < 0 \land f\left(b\right) > 0$.
Usiamo **l'algoritmo di biezione** per arrivare a x_0 t.c. $f\left(x_0\right) = 0$.

1. $c = \frac{a+b}{2}$
2. 3 casi:
   (a) $f\left(c\right) > 0 \Longrightarrow x_0 \in [a,c]$
   (b) $f\left(c\right) = 0 \Longrightarrow x_0 = c$. Abbiamo dimostrato che esiste x_0
   (c) $f\left(c\right) > 0 \Longrightarrow x_0 \in [c,b]$

3. Applico ricorsivamente l'algoritmo sul nuovo intervallo ottenuto al passo 2

Dobbiamo quindi dimostrare che, eventualmente, questo procedimento arrivi al caso 2 del punto 2.
Prendiamo ora la successione di tutti gli estremi sinistri costruiti fino al punto n degli intervalli (tutte le a) e chiamiamola $\{a_n\}_n$ e la successione di tutti gli estremi destri (tutte le b) e chiamiamola $\{b_n\}_n$.
Per come lo costruiamo, sappiamo che:

- $a_n > a_{n-1}$, $a_n < b \, \forall n$
- $b_n < b_{n-1}$, $b_n > a \, \forall n$
- In quanto limitate e monotone $\in [a, b]$, $\lim_{n\to\infty} a_n = sup_a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = inf_b$
- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ (L'intervallo dimezza ad ogni passo)
- $\forall n \, f(a_n) \leq 0, f(b_n) \geq 0$ per come scegliamo a_n e b_n

Il quarto punto ci permette di concludere che:

$$\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\Longrightarrow sup_a = inf_b$$

Quindi, posto $c = sup_a = inf_b$, e per il teorema della permanenza del segno $f(a_n) \cdot (b_n) \leq 0 \Longrightarrow f(c)^2 \leq 0$ volendo dimostrare che $f(c) = 0$ per l'algoritmo di biezione, partiamo dalle cose che sappiamo:

$$f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) = f(c)^2 \geq 0 \text{ in quanto quadrato}$$

$$\Longrightarrow f(c)^2 \geq 0 \wedge f(c)^2 \leq 0 \Longrightarrow f(c)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow f(c) = 0 \text{ c.v.d.}$$

Corollario

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R},\ f \text{ continua e strettamente monotona}$$

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \Longrightarrow \exists! x_0 \in [a, b] \text{ t.c. } f(x_0) = 0$$

Teorema di Weiestrass

$$f : [a, b], a \neq -\infty, b \neq +\infty, \longrightarrow \mathbf{R},\ f \text{ continua}$$

$$\exists m, M \text{ di } f \text{ in } [a, b]$$

Dimostrazione
La dimostrazione che segue è per il massimo, ma il ragionamento per il minimo è analogo La premessa fondamentale è che presi due insiemi $I_1, I_2, \sup(I_1 \cup I_2) = \max(\sup I_1, \sup I_2)$
Consideriamo ora $[a,b] = I_1 \cup I_2 \implies f([a,b]) = f(I_1) \cup f(I_2)$
Quindi $\sup f([a,b]) = \max(\sup f(I_1) \cup \sup f(I_2))$
Ne consegue che $supf([a,b]) = \sup f(I_1) \vee \sup f(I_2)$
Costruiamo ora $[a_1, b_1]$ come la metà di $[a,b]$ tale che $supf([a,b]) = \sup f(I_1)$.
Possiamo ripetere questo processo infinite volte su $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$
Possiamo osservare come per costruzione:

- a_n è una successione monotona crescente e b_n monotona decrescente.
- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ per $n \to \infty$
- $M = \sup f([a_n, b_n])$

In modo analogo al teorema degli zeri dimostriamo che $a_n \to x_0 \leftarrow b_n$
Se $M < \infty$ allora

$$\forall n\, \exists t_n \in [a_n, b_n] \text{ t.c. } M - \frac{1}{n} < f(t_n) \leq M$$

In quanto $M - \frac{1}{n}$ è minore del minimo dei maggioranti questo processo può essere ripetuto (facile notare come possa essere ripetuto infinite volte).
Inoltre, per il teorema del confronto, $t_n \to x_0$. Ne consegue che

$$\lim_{n\to\infty} M - \frac{1}{n} < f(t_n) < M = M - 0 < f(x_0) \leq M \implies f(x_0) = M$$

Se invece $M = \infty$, ne segue che $\forall n \in t_n \in [a_n, b_n]$ t.c. $f(t_n) > M$
Ma se $t_n \to x_0$ allora $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(x_0) = \infty$, impossibile in quanto $f(x_0) \in \mathbf{R} - \{-\infty, +\infty\}$

Teorema del valore intermedio avanzato

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}, f \text{ continua}$$
$$\implies f([a,b]) = [m, M]$$

La dimostrazione deriva dall'uso del teorema di Weiestrass e dal teorema degli zeri per la funzione $g(x) = f(x) - y\, \forall y \in [m, M]$

Algebra delle funzioni continue

$$f, g : [a,b]\,, x_0 \in [a,b]\,,\ f, g \text{ continue } \implies$$

- $f(x_0) \pm g(x_0)$ continua
- $f(x_0) \cdot g(x_0)$ continua
- $f(x_0) / g(x_0)$ continua purchè $g(x_0) \neq 0$

Teorema del cambio di variabile

$$f, g,\ f \circ g \text{ ben definita per } x \to x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} g\left(x\right) = t_0, \exists \lim_{t \to t_0} f\left(t\right) = l$$

$$\text{Inoltre, nel caso } f \text{ sia non continua in } t_0 \text{ o } t_0 = \pm\infty, g\left(x_0\right) \neq t_0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f\left(g\left(x\right)\right) = \lim_{t \to t_0} f\left(t\right)$$

Continuità della funzione composta

$$g : \left[a, b\right], f : \left[c, d\right], x_0 \in \left[a, b\right], g\left(x_0\right) \in \left[c, d\right]$$

$$f, g \text{ continue } \Longrightarrow f\left(g\left(x_0\right)\right) : \left[a, b\right] \text{ e continua in } x_0$$

Teorema di esistenza della radice i-esima

$$\forall y \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}, \text{ t.c. } y > 0, n \geq 1$$

$$\Longrightarrow \exists! x \in \mathbf{R}, x > 0 \text{ t.c. } x^n = y$$

Dimostrazione

$$g\left(x\right) = x, \text{ continua }, f\left(x\right) = x^n = \Pi_1^n g\left(x\right) \Longrightarrow, f\left(x\right) \text{ continua}$$

$$\left.\begin{cases} 1^n \leq y \leq y^n & y \geq 1,\ x_1 = 1, x_2 = y \\ y^n \leq y \leq 1^n & y < 1,\ x_1 = y, x_2 = 1 \end{cases}\right\} f\left(x\right) \text{ strettamente monotona } \in \left[x_1, x_2\right] \Longrightarrow x_1^n = m, x_2^n = M$$

$$\Longrightarrow \text{ per il teorema dei valori intermedi } \exists! x_0 \in \left[x_1, x_2\right] \text{ t.c. } f\left(x_0\right) = x_0^n = y$$

0.3.9 Funzioni monotone

Teorema di monotonia

$$f : \left(a, b\right), f \text{ monotona}$$

$\Longrightarrow \forall c \in \left(a, b\right) \exists$ finiti limite destro e sinistro per $x \to c$ e limite sinistro/destro per $x \to a/b$

Dimostrazione
$S = sup\{f\left(x\right) \forall x \in \left(a, c\right)\}$, S finito in quanto $S = f\left(c\right)$ per monotonia
Dobbiamo provare che

$$\lim_{x \to c^-} f\left(x\right) = S$$

ovvero che, presa la successione $x_n \in \left(a, c\right)$ t.c. $x_n \to c$,

$$\forall \epsilon > 0, S - \epsilon < f\left(x_n\right) < S + \epsilon$$

$$S > f\left(x\right) \forall x \in \left(a, c\right) \Longrightarrow S + \epsilon > f\left(x_n\right) \forall n$$

$$S > S - \epsilon \Longrightarrow \exists x_0 \in \left(a, c\right) \text{ t.c. } f\left(x_0\right) \geq S - \epsilon$$

$$\Longrightarrow f(x) \geq S - \epsilon \, \forall x \in (x_0, c) \text{ perchè monotona } \Longrightarrow f(x_n) \geq S - \epsilon$$

$$\Longrightarrow x_n \in (x_0, c) \text{ definitivamente } \Longrightarrow f(x_n) \geq S - \epsilon \text{ definitivamente}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = S$$

Analogamente possiamo fare con $\lim_{x \to c^+} f(x)$.
Per i limiti agli estremi possiamo usare lo stesso procedimento, ricordando però che S, s non sono necessariamente finiti in quanto $f(b/a)$ non sono maggioranti/minoranti in quanto la funzione non è definita in a, b. La dimostrazione cambia se $S = \infty$:

$$S = \infty \implies \forall K > 0 \exists x_0 \in (a, b) \text{ t.c. } f(x_0) > K$$

$$\Longrightarrow f(x) > K \, \forall x \in (x_0, b)$$

Presa una successione $x_n \to b, x_n \in (x_0, b)$

$$\Longrightarrow f(x_n) > K \text{ definitivamente}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$$

Nel caso la funzione sia decrescente anzichè crescente cambiare in modo appropriato.

Corollario

$$f : (a, b), f \text{ monotona}$$

Se esistono dei punti di discontinuità in (a, b) questi sono necessariamente **punti di salto**

0.3.10 Teorema di invertibilità della funzione continua

$$f : (a, b), f \text{ continua}$$

$$\Longrightarrow \exists f^{-1} : (a, b), f^{-1} \text{ strettamente monotona e continua } \Longleftrightarrow f \text{ strettamente monotona}$$

Dimostrazione

Dimostrazione prima parte
Dimostriamola per contrapposizione con f non strettamente monotona. Vuol dire che

$$\exists x_0 < x_1 < x_2 \in (a, b) \text{ t.c. } f(x_0) \leq f(x_1) \geq f(x_2)$$

Per il teorema dei valori intermedi

$$\exists c \in (x_0, x_1) \text{ t.c. } f(c) = f(x_2) \wedge c \neq x_2$$

La funzione non è quindi invertibile

Dimostrazione seconda parte
Prendiamo f^{-1} che sappiamo essere monotona ed ipotizziamo non sia continua. Per il teorema di monotonia sappiamo che i suoi punti di discontinuità in f^{-1} sono punti di salto, e quindi l'immagine di f^{-1} non sarebbe un intervallo in quanto strettamente monotona. Impossibile in quanto l'immagine di $f^{-1} = [a, b]$

0.4 Limiti di successioni

0.4.1 Disuguaglianza di bernoulli

$$n \geq 0,\, x > -1, \Longleftrightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx$$

0.4.2 Limiti convergenti

Una successione è detta **convergente** a l, o $\lim_{x\to\infty} = l$ se

$$\forall \epsilon > 0,\, \exists N = N(\epsilon) \text{ t.c. } \forall n > N \Longrightarrow |a_n - l| \leq \epsilon$$

Non tutte le successioni convergono.

0.4.3 Limiti divergenti

Una successione è detta **divergente** a $+\infty$, o $\lim_{x\to\infty} = +\infty$, se

$$\forall M > 0, \exists N = N(M) \text{ t.c. } \forall n > N \Longrightarrow a_n \geq M$$

e divergente a $-\infty$ se $a \leq -M$.
Non tutte le successioni divergono.

Convergenza per eccesso e per difetto

Una successione è detta tendere ad l per **eccesso** (l^+) nel caso in cui $a_n > l$, per **difetto**(l^-) in caso contrario.

0.4.4 Monotonia e limiti

Preso $A = \{a_n \forall n \in \mathbf{N}\}$, se $a_{n\in\mathbf{N}}$ è una successione **monotona**:

- **crescente**: converge a $\sup_A$ se limitata, se no diverge a $+\infty$
- **decrescente**: converge ad $\inf_A$ se limitata, se no diverge a $-\infty$

Numero di nepero

La convergenza di a_n: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^n = e$

Dimostrazione
Dimostriamo che è monotona crescente

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \Pi_{j=0}^{k-1} 1 - \frac{j}{n}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \Pi_{j=0}^{k-1} 1 - \frac{j}{n+1}$$

Possiamo notare subito come ogni termine del prodotto per del caso $n+1$ sia maggiore del corrispettivo termine del caso n, di conseguenza ogni prodotto del caso $n+1$ è maggiore, il che implica che è maggiore anche la somma. Quindi possiamo affermare che $a_{n+1} > a_n$.
Dimostriamo ora che limitata superiormente:

$$k! \geq 2^{k-1} \implies \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

Inoltre, in quanto i fattori della moltiplicazione interna della sommatoria sono ≤ 1, ne consegue che il prodotto è ≤ 1, il che implica

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \Pi_{j=0}^{k-1} 1 - \frac{j}{n} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3$$

Quindi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \Pi_{j=0}^{k-1} 1 - \frac{j}{n} < 3$$

Ne consegue che la successione converge

0.4.5 Algebra dei limiti

Con $\lim_{n\to n_0} a_n = a$
$\lim_{n\to n_0} a_n + b_n = a + b$
$\lim_{n\to n_0} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
$\lim_{n\to n_0} a_n^{b_n} = a^b$
$\lim_{n\to n_0} f(a_n) = f(a)$

0.4.6 Teorema di permanenza del segno

$\lim_{n\to n_0} a_n = a$, $a \geq 0 \implies \exists N \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n > N : a_n \geq 0$
$\lim_{n\to n_0} a_n = a$, $a \leq 0 \implies \exists N \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n > N : a_n \leq 0$
E' quindi implicato:
$\lim_{n\to n_0} a_n = a$, $\lim_{n\to n_0} b_n = b$, $\exists N$ t.c. $a_n > b_n \forall n \geq N \implies a > b$

0.4.7 Teorema dei carabinieri

$a_n \leq b_n \leq c_n$ $a = c \implies a = b = c$

Dimostrazione

$a_n \to l \leftarrow c_n \implies l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon \implies l - \epsilon < b_n < l + \epsilon \implies b_n \to l$

Corollario

$$c_n \to 0, |b_n| \leq c_n \implies -c_n \leq b_n \leq c_n \implies 0 \leq b_n \leq 0 \implies b_n \to 0$$

$$b_n \text{ limitata }, c_n \to 0 \implies \forall n |b_n| \leq K, K \geq 0$$
$$\implies |b_n| \cdot |c_n| < K \cdot |c_n| \implies |b_n \cdot c_n| < K \cdot |c_n| \implies |b_n \cdot c_n| < 0$$
$$\implies b_n \cdot c_n \to 0$$

0.4.8 Stime asintotiche

Prese due successioni che tendono a $\infty/0$, considerando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =$$

- 0: a_n è un infinito/infinitesimo di ordine inferiore/superiore a b_n
- l, finito e $\neq 0$: a_n e b_n sono dello stesso ordine.
- $\pm\infty$: a_n è un infinito/infinitesimo di ordine superiore/inferiore a b_n
- $\nexists$: a_n e b_n non sono confrontabili.

Ordine delle stime asintotiche

$$\log_\alpha n < n^\alpha < \alpha^n < n! < n^n$$

Successioni asintotiche

Nel caso analizzato, quando $l = 1$, diciamo che a_n e b_n sono asintotiche ($a_n \sim b_n$).

- $a_n \sim b_n \implies$ le due successioni hanno lo stesso comportamento

- $a_n \sim b_n \sim c_n \Longrightarrow a_n \sim c_n$
- $a_n \sim a_n^{'}, b_n \sim b_n^{'}, c_n \sim c_n^{'} \Longrightarrow \frac{a_n b_n}{c_n} \sim \frac{a_n^{'} b_n^{'}}{c_n^{'}}$

Criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

- $l < 1$: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- $l > 1$: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
- $= 1$: non possiamo concludere nulla

0.5 Limiti di funzioni

0.5.1 Definizione tramite limiti di successioni

$$x_0 \in I \subset \mathbf{R},\, l \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$f : I \backslash \{x_0\} \longrightarrow \mathbf{R}, \text{ se}$$

$$\forall \text{ successione } \{x_n\} \in I\backslash\{x_0\} \text{ t.c. } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \text{ si ha che } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

0.5.2 Limite da destra e da sinistra

$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x) = l$$

studia il comportamento della funzione da destra/sinistra.

0.5.3 Criterio d'esistenza del limite

Il limite esiste $\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

0.5.4 Teorema di unicità del limite

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l \Longrightarrow \exists! \lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

0.5.5 Limite per eccesso o per difetto

$\exists I\backslash\{x_0\}$ t.c. $\forall x \in I f(x) \geq / \leq l \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = l$ per eccesso/difetto

0.5.6 Asintoti

Gli asintoti sono rette che approssimano il comportamento della funzione in determinati punti, o verso gli estremi,della stessa. I limiti possono tendere da sinistra/destra/bilateralmente

Asintoto orizzontale

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \Longrightarrow \exists \text{ asintoto orizzontale } y = l \in \mathbf{R}$$

Asintoto verticale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \Longrightarrow \exists \text{ asintoto verticale } x = \pm\infty$$

Asintoto obliquo

Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, può capitare che presenti limiti obliqui.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \lim_{x \to \pm\infty} |f(x) - mx| = q$$

0.5.7 Continuità di una funzione tramite limite

$$f : I \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$\forall x_0 \in I \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Longrightarrow \text{ f è continua in } I$$

0.5.8 Punti di discontinuità

Punto di salto (o prima specie)

$lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq lim_{x \to x_0^-} f(x) \Longrightarrow$
$\exists$ punto di salto in x_0, salto in $x_0 = \lim^+ - \lim^-$

Punto di discontinuità di seconda specie

$$\begin{gathered} \nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \vee = \infty \\ \vee \\ \nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \vee = \infty \\ \Longrightarrow x_0 \text{ punto di discontinuità di seconda specie} \end{gathered}$$

Discontinuità eliminabile (o di terza specie)

$$\begin{gathered} \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \wedge l \neq f(x_0) \vee \nexists f(x_0) \\ \Longrightarrow x_0 \text{ discontinuità eliminabile} \end{gathered}$$

0.6 Limiti notevoli

esponenziali e logaritmici

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$

5) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

6) $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$

7) $\lim_{x\to0}\lg_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\lg_e a}$

8) $\lim_{x\to0}\frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a e = \frac{1}{\ln a}$

9) $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

10) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$

11) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{ax} = 1$

goniometrici

1) $\lim_{x\to0}\frac{sen\ x}{x} = 1$

2) $\lim_{x\to0}\frac{sen\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

3) $\lim_{x\to0}\frac{tg\ x}{x} = 1$

4) $\lim_{x\to0}\frac{tg\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

5) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

6) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

7) $\lim_{x\to0}\frac{arcsen\ x}{x} = 1$

8) $\lim_{x\to0}\frac{arcsen\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

9) $\lim_{x\to0}\frac{arctg\ x}{x} = 1$

10) $\lim_{x\to0}\frac{arctg\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

11) $\lim_{x\to0}\frac{senh\ x}{x} = 1$

12) $\lim_{x \to 0} x^r \lg_a x = 0 \quad \forall a \in R^+ - \{1\}, \forall r \in R^+$

14) $\lim_{x \to +\infty} x^r a^x = \lim_{x \to +\infty} a^x \qquad \forall a \in R^+ - \{1\}, \forall r \in R^+$

15) $\lim_{x \to -\infty} |x|^r a^x = \lim_{x \to -\infty} a^x \quad \forall a \in R^+ - \{1\}, \forall r \in R^+$

16) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^r} = \lim_{x \to +\infty} a^x \qquad \forall r \in R^+$

17) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^r}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} a^x \qquad \forall r \in R^+$

18) $\lim_{x \to -\infty} e^x x^r = 0 \qquad \forall r \in R^+$

12) $\lim_{x \to 0} \dfrac{settsenh\ x}{x} = 1$

13) $\lim_{x \to 0} \dfrac{tgh\ x}{x} = 1$

14) $\lim_{x \to 0} \dfrac{settgh\ x}{x} = 1$

15) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - sen\ x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$

16) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - arctg\ x}{x^3} = \dfrac{1}{3}$

0.7 Derivate

0.7.1 Rapporto incrementale

R.I.:

$$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

0.7.2 Derivata come limite del rapporto incrementale

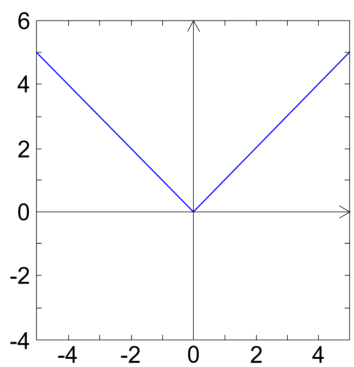
$$f^{'}\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$$

0.7.3 Punti di non derivabilità

Esistono vari tipi di punti di non derivabilità. Di seguito i più interessanti

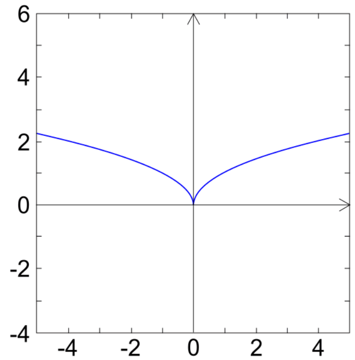
Punto angoloso

$$\lim_{h\to 0^-}\text{R.I.}=l_1\neq l_2=\lim_{h\to 0^+}\text{R.I.}$$
$$l_1\vee l_2\ \text{finito/i}$$



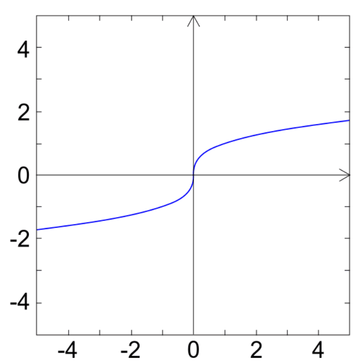
Cuspide

$$\lim_{h\to 0^-}\text{R.I.}=\pm\infty\neq\mp\infty=\lim_{h\to 0^+}\text{R.I.}$$



Punto di flesso a tangente verticale

$$\lim_{h\to 0^-} \text{R.I.} = \pm\infty = \lim_{h\to 0^+} \text{R.I.}$$



0.7.4 Derivabilità e Continuità

$$\exists f^{'}(x) \Longrightarrow f \text{ continua}$$

0.7.5 Retta tangente in x_0

$$y = f(x_0) + f^{'}(x_0) \cdot (x - x_0)$$

0.7.6 Algebra delle derivate

Prese due funzioni f, g:

- $(f+g)^{'} = f^{'} + g^{'}$
- $(f \cdot g)^{'} = f^{'} \cdot g + f \cdot g^{'}$
  Nota come **regola di Leibnitz**
- $\left(\frac{f}{g}\right)^{'} = \frac{f^{'} \cdot g - f \cdot g^{'}}{g^2}$

Dimostrazione regola di Leibnitz

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) + [f(x+h) \cdot g(x) - f(x+h) \cdot g(x)] - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) + \frac{d^{f(x)}}{d^{f(x)} x} \cdot g(x)$$

Regola di Leibnitz ad n fattori

$$\frac{d}{dx}\left(f \cdot f^1 \cdot ... \cdot f^n\right) = \frac{d}{dx} f \cdot f^1 ... \cdot f^n + f \cdot \frac{d}{dx} f^1 \cdot ... \cdot f^n + ... + f \cdot f^1 \cdot ... \cdot \frac{d}{dx} f^n$$

Regola di Leibnitz per la derivata n-esima

$$\frac{d^n}{d^n x}(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{d^{n-k} x} f \cdot \frac{d^k}{d^k x} g$$

0.7.7 Derivata della funzione composta

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \left(\frac{d}{dx} g \circ f\right)(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

Dimostrazione

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \tfrac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} \cdot \tfrac{f(x+h)-f(x)}{f(x+h)-f(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \tfrac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)} \cdot \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\Longrightarrow y = f(x), \, k = f(x+h) - f(x), \lim_{h\to 0} k = 0 \Longrightarrow$$

$$\lim_{k\to 0} \tfrac{g(y+k)-f(y)}{y+k-y} \cdot \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \tfrac{d}{dy} g(y) \cdot \tfrac{d}{dx} f(x) = \tfrac{d}{dx} g(f(x)) \cdot \tfrac{d}{dx} f(x)$$

0.7.8 Derivata dell'inversa

$$g = f^{-1} \Longrightarrow \frac{d}{dy} g = \frac{1}{\frac{d}{dx} f(g)}$$

Dimostrazione

Il R.I. dell'inversa sarebbe

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Quindi

$$\lim_{\Delta y\to 0} \mathrm{R.I.}_g = \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{\mathrm{R.I.}_f}$$

$$\tfrac{d}{dy} g = \tfrac{1}{\frac{d}{dx} f(f^{-1}(y))}$$

0.7.9 Punti stazionari

$$x \text{ punto stazionario} \Longleftrightarrow \frac{d}{dx} f(x) = 0$$

I punti stazionari possono essere **estremi locali** o **punti di flesso a tg. orizzontale**

0.7.10 Teorema di Fermat

$$f \text{derivabile}, f(x) \text{ estremo locale } \Longrightarrow \frac{d}{dx} f(x) = 0$$

Dimostrazione

Analizziamo la dimostrazione con $f(x)$ massimo locale. La dimostrazione per il mimimo locale è analoga.

$$\forall z \in (a,b)\,, f(z) \leq f(x)$$

$$z < x \Longrightarrow \tfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq 0 \Longrightarrow \tfrac{d}{dx} f_-(x) = \lim_{z \to x^-} \tfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

$$\Longrightarrow \tfrac{d}{dx} f_-(x) \geq 0$$

$$z > x \Longrightarrow \tfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq 0 \Longrightarrow \tfrac{d}{dx} f_+(x) = \lim_{z \to x^+} \tfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

$$\Longrightarrow \tfrac{d}{dx} f_+(x) \leq 0$$

$$\Longrightarrow \tfrac{d}{dx} f_-(x) = \tfrac{d}{dx} f_+(x) = 0 = \tfrac{d}{dx} f(x)$$

0.7.11 Teorema del valore medio di Lagrange

$$\exists c \in (a,b) \text{ t.c. } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{d}{dx} f(c)$$

Dimostrazione

Si può vedere come $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sia la pendenza della retta AB. L'equazione della retta è quindi

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Consideriamo ora la funzione, continua e derivabile

$$w(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

Possiamo facilmente notare che $w(a) = w(b) = 0$.
Per il teorema di Weiestrass $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ t.c. $M = f(x_1), m = f(x_2)$. Abbiamo ora diverse casistiche

- $M = m \Longrightarrow w(x) = k \forall x \in [a,b] \Longleftrightarrow \frac{d}{dx} w(x) = 0 \forall x \in [a,b]$
- $M > m \Longrightarrow x_1 \neq a \neq b$ t.c. $\frac{d}{dx} w(x_1) = 0$ per il teorema di Fermat

Con

$$\frac{d}{dx} w(x) = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Quindi

$$\exists c \in [a, b] \text{ t.c. } \tfrac{d}{dx} w(x_0) = 0$$

$$\Longrightarrow \tfrac{d}{dx} f(c) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$\Longrightarrow \tfrac{d}{dx} f(c) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

0.7.12 Criterio di monotonia

$$\forall x \in (a, b)\ \frac{d}{dx} f(x) \geq / \leq 0 \Longleftrightarrow f \text{ crescente/decrescente}$$

Dimostrazione

$$\forall x, z \in (a, b), x < z \Longrightarrow$$

$$f \text{ crescente/decrescente} \Longleftrightarrow \tfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq / \leq 0 \Longrightarrow$$

$$lim_{z \to x} \tfrac{f(z)-f(x)}{z-x} = \tfrac{d}{dx} f(x) \geq / \leq 0$$

Abbiamo così mostrato l'implicazione da f a $\frac{d}{dx} f$.
Dimostriamo ora anche l'implicazione opposta considerando il caso in cui $\frac{d}{dx} f(x) \geq 0$.

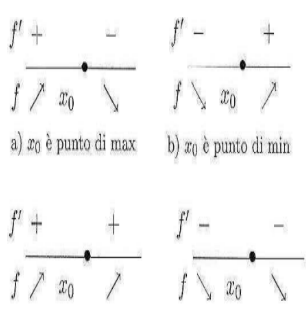
$$\forall x, z \in (a, b)\, x < z \Longrightarrow \text{ per Lagrange } \exists c \in (x, z) \text{ t.c. } \tfrac{f(z)-f(x)}{z-x} = \tfrac{d}{dx} f(c) \geq 0 \text{ per ipotesi}$$

$$\Longrightarrow z - x > 0 \Longrightarrow f(z) - f(x) \geq 0 \text{ Q.E.D}$$

Questo metodo ci permette di studiare anche la monotonia di alcune (non tutte!) successioni.

0.7.13 Ricerca dei punti stazionari

Studiamo il comportamento di $\frac{d}{dx} f(x_0 \in (a, b)) = 0$ in un intorno di x_0



Ricordarsi di considerare anche $f(a)$ e $f(b)$

0.7.14 Teorema di de l'Hopital

$$f, g \text{ derivabili } \in (a,b) \wedge \forall x \in (a,b) \left(g(x) \neq 0 \wedge \frac{d}{dx} g(x) \neq 0 \right)$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} g(x) = 0 \vee \pm\infty \wedge \lim_{x \to x_0^+} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)} = l \in \mathbf{R}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

0.7.15 Limite e derivata

$$f : [a, b\ ) \to \mathbf{R} \wedge f \text{ continua in } a \wedge f \text{ derivabile } \in [a, b\ ) \wedge \exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{d}{dx} f(x) = l$$
$$\Longrightarrow \frac{d}{dx} f_+ (x_0) = l$$

0.7.16 Derivata seconda

Significato geometrico

Ci fornisce una misura del **grado di scostamento del grafico dall'andamento rettilinio** (ovvero quanto il grafico *"curva"*).
Ne consegue, $\forall x_0 \in X$ t.c. $\exists \frac{d^2}{d^2 x} f(x_0)$ è relazionato al cerchio con centro in x_0, nello specifico col raggio.

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{\left| \frac{d^2}{d^2 x} f(x) \right|}{\left(1 + \frac{d}{dx} f(x)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Convessità di una figura

Data la figura F, questa è convessa se:

$$\overline{P_1 P_2} \in F \forall P_1, P_2 \in F \text{ t.c. } P_1 \neq P_2 \Longrightarrow F \text{ convessa}$$

Convessità di una funzione

Definizione geometrica con l'epigrafico
Definiamo il concetto di epigrafico di una funzione come:

$$\mathrm{epi}_f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in X, y \geq f(x)\}$$

$$\mathrm{epi}_f \text{ convesso } \in [a,b] \Longrightarrow f \text{ convessa } \in [a,b]$$

In caso contrario è concava.

Definizione analitica
Definiamo prima l'equazione che definisce la **combinazione lineare convessa** di un segmento le cui x sono comprese in $[a, b]$.

$$t \in [0,1]$$

$$z(t) = (1-t)\, a + tb \qquad f^*(t) = (1-t)\, f(a) + t f(b)$$

Queste equazioni corrispondono alla corrispondenza fra il punto sulla curva e sul segmento fra gli estremi.

$$f(z(t)) \leq f^*(t)\ \forall t \in [0,1] \iff f \text{ convessa } \in [a, b]$$

Si parla di funzione **strettamente convessa** se ciò si verifica sempre anche per $<$

Continuità, derivabilità e convessità

f convessa o concava $\in [a, b] \implies f$ continua e derivabile da sinistra, destra $\in (a, b) \implies$

$\forall x \in (a, b), \exists \dfrac{d}{dx} f(x)$ crescente $\in (a, b) \iff f$ convessa $\in (a, b) \iff \exists \dfrac{d^2}{d^2x} f(x) \geq 0$

Ciò cambia in ovvi modi per la convessità e per le relazioni strette.

Convessità e tangente

$\forall x_0 \in (a, b), \forall P \in \text{tangente}_{x_0}, y_P \geq / \leq f(x)\, \forall x \in (a, b) \iff f$ concava/convessa

Punti di flesso

Definizione

$$\forall x_0 \in X, \exists \tfrac{d}{dx} f(x) \vee \tfrac{d}{dx} f(x) = \pm\infty$$

$$\wedge \exists h > 0 \text{ t.c. } f \text{ concava/convessa } \in [x_0 - h, x_0] \wedge f \text{ convessa/concava } \in [x_0, x_0 + h]$$

$$\iff x_0 \text{punto di flesso}$$

Punti di flesso e derivata seconda

$$\forall x \in X, \frac{d^2}{d^2x} f(x) = 0 \implies x \text{ punto di flesso}$$

0.8 Derivate fondamentali

$\frac{d}{dx}k = 0, \quad k \in \mathbb{R}$	Derivata della funzione costante
$\frac{d}{dx}x = 1$	Derivata della funzione identità
$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}$	Derivata della funzione potenza
$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$	Derivata della funzione seno
$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$	Derivata della funzione coseno
$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	Derivata della funzione tangente
$\frac{d}{dx}\cot x = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$	Derivata della funzione cotangente
$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$	Derivata della funzione esponenziale
$\frac{d}{dx}e^x = e^x$	Derivata della funzione esponenziale naturale
$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$	Derivata della funzione logaritmo
$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$	Derivata della funzione logaritmo naturale
$\frac{d}{dx}\lvert x\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{x}$	Derivata della funzione valore assoluto

0.9 Studio di funzione

1. Definire D_f
2. Simmetrie e periodicità
3. Intersezioni assi
4. Intervalli di positività e negatività
5. Valori agli estremi e asintoti
6. Intervalli di monotonia, minimi e massimi (studio $\frac{d}{dx}f(x)$)
7. Intervalli di convessità e punti di flesso (studio $\frac{d^2}{d^2x}f(x)$)
8. Grafico

0.10 Calcolo differenziale e approssimazioni

0.10.1 Linearizzazione e differenziale

La linearizzazione è un processo di approssimazione di come varia una funzione f per una differenza dx.

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} \cdot dx \approx \frac{d}{dx} f(x_0) \cdot dx \text{ per } dx \approx 0$$

Ne consegue la definizione di **differenziale** di f in x_0:

$$df(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0) \cdot dx$$

Questa approssimazione presenta però un errore $\sigma(dx) \to 0$ per $dx \to 0$.
Possiamo quindi scrivere:

$$\lim_{dx\to 0} \frac{\Delta f}{dx} = \lim_{dx\to 0} \frac{d}{dx} f(x_0) + \sigma(dx) \Longrightarrow \lim_{dx\to 0} \Delta f - df(x_0) = \lim_{dx\to 0} dx \cdot \sigma(dx)$$

L'algebra dei differenziali è equivalente all'algebra delle derivate

0.10.2 Infinitesimo

Prendiamo l'equazione di prima. Abbiamo che

$$\lim_{dx\to 0} \frac{dx \cdot \sigma(dx)}{dx} = \lim_{dx\to 0} \sigma(dx) = 0$$

Ovvero che $dx \cdot \sigma(dx)$ è un **infinitesimo di ordine superiore** rispetto a dx.
Definiamo il concetto di infinitesimo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Longleftrightarrow f(x) = o(g(x))$$

Nell'esempio di prima, abbiamo che $dx \cdot \sigma(dx) = o(dx)$
Possiamo quindi riscrivere l'equazione del paragrafo precedente come:

$$\lim_{dx \to 0} \Delta f = \lim_{dx \to 0} df(x_0) + o(dx)$$

Questa è detta **approssimazione** di f al **prim'ordine**

Relazione con l'asintoto

Per $x \to 0$:

$$f(x) \sim g(x) \Longleftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$$

Algebra degli o-piccolo

- $\lim_{x \to 0} o(x^n) \pm o\left(x^{n+1}\right) = o(x^n)$
- $\lim_{x \to \infty} o(x^n) \pm o\left(x^{n+1}\right) = o\left(x^{n+1}\right)$
- $k \cdot o(x) = o(k \cdot x) = o(x)$
- $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$
- $o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$

0.10.3 Approssimazione polinomiale

L'idea di base è quella di approssimare il comportamento di una funzione tramite un **polinomio di grado** n. Il processo col quale si *"costruisce"* questo polinomio, idealmente composto come $T_n(x) = c_0 + c_1 x + ... x_n x^n$ è un processo di matching 1 a 1.
Praticamente cerchiamo valori delle costanti per i quali, dato x_0:

$$\forall i \in [0, n], \ \frac{d^i}{d^i x} f(x_0) = \frac{d^i}{d^i x} T_n(x_0)$$

Facile notare come, ad ogni derivata i-esima di f, a *"controllare"* il valore della derivata i-esima del polinomio sia un solo coefficiente, e come al crescere di n migliori l'approssimazione, e come il limite di n è data da quante volte è derivabile $f(x_0)$.
E' bene tenere a mente che esiste sempre un errore di approssimazione di ordine $o(x^n)$.

0.10.4 Polinomio di Taylor

Tutte le osservazioni del paragrafo prima ci portano alla conclusione che vogliamo costruire il nostro poliniomio, l'unico per il quale valgono queste proprietà, detto polinomio di Taylor, secondo il seguente schema:

$$f(x) = \left(T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\frac{d^i}{d^i x} f(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i \right) + R_n(x)$$

Dove R_n rappresenta il resto dell'approssimazione.
Notare come per arrivare al grado n del polinomio occore che f sia derivabile n-volte in quel punto.

0.10.5 Calcolare il valore della derivata dal polinomio di Taylor

Data la funzione $f(x)$ il cui corrispondente polinomio di Taylor $T_{x_0,n}$ è

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (x - x_0)^i$$

Possiamo calcolare il valore di $\frac{d^i}{d^i x} f(x_0)$ $\forall i \leq n$ tramite la formula

$$\frac{d^i}{d^i x} f(x_0) = a_i \cdot i!$$

Resto secondo Peano

Il resto secondo Peano ci fornisce l'entità del resto per $x \to x_0$, ed è utile usarlo quindi nei limiti.

$$R_n(x_0) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

Resto secondo Lagrange

Nel caso in cui invece $x - x_0 =$ constante, risulta più utile usare il resto di Lagrange, che si basa sul teorema di Lagrange, con la differenza che questa volta f deve essere derivabile $n + 1$ volte.

$$\exists c \in (x_0, x) \text{ t.c. } R_n(x_0) = \frac{\frac{d^{n+1}}{d^{n+1}x} f(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Utile se

$$\frac{d^{n+1}}{d^{n+1}x} f(x)$$

è limitata in (x_0, x)

0.10.6 Metodo di Newton

Il metodo di Newton è un metodo che ci permette di approssimare $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = 0$.

$$\exists \frac{d}{dx} f(x), \frac{d^2}{d^2x} f(x) \text{ con segno constante } \in [a,b]$$

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

$$\frac{d^2}{d^2x} f(a) \cdot f(a) > 0 \Longrightarrow x_0 = a$$

$$\frac{d^2}{d^2x} f(b) \cdot f(b) > 0 \Longrightarrow x_0 = b$$

$$\Longrightarrow \exists! c \in (a,b) \text{ t.c. } f(c) = 0 \wedge x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{d}{dx} f(x_n)} \to c \text{ per } n \to \infty$$

La successione converge a c per difetto se $x_0 = a$, per eccesso se $x_0 = b$.

Dimostrazione

Essendo f derivabile ne consegue che è anche continua.
Per il teorema degli zeri, se si verifica la seconda ipotesi, allora sappiamo che $\exists c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.
A garantirne l'unicità è la terza ipotesi, che implica la monotonia di $f \in [a,b]$.
Per motivi di semplicità, supponiamo $f(a) < 0 \wedge f(a) \cdot \frac{d^2}{d^2x} f(a) \geq 0$.

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \wedge f(a) < 0 \Longrightarrow f \text{ crescente } \in [a,b] \Longrightarrow \frac{d}{dx} f(x) > 0 \wedge \frac{d^2}{d^2x} f(x) < 0$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{\frac{d}{dx} f(x)} \Longrightarrow x_{n+1} = g(x_n) \Longrightarrow g(c) = c$$

$$\frac{d}{dx} g(x) = 1 - \frac{\frac{d}{dx} f(x)^2 - \frac{d^2}{d^2x} f(x) \cdot f(x)}{\frac{d}{dx} f(x)^2} = \frac{\frac{d^2}{d^2x} f(x) \cdot f(x)}{\frac{d}{dx} f(x)^2}$$

$$\Longrightarrow \forall x \in [a,b] \ \frac{d}{dx} g(x) > 0 \Longrightarrow \forall x \in [a,c] \ g(x) \text{ monotona crescente}$$

Inoltre la successione è limitata superiormente in quanto

$$g(c) = c, x_n < c \implies g(x_n) < g(c) \implies g(x_n) < c \implies x_{n+1} < c \implies x_n \to \alpha$$

Dimostriamo che converge a c.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \in [a,b] \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{d}{dx} f(x_n)}$$
$$\Longrightarrow \text{ per la continuità di } f \ \ \alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{\frac{d}{dx} f(\alpha)} \Longrightarrow f(\alpha) = 0$$
$$\Longrightarrow f(\alpha) = 0 \wedge f(c) = 0 \Longrightarrow \text{ per l'unicità di } c \text{ ne consegue che } \alpha = c \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = c$$

0.11 Sviluppi noti di Taylor-MacLaurin

TAVOLA DEGLI SVILUPPI DI TAYLOR DELLE FUNZIONI ELEMENTARI PER $x \to 0$.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + o(x^{10}) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + o(x^{10}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\operatorname{arctanh} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)
\end{aligned}
$$

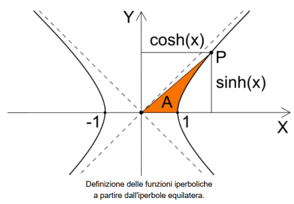
con

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$$

0.12 Funzioni iperboliche

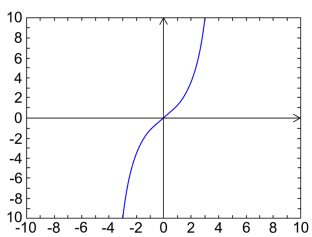
0.12.1 Iperbole

L'iperbole è la figura geometrica definita dalla funzione $x^2 - y^2 = 1$



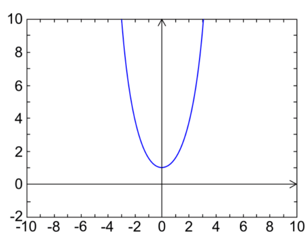
0.12.2 Seno iperbolico

$$\sinh : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$$



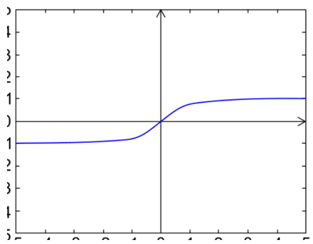
0.12.3 Coseno iperbolico

$$\cosh : \mathbf{R} \to [1, \infty)$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$$



0.12.4 Tangente iperbolica

$$\tanh : \mathbf{R} \to (-1, 1)$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^2x-1}{e^2x+1}$$
$$\frac{d}{dx}\tanh(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$



0.13 Numeri complessi

Il problema principale che vogliamo è avere un numero z tale che $\sqrt{-1} = z$
Definiremo i numeri che nascono da tale soluzione come **numeri complessi**, denotati nell'insieme $\mathbf{C} \supset \mathbf{R}$

0.13.1 Numeri complessi come elementi di $\mathbf{R^2}$

Consideriamo l'elementi $(x, y) \in \mathbf{R^2}$, e definiamo le due operazioni base su di loro
N.B.: Per questa definizione di $\mathbf{C}$, notiamo come i numeri complessi siano rappresentabili sul piano cartesiano.

Somma

$$+ : (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

L'elemento neutro della somma è $(0, 0)$, l'inverso per (x, y) è $(-x, -y)$

Prodotto

$$\cdot : (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

L'elemento neutro del prodotto è $(1, 0)$, l'inverso per (x, y) è $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

Quadrato di $(0, 1)$

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

0.13.2 Notazione con la i

Possiamo quindi definire $(0, 1) = i$, con $i^2 = -1$.
Consideriamo ora il numero $(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)$.
Possiamo quindi riscriverlo come $x + iy$.

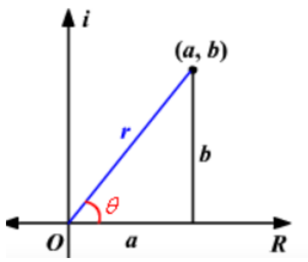
Parte Immaginaria e parte Reale

Dato un numero $z = x + iy$:

- x è detta **parte reale** di $z = \Re(z)$
- y è detta **parte immaginaria** di $z = \Im(z)$

0.13.3 Rappresentazione polare

Un numero complesso può essere visto anche come la coppia base/altezza di un triango di angolo Θ e raggio ρ



Per proprietà trigonometriche, otteniamo che

- $y = \rho \cdot \sin \Theta$
- $x = \rho \cdot \cos \Theta$
- $\tan \Theta = \frac{y}{x}$

Un numero $z = x + iy$ può essere riscritto come $\rho \left(\cos \Theta + i \cdot \sin \Theta\right)$

0.13.4 Identità di Eulero

$$z = x + iy = \rho \left(\cos \Theta + i \cdot \sin \Theta\right) = \rho e^{i \cdot \Theta}$$

Ne conseugue l'identità fondamentale di eulero:

$$e^{i\pi} = -1 = i^2$$

0.13.5 Teorema fondamentale dell'Algebra

$$\forall P_n\left(z\right) = 0 \exists! z_1, ..., z_n \in \mathbf{C} \text{ con le relative molteplicità}$$

0.13.6 Risolvere le equazioni di grado n in C

Le radici di z^n sono

$$\sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right)\right)$$

con $k \in \{0, ..., n-1\}$

0.13.7 Coniugato e modulo di z

0.13.8 Coniugato

$$z = a + ib \implies \overline{z} = a - ib \implies z + \overline{z} = 2a, z - \overline{z} = 2bi$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$$

0.13.9 Modulo

$$z = a + ib \implies |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = 0 \implies z = 0$$

$$|z| = |\overline{z}|$$

$$|\Re(z)|, |\Im(z)| \leq z$$

$$\overline{z} \cdot z = |z|^2$$