

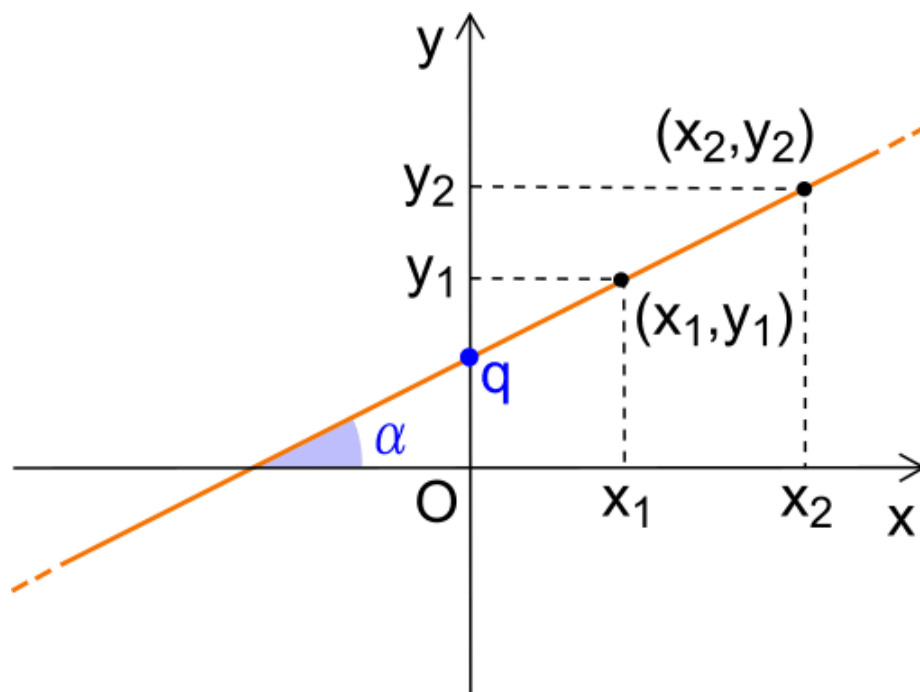
Calcolo differenziale

October 31, 2022

Contents

0.1 Equazioni e disequazioni

0.1.1 La retta



La retta è **lineare** in x e y .

Se $m > 0$ è **crescente**, se $m < 0$ è **decrescente**. **Forma esplicita** $y = mx + q$.

Questa forma descrive tutte le rette tranne quella **verticale**: $y = c$

Forma implicita $ax + by + c = 0$

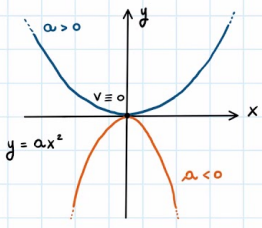
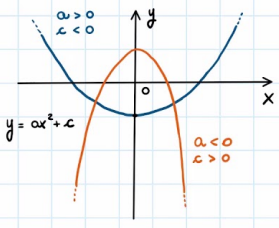
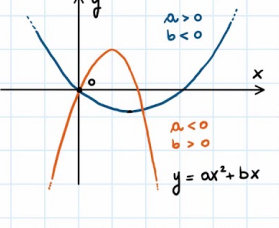
$$m = \operatorname{tg} \Theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y = m(x - x_0) + y_0 \iff q = y_0 - mx_0$$

$$ax \geq -b \implies$$

- se $a > 0 : x \geq \frac{-b}{a}$
- se $a < 0 : x \leq \frac{-b}{a}$

0.1.2 Polinomi di secondo grado: le parabole

PARABOLA CON $b = c = 0$	PARABOLA CON $b = 0$ E $c \neq 0$	PARABOLA CON $b \neq 0$ E $c = 0$
 <p>$y = ax^2$</p> <ul style="list-style-type: none"> • VERTICE COINCIDENTE CON L'ORIGINE • ASSE COINCIDENTE CON L'ASSE y. 	 <p>$y = ax^2 + c$</p> <ul style="list-style-type: none"> • VERTICE APPARTENENTE ALL'ASSE y (DIVERSO DA O). • ASSE COINCIDENTE CON L'ASSE y. 	 <p>$y = ax^2 + bx$</p> <ul style="list-style-type: none"> • PARABOLA PASSANTE PER L'ORIGINE $O(0,0)$ • ASSE DIVERSO DALL'ASSE y ($V \notin$ ASSE y).

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

$$x^2 = c \implies$$

- se $c > 0 : x \pm \sqrt[2]{c}$
- se $c = 0 : x = 0$
- se $c < 0 : \nexists x \in \mathbb{R}$

Dimostrazione della correttezza della formula risolutiva per le equazioni di secondo grado

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= 0, a \neq 0 \\a * \left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right] &= 0 \\x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left[x + \frac{b}{2a} \right]^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left[x + \frac{b}{2a} \right]^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$

In questa situazione abbiamo 3 opzioni:

- $b^2 - 4ac > 0 \iff 2$ soluzioni
- $b^2 - 4ac = 0 \iff 1$ soluzione
- $b^2 - 4ac < 0 \iff 0$ soluzioni

0.1.3 Modulo

$$|x| = \sqrt{x^2} =$$

- se $x > 0$: x
- se $x < 0$: $-x$

Geometricamente, il modulo è **la distanza** di x dal punto **0** sull'asse dei numeri \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}|x| \leq a &\iff [-a, a] \\ |x| \geq a &\iff (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \\ -|x| \leq x &\leq |x|\end{aligned}$$

Disuguaglianza triangolare: $|x + y| \leq |x| + |y|$

$$|x * y| = |x| * |y|$$

0.2 Insiemi numerici

E' detta **insieme** una **collezione** di elementi per i quali è sempre possibile rispondere alla domanda $x \in A$.

0.2.1 Applicazioni

Tramite un'applicazione, associo gli elementi dell'insieme A agli elementi dell'insieme B, detto **immagine** di A.

Un'applicazione è:

- **Iniettiva**: $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \neq x_2 : x_1 \rightarrow b_1 \neq x_2 \rightarrow b_2$
- **Suriettiva**: $\forall b \in B : \exists a \in A$ t.c. $a \rightarrow b$
- **Biunivoca**: Suriettiva \wedge Iniettiva

Se esiste un'applicazione suriettiva ed iniettiva fra A e B questi sono detti in **biezione**.

0.2.2 Definizione di N tramite gli insiemi

A questo punto possiamo definire i numeri naturali positivi partendo dagli insiemi.

- **0**: classe degli insiemi in biezione con $A = \emptyset$
- **1**: classe degli insiemi in biezione con $A = \{\emptyset\}$
- **2**: Classe degli insiemi in biezione con $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- ...: ...

Possiamo accorgerci quindi come l'insieme **N** definisce la **cardinalità** degli insiemi.

Da qui possiamo continuare:

- **N+**: poichè **N** definisce la cardinalità degli insiemi, la somma di due numeri $\in \mathbf{N}$ è uguale alla cardinalità di $(A \cup B) \forall A, B$ t.c. $A \cap B = \emptyset$.
- **-1**: quel numero t.c. $-1 + 1 = 0$. Da qui definiamo **Z**.
- $\frac{n}{m}$: $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{Z}, 0 \leq a_2, \dots, a_n \leq 9 : a_1 + \sum_{i=1}^n \frac{a^i}{10^i}$
- **Q**: $\frac{n}{m}, \frac{n_1}{m_1} \in \mathbf{Z}, m, m_1 \neq 0 : (n, m) = (n_1, m_1) \iff (n * m_1) = (n_1 * m)$.
La struttura **periodica** è valida se si conviene che $a, \bar{9} = a + 1$.
- **Q+**: $\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1} = \frac{n * m_1 + m * n_1}{m * m_1}$
- **Q***: $\frac{n}{m} * \frac{n_1}{m_1} = \frac{n * n_1}{m * m_1}$
- **Q inverso**: $\frac{n}{m} * \frac{n}{m}^{-1} = 1 \implies \frac{n}{m}^{-1} = \frac{m}{n}, n \neq 0$

- **R**: Tutti i numeri scritti in forma decimale anche con **infinite** cifre **non periodiche** dopo la virgola

Possiamo infine definire le n-tuple di numeri (a, b, \dots) come **prodotto cartesiano** degli insiemi $A * B * \dots = \{(a, b, \dots) \mid \forall a \in A \wedge \forall b \in B \wedge \dots\}$

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

0.3 Coefficiente binomiale

$$\begin{aligned} q \in R, q \neq 1 &\implies \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \iff \\ (1 - q) * \sum_{k=0}^n q^k &= 1 - q^{n+1} \iff \\ \sum_{k=0}^n q^k - q * \sum_{k=0}^n q^k &= 1 - q^{n+1} \iff \\ \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k &= 1 - q^{n+1} \iff \\ (\sum_{k=1}^n q^k + 1) - (\sum_{k=1}^n q^k + q^{n+1}) &= 1 - q^{n+1} \iff \\ \sum_{k=1}^n q^k - \sum_{k=1}^n q^k + 1 - q^{n+1} &= 1 - q^{n+1} \iff \\ \sum_{k=1}^n q^k &= \sum_{k=1}^n q^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \iff \\ \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \iff \\ \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-k)!} \iff \\ \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \iff \\ \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{(n-1)!(k+n-k)!}{k!(n-k)!} \iff \\ \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n * (n-1)!}{k!(n-k)!} \iff \\ \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k \right)$$

Dimostriamolo per induzione usando il seguente schema.

1. $P(n)$ è vera con $n = 1$
2. Supponiamo che $P(n)$ vera $\implies P(n+1)$ vera

Procediamo al primo passo:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^1 &= \sum_{k=0}^1 \left(\binom{1}{k} * a^{1-k} * b^k \right) \iff \\
 a+b &= \binom{1}{0} * a^1 * b^0 + \binom{1}{1} * a^{1-1} * b^1 \iff \\
 a+b &= 1 * a * 1 + 1 * 1 * b = a+b
 \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che $P(1)$ è vera, procediamo quindi col secondo passaggio.

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} * a^{n+1-k} * b^k \right) \\
 (a+b)(a+b)^n &= \\
 (a+b) * \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k \right) &= \\
 \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} * a^{n+1-k} * b^k \right) + \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} * a^{n-k} * b^{k+1} \right) &= \\
 \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} * a^{n+1-k} * b^k \right) + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} * a^{n-k+1} * b^k \right) &= \\
 \binom{n}{0} * a^{n+1} * b^0 + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} * a^{n+1-k} * b^k \right) + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} * a^{n-k+1} * b^k \right) + \binom{n}{n} * a^0 * b^{n+1} &= \\
 a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) * a^{n+1-k} * b^k \right] b^{n+1} &= \\
 a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n+1}{k} * a^{n+1-k} * b^k \right) + b^{n+1} &= \\
 \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} * a^{n+1-k} * b^k \right) &
 \end{aligned}$$

0.4 Funzioni

0.4.1 Definizione

Dati due insiemi A e B , una funzione con **dominio** A e **codominio** B è una qualunque legge che **ad ogni** elemento di A associa **uno ed uno solo** elemento di B .

Può anche essere ad **n variabili** ed avere quindi n insiemi di partenza

$$f : A \longrightarrow B \text{ t.c. } \forall x \in A \longrightarrow f(x) \in B$$

Le funzioni **reali** a variabile **reale** sono le funzioni

$$f : A \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

0.4.2 Immagine

$$\{f(x) \mid \forall x \in A\} \subset B$$

0.4.3 Grafico di una funzione

Definizione

L'insieme dei punti \mathbf{R}^2 definiti da

$$g_{\mathbf{R}} = \{(x, f(x)) \mid \forall x \in A\}$$

Rappresentazione sul piano

Poichè \mathbf{R}^2 è rappresentabile sul piano cartesiano anche $g_{\mathbf{R}}$ lo è

Proprietà fondamentale della funzione espressa col grafico

$$\forall x_0 \in A \exists! y_0 \text{ t.c. } x = x_0 \cap g_{\mathbf{R}} = (x_0, f(x_0))$$

0.4.4 Proprietà delle funzioni

Una funzione è detta

- **pari:** $\forall x \in A : f(x) = f(-x)$
- **dispari:** $\forall x \in A : -f(x) = f(-x)$
- **limitata superiormente:** $\exists M \in \mathbf{R} \text{ t.c. } M \geq f(x) \forall x \in A$
- **limitata inferiormente:** $\exists m \in \mathbf{R} \text{ t.c. } m \leq f(x) \forall x \in A$
- **limitata:** $f(x)$ è limitata superiormente e inferiormente
- **monotona crescente in A:** $\forall x_1, x_2 \in A \text{ t.c. } x_1 \leq x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$
- **monotona decrescente in A:** $\forall x_1, x_2 \in A \text{ t.c. } x_1 \leq x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$
- **periodica di periodo T:** $\forall x \in A, x + kT \in A, k \in \mathbf{Z} : f(x + kT) = f(x)$
- **successione:** il dominio è \mathbf{N} , $f(n) = a_n$

0.4.5 Funzioni composte

- $g(f(x)) = g \circ f(x)$
- **funzione neutra o identità:** $f(x) = x = I(x)$
- **funzione inversa:** $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = I(x)$
- $f: \text{Img}_{f^{-1}} \longrightarrow \text{Def}_{f^{-1}}$

- $f^{-1}: \text{Img}_f \longrightarrow \text{Def}_f$
- $f \circ f^{-1}: \text{Img}_f \longrightarrow \text{Def}_f$
- $f^{-1} \circ f: \text{Img}_{f^{-1}} \longrightarrow \text{Def}_{f^{-1}}$

0.4.6 Condizioni di esistenza della funzione inversa

- $\text{Img}_f \subset \text{Def}_g$
- **f iniettiva:** se, per assurdo, non lo fosse vorrebbe dire che $\exists x_1, x_2$ t.c. $x_1 \neq x_2$, $y_1 = f(x_1) = f(x_2)$ e quindi $f^{-1}(y)$ potrebbe essere sia x_1 che x_2 , e quindi f^{-1} non sarebbe una funzione

0.4.7 Operazioni sui grafici

- $f(x + k)$: spostamento a sx
- $f(x - k)$: spostamento a dx
- $f(x) + k$: spostamento in alto
- $f(x) - k$: spostamento in basso
- $-f(x)$: ribaltamento su asse y
- $(f(-x))$: ribaltamento su asse x
- $|f(x)|$: ribaltamento su asse y degli $y < 0$
- $f(|x|)$: Ribaltamento su asse x degli $x < 0$

0.5 Limiti

0.5.1 Limiti convergenti

Una successione è detta **convergente** a l , o $\lim_{x \rightarrow \infty} = l$ se

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \text{ t.c. } \forall n > N \implies |a_n - l| \leq \epsilon$$

Non tutte le successioni convergono.

0.5.2 Limiti divergenti

Una successione è detta **divergente** a $+\infty$, o $\lim_{x \rightarrow \infty} = +\infty$, se

$$\forall M > 0, \exists N = N(M) \text{ t.c. } \forall n > N \implies a_n \geq M$$

e divergente a $-\infty$ se $a \leq -M$. Non tutte le successioni divergono.

Convergenza per eccesso e per difetto

Una successione è detta tendere ad l per **eccesso** (l^+) nel caso in cui $a_n \searrow l$, per **difetto** (l^-) in caso contrario.

0.5.3 Monotonia e limiti

Preso $A = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, se $a_n \in \mathbf{N}$ è una successione **monotona**:

- **crescente**: converge a $\sup A$ se limitata, se no diverge a $+\infty$
- **decrescente**: converge ad $\inf A$ se limitata, se no diverge a $-\infty$

0.5.4 Esempi di successioni limitate

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} &= 0 \\ \implies \left| \frac{1}{n} - 0 \right| \leq \epsilon &\implies \frac{1}{\epsilon} \leq n \\ \implies \text{per } N = \frac{1}{\epsilon} &\text{ esiste sempre } n > N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n &= \infty \\ \implies 2^n \geq M &\implies n \geq \log_2 M \\ \implies \text{per } N = \log_2 M &\text{ esiste sempre } n > \log_2 M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-1} &= 1 \\ \implies \left| \frac{n+1}{n-1} - 1 \right| \leq \epsilon &\implies \frac{2}{n-1} \leq \epsilon \implies n \geq \frac{2}{\epsilon} + 1 \\ \implies \frac{n+1}{n-1} < 1 + \epsilon &\implies n+1 \leq n + n\epsilon - 1 - \epsilon \\ \implies 2 + \epsilon \leq n\epsilon &\implies n \geq \frac{2}{\epsilon} + 1\end{aligned}$$

0.5.5 Algebra dei limiti

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow n_0} a_n &= a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \\ \lim_{n \rightarrow n_0} a_n + b_n &= a + b \\ \lim_{n \rightarrow n_0} a_n * b_n &= a * b \\ \lim_{n \rightarrow n_0} a_n^{b_n} &= a^b \\ \lim_{n \rightarrow n_0} f(a_n) &= f(a)\end{aligned}$$

0.5.6 Teorema di permanenza del segno

$$\lim_{n \rightarrow n_0} a_n = a, a \geq 0 \implies \exists N \in \mathbf{N} \text{ t.c. } \forall n > N : a_n \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow n_0} a_n = a, a \leq 0 \implies \exists N \in \mathbf{N} \text{ t.c. } \forall n > N : a_n \leq 0$$

E' quindi implicato:

$$\lim_{n \rightarrow n_0} a_n = a, \lim_{n \rightarrow n_0} b_n = b, a_n > b_n \implies a > b$$

0.5.7 Teorema dei carabinieri

$$a_n \leq b_n \leq c_n, a = c \implies a = b = c$$