Elementi di analisi reale

March 6, 2023

1 L'insieme dei numeri reali: $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è un:

- **campo**: rimando alla definizione di campo a fine appunti
- **ordinato**: presenta una relazione d'ordine totale $\leq$
- **completo**: $\forall S \subset \mathbb{R}$ t.c. S superiormente limitato $\exists \sup(S) \in \mathbb{R}$

Quest'ultima proprietà è detta **assioma di completezza**, ed è equivalente all'assioma di separazione.
Possiamo notare come la completezza di $\mathbb{R}$ non debba essere collegata al fatto che $\mathbb{R}$ sia ordinato. Pensiamo infatti a $\mathbb{C}$, insieme non ordinato ma che, essendo isomorfo a $\mathbb{R}^2$, dovrà essere necessariamente completo.

Definition 1.1 (Estremo superiore/inferiore)
*$S \in \mathbb{R}$ è detto **estremo superiore** di $E \subset \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in E$ t.c. $S \geq x > S - \varepsilon$*
Analoga la definizione di estremo inferiore.

Definition 1.2 (Massimo/minimo di un insieme)
*$S \in \mathbb{R}$ è detto **massimo** di $E \subset \mathbb{R}$ se $S = \sup(E)$ e $S \in E$.*
Analoga la definizione di minimo.

1.1 Successioni in $\mathbb{R}$

Definition 1.3 (Successione)
Una successione in $\mathbb{R}$ è una funzione

$$f(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Si dice che per una successione $\{a_n\}$ vale una certa proprietà $P(n)$

- **definitivamente** se $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq N$ vale $P(n)$
- **frequentemente** se $\forall m \in \mathbb{N} \, \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n \geq m$ vale $P(N)$

Una successione $\{a_n\}$ è detta:

- **limitata** se $\forall n \in \mathbb{B}, \exists a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq a_n \leq b$. Se ciò vale solo per un estremo è detta limitata dall'alto/basso

- **monotona** crescente/decrescente se $\forall n \in \mathbb{B}, a_n \leq / \geq a_{n+1}$

- **convergente** in un insieme X se $\exists l \in X \wedge \forall \varepsilon > 0 |a_n - l| < \varepsilon$ definitivamente

- **divergente** a $\pm\infty$ se $\forall M > 0, a_n > / < \pm M$ definitivamente

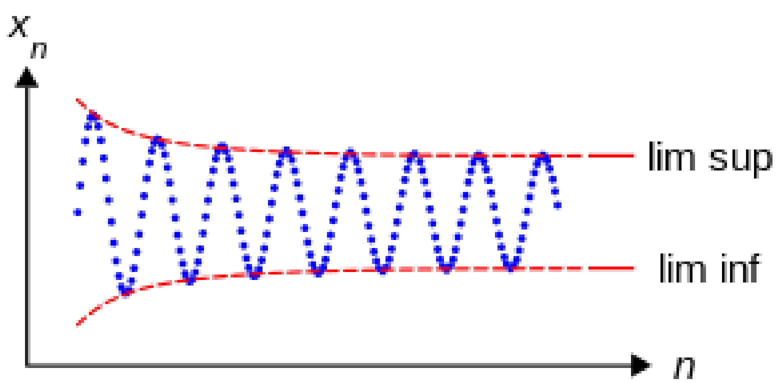
- **non convergente** in un insieme X se non converge in X e non diverge

Infine, data $\{a_n\}$ sono detti:

- limite superiore della successione ($\lim_{n\to\infty} \sup\{a_n\}$): il minor maggiorante della successione per $n \to \infty$

- limite inferiore della successione ($\lim_{n\to\infty} \inf\{a_n\}$): il maggior minorante della successione per $n \to \infty$

Prendendo spunto dalle funzioni, possono essere pensati come una coppia di *"quasi-asintoti"* che limitano la successione.



Definition 1.4 (sottosuccessione)
Una successione $\{a_n^*\} \subset \{a_n\}$ è detta sottosuccessione se esiste una funzione

$$\varphi(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strettamente crescente t.c. } a_k^* = a_{\varphi(k)}$$

Theorem 1.1 (Teorema di Bolzano-Weistrass)

$$\forall \{a_n\} \text{ limitata } \exists \{a_n^*\} \subset \{a_n\} \text{ convergente}$$

Dimostrazione:
Costruiamo un insieme I di indici dei *"picchi"* della successione $\{a_n\}$ ovvero

$$I = \{i : a_i \geq a_{i+n} \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Abbiamo ora due opzioni:

- $|I| = \infty$: ne consegue che la sottosuccessione $\{a_i\}_{i\in I}$ è monotona decrescente e quindi convergente
- $|I| \in \mathbb{N}$: $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall i \in I, i < N \implies$ $|M = \{m : \forall n > Nm > n \wedge a_m \leq a_n\}| = \infty \implies \{a_m\}_{m\in M}$ monotona crescente e quindi convergente ■

Questa dimostrazione fa uso dell'assioma di completezza assumendo che una successione limitata abbia l'estremo superiore ed inferiore.

Definition 1.5 (Successione di Cauchy)

$\{a_n\}$ è detta di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0, \forall m > n |a_n - a_m| < \varepsilon$ definitivamente

Theorem 1.2 (Una successione convergente è di Cauchy)

$$\{a_n\} \textit{ convergente } \implies \{a_n\} \textit{ di Cauchy}$$

Dimostrazione:

$$\{a_n\} \to l \implies \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n > N|a_n - l| < \varepsilon \implies$$
$$\forall m > n, |a_n - l| + |l - a_m| < 2\varepsilon \implies |a_n - a_m| < 2\varepsilon \blacksquare$$

Theorem 1.3 (Convergenza delle successioni di Cauchy)

$$\{a_n\} \textit{ di Cauchy } \implies \{a_n\} \textit{ convergente}$$

Dimostrazione:

$\{a_n\}$ di Cauchy $\implies \exists K \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall m, n > K|a_m - a_n| < \varepsilon_0 \implies a_n - \varepsilon_0 < a_m < a_n + \varepsilon_0$

Consideriamo ora $S_n = \min\{a_i \forall i < n\} \cup \{a_n - \varepsilon_0, a_n + \varepsilon_0\}$, ne deriva che

$$\forall m \in \mathbb{N}, \min S_n < a_m < \max S_n \implies \{a_n\} \text{ limitata}$$

Per Bolzano-Weistrass ne consegue che esiste una sottosuccessione $\{a_{\varphi_i}\}$ convergente a l, ovvero

$$\exists M \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall \varphi_i \geq M|a_{\varphi_i} - l| < \varepsilon_1$$

Ne consegue che

$$\forall n, i \in \mathbb{N} \text{ t.c } n, \varphi_i > \max(K, M), |a_n - a_{\varphi_i}| + |a_{\varphi_i} - p| < \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \implies |a_n - p| < \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \blacksquare$$

Risulta ovvio come, in quanto Bolzano-Weistrass richiede l'AoC, anche questa dimostrazione richieda l'AoC

1.2 Dimostrazione dell'AoC

L'assioma di completezza è un assioma *"forte"*, ed è quindi preferibile che si potesse in qualche modo derivare, che è quello che ora faremo. Introduciamo prima una proprietà molto importante

Theorem 1.4 (Proprietà archimedea)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \ t.c. \ x < n$$

Corollary 1.4.1 (Convergenza di $\frac{1}{n}$ a 0)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \ t.c. \ \frac{1}{n} < x$$

Corollary 1.4.2 (Densità di $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists q \in \mathbb{Q} \ t.c. \ a < q < b$$

Tutte è tre le dimostrazioni sono abbastanza semplici e lasciate al lettore (in più, come esercizio, dimostrare che $\forall a, b \in \mathbb{Q}, \exists r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ t.c. $a < r < b$).
Procediamo ora col nostro obbiettivo

Theorem 1.5 (Assioma di completezza)

$$\{a_n\} \ di \ Cauchy \implies \{a_n\} \ converge \implies AoC$$

Dimostrazione:

$$E \subset \mathbb{R}, E \text{ superiormente limitato } \implies \exists b_0 \text{ maggiorante di } E$$

Costruiamo ora due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ così costruite:

1. Scegliamo $a_0 \in E$
2. Consideriamo $k = \frac{a_n + b_n}{2}$
3. Se $k \in E$, $a_{n+1} = k, b_{n+1} = b_n$, in alternativa $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = k$

Facile notare come $\forall n, b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$, il che implica che

$$\forall n, |a_n - b_n| = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

Ciò implica che $\{a_n\}, \{b_n\}$ sono di Cauchy in quanto

$$|a_{n+j} - a_n| < b_n - a_n \wedge |b_{n+j} - b_n| < b_n - a_n \ \forall j \in \mathbb{N}$$

In quanto per la proprietà archimedea $\frac{b_0 - a_0}{2^n} \to 0$, allora anche $b_n - a_n \to 0$, il che verifica che le nostre due successioni sono di Cauchy.
Inoltre per $n \to \infty$, $a_n = b_n$, ed essendo di Cauchy ne deriva che convergono entrambe a limite μ, che per costruzione è maggiorante di E. Inoltre, essendo μ limite di $\{a_n\}$, sappiamo che $\{a_n\} > \mu - \varepsilon$ definitivamente: ne segue che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E \text{ t.c. } x > \{a_n\} - \varepsilon > \mu - 2\varepsilon \text{ definitivamente } \implies \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E \text{ t.c. } x > \mu - \varepsilon \ \blacksquare$$

1.3 Considerazioni importanti

I più attenti avranno notato che ad inizio capitolo abbiamo parlato di come vogliamo rendere separati i concetti di completezza e di ordinamento di un insieme, ma che questo il concetto di ordinamento è usato nella definizione stessa delle successioni di Cauchy, ed è quindi usato nella nostra dimostrazione dell'AoC.
Si propone di sostituire il concetto di ordinamento col concetto di **distanza**, che verrà introdotto nel prossimo capitolo

1.4 Bonus: definizione di campo

Un campo è una tripla $(X, +, \cdot)$ dove X è un insieme, dove $+$ e $\cdot$ sono operazioni binarie che rispettano gli assiomi di somma e moltiplicazione:

- L'operazione è associativa
- L'operazione è commutativa
- $\cdot$ è distributiva
- X contiene l'elemento neutro, 0 per $+$, 1 per $\cdot$
- X contiene l'inverso per entrambe le operazioni (per $\cdot$ si considera $X - \{0\}$)
- Il risultato dell'operazione è in X

2 Spazi metrici

Definition 2.1 (Spazio metrico)
*Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d), dove X è un insieme $\neq \emptyset$ (gli elementi di X sono detti **punti**), e d è una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ tale che valgono le seguenti proprietà:*

- ***positività**: $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \iff x = y$*
- ***simmetria**: $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$*
- ***disugaglianza triangolare**: $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$*

N.B.: sullo stesso insieme X possiamo definire più spazi metrici!.

Definition 2.2 (Spazio metrico indotto)
Dato lo spazio metrico (X, d), è uno spazio metrico indotto la coppia $(E, d_{E\times E})$

$$\forall E \subset X,\ d_{E\times E} : E \times E \to \mathbb{R} \text{ e con lo stesso comportamento di } d$$

Definition 2.3 (Norma)
Dato uno spazio vettoriale X, una norma $||\cdot||$ su X è una funzione $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}^+$ tale che

- $||x|| = 0 \iff x = 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, ||x\lambda|| = \lambda||x||$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Definition 2.4 (Distanza indotta dalla norma)
Dato uno spazio vettoriale X normato, è detta distanza indotta dalla norma $d(x, y) = ||x - y||$
Questo procedimento è applicabile ad ogni spazio vettoriale normato

2.1 Tipologie classiche di distanze

Esistono delle distanze particolarmente interessanti, come

Definition 2.5 (Distanza metrica)

$$d = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases} \tag{1}$$

Definition 2.6 (Distanze $d_n, n \in \mathbb{N}$)
Dato un insieme X^k sul quale sono definite la somma ed il prodotto:

$$d_n(x, y) = \sqrt[n]{\sum_{i=0}^{k} |(x_i - y_i)|^n}$$

Dato l'insieme $\mathbb{R}^2$, d_1 è detta metrica del tassista e d_2 è detta metrica euclidea

Definition 2.7 **(**d_∞**)**
Dato un insieme X^k sul quale sono definite la somma ed il prodotto:

$$d_\infty = \max\{|x_i - y_i|\}$$