专题五 正弦稳态电路分析

【重要题型】

题型 1：相量法的应用

1.相量表示：

（1）正弦量三要素：幅值、频率、相位，例如$i=I_m sin(\omega t+\Psi_i)$，$u=U_m sin(\omega t+\Psi_u)$；

相位差$\varphi=\Psi_u-\Psi i\begin{cases}>0° & u\text{超前}i\\ <0° & u\text{滞后}i\\ =0° & u\text{、}i\text{同相}\end{cases}$。

（2）$\begin{cases}u(t)=U_m sin(\omega t+\Psi_u)=\sqrt{2}Usin(\omega t+\Psi_u)\Leftrightarrow \dot{U}=U\angle\Psi_u=Ucos\Psi_u+jUsin\Psi_u\\ i(t)=I_m sin(\omega t+\Psi_i)=\sqrt{2}Isin(\omega t+\Psi_i)\Leftrightarrow \dot{I}=I\angle\Psi_i=Icos\Psi_i+jIsin\Psi_i\end{cases}$；

瞬时值（小写）u、i；有效值（大写）U、I；最大值（大写+下标）U_m、I_m；相量（大写+·）$\dot{U}$、$\dot{I}$。

（3）相量只是表示正弦量，而不等于正弦量即$u(t)\neq\dot{U}$、$i(t)\neq\dot{I}$。

2.相量运算：

（1）加减运算：$\dot{U}=\dot{U}_1\pm\dot{U}_2=U\angle\varphi$，如下相量图 5.1 所示

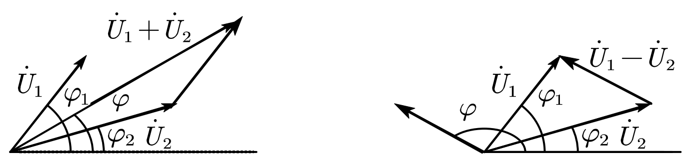


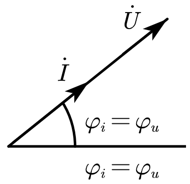
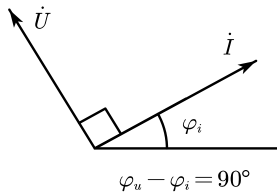
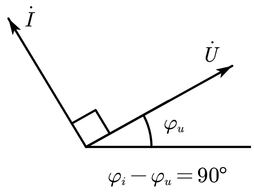
图5.1

（2）乘除运算：$\begin{cases}\dot{U}=\dot{U}_1\dot{U}_2=U_1U_2\angle(\varphi_1+\varphi_2) & \text{(乘法：模相乘角相加)}\\ \dot{U}=\dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}=\dfrac{U_1}{U_2}\angle(\varphi_1-\varphi_2) & \text{(除法：模相除角相减)}\end{cases}$

（3）微分积分运算：$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}\rightarrow j\omega\dot{I}=\omega I\angle\left(\varphi_i+\dfrac{\pi}{2}\right) & \dfrac{d}{dt}=j\omega\\ \displaystyle\int idt\rightarrow\dfrac{\dot{I}}{j\omega}=\dfrac{I}{\omega}\angle\left(\varphi_i-\dfrac{\pi}{2}\right) & \displaystyle\int dt=\dfrac{1}{j\omega}=-j\dfrac{1}{\omega}\end{cases}$

3.元件特性与相量表示：

元件类型	R 元件	L 元件	C 元件
相量模型			
伏安特性	$\dot{U}=R\dot{I}$或 $\dot{I}=\dfrac{1}{R}\dot{U}=G\dot{U}$	$\dot{U}=jX_L\dot{I}=j_\omega L\dot{I}$或 $\dot{I}=-jB_LU=-j\dfrac{1}{\omega L}\dot{U}$	$\dot{U}=-jX_C\dot{I}=-j\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}$或 $\dot{I}=jB_C\dot{U}=j\omega C\dot{U}$

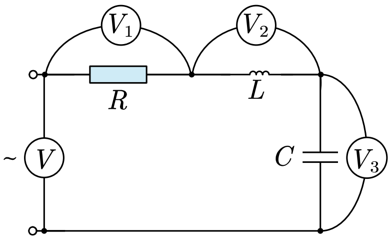
幅值关系	$U=RI$或$I=GU$	$U=X_LI=\omega LI$ 或$I=B_LU=\dfrac{1}{\omega L}U$	$U=X_CI=\dfrac{1}{\omega C}I$ 或$I=B_CU=\omega CU$
相位关系	$\varphi_u=\varphi_i$	$\varphi_u-\varphi_i=90°$	$\varphi_i-\varphi_u=90°$
相量图			

例 5.1：如图所示，正弦稳态电路，已知交流电压表 1、2、3 的读数分别是$30V$、$60V$、$20V$，求交流电压表V的读数。

方法：1.首先将时域电路用相量模型表示，标明相量模型下的各元件电量；

2.注意在相量模型的电路里相量可直接相加减如$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2+\dot{U}_3$，但由于电量相互之间的相位不同，相量的模之间不可直接相加减即$U\neq U_1+U_2+U_3$；

3.以一个电量为参考量初相位为零，结合元件特性（见上表）画出电路的相量图辅助求解其他电量。

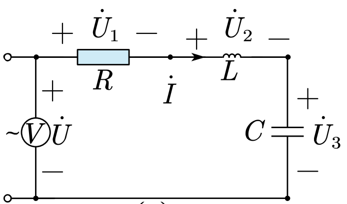


例5.1

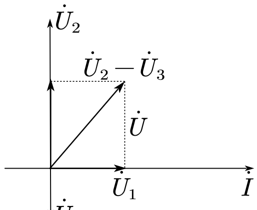
解：由题意得，具体如下：

（1）电路的相量模型如下图(a)所示：

（2）以电流$\dot{I}$的相位为零，结合元件相位特性可得相量图如下图(b)，所以得$U=\sqrt{U_1{}^2+(U_2-U_3)^2}=50V$



(a)



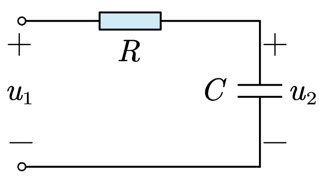
(b)

例 5.2：如图所示，已知$C=0.01\mu F,\omega=1200\pi\ rad/s$,欲使$u_2$的相位滞后$u_1$ $60°$，求R的值。

方法：1.首先将时域电路用相量模型表示，标明相量模型下的各元件电量；

2.以一个电量（$\dot{I}$或者$\dot{U}$）为参考量设其初相位为零，再根据电路特性求其他电量相对参考量的相位；

3.相量的运算为矢量运算，遵循相量运算规则，在计算时可列相量图辅助计算。



例5.2

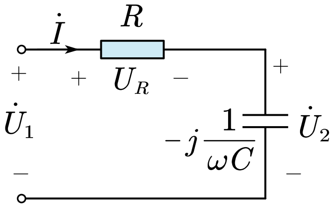
解：由题意得，具体如下：

（1）电路的相量模型如下图(a)所示：

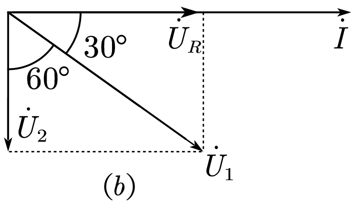
（2）以电流为参考量设其初相位为零，则$\dot{U}_R$相位为零，$\dot{U}_2$相位为$-90°$，又因为$\dot{U}_1=\dot{U}_R+\dot{U}_2$，$\dot{U}_1$的相位

超前$\dot{U}_2$ 60°，画出相量图如下图(b)，可得：$\dfrac{U_R}{U_2}=\dfrac{R}{\frac{1}{\omega C}}=\tan 60°=\sqrt{3}$，

代入数值得$R=\dfrac{\sqrt{3}}{1200\pi\times 0.01\times 10^{-6}}=45.9k\Omega$。



(a)



(b)

题型 2：正弦稳态分析

1.正弦稳态端口：

（1）正弦稳态电路的二端口等效如下图 5.2 所示，复阻抗

$Z=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+jX$，复导纳$Y=\dfrac{\dot{I}}{\dot{U}}=G+jB$。

（2）$Y=\dfrac{1}{Z}$，即转换关系：$\begin{cases}G=\dfrac{R}{R^2+X^2}\\ B=\dfrac{-X}{R^2+X^2}\end{cases}$，$\begin{cases}R=\dfrac{G}{G^2+B^2}\\ X=\dfrac{-B}{G^2+B^2}\end{cases}$；

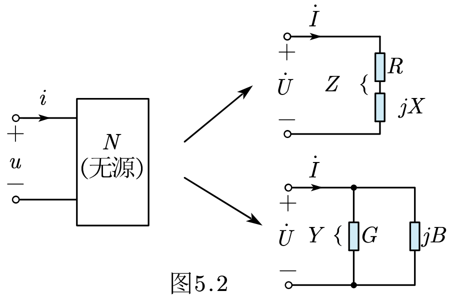


图5.2

注意一般$G\neq\dfrac{1}{R}$、$B\neq\dfrac{1}{X}$。

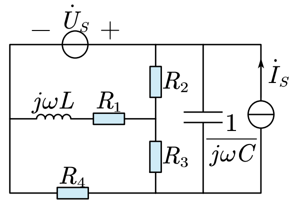
2.分析方法：

（1）相量模型下的正弦稳态电路仍满足KCL、KVL约束关系。

（2）所有适用于时域的分析方法都适用于相量模型下的正弦稳态电路，包括等效变换法、网络方程法、电路定理法。

（3）除上述方法正弦稳态电路还可借相量图分析法和位形图分析法来求解。

例 5.3： 如图所示，列出电路网孔电流法方程（不计算）。



例5.3

步骤： 1.用相量表示各网孔电流，标明各电流的方向；

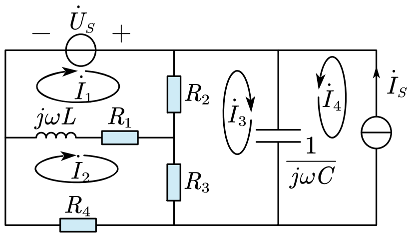
2.按专题三介绍的含有无伴电流源的网孔电流法列写方程，共四个网孔，注意电量的相量表示。

解： 由题意得，具体如下所示：

（1）在图中标示各网孔电流及方向，如图

（2）列网孔方程得：

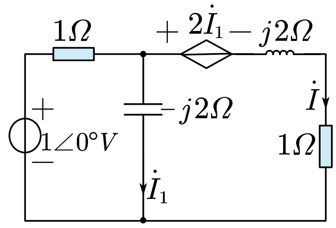
$$\begin{cases}(R_1+R_2+j\omega L)\dot{I}_1-(R_1+j\omega L)\dot{I}_2-R_2\dot{I}_3=\dot{U}_S\\ -(R_1+j\omega L)\dot{I}_1+(R_1+R_3+R_4+j\omega L)\dot{I}_2-R_3\dot{I}_3=0\\ -R_2\dot{I}_1-R_3\dot{I}_2+\left(R_2+R_3+\dfrac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_3+\dfrac{1}{j\omega C}\dot{I}_4=0\\ \dot{I}_4=\dot{I}_S\end{cases}$$



例5.3答案

例 5.4： 如图所示，用戴维南定理求电路中的电流 $\dot{I}$ 。

> **步骤：** 1.以 2Ω 电阻和 $j2\Omega$ 的电感为外部电路，剩余为内部电路使用戴维南定理；
>
> 2.将外部电路开路求开路电压 $\dot{U}_{OC}$，注意含有受控源；将内部独立电压源 $1\angle 0°V$ 置零，然后根据外部加压法求得 $Z_0=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}$；
>
> 3.由戴维南电路求得要求量 $\dot{I}$ 。



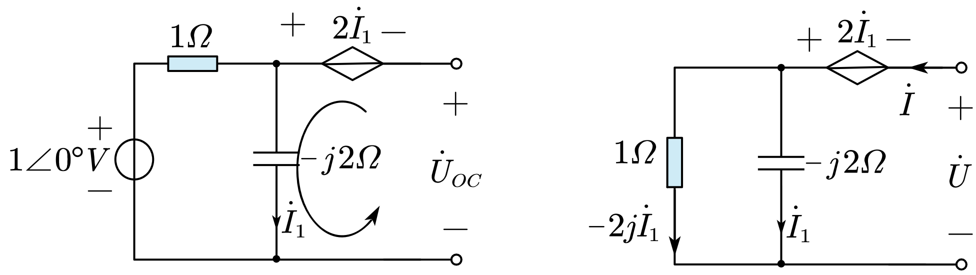
例5.4

解： 将负载 $Z_L=(1+j2)\Omega$ 当做外部支路，使用戴维南定理，具体如下所示：

（1）求开路电压 $\dot{U}_{OC}$。电路如下图 (a) 所示，列方程得：$\begin{cases}\dot{U}_{OC}=-2\dot{I}_1-2j\dot{I}_1\\ 1\angle 0°=(1-2j)\dot{I}_1\end{cases}$，解得 $\dot{U}_{OC}=\left(\dfrac{2}{5}-j\dfrac{6}{5}\right)V$ 。

（2）求二端口的阻抗 Z_0。如下图 (b) 所示，$Z_0=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=\dfrac{(-2-2j)\dot{I}_1}{(1-2j)\dot{I}_1}=\left(\dfrac{2}{5}-j\dfrac{6}{5}\right)\Omega$ 。

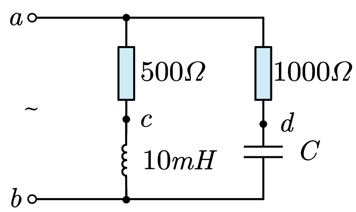
（3）综上可得 $\dot{I}=\dfrac{\dot{U}_{OC}}{Z_L+Z_0}=\dfrac{\left(\frac{2}{5}+j\frac{6}{5}\right)}{\left(\frac{7}{5}+j\frac{4}{5}\right)}=(-0.154-j0.769)A$ 。



(a) (b)

例 5.5： 如图所示的正弦稳态电路，已知 $\omega=100\ rad/s$ 时，有 $U_{ab}=U_{cd}$，求电容 C 的值

> **方法：** 1.先画出电路的相量模型，标明各电量的相量形式；
>
> 2.观察电路形式，当要求的电量和各节点电压相关，可采用位形相量图进性分析；
>
> 3.将电路中的点与位形图中的点一一对应，并标明各电压及方向；
>
> 4.注意同一电路改变元件连接顺序，位形相量图发生变化。且位形图分析仅适用于电压相量，电流相量不适合。

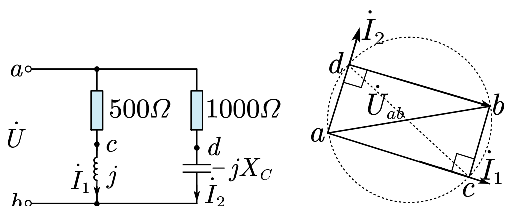


例5.5

解：

（1）将电路转化成相应的相量模型，并把 $\omega=100\ rad/s$ 代入得下图 (a)：

（2）在保证 $U_{ab}=U_{cd}$ 的情况下由相量模型画出位形图如下图 (b)，c，d 应该以 U_{ab} 为直径的圆上且过圆心，所以 $\dfrac{U_{ac}}{U_{cb}}=\dfrac{U_{db}}{U_{ad}}=\dfrac{500}{1}=\dfrac{X_C}{1000}$，进而得 $C=\dfrac{1}{\omega X_C}=0.02\mu F$ 。



(a) (b)

题型 3：正弦稳态电路的功率

1.功率计算：

（1）设二端口的电量参数（具体如右图 5.3 所示）：

$$\begin{cases} u(t)=U_m sin(\omega t+\Psi_u)=\sqrt{2}Usin(\omega t+\Psi_u) \\ i(t)=I_m sin(\omega t+\Psi_i)==\sqrt{2}Isin(\omega t+\Psi_i) \\ \varphi=\Psi_u-\Psi_i \end{cases}$$

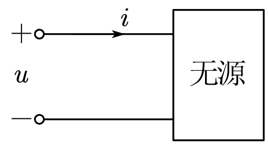


图5.3

（2）计算上图得各种功率：

$$\begin{cases} \text{瞬时功率：}\ p=u(t)i(t)=UI\cos\varphi-UI\cos2(\omega t+\varphi)\ \ \text{单位}V \\ \text{有功功率：}\ P=\dfrac{1}{T}\int pdt=UI\cos\varphi\ \ \text{电阻产生 单位}V \\ \text{无功功率：}\ Q=UI\sin\varphi\ \ \text{电感与电容产生 单位}var \\ \text{复功率：}\ \tilde{S}=\dot{U}I^*=Z\dot{I}I^*=ZI^2=P+jQ\ \ (I^*\text{为}\dot{I}\text{共轭复数})\text{单位}V \\ \text{视在功率：}\ S=UI \end{cases}$$

（3）最大功率传输：对于同一电路，在共轭匹配的情况即$Z_L=Z_0{}^*=R_0-jX_0$，负载能获得最大功率为：

$$P_{\max}=\frac{U_{OC}{}^2}{4R_0}$$

2.功率测量：

（1）三表法（图 5.4），用于交流电路中的平均功率$P=UI\cos\varphi$，测量时P、U、I均不能超量程。

（2）所测量的是和电流线圈串联并从“ * ”流进的电流i与以“ * ”为正端的电压线圈并联的两端口电压，此时的P代表负载的吸收功率。

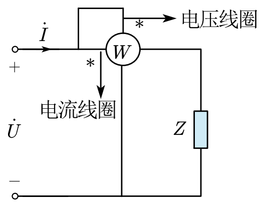


图5.4

3.功率因数的提高：

（1）实际电路传输过程多接负载总为感性负载，工作的端口电压不变，故有$P=UI\cos\varphi$，可以通过比较并联电容来提高电路的功率因数$\cos\varphi$，如图 5.5 所示，来降低线路上的压降损耗，其中

$$\begin{cases} C=\dfrac{P}{\omega U^2}(tg\varphi_1-tg\varphi_2) \\ Q=P(tg\varphi_1-tg\varphi_2) \end{cases}。$$

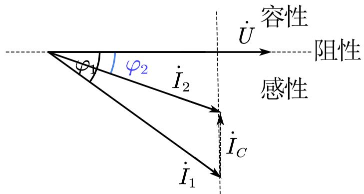


图5.5

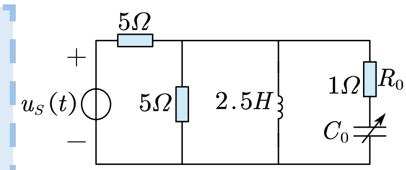
（2）考虑到实际问题一般补偿容量为 0.9 左右，避免过补偿使电路转变为容性。

例 5.6：如图所示，已知$u_S(t)=\sqrt{2}\sin(2t-45°)V$，要是电阻$R_0$上获得最大功率，则$C_0$为何值？

方法：1.先由题意画出电路的相量模型，标明各电量的相量形式；

2.以R_0、C_0为外部电路，用戴维南等效电路求得电路最简形式；

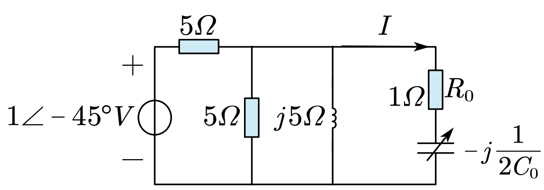
3.由$P_{R_0}=I^2R_0$，当电路的电流最大时取得最大值即在电压保持



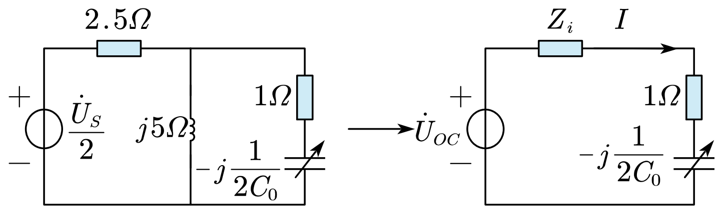
例5.6

解：

（1）已知$u_S(t)=\sqrt{2}\sin(2t-45°)V$，所以电路$\omega=2\ rad/s$，$\dot{U}_S=1\angle-45°V$，进一步得电路的相量模型：



（2）对电路进行戴维南等效电路得下图，$\begin{cases} U_{OC} = \dfrac{\dot{U}_S}{2} \times \dfrac{j5}{2.5+5j} = 0.447\angle -18.4°V \\ Z_i = 2.5 \,/\!/\, j5 = (2+j1)\Omega \end{cases}$

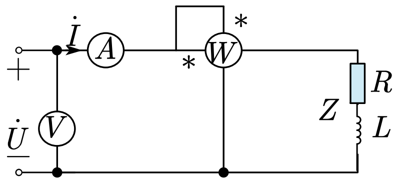


（3）所以由上得当$X_{C_0} = \dfrac{1}{2C_0} = j\Omega$时，电路总阻抗的模最小为3，此时$C_0 = 0.5\mu F$。

例 5.7：如图所示，已知$f = 50Hz$，且测得$U = 50V$、$I = 1A$、$P = 30W$，求电路中的电感值L。

步骤：1.由$P = UI\cos\varphi = I^2R$，求解电阻R；

2.$|Z| = \dfrac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$，进而求解$L$。



例5.7

解：由题意得三表法求解电路参数，具体如下：

$$P = I^2R,\quad \therefore R = \frac{P}{I^2} = \frac{30\,\mathrm{W}}{1} = 30\Omega$$

$$\text{又因为}\begin{cases} |Z| = \dfrac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \\ \omega = 2\pi f \end{cases}，\text{所以}L = 0.127H$$

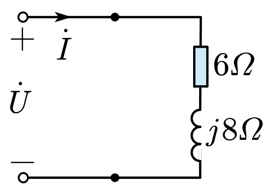
例 5.8：如图所示，一感性负载接于电压$U = 100\mathrm{V}$、$f = 1000Hz$的正弦电源上，若将电路的功率因数提高到0.9，求并联的电容C的值及并联后的电流I的大小。

步骤：1.补偿容量不影响电路的有功功率，所以$P = UIcos\varphi = \dfrac{U^2}{R}$保持不变；

2.由$Z_L = (6+j8)\Omega$可求得φ_1，又功率因数提高到$\cos\varphi_2 = 0.9$，所以

并联的电容值应为$C = \dfrac{P}{\omega U^2}(tg\varphi_1 - tg\varphi_2)$；

3.补偿后的电流为$I = \dfrac{P}{U\cos\varphi_2}$。



例5.8

解：由题意得，感性负载$Z_L = (6+j8)\Omega$，所以$\mathrm{tg}\varphi_1 = \dfrac{4}{3}$，$P = \dfrac{U^2}{R} = 600W$，

又因为$\cos\varphi_2 = 0.9$，且补偿后的电路显感性，所以$\mathrm{tg}\varphi_2 = 0.484$

$$\text{所以得}\begin{cases} C = \dfrac{P}{\omega U^2}(tg\varphi_1 - tg\varphi_2) = 8.11\mu F \\ I = \dfrac{P}{U\cos\varphi_2} = 6.67\mathrm{A} \end{cases}$$

【精选习题】

基础篇

5.1、如图 1 所示电路中，求电流I。

5.2、如图 2 所示电路中，已知$Z=(30+j30)\Omega$，$jX_L=j10\Omega$，又知$U_Z=85V$，求端口电压有效值$U=?$

5.3、如图 3 所示正弦稳态电路，$L=5mH$，$\begin{cases} u(t)=100\cos(10^3t+75°)\mathrm{V} \\ i(t)=10\sqrt{2}\cos(10^3t+30°)A \end{cases}$，求电流$i_C(t)$。

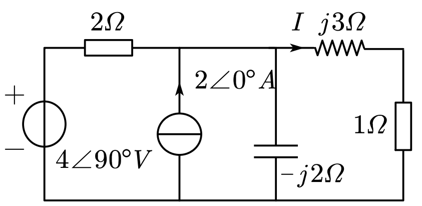


图1

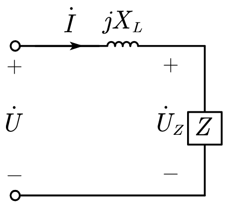


图2

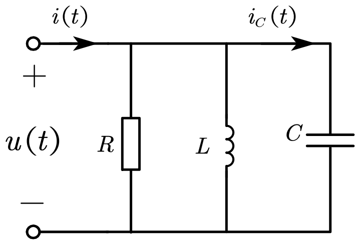


图3

5.4、图 4 所示电路中，$u=10\sqrt{2}\sin 3140tV$，当R值一定时，要使流过C的电流最大，问C为何值？

5.5、如图 5 所示电路中，正弦电压源$\dot{U}_S=10\angle 0°V$,试求负载Z_L为何值时，其上能获得最大功率，最大功率P_{Lmax}是多少？

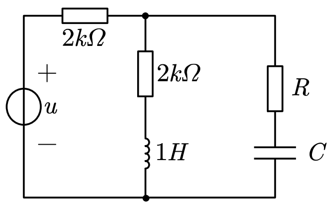


图4

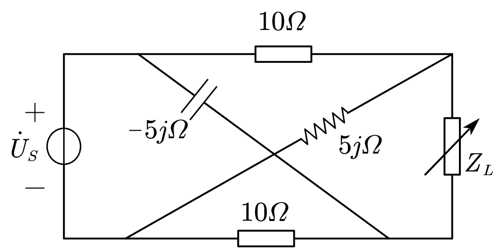


图5

5.6、如图 6 所示正弦稳态电路，$R=20\Omega$，$X_C=25\Omega$ ，$\dfrac{1}{\omega C}=25\Omega$且$I_S=I_R$，求$X_L$。

5.7、如图 7 所示正弦稳态电路，已知$\dot{I}_s=2\angle 0°\,\mathrm{A}$,负载$Z_L$可变，为使$Z_L$获得最大功率，求此时$Z_L$及其吸收的最大功率$P_{Lmax}$。

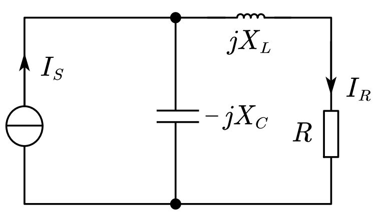


图6

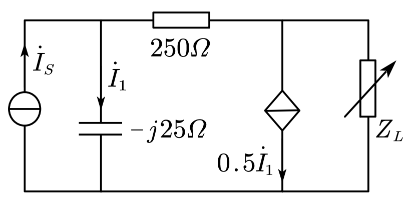


图7

提高篇

5.8、如图 8 所示正弦稳态电路，已知$\dot{U}_S = 6\angle 0°\mathrm{V}$，负载$Z_\mathrm{L}$可变，为使$Z_\mathrm{L}$获得最大功率。求此时$Z_\mathrm{L}$及其吸收的最大功率$P_{Lmax}$.

5.9、在图 9 所示正弦稳态电路中，电压表$V1$的示数为$100\sqrt{2}V$，电压表$V2$的示数为$200V$，电流表$A1$的示数为$30A$，电流表$A2$的示数为$20A$，功率表的示数为$1000W$。求R, X_{L_1}, X_{L_2}, X_C。

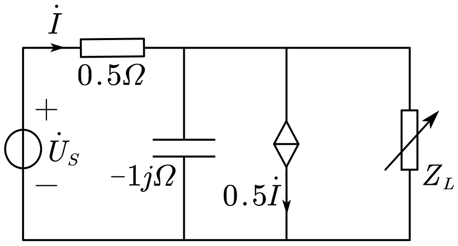


图8

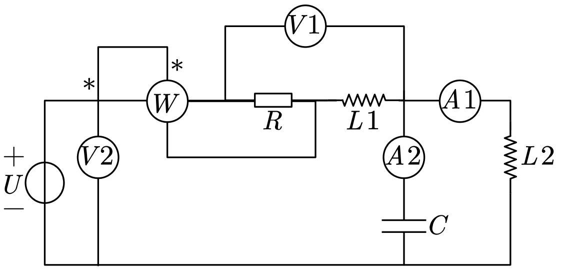


图9

5.10、如图 10 所示，已知$u_S(t) = 12\sqrt{2}\cos(1000t)V$， $i_S(t) = 4\sqrt{2}\sin(1000t)A$，求负载为何值时能够获得最大功率？所获得的最大功率的是多少？

5.11、正弦稳态电路如图 11 所示，已知$U = 200V$，$P = 866W$， $I = I_1 = I_2$， 试做出相量图，并求R、X_L与X_C。

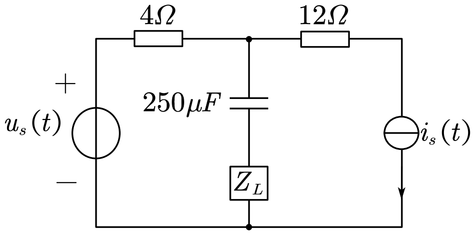


图10

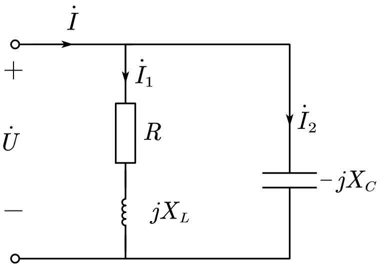


图11