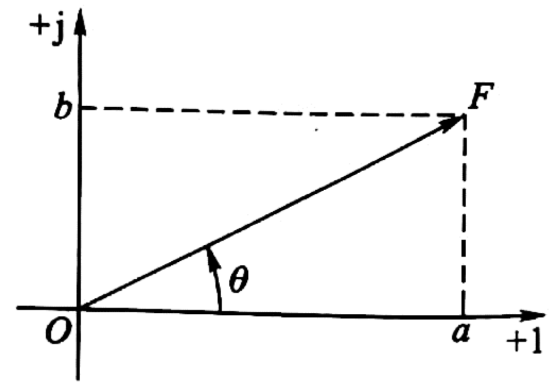
# 第八章 相量法

- 复数
- 正弦量
- 正弦量的相量表示法
- RLC元件约束的相量形式
- 电路定理的相量表示

# §8-1 复数

- 复数有多种表示形式
  - 代数形式

$$F = a + \mathrm{j}b \qquad j = \sqrt{-1}$$




  - 三角形式

$$F = |F|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$$

  - 指数形式

$$F = |F|e^{\mathrm{j}\theta}$$

$e^{\mathrm{j}\theta}$是一个模等于1，辐角为$\theta$的复数。

  - 极坐标形式

$$F = |F|\angle\theta$$

$$|F| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$a = |F|\cos\theta \qquad b = |F|\sin\theta$$

# §8-1 复数

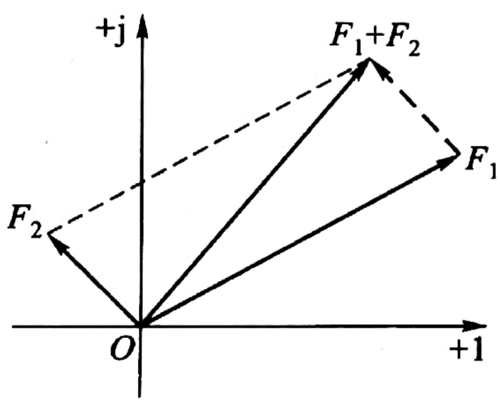
- 共轭复数

$$F = a + \mathrm{j}b \qquad F^* = a - \mathrm{j}b \qquad F^* = |F|\angle(-\theta)$$

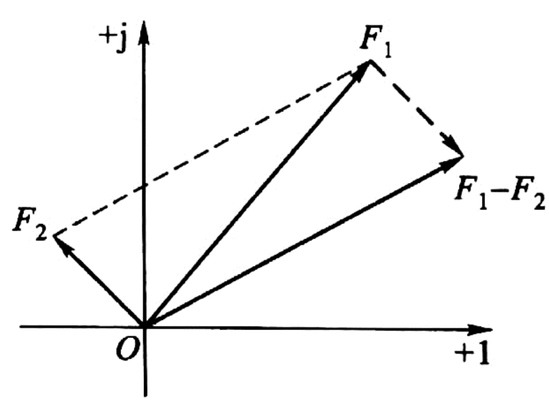
- 复数的加减运算

$$F_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1 \qquad F_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$$

$$F_1 \pm F_2 = (a_1 + \mathrm{j}b_1) \pm (a_2 + \mathrm{j}b_2) = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{j}(b_1 \pm b_2)$$




(a) $F_1+F_2$




(b) $F_1-F_2$

# §8-1 复数

- **复数相乘** $F_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1 \quad F_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$

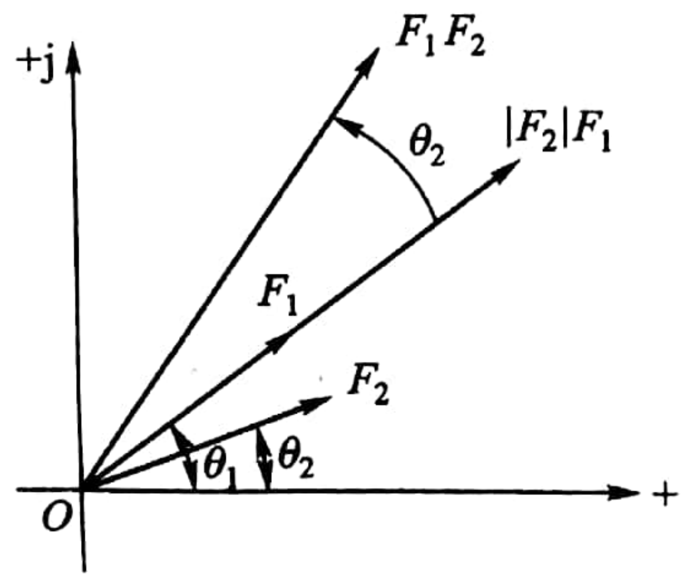
指数形式

$$F_1F_2 = |F_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}|F_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}$$

$$= |F_1||F_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)}$$

$$|F_1F_2| = |F_1||F_2|$$

$$\arg(F_1F_2) = \arg(F_1) + \arg(F_2)$$




(a) $F_1F_2$

代数形式

$$F_1F_2 = (a_1 + \mathrm{j}b_1)(a_2 + \mathrm{j}b_2)$$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + \mathrm{j}(a_1b_2 + a_2b_1)$$

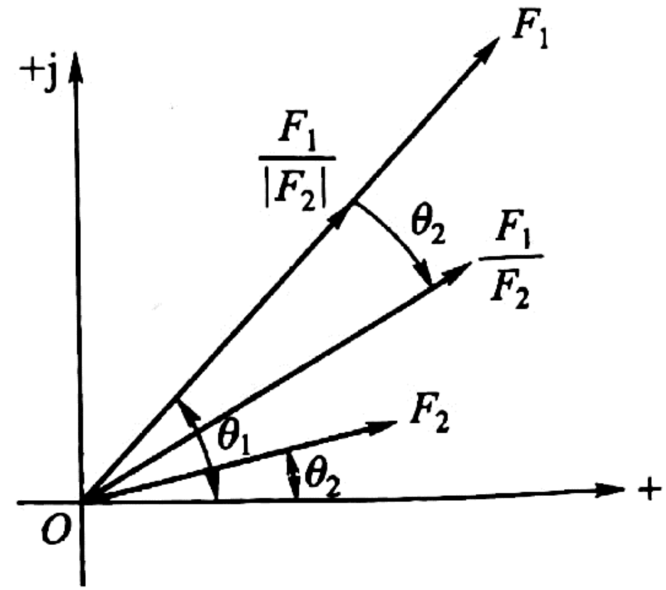
# § 8-1 复数

- **复数相除** $F_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1 \quad F_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{|F_1|\angle\theta_1}{|F_2|\angle\theta_2} = \frac{|F_1|}{|F_2|}\angle(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\left|\frac{F_1}{F_2}\right| = \frac{|F_1|}{|F_2|}$$

$$\arg\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \arg(F_1) - \arg(F_2)$$



(b) $F_1/F_2$

代数形式

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1 + \mathrm{j}b_1}{a_2 + \mathrm{j}b_2} = \frac{(a_1 + \mathrm{j}b_1)(a_2 - \mathrm{j}b_2)}{(a_2 + \mathrm{j}b_2)(a_2 - \mathrm{j}b_2)}$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2)^2 + (b_2)^2} + \mathrm{j}\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{(a_2)^2 + (b_2)^2}$$

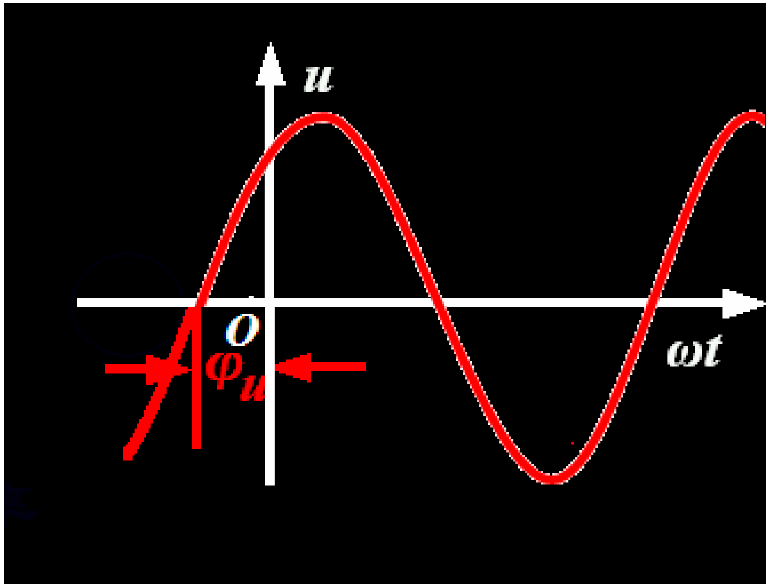
# §8-2 正弦量

- **概述**
  - **直流电**: 大小、方向不随时间改变。
  - **变动电流：** 大小、方向随时间改变。
  - **周期电流**: 大小、方向随时间周期变化。
  - **交变电流**: 一周期内平均值等于零的周期电流。
  - **正弦交流电**: 按正弦规律变化的交变电流。
  - **周期*T*(s)：** 周期电流变化一个循环所需要的时间。
  - **频率*f*(Hz)**: 单位时间内周期电流所完成的循环数。

# §8-2 正弦量

## 一、正弦量的三要素

$$x = X_{\mathrm{m}} \sin\ (\omega t + \phi_0)$$




1. $X_{\mathrm{m}}$: 正弦量的最大值或幅值

2. ω: 正弦量的角频率，单位rad/s

$$[\omega(t+T)+\varphi_0]-(\omega t+\varphi_0)=2\pi$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

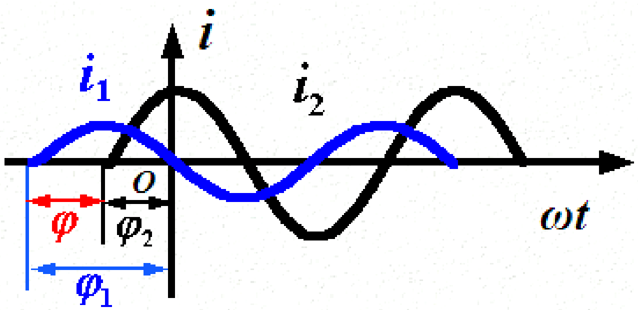
3. $\varphi_0$ : 初相位

# § 8-2 正弦量

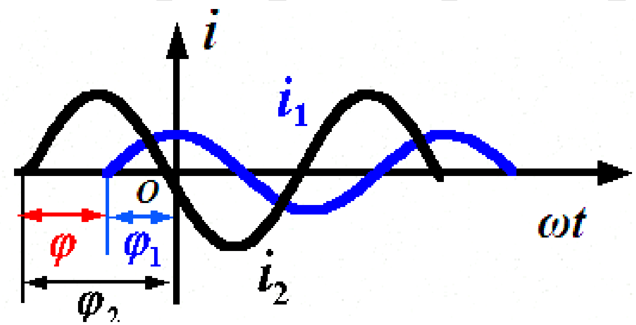
## 二、相位差　两个同频率正弦量的相位之差

$$i_1 = I_{1m}\sin(\omega t + \varphi_1) \qquad\qquad i_2 = I_{2m}\sin(\omega t + \varphi_2)$$

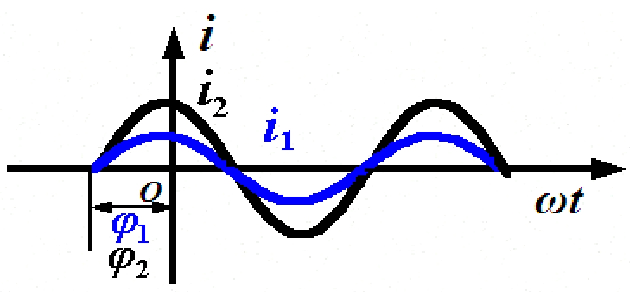
**（1）$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$ , $i_1$超前$i_2$**



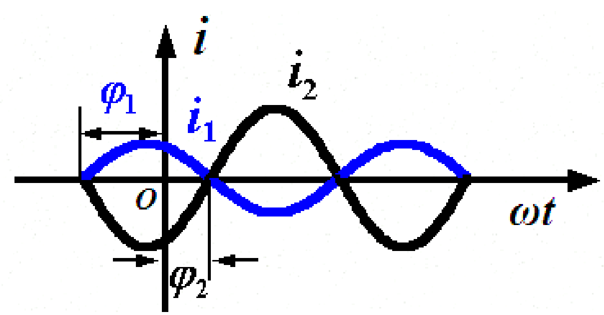

**（2）$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 < 0$ ,$i_1$滞后$i_2$**




**(3)$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ , $i_1$、$i_2$同相**




**(4)$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 180°$ ,$i_1$、$i_2$反相**



# §8-2 正弦量

## 三、有效值

$$\int_0^T i^2 R \mathrm{d}t = I_\mathrm{d}^2 RT$$ 做功等效

周期电流　　直流电流

周期信号的有效值： $I = I_\mathrm{d} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T i^2 \mathrm{d}t}$

正弦信号的有效值： $I = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T I_\mathrm{m}^2 \sin^2(\omega t + \varphi_i)\mathrm{d}t}$

$$U = \frac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} \approx 0.707 U_\mathrm{m} \qquad = \frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} \approx 0.707 I_\mathrm{m}$$

# §8-2 正弦量的相量表示法

由欧拉公式，有 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

当 $\theta = \omega t + \phi_u$ ，即 $e^{j(\omega t + \phi_u)} = \cos(\omega t + \phi_u) + j\sin(\omega t + \phi_u)$

对正弦电源：$u_S = \sqrt{2} U_S \cos(\omega t + \phi_u)$ （$U$s为有效值）

可分解为一对共轭的复指数函数：

$$u_S = \frac{\sqrt{2} U_S}{2}\left[\cos(\omega t + \phi_u) + j\sin(\omega t + \phi_u)\right] + \frac{\sqrt{2} U_S}{2}\left[\cos(\omega t + \phi_u) - j\sin(\omega t + \phi_u)\right]$$

$$u_S = \frac{\sqrt{2} U_S}{2} e^{j(\omega t + \phi_u)} + \frac{\sqrt{2} U_S}{2} e^{-j(\omega t + \phi_u)}$$

定义相量$\dot{U}_S = U_S e^{j\varphi_u} = U_S \angle \varphi_u$ $\quad \dot{I} = I e^{j\varphi_i} = I \angle \varphi_i$

振幅相量$\dot{U}_{sm} = U_{sm} e^{j\varphi_u} = U_{sm} \angle \varphi_u$ $\quad \dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_i} = I_m \angle \varphi_i$

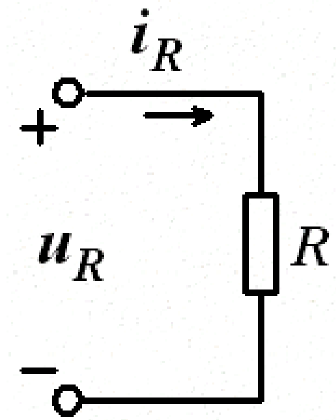
$U_{sm} = \sqrt{2} U_s \qquad I_m = \sqrt{2} I$

# §8-3 RLC元件约束的相量形式

## 一、电阻元件约束的相量形式

$$i_R = \sqrt{2} I_R \cos(\omega t + \phi_i)$$

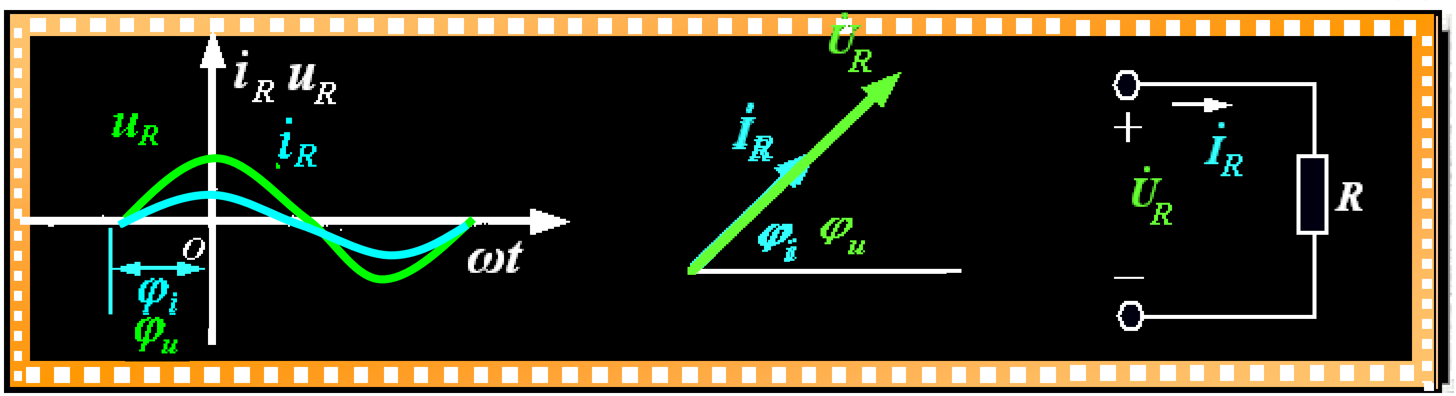
$$u_R = R\sqrt{2} I_R \cos(\omega t + \phi_i) = \sqrt{2} U_R \cos(\omega t + \phi_u)$$




(1) 相位差 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$ 电压、电流同相位

(2) 大小 $U_R = RI_R$

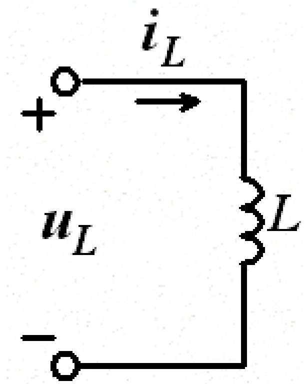
(3) 相量 $\dot{U}_R = U_R \angle \varphi_u = RI_R \angle \varphi_i = R\dot{I}_R$



# §8-3 RLC元件约束的相量形式

## 二、电感元件约束的相量形式

$$i_L = \sqrt{2} I_L \cos(\omega t + \phi_i) \qquad u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$




$$u_L = -\sqrt{2}\omega L I_L \sin(\omega t + \phi_i) = \sqrt{2}\omega L I_L \cos(\omega t + \phi_i + \frac{\pi}{2})$$

$$= \sqrt{2} U_L \cos(\omega t + \phi_u)$$

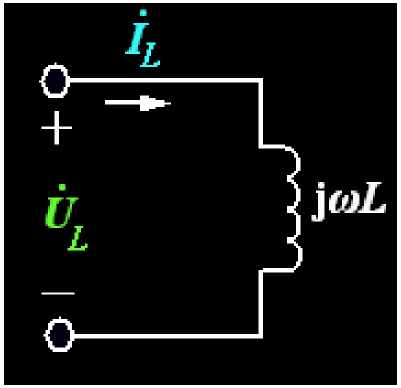
（1）相位差 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \dfrac{\pi}{2}$　电压超前电流90°

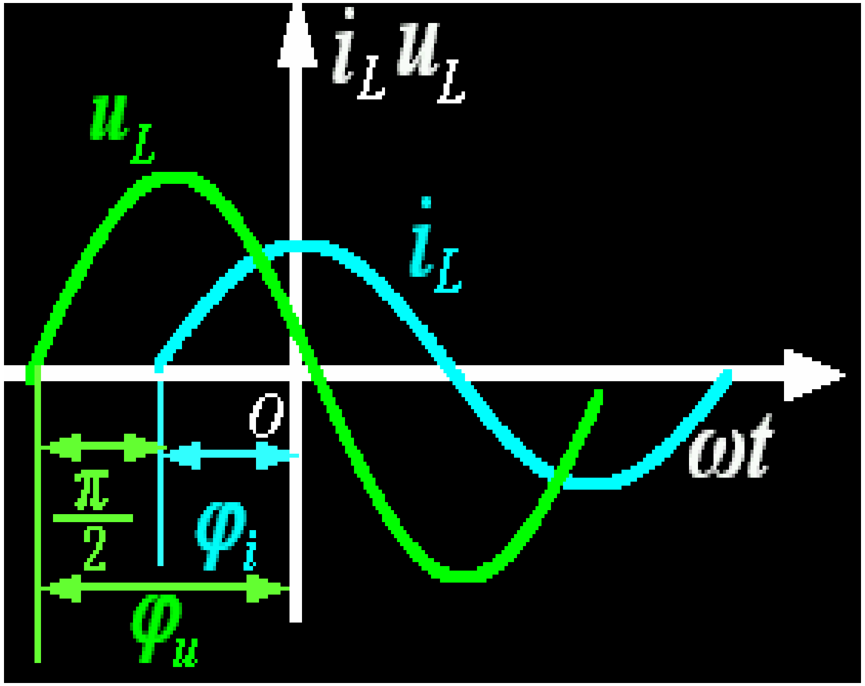
（2）大小 $U_L = \omega L I_L \quad X_L = \omega L$　—感抗

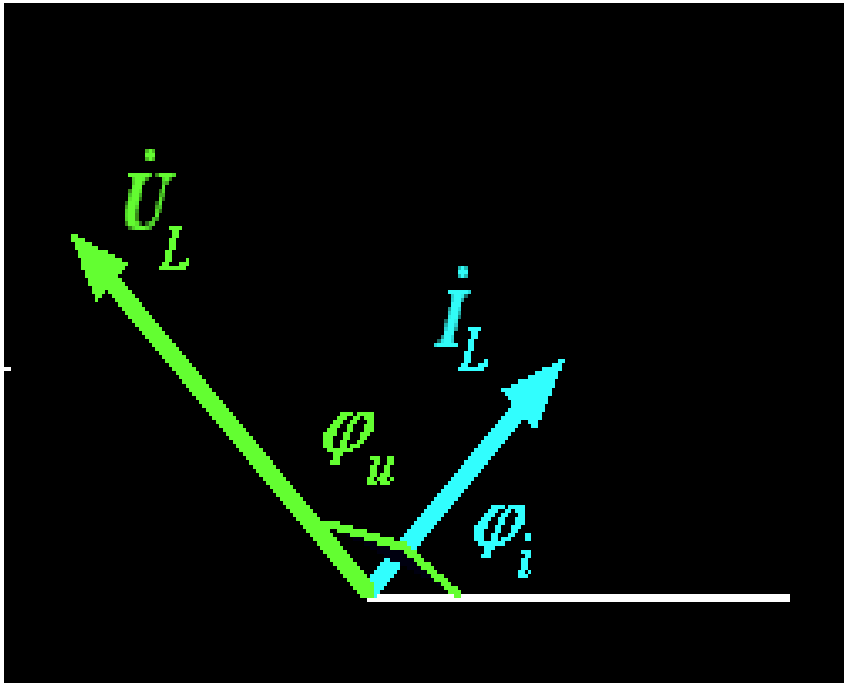
（3）相量 $\dot{U}_L = U_L \angle \varphi_u = \omega L I_L \angle (\varphi_i + \dfrac{\pi}{2}) = \mathrm{j} X_L \dot{I}_L$

# § 8-3 RLC元件约束的相量形式

电感元件约束的相量形式

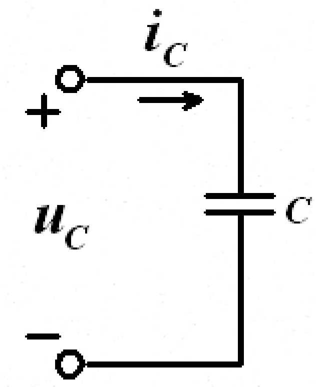


# §8-3 RLC元件约束的相量形式

## 三、电容元件约束的相量形式




$$u_C = \sqrt{2}U_C\sin(\omega t + \varphi_u) \qquad i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$i_C = \sqrt{2}\omega C U_C \sin(\omega t + \phi_u + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}I_C\sin(\omega t + \varphi_i)$$

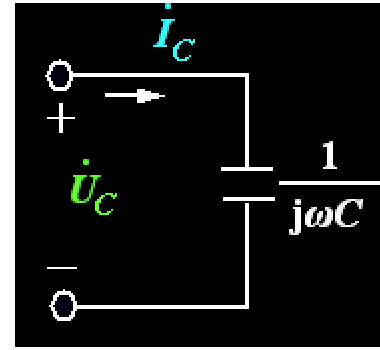
（1）相位差 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\dfrac{\pi}{2}$ 电压滞后电流90°

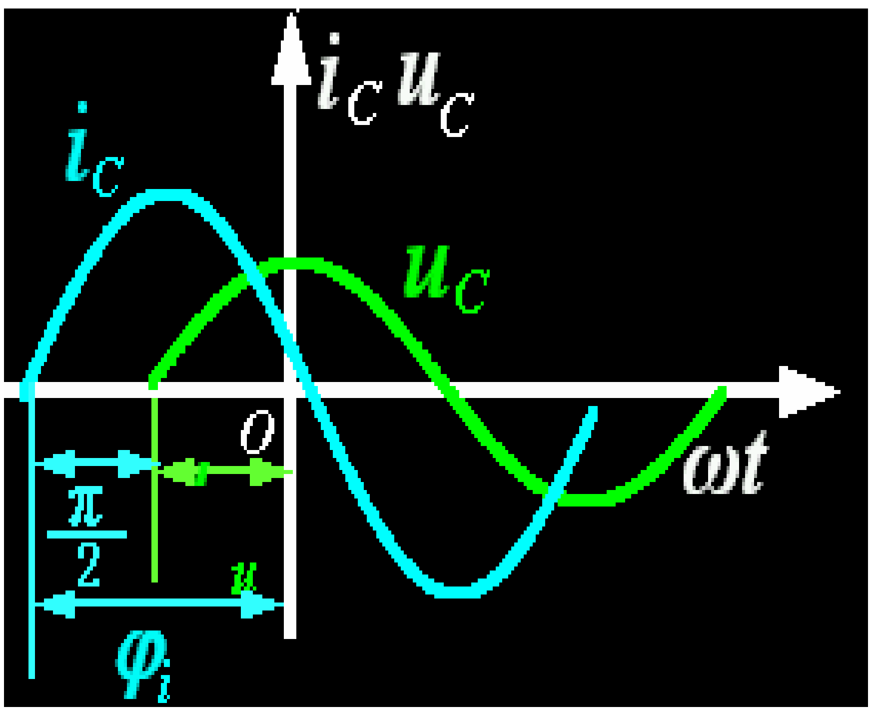
（2）大小 $U_C = \dfrac{1}{\omega C}I_C \qquad X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ —容抗

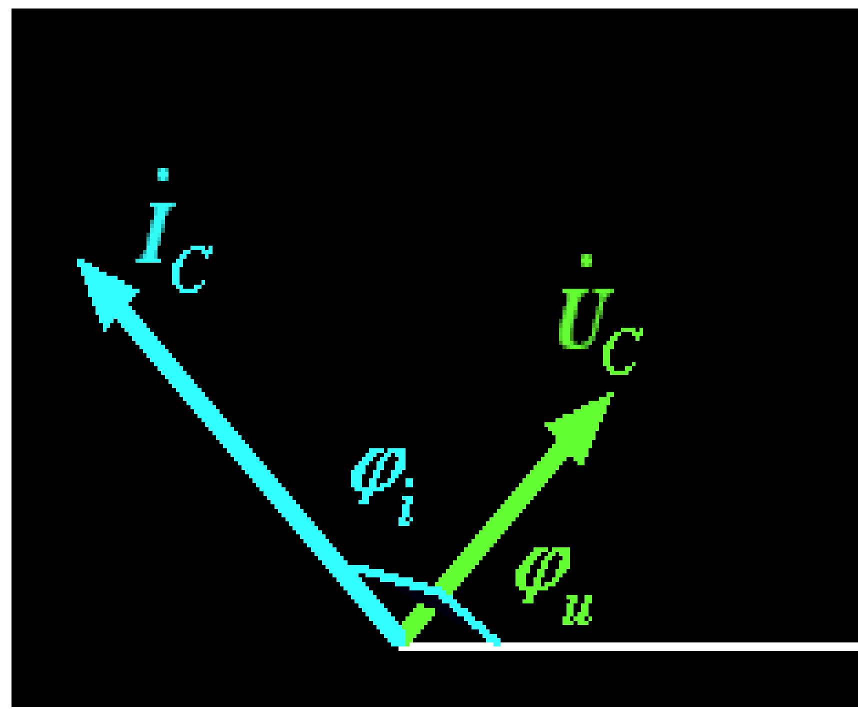
（3）相量 $\dot{I}_C = I_C\angle\varphi_i = \omega C U_C\angle(\varphi_u + \dfrac{\pi}{2}) = \mathrm{j}\dfrac{1}{X_C}\dot{U}_C$

# §8-3 RLC元件约束的相量形式

## 电容元件约束的相量形式



# §8-4 电路定律的相量形式

当电路中电量都是同频率的电量时：

- KCL相量形式

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + ..... + \dot{I}_n + ..... = 0$$

- KVL相量形式

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + ..... + \dot{U}_n + ..... = 0$$

# §8-4 电路定律的相量形式

**1. 解析法：**

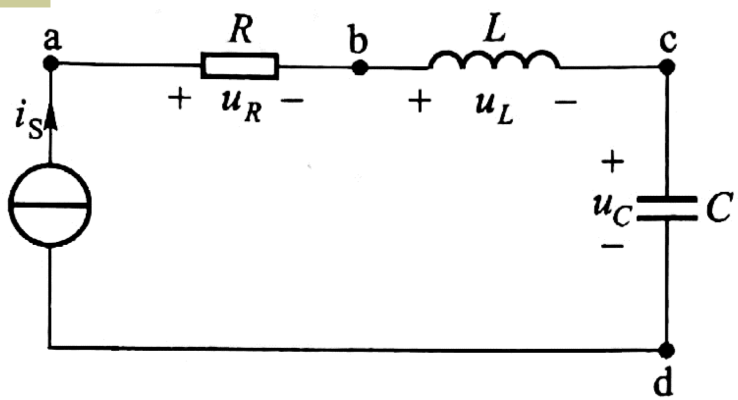
**利用第二章所述方法求解。**

注意：已知或未知的物理量要以相量形式表示，阻抗、感抗、容抗要以复数形式表示。

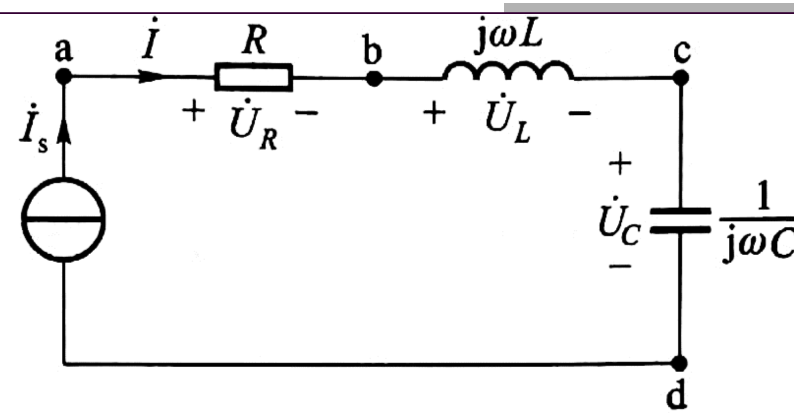
**2. 相量图法：**

选定参考相量，分别画出相关物理量的相量图，通过平行四边形法则，确定所要求的解。

**例 8－4** 图 8－13(a)所示电路中，$i_S = 5\sqrt{2}\cos(10^3 t + 30°)$ A，$R = 30\ \Omega$，$L = 0.12$ H，$C = 12.5\ \mu$F，求电压 $u_{ad}$ 和 $u_{bd}$。




(a)




(b)

$$\dot{U}_R = R\dot{I} = 150\,\angle 30°\text{V} \quad (\text{与 } \dot{I}_s \text{相同})$$

$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I} = 600\,\angle 120°\text{V} \quad (\text{超前 } \dot{I}_s 90°)$$

$$\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I} = 400\,\angle -60°\text{V} \quad (\text{滞后 } \dot{I}_s 90°)$$

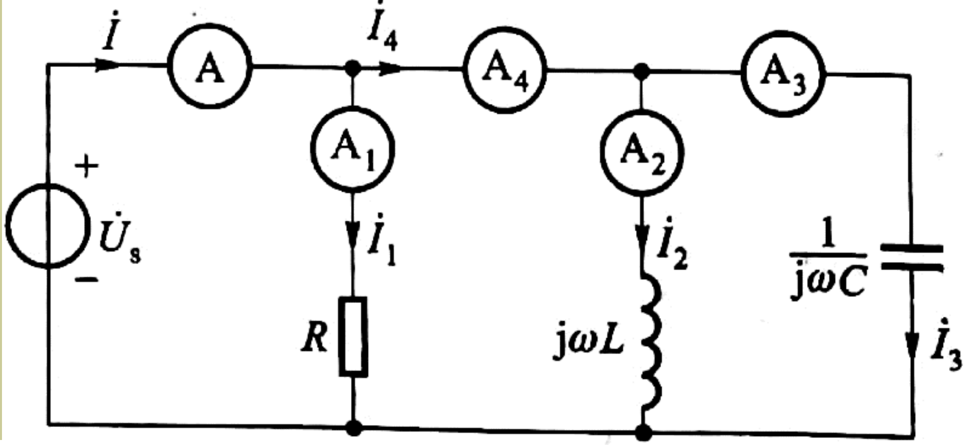
$$\dot{U}_{bd} = \dot{U}_L + \dot{U}_C = (600\,\angle 120° + 400\,\angle -60°)\text{V} = 200\,\angle 120°\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{ad} = \dot{U}_R + \dot{U}_{bd} = (150\,\angle 30° + 200\,\angle 120°)\text{V} = 250\,\angle 83.13°\ \text{V}$$

$$u_{bd} = 200\sqrt{2}\cos(10^3 t + 120°)\text{V}$$

$$u_{ad} = 250\sqrt{2}\cos(10^3 t + 83.13°)\text{V}$$

**例 8－5** 图 8－14 所示电路中的仪表为交流电流表，其仪表所指示的读数为电流的有效值，其中电流表 $A_1$ 的读数为 5A，电流表 $A_2$ 的读数为 20A，电流表 $A_3$ 的读数为 25A。求电流表 A 和 $A_4$ 的读数。




令 $\dot{U}_s = U_s\angle 0^\circ$ V 作为参考相量，

$\dot{I}_1 = 5\angle 0^\circ$ A（与 $\dot{U}_s$ 同相）

$\dot{I}_2 = -j20$A（滞后 $\dot{U}_s 90^\circ$）

$\dot{I}_3 = j25$A（超前 $\dot{U}_s 90^\circ$）

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = (5 + j5)\text{A} = 7.07\angle 45^\circ\text{A}$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = j5\text{A} = 5\angle 90^\circ\text{A}$$

电流表的读数为

表 A：7.07 A；　　　表 $A_4$：5 A

# 作业

P195

7-18

P218

8-14

8-15

8-18