专题六 谐振电路与互感耦合电路分析

【重要题型】

题型 1：谐振电路

1.谐振：

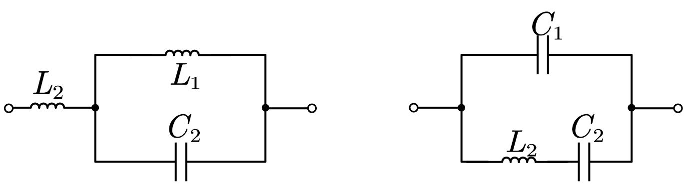
（1）谐振：对于一个无源正弦稳态电路，当其端口电压与端口电流同相位时，便发生了谐振。这时端口电路整体呈现阻性，即阻抗$Z=R+jX$（或导纳$Y=G+jB$）的虚数部分X（B）为零。

（2）品质因数Q：谐振时感抗X_{L0}或容抗X_{C0}与电阻R的比值。Q具体取决于R、L、C元件的参数，而与电源电压及角频率无关。计算公式：$Q=\dfrac{X_{L0}}{R}=\dfrac{\omega_0 L}{R}=\dfrac{X_{C0}}{R}=\dfrac{1}{\omega_0 RC}=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$。

（3）谐振的类型具体如下表：

	串联谐振电路	并联谐振电路
电路阻抗	电路阻抗$Z=R+jX$	电路导纳$Y=G+jB$
谐振发生条件	$X=\omega L-\dfrac{1}{\omega C}=0$	$B=\omega C-\dfrac{1}{\omega L}=0$
谐振频率	$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
谐振时的特征	$Z=R$,为最小 $I_0=U_S/R$,为最大； $\dot{U}_R=R\dot{I}_0=\dot{U}_S$，$\dot{U}_L=jQ\dot{U}_S$； $\dot{U}_C=-jQ\dot{U}_S$；L、C之间相当于短路，又称电压谐振	$Y=G$,为最小，$U_0=I_S/G$为最大； $\dot{I}_G=G\dot{U}_0=\dot{I}_S$，$\dot{I}_L=-jQ\dot{I}_S$ $\dot{I}_C=jQ\dot{I}_S$；L、C局部端口相当于开路，又称电流谐振
品质因数	$Q=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$	$Q=\dfrac{1}{G}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

例 6.1：如图所示，当两个电路的电源频率有零增大时，电路先发生串联谐振还是并联谐振，两种谐振那个频率更高？



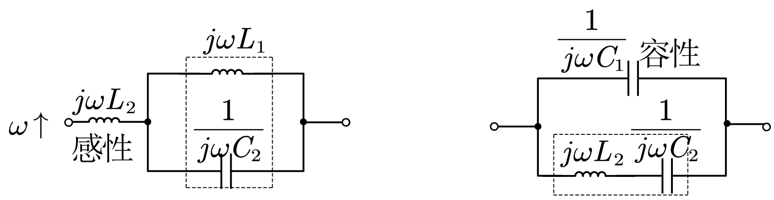
(a) 例6.1 (b)

方法：1.先判断电路各组分的性质判断，容性还是感性；

2.当电源频率从零逐渐增大时，判断元件组分的性质变化，然后判断是串联谐振还是并联谐振；

3.根据谐振特点，求出阻抗或者导纳，使虚部为零，求出谐振频率或者符合简单串并联谐振套用公式$\omega=\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$。

解：由题意得，具体如图所示：



从感性到容性 (a)　　从容性到感性 (b)

（1）对于电路图(a)，整体为先并后串电路，求得并联谐振，$\omega_1=\sqrt{\dfrac{1}{L_1C_2}}$，随着$\omega$的增大右边元件显容性，电路整体发生串联谐振，此时电路的阻抗为$Z=j\left(\omega L_2-\dfrac{\omega L_1}{\omega^2L_1C_2-1}\right)\Omega=0\Omega$，所以得$\omega_2=\sqrt{\dfrac{L_1+L_2}{C_2L_1L_2}}$，$\omega_1<\omega_2$。

（2）对于电路图(b),整体为先串后并电路，电路先在支路上发生串联谐振，$\omega=\sqrt{\dfrac{1}{L_2C_2}}$，随着$\omega$的增大下方元件显感性，电路整体发生并联谐振，电路的电导为$Y=j\left(wC_1-\dfrac{1}{wL_2-\frac{1}{\omega C_2}}\right)S=0S$，所以得$w_2=\sqrt{\dfrac{C_1+C_2}{L_2C_1C_2}}$，$\omega_1<\omega_2$。

例 6.2：如图所示，已知三个电流表的示数均为$5A$，两个电压表的读数均为$100V$，且电路发生谐振。求电路端口电压的有效值及各元件的参数。

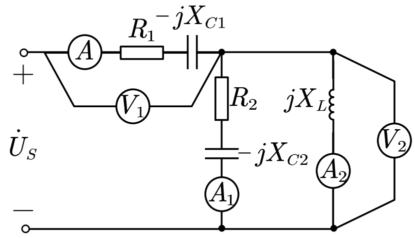
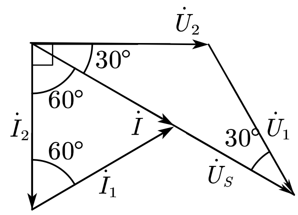


图6.2

方法：1.先判断谐振电路类型，然后根据相应的谐振类型判断电路特点；

2.题目已知条件多为有效值，可根据已知条件结合谐振特性画出电路相量图进行分析。

解：由题意得，电流表A有示数排除C_2、L发生并联谐振，所以应是C_1、C_2、L三个参与的串联谐振，所以$\dot{U}_S$和干路电流$\dot{I}$同相位，具体计算如下：



（1）由上述内容和已知条件，以电压$\dot{U}_2$为参考相量，画出相量图如右所示：

（2）由相量图可知$U=2U_2\cos30°=100\sqrt{3}\,V$，

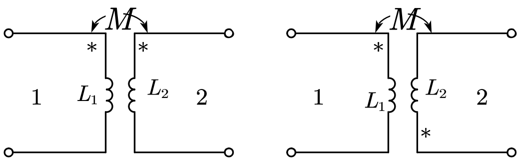
$$\begin{cases} X_L=\dfrac{U_2}{I_2}=20\Omega \\ (R_2-jX_{C_2})\Omega=\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}=\dfrac{U_2}{I_1}\angle-30^\circ=\left(10\sqrt{3}-j10\right)\Omega \\ (R_1-jX_{C_1})\Omega=\dfrac{\dot{U}_1}{\dot{I}}=\dfrac{U_1}{I\{}\angle-30^\circ=\left(10\sqrt{3}-j10\right)\Omega \end{cases}，解得\begin{cases} R_1=10\sqrt{3}\,\Omega, X_{C_1}=10\Omega \\ R_2=10\sqrt{3}\,\Omega, X_{C_2}=10\Omega \end{cases}$$

题型 2：含互感耦合电路计算

1.同名端：

（1）耦合元件至少由两个线圈的构成，包括每个线圈的自感系数 L 和线圈相互之间的互感系数 M 。

（2）若两个线圈的电流均从同名端流入，则互感 M 前取正号；反之 M 前取负号。两线圈的同名端可用“ * ”和“ · ”表示，如下图 6.1 所示。



同名端　　图6.1　　异名端

2.耦合互感电路计算：

（1）由电磁感应定律可知，耦合线圈电压由自感电压（$L\dfrac{di}{dt}$）和互感电压（$M\dfrac{di'}{dt}$）构成，线圈的电压电流关联正向所则自感电压为正反之为负；互感电压以“流入同名端，同名端感应正”，所以图 6.2 可表示为$\begin{cases} u_1=L_1\dfrac{di_1}{dt}+M\dfrac{di_2}{dt} \\ u_2=M\dfrac{di_1}{dt}+L_2\dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$。

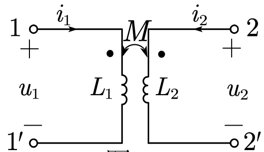


图6.2

（2）由当上述方程可知耦合线圈的互感分量由另一线圈的电流产生，因此互感电压可用电流控制的受控电压源表示，等效电路具体如下图 6.3 所示：

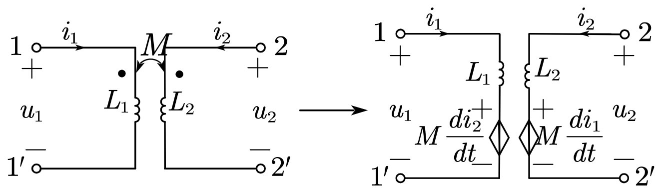


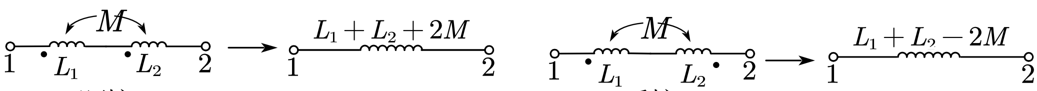
图6.3

（3）耦合系数$k=\sqrt{\dfrac{|\Phi_{21}|\,|\Phi_{12}|}{\Phi_{11}\Phi_{22}}}\dfrac{M}{L_1L_2}\,(k\leqslant1)$

（4）耦合互感电路满足 KCL 、 KVL 约束，所以可采用电路方程法等结合电压方程进行分析。

3.耦合电路解耦：

（1）互感线圈的串联：分为顺接（异名端相连）和反接（同名端相连），具体如图 6.4 所示：



顺接　　反接

图6.4

（2）互感线圈的并联：分为同侧相连和异侧相连，具体如图 6.5 所示：

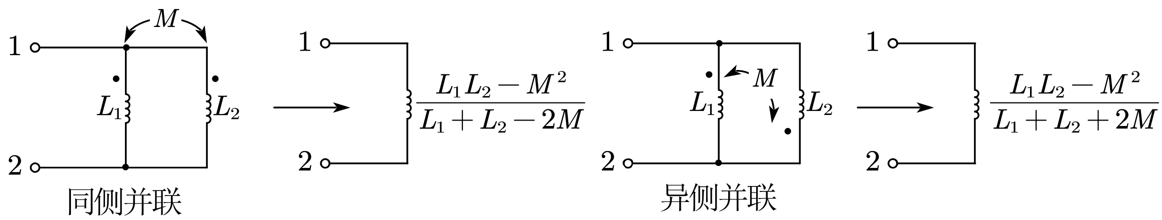


图6.5

（3）三条支路T型去耦：分为同侧相接和异侧相接，具体如图 6.6 所示，注意解除耦合后的结点变化和电压的对应性。

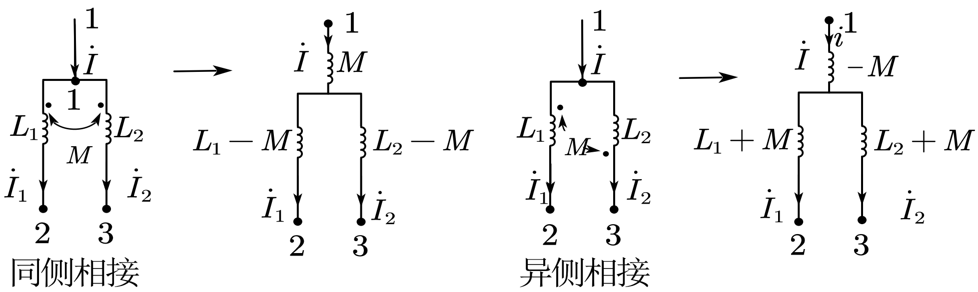
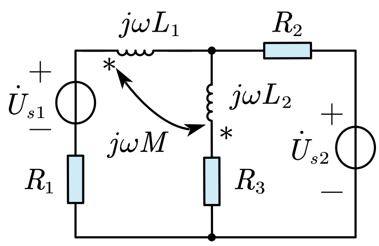


图6.6

例 6.3：如图所示，试写出互感耦合电路的网孔电流方程。

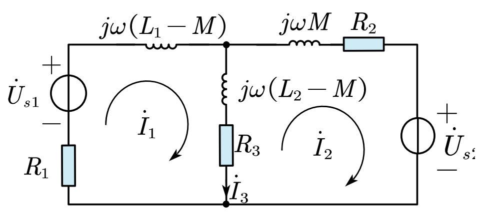


例6.3

步骤：1.将线路中两线圈按T型同侧相接解耦合；

2.确定网孔电流及方向，按照正弦稳态电路列写网孔电流方程。

解：由题意得，将电路解耦合并标明网孔电流的电路图如下：



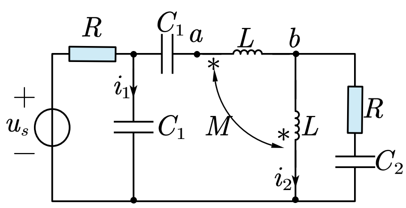
列方程得$\begin{cases}[R_1+R_3+j\omega(L_1+L_2-2M)]\dot{I}_1-[R_3+j\omega(L_2-M)]\dot{I}_2=\dot{U}_{S1}\\ -[R_3+j\omega(L_2-M)]\dot{I}_1+[R_2+R_3+j\omega L_2]\dot{I}_2=-\dot{U}_{S2}\end{cases}$

例 6.4：如图，$\dot{U}_S=80\angle0°V, R=40\Omega, \omega L=60\Omega, \omega M=20\Omega, \dfrac{1}{\omega C_1}=40\Omega, \dfrac{1}{\omega C_2}=20\Omega$，求$\dot{I}_1$，$I_2$和$\dot{U}_{ab}$。

步骤：1.画出电路的相量模型，按已知条件表明各元件的参数；

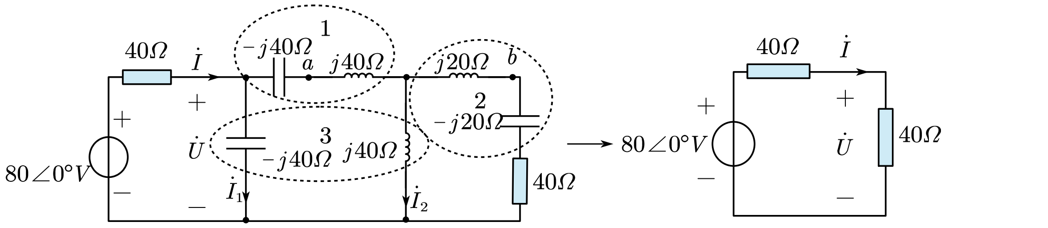
2.将电路元件按T型同侧相接解耦合，注意结点a、b的位置变化；

3.观察电路可知发生两个串联谐振一个并联谐振，根据串联谐振的特点列写电路方程求得待求量。



例6.4

解： 由题意得，将电路解耦合的相量模型如下：



（1）由上图可知，电路虚线圈住两部分（1、2）发生串联谐振相当于短路，进而可以发现 3 部分发生并联谐振断路，具体等效为右端的最简电路。

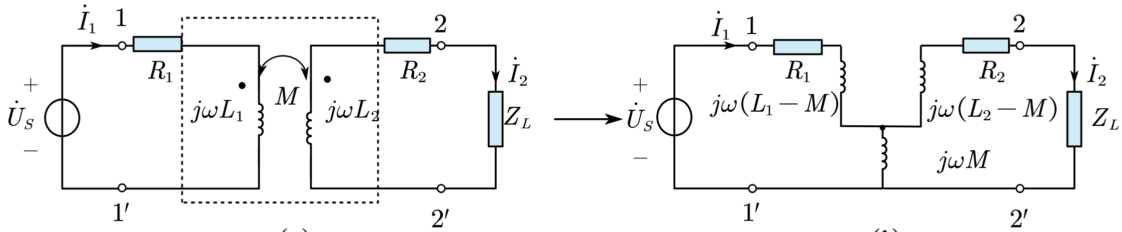
（2）所以可得 $\begin{cases} \dot{U} = \dfrac{1}{2} \times 80\angle 0° = 40\angle 0° V \\ \dot{I} = \dfrac{80\angle 0°}{80} = 1A \end{cases}$，进而得 $\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}}{-j40} = jA$，$\dot{I}_2 = \dfrac{\dot{U}_2}{j40} = -jA$，

$\dot{U}_{ab} = j40 \times \left(\dot{I} - \dot{I}_1\right) + j20 \times \dot{I} = (40 + j60)\text{V}$。

题型 3：含变压器电路计算

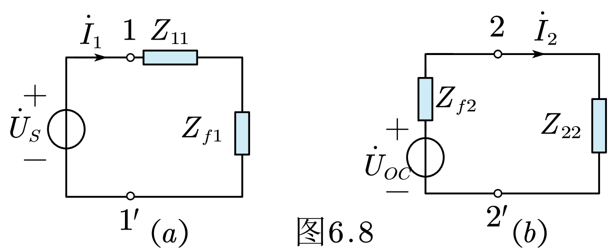
1.空心变压器：

（1）空心变压器为不含的铁芯的电压器，可由耦合线圈表示如图 6.7(a)所示，原方电路（1，1′）与副方电路（2，2′）由 T 型解耦可得图 6.7(b)所示的电路，注意电压和电流方向。



(a) 图6.7 (b)

（2）图 6.7(a)电路中 $\begin{cases} Z_{11} = R_1 + j\omega L_1 \\ Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_L \end{cases}$，对电路进行回路电阻等效，具体如下所示：



(a) 图6.8 (b)

$$\begin{cases} \text{原方回路分析(图6.8}(a)\text{)：反映阻抗} Z_{f1} = \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}\text{，反映阻抗吸收的复功率就是副方电路的复功率} \\ \text{副方电路分析(图6.8}(b)\text{)：开口电压} \dot{U}_{OC} = \dfrac{j\omega M \dot{U}_S}{Z_{11}}\text{，反映阻抗} Z_{f2} = \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{11}} \end{cases}$$

2.理想变压器：

（1）全耦合变压器，既不储能也不耗能的多端元件，在电路中起传递信号和能量的作用。电路模型如图 6.9(a)所示：

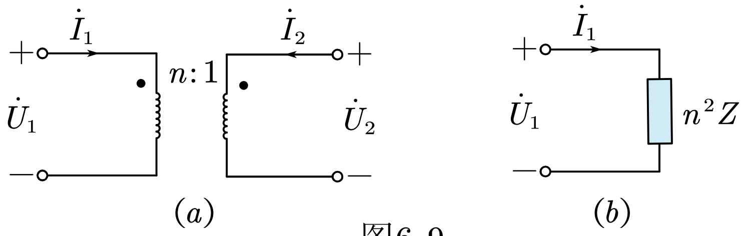
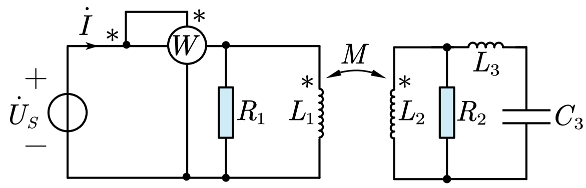


图6.9

（2）理想元件的特点：电压变换：$\dot U_1 = n\dot U_2$；电流变换：$\dot I_1 = -\dfrac{1}{n}\dot I_2$；若副方所带的负载为$Z$ 则阻抗变换（图6.9(b)）：$Z_{in} = \dfrac{\dot U_1}{\dot I_1} = \dfrac{n\dot U_2}{-\frac{1}{n}\dot I_2} = n^2 Z$

例 6.5：如图所示电路，已知$U_S = 18V, \omega = 10^3\ rad/s, I = 2A$，功率表示数为$32.4W$，$L_1 = L_2 = 0.5H$，$L_3 = 0.1H, C_3 = 10\mu F, R_1 = R_2 = 10\Omega$，求互感系数$M$。



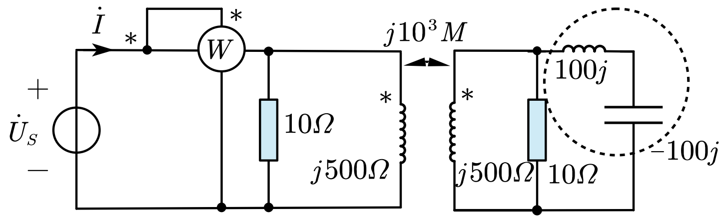
例6.5

步骤：1.画出电路的相量模型，按已知条件表明各元件的参数。

2.副方电路发生谐振，将副方阻抗按公式$Z_{f1} = \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$反映到原方电路。

3.根据已知电压电流及功率情况，求解要求量。

解：由题意得，求得电路的相量模型如下所示：



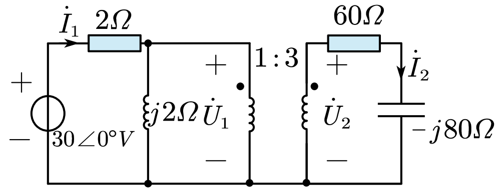
（1）由上图可知虚线圈住的部分发生串联谐振相当于短路，所以$Z_{22} = j500\Omega$，反映到原方电路的反映阻抗为$Z_{f_1} = \dfrac{(10^3M)^2}{j500}\Omega$，$Z_{11} = j\left(500 - \dfrac{(10^3M)^2}{j500}\right)\Omega$。

（2）因为电路整体显感性，$\cos\varphi = \dfrac{P}{UI} = \dfrac{P}{U_S I} = 0.9 \rightarrow \varphi = 25.84°$

综上得原方电路导纳为：$Y = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{Z_{11}} = \dfrac{I}{U_S}\angle -\varphi S = (0.1 - j0.048)S$

所以联立以上解得$M = 0.49H$

例 6.6：如图所示，求电流$\dot{I}_1$和$\dot{I}_2$。



例6.6

方法：1.求副方电路相关量，可按戴维南定理求得原方端口等效电路参数：开口电压$\dot{U}_{OC}$和等效阻抗Z_0；

2.求原方电路相关量时，可将副方阻抗按公式$n^2Z_{副}$折合到原方，然后进行原方电路分析；

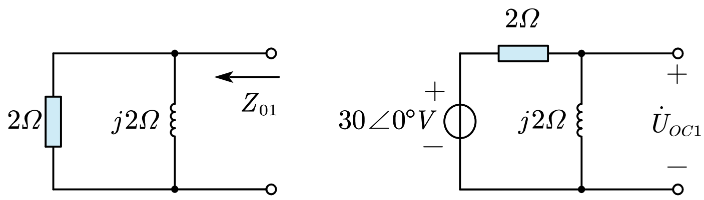
3.计算时注意变压器两端口的电压电流方向及关系。

解：由题意得，具体如下所示：

（1）求电流$\dot{I}_2$。如下图(a)所示，内部电源置零得$Z_0=\dfrac{1}{n^2}Z_{01}=3^2\times 2\,//\,j2=(9+j9)\Omega$；

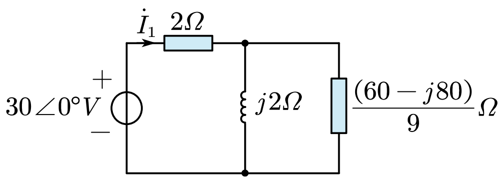
又由图(b)电压变换可得$\dot{U}_{OC}=3\dot{U}_{OC1}=3\times\dfrac{j2}{2+j2}30\angle 0°=45\sqrt{2}\angle 45°V$

所以$\dot{I}_2=\dfrac{\dot{U}_{OC}}{Z_0+60-j80}=0.643\angle 90.82°A$

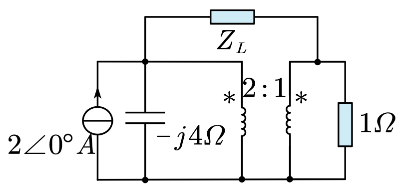


(a) (b)

（2）求电流$\dot{I}_1$。具体等效如下图，$\dot{I}_1=\dfrac{30\angle 0°}{2+2\,//\,\dfrac{(60-j80)}{9}}=9.24\angle 45.13°A$。



例 6.7：如图所示，若Z_L能获得最大功率$P_{L\max}$，求Z_L和$P_{L\max}$。



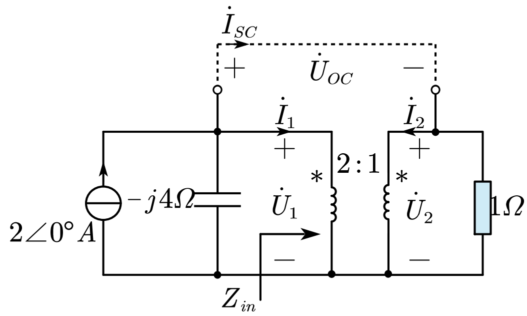
例6.7

方法：1.对于含理想变压器的电路，要表明原、副方电压电流及方向；

2.进行端口等效电路求解时可采取求得开口电压$\dot{U}_{OC}$和短路电流$\dot{I}_{SC}$；

3.计算时注意变压器两端口的电压电流方向，在变换时电压电流关系保持不变。

解：由题意得，标明变压器的电压电流及方向，具体电路图如下：



（1）求开路电压$\dot{U}_{OC}$。将外部支路断路，由阻抗变换可知，$Z_{in}=n^2Z=4\Omega$，由并联电路可得：

$\dot{U}_1=2\angle0°\times4\,/\!/\,(-j4)=4\sqrt{2}\angle-45°V$ ，所以$\dot{U}_{OC}=\dot{U}_1-\dot{U}_2=\frac{1}{2}\dot{U}_1=2\sqrt{2}\angle-45°V$。

（2）求短路电流$\dot{I}_{SC}$。将外部支路短路，由上面电路图可知$\begin{cases}\dot{U}_1=\dot{U}_2\\ \dot{U}_1=2\dot{U}_2\end{cases}$，所以得$\dot{U}_1=\dot{U}_2=0V$，所以电阻$2\Omega$

和电容$-j4\Omega$被短路，所以有电流关系可列方程$\begin{cases}\dot{I}_1=-\frac{1}{2}\dot{I}_2\\ 2\angle0°=\dot{I}_1+\dot{I}_2\end{cases}$，解得$\dot{I}_{SC}=\dot{I}_2=4\angle0°A$。

（3）综上可得等效阻抗为$Z_0=\frac{\dot{U}_{OC}}{\dot{I}_{SC}}=\frac{1}{2}(1-j)\Omega$，所以当$Z_L=Z_0{}^*=\frac{1}{2}(1+j)\Omega$时获得最大功率，最大功率为$P_{L\max}=\frac{U_{OC}}{4R_0}=4W$。

【精选习题】

基础篇

6.1、如图 1 所示二端正弦稳态电路，电路的吸收功率$P=300W$，功率因数$\cos\varphi=1$，求I_C。

6.2、如图 2 所示电路，求a、b端口的等效阻抗Z_{ab}。

6.3、如图 3 电路，$U=50V$，$R_1=10\Omega,R_2=15\Omega,L_1=0.5mH,L_2=0.1mH,C_1=0.2\mu F,$，$C_2=1\mu F$，电流表$A_2$的示数为0，求电流表$A_1$和$A_3$的示数及电路的有功功率。

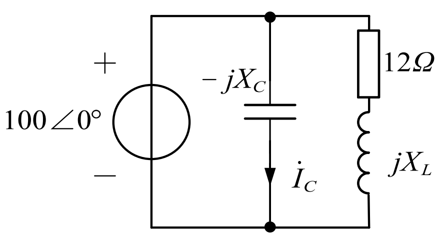


图1

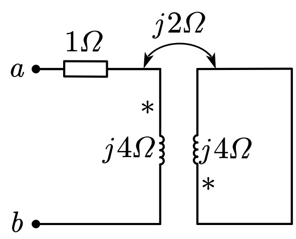


图2

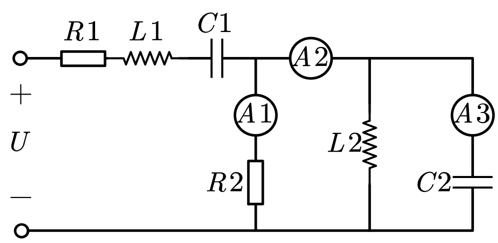


图3

6.4、如图 4 所示正弦稳态电路中，负载Z_L为多大时，其上能获最大功率，该最大功率是多少？

6.5、如图 5 所示正弦稳态电路，$U_s=30\angle0°$ V，$R_L=16\Omega$，求R_L吸收的功率.

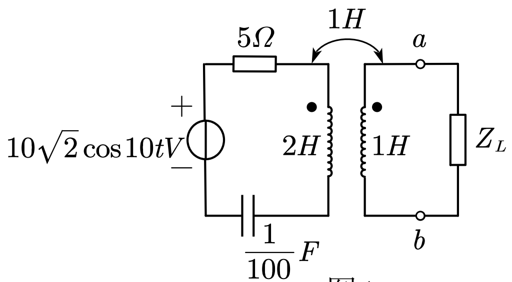


图4

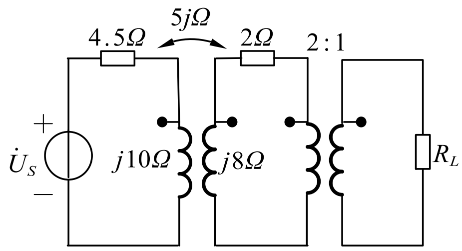


图5

6.6、如图 6 所示正弦稳态电路发生谐振，已知电流表A的示数为$12A$，电流表A_1的示数是$15A$,求电流表A_2的示数。

6.7、如图 7 所示，电压源的有效值$U_S=200V$，负载Z_L为多大时，其上能获最大功率，该最大功率是多少？

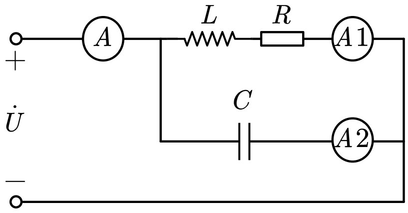


图6

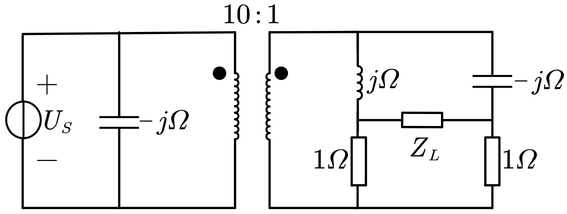


图7

提高篇

6.8、如图 8 所示，已知$\dot{U}_s=10\sqrt{2}\angle 0°$ V 频率可变正弦交流电源，求：

（1）当电源角频率$\omega=20\ rad/s$时，电流的有效值I为多少？

（2）当电源角频率ω为多少时，电流的有效值I为零？

（3）当电源角频率ω为多少时，电流的有效值I最大，并求其最大

6.9、对图 9 所示电路， 已知$\dot{I}_S=10\angle 0° A$，$R_1=X_L=4\Omega$，$R_2=X_C=16\Omega$。若使负载获得最大功率，试求：（1）理想变压器的变比；（2）R_2获得的最大功率。

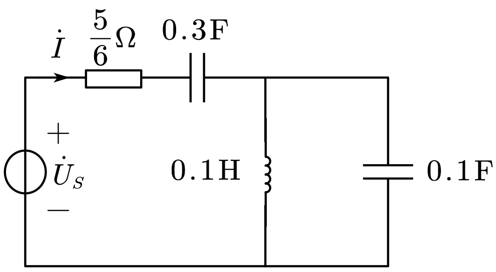


图8

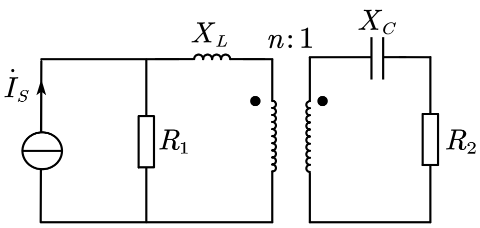


图9

6.10、对图 10 所示电路，已知$u_s=141.4\sin(10^3t+45°)V$， $i_s=0.5656\sin(10^3t-45°)A$，$R_1=2\Omega,R_2=10\Omega,L_1=50mH,L_2=70mH,L_3=100mH,L_4=1H$， $C_1=4\mu F,C_2=3.846\mu F,M_{12}=30mH$，$M_{23}=50mH$，$n=5$，试求：(1)$ab$两端点之间电路的谐振角频率；(2)电流$i(t)$；(3)电压源$u_s(t)$和电流源$i_s(t)$各发出的有功功率和无功功率。

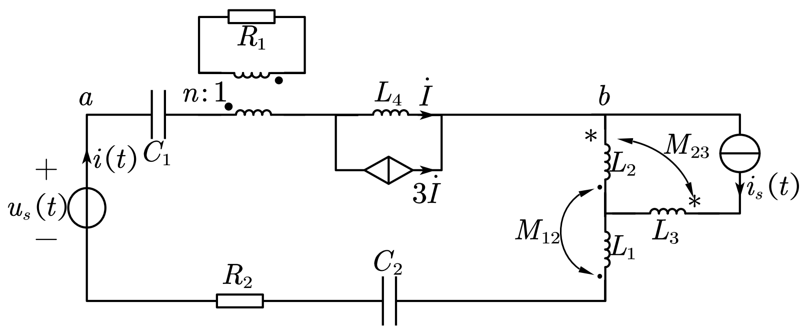


图10