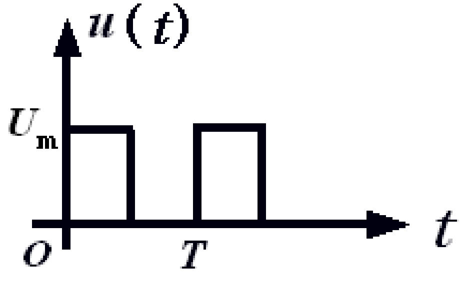
第十三章 非正弦周期信号电路

- 周期信号的傅里叶级数
- 非正弦周期信号的平均值、有效值，平均功率
- 非正弦周期信号电路的计算

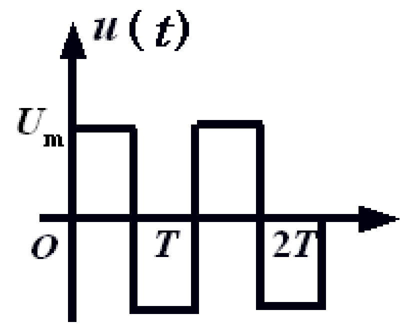
§13-1 非正弦周期信号

概述

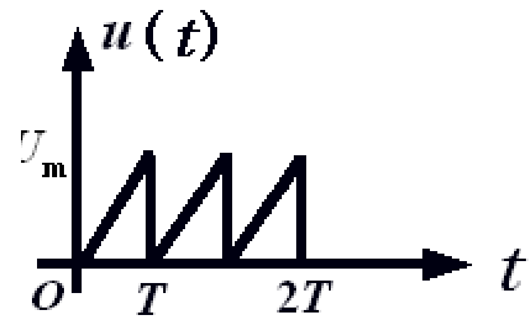
一、各种非正弦周期信号



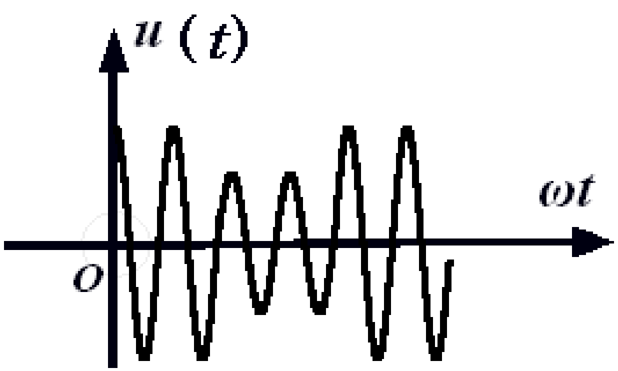
单向周期性脉冲信号



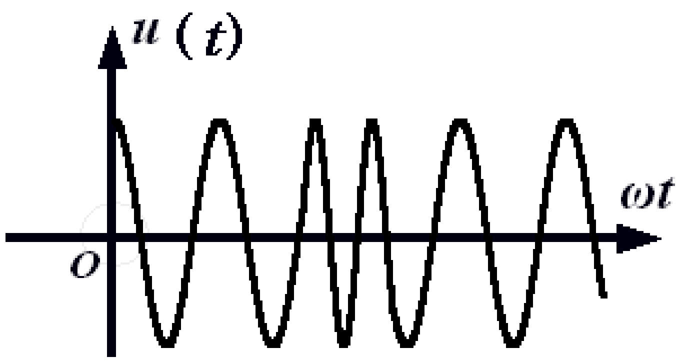
双向周期性脉冲信号



锯齿扫描信号



调幅信号

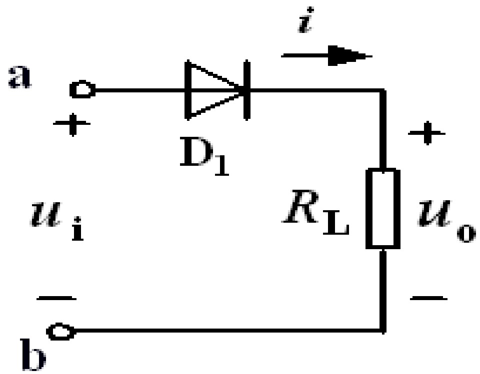


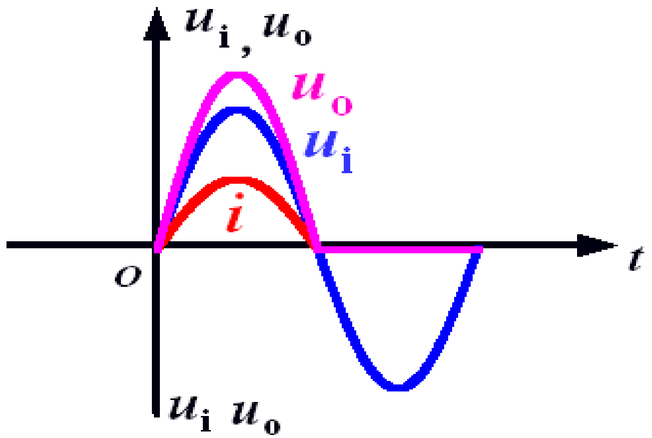
调频信号

§ 13-1 非正弦周期信号

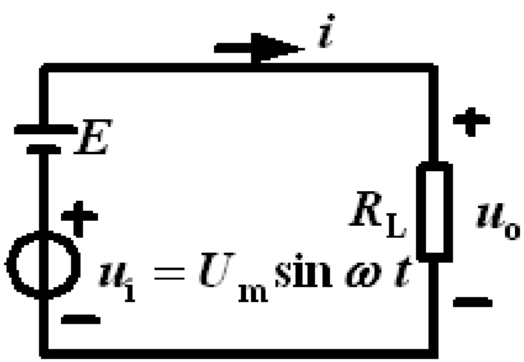
非正弦周期信号产生的原因

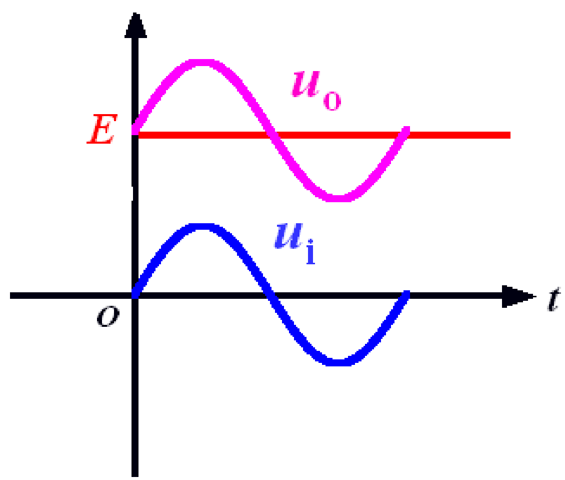
1. 电路中含有非线性元件





2. 电路中含有不同频率的激励源





§ 13-2 非正弦周期信号的傅里叶级数

$$f(t)=f(t+nT)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos k\omega_1 t+b_k\sin k\omega_1 t\right]$$

$$A_{km}=\sqrt{{a_k}^2+{b_k}^2}\qquad \varphi_k=\arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)\qquad \omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_k=A_{km}\cos\varphi_k\qquad b_k=-A_{km}\sin\varphi_k\qquad A_{km}e^{j\phi_k}=a_k-jb_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos k\omega_1 t+b_k\sin k\omega_1 t\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}A_{km}\left[\cos\varphi_k\cos k\omega_1 t-\sin\varphi_k\sin k\omega_1 t\right]$$

$$=\sum_{k=1}A_{km}\cos(k\omega_1 t+\phi_k)$$

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_{km}\cos(k\omega_1 t+\phi_k)$$

§ 13-2 非正弦周期信号的傅里叶级数

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_1 t)dt =$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos k\omega_1 t + b_k\sin k\omega_1 t\right]\right\}\cos(n\omega_1 t)dt$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_1 t)dt =$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos k\omega_1 t + b_k\sin k\omega_1 t\right]\right\}\sin(n\omega_1 t)dt$$

§ 13-2 非正弦周期信号的傅里叶级数

$$f(t)=f(t+nT)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos k\omega_1 t+b_k\sin k\omega_1 t\right]$$

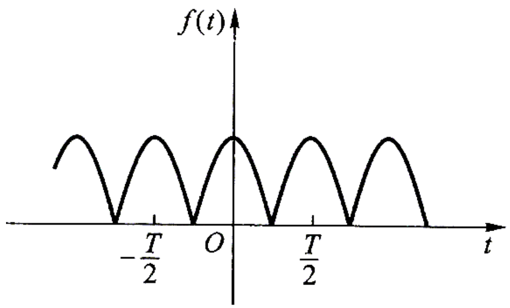
$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

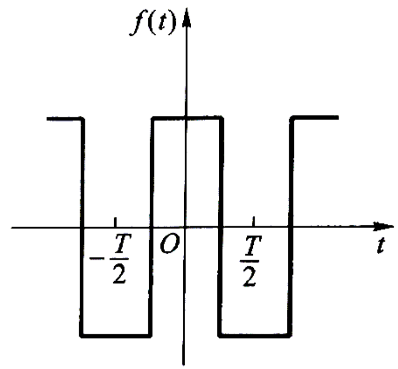
$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega_1 t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

§ 13-2 非正弦周期信号的傅里叶级数

偶函数

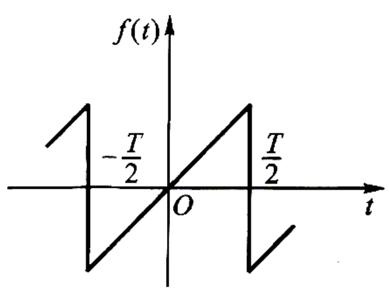
$$f(t) = f(-t) \qquad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos k\omega_1 t\right]$$

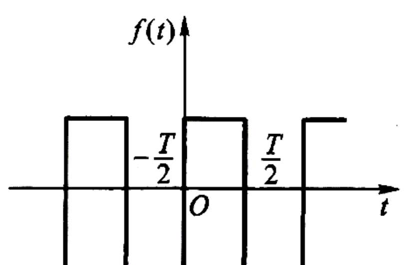




奇函数

$$f(t) = -f(-t) \qquad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[b_k \sin k\omega_1 t\right]$$





§ 13-2 非正弦周期信号的傅里叶级数

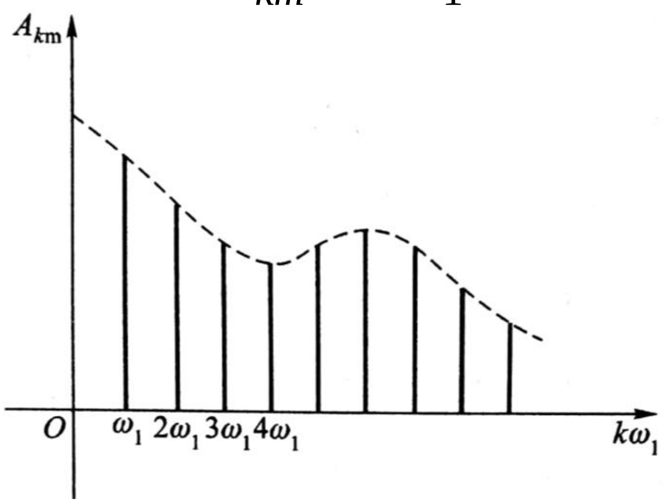
$$f(t)=f(t+nT)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos k\omega_1 t+b_k\sin k\omega_1 t\right]=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_{km}\cos(k\omega_1 t+\phi_k)$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

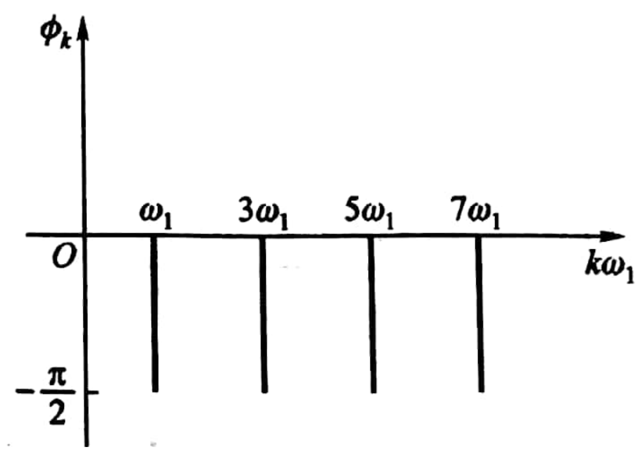
$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega_1 t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

$$A_{km}=\sqrt{a_k{}^2+b_k{}^2}\qquad\qquad \varphi_k=\arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$$

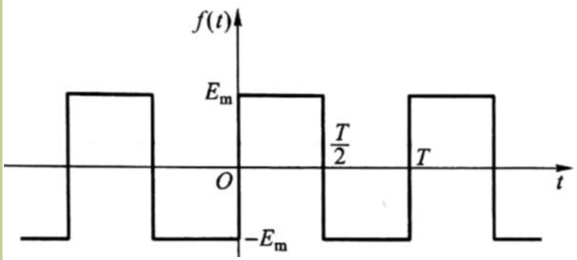
幅度频谱：$A_{km}-k\omega_1$



相位频谱：$\varphi_k-k\omega_1$



例13-1 矩形信号的傅里叶级数展开式及其频谱



$$\begin{cases} f(t) = E_m & 0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{2} \\ f(t) = -E_m & \frac{T}{2} \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

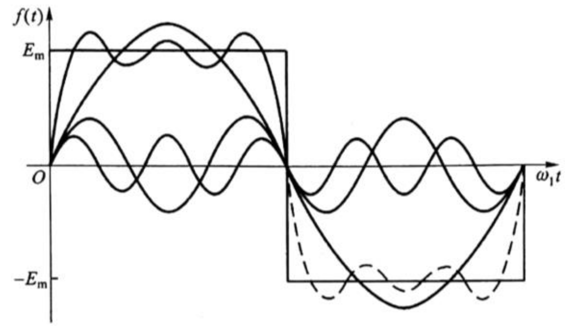
$$A_{km}e^{j\phi_k} = a_k - jb_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega_1 t}dt$$

$$= \frac{E_m}{jk\pi}(1 - e^{-jk\pi})^2$$

$$A_{km} = \frac{4E_m}{k\pi} \quad \phi_k = -90° \quad k\text{为奇数}$$

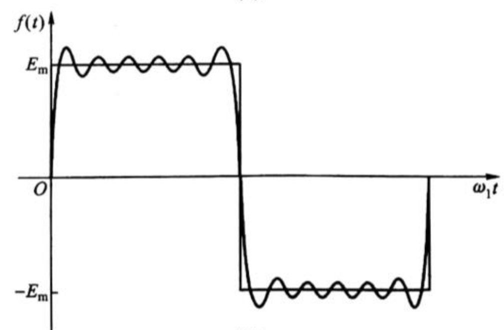
得到傅里叶级数展开式：

$$f(t) = \frac{4E_m}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t) + \cdots\right]$$



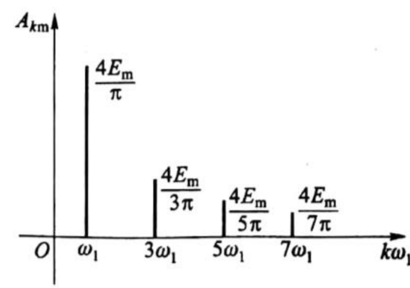
(b)

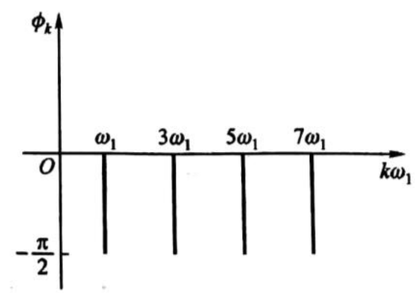
5次谐波



(c)

11次谐波





§13.3 平均值、有效值、平均功率

一、有效值

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\mathrm{d}t}$$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [I_0+\sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)]^2\mathrm{d}t}$$

$$I=\sqrt{I_0{}^2+I_1^2+I_2^2+\cdots}=\sqrt{I_0{}^2+\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$$

$$U=\sqrt{U_0{}^2+U_1^2+U_2^2+\cdots}=\sqrt{U_0{}^2+\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}$$

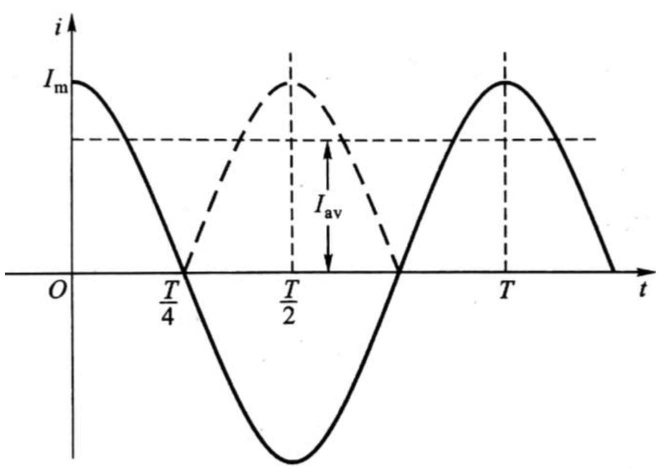
§ 13.3 平均值、有效值、平均功率

二、平均值 $$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$$

$$I_{\text{av}}=\frac{1}{T}\int_0^T|i(t)|\mathrm{d}t$$

$$I_{\text{av}}=\frac{1}{T}\int_0^T|I_{\text{m}}\cos(\omega t)|\mathrm{d}t=\frac{4I_{\text{m}}}{T}\int_0^{T/4}\cos(\omega t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4I_{\text{m}}}{\omega T}\sin(\omega t)\Big|_0^{T/4}=\frac{2I_{\text{m}}}{\pi}=0.637I_{\text{m}}=0.898I$$



§ 13.3 平均值、有效值、平均功率

三、平均功率

$$u(t)=U_0+\sum_{k=1}^{\infty}[U_{km}\sin(k\omega_1 t+\varphi_{ku})]$$

$$i(t)=I_0+\sum_{k=1}^{\infty}[I_{km}\sin(k\omega_1 t+\varphi_{ki})]$$

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T ui\ \mathrm{d}t$$

不同频率的正弦电压与电流乘积的积分为0

$$P=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}P_k=U_0I_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_kI_k\cos(\varphi_{ku}-\varphi_{ki})$$

$$U_k=\frac{U_{km}}{\sqrt{2}},I_k=\frac{I_{km}}{\sqrt{2}}$$

四、视在功率

$$S=UI=\sqrt{U_0{}^2+\sum_{k=1}^{\infty}U_k^2}\sqrt{I_0{}^2+\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2}$$

§ 13.3 平均值、有效值、平均功率

- 注意：

1、不同频率的电压和电流不构成平均功率。

2、对于非正弦周期信号电路：

$$I \neq I_0 + I_1 + I_2 + \ldots\ldots.$$

$$I = \sqrt{I_0{}^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots} = \sqrt{I_0{}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$$

$$U \neq U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots.$$

$$U = \sqrt{U_0{}^2 + U_1^2 + U_2^2 + \cdots} = \sqrt{U_0{}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}$$

$$S \neq U_0 I_0 + U_1 I_1 + U_2 I_2 + \ldots\ldots.$$

$$S = UI = \sqrt{U_0{}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}\sqrt{I_0{}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$$

§13.4 非正弦周期信号电路的谐波分析法

方法：

1. 将非正弦周期信号分解为直流分量和各次谐波分量之和。
2. 分别求直流分量和各次谐波分量单独作用于电路时所产生的分响应。
3. 将各响应的瞬时值进行叠加。

注意：

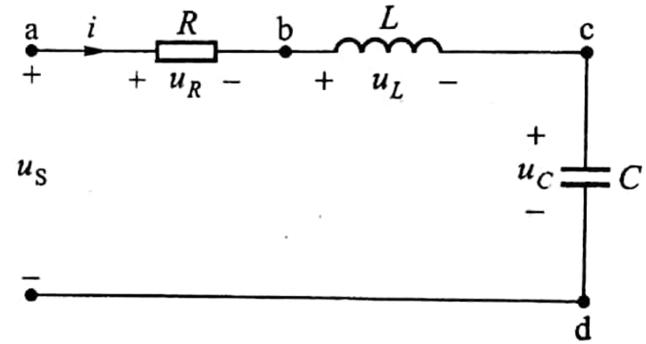
各次谐波的感抗、容抗是相应角频率的函数。

$$X_L = k\omega_1 L \qquad X_C = \frac{1}{k\omega_1 C}$$

例13-2 求RLC串联电路中电流和电阻吸收的平均功率

$R=3\Omega,\ \frac{1}{\omega_1 C}=21\ \Omega,\ \omega_1 L=0.429\ \Omega,$

$u_S=[280.11\cos(\omega_1 t)+93.37\cos(3\omega_1 t)+56.02\cos(5\omega_1 t)+40.03\cos(7\omega_1 t)+31.12\cos(9\omega_1 t)+\cdots]\ \text{V}$



①

$$\dot{I}_{m(k)}=\frac{\dot{U}_{sm(k)}}{Z(k\omega_1)}=\frac{\dot{U}_{sm(k)}}{R+jk\omega_1 L-j\frac{1}{k\omega_1 C}}$$

$$Z(k\omega_1)=3+j\left(0.429k-\frac{21}{k}\right)=3\left[1+j\left(0.143k-\frac{7}{k}\right)\right]$$

$$\begin{cases}\varphi_{(k)}=\arctan\left(0.143k-\frac{7}{k}\right) & \text{(阻抗角)}\\ \dot{I}_{m(k)}=\frac{1}{3}\cos\varphi_{(k)}\,\dot{U}_{sm(k)}\underline{/-\varphi_{(k)}} \\ P_{(k)}=\frac{1}{2}I^2_{m(k)}\cdot R=1.5I^2_{m(k)}\end{cases}$$

②

$k=1$ $\quad \varphi_{(1)}=-81.70°$(容性)

$\dot{I}_{m(1)}=13.47\underline{/81.70°}\text{A}$

$P_{(1)}=272.33\ \text{W}$

$k=3$ $\quad \varphi_{(3)}=-62.30°$(容性)

$\dot{I}_{m(3)}=14.47\underline{/62.30°}\text{A}$

$P_{(3)}=314.06\ \text{W}$

$k=5$ $\quad \varphi_{(5)}=-34.41°$(容性)

$\dot{I}_{m(5)}=15.41\underline{/34.41°}\text{A}$

$P_{(5)}=356.00\ \text{W}$

$k=7$ $\quad \varphi_{(7)}=0°$(谐振)

$\dot{I}_{m(7)}=13.34\underline{/0°}\text{A}$

$P_{(7)}=267.07\ \text{W}$

$k=9$ $\quad \varphi_9=26.99°$(感性)

$\dot{I}_{m(9)}=9.24\underline{/-26.99°}\text{A}$

$P_{(9)}=128.17\ \text{W}$

③

$i=13.47\cos(\omega_1 t+81.70°)+14.47\cos(3\omega_1 t+62.30°)+15.41\cos(5\omega_1 t+34.41°)+\cdots$

$$P=P_{(1)}+P_{(3)}+P_{(5)}+\cdots+P_{(9)}=1\ 337.63\text{W}$$

作业

P341

13-4