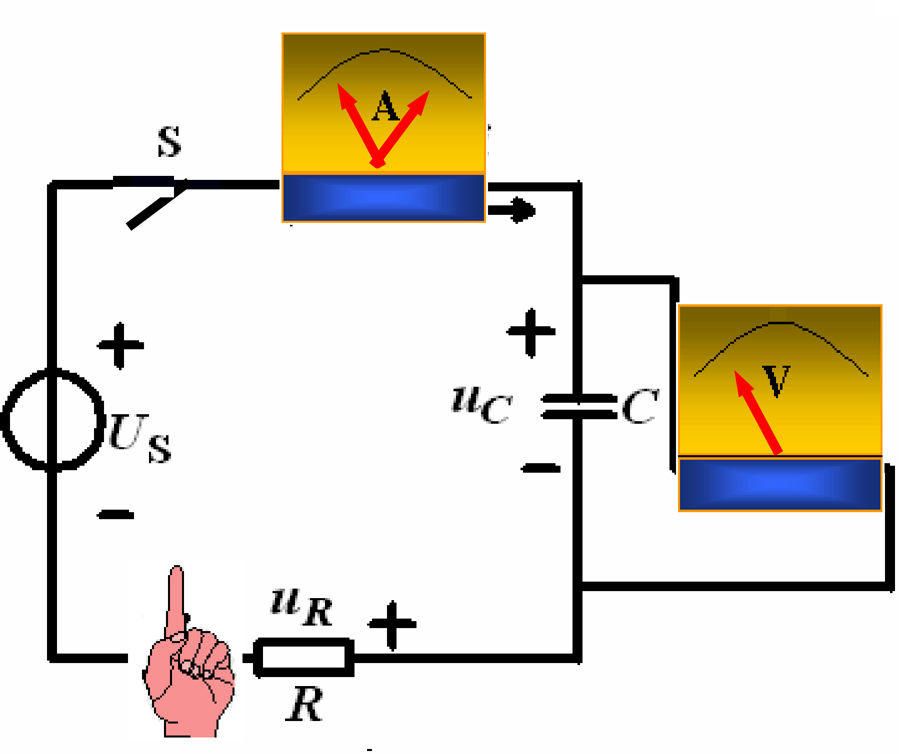
第七章　一阶电路的时域分析

- 动态电路的方程及其初始条件
- 一阶电路的零输入响应
- 一阶电路的零状态响应
- 一阶电路的全响应
- 一阶电路的阶跃响应
- 一阶电路的冲激响应

§ 7.1 动态电路的方程及其初始条件

- 动态电路:含有动态元件的电路.
- 一阶电路: 电路中仅**含有一个或等效为一个**动态元件的电路, 所建立的电路方程为一阶线性常微分方程.
- 二阶电路: 电路中**含有二个或等效为二个**动态元件的电路, 所建立的电路方程为二阶线性常微分方程.

§7.1 动态电路的方程及其初始条件



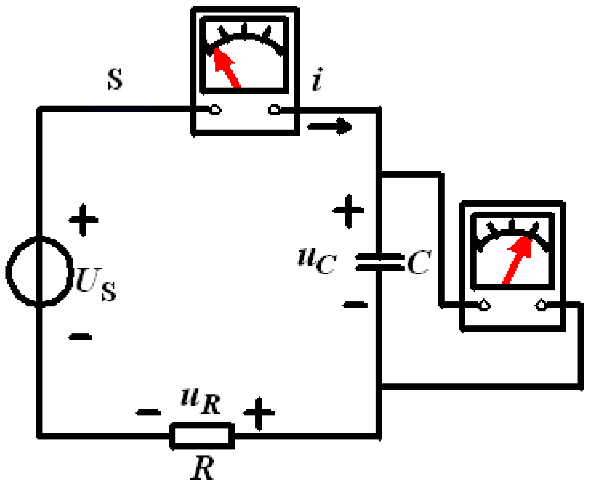
换路：电路的接通、切断，
电路接线的改变，
电路参数及电源
的突然变化等。

换路时刻记为t=0,
换路前的最终时刻t=0_-,
换路后的最初时刻t=0_+.

稳定工作状态——电路中各部分电压、电流与电源具有稳定的状态。

瞬态过程——电路由一个稳定状态到另一个稳定状态的过程。

§ 7.1 动态电路的方程及其初始条件



$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} i_c(\xi)d\xi$$

$$u_c(t) = u_c(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_c(\xi)d\xi$$

令$t_0=0_-$, $t=0_+$,

$$q(0_+) = q(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_c dt$$

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_c dt$$

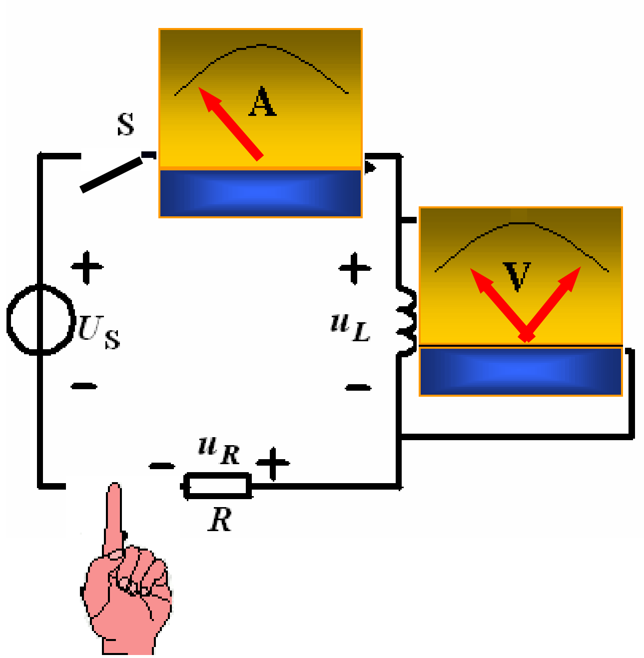
如果$i_c(t)$为有限值， $q(0_+) = q(0_-)$

$$u_c(0_+) = u_c(0_-)$$

§ 7.1 动态电路的方程及其初始条件

$$\psi(t)=\psi(t_0)+\int_{t_0}^{t}u_L(\xi)d\xi$$

$$i_L(t)=i_L(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u_L(\xi)d\xi$$



令$t_0=0_-$, $t=0_+$,

$$\psi(0_+)=\psi(0_-)+\int_{0_-}^{0_+}u_L dt$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+}u_L dt$$

如果$u_L(t)$为有限值， $\psi(0_+)=\psi(0_-)$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)$$

§ 7.1 动态电路的方程及其初始条件

$u_C(0_+)=u_C(0_-)$ **换路定理** $i_L(0_+)=i_L(0_-)$

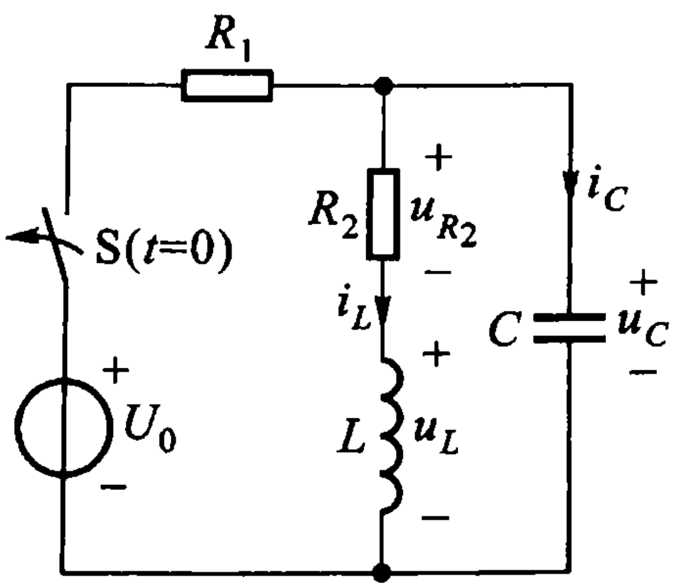
换路的瞬间,电容可视为电压值$u_C(0_)$的电压源。

换路的瞬间,电感可视为电流值$i_L(0_)$的电流源。

电容电压初始值$u_C(0_+)$、电感电流初始值$i_L(0_+)$为电路的独立初始条件, 只与换路前的最终值有关,与换路后的电路结构及参数无关。

§ 7.1 动态电路的方程及其初始条件

例 7－1 图 7－1(a)所示电路中直流电压源的电压为 U_0。当电路中的电压和电流恒定不变时打开开关 S。试求 $u_C(0_+)$、$i_L(0_+)$、$i_C(0_+)$、$u_L(0_+)$和 $u_{R_2}(0_+)$。



(a)

开关打开前，电路中电压和电流恒定不变

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 0, \left(\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 0$$

电容电流为 $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ =0

电感电压为 $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ =0

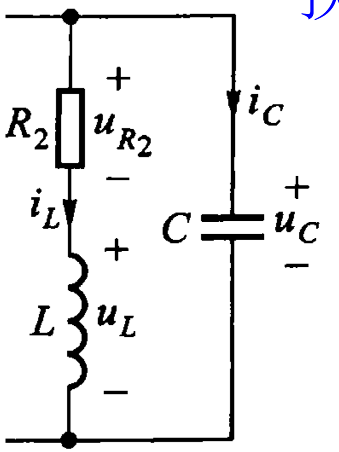
即电容相当于开路，电感相当于短路

$$u_C(0_-) = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_L(0_-) = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

§ 7.1 动态电路的方程及其初始条件

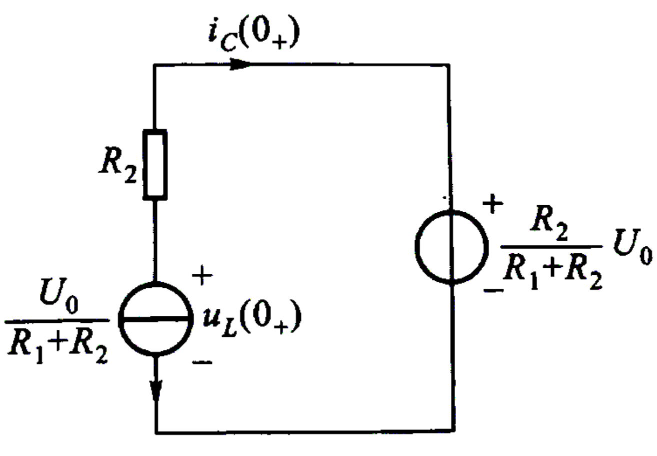
- 例7-1



换路时，电容电压和电感电流都不会跃变

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$
$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

开关打开，把电容用电压源替代，电感用电流源替代，等效电路如图(b)



(b)

$$i_C(0_+) = \frac{-U_0}{R_1+R_2} = -i_L(0_+)$$

$$u_{R_2}(0_+) = R_2 i_L(0_+) = \frac{U_0 R_2}{R_1+R_2}$$

$$u_L(0_+) = 0$$

§7.2 一阶电路的零输入响应

- **一阶电路**

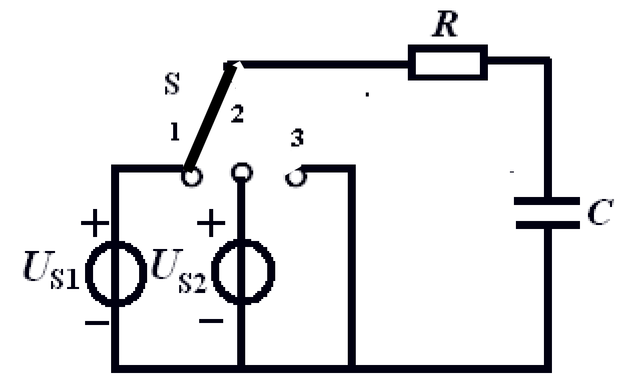
  含有一个或等效为一个储能元件的线性电路。

- **零输入响应**

  无外施激励电源,由储能元件的原始储能引起的电路中电压电流的变化。

§7.2 一阶电路的零输入响应

一、*RC*串联电路



（1）确定初始值

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0=U_{S1}$$

（2）列t≥0时的微分方程

KVL： $i_C R+u_C=0$ $\quad i_C=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 \qquad u_C=A\mathrm{e}^{pt}$$

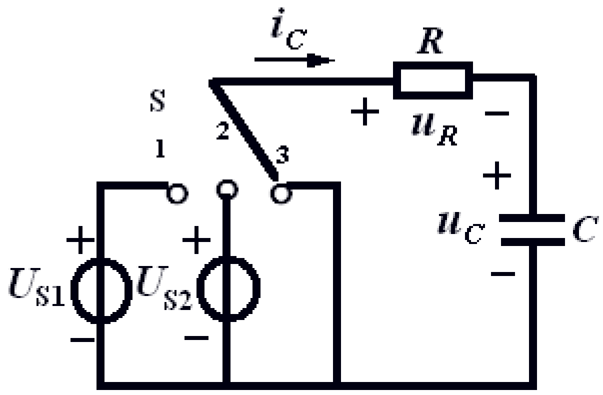
（3）由初始值确定积分常数 $\quad A=U_{S1}$

（4）求方程的通解 $\quad p=-\dfrac{1}{RC}$

$$u_C=U_{S1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=U_{S1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \boxed{\tau=RC}$$

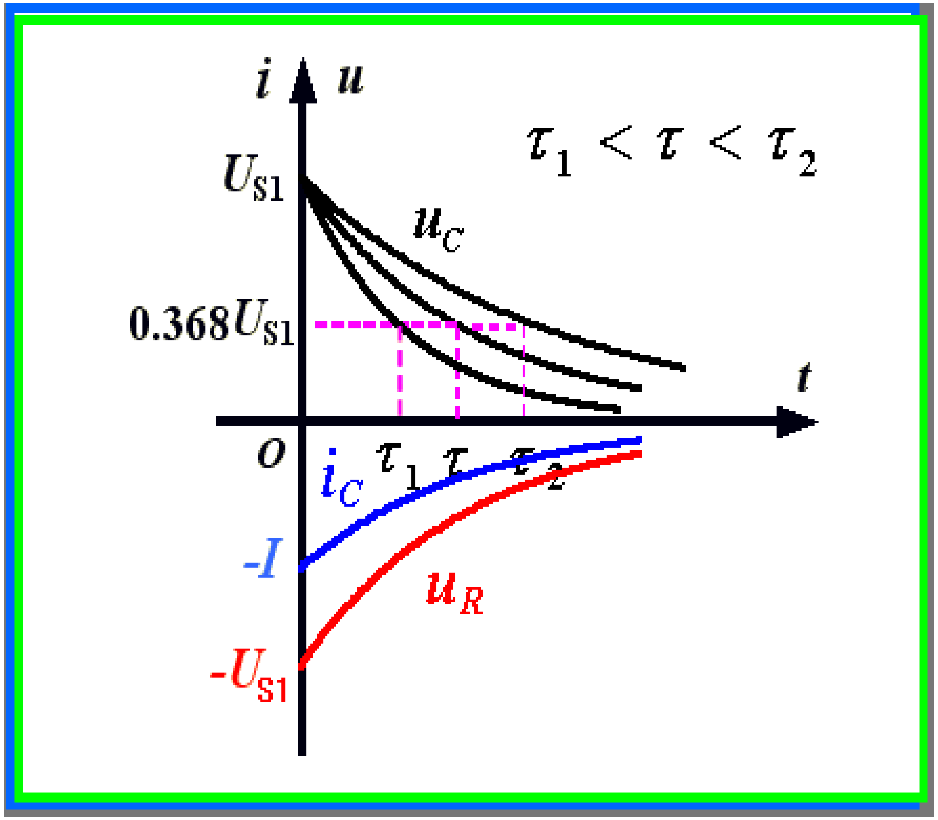
时间常数

§7.2 一阶电路的零输入响应



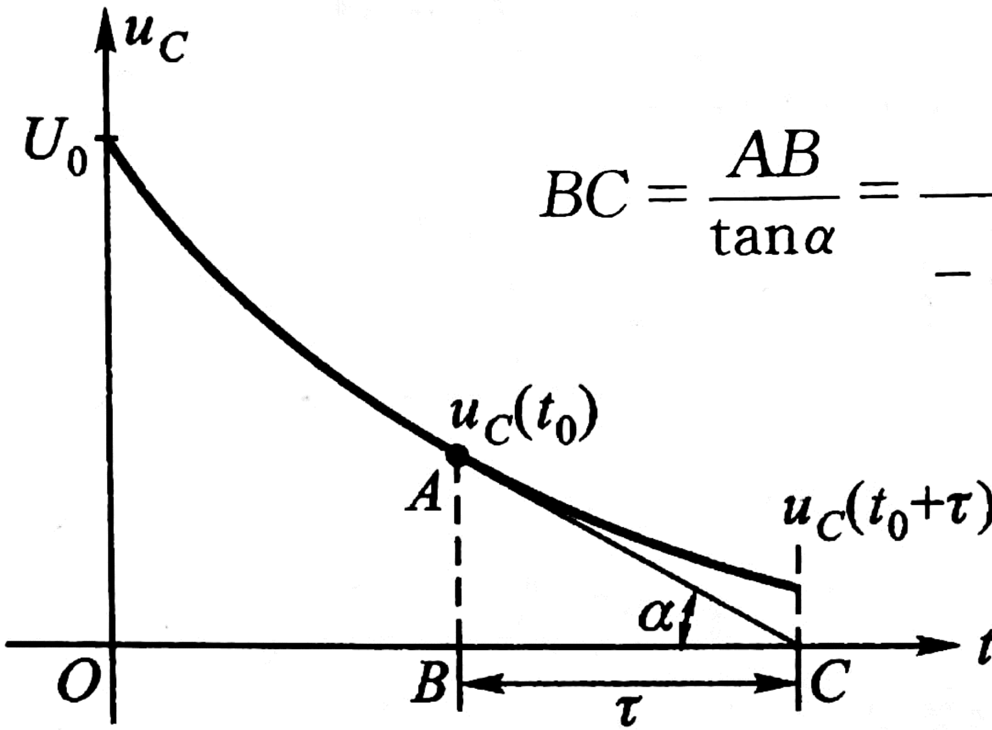
$$i_c = -\frac{U_{s1}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = -Ie^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R = -U_{s1}e^{-\frac{t}{\tau}}$$



§7.2 一阶电路的零输入响应

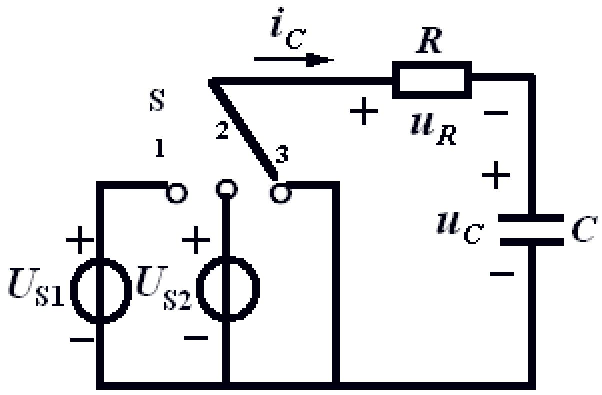
- 时间常数τ的几何意义：



$$BC=\frac{AB}{\tan\alpha}=\frac{u_C(t)}{-\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}}=\frac{U_0\mathrm{e}^{-\frac{t_0}{\tau}}}{\frac{1}{\tau}U_0\mathrm{e}^{-\frac{t_0}{\tau}}}=\tau$$

曲线上任意一点，如果以该点的斜率为固定变换率衰减，经过τ时间后为零。

§7.2 一阶电路的零输入响应



开关切换到3后，电容不断放出能量，而且放出的能量全部被电阻所消耗。电阻消耗的能量：

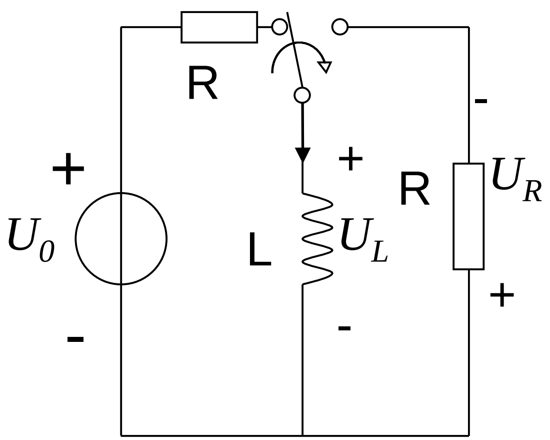
$$W_R = \int_0^{\infty} i^2(t) R\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \left(\frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \right)^2 R\mathrm{d}t = \frac{U_0^{\ 2}}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} C U_0^{\ 2} \left(e^{-\frac{2}{RC}t} \right) \Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{2} C U_0^{\ 2}$$

上一章我们知道，开关在位置1时，电容吸收的能量：

$$W_C = \frac{1}{2} C U_0^{\ 2}$$

§7.2 一阶电路的零输入响应

*RL*串联电路



1)确定初始值 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_{L0} = \dfrac{U_0}{R}$

2)列t≥0时的微分方程

KVL：
$$u_L + i_L R = 0 \qquad u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L R = 0 \qquad i_L = A\mathrm{e}^{pt}$$

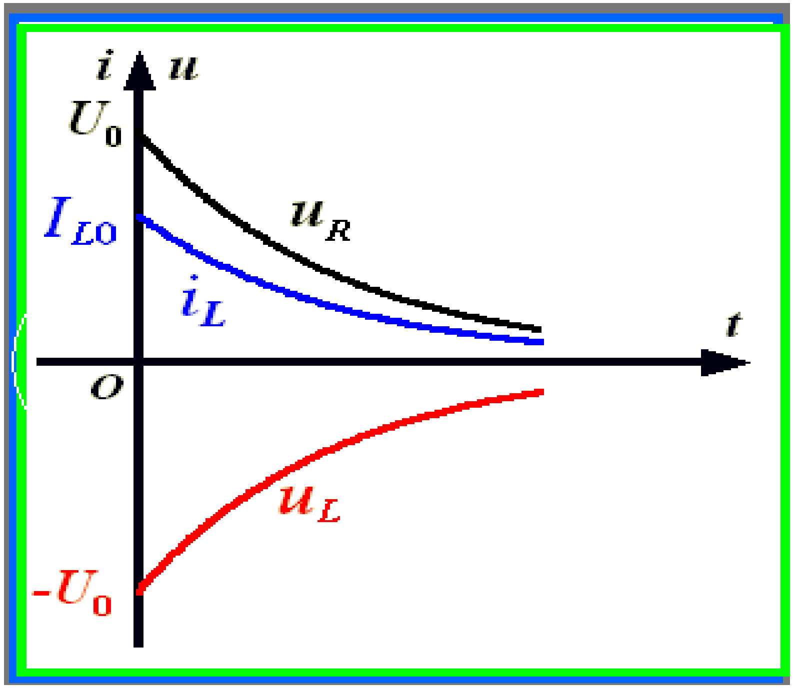
3)求方程的通解

$$i_L = I_{L0}\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{L}} = I_{L0}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

§7.2 一阶电路的零输入响应

2.求u_L、u_R

$$u_R = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad u_L = -RI_{L0} e^{-\frac{t}{\tau}} = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



§7.2 一阶电路的零输入响应

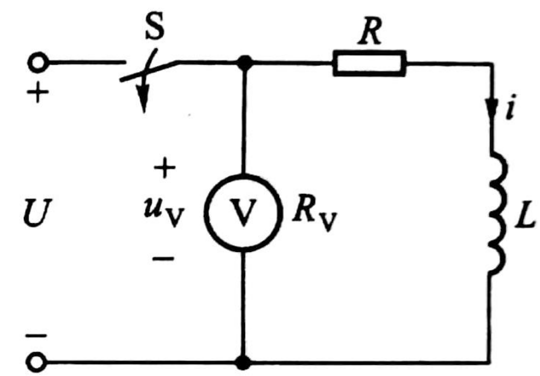
例 7－2 图 7－7 所示是一台 300 kW 汽轮发电机的励磁回路。已知励磁绕组的电阻 $R=0.189\ \Omega$，电感 $L=0.398\ \text{H}$，直流电压 $U=35\ \text{V}$。电压表的量程为 50 V，内阻 $R_V=5\ \text{k}\Omega$。开关未断开时，电路中电流已经恒定不变。在 $t=0$ 时，断开开关。求：

(1) 电阻、电感回路的时间常数；

(2) 电流 i 的初始值和开关断开后电流 i 的最终值；

(3) 电流 i 和电压表处的电压 u_V；

(4) 开关刚断开时，电压表处的电压。

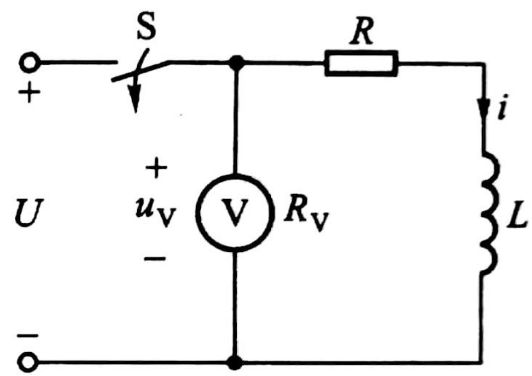


§7.2 一阶电路的零输入响应

解　(1) 时间常数为

$$\tau=\frac{L}{R+R_V}=\frac{0.398}{0.189+5\times10^3}\ \mathrm{s}=79.6\ \mu\mathrm{s}$$

(2) 开关断开前，由于电流已恒定不变，电感 L 两端电压为零，故



$$i(0_-)=\frac{U}{R}=\frac{35}{0.189}\ \mathrm{A}=185.2\ \mathrm{A}$$

(3) 按 $i=i(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$，可得

$$i=185.2\ e^{-12\,560t}\ \mathrm{A}$$

电压表处的电压为

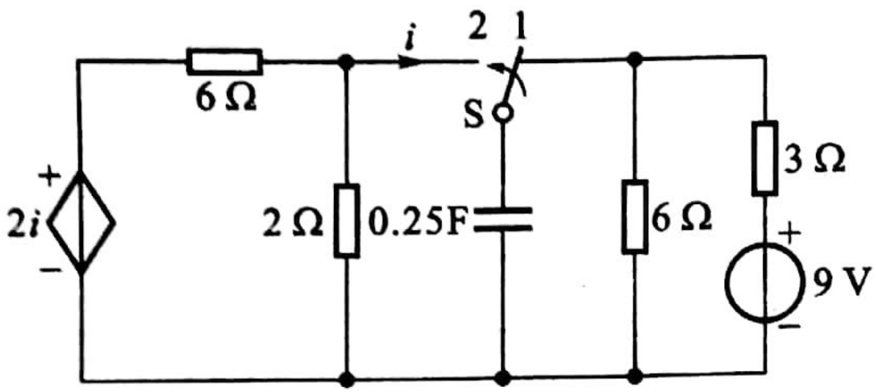
$$u_V=-R_V i=-5\times10^3\times185.2e^{-12\,560t}\ \mathrm{V}=-926e^{-12\,560t}\ \mathrm{kV}$$

(4) 开关刚断开时，电压表处的电压为

$$u_V(0_+)=-926\ \mathrm{kV}$$

§7.2 一阶电路的零输入响应

例 7－3 图 7－8(a)所示电路，开关 S 合在位置 1 时电路已达稳态，$t=0$ 时开关由位置 1 合向位置 2，试求 $t \geq 0_+$ 时的电流 $i(t)$。

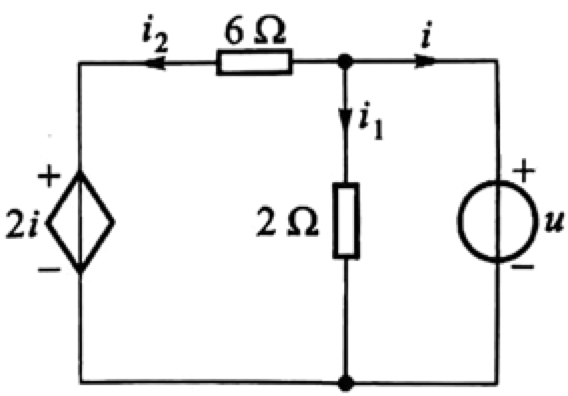


解法一：

开关在位置1时电路已达稳态，

$$u_C(0_-)=6\ \text{V}$$

则 $u_C(0_+)=6\ \text{V}$



求受控源与6Ω、2Ω电阻组成的电路的等效电阻。

外加电源u，用u与i的关系求等效电阻：

$$u=6i_2+2i$$

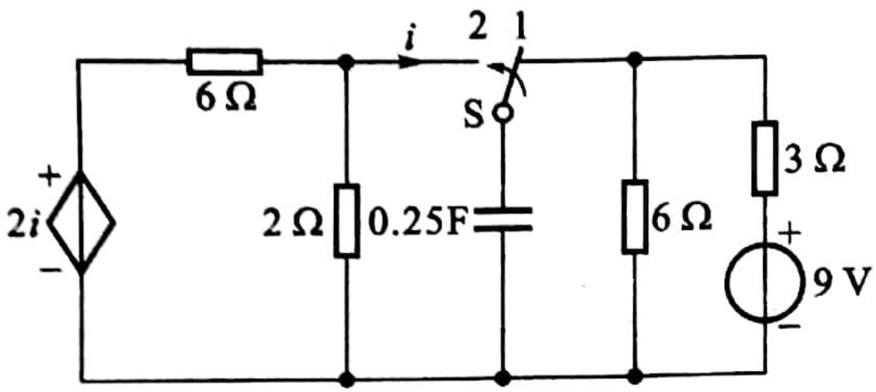
$$i_2=-(i_1+i)=-\left(\frac{u}{2}+i\right)$$

得

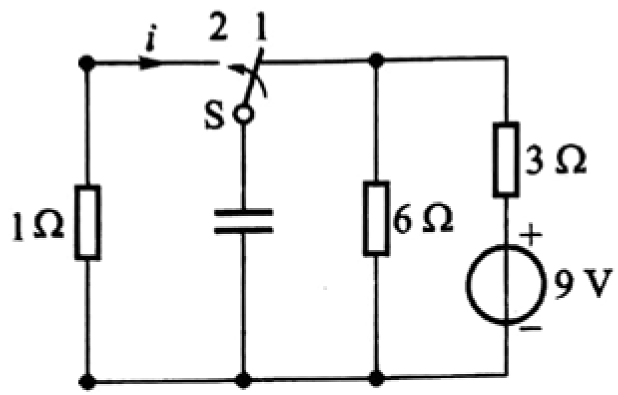
$$R_{eq}=-\frac{u}{i}=1\ \Omega$$

§7.2 一阶电路的零输入响应

例 7－3 图 7－8(a)所示电路，开关 S 合在位置 1 时电路已达稳态，$t=0$ 时开关由位置 1 合向位置 2，试求 $t\geqslant 0_+$ 时的电流 $i(t)$。



求RC电路零输入响应：



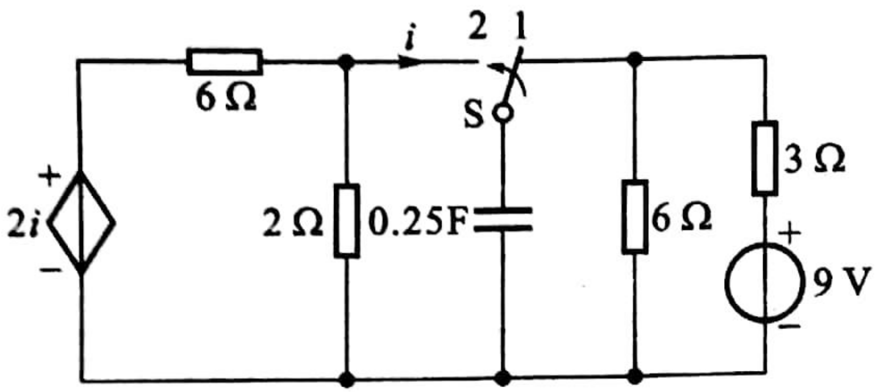
$$\tau = R_{eq}C = 1\times 0.25\ \mathrm{s} = 0.25\ \mathrm{s}$$

$$u_C = u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 6\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{V}$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0.25\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(6\mathrm{e}^{-4t})\ \mathrm{A} = -6\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{A}$$

§7.2 一阶电路的零输入响应

例 7－3 图 7－8(a)所示电路，开关 S 合在位置 1 时电路已达稳态，$t=0$ 时开关由位置 1 合向位置 2，试求 $t\geqslant 0_+$ 时的电流 $i(t)$。



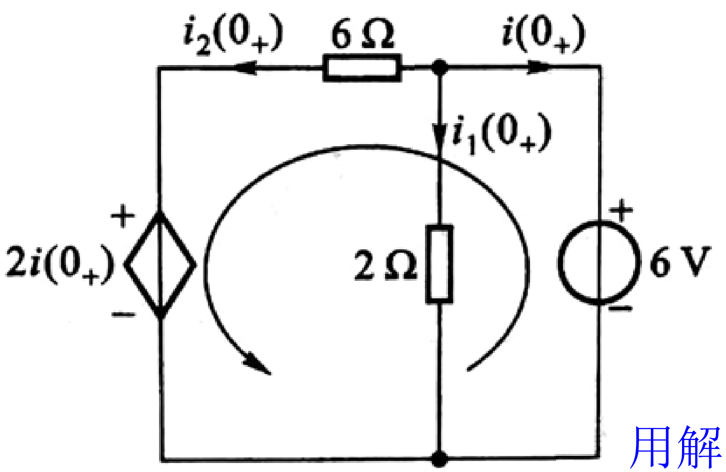
解法二：

开关在位置1时电路已达稳态，

$$u_C(0_-)=6\ \mathrm{V}$$

则 $u_C(0_+)=6\ \mathrm{V}$

画出 $t=0_+$时的等效电路，



$$i_1(0_+)=\frac{6}{2}\ \mathrm{A}=3\ \mathrm{A}$$

$$i_2(0_+)=-[i(0_+)+3]$$

$$6i_2(0_+)+2i(0_+)-u_C(0_+)=0$$

即 $-6\times[i(0_+)+3]+2(0_+)-6=0$

得 $i(0_+)=-6\ \mathrm{A}$

用解法一的方法求电容以外电路的等效电阻和时间常数τ，最后得到：$i(t)=i(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=-6\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{A}$

§7.3 一阶电路的零状态响应

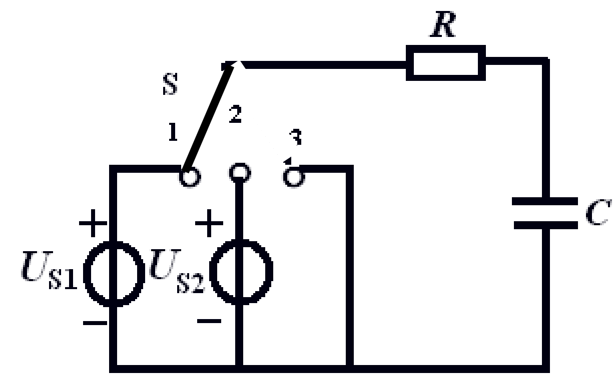
- **零状态响应**

  换路前储能元件初始储能为零，在外接电源的激励下，电路中各电流、电压产生的响应。

§7.3 一阶电路的零状态响应

1. 求换路后电容电压$U_C(t)$

RC串联电路



1)确定初始值

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

2)列t≥0时的微分方程

KVL: $i_C R + u_C = U_{S1}$ $\quad i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U_{S1} \qquad u_C = u_C' + u_C''$$

$$= B + A\mathrm{e}^{pt}$$

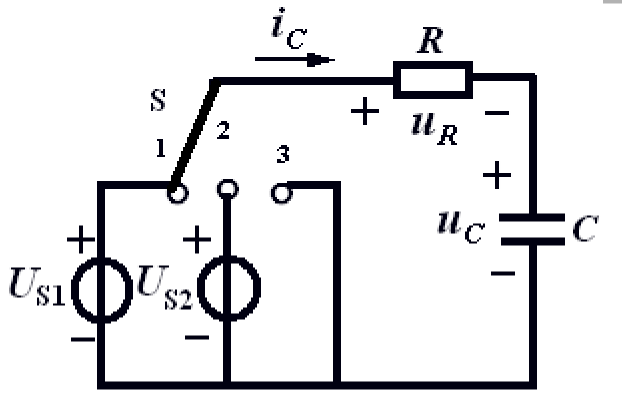
特解 通解

4)求特解 $\boldsymbol{B} = U_{S1}$

3)求通解 $A = -U_{S1};\ \tau = RC$

5)方程的解 $u_C = U_{S1} - U_{S1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

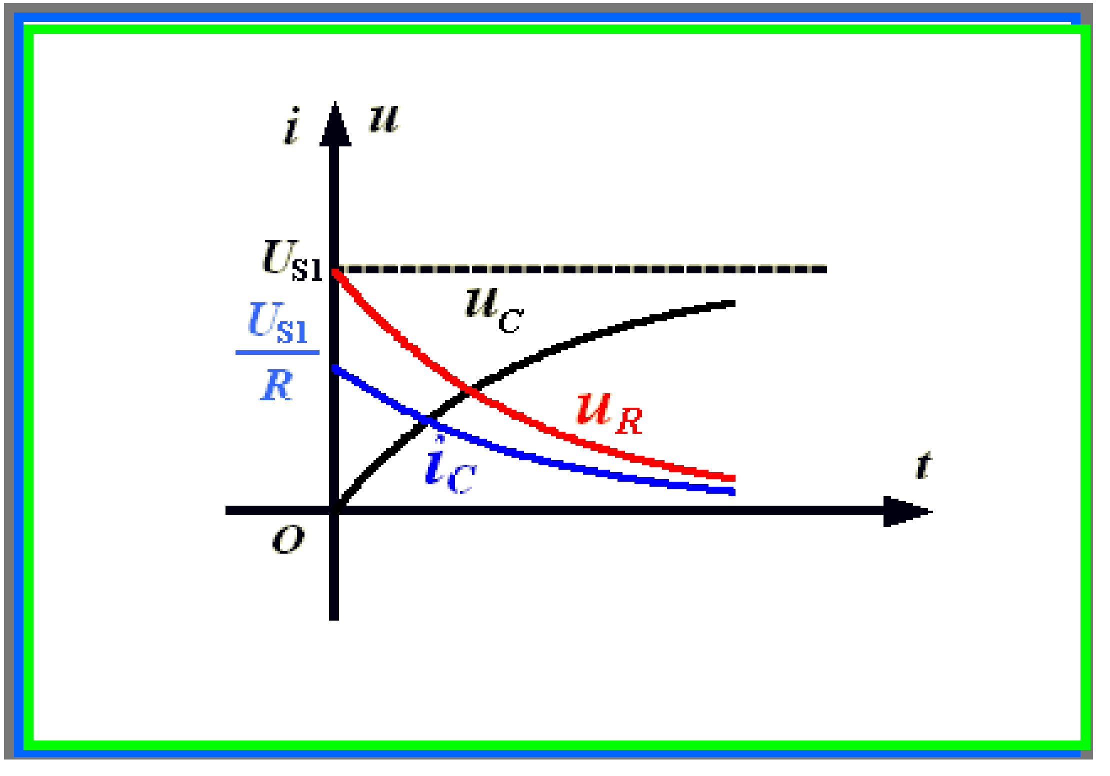
§7.3 一阶电路的零状态响应



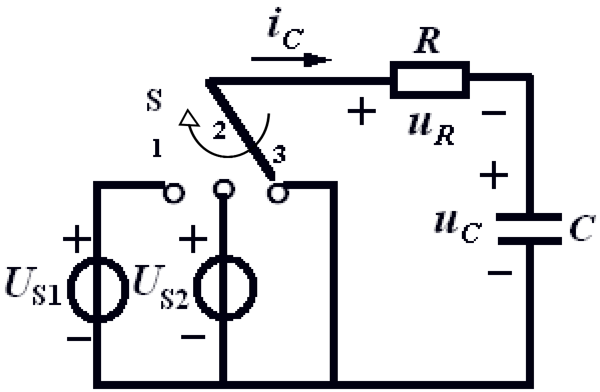
6）求 u_R、i_C

$$i_C = \frac{U_{S1}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R = U_{S1} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



§7.3 一阶电路的零状态响应



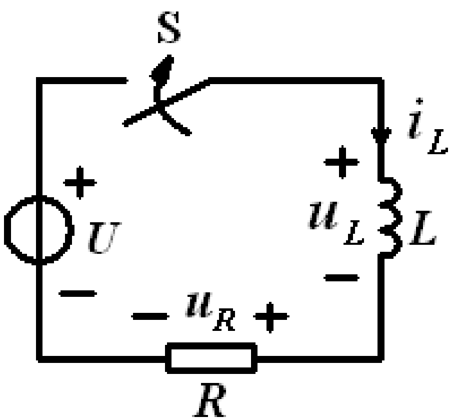
开关切换到1后，电源通过电阻对电容充电，充电过程中，电阻消耗的能量：

$$W_R=\int_0^{\infty} i^2 R dt=\int_0^{\infty}\left(\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 R dt$$

$$=\frac{U_S{}^2}{R}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt=\frac{U_S{}^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\right)e^{-\frac{2t}{\tau}}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2}CU_S{}^2$$

§7.3 一阶电路的零状态响应



RL串联电路

1. 求换路后电感电流$i_L(t)$

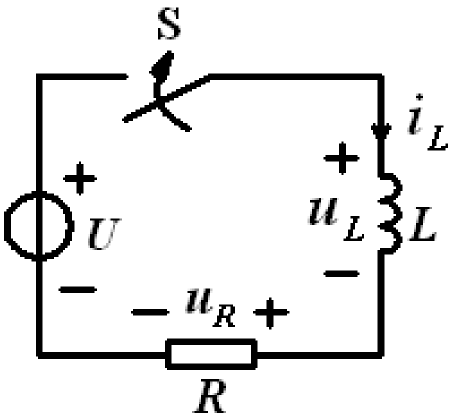
1)确定初始值 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$

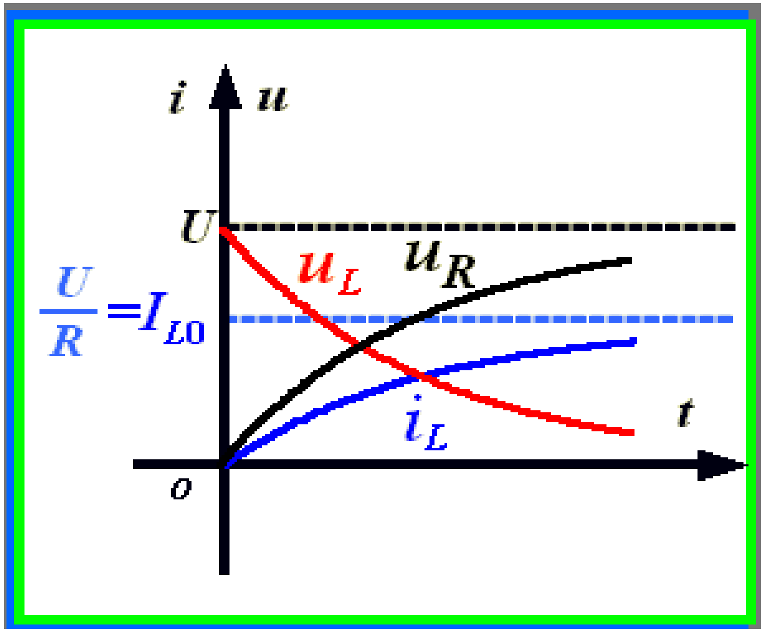
2)列t≥0时的微分方程 KVL: $i_L R + u_L = U$ $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L R = U \qquad i_L = A\mathrm{e}^{pt} + B$$

3)求方程的解 $i_L = \dfrac{U}{R}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$ $\tau = \dfrac{L}{R}$

§7.3 一阶电路的零状态响应

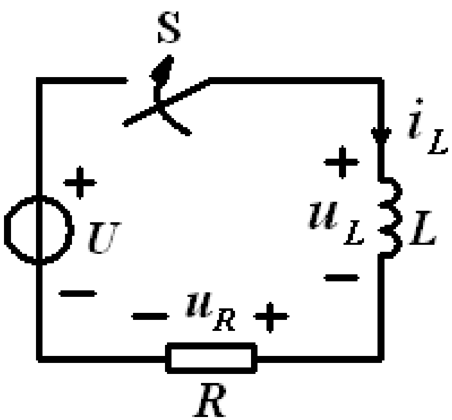




4)求u_L、u_R

$$u_L = U\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad u_R = U(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$

§7.3 一阶电路的零状态响应



在外施激励为正弦电压时，

$$u = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$$

ϕ_u 为开关接通时刻电压的相角，
又称为接入相位角。

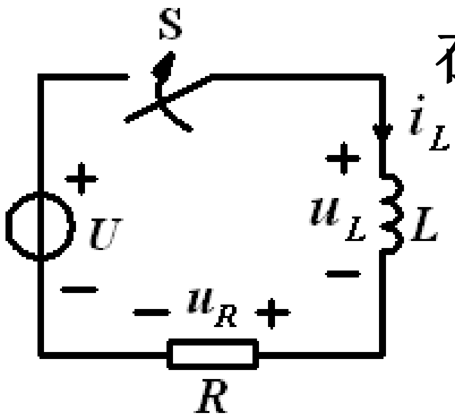
t≥0时的微分方程 $L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L R = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$

$$i_L = Ae^{pt} + B \qquad |Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \qquad tan\varphi = \frac{\omega L}{R}$$

特解 $B = \dfrac{U_m}{|Z|}\cos(\omega t + \phi_u - \varphi)$ 通解 $-\dfrac{U_m}{|Z|}\cos(\phi_u - \varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$i_L = \frac{U_m}{|Z|}\cos(\omega t + \phi_u - \varphi) - \frac{U_m}{|Z|}\cos(\phi_u - \varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

§7.3 一阶电路的零状态响应



$\left(\tan\varphi=\dfrac{\omega L}{R}\right)$

在外施激励为正弦电压 $u=U_m\cos(\omega t+\phi_u)$ 时，

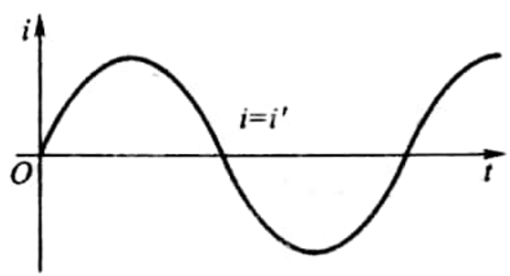
$$i_L=\frac{U_m}{|Z|}\cos(\omega t+\phi_u-\varphi)-\frac{U_m}{|Z|}\cos(\phi_u-\varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R=Ri=\frac{RU_m}{|Z|}\cos(\omega t+\phi_u-\varphi)-\frac{RU_m}{|Z|}\cos(\phi_u-\varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i=U_\mathrm{m}\frac{\omega L}{|Z|}\cos(\omega t+\phi_u-\varphi+\frac{\pi}{2})+U_\mathrm{m}\frac{R}{|Z|}\cos(\phi_u-\varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

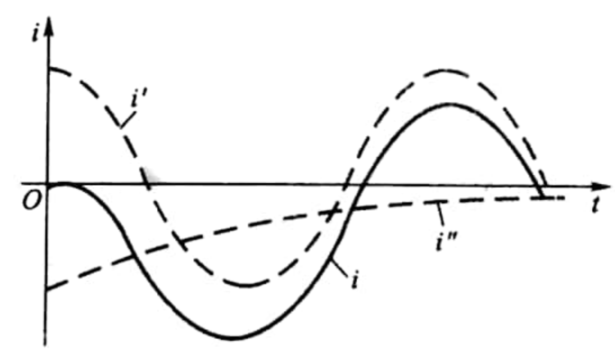
- 方程的特解或强制分量与外施正弦激励按同频率的正弦规律变化；
- 自由分量随时间增长趋于零。

开关闭合时，若 $\phi_u=\varphi-\dfrac{\pi}{2}$



立即进入稳定状态

开关闭合时，若 $\phi_u=\varphi$

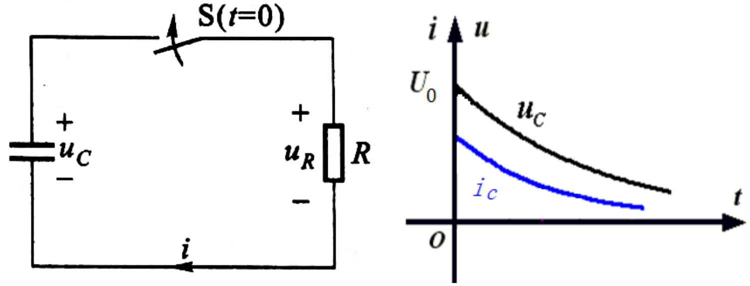


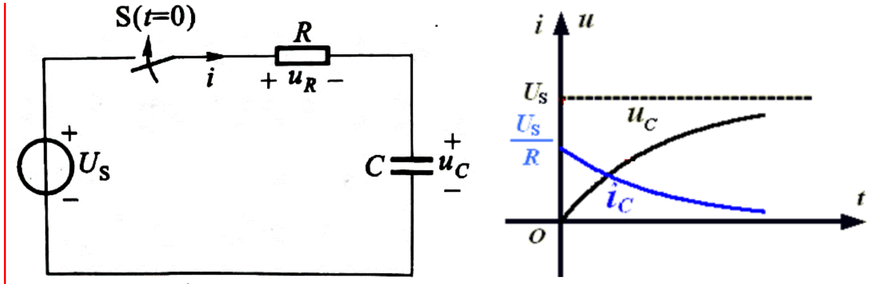
经历过渡过程，然后达到稳定状态

小结：一阶电路的零输入响应和零状态响应

零输入响应　　　　零状态响应

RC



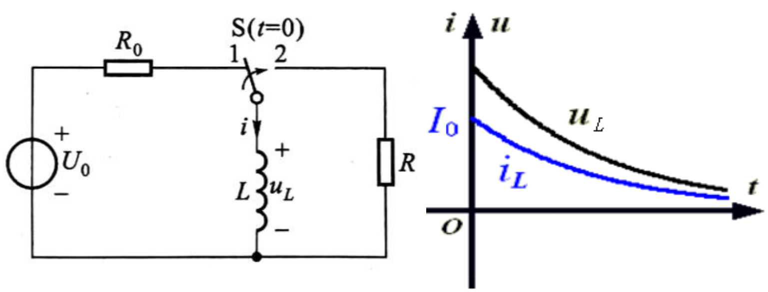


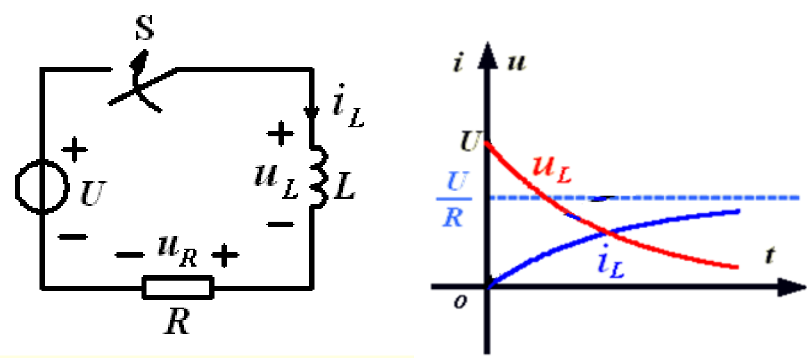
$\tau = RC$

$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$　　$i_C = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

$u_C = U_S\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$　　$i = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

RL





$\tau = \frac{L}{R}$

$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{R_0} e^{-\frac{t}{\tau}}$　　$u_L = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

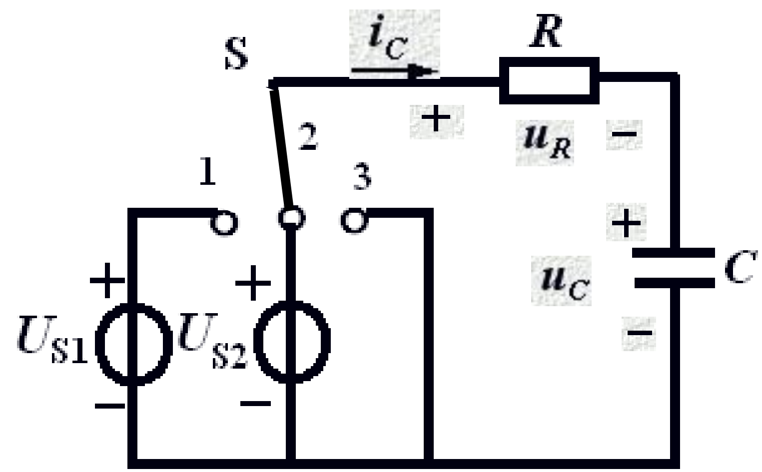
$i_L = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$　　$u_L = Ue^{-\frac{t}{\tau}}$

§7.4 一阶电路的全响应

- **全响应**

  外加电源激励和储能元件的初始储能共同作用下，电路中的各电压和电流产生的响应。

§ 7.4 一阶电路的全响应



1）确定初始值

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_{S1}$$

2）列 *t*≥0时的微分方程：

$$i_C R + u_C = U_{S2} \qquad i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U_{S2} \qquad u_C = u_C' + u_C''$$

$$= B + A\mathrm{e}^{pt}$$

特解　通解

3）确定特解 $B = U_{S2}$

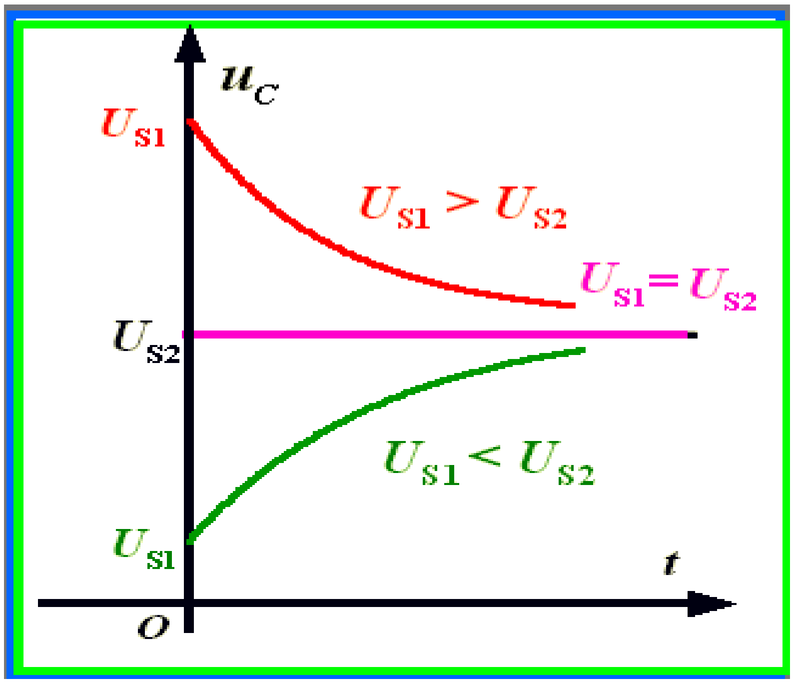
4）确定积分常数 $A = U_{S1} - U_{S2}$ $\tau = RC$

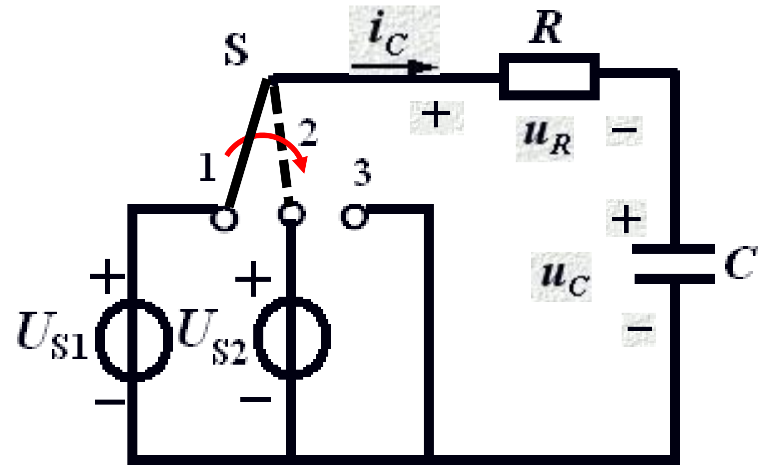
5）方程的解

$$u_C = U_{S2} + (U_{S1} - U_{S2})\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad u_C = U_{S1}e^{-\frac{t}{\tau}} + U_{S2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

稳态　暂态　零输入　零状态

§ 7.4 一阶电路的全响应





$$u_C = U_{S2} + (U_{S1} - U_{S2})\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C = U_{S1}e^{-\frac{t}{\tau}} + U_{S2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

§ 7.4 一阶电路的全响应

三要素法： $f(0_+)$、$f(\infty)$、τ

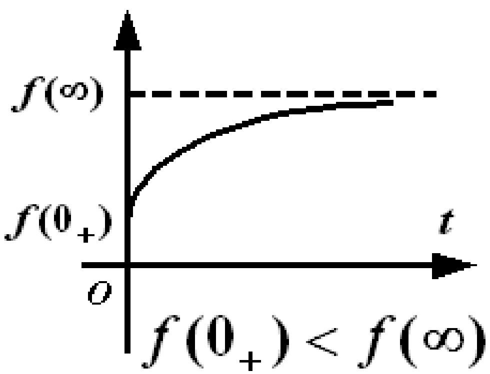
$$f(t) = \text{特解} \quad + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = \text{稳态解} \quad + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = f(\infty) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

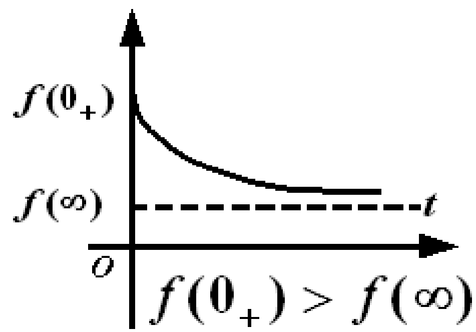
$$f(0_+) = f(\infty) + Ae^{-\frac{0}{\tau}} = f(\infty) \ + A \qquad A = f(0_+) - f(\infty)$$

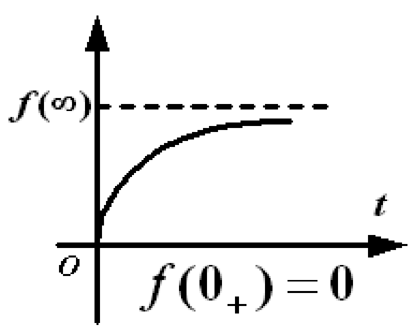
$$\boxed{f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

§ 7.4 一阶电路的全响应

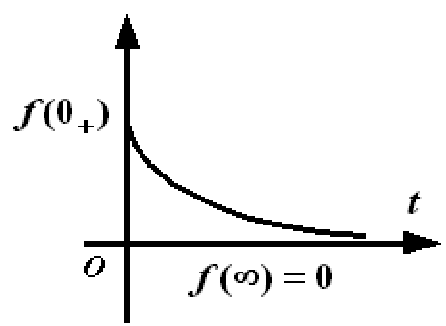
$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$







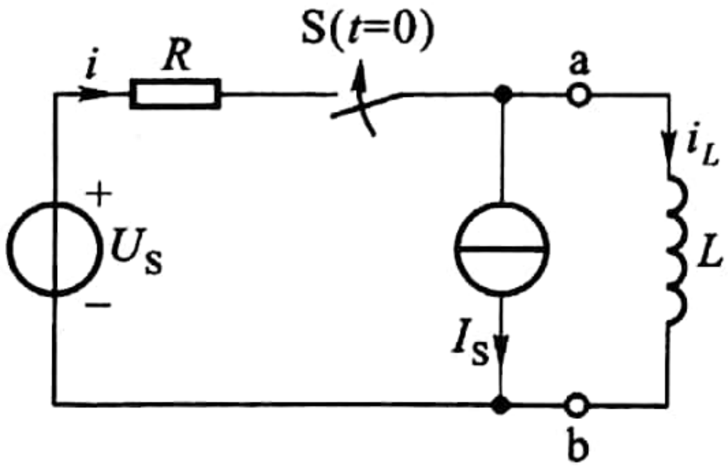
$$f(t) = f(\infty)(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$

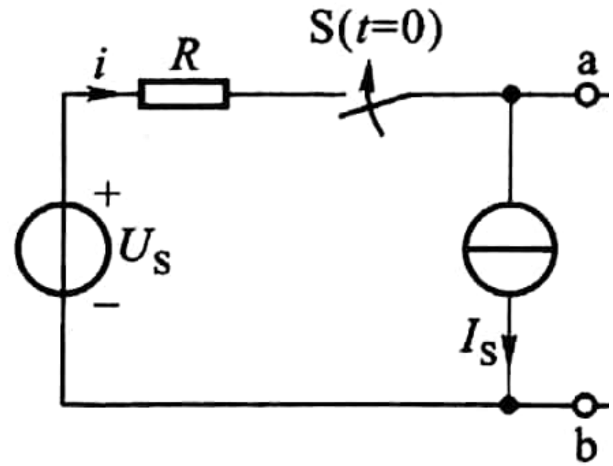


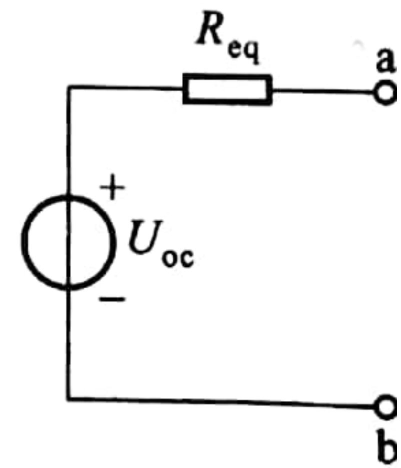
$$f(t) = f(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

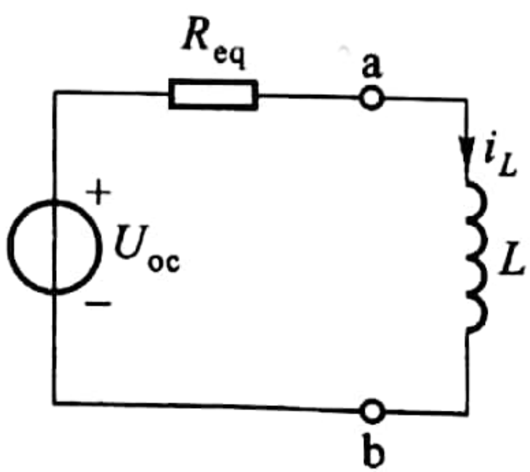
§ 7.4 一阶电路的全响应

例 7－4 图 7－15(a)所示电路中 $U_S=10\ \mathrm{V}$，$I_S=2\ \mathrm{A}$，$R=2\ \Omega$，$L=4\mathrm{H}$。试求 S 闭合后电路中的电流 i_L 和 i。









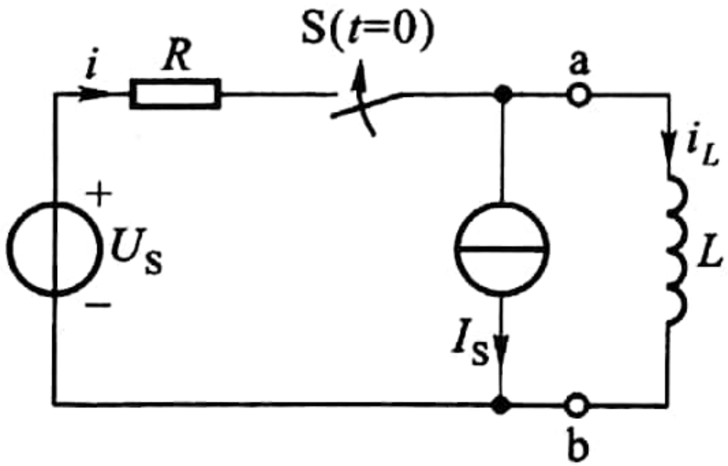
求戴维宁等效电路

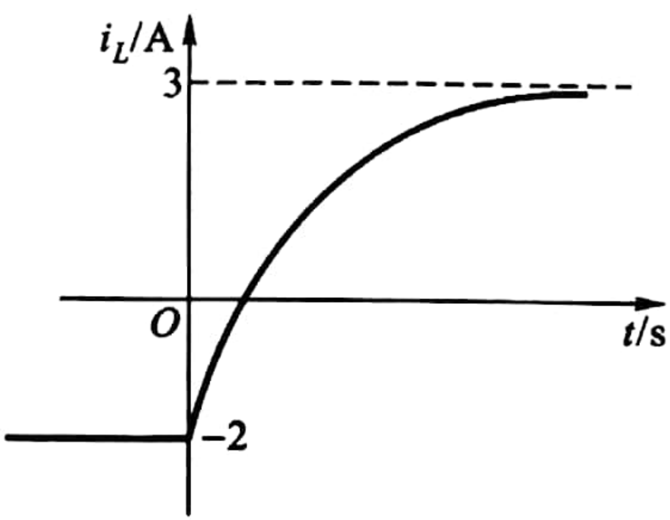
$$U_{oc}=U_S-RI_S=(10-2\times 2)\ \mathrm{V}=6\ \mathrm{V}$$

$$R_{eq}=R=2\ \Omega$$

§ 7.4 一阶电路的全响应

例 7－4 图 7－15(a)所示电路中 $U_S = 10\ \text{V}, I_S = 2\ \text{A}, R = 2\ \Omega, L = 4\text{H}$。试求 S 闭合后电路中的电流 i_L 和 i。





$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = -2\ \text{A}$$

$$i'_L = \frac{6}{2}\ \text{A} = 3\ \text{A}$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 2\ \text{s}$$

由三要素法，

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

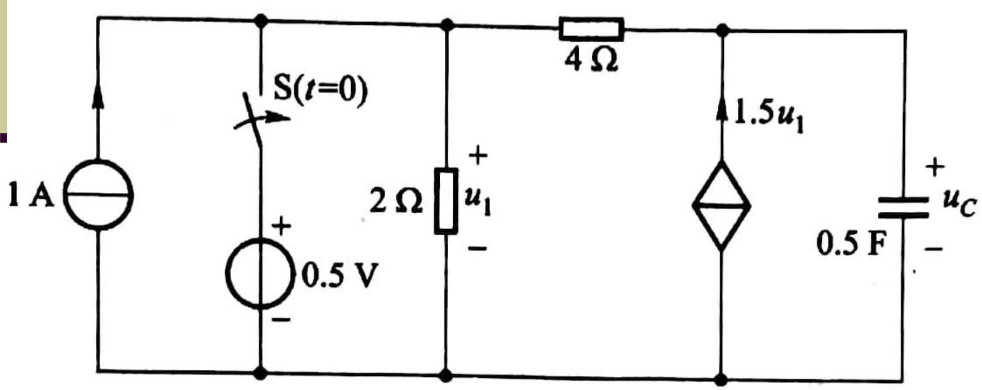
得到

$$i_L = [3 + (-2-3)e^{-\frac{1}{2}t}]\ \text{A}$$
$$= (3 - 5e^{-0.5t})\ \text{A}$$

$$i = I_S + i_L = (5 - 5e^{-0.5t})\ \text{A}$$

§ 7.4 一阶电路的全响应

例 7－5 图 7－16 所示电路中，开关 S 闭合前电路已达稳定状态，$t=0$ 时 S 闭合，求 $t\geqslant 0$ 时电容电压 u_C 的零状态响应、零输入响应和全响应，并定性绘出波形图。

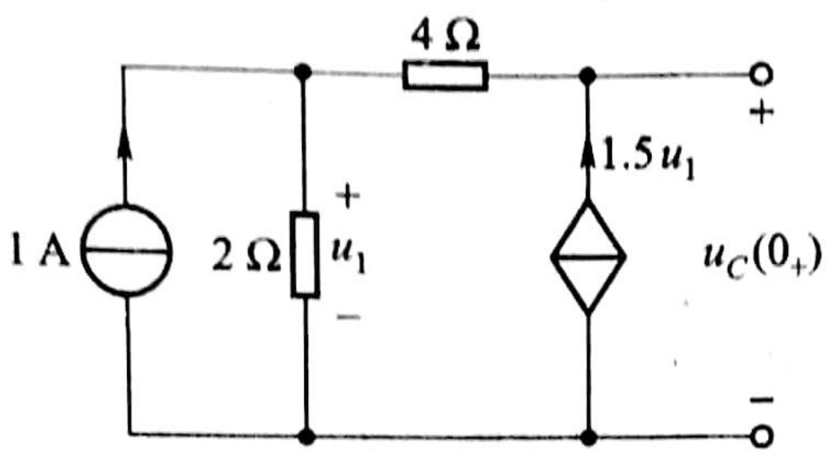


S闭合之前电路已达稳态，电容相当于开路

$$\frac{u_1}{2}-1.5\,u_1=1$$

$$u_1=-1\ \text{V}$$

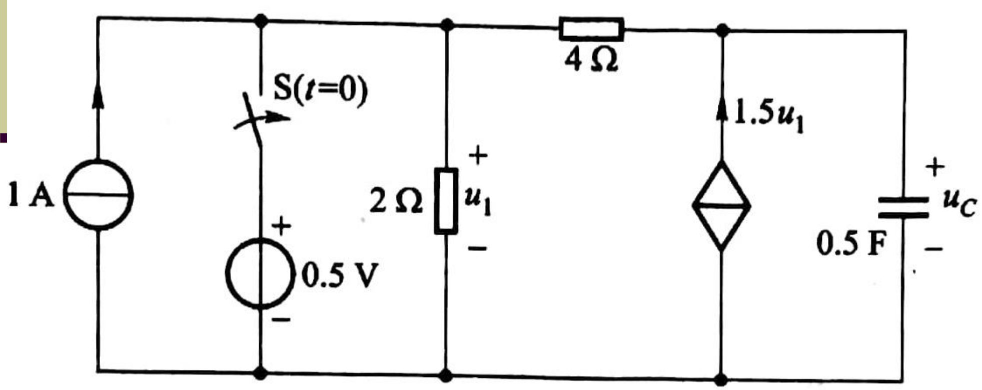
$$u_C(0_-)=4\times1.5u_1+u_1=7u_1=-7\ \text{V}$$



(a)

§ 7.4 一阶电路的全响应

例 7－5　图 7－16 所示电路中，开关 S 闭合前电路已达稳定状态，$t=0$ 时 S 闭合，求 $t\geqslant 0$ 时电容电压 u_C 的零状态响应、零输入响应和全响应，并定性绘出波形图。

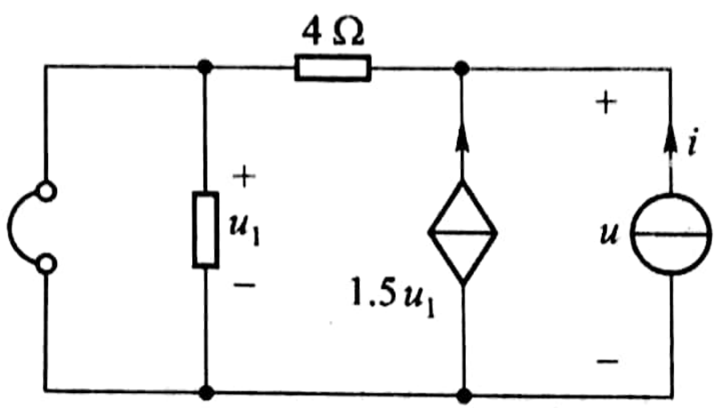


S闭合后，求电容以外电路的戴维宁等效电路。

$$u_{oc}=1.5u_1\times 4+u_1=7u_1$$

$$u_1=0.5\ \text{V}$$

$$u_{oc}=3.5\ \text{V}$$



(c)

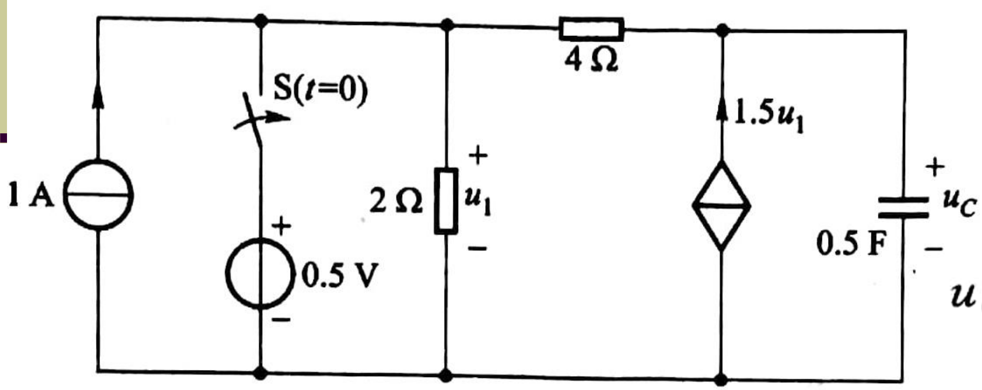
求等效电阻：电压源置零、保留受控源，在端口施加u、i。电压源置零，即u_1=0，受控源$1.5u_1$=0

$$u=4i$$

$$R_{eq}=4\ \Omega$$

§ 7.4 一阶电路的全响应

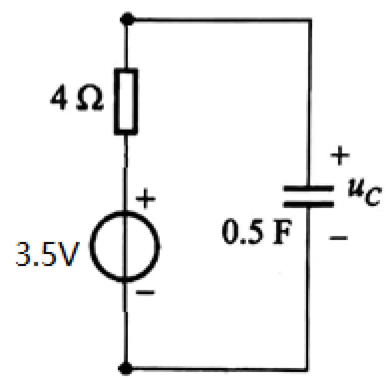
例 7－5 图 7－16 所示电路中，开关 S 闭合前电路已达稳定状态，$t=0$ 时 S 闭合，求 $t\geqslant 0$ 时电容电压 u_C 的零状态响应、零输入响应和全响应，并定性绘出波形图。



$$\tau = R_{eq}C = (4\times 0.5)\ \mathrm{s} = 2\ \mathrm{s}$$

由三要素法，得到

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$= [3.5 + (-7-3.5)e^{-0.5t}]\ \mathrm{V}$$
$$= (3.5 - 10.5\ e^{-0.5t})\ \mathrm{V}$$



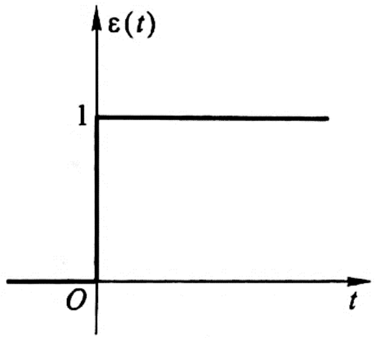
§ 7.7 一阶电路的阶跃响应

- **单位阶跃响应**

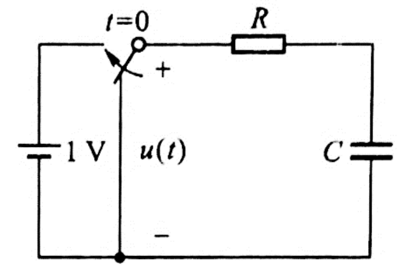
  电路对单位阶跃函数输入的零状态响应。

- **单位阶跃函数**

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$



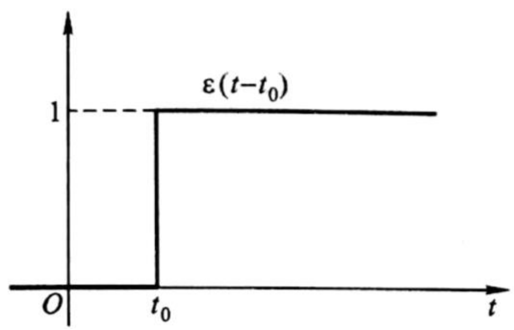
(a)



(b)

- **延迟的单位阶跃函数**

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$



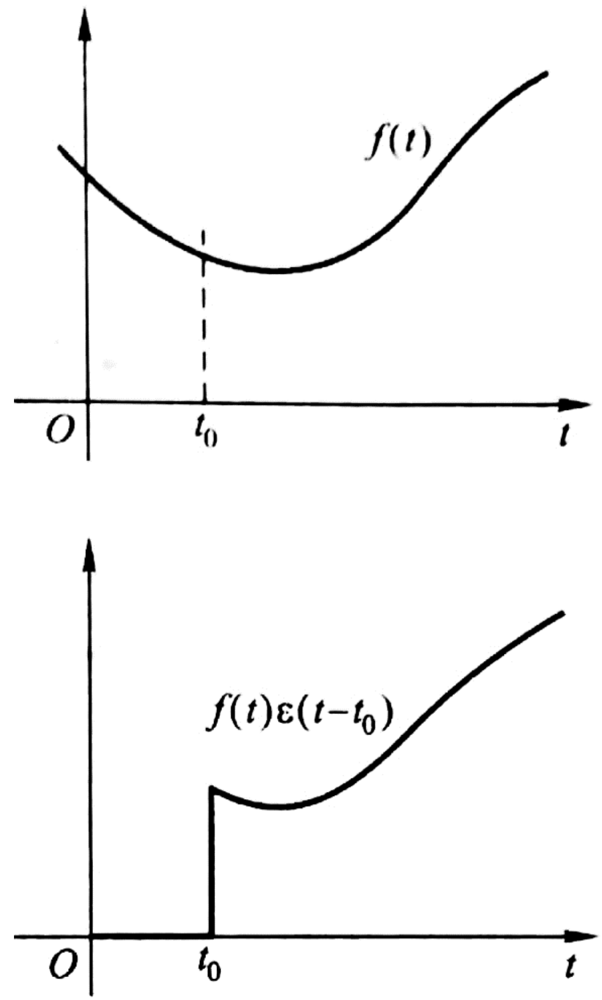
- 阶跃函数可以作为开关的数学模型，有时也称为开关函数

§ 7.7 一阶电路的阶跃响应

- **单位阶跃函数可以用来“起始”任意一个$f(t)$**

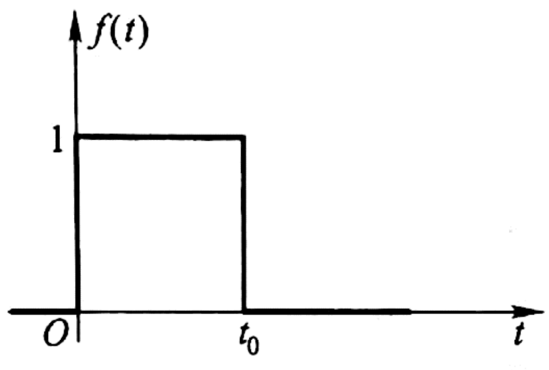
$$f(t)\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}f(t) & t>t_0\\ 0 & t<t_0\end{cases}$$

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$

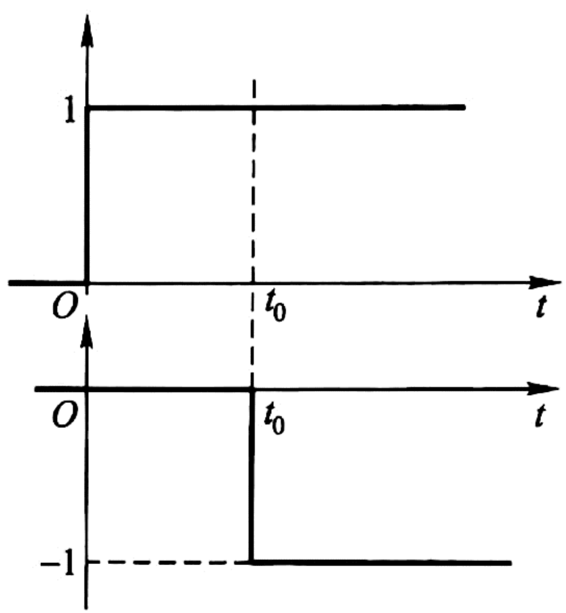


§ 7.7 一阶电路的阶跃响应

- **矩形脉冲可以用阶跃函数表示**

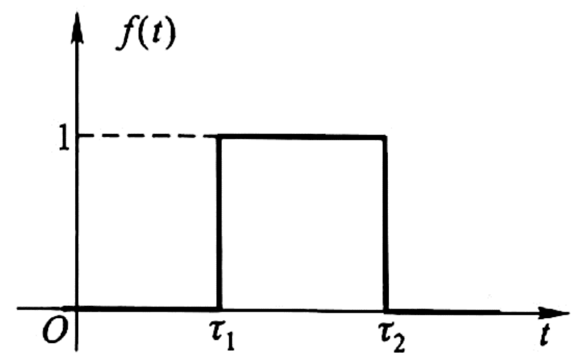


(a)



(b)

$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$$

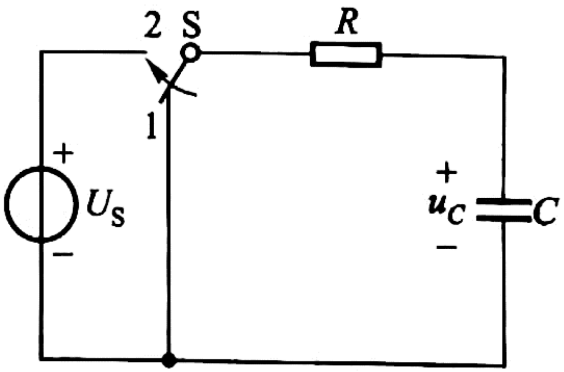


(c)

$$f(t)=\varepsilon(t-\tau_1)-\varepsilon(t-\tau_2)$$

§ 7.7 一阶电路的阶跃响应

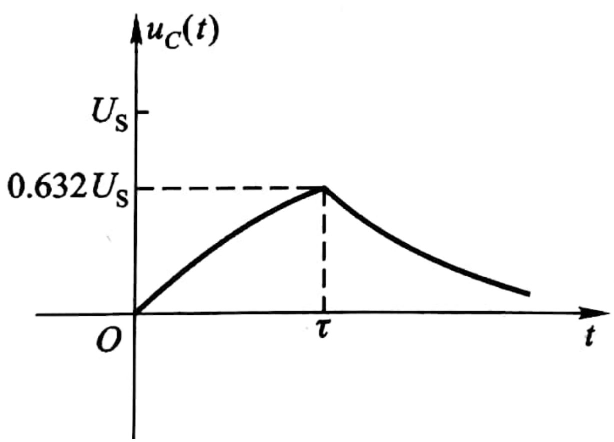
- **例7-11** 开关S在位置1时已达稳态。t = 0时，开关由位置1合向位置2。t = τ =RC时由位置2合向位置1。



解法一：分段求解

当 $0 \le t \le \tau$ 时，为RC电路零状态响应

$$u_C(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad \tau = RC$$



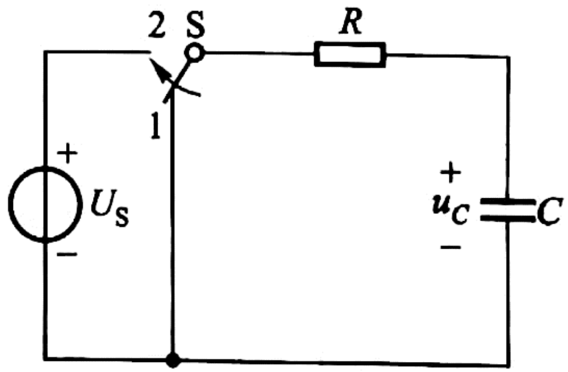
当 $\tau \le t < \infty$ 时，为RC电路零输入响应

$$u(\tau) = U_S(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}) = 0.632U_S$$

$$u_C(t) = 0.632U_S e^{-\frac{t-\tau}{\tau}}$$

§ 7.7 一阶电路的阶跃响应

- **例7-11** 开关S在位置1时已达稳态。t = 0时，开关由位置1合向位置2。$t = \tau = RC$时由位置2合向位置1。

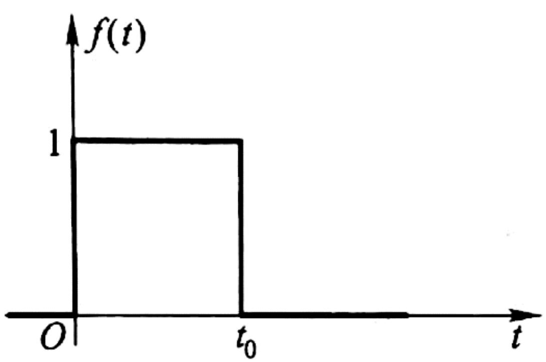


解法二：阶跃响应

电源激励为 $u_S(t) = U_S\varepsilon(t) - U_S\varepsilon(t-\tau)$

RC电路的单位阶跃响应为

$$s(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$$



$f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_0)$

得到

$$u_C(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t) - U_S[1 - e^{\frac{-(t-\tau)}{\tau}}]\varepsilon(t-\tau)$$

$$= U_s(1 - e^{-1})e^{-\frac{t-\tau}{\tau}}$$

§ 7.7 一阶电路的冲激响应

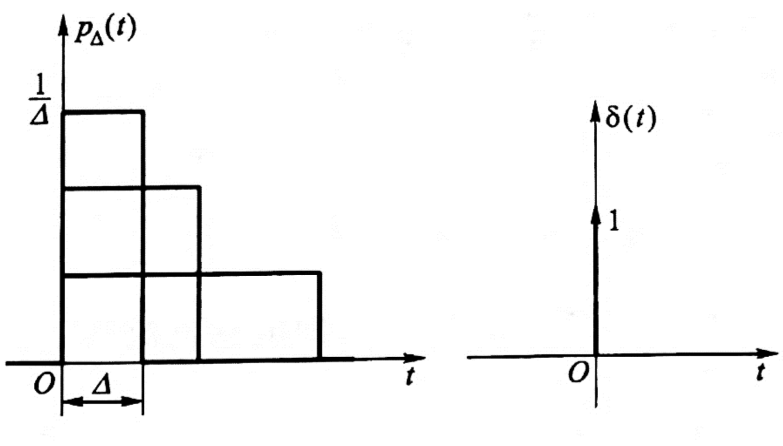
单位冲激响应

电路对单位冲激函数激励的零状态响应。

单位冲激函数

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \\ \delta(t) = 0 \qquad (\text{当 } t \neq 0) \end{cases}$$

- 单位冲激函数可看作单位脉冲函数的极限情况。



(a) (b)

对单位矩形脉冲函数$p(t)$，有

$$\lim_{\Delta \to 0} p(t) = \delta(t)$$

§ 7.7 一阶电路的冲激响应

- **冲激函数的性质**
  - **单位冲激函数对时间的积分等于单位阶跃函数**

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\xi)\mathrm{d}\xi = \varepsilon(t) \qquad \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t)$$

  - 单位冲激函数的“筛分”性质（取样性质）

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$$

§ 7.7 一阶电路的冲激响应

- **单位冲激电流$\delta_i(t)$作用在初始电压为0的电容上**

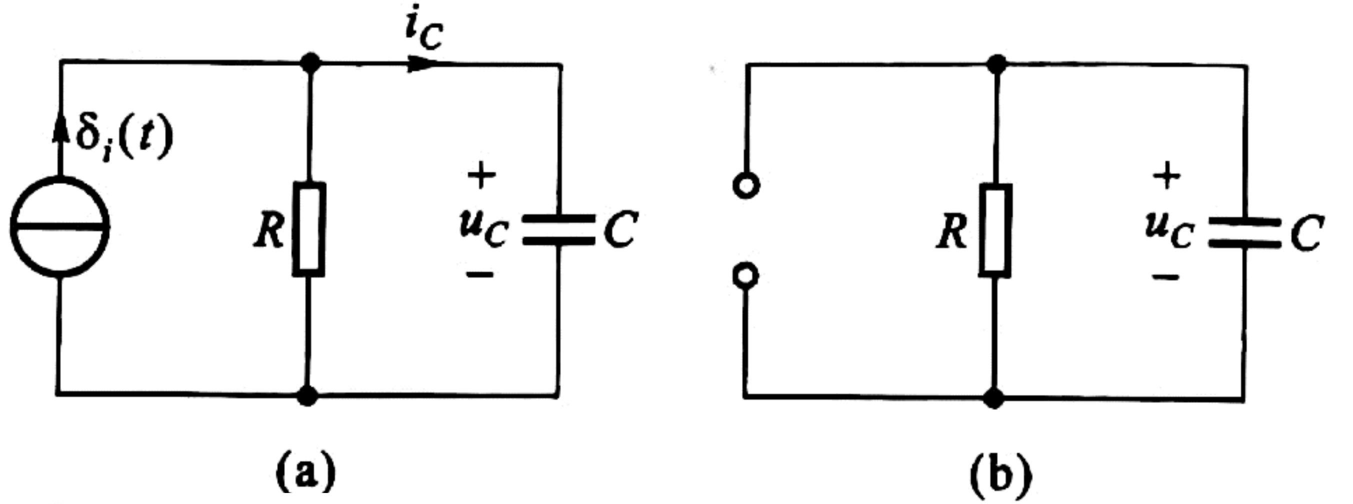
$$u_C = \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} \delta_i(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{C} = 1\ \mathrm{V}$$

- **单位冲激电压$\delta_u(t)$作用在初始电流为0的电感上**

$$i_L = \frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} \delta_u(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{L} = 1\ \mathrm{A}$$

§ 7.7 一阶电路的冲激响应

- ***RC*电路的冲激响应**



$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{u_C}{R}=\delta_i(t),\ t\geqslant 0_-$$

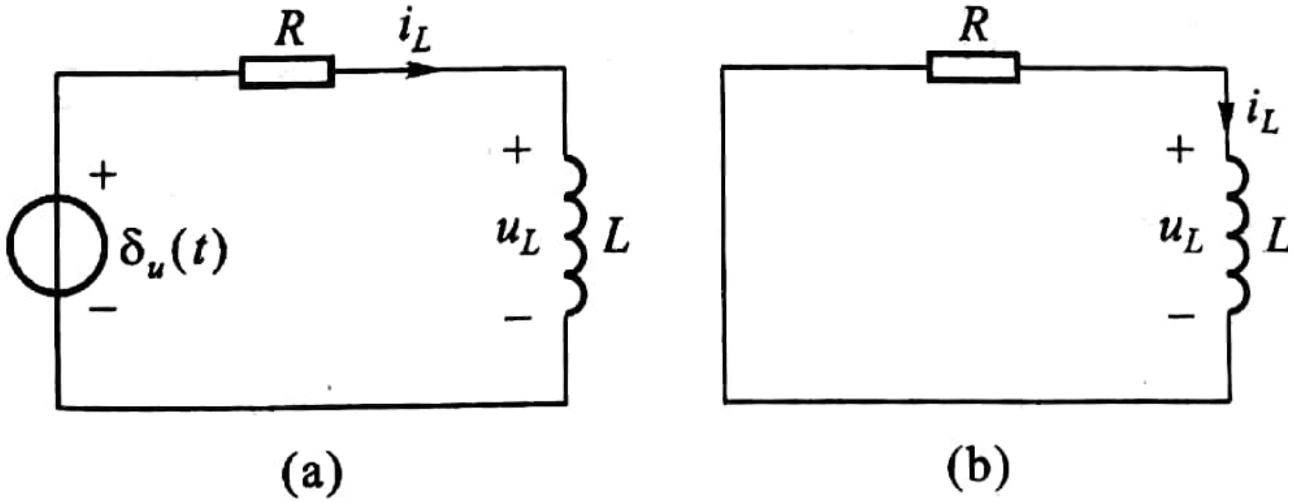
$$\int_{0_-}^{0_+}C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\int_{0_-}^{0_+}\frac{u_C}{R}\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta_i(t)\mathrm{d}t$$

$$C[u_C(0_+)-u_C(0_-)]=1 \qquad u_C(0_-)=0$$

$$u_C=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

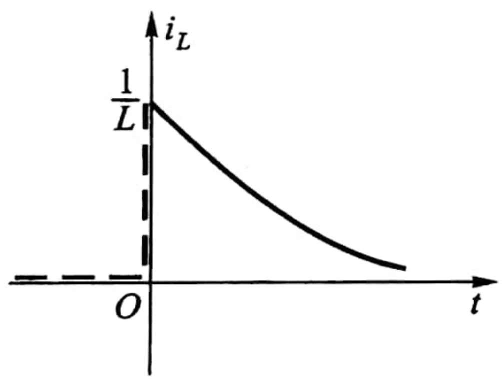
§ 7.7 一阶电路的冲激响应

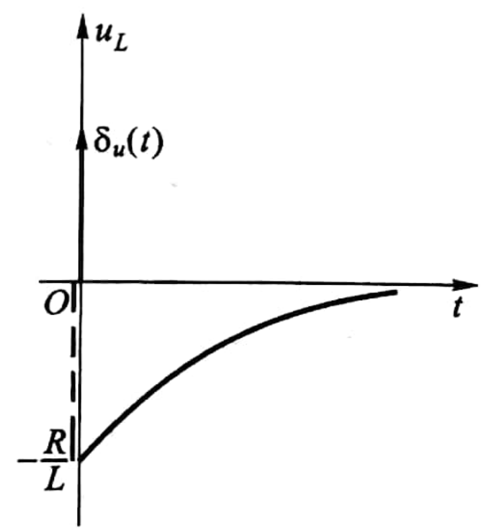
- ***RL*电路的冲激响应**



$$i_L = \frac{1}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

$$u_L = \delta_u(t) - \frac{R}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$





作业

P191

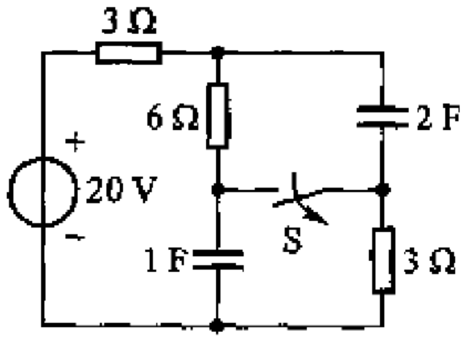
7-3

7-4

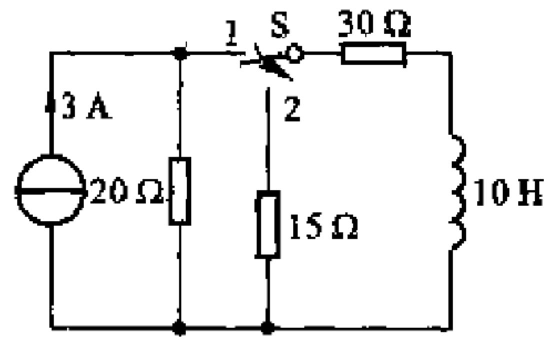
7-8

7-11

7-2 题7-2图所示各电路中开关S在 $t=0$ 时动作，试求各电路在 $t=0_+$ 时刻的电压、电流。已知题7-2图(d)中的 $e(t)=100\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$ V，$u_C(0_-)=20$ V。

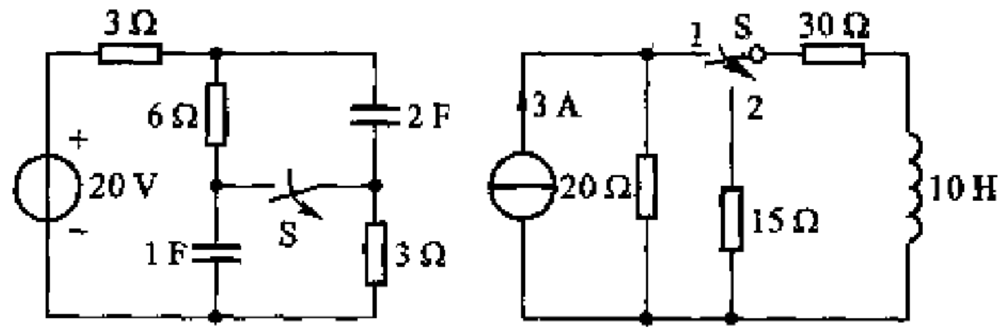


(a)



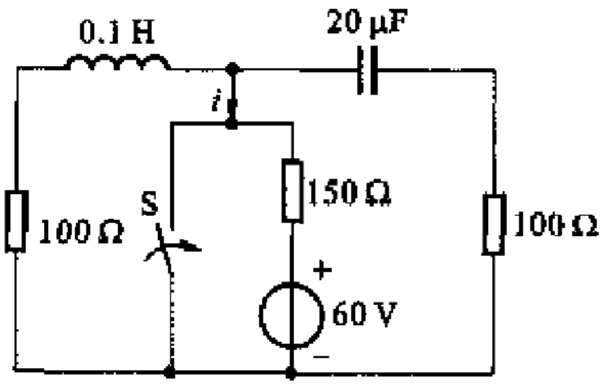
(b)

7-2 题7-2图所示各电路中开关S在 $t=0$ 时动作，试求各电路在 $t=0_+$ 时刻的电压、电流。已知题7-2图(d)中的 $e(t)=100\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$ V，$u_C(0_-)=20$ V。

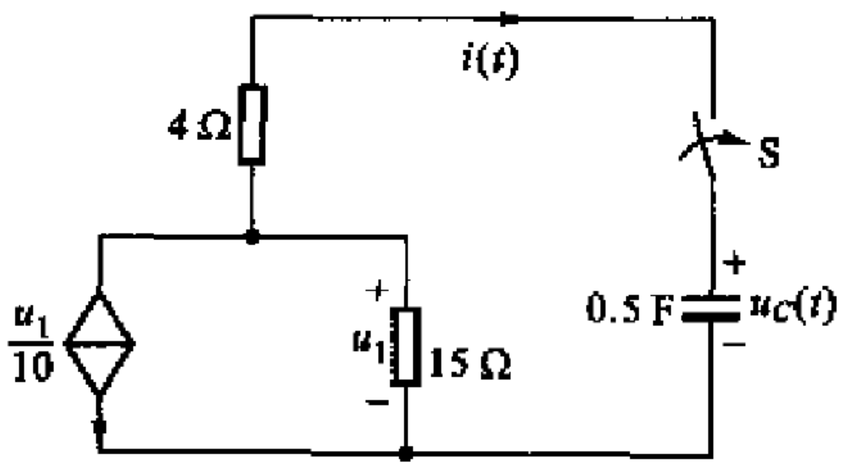


(a) (b)

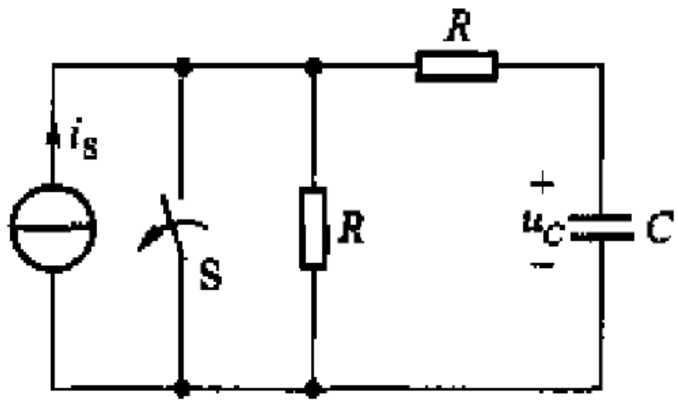
7 6 题 7-6 图所示电路中，若 $t=0$ 时开关 S 闭合，求电流 i。



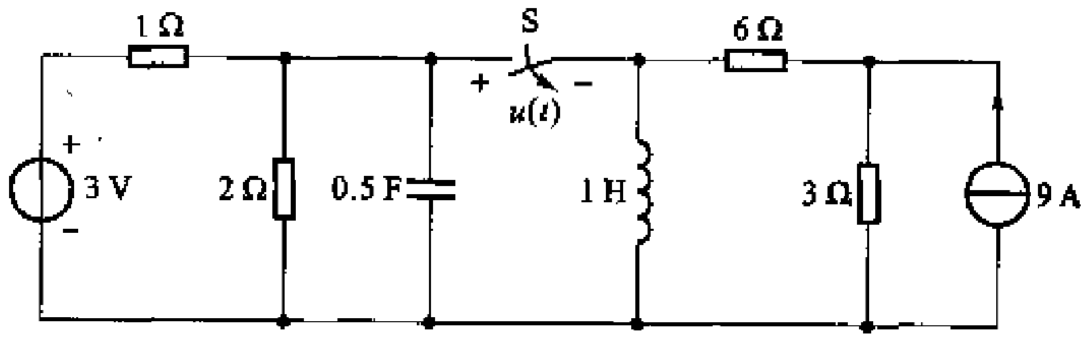
7-7 题7－7图所示电路中，已知电容电压 $u_C(0_-)=10\ V$，$t=0$ 时开关 S 闭合，求 $t\geqslant 0$ 时电流 $i(t)$。



7 6 题7-9图所示电路中，若 $t=0$ 时开关 S 打开，求 u_C 和电流源发出的功率。

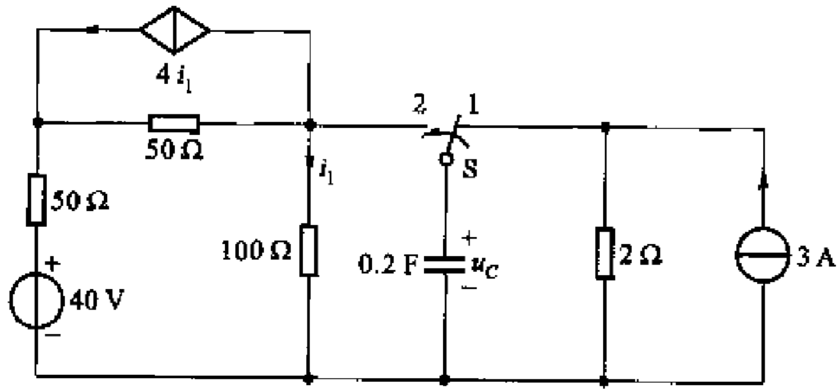


7-18 题7-18图所示电路中各参数已给定，开关S打开前电路为稳态。$t=0$时开关S打开，求开关打开后电压$u(t)$。



题7-18图

7-18　题 7-19 图所示电路开关原合在位置 1,已达稳态。$t=0$ 时开关由位置 1 合向位置 2,求 $t\geqslant 0$ 时电容电压 $u_C(t)$。



题 7-19 图