南开大学 2022 级“高等数学（A 类）I ”结课统考试卷（A 卷）

2023 年 2 月 19 日

一、单项选择题(每小题 4 分)

（1）若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)}{x}=\dfrac{1}{2}$ ；则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(5x)}{x}=$ （ C ）:

（A） $\dfrac{1}{2}$ （B） $\dfrac{5}{3}$ （C） $\dfrac{5}{6}$ （D） $\dfrac{1}{3}$

（2）函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间有界？ （ A ）

（A）$(-1,0)$ （B）$(0,1)$ （C）$(1,2)$ （D）$(2,3)$

（3）设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=b$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin f(a)}{x-a}=$ （ D ）

（A）$b\sin a$ （B）$b\cos a$ (C) $b\sin f(a)$ (D) $b\cos f(a)$

（4）设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，且 $f(x_0)>0$， $f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在 x_0 点（ A ）

（A）取得极大值 （B）取得极小值 （C）某邻域内单增 （D）某邻域内单减

（5）曲线 $y=\int_0^x(\sin t-1)(t-2)\mathrm{d}t$ 在 $(0,0)$ 点处切线方程为（ D ）

（A） $y=3x$ （B） $y=x$ （C） $y=\dfrac{x}{2}$ （D） $y=2x$

二、填空题（每小题 4 分）：

(1) 设 $y=(3+x+x^2)^x$ ，则在 $x=0$ 处， $\dfrac{dy}{dx}=\underline{\mathbf{\ln 3}}$

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}=x^2+y^2$ 所确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $(1,0)$ 处切线方程为 $\underline{\boldsymbol{y=2(x-1)}}$

(3) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$ $\underline{\mathbf{\sin 1-\cos 1}}$

(4) 曲线 $y=x^2(0\le x\le 1)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积为 $\underline{\boldsymbol{\dfrac{\pi}{5}}}$

(5) 若连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x+1$，则 $f(x)=\underline{\boldsymbol{2e^x-1}}$

三、求下列极限：（每小题 5 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

原式=

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sqrt{\cos 2x}+\cos x\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}=\frac{3}{2}.$$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+2\sin x)^{1/x}$

原式= $\lim\limits_{x\to 0}\left\{[1+(e^x+2\sin x-1)]^{\frac{1}{e^x+2\sin x-1}}\right\}^{\frac{e^x+2\sin x-1}{x}}$ ，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2\sin x-1}{x}=\lim_{x\to 0}(e^x+2\cos x)=3,\ 故\lim_{x\to 0}\left(e^x+2\sin x\right)^{1/x}=e^3$$

四、求下列不定积分（每小题 6 分）：

（1）$\displaystyle\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^3}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx^2}{(x^2+1)^3}\ \underline{令\ x^2=t}\ =\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{(t+1)^3}=\frac{1}{2}\int\frac{(t+1-1)dt}{(t+1)^3}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^3}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{(t+1)^2}+C=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}+C$$

(2) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2, dx=2tdt,$

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int e^t\,2tdt=2(te^t-e^t)+C=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$$

五、求下列定积分（每小题 6 分）：

（1）$\displaystyle\int_0^{\pi^2/4}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x$

令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2, dx=2tdt,$ 当 $x=0$ 时 $t=0,$ 当 $x=\dfrac{\pi^2}{4}$ 时 $t=\dfrac{\pi}{2},$

$$\int_0^{\pi^2/4}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi/2}t\sin t\mathrm{d}t=2(\sin t-t\cos t)\Big|_0^{\pi/2}=2.$$

（2）$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x-\cos^2 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\cot^2 x\right]dx=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\csc^2 x+1\right]dx$$

$$=\left(-\frac{1}{\sin x}+\cot x+x\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\left(\frac{\cos x-1}{\sin x}+x\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1.$$

（3）$\int_0^{\pi/2}e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi/2}e^x\frac{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx \quad 令\frac{x}{2}=t \quad =\int_0^{\pi/4}e^{2t}(1+\tan t)^2dt$$

$$=2\int_0^{\pi/4}e^{2t}\tan tdt+\int_0^{\pi/4}e^{2t}(1+\tan^2 t)dt=2\int_0^{\pi/4}e^{2t}\tan tdt+\int_0^{\pi/4}e^{2t}\sec^2 tdt$$

$$=2\int_0^{\pi/4}e^{2t}\tan tdt+\int_0^{\pi/4}e^{2t}d(\tan t)=2\int_0^{\pi/4}e^{2t}\tan tdt+e^{2t}\tan t\Big|_0^{\pi/4}-2\int_0^{\pi/4}e^{2t}\tan tdt$$

$$=e^{\pi/2}.$$

六、（每小题 4 分）求下列微分方程的通解：

（1）$xy'=y\left(\ln y-\ln x\right)$

方程等价于$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$，令$\frac{y}{x}=u,$则 $y=xu,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$方程化为

$x\frac{du}{dx}=u(\ln u-1),$ 显然有特解$u=0,u=e,$ 对应原方程的特解$y=0(舍去),y=ex,$

当$u\neq 0,u\neq e$时，分离变量再积分有

$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x},$ 即$\ln|\ln u-1|=\ln|Cx|.$有解$u=e^{cx+1}(C\neq 0)$ 即原方程有通解

$y=xe^{Cx+1}(C\neq 0)$.易知当$C=0$时，就是特解$y=ex.$故原方程有通解

$y=xe^{Cx+1}.$

（2）$y''+y=2e^x$

方程对应齐次方程的特征方程为$\lambda^2+1=0$，特征根为$\lambda_{1,2}=\pm i$，故齐次方程的通解为

$Y=C_1\cos x+C_2\sin x,$ 因为 1 不是特征根，故方程的特解可设为 $\overline{y}=Ae^x$，代入原方程

得到 $A=1$，故 $\overline{y}=e^x$ ，从而原方程的通解为 $y=Y+\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x$.

七、(6 分) 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$, 求 $\int_0^1 xf(x)dx.$

解 因为 $\frac{\sin t}{t}$ 没有初等函数形式的原函数，无法直接求出 $f(x)$ ，所以采用分部积分法

$$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx^2=\frac{1}{2}\left[x^2 f(x)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 df(x)$$

$$=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx \qquad \text{注:}(f'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sin x^2}{x})$$

$$=0-\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2 dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x^2 dx^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$$

八、（6 分）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(1)>g(1),f(0)>g(0),$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x,$$

证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)>g''(\xi)$.

证 令 $h(x)=f(x)-g(x)$, 则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ 等价于 $\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x=0$, 由积分中值定理，存在 $c_0\in(0,1)$, 使得 $h(c_0)=0$, 条件 $f(1)>g(1),f(0)>g(0)$ 等价于 $h(0)>0,h(1)>0$, 在 $[0,c_0]$ 上对函数 $h(x)$ 应用 Lagrange 微分中值定理，存在 $c_1\in(0,c_0)$, 使得 $h'(c_1)=\frac{h(c_0)-h(0)}{c_0}<0$, 在 $[c_0,1]$ 上对函数 $h(x)$ 应用 Lagrange 微分中值定理，存在 $c_2\in(c_0,1)$, 使得 $h'(c_2)=\frac{h(1)-h(c_0)}{1-c_0}>0$, 最后在 $[c_1,c_2]$ 上对函数 $h'(x)$ 应用 Lagrange 微分中值定理，存在 $\xi\in(c_1,c_2)$, 使得 $h''(\xi)=\frac{h'(c_2)-h'(c_1)}{c_2-c_1}>0$,