

# 南开大学 2021 级“高等数学(A类)I”结课统考试卷(A卷)

2021 年 12 月 30 日

一、选择题(每小题 4 分)

(1) 设连续函数  $f(x)$  满足:  $f(x) + x \int_0^1 f(xt)dt = 1$ , 则  $f(x) =$  ( ):

(A)  $e^x$ ; (B)  $e^{-x}$ ; (C)  $e^x + 1$ ; (D)  $e^{-x} - 1$

(2) 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \arctan t dt =$  ( ): (A) 0; (B)  $\pi$ ; (C)  $\pi/2$ ; (D)  $1/2$

(3) 若数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$ , 则当  $n$  充分大时, 有 ( ):

(A)  $|a_n| < \frac{2}{3}a$ ; (B)  $|a_n| > \frac{2}{3}|a|$ ; (C)  $a_n > a - \frac{1}{n}$ ; (D)  $a_n \leq a - \frac{1}{n}$

(4) 设  $f(x) = \begin{cases} (x^2) \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  在  $x=0$  点 ( ):

(A) 连续, 但不可导; (B) 不连续; (C) 不可导; (D) 连续, 且可导

(5) 设函数  $f(x) = \int_0^x (t-1)e^{t^2} dt$ , 则  $f(x)$  在  $x=1$  处 ( ),

(A) 取得极小值; (B) 取得极大值; (C) 不取得极值; (D) 不确定

二、填空题 (每小题 4 分):

(1) 设函数  $y = x^2(x-2)^3(x+1)$ , 则在  $x_0 = -1$  处,  $dy =$  \_\_\_\_\_

(2) 设  $f(x) = x^3 \sin x$ , 则  $f^{(10)}(0) =$  \_\_\_\_\_

(3) 原点到平面  $x + y + z = 9$  的距离为 \_\_\_\_\_

(4) 设函数  $y = y(x)$  由方程  $x^3 + y^3 = 3xy$  所确定, 则曲线  $y = y(x)$

在点  $(3/2, 3/2)$  的切线方程为 \_\_\_\_\_

(5) 某直线过点  $(-1, 1, 1)$ , 且与直线:  $x + 2z + 1 = 0$ ,  $y - 3z + 3 = 0$  平行, 则该直线方程为 \_\_\_\_\_

三、求下列极限: (每小题 5 分)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^{1/x^2}$ ;

四、求下列不定积分 (每小题 6 分):

(1)  $\int \frac{x^2}{(x-1)^{10}} dx$ ; (2)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ;

五、求下列定积分（每小题 6 分）：

$$(1) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}; \quad (2) \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx \quad (3) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + e^{2020x}} dx$$

六、（每小题 4 分）求下列微分方程的通解：

$$(1) y' - y = x + 1; \quad (2) y'' + y = x^2 + x + 1$$

七、(6 分) 求函数  $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$  的极值.

八、(6 分) (1) 求解微分方程：  $\frac{dy}{dx} - xy = xe^{x^2}$  ,  $y(0) = 1$  ;

(2) 若  $y = f(x)$  是上面方程的解，求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n}{1 + n^2 x^2} f(x) dx$  .