高等数学竞赛练习一答案

一 、1. 解： 因为，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2x^2}{1+x^2}}{a(a-1)x^{a-1}}$

$=\dfrac{2}{a(a-1)}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{a-1}}$，由题意 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，得 $a>1$.

又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{ax^{a-1}}=\dfrac{1}{a}\lim\limits_{x\to0^+}x^{3-a}$,

由题意 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，得 $a<3$. 综上所述，$1<a<3$.

2. 解：由极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^n+7x^4+2)^a-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}[x^{na}(1+7\dfrac{1}{x^{n-4}}+\dfrac{2}{x^n})^a-x]=k\neq0$，得 $na=1$，从而

$$\lim_{x\to+\infty}[x(1+7\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{2}{x^n})^a-x]=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+7t^{n-4}+2t^n)^a-1}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{a(7t^{n-4}+2t^n)}{t}=k\neq0$$

故 $n=5,a=\dfrac{1}{5}$

3．解： $f(x)=f(\dfrac{x}{2})e^{\frac{x}{2}}=f(\dfrac{x}{2^2})e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2^2}}=\cdots=f(\dfrac{x}{2^n})e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2^2}+\cdots\frac{x}{2^n}}=f(\dfrac{x}{2^n})e^{\frac{x}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}}$，

令 $n\to\infty$ 得： $f(x)=f(0)e^x$

4．解：$\lim\limits_{\theta\to0^+}\dfrac{|a\vec{\alpha}|+|b\vec{\beta}|-|a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}|}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to0^+}\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}{\theta^2}=\dfrac{ab}{2(a+b)}$

5．解：方程两端求二阶导数得： $f^{(4)}(0)=2>0$，故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

6．解： $y=\int_0^x f(x^2)f(-t^2)dt=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$， $y'=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+1$,

$y''=2x+2(1+2x^2)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$ 。 当 $x<0$ 时， $y''<0$；当 $x>0$ 时， $y''>0$；

又 $y(0)=0$，所以曲线的拐点为 $(0,0)$.

7．解： $f_2(x)=\int_0^x f_1(t)\varphi(t)dt=\int_0^x f_1(t)f_1'(t)dt=\dfrac{1}{2}f_1^{\,2}(x)$，

$f_3(x)=\int_0^x f_2(t)\varphi(t)dt=\int_0^x\dfrac{1}{2}f_1^{\,2}(t)f_1'(t)dt=\dfrac{1}{3!}f_1^{\,3}(t)$，由数学归纳法知： $f_k(x)=\dfrac{1}{k!}f_1^{\,k}(t)$

8．解：$\int\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln(1+x)-4\sqrt{x}+4\arctan\sqrt{x}+C$

二、 (8 分) 设 $f'(x)$ 连续，且 $f(0)=0$，$f'(0)=-2$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{\sin^3 x\cdot\int_0^1 f(xt)dt}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{\sin^3 x\cdot\int_0^1 f(xt)dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(u)du}{x^2\cdot\int_0^x f(u)du}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(u)du+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4f'(x^2)}{3f(x)/x+f'(x)}=1$$

三、(8 分).求积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

解：令 $x=\dfrac{1}{t}$，$\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}=\int_0^1\dfrac{t^4dt}{\sqrt{1+t^5+t^{10}}}$，令 $u=t^2$，$\int_0^1\dfrac{t^4dt}{\sqrt{1+t^5+t^{10}}}=\int_0^1\dfrac{du}{5\sqrt{1+u+u^2}}$

$$=\frac{1}{5}\ln(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2})\big|_0^1=\frac{1}{5}\ln(1+\frac{2}{\sqrt{3)}}$$

四、(10 分)已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t\end{cases}(0\le t<\dfrac{\pi}{2})$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(t)>0(0<t<\dfrac{\pi}{2})$.若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

解：曲线 L 的切线斜率 $k=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{-\sin t}{f'(t)}$，

切线方程为：$y-\cos t=-\dfrac{\sin t}{f'(t)}(x-f(t))$.

令 $y=0$，得切线与 x 轴交点的横坐标为 $x_0=f'(t)\dfrac{\cos t}{\sin t}+f(t)$.

由题意得 $\left[f'(t)\dfrac{\cos t}{\sin t}\right]^2+\cos^2 t=1$.

因为 $f'(t)>0$，解得 $f'(t)=\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}=\dfrac{1}{\cos t}-\cos t$.

$$f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|-\sin t+C$$

由于 $f(0)=0$，所以 $f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|-\sin t$.

因为 $f(0)=0$， $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-} f(t)=+\infty$，所以以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域是无界区域，

其面积为 $S=\int_0^{+\infty} ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=\dfrac{1}{4}\pi$.

五、(10 分) 设 $f_n(x)=\dfrac{1}{n+1}x-\arctan x$ (其中 n 为正整数)，

（1）证明： $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一的零点，即存在唯一的 $x_n\in(0,+\infty)$，使 $f_n(x_n)=0$；

（2）计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

解： （1）令 $g_n(x)=\dfrac{\arctan x}{x}-\dfrac{1}{n+1}$， $x\in(0,+\infty)$， $\lim\limits_{x\to0^+} g_n(x)=1-\dfrac{1}{n+1}>0$ ，

$\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)=-\dfrac{1}{n+1}<0$，故 $\exists\, 0<x_1<x_2<+\infty$，使得 $g_n(x_1)>0$, $g_n(x_2)<0$，

$g_n(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上连续， $g_n(x)$ 在 (x_1,x_2) 内至少存在一个零点.

$g_n'(x)=\dfrac{\frac{x}{1+x^2}-\arctan x}{x^2}$，记 $h(x)=\dfrac{x}{1+x^2}-\arctan x$, $h'(x)=-\dfrac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}<0$，

$x\in(0,+\infty)$， $h(x)<h(0)=0$, $x>0$，即 $g_n'(x)<0$, $x>0$， $g_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调递减，

$g_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内至多存在一个零点。 $g_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内存在唯一零点，即 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内存

在唯一零点，记为 $x_n\in(0,+\infty)$ 。

（**2**）由于 $\dfrac{\arctan x_{n+1}}{x_{n+1}}=\dfrac{1}{n+2}<\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{\arctan x_n}{x_n}$，而 $\dfrac{\arctan x}{x}$ 严格单调递减，故

$x_n<x_{n+1}$，所以 $(n+1)\arctan x_1\le x_n<\dfrac{\pi}{2}(n+1)$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\arctan x_{n+1}}{(n+1)\arctan x_n}=1 .$$

六、(6 分) 证明： $\int_a^{a+2\pi}\ln(2+\cos x)\cdot\cos xdx>0.$

证明：$\int_a^{a+2\pi}\ln(2+\cos x)\cdot\cos x dx=\int_a^{a+2\pi}\ln(2+\cos x)\cdot d\sin x$

$$=\ln(2+\cos x)\cdot\sin x\Big|_a^{a+2\pi}+\int_a^{a+2\pi}\frac{\sin^2 x}{2+\cos x}dx=0+\int_a^{a+2\pi}\frac{\sin^2 x}{2+\cos x}dx>0$$

七、(10 分)已知 $f(x)$ 二阶可导，且：$f(x)>0$，$f''(x)f(x)-[f'(x)]^2\geq 0\ (x\in R)$

（1）证明：$f(x_1)f(x_2)\geq f^2(\frac{x_1+x_2}{2})\ (\forall x_1,x_2\in R).$

（2）若 $f(0)=1$，证明 $f(x)\geq e^{f(0)x}\ (x\in R).$

（1）证明：令 $g(x)=\ln f(x), g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}, g''(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}>0$，

$\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\geq g(\dfrac{x_1+x_2}{2})\ (\forall x_1,x_2\in R),$

即：$f(x_1)f(x_2)\geq f^2(\dfrac{x_1+x_2}{2})\ (\forall x_1,x_2\in R).$

（2）若 $f(0)=1$，则

$$g(x)=g(0)+g'(0)x+\frac{g''(\xi)}{2}x^2=f'(0)x+\left.\frac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{2f^2(x)}\right|_{x=\xi}x^2\geq f'(0)x$$

即：$f(x)\geq e^{f(0)x}\ (x\in R).$

八、(8 分) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶导数连续，证明至少存在一点 $\xi\in[-1,1]$ 使：

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx=\frac{2}{3}f'(\xi)+\frac{1}{3}\xi f''(\xi).$$

证明：将 $F(x)=xf(x)$ 在 $x=0$ 处展开得：

$$F(x)=xf(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(\eta)}{2}x^2=f'(0)x+\frac{2f'(\eta)+\eta f''(\eta)}{2}x^2$$

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx=\int_{-1}^1\left[f'(0)x+\frac{2f'(\eta)+\eta f''(\eta)}{2}x^2\right]dx=\int_{-1}^1\frac{2f'(\eta)+\eta f''(\eta)}{2}x^2dx$$

由积分第一中值定理得：

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx=\int_{-1}^1\frac{2f'(\eta)+\eta f''(\eta)}{2}x^2dx=\frac{2f'(\xi)+\xi f''(\xi)}{2}\int_{-1}^1 x^2dx=\frac{2f'(\xi)+\xi f''(\xi)}{3}$$