# 高等数学竞赛练习一 上册

一、 填空题(每小题 5 分,共 40 分)

1. 已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^a}$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0$，则 $a$ 的取值范围为________.

2.已知有整数 $n(n>4)$ 使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^n+7x^4+2)^a-x]$ 存在且不为零，则 $a=$____________.

3．设函数 $f(x)$ 在（-∞,+∞）上连续，对一切 $x$ 满足 $f(2x)=f(x)e^x$，则 $f(x)=$____________.

4．设单位向量 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的夹角为 $\theta$，$a,b$ 为正常数，则 $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{|a\vec{\alpha}|+|b\vec{\beta}|-|a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}|}{\theta^2}=$_________.

5．设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+x[f'(x)]^2=x^2$，且 $f'(0)=0$，则 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极______ 值.

6．设 $f(x)=e^x$，则曲线 $y=\int_0^x f(x^2)f(-t^2)dt$ 的拐点为____________.

7．设 $\varphi(x)$ 在 $[0,b]$ 上连续，定义 $f_1(x)=\int_0^x \varphi(t)dt, x\in[0,b]$，

$f_k(x)=\int_0^x f_{k-1}(t)\varphi(t)dt(k=2,3,4,\cdots)$，则 $f_k(x)$ 可以用 $f_1(x)$ 表示为_____________.

8．积分 $\int\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx=$____________.

二、 (8 分) 设 $f'(x)$ 连续，且 $f(0)=0,\ f'(0)=-2$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt}{\sin^3 x\cdot\int_0^1 f(xt)dt}$

三、(8 分) 求积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$。

四、(10 分) 已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t\end{cases}(0\le t<\dfrac{\pi}{2})$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(t)>0(0<t<\dfrac{\pi}{2})$.若曲线 $L$ 的切线与 $x$ 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求以曲线 $L$ 及 $x$ 轴和 $y$ 轴为边界的区域的面积.

五、(10 分) 设 $f_n(x)=\dfrac{1}{n+1}x-\arctan x$ (其中 $n$ 为正整数),

（1）证明：$f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一的零点，即存在唯一的 $x_n\in(0,+\infty)$，使 $f_n(x_n)=0$；

（2）计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

六、(6 分) 证明：$\int_a^{a+2\pi} \ln(2+\cos x)\cdot\cos x dx > 0.$

七、(10 分)　已知 $f(x)$ 二阶可导，且：$f(x)>0$，$f''(x)f(x)-[f'(x)]^2 \ge 0\ (x\in R)$

（1）证明：$f(x_1)f(x_2) \ge f^2(\frac{x_1+x_2}{2})\ (\forall x_1,x_2 \in R).$

（2）若 $f(0)=1$，证明：$f(x) \ge e^{f'(0)}(x\in R)$。

八、(8 分) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶导数连续，证明至少存在一点 $\xi\in[-1,1]$ 使：

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx = \frac{2}{3}f'(\xi)+\frac{1}{3}\xi f''(\xi).$$