2015 级多元函数微积分 参考答案

一、求曲面$2x^2+y^2+2z^2=5$上点$(1,-1,1)$处的切平面与法线方程。

解：记曲面方程为

$$F(x,y,z)=2x^2+y^2+2z^2-5=0$$

有

$$\begin{cases} F_x=4x=4 \\ F_y=2y=-2 \\ F_z=4z=4 \end{cases}$$

故

$$\vec{n}=(2,-1,2)$$

故切平面方程为

$$2(x-1)-(y+1)+2(z-1)=0$$

或

$$2x-y+2z=5$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=-\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

二、求函数$f(x,y,z)=x+y+z$在条件$x^2+2y^2+z^2\le 4$下的最大、最小值。

解：先证明，最值一定在边界上取到。用反证法，假设在椭球域内部一点取到最大值，则过该点作平行于xy面直线，与椭球的上侧交点处函数值必大于该点处函数值，矛盾！最小值亦然。故最值一定在边界处取到。

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=x+y+z+\lambda(x^2+2y^2+z^2-4)$$

令

$$\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0 \\ L_y=1+4\lambda y=0 \\ L_z=1+2\lambda z=0 \\ L_\lambda=x^2+2y^2+z^2-4=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{2\sqrt{10}}{5} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{5} \\ z = \pm\dfrac{2\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

故最大值为$\sqrt{10}$，最小值为$-\sqrt{10}$.

三、计算下列二重积分：

(1) $\iint_D xydxdy$, 其中D是$xy = 1, xy = 3, y = x, y = 2x$在第一象限围成的区域；

解：作换元

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

反解得

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

计算出雅各比行列式为

$$|J| = \frac{1}{2v}$$

并用不等式组表示新的积分区域

$$\begin{cases} 1 \le u \le 3 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}$$

故原式可写为

$$I = \iint_{D'} \frac{u}{2v} dudv = \int_1^3 udu \int_1^2 \frac{1}{2v} dv = 2\ln 2.$$

(2) $\iint_D (x^2 + y^2)^2 dxdy\,, D: x^2 + y^2 \le 1.$

解：作极坐标换元

$$I = \iint_D r^5 drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^5 dr = \frac{\pi}{3}.$$

四、计算下列三重积分：

(1) $\iiint_V z^2 dxdydz$, 其中V是平面$x + y + z = 1$和三个坐标面围成的区域；

解：直接化为累次积分

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z^2 dz = \frac{1}{60}.$$

(2) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} dxdydz\,, V: x^2 + y^2 + z^2 \le 2z.$

解：作球坐标换元，得

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^5dr=2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{3}\cos^6\varphi\sin\varphi\,d\varphi=\frac{64}{21}\pi.$$

五、计算下列曲线积分

(1) 设Σ是三个坐标面和平面$x+y+z=1$围成的四面体外侧，求曲面积分

$$I=\iint_\Sigma zdxdy$$

解：将曲面分为四片，注意到只有在平面上的部分积分才非零，即、

$$I=\iint_S zdxdy$$

取外侧，化为二重积分

$$I=\iint_D(1-x-y)dxdy$$

化为累次积分

$$I=\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{1}{6}.$$

(2) 求$\int_L x^2ydx$, 其中L为抛物线$y^2=x$上，从点$A(1,-1)$到点$B(1,1)$的有向弧。

解：直接化为定积分

$$I=\int_{-1}^1y^5\cdot 2ydy=\frac{4}{7}.$$

六、求曲线积分

$$\oint_L\frac{xdy-(y+1)dx}{4x^2+(y+1)^2}$$

其中L是以$(0,0)$为中心，$R(R>0,R\neq 1)$为半径的圆周，取逆时针方向。

解：容易发现

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(y+1)^2-4x^2}{[4x^2+(y+1)^2]^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

故分类讨论，当$R<1$时，此时满足格林公式的条件，故

$$I=0$$

当$R>1$时，此时L所围区域内包含不可导点$(0,-1)$，故以该点为中心，作椭圆

$$C:4x^2+(y+1)^2=\epsilon^2$$

使椭圆完全包含于圆域内部，对两曲线所夹部分用格林公式，得

$$I=\oint_{L+C}-\oint_{C^-}=\oint_C\frac{1}{\epsilon^2}[xdy-(y+1)dx]$$

故此时在椭圆域上用格林公式

$$I=\frac{1}{\epsilon^2}\iint_D 2d\sigma=\frac{2\pi}{\epsilon^2}\cdot\frac{\epsilon^2}{2}=\pi.$$

七、设Σ是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，求

$$I=\iint_\Sigma \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

解：容易发现

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

但由于不可导点$(0,0,0)$在单位球域内部，故作小椭球面

$$C: x^2+y^2+4z^2=\epsilon^2$$

在椭球面与球面所夹区域内，应用高斯公式，有

$$I=\iint_{\Sigma+C}-\iint_{C^-}=\iint_C \frac{1}{\epsilon^3}(xdydz+ydzdx+zdxdy)$$

此时，在椭球面上运用高斯公式，得到

$$I=\frac{1}{\epsilon^3}\cdot 3V=\frac{1}{\epsilon^3}\cdot\frac{4\pi\epsilon^3}{2}=2\pi.$$

八、求球面$x^2+y^2+z^2=R^2$被平面$x+y+z=R(R>0)$所截两部分的面积。

解：先求出原点到该平面的距离

$$d=\frac{R}{\sqrt{3}}$$

故所求面积等价于，平面$z=\frac{R}{\sqrt{3}}$截该球面的面积，即

$$S=\iint_S dS$$

其中，S在xy面上的投影为

$$D: x^2+y^2\le\frac{2R^2}{3}$$

而

$$\begin{cases} z_x=-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \\ z_y=-\dfrac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{cases}$$

故

$$S=\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

化为累次积分

$$S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{6}R}{3}}\frac{R\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho=2\pi R^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

而另一部分的面积为

$$S'=S_{\Sigma}-S=4\pi R^2-2\pi R^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(2+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\pi R^2.$$