2014 级 多元函数微积分 参考答案

一、求曲面$x^2+2y^2+z^2=4$上点$(1,1,1)$处的切平面与法线方程。

解：记曲面方程为

$$F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-4=0$$

有

$$\begin{cases}F_x=2x\\F_y=4y\\F_z=2z\end{cases}$$

将点$(1,1,1)$代入，得

$$\vec{n}=(1,2,1)$$

故切平面为

$$(x-1)+2(y-1)+(z-1)=0$$

或

$$x+2y+z=4$$

法线为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

二、求函数$f(x,y)=x-2y$在条件$x^2+y^2\le 5$下的最大值与最小值。

解：先证明，最值一定在边界上取到。用反证法，假设在圆域内部一点取到最大值，则过该点作平行于x轴直线，与圆的右侧交点处函数值必大于该点处函数值，矛盾！最小值亦然。故最值一定在边界处取到。

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=x-2y+\lambda(x^2+y^2-5)$$

令

$$\begin{cases}L_x=1+2\lambda x=0\\L_y=-2+2\lambda y=0\\L_\lambda=x^2+y^2-5=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=\pm 1\\y=\mp 2\end{cases}$$

故最大值为 5，最小值为-5.

（注：本题亦可采用线性规划法解决，只需求出圆边界上切线斜率为$\frac{1}{2}$的点即可）

三、计算下列二重积分：

(1) $\iint_D \sin\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy, D: x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$;

解：作换元

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

反解出x与y

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

并计算雅各比行列式

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

用不等式组表示uv平面区域

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ -u \leq v \leq u \end{cases}$$

故原积分化为

$$I = \iint_{D'} \sin\frac{v}{u} \cdot \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 du \int_{-u}^{u} \sin\frac{v}{u} dv = 0.$$

（注：也可以利用积分区域关于$y = x$对称，交换x与y的位置后，相加直接得零）

(2) $\iint_D \ln(x^2+y^2+1)\, dxdy, D: x^2+y^2 \leq 1$.

解：利用极坐标换元

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

原式化为

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \ln(r^2+1)\, rdr = \pi(2\ln 2 - 1).$$

四、计算下列三重积分：

(1) $\iiint_V (x^2+y^2) dxdydz, V: \frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq z \leq 1$;

解：利用柱坐标换元

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

并解出积分区域在xy平面上的投影

$$D: x^2+y^2 \leq 2$$

故原积分化为

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^{1}r^2dz=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\left(1-\frac{r^2}{2}\right)dr=\frac{2\pi}{3}.$$

(2) $\iiint_V(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}dxdydz\,,V\colon x^2+y^2+z^2\le 2z.$

解：利用球坐标换元

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$$

故原积分化为

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^7dr=\frac{64\pi}{9}.$$

五、计算下列曲线积分和曲面积分：

(1) 设Σ是三个坐标面和$x+y+z=2$围成的四面体的表面，计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma xyzdS$$

解：容易发现，三个坐标面上，总有$xyz=0$, 故原积分化为

$$I=\iint_S xyzdS$$

其中$S\colon x+y+z=2,x\ge,y\ge 0,z\ge 0$. 解出其在$xy$面上的投影

$$D\colon x+y\le 2$$

化为二重积分

$$I=\sqrt{3}\iint_D xy(2-x-y)dxdy$$

化为累次积分

$$I=\int_0^2dx\int_0^{2-x}xy(2-x-y)dy=\frac{4\sqrt{3}}{15}.$$

(2) 求

$$\int_L(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

其中L为曲线$y=1-|1-x|$上，从点$O(0,0)$到点$A(2,0)$的有向折线。

解：补线用格林公式，补充有向线段AO，故原积分化为

$$I=\oint_{L+AO}-\int_{AO}=-\iint_D(2x-2y)dxdy-\int_{AO}x^2dx$$

其中

$$D:\begin{cases}0\le y\le 1\\ y\le x\le 2-y\end{cases}$$

故

$$-\iint_D(2x-2y)dxdy=2\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x-y)dx=-\frac{4}{3};$$

$$-\int_{AO}x^2dx=-\int_2^0 x^2dx=\frac{8}{3}.$$

故原积分为

$$I=\frac{4}{3}.$$

六、求曲线积分

$$I=\oint_L\frac{xdy-(y+1)dx}{x^2+(y+1)^2}$$

其中L是以$(0,0)$为圆心，$R(R\neq 1)$的圆周，取逆时针方向。

解：注意到

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(y-1)^2-x^2}{(x^2+(y+1)^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

故分类讨论，当$R<1$时，圆域内不包含点$(0,-1)$，此时满足格林公式的条件，故

$$I=0$$

当$R>1$时，此时不满足格林公式的条件，故作一小圆$C:x^2+(y+1)^2=\epsilon^2$,使小圆完全包含于大圆内，此时在小圆与大圆所夹区域内可应用格林公式，有

$$I=\oint_{L+C}-\oint_{C^-}=\oint_C\frac{xdy-(y+1)dx}{\epsilon^2}=\frac{1}{\epsilon^2}\cdot 2\pi\epsilon^2=2\pi.$$

七、设$\Sigma:x^2+y^2+z^2=1$,取外侧，求曲面积分

$$I=\iint_\Sigma\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+3y^2+3z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

解：不难发现

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

但球域内包含$(0,0,0)$点，不满足使用高斯公式的条件，故作小椭球面

$$C:x^2+3y^2+3z^2=\epsilon^2$$

使小椭球完全包含于球面中，此时在椭球面与圆面所夹区域内可使用高斯公式，有

$$I=\iint_{\Sigma+C}-\iint_{C^-}=\iint_C\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\epsilon^3}$$

此时便可在椭球面上用高斯公式，得

$$I=\frac{3}{\epsilon^3}\iiint_V dxdydz=\frac{3}{\epsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\frac{\epsilon^3}{3}=\frac{4\pi}{3}.$$

八、求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=\frac{a}{4},z=\frac{a}{2}(a>0)$所截部分的面积。

解：不难写出

$$S=\iint_\Sigma dS$$

其中Σ是题目所说的曲面。改写曲面方程

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

并求出偏导数

$$\begin{cases} z_x=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \\ z_y=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \end{cases}$$

求出曲面在xy平面上的投影

$$D:\frac{3a^2}{4}\le x^2+y^2\le\frac{15a^2}{16}$$

化为二重积分

$$S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

化为累次积分

$$S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{15}}{4}a}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=\frac{\pi a^2}{2}.$$