

2018 级高等数学第二学期期末试卷 (A 类)

一、单项选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 二次积分 $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$ 的积分次序交换后的结果为 ()
 (A) $\int_1^e dy \int_0^{\ln x} f(x, y) dx$; (B) $\int_1^e dy \int_0^{e^y} f(x, y) dx$;
 (C) $\int_0^1 dy \int_0^{e^y} f(x, y) dx$; (D) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$ 。
2. 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 上满足 $1 \leq z \leq 2$ 的部分曲面的面积为: ()
 (A) $2\sqrt{2}\pi$; (B) $3\sqrt{2}\pi$; (C) 2π ; (D) 3π 。
3. $f(x, y) = xy^3$ 在约束条件 $x^2 + y^2 = 4$ 下的最大值为: ()
 (A) $3\sqrt{3}$; (B) $\sqrt{3}$; (C) $2\sqrt{2}$; (D) $\sqrt{2}$ 。
4. 下列级数中, 发散的级数是 ()
 (A) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}}$;
 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+3}{n+2}$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$ 。
5. 下列命题中, 正确命题的个数为 ()
 ① 若数列 $\{a_n\}$ 单调增加, 且收敛于 0, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛;
 ② 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散;
 ③ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}}{n(n+1)}$ 收敛。
 (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3。

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6. 函数 $f(x, y, z) = 2z + \arctan \frac{y}{x}$ 在点 $(1, 2, -1)$ 处的梯度 $\nabla f|_{(1, 2, -1)} =$ _____。
7. $\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{r^3} \cdot \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} 2 \cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV \right) =$ _____。
8. 设平面曲线 C 是圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的逆时针方向, 则曲线积分
 $\oint_C x e^{2x^2 - 3y^2} dx + y e^{2x^2 - 3y^2} dy =$ _____。
9. 微分方程 $y dx + (y - x) dy = 0$ 的通解为: _____。

10. 设函数 $f(x) = \frac{x}{\ln \frac{1}{1-x}}$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上能展开成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$,
则 $c_0 =$ _____。

三、计算题 (本题 8 分)

11. 求曲线 $\begin{cases} x^2 - y^2 - z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 3 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处的切线方程, 并将其表示为标准型方程。

四、应用题 (本大题共 18 分, 其中第 12 题 8 分, 第 13 题 10 分)

12. 若物质曲线 $L: y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} (0 \leq x \leq 1)$ 的线密度函数 $\rho(x, y) = 3x$, 求物质曲线 L 的质量。
13. 设有平面力场 $\vec{F} = (2xy^3 - y^2 \cos x)\vec{i} + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)\vec{j}$, 求一质点沿曲线 $C: 2x = \pi y^2$, 从点 $O(0, 0)$ 运动到点 $A(\frac{\pi}{2}, 1)$ 时, 场力 \vec{F} 所做的功。

五、计算曲面积分 (本大题共 18 分, 其中第 14 题 8 分, 第 15 题 10 分)

14. Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 上满足 $z \geq \frac{a}{2}$ 的那部分球面块,
计算曲面积分: $\iint_{\Sigma} (x - y + 5z^3) dS$ 。
15. 计算曲面积分 $\iint_S y^2 dy dz + (z^2 + 1) dx dy$,
其中 S 是抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上介于 $z = 1$ 和 $z = 2$ 之间的部分曲面的下侧。

六、级数题 (本大题共 18 分, 其中第 16 题 8 分, 第 17 题 10 分)

16. 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [4^n + (2 + \frac{1}{n})^n] (2x - 1)^n$ 的收敛域。
17. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 9^n}$ 的和。

七、证明题 (本题 8 分)

18. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 其中 $a_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots$ 。证明:
- (1) 若数列 $\{a_n\}$ 有界, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1;
- (2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = 0$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1。