Printout

2022年5月25日 7:40

南开大学 2019 级“场论与无穷级数（信）”结课统考试卷（A 卷） 2020 年 9 月 4 日

（说明：答案务必写在装订线右侧，写在装订线左侧无效。影响成绩后果自负。）

姓名　学号　专业　任课教师

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	卷面成绩	核分签名	复核签名
得分											

草稿区

一、判定下列级数的敛散性($4\times5=20$ 分):

一题得分	

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{\sqrt[n]{n}})$;

解. $n\to\infty$ 时 $\frac{1}{3^n}+\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\to 1\neq 0$ ∴级数发散.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{[1+(1/n)]^{n^2}}$;

解：记 $x_n=n^2/(1+\frac{1}{n})^{n^2}$，∵ $\sqrt[n]{x_n}=\frac{n^{\frac{2}{n}}}{(1+\frac{1}{n})^n}\to 1/e<1$ ∴级数收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+19}$;

解，记 $y_n=\sqrt{n}/n+19$

取 $f(x)=x/x^2+19$

∴ $f'(x)=\frac{1}{x^2+19}-\frac{2x^2}{(x^2+19)^2}=\frac{19-x^2}{(x^2+19)^2}$

∴ $f(x)$ 在 $(5,+\infty)$ 单减

∴ $y_n=f(\sqrt{n})$ 单减趋于 0

当 $n\geq 25$ 时

∴级数收敛

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

取 $f(z)=\frac{1}{z\ln z}$

则 $f'(z)=\frac{\ln z+1}{-(z\ln z)^2}<0\ (z>1)$

∴ $f(z)$ 在 $(1,+\infty)$ 单减趋于 0

而 $\int_{3}^{+\infty}f(z)dz=\int_{3}^{+\infty}\frac{1}{z\ln z}dz=\ln\ln(z)\Big|_3^{+\infty}=+\infty$ ∴级数发散.

$\int_0^{+\infty}f(x)dx$

0 瑕 | $+\infty$ 广义

$\int_0^1 f(x)dx$ | $\int_1^{+\infty}f(x)dx$

4 3 2 1 | 2 3 4

二、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的收敛域、和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 的和.（本题 10 分）.

二题得分	

解. 由 $\sqrt[n]{n^2}\to1$ ∴ $R=1$

又 $x=\pm1$ 时，

$|n^2x^n|=n^2\nrightarrow 0$

∴收敛域为 $(-1,1)$

记 $S(x)=\sum_{n\geq1}n^2x^n\quad x\in(-1,1)$

则 $\int_0^x S(t)/t\,dt=\sum_{n\geq1}n\cdot x^n=f(x)$ ✓

$\Rightarrow\int_0^x f(t)/t\,dt=\sum_{n\geq1}x^n=x/1-x=\frac{1}{1-x}-1$

∴ $f(x)/x=1/(1-x)^2$

$\Rightarrow f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1-x)}$

$\Rightarrow S(x)/x=2/(1-x)^3-1/(1-x)^2=\frac{1+x}{(1-x)^3}$

∴ $S(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\quad x\in(-1,1)$

∴ $\sum_{n\geq1}\frac{n^2}{2^n}=S(\frac{1}{2})=6$.

由 $\sum_{n\geq0}x^n=1/1-x$

$\Rightarrow\sum_{n\geq1}nx^{n-1}=1/(1-x)^2$

$\Rightarrow\sum_{n\geq1}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow\sum_{n\geq1}n^2x^{n-1}=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$

∴ $\sum_{n\geq1}n^2x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

$S(x)=\sum_{n\geq0}a_nx^n$

$\Rightarrow S'(x)=\sum_{n\geq1}n\cdot a_n\cdot x^{n-1}$

$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n\geq0}a_n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\frac{1}{2}\frac{2}{(\frac{1}{2})^3}$

草稿

三、将函数 $f(x)=\frac{1}{(x^2-x-2)}$ 展开为 x 的幂级数，并指出其收敛域.（本题 10 分）

三题得分	

解：$f(x)=\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1})$

$=\frac{-1}{6}\frac{1}{1-x/2}-1/3\frac{1}{1+x}$

$=-1/6\sum_{n\geq0}(\frac{x}{2})^n-1/3\sum_{n\geq0}(-x)^n$.

$=\sum_{n\geq0}x^n(\frac{-1}{6}(\frac{1}{2})^n-\frac{1}{3}\cdot(-1)^n)$

由 $|x|<1$ ⇒ 收敛域为 $(-1,1)$

$\frac{1}{1+t}$

$\frac{1}{1-t}$

$|\frac{x}{2}|<1$

$|x|<1$

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解（每小题 5 分）:

四题得分	

(1) $x(1+y^2)dx+y(1-x^2)dy=0$;

(2) $-y+y'=-8x$

$y=e^x(\int e^{-x}(-8x)dx)$

$\int e^{-x}x\,dx$

$=-e^{-x}x+\int e^{-x}dx$

$=-e^{-x}x-e^{-x}+c$

∴ $y=e^x(e^{-x}\cdot 8x+8\cdot e^{-x}+c)$

$=8(x+1)+c\cdot e^x$

(3) $y''-y=2x+1$;

由 $\lambda^2-1=0$

$\Rightarrow\lambda=\pm1$

取 $f(x)=ax+b$

$\Rightarrow f''-f=2x+1$

∴ $f(x)=-2x-1$

∴ $y=-2x-1+C_1e^x+C_2e^{-x}$

(4) $\frac{dy}{dx}=1+(\frac{y}{x})^2+(y/x),(x\neq0)$;

(5) $(1+x^2)y''=2xy',y(0)=2,y'(0)=1$;

草稿区

五、计算下列广义积分（每小题 5 分）:

五题得分	

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx$;

解. 由 $\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{1+x^2}+c\cdot\frac{2x}{1+x^2}$

$\Rightarrow a=(\frac{1}{1+x^2})\Big|_{x=0}=1$

取 $x=1,-1$ 有

$c\ \frac{1}{2}=a+\frac{b}{2}+c$

$a=(\frac{1}{1+x^2})\Big|_{x=0}=1$,

$a+2c=(\frac{1}{1+x^2})\Big|_{x\to\infty}=0\Rightarrow c=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\begin{cases}b=0\\c=-\frac{1}{2}\end{cases}$

∴ 原式 $=\int_1^{\infty}(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2})dx$

$=(\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2))\Big|_1^{\infty}$

$\ln x\Big|_1^{\infty}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^{\infty}$. X

学号

专业

任课教师

解：由 $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{1+x^2} + \frac{c}{1+x^2}$

$\Rightarrow a = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_{x=0} = 1$

取 $x = 1, -1$ 有

$\begin{cases} \frac{1}{2} = a + \frac{b}{2} + c \\ -\frac{1}{2} = -a + \frac{b}{2} - c \end{cases}$

$\therefore$ 原式 $= \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$

$= \left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_1^{\infty}$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 2.$

五题得分	

（2）$\int_1^2 \frac{(x-1)}{\sqrt{2-x}}dx$

解 $\int_1^2 \frac{x-2+1}{\sqrt{2-x}}dx = \int_1^2 \left((2-x)^{-\frac{1}{2}} - (2-x)^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$= -2(2-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{4}{3}.$

$-2+\frac{2}{3}$

令 $t = \sqrt{2-x} \Rightarrow x = 2 - t^2$

$\Rightarrow dx = -2t\,dt$

原式 $= \int_1^0 \frac{1-t^2}{t}(-2t)dt$

$= 2\int_0^1 (1-t^2)dt = 2\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^1$

$= \frac{4}{3}.$

六、（本题 9 分）将函数 $f(x) = x(\pi - x), (0 \le x \le \pi)$ 展开为（周期为 2π）的余弦级数.

解：依题意 $b_n = 0$　$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos nx\,dx$

$= \frac{2}{\pi}(\pi - x)\cdot x \cdot \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\sin nx)(\pi - 2x)dx$

$= \frac{-2}{n\pi}(\pi - 2x)\frac{\cos nx}{-n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,(-2)\,dx$

$= \frac{2}{n^2}(-1)^{n+1} - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^2\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}$

$= \frac{2}{n^2}\left((-1)^{n+1} - 1\right) = \begin{cases} -\frac{1}{m^2} & n = 2m \\ 0 & n = 2m+1 \end{cases}$

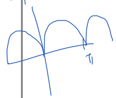
六题得分	

$\therefore f(x) \sim S(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m\ge 1} \frac{-1}{m^2}\cos(2mx)$

$= x(\pi - x)\quad \forall x \in [0, \pi]$

$\frac{2}{n^2\pi}(-\pi)(\cos n\pi)$

$\frac{2}{n^2\pi}\pi$



姓名

学号

专业

任课教师

七、（本题 10 分）设 $\alpha \in R$, 讨论广义积分 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^2}dx$ 的敛散性。.

草稿区

解　记 $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^2}$

$x \to 0$ 时　$f(x) \sim x^{\alpha-1}$　$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx$ 收敛　当且仅当　$\alpha - 1 > -1$ 即 $\alpha > 0$

$x \to +\infty$ 时　$f(x) \sim x^{\alpha-3}$　$\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛　当且仅当　$\alpha - 3 < -1$ 即 $\alpha < 2$

综上　$\int_0^{\infty} f(x)dx$ 收敛　当且仅当　$\alpha \in (0, 2)$

七题得分	

八、（6 分）设 $|\alpha| < 1$，计算积分：$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{1+\alpha\sin x}{1-\alpha\sin x}\right)dx$，

其中被积函数在 $x = 0$ 之值，取其在该点的极限。

八题得分	

解　依题意

$I'(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}\left(\frac{\sin x}{1+\alpha\sin x} - \frac{-\sin x}{1-\alpha\sin x}\right)$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,dx}{1-\alpha^2\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,dx}{\cos^2 x + (1-\alpha^2)\sin^2 x}$

取 $t = \cot x$ 则 $dt = \frac{-dx}{\sin^2 x}$

$\therefore I'(\alpha) = \int_{+\infty}^0 \frac{-2\,dt}{t^2 + (1-\alpha^2)} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1-\alpha^2) + t^2}$

$= \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{1-\alpha^2}}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$

$\frac{1}{1+\frac{t^2}{1-\alpha^2}}$　$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$

又 $I(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{0}{\sin x}dx = 0$

$\therefore I(\alpha) = \pi\cdot\arcsin\alpha.$