9:25

姓名　学号　专业　任课教师

南开大学 2018 级“场论与无穷级数（信）”结课统考试卷（A 卷） 2019 年 6 月 10 日

（说明：答案务必写在装订线右侧，写在装订线左侧无效。影响成绩后果自负。）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	卷面成绩	核分签名	复核签名
得分											

草稿区

一、判定下列级数的敛散性($4\times 5=20$ 分):

一题得分	

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{6n^2+5}$;

由 $u_n = \frac{n+2}{6n^2+5} \sim \frac{1}{6}n^{-1}$ ∴ 级数发散

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$;

$\frac{1}{\sqrt{n}}$

记 $f(x) = x+\frac{1}{x}$

则 $f'(x) = 1-\frac{1}{x^2}>0$ $(x>1)$ 时

∴ $\frac{\sqrt{n}}{n+1} = (f(\sqrt{n}))^{-1}$ 单减 ($n\geq 2$ 时)

且 $\frac{\sqrt{n}}{n+1}\to 0$ ∴ 级数收敛

① $u_n\to 0$

$\sim n^{-\frac{1}{2}}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$;

记 $x_n = \frac{3^n\cdot n!}{n^n}$

则 $x_{n+1}/x_n = 3\cdot\frac{n+1}{(n+1)^{n+1}}\cdot n = 3/(1+\frac{1}{n})^n \to e>1$ ∴ 级数发散.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n}}, a\in R$.

记 $y_n = a^n/\sqrt{n}$

则 $\sqrt[n]{|y_n|} = |a|/n^{\frac{1}{2n}} \to |a|$

∴ $|a|<1$ 时 级数收敛

$|a|>1$ 时 级数发散

$a=1$ 时 $y_n = n^{-\frac{1}{2}}$ 级数发散

$a=-1$ 时 $y_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$\frac{1}{\sqrt{n}}\downarrow 0$ $(n\to\infty)$

∴ 级数收敛

∴ 综上 $a\in[-1,1)$ 时 级数收敛

$a\geq 1$ 或 $a<-1$ 时 级数发散

R

$(-R,R)$

二、求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2(n+1)}$ 的收敛域，和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ 的和.（本题 10 分）.

二题得分	

取 $u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2(n+1)}$

则 $|u_{n+1}/u_n| = x^2\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+3)(2n+4)} \to x^2$

∴ $|x^2|<1$ 时 收敛

$x=\pm 1$ 时 $|u_n| = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{1}{4}\frac{1}{n^2}$

记 $S(x) = \sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}$ $x\in[-1,1]$

则 $S'(x) = \sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}$, $S(0)=0$

$S''(x) = \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\cdot x^{2n} = 1/(1+x^2)$, $S'(0)=0$

$\Rightarrow S'(x) = \arctan x$

∴ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = S(1) = \pi/4 - \frac{1}{2}\ln 2$

∴ $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ 收敛.

∴ 收敛域为 $[-1,1]$

∴ $S(x) = \int_0^x \arctan t\,dt = t\cdot\arctan t\Big|_0^x - \int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt$

$= x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^x = x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

姓名　学号　专业　任课教师

草稿区

三、将函数 $f(x)=\frac{1+x}{(x-1)^2}$ 展开为 x 的幂级数，并说明其收敛域.（本题 10 分）

三题得分	

解 $f(x) = \frac{x-1+2}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$

又 $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n\geq 0}x^n \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n\geq 1}x^{n-1}n = \sum\limits_{n\geq 0}(n+1)x^n$

∴ $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0}x^n(2(n+1)-1) = \sum\limits_{n\geq 0}(2n+1)\cdot x^n$

由 $\sqrt[n]{2n+1}\to 1$

$\Rightarrow R=1$

$x=\pm 1$ 时 $|(2n+1)x^n| \not\to 0$

∴ 收敛域为 $(-1,1)$

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解（每小题 5 分）:

四题得分	

（1） $y'(xy+x^3y)=1+y^2$;

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{}$

（2） $-y+xy'=4x^2$

（3） $y''+4y'+4y=x+8$;

（4） $\frac{dy}{dx}=\tan\frac{y}{x}+(y/x), (x\neq 0)$;

（5） $xy''=y', y(1)=1, y'(1)=2$;

姓名

学号

专业

任课教师

五、计算下列广义积分（每小题 5 分）：　　$x^{-\frac{1}{2}}$　　$x^{-\frac{3}{2}}$

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；

令 $t=\sqrt{x}$ 则 $x=t^2$　$dx=2t\,dt$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t(1+t^2)}\cdot 2t\,dt=2\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}$

$=2\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\pi$

（2）$\int_0^1\frac{(2-x)}{\sqrt{x}}dx$　$=\int_0^1(2x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})dx$

$=(4x^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})\Big|_0^1=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$

五题 得分	

六、（本题 9 分）将函数 $f(x)=1-x^2,(0\le x\le\pi)$ 展开为（周期为 2π）的余弦级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

解 依题意　$b_n=0$　$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx$

$=\frac{2}{\pi}(x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^{\pi}=2-\frac{2}{3}\pi^2$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}(1-x^2)\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\cdot(-2x)\,dx$

$=\frac{4}{n\pi}\cdot x\cdot\frac{\cos nx}{-n}\Big|_0^{\pi}+\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$

$=\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}+\frac{4}{n^2\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}$

$\therefore f(x)\sim S(x)=(1-\frac{1}{3}\pi^2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}\cdot\cos nx$

$=1-x^2$　$x\in[0,\pi]$

六题 得分	

取 $x=0$

$\therefore 1=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

草稿区

姓名

学号

专业

任课教师

七、（本题 10 分）设 $\alpha>0$，讨论广义积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 敛散性. 记 $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}$

∞

$\ln x \ll x^{\alpha} \ll a^{x}$

七题 得分	

解　$x\to 0^+$ 时　$\ln(1+x^2)\sim x^2$

而 $\int_0^1 x^{2-\alpha}dx$ 收敛　当且仅当 $2-\alpha>-1$　即 $\alpha<3$

$x\to+\infty$ 时　$\alpha>1$ 时　由 $\frac{f(x)}{x^{-(\frac{1+\alpha}{2})}}=x^{\frac{1-\alpha}{2}}\ln(1+x^2)\to 0\ (x\to\infty)$

而 $\int_1^{\infty}x^{-(\frac{1+\alpha}{2})}dx$ 收敛　$\therefore\int_1^{\infty}f(x)dx$ 收敛

$\alpha\le1$ 时　$f(x)\ge x^{-\alpha}$　$x\ge3$ 时

而 $\int_3^{\infty}x^{-\alpha}dx$ 发散　$\therefore\int_1^{\infty}f(x)dx$ 发散

$\therefore$ 综上 $\int_0^{\infty}f(x)dx$ 收敛

当且仅当　$\alpha\in(1,3)$

草稿区

八、（6 分）设 $\alpha>0$，计算积分：$I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(\alpha\cos x)}{\cos x}dx$，

其中被积函数在 $x=\pi/2$ 之值，取其在该点的极限.

八题 得分	

解 依题意 记 $f(x)=\frac{\arctan(\alpha\cos x)}{\cos x}$

$x=\frac{\pi}{2}$ 为积分瑕点.

又 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时　$\cos x\to0^+$，

$\therefore f(x)\to\alpha$.　$\therefore$ 积分收敛

$z\to0$

$\arctan z\sim z$

$\therefore I'(\alpha)$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos x}\frac{\cos x}{1+\alpha^2\cos^2x}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\alpha^2\cos^2x}$

令 $t=\tan x$ 则 $dt=\frac{dx}{\cos^2x}$

$I'(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\alpha^2+(t^2+1)}dt$

$=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{1+\alpha^2}}\Big|_0^{\infty}$

$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

又 $I(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan 0}{\cos x}dx=0$

$\therefore I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$

$=\frac{\pi}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_0^{\alpha}$

$=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$.

$x\to\infty$

$x^{\varepsilon}\ln x\to0$

(4) $x^{-\alpha}$

$f(x)=\frac{\ln x}{x^{\alpha}}$.　$\int_1^{\infty}x^{-p}dx$ $\begin{cases}p>1 & 收\\ p\le1 & 发\end{cases}$

$f(x)/x^{-p}=\frac{\ln x}{x^{\alpha-p}}$

$p\le1\to$ 发

$p>1$

$\alpha-p>0$

$\alpha>p>1$

$\frac{dx}{\sin^2x+\cos^2x+\alpha^2\cos^2x}$.

$\frac{1}{1+\alpha^2+t^2}$

$\frac{t}{1}$

$\frac{1}{1+\frac{t^2}{1+\alpha^2}}\ \frac{1}{1+\alpha^2}$