《微积分甲（Ⅱ）》

2021-2022 学年第二学期期末考试 A 卷

1.求函数 $f(x)=1+\arctan x$ 的麦克劳林级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$，并求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

2.设有一金属薄片，其形如曲面 $z=xy$ 与圆柱体 $x^2+y^2=1$ 相交的部分，其面密度为 e，求薄片的质量 m.

3.设空间曲线 Γ：$\left\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, t\in\left[\sqrt{2}, \sqrt{\pi^2-2}\right]\right\}$，求第一类曲线积分 $I_1=\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds$

4.已知曲线C：$(x-1)^2+y^2=4$，且 C 取逆时针方向，求第二类曲线积分$I_2=\oint_C \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$.

5.设 S 为球面片$\{(x，y，z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=1，x\geqslant 0，y\geqslant 0，z\geqslant 0\}$，取外(上)侧为正侧，计算第二类曲面积分$J=\iint\limits_S z^3dxdy$.

6.求$f(x)=\arcsin(\cos x)$的以2π为周期的 Fourier 级数$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，并求$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)}{(2n+1)^2}$的值.

7.已知单位闭球体B：$\{(x，y，z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，求函数$u=x+y+z$在 B 上的最大值与最小值.

8.设函数 $f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y)\neq(0, 0) \\ 0, & (x, y)=(0, 0) \end{cases}$，已知 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$\alpha\in[0, 2\pi)$.

(1)求 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0, 0)}$.

(2)证明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不可微.

9.已知函数 $g(u, v)$ 存在连续的一阶偏导数 $\dfrac{\partial g(u, v)}{\partial u}$，$\dfrac{\partial g(u, v)}{\partial v}$，且 $\forall(u, v)\in\mathbb{R}^2$，$g_1'(u, v)+2g_2'(u, v)\neq 0$，函数 $z=z(x, y)$，$(x, y)\in\mathcal{O}$ 由方程 $g(x-z, y-2z)=0$ 确定.

(1)证明：$\forall(x, y)\in\mathcal{O}$，$\dfrac{\partial z(x, y)}{\partial x}+2\dfrac{\partial z(x, y)}{\partial y}=1$.

(2)证明：曲面 $g(x-z, y-2z)=0$ 上的每一点处的切平面的法向量都垂直于向量 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

10.已知正项数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\dfrac{1}{2}$，证明交错级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$收敛.

11.设$D=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leqslant 1\}$，$U$是$\mathbb{R}^2$包含$D$的开区域，函数$z=f(x,\ y)$为定义再$U$上的一个非负二元函数，存在连续的一阶偏导且$f|_{\partial D}=0$，证明：

$$\left|\iint_D f(x,\ y)\,dxdy\right|\leqslant\frac{\pi}{3}\max_{(x,\ y)\in D}\sqrt{\left[\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}\right]^2}$$

12.设M为$\mathbb{R}^3$中由一光滑简单封闭曲面S所围成的有界闭区域.$V(M)$为M的体积，u为包含M的一个开集.$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$为$S$的单位外法向量，$f(x,\ y,\ z)$为定义在$u$上并具有所有连续二阶偏导的函数，且满足$\forall(x,\ y,\ z)\in M$，$f(x,\ y,\ z)\neq 0$，$div\left(f\cdot\overrightarrow{grad}(f)\right)=2f(x,\ y,\ z)$，$\left\|\overrightarrow{grad}(f)\right\|^2=f(x,\ y,\ z)$.证明：$\oiint_S\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}dS=V(M)$.

2021-2022 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

1.【解析】有 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$，则 $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}dt$

$=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，则

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}$$

令 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1}/\dfrac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}\right|=x^2<1$，即 $-1<x<1$，得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 $R=1$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一章 无穷级数 第四部分 函数展开成幂级数

2.【解析】有 $z_x=y$，$z_y=x$，曲面在 xOy 面上的投影为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$，则质量 m

$$m=\iint_S mdS=m\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=m\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=m\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,dr$$

$$=\pi m\int_0^1\sqrt{1+r^2}\,d(r^2+1)=\frac{2\pi m}{3}(r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2\pi m}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 重积分 第四部分 重积分的应用 4.1 曲面的面积

3.【解析】有 $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt=\sqrt{t^2+2}\,dt$，又 $x^2+y^2+z^2=2t^2$，因此

$$I_1=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\pi^2-2}}\sqrt{2t^2}\cdot\sqrt{t^2+2}\,dt\overset{x=t^2}{=}\int_2^{\pi^2-2}\frac{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x}}dx=\int_2^{\pi^2-2}\sqrt{x+2}\,d(x+2)$$

$$=\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^{\pi^2-2}=\frac{2}{3}(\pi^3-8).$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 曲线积分与曲面积分 第一部分 对弧长的曲线积分 1.1 对弧长的曲线积分的概念与性质

4.【解析】显然，原点在曲线 C 内部，任取足够小的 $\varepsilon>0$，记 l：$4x^2+y^2\leq\varepsilon^2$，方向取顺时针方向，令 $P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$，则容易得到 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{-4x^2+y^2}{(4x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，利用格林公式得到

$\oint_{C+l}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$，因此

$$I_2=-\oint_l\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{l^-}xdy-ydx=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D'}2dxdy=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon=\pi.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 曲线积分与曲面积分 第二部分 对坐标的曲线积分

5.【解析】容易得到$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，S 在xOy面上的投影为

$$D=\{(x,\ y)|x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$$

则$J=\iint\limits_D (1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r(1-r^2)^{\frac{3}{2}}dr=-\frac{\pi}{4}\int_0^1(1-r^2)^{\frac{3}{2}}d(1-r^2)$

$=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{10}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十 曲线积分与曲面积分 第五部分 对坐标的曲面积分 5.1 对坐标的曲面积分

6.【解析】$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\arcsin(\cos x)\mathrm{d}x=\frac{x\arcsin(\cos x)}{\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\mathrm{d}x$

$=-\pi+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{|\sin x|}\mathrm{d}x=-\pi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=0$；对于$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\arcsin(\cos x)\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x$而言，令

$u=\arcsin(\cos x)$，$v=\cos nx$，采用列表法求解该积分：

u	$\arcsin(\cos x)$	$-\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	0
v	$\cos nx$	$\frac{\sin nx}{n}$	$-\frac{\cos nx}{n^2}$

则$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\arcsin(\cos x)\cdot\sin nx}{n}-\frac{\sin x\cdot\cos nx}{n^2\sqrt{1-\cos^2 x}}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{\sin x\cdot\cos nx}{\pi n^2|\sin x|}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\cos nx}{\pi n^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$

$=-\frac{2\cos nx}{\pi n^2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2-2\cos n\pi}{\pi n^2}=\frac{2[1-(-1)^n]}{\pi n^2}=\begin{cases}0\text{，}n\text{为偶数}\\ \frac{4}{\pi n^2}\text{，}n\text{为奇数}\end{cases}$，$a_0$在通项中.

同理对于$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\arcsin(\cos x)\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\arcsin(\cos x)\cdot\cos nx}{n}-\frac{\sin x\cdot\sin nx}{n^2\sqrt{1-\cos^2 x}}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0$，

则函数的 Fourier 级数$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2[1-(-1)^n]}{\pi n^2}\cos nx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$.令$x=1$带入

其中得到$f(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4\cos(2n+1)}{\pi(2n+1)^2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)}{(2n+1)^2}=\frac{\pi f(1)}{4}=\frac{\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{4}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一章 无穷级数 第五部分 傅里叶级数 5.2 函数展开成傅里叶级数

7.【解析】①在球体内部时，有$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq 0$，因此不存在极值，也不存在最值；

②在球体边界上时，构造拉格朗日函数$L(x,\ y,\ z,\ \lambda)=x+y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$，令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=1+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=1+2\lambda y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=1+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2-1=0\end{cases}$$，求解得到 $x=y=z=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\lambda=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\lambda=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，另一方面，

$H=\begin{bmatrix}2\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2\lambda\end{bmatrix}$，当 $\lambda=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$H$ 正定，取得极小值，此时 $u_{极小}=-\sqrt{3}$，当 $\lambda=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，H 负定，取得极大值，此时 $u_{极大}=\sqrt{3}$，综上所述函数 u 在 B 上的最大值为 $\sqrt{3}$，最小值为 $-\sqrt{3}$.（此处把可能是最值的点直接带进去比较 u 的大小也是可以的）

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分及其以应用 第七部分 多元函数的极值及其求法 7.2 条件极值 拉格朗日乘数法

8.【解析】(1)根据方向导数的定义得到 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,\ 0)}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x,\ \Delta y)-f(0,\ 0)}{\rho}$

$=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{f(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{\frac{\rho\cos\alpha\cdot\rho\sin\alpha}{\sqrt{\rho^2}}}{\rho}=\cos\alpha\cdot\sin\alpha$.

(2)有 $f_x(0,\ 0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,\ 0)-f(0,\ 0)}{x}=0$，同理可得 $f_y(0,\ 0)=0$，那么有

$\Delta z=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{f(x,\ y)-xf_x(0,\ 0)-yf_y(0,\ 0)-f(0,\ 0)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{f(x,\ y)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)}$

取路径 $y=kx$，则 $\Delta z=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\dfrac{kx^2}{x^2(1+k^2)}=\dfrac{k}{1+k^2}$，结果与 k 有关，所以极限不存在，因此 $f(x,\ y)$ 在 $(0,\ 0)$ 处不可微.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分及其以应用 第六部分 方向导数与梯度 6.1 方向导数

9.【解析】(1)对方程 $g(x-z,\ y-2z)=0$ 两边关于 x 求偏导得到 $\left(1-\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)g_1'-2\dfrac{\partial z}{\partial x}g_2'=0\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{g_1'}{g_1'+2g_2'}$；两边关于 y 求偏导得到 $-\dfrac{\partial z}{\partial y}g_1'+\left(1-2\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)g_2'=0\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{g_2'}{g_1'+2g_2'}$，因此 $\forall(x,\ y)\in\mathcal{O}$，

$$\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}+2\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}=1.$$

(2)由(1)可知曲面 $g(x-z,\ y-2z)=0$ 在任意点处的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{g_1'}{g_1'+2g_2'},\ \dfrac{g_2'}{g_1'+2g_2'},\ -1\right)$，又有 $\dfrac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}+2\dfrac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}=1$，即 $\dfrac{g_1'}{g_1'+2g_2'}+\dfrac{2g_2'}{g_1'+2g_2'}-1=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}=0$，即每一点处的切平面的法向量都垂直于向量 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分及其以应用 第五部分 多元函数微分学的几何应用 5.2 曲面的切平面与法线

10.【解析】依据题意，对$\forall \varepsilon>0$，存在N_0，当$n>N_0$时，成立$\left|n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，即有

$$1+\frac{1-2\varepsilon}{2n}<\frac{a_n}{a_{n+1}}<1+\frac{1+2\varepsilon}{2n}$$

显然有$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$，得到数列$\{a_n\}$单调减少.下面证明$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$：取$0<\sigma<\frac{1}{4}$，则有

$$\lim_{n\to+\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}-1\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}-1}{\frac{1}{n}}=\sigma<\frac{1}{4}$$

因此存在N_1，当$n>N_1$时，有$n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}-1\right]<\frac{1}{4}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}<1+\frac{1}{4n}$，取$n>\max\{N_0,\ N_1\}$，

则$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}<1+\frac{1}{4n}<\frac{a_n}{a_{n+1}}\Rightarrow n^{\sigma}a_n>(n+1)^{\sigma}a_{n+1}>0$，即数列$\{n^{\sigma}a_n\}$单调递减且有下界，故数列

$\{n^{\sigma}a_n\}$收敛，亦有界，则$0<n^{\sigma}a_n\leq M\Rightarrow 0<a_n\leq\frac{M}{n^{\sigma}}$，利用夹逼原理可以得到$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.结合莱

布尼茨判别法可知，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$收敛.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一章 无穷级数 交错级数

11.【解析】记$M=\max\limits_{(x,\ y)\in D}\sqrt{\left[\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}\right]^2}$，对$\forall(x,\ y)\in D$，由原点向$(x,\ y)$引一条射线，与圆周交于$(x_0,\ \ y_0)$，由泰勒展开式和柯西-施瓦兹不等式得到

$$f(x,\ y)=f(x_0,\ \ y_0)+f'_x(\xi)(x-x_0)+f'_y(\eta)(y-y_0)=f'_x(\xi)(x-x_0)+f'_y(\eta)(y-y_0)$$

$\leq\sqrt{[f'_x(\xi)]^2+[f'_y(\eta)]^2}\cdot\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\leq M(1-r)$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2}$，因此

$$\left|\iint_D f(x,\ y)dxdy\right|\leq M\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(1-r)dr=\frac{M\pi}{3}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 重积分 第二部分 二重积分的计算方法 2.2 利用极坐标计算二重积分

12.【解析】有$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$，则由高斯公式得到

$$\oiint_S\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}dS=\oiint_S\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)dS=\iiint_M\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}\right)dxdydz$$

又 $f\cdot\overrightarrow{grad}(f)=\left(f\dfrac{\partial f}{\partial x},\ f\dfrac{\partial f}{\partial y},\ f\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\Rightarrow div\left(f\cdot\overrightarrow{grad}(f)\right)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2+f\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ $+f\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}+f\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 z}=2f(x,\ y,\ z)$，而 $\left\|\overrightarrow{grad}(f)\right\|^2=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2=f(x,\ y,\ z)$，因此 $div\left(f\cdot\overrightarrow{grad}(f)\right)=\left\|\overrightarrow{grad}(f)\right\|^2+f(x,\ y,\ z)\cdot\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 z}\right)$，得到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}=1$$

因此 $\displaystyle\oiint_S\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}dS=\iiint_M\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}\right)dxdydz=\iiint_M dxdydz=V(M).$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 曲线积分与曲面积分 第五部分 对坐标的曲面积分 【5-1】两类曲面积分的关系