

2016 级 场论与无穷级数 参考答案

一、判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+6}{n^2+1}$;

解：收敛。注意到这是交错级数，并注意到

$$f(x) = \frac{x+6}{x^2+1}$$

有

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2-12x}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2+12x-1}{(x^2+1)^2} < 0, x \geq 1$$

故数列

$$u_n = \frac{n+6}{n^2+1}$$

单调递减，并

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+6}{n^2+1} = 0$$

故该级数收敛。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$;

解：注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{2}{e} < 1$$

故原级数收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

解：注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = +\infty$$

故原级数发散。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n-1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$;

解：该级数为正项级数，故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{n-1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{2}$$

故该级数收敛。

二、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n + 1)x^n$ 的收敛域与和函数。

解：注意到

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (n+1) + 1}{n^2 - n + 1} = 1$$

故收敛半径为 1，当 $x = \pm 1$ 时，原级数显然发散，故收敛域为 $(-1, 1)$ 。记和函数为 $S(x)$ ，

又记

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

不难发现这两个级数在 $(-1, 1)$ 上都收敛。记

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

逐项求积分得

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

记 $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ ，再逐项求积分得

$$\varphi(x) = \int_0^x h(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

故

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ f(x) &= [xh(x)]' = \frac{1+x}{(1-x)^3} \\ S_1(x) &= xf(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

又

$$S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

逐项求积分得

$$\int_0^x S_2(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}$$

故

$$S_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

综上

$$S(x) = S_1(x) - S_2(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(1-x)^3}, x \in (-1, 1)$$

三、将函数

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$$

展开为 $x-1$ 的幂级数。

解：注意到

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right)$$

令 $t = x - 1$ ，则

$$f(x) = g(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+4} \right)$$

同时注意到

$$\frac{1}{t+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{2} \right)^n, -2 < t < 2$$

$$\frac{1}{t+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{4} \right)^n, -4 < t < 4$$

故

$$g(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{2} \right)^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{4} \right)^n \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}} \right) t^n$$

代回，得

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}} \right) (x-1)^n$$

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解

(1) $y' + 2xy = x;$

解：这是一阶线性微分方程，根据公式有

$$y = e^{-x^2} \left[\int e^{x^2} \cdot x dx + C \right] = \frac{1}{2} + C e^{-x^2}$$

(2) $(1+x^2)y' = y^2$

解：这是可分离变量的微分方程，注意到有常数解 $y \equiv 0$ ，变形为

$$\frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{1+x^2} dx$$

两边积分得

$$-\frac{1}{y} = \arctan x + C$$

即

$$y = -\frac{1}{\arctan x + C}$$

(3) $y'' + y = 2x$;

解：这是常系数二阶线性微分方程，其特征方程为

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

解得

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$$

故与之对应的齐次方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

注意到 $f(x) = 2x$ ，故特解必然满足形式

$$y^* = kx$$

显然，一个特解可写为

$$y^* = 2x$$

综上，该方程的通解为

$$y = 2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

(4) $(y-x)\frac{dy}{dx} = x+y$;

解：注意到 $y = x$ 不是原方程的解，做变形

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{y-x} = \frac{1+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1}$$

这是齐次方程，令 $u = \frac{y}{x}$ ，则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ，故原式化为

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1+u}{u-1}$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1 + 2u - u^2}{u - 1}$$

注意到当 $u \equiv 1 \pm \sqrt{2}$ 时, 方程总是成立, 故

$$y = (1 \pm \sqrt{2})x$$

是原方程的解。除此之外, 进一步令

$$\frac{1}{x} dx = \frac{u - 1}{1 + 2u - u^2} du$$

两边同时积分得

$$\ln |x| = -\frac{1}{2} \ln |1 + 2u - u^2| + C$$

代回, 得

$$\ln |x| = -\frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \right| + C$$

整理, 得

$$x^2 + 2xy - y^2 = C_1$$

其中 C_1 为任意常数。

(5) $(1 + x^2)y'' = 2xy', y(0) = 1, y'(0) = 3;$

解: 这是可降阶的二阶微分方程, 令 $p = y', p' = y''$, 原方程化为

$$(1 + x^2) \frac{dp}{dx} = 2xp$$

注意到 $p \equiv 0$ 不满足初值条件, 故

$$\frac{1}{p} dp = \frac{2x}{1 + x^2} dx$$

两边同时积分, 得

$$\ln |p| = \ln(1 + x^2) + C$$

即

$$p = y' = C_1(1 + x^2)$$

将初值条件代入, 解得

$$C_1 = 3$$

故

$$y' = 3(1 + x^2)$$

再次积分, 得

$$y = 3x + x^3 + C_2$$

再将初值条件代入, 得

$$C_2 = 1$$

故该方程的解为

$$y = x^3 + 3x + 1$$

五、计算下列广义积分

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3};$$

解：令 $t = 1 + \sqrt{x}$ ，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3} = \int_1^{+\infty} \frac{2(t-1)}{t^3} dt = \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{-2}{t^3} dt = 2 - 1 = 1$$

$$(2) \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}};$$

解：注意到 $x = 1$ 是瑕点，而该积分显然收敛。故，令 $t = \sqrt{1-x}$ ，则

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)t} dt = 2(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$$

六、将函数 $f(x) = 2x^2$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展开为正弦级数。

解：对原函数作奇延拓，得

$$F(x) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x < \pi \\ -2x^2, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

此时

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2x^2 \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left\{ (-1)^{n+1} \frac{2\pi^2}{n} + \frac{4}{n^3} [(-1)^n - 1] \right\}$$

故

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n+1} \frac{2\pi^2}{n} + \frac{4}{n^3} [(-1)^n - 1] \right\} \sin nx, \quad 0 \leq x < \pi$$

七、讨论广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$$

的敛散性。

解：注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

当 $\alpha > 1$ 时， $x = 0$ 为瑕点，故拆分为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$$

对于第一个瑕积分，注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

故该积分在 $\alpha - 1 < 1$ 时收敛。对于第二个无穷限积分，注意到当 $\alpha \leq 1$ 时

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} = +\infty$$

当 $\alpha > 1$ 时，取 $p = \frac{1}{2}(1 + \alpha) > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}} = 0$$

故该无穷限积分在 $\alpha > 1$ 时收敛，在 $\alpha \leq 1$ 时发散。

当 $\alpha \leq 1$ 时，虽然 $x = 0$ 不再是瑕点，但由上述过程知无穷限积分发散。综上，该积分在 $\alpha > 1$ 时收敛，在 $\alpha \leq 1$ 时发散。

八、计算下列积分

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx, a > 0$$

解：注意到

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + a^2 \tan^2 x} dx$$

设 $u = \tan x$ ，则原积分化为

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + a^2 u^2} \cdot \frac{1}{1 + u^2} du \\ &= -\frac{a^2}{1 - a^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (au)^2} du + \frac{1}{1 - a^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du \end{aligned}$$

解得

$$I'(a) = \frac{\pi}{2(1+a)}$$

积分，得

$$I(a) = \int_0^a I'(t) dt = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) - I(0)$$

注意到

$$\lim_{a \rightarrow 0} I(a) = I(0) = 0$$

解得 $C = 0$ ，故

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a).$$