武汉大学 2019-2020 学年

第二学期期末《高等数学 A2》考试试卷（A 卷）解答

一、试解下列各题(每小题 5 分，共 50 分)

1. 讨论二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 的存在性。

解 由 $0\le|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}|\le|x|+|y|$ 　　而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(|x|+|y|)=0$ 　　4 分

故有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$ 　　所以二重极限存在。　　5 分

2. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\ (b_n\ge 0)$ 收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛。

证明：因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛，则有前 n 项和

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_0 \qquad 2 分$$

由数列 $\{S_n\}$ 收敛，有数列 $\{a_n\}$ 也收敛，即有 $|a_n|\le M$，又因为

$|a_nb_n|=|a_n|\cdot|b_n|\le M\cdot|b_n|$，且正数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛。　　5 分

3. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，函数 $y=y(x)$ 由 $e^x=\int_0^{x-y}\frac{\sin t}{t}dt$ 确定，求 $\frac{du}{dx}$.

解 $du=f_x'dx+f_y'dy+f_z'dz$

由 $xe^x-ye^y=ze^z$ 两边，得微分得：$dz=\frac{(1+x)e^x}{(1+z)e^z}dx-\frac{(1+y)e^y}{(1+z)e^z}dy$

由 $e^x=\int_0^{x-y}\frac{\sin t}{t}dt$ 两边，得微分得：$dy=\frac{\sin(x-y)-(x-y)e^x}{\sin(x-y)}dx$　　4 分

故 $\frac{du}{dx}=f_x'+f_z'\cdot\frac{\sin(x-y)-(x-y)e^x}{\sin(x-y)}+f_z'\cdot(\frac{(1+x)e^x}{(1+z)e^z}-\frac{(1+y)e^y}{(1+z)e^z}\cdot\frac{\sin(x-y)-(x-y)e^x}{\sin(x-y)})$　　5 分

4. 设 $z=f[x^2-y,\varphi(xy)]$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$\varphi(u)$ 二阶可导，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'[x^2-y,\varphi(xy)]+yf_2'[x^2-y,\varphi(xy)]\varphi'(xy)$　　2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[-f_{11}''+xf_{12}''\varphi']+f_2'\varphi'+y\varphi'[-f_{12}''+xf_{22}''\varphi']+xyf_2'\varphi''$$

$$=(\varphi'+xy\varphi'')f_2'-2xf_{11}''+(2x^2-y)\varphi'f_{12}''+xy(\varphi')^2f_{22}'' \qquad 5 分$$

5. 已知函数的全微分 $\mathrm{d}f(x,y)=(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$，求 $f(x,y)$ 的表达式。

解 由全微分定义，则 $\frac{\partial f}{\partial x}=x^2+2xy-y^2$，$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2-2xy-y^2$，故

$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2+\varphi(y)$，$\boldsymbol{f(x,y)=x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+\psi(x)}$

又 $\frac{\partial f}{\partial y}=x^2-2xy+\varphi'(y)$，$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}=2\boldsymbol{xy}-\boldsymbol{y}^2+\psi'(\boldsymbol{x})$，

即 $\varphi'(y)=-y^2$，$\psi'(x)=x^2$，故 $\varphi(y)=-\frac{1}{3}y^3+C_1$，$\psi(x)=\frac{1}{3}x^3+C_2$，4 分

从而 $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C$　　　　5 分

6. 设曲面方程为 $F(z-ax,z-by)=0$（a,b 为正常数），$F(u,v)$ 具有一阶连续的偏导数，且 $F_u^2+F_v^2\neq 0$，试证明此曲面上任一点处法线恒垂直于一常向量。

解 令 $z-ax=u$，　$z-by=v$，则，曲面法向量 $\vec{n}=\{-aF_u,-bF_v,F_u+F_v\}$　　2 分

取 $\vec{A}=\{b,a,ab\}$　　则 $\vec{n}\cdot\vec{A}=0$，　从而 $\vec{n}\perp\vec{A}$　　　　5 分

7. 求 $f(x,y)=x^2+y^2+y$ 在区域 $D:x^2+y^2\le 4,\frac{x^2}{2^2}+y^2\ge 1$ 上的平均值。

解一　　$\iint\limits_{D}=\iint\limits_{D大圆}-\iint\limits_{D椭圆}$　由对称性

$$\iint\limits_{D大圆}\left[(x^2+y^2)+y\right]d\sigma=\iint\limits_{D大圆}(x^2+y^2)d\sigma+0=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr=8\pi \qquad 2\text{ 分}$$

设 $x=2r\cos\theta, y=r\sin\theta$，$dxdy=2rdrd\theta$

$$\iint\limits_{D椭圆}=\iint\limits_{D椭圆}(x^2+y^2)d\sigma+0=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}(4r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)2rdr=2\pi\int_0^1 5r^3dr=\frac{5\pi}{2}$$

$$\therefore \qquad \iint\limits_{D}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma=\frac{11}{2}\pi.$$

又区域 $D:x^2+y^2\le 4,\frac{x^2}{2^2}+y^2\ge 1$ 的面积为：$4\pi-2\pi=2\pi$

故平均值为：$\frac{11}{2}\pi/2\pi=\frac{11}{4}$　　　　5 分

解二　由积分区域对称性和被积函数的奇偶性可知

$\iint\limits_{D}yd\sigma=0$　设第一象限区域为 D_1，

$$\iint\limits_{D}(x^2+y^2)d\sigma=4\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)d\sigma$$

$$=4\left[\iint\limits_{D_{圆1}}(x^2+y^2)d\sigma-\iint\limits_{D_{椭圆1}}(x^2+y^2)d\sigma\right]$$

$$=4\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 r^3dr-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(4r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)2rdr\right]$$

$$=4\left[2\pi-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta+1)d\theta\right]=4\left(2\pi-\frac{5\pi}{8}\right)=\frac{11\pi}{2}. \qquad 3\text{ 分}$$

又区域 $D:x^2+y^2\le 4,\frac{x^2}{2^2}+y^2\ge 1$ 的面积为：$4\pi-2\pi=2\pi$

故平均值为：$\frac{11}{2}\pi/2\pi=\frac{11}{4}$　　　　5 分

8. 求$\vec{F}(x,y,z)=yz\vec{i}+z^2\vec{k}$穿出曲面$\Sigma$的通量，$\Sigma$为柱面：$y^2+z^2=1,z\ge 0$被平面$x=0,x=1$截下部分。

解　方法一　由曲面在xoy做表面上的投影域为：$D_{xy}:0\le x\le 1,-1\le y\le 1$，

$$z=\sqrt{1-y^2},\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \qquad 2分$$

第二类曲面积分的物理意义知，通量为：

$$\iint_\Sigma yzdydz+z^2dxdy=\iint_\Sigma yz(-\frac{\partial z}{\partial x})dxdy+z^2dxdy=2\iint_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}(1-y^2)dxdy$$

$$=2(\int_0^1dx\int_0^1dy-\int_0^1dx\int_0^1y^2dy)=\frac{4}{3} \qquad 5分$$

方法二　S上的外法向量的单位向量$\vec{n}^0=\frac{2y\vec{j}+2z\vec{k}}{\sqrt{4y^2+4z^2}}=\frac{2y\vec{j}+2z\vec{k}}{2\cdot 1}=y\vec{j}+z\vec{k}$

$$\vec{F}\cdot\vec{n}^0=(y\vec{j}+z\vec{k})\cdot(yz\vec{i}+z^2\vec{k})=z^3$$

$$dS=\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}dxdy=\frac{1}{z}dxdy \qquad 2分$$

故由第二类曲面积分的物理意义知，通量为：

$$\iint_\Sigma\vec{F}\cdot\vec{n}^0dS=\iint_\Sigma z^3dS=2\iint_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}z^3\cdot\frac{1}{z}dxdy=2\iint_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}(1-y^2)dxdy=\frac{4}{3} \qquad 5分$$

9. 计算积分$\oiint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中$\Sigma$为球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧。

解　由高斯公式即球坐标，得

$$\oiint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi\sin\varphi d\varphi\int_0^Rr^4dr$$

$$=\frac{6\pi R^5}{5}\int_0^\pi\sin\varphi d\varphi=\frac{12\pi R^5}{5} \qquad 5分$$

10. 设Σ为半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，则$\iint_\Sigma(x+2y+3z)dS$.

解　由Σ为半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，有$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$$dS=\sqrt{\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}+1}dxdy=\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}dxdy \qquad 2分$$

由对称性知，$\iint_\Sigma(x+2y+3z)dS=3a\iint_{x^2+y^2\le a^2}dxdy=3\pi a^3$　　5分

二、（10分）已知空间曲线Γ：$\begin{cases}3x^2+y^2-z=6\\x^2-2y^2-z=0\end{cases}$，且空间曲线$\Gamma$在$xoy$坐标面的投影曲线为$L$，若取$L$为顺时针方向，求曲线积分$\int_L\frac{2ydx-xdy}{2x^2+3y^2}$.

解：对$\begin{cases}3x^2+y^2-z=6\\x^2-2y^2-z=0\end{cases}$，消$z$,得投影柱面方程$2x^2+3y^2=6$　　5分

故投影曲线L的方程为$\begin{cases} 2x^2+3y^2=6 \\ z=0 \end{cases}$

$$\int_L \frac{2ydx-xdy}{2x^2+3y^2}=\frac{1}{6}\int_L 2ydx-xdy \overset{Green}{=} -\frac{1}{6}\iint\limits_{2x^2+3y^2\le 6} -3d\sigma=\frac{\sqrt{6}}{2}\pi \quad . \quad 10 分$$

三、（8 分）考察两直线$l_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-3}$和$l_2:\begin{cases} x=4t+2 \\ y=-t+3 \\ z=2t-4 \end{cases}$，是否相交？如相交，求出其交点，如不相交，求出两直线之间的距离d.

解：方法一：$s_1=(2,1,-3), s_2=(4,-1,2)$，显然$s_1$与$s_2$不平行。

取l_1上的点$A(-1,1,0)$和l_2上的点$B(2,3,-4)$，$AB=(3,2,-4)$，l_1,l_2相交的充要条件是AB,s_1,s_2三向量共面，因为$[AB \quad s_1 \quad s_2]=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-11\neq 0$，所以$l_1,l_2$时异面直线。

过l_1,l_2平行的平面Π的方程为$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$，即$(x+1)+16(y-1)+6z=0$

也为：$x+16y+6z-15=0$，　　　　　　　　　　6 分

l_2上的点B到平面Π的距离就是两异面直线间的距离，所以

$d=\dfrac{|2+16\cdot 3+6\cdot(-4)-15|}{\sqrt{1^2+16^2+6^2}}=-\dfrac{11}{\sqrt{293}}$　　　　　　　　8 分

方法二：将l_1化为参数方程$\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+1 \\ z=-3t \end{cases}$与$l_2$比较，由$2t-1=4t+2$，得$t=-\dfrac{3}{2}$，由$t+1=-t+3$，得$t=1$，两者矛盾，由此得出$l_1,l_2$不相交的结论是错误的。因为即使两直线相交，设交点为M_0，因为M_0是L_1上的点，由L_1的参数方程，它对应参数$t=t_1$，M_0又是L_2上的点，由L_2的参数方程，它对应参数$t=t_2$，这时，t_1与t_2一般是不相等的。

求两异面直线间距离的方法这里再介绍两种：　　　　2 分

方法 1：l_1,l_2的公垂线的方向向量s与l_1,l_2的方向向量s_1,s_2垂直，所以

$s=s_1\times s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-i-16j-6k$　　　　　　4 分

取l_1上的点$A(-1,1,0)$和l_2上的点$B(2,3,-4)$，$AB=(3,2,-4)$，AB在s上的投影的绝对值就是两异面直线间的距离，所以

$d=\left|P_{rj_s}AB\right|=\dfrac{|s\cdot AB|}{|s|}=\dfrac{|-1\cdot 3-16\cdot 2-6\cdot(14)|}{\sqrt{(-1)^2+(-16)^2+(-6)^2}}=\dfrac{111}{\sqrt{293}}$　　　　　8 分

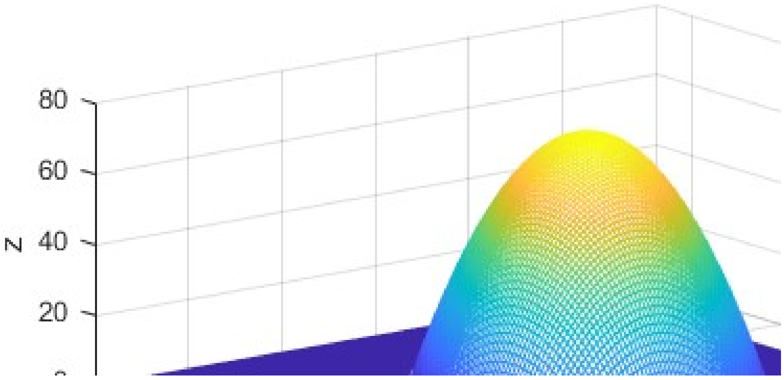
方法 2：设以AB,s_1,s_2为棱的平行六面体的体积为V，以s_1,s_2为边的平行四边形的面积为A，则l_1,l_2之间的距离$d=\dfrac{V}{A}$

事实上，方法 1 所得$d=\left|P_{rj_s}AB\right|=\dfrac{|s\cdot AB|}{|s|}$，当取$s=s_1\times s_2$时，

$|AB\cdot s|=|AB\cdot(s_1\times s_2)|=V$，$|s|=|s_1\times s_2|=A$

可见方法 1 与方法 2 的解题思路虽不一样，但最终的计算公式都$d=\dfrac{|AB\cdot(s_1\times s_2)|}{|s_1\times s_2|}$。

四、(本题 24 分，其中（1）8 分，（2）8 分，（3）4 分，（4）4 分)已知某座小山的表面形状曲面方程为$z=75-x^2-y^2+xy$，取它的底面所在的平面为xoy坐标面。



(1)设点$M(x_0,y_0)$为这座小山底部所占的区域D内的一点，问高函数$h(x,y)$，在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？记此方向导数的最大值为$g(x_0,y_0)$，试求$g(x_0,y_0)$的表达式。
(2)现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需在山脚寻找上山坡度最大的点作为攀岩的起点,试确定攀岩起点的位置。
(3)试用二重积分表示山体的体积V（只需给出二重积分式，不用计算积分）。
(4)设山的表面分布着某种物质，其质量面密度为$\rho(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{5(x^2+y^2)-8xy+1}}$，试用重积分表示分布在山体表面的物质质量（只需给出重积分式，不用计算积分）。

解　(1)由梯度向量的重要性质:函数$h(x,y)$在点M处沿该点的梯度方向

$$\boldsymbol{grad}h(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}=\{\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial y}\}\Big|_{(x_0,y_0)}=\{-2x_0+y_0,-2y_0+x_0\}\quad 5\text{ 分}$$

方向导数取最大值即$\boldsymbol{grad}h(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}$的

模, $\Rightarrow g(x_0,y_0)=\sqrt{(-2x_0+y_0)^2+(-2y_0+x_0)^2}.$　　8 分

(2)按题意,即求$g(x,y)$求在条件$x^2+y^2-xy-75=0$下的最大值点$\Leftrightarrow$

$g^2(x,y)=(y-2x)^2+(x-2y)^2=5x^2+5y^2-8xy$

在条件$x^2+y^2-xy-75=0$下的最大值点.

这是求解条件最值问题,用拉格朗日乘子法.令拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75),$$

则有
$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=10x-8y+\lambda(2x-y)=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=10y-8x+\lambda(2y-x)=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-xy-75=0.\end{cases}\qquad 4\text{ 分}$$

解此方程组:将①式与②式相加得$(x+y)(\lambda+2)=0.\Rightarrow x=-y$或$\lambda=-2.$

若$y=-x$,则由③式得$3x^2=75$即$x=\pm5,y=\mp5.$若$\lambda=-2,$由①或②均得$y=x$,代入③式得$x^2=75$即$x=\pm5\sqrt{3},y=\pm5\sqrt{3}.$于是得可能的条件极值点

$$M_1(5,-5),M_2(-5,5),M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3}),M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}).$$

现比较$f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$在这些点的函数值:

$$f(M_1)=f(M_2)=450,f(M_3)=f(M_4)=150.$$

因为实际问题存在最大值, 而最大值又只可能在 M_1, M_2, M_3, M_4 中取到. 因此 $g^2(x,y)$ 在 M_1, M_2 取到在 D 的边界上的最大值, 即 M_1, M_2 可作为攀登的起点. 8 分

(3) $V = \iint\limits_{x^2-xy+y^2\le 75} (75-x^2+xy-y^2)dxdy$ （学生做到这步即可） 4 分

令 $u = x - \frac{y}{2}, v = \frac{\sqrt{3}}{2}y \Leftrightarrow x = u + \frac{v}{\sqrt{3}}, y = \frac{2}{\sqrt{3}}v$ ， $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$dxdy = \frac{2}{\sqrt{3}}dudv$ ，且 $D: u^2 + v^2 \le 75$ ，

令 $u = r\cos\theta, v = r\sin\theta, dudv = rdrd\theta, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le \sqrt{75}$

$$V = \iint\limits_{x^2-xy+y^2\le 75} (75-x^2+xy-y^2)dxdy$$

$$= \iint\limits_D [75-(u^2+v^2)]\frac{2}{\sqrt{3}}dudv = \iint\limits_D \frac{2\times 75}{\sqrt{3}}dudv - \iint\limits_D (u^2+v^2)\frac{2}{\sqrt{3}}dudv$$

$$= \frac{2\times 75}{\sqrt{3}}\iint\limits_D dudv - \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{75}} r^3 dr$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{75})^4\pi - \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\sqrt{75}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{75})^4\pi(1-\frac{1}{2}) = 25\times 75\sqrt{3}\pi = 1875\sqrt{3}\pi$$

（4） $z = 75-(x^2+y^2)+xy$ $\frac{\partial z}{\partial x} = -2x+y, \frac{\partial z}{\partial y} = -2y+x$

$$dS = \sqrt{(-2x+y)^2+(-2y+x)^2+1}dxdy = \sqrt{5(x^2+y^2)-8xy+1}dxdy$$

$D_{xy}: x^2+y^2-xy \le 75$

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{5(x^2+y^2)-8xy+1}}\cdot\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy$$ 4 分

（学生做到这步即可）

令 $u = x - \frac{y}{2}, v = \frac{\sqrt{3}}{2}y \Leftrightarrow x = u + \frac{v}{\sqrt{3}}, y = \frac{2}{\sqrt{3}}v$ ， $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$dxdy = \frac{2}{\sqrt{3}}dudv$ ，且 $D: u^2 + v^2 \le 75$ ，

令 $u = r\cos\theta, v = r\sin\theta, dudv = rdrd\theta, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le \sqrt{75}$

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{75}} rdr = 50\sqrt{3}\pi$$

五、（8 分）求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}(n^2-n+1)$ 的和。

解 先将级数分解：

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}(n^2-n+1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}n(n-1) + \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n.$$

第二个级数是几何级数，它的和已知

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n=\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}. \qquad 2\text{分}$$

求第一个级数的和转化为幂级数求和，考察

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x} \qquad (|x|<1) \qquad 4\text{分}$$

$$\Rightarrow \qquad S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right]''=(\frac{1}{1+x})''=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}n(n-1)=\frac{1}{2^2}S(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\frac{2}{(1+\frac{1}{2})^3}=\frac{4}{27}.$$

因此原级数的和 $\qquad A=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}.$ $\qquad$ 8 分