第 7 章　级数

7.1　级数的敛散性及基本性质 习题

1. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$.

(1) 写出该级数的前 5 项, 并求该级数前 n 项的部分和 S_n;

(2) 根据级数收敛的定义判断该级数是否收敛? 若收敛, 求级数的和.

解: (1) 该级数的前5项分别为 $\frac{1}{10}, \frac{1}{40}, \frac{1}{88}, \frac{1}{154}, \frac{1}{238}$.

对 $a_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)$, 级数前 n 项部分和

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3i-1} - \frac{1}{3i+2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{3(3n+2)}.
\end{aligned}
$$

(2) 由(1), $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} - \frac{1}{3(3n+2)} = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$.

因此该级数收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{6}$.

2. 求 8 进制无限循环小数 $(24.076076076\cdots)_8$ 的值.

解: 将该数分为整数和小数两部分来考虑. 对整数部分, 有 $(24)_8 = 2 \times 8 + 4 = 20$.

对小数部分, 先考虑循环节有 $(0.076)_8 = \frac{1}{8^2} \times 7 + \frac{1}{8^3} \times 6 = \frac{56+6}{512} = \frac{31}{256}$.

且小数点后每向右移一位代表缩小 $\frac{1}{8}$, 则每向右移三位代表缩小 $\frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}$.

故有

$$
\begin{aligned}
(24.076076076\cdots)_8 &= 20 + \frac{31}{256}\left[1 + \frac{1}{512} + \left(\frac{1}{512}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{512}\right)^n + \cdots\right] \\
&= 20 + \frac{31}{256}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{512}\right)^n = 20 + \frac{31}{256}\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{512}\right)^n}{1-\frac{1}{512}} \\
&= 20 + \frac{31}{256}\cdot\frac{1}{\frac{511}{512}} = 20\frac{62}{511} = \frac{10282}{511}.
\end{aligned}
$$

3. 求下列级数的前 n 项的部分和, 并根据级数敛散性的定义, 判断级数是否收敛? 若收敛, 求该级数的和.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

解: 用 S_n 表示下述各小题中级数的前 n 项部分和.

(1) 由题可知

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{2^i}=-\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^i=-\frac{-\frac{1}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

从而 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$, 则原级数收敛. 级数和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{3}$.

(2) 由于 $\displaystyle\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, 因此有

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i+1}-\sqrt{i}}{\sqrt{i^2+i}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}-\frac{1}{\sqrt{i+1}}\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\\&=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.\end{aligned}$$

从而 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=1-0=1$, 则原级数收敛. 级数和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to+\infty}S_n=1$.

(3) 由于 $\displaystyle(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$, 因此有

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i+1}\right)\\&=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\\&=1+\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}.\end{aligned}$$

且 $\displaystyle 1-\frac{1}{n+1}\le S_n\le 1+\frac{1}{n+1}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, 由夹逼定理可得 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=1$, 则原级数收敛.

级数和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}S_n=1$.

(4) 由于 $\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, 因此有

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i+2}-\sqrt{i+1})-(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i+2}-\sqrt{i+1})-\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})\\&=\left[\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})\right]-\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})\\&=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1.\end{aligned}$$

且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+2)-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=0.$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=0-\sqrt{2}+1=1-\sqrt{2}$, 则原级数收敛.

级数和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1-\sqrt{2}.$

(5) 由于 $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\ln\dfrac{n+1}{n}+\ln\dfrac{n-1}{n}=\ln\dfrac{n-1}{n}-\ln\dfrac{n}{n+1}$, 因此有

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{i=2}^{n}\ln\frac{i-1}{i}-\ln\frac{i}{i+1}=\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{2}{3}\right)+\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\ln\frac{n-1}{n}-\ln\frac{n}{n+1}\right)\\&=\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{n}{n+1}=\ln\frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\dfrac{n+1}{2n}=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$, 则原级数收敛.

级数和 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\ln 2.$

(6) 利用错位相减法求和. 由于

$$\begin{aligned}S_n&=\quad\ \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n},&①\\2S_n&=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}},&②\end{aligned}$$

从而用②−①可得

$$\begin{aligned}S_n&=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\\&=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+2-\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}\\&=3-\frac{4+(2n-1)}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}.\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 3 - \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+3}{2^n} = 3 - 0 = 3$, 则原级数收敛.

级数和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n-1}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 3$.

4. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ka_n$ (k 为实常数) 也收敛; 反之是否成立?

证明: 记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, 则 $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} ka_i = k\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = kS_n$.

由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ 存在, 设 $A = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} kS_n = k\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = kA$, 也存在, 故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ka_n$ 收敛.

反之不一定成立. 此时令 $k=0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ka_n$ 必收敛.

但此时取 $a_n = 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1$ 是发散的.

5. 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, 下列陈述是否正确? 为什么?

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 都发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n+b_n)$ 也发散;

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n+b_n)$ 必发散.

解: (1) 不一定正确.

例如 $a_n = \dfrac{1}{n}, b_n = -\dfrac{1}{n}$, 此时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 均发散, 但 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n+b_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0$ 收敛.

(2) 正确. 下面给出证明.

假设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n+b_n)$ 收敛, 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n+b_n) - a_n$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛.

这与已知条件矛盾, 故假设不成立, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n+b_n)$ 发散.

6. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_{2n-1}+a_{2n})$ 也收敛; 反之成立吗? 若不成立, 请举例说明, 并给出在级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛的前提下, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛的充要条件.

证明: 记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_{2i-1}+a_{2i}) = \sum\limits_{i=1}^{2n} a_i = S_{2n}$.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ 存在, 记该极限为 A, 故有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=\lim_{n\to+\infty}S_{2n}=\lim_{n\to+\infty}S_n=A.$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 也收敛.

反之不成立, 例如 $a_n=(-1)^n$, 则 $a_{2n-1}+a_{2n}=0$, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛. 但 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 不收敛.

在 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛的前提下, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛的充要条件为 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

先证明充分性:

若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}$ 存在, 记该极限为 B.

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{2n+1}=0$, 因此有

$$\lim_{n\to+\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=B+0=B.$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}=B$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=B$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

再证明必要性:

当级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛时, 由级数收敛的必要条件, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

综上, 在 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛的前提下, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛的充要条件为 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

7. 利用柯西收敛准则判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{2n^2+3}$.

解: 用 S_n 表示下述各小题中级数的前 n 项部分和.

(1) $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}_+$, $n>N$ 时, $\forall p\in\mathbb{N}_+$, 有

$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n|&=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right|\\&<\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+p}\right|<\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}.\end{aligned}$$

取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时, 对任意正整数 p 均有

$$|S_{n+p}-S_n|<\frac{2}{n}<\frac{2}{N}\le\varepsilon.$$

故由柯西收敛准则, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛.

(2) $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}_+$, $n>N$ 时, $\forall p\in\mathbb{N}_+$, 有

$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin k}{k^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\frac{\sin k}{k^2}\right| < \sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\frac{1}{k^2}\right| < \sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\frac{1}{k(k-1)}\right| \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right| = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right) \\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时, 对任意正整数 p 均有

$$|S_{n+p}-S_n|<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}\le\varepsilon.$$

故由柯西收敛准则, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^2}$收敛.

(3) 取 $\varepsilon=\frac{1}{3}$, $\forall N\in\mathbb{N}_+$, $\exists n_0\in\mathbb{N}_+$, 使得 $n_0>N\ge 1$, 取 $p_0=n_0$, 有

$$\left|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}\frac{1}{\sqrt{k^2+k}}\right| > \sum_{k=n_0+1}^{2n_0}\frac{1}{\sqrt{k^2+2k+1}} = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0}\frac{1}{k+1} > \sum_{k=n_0+1}^{2n_0}\frac{1}{2n_0+1} = \frac{n_0}{2n_0+1} > \frac{n_0}{2n_0+n_0} = \frac{1}{3}.$$

故由柯西收敛准则, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 发散.

(4) 取 $\varepsilon=\frac{1}{5}$, $\forall N\in\mathbb{N}_+$, $\exists n_0\in\mathbb{N}_+$, 使得 $n_0>N\ge 1$, 取 $p_0=1$, 有

$$\left|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}\frac{(-1)^k k^2}{2k^2+3}\right| = \frac{n_0^2}{2n_0^2+3} > \frac{n_0^2}{2n_0^2+3n_0^2} = \frac{1}{5}.$$

故由柯西收敛准则, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2n^2+3}$ 发散.

8. 试举例说明: 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 对某固定的正整数 p 满足条件

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0,$$

此级数仍可能发散.

解: 取 $a_n=(-1)^n$, $p=2$. 则此时有 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}+a_{n+2}=\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}+(-1)^{n+2}=0$.

但此时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

7.2 正项级数 习题

9. 用比较判别法或极限判别法判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{2n^2+n-4}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n-1}\right)^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$;

(5) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+1}{n-1}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}3^n\sin\dfrac{\pi}{4^n}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(9) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}-2\right)$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{3^{\ln n}}$.

解: (1) 由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+n-4}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+n-4}}{\frac{\sqrt{n}}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2n^2+n-4}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}.$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 由极限判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{2n^2+n-4}$ 收敛.

(2) 当 $n\geq 2$ 时, $\dfrac{n+1}{3n-1}=\dfrac{n-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}{3n-1}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3(3n-1)}<\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3\times(6-1)}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$,

此时则有 $\left(\dfrac{n+1}{3n-1}\right)^n<\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ 成立.

又因为 $\dfrac{3}{5}<1$ 有级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ 收敛, 由比较判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n-1}\right)^n$ 收敛.

(3) 由于 $\sin\dfrac{\pi}{n}<\dfrac{\pi}{n}$, 则有 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{\pi}{n^{\frac{3}{2}}}$ 成立.

又因为 $\dfrac{3}{2}>1$ 有级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\pi}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 由比较判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{1}{n}$ 收敛.

(4) 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1=0-1=-1\neq 0$, 由级数收敛的必要条件,

则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 发散.

【这里合理推测这个题本意可能是 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}$, 然后再用极限判别法求解的】

(5) 由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{n-1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n-1}=2,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 由极限判别法, 则级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$ 收敛.

(6) 由于 $\sin\frac{\pi}{4^n}<\frac{\pi}{4^n}$, 则有 $3^n\sin\frac{\pi}{4^n}<\pi\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 成立.

又因为 $\frac{3}{4}<1$ 有级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\pi\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 收敛, 由比较判别法, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}3^n\sin\frac{\pi}{4^n}$ 收敛.

(7) 由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e\left[1-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}\right]}{\frac{1}{n}}\\&=e\lim_{n\to+\infty}\frac{-\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]}{\frac{1}{n}}\xlongequal{x=\frac{1}{n}}e\lim_{x\to0^+}\frac{1-\frac{1}{x}\ln(1+x)}{x}\\&=e\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=e\lim_{x\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=e\lim_{x\to0^+}\frac{1+x-1}{2x(1+x)}\\&=e\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{e}{2}.\end{aligned}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 由极限判别法, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ 发散.

(8) 由于 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1,$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 由极限判别法, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散.

(9) 由于 $\sqrt[n]{2}=2^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{\ln 2}{n}}$, $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{1}{n}}=e^{-\frac{\ln 2}{n}}$,

从而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}-2}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln 2}{n}}+e^{-\frac{\ln 2}{n}}-2}{\dfrac{1}{n^2}}\xlongequal{x=\frac{1}{n}}\frac{e^{x\ln 2}+e^{-x\ln 2}-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln 2}\ln 2-e^{-x\ln 2}\ln 2}{2x}=\frac{\ln 2}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln 2}-e^{-x\ln 2}}{x}$$

$$=\frac{\ln 2}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln 2}\ln 2+e^{-x\ln 2}\ln 2}{1}=(\ln 2)^2.$$

而级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 由极限判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}-2\right)$ 收敛.

(10) 由于 $\dfrac{1}{3^{\ln n}}=\dfrac{1}{e^{(\ln 3)\cdot(\ln n)}}=\dfrac{1}{n^{\ln 3}}$, 且 $\ln 3>1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{3^{\ln n}}$ 收敛.

10. 用比值判别法或根值判别法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n!}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2n+1}{3^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2\tan\dfrac{\pi}{3^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4^n}{5^n-3^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}(a>0)$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^n$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\cdot n^3}$.

解: 用 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 表示下述各小题的级数.

(1) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{[(2(n+1)-1]!!}{(n+1)!}}{\dfrac{(2n-1)!!}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2>1,$$

由比值判别法, 则原级数发散.

(2) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{2(n+1)+1}{3^{n+1}}}{\dfrac{2n+1}{3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2n+3}{2n+1}=\frac{1}{3}<1,$$

由比值判别法, 则原级数收敛.

(3) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2\tan\dfrac{\pi}{3^{n+1}}}{n^2\tan\dfrac{\pi}{3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2\dfrac{\pi}{3^{n+1}}}{n^2\dfrac{\pi}{3^n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{3}<1,$$

由比值判别法, 则原级数收敛.

(4) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{4^{n+1}}{5^{n+1}-3^{n+1}}}{\dfrac{4^n}{5^n-3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4(5^n-3^n)}{5^{n+1}-3^{n+1}}=4\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{5-3\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}=\frac{4}{5}<1,$$

由比值判别法, 则原级数收敛.

(5) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{a^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{an^n}{(n+1)^n}=\frac{a}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{e}.$$

采用比值判别法, 则有因此当 $\dfrac{a}{e}>1$, 即 $a>e$ 时, 原级数发散; 当 $\dfrac{a}{e}<1$, 即 $a<e$ 时, 原级数收敛.

考虑 $a=e$. 下面用三种方法考虑.

【法 1】由于此时 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$, 且 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e$ 对任意正整数 n 均成立.

则 $a_{n+1}>a_n$ 对任意正整数 n 均成立, 则数列 $\{a_n\}$ 严格单调递增.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$. 则对任意 $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}_+$ 使得 $n>N$ 时有 $|a_n|<\varepsilon$ 成立.

又由 $\{a_n\}$ 严格单调递增, 则当 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 应有上界 0, 这与 $a_n>0$ 矛盾.

故假设不成立, 从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^n n!}{n^n}$ 发散.

【法 2】由于对任意正整数 k 均有 $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k<e$ 成立. 即 $\dfrac{(k+1)^k}{k^k}<e$, 有 $(k+1)^{k+1}<ek^k(k+1)$ 成立.

利用累乘则有 $\prod\limits_{k=1}^{n-1}(k+1)^{k+1}<\prod\limits_{k=1}^{n-1}ek^k(k+1)=e^{n-1}n!\prod\limits_{k=1}^{n-1}k^k$ 成立.

从而有 $\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(k+1)^{n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}k^k}=\dfrac{n^n\prod\limits_{k=1}^{n-1}k^k}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}k^k}=n^n<e^{n-1}n!$, 即 $\dfrac{e^n n!}{n^n}>e$ 成立.

又因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e$ 发散, 由比较判别法, 则原级数发散.

【法 3】* 由 Stirling 公式知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{e^n\cdot n!}{n^n}}{\sqrt{2\pi n}}=1.$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{2\pi n}$ 发散, 由极限判别法, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^n n!}{n^n}$ 发散.

综上, 当 $a \geq e$ 时, 原级数发散, $0 < a < e$ 时, 原级数收敛.

(6) 因为

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

由根值判别法, 则原级数收敛.

(7) 因为

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln n}{n} = 1.$$

因此根值判别法失效, 要用其他方法. 【比值法和根值法有一个失效另一个也失效】

因为

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} \xlongequal{x=\frac{1}{n}} \lim_{x\to0^+} \frac{(1+x\ln x)^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{\ln(1+x\ln x)}{x}}}{e^{\ln x}} = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{\ln(1+x\ln x)-x\ln x}{x}},$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$, 且 $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{-x}{2x(1+x)} = -\frac{1}{2}$,

则 $x \to 0$ 时有 $\ln(1+x\ln x) - x\ln x \sim -\frac{1}{2}(x\ln x)^2$. 从而有

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x\ln x)-x\ln x}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{-\frac{1}{2}(x\ln x)^2}{x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+} x\ln^2 x = 0.$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$. 又因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由极限判别法, 则原级数发散.

(8) 因为

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!\cdot(n+1)^3}}{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\cdot n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{n^3}{(n+1)^3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2(n+1)}{2n+1} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} = 1 \times 1 = 1,$$

因此比值判别法失效, 要用其他方法.

由于 $a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\cdot n^3} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!n^3} = \frac{(2n!!)^2}{(2n)!\cdot n^3} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\cdot n^3} = \frac{2n}{n^3} \cdot \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} < \frac{2}{n^2}$,

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛, 由比较判别法, 则原级数收敛.

11. 用适当的方法判别下列级数的敛散性.

【注：这里书中(4)与(9)重复, 故这里不重复书写, 所以最后两小题调整了题号】

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{[4+(-1)^n]^n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{3}$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{2}{\ln n}\right)$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n(n!)^2}{n^n(2n)!!}$;

(5) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}\mathrm{d}x$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt[3]{x^3+1}\mathrm{d}x}$;

* (9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ $(a>0)$.

解: 用 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 表示下述各小题的级数.

(1) 由于 $\frac{n}{[4+(-1)^n]^n}<\frac{n}{3^n}$, 且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1.$$

由比值判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}$ 收敛. 再由比较判别法, 则原级数收敛.

(2) 由于 $\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{3}<\frac{n}{3^n}$, 且由(1)可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}$ 收敛.

由比较判别法, 则原级数收敛.

(3) 由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{2}{\ln n}\right)}{\frac{1}{n\ln n}}=\lim_{n+\infty}\frac{\frac{2}{\ln n}}{\frac{1}{\ln n}}=2,$$

且因为

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}\ln x=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\ln\ln x-\ln\ln 2=+\infty,$$

由积分判别法, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散. 再由极限判别法, 则原级数发散.

(4) 由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{e^{n+1}[(n+1)!]^2}{(n+1)^{n+1}(2n+2)!!}}{\dfrac{e^n(n!)^2}{n^n(2n)!!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{e(n+1)^2}{2n+2}$$

$$=\frac{e}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{e}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{e}{2e}=\frac{1}{2}<1.$$

由比较判别法, 则原级数收敛.

(5) 由于

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}\mathrm{d}x\xlongequal{\ln x=u}\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{u^p(\ln u)^q}\mathrm{d}u,$$

下面讨论反常积分 $\displaystyle\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{u^p(\ln u)^q}\mathrm{d}u$ 的敛散性.

① $p>1,\ q\geq 0$ 时, 当 $u>e$ 时 $(\ln u)^q>1$, 此时有 $\dfrac{1}{u^p(\ln u)^q}<\dfrac{1}{u^p}$ 成立.

而 $\displaystyle\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{u^p}\mathrm{d}u$ 收敛, 从而原反常积分收敛.

② $p>1, q<0$ 时, 有

$$\lim_{u\to+\infty}u^{\frac{p+1}{2}}\frac{\ln^{-q}u}{u^p}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln^{-q}u}{u^{\frac{p-1}{2}}}=0.$$

且 $\dfrac{p+1}{2}>1$, 则原反常积分收敛.【这里用到上册中反常积分收敛性判断的知识】

③ $p=1$ 时, 反常积分可转化为 $\displaystyle\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{u(\ln u)^q}\mathrm{d}u\xlongequal{v=\ln u}\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{v^q}\mathrm{d}v.$

则 $q>1$ 时, 该反常积分收敛, $q\leq 1$ 时, 该反常积分发散.

④ $p<1,\ q\leq 0$ 时, 当 $u>e$ 时 $(\ln u)^q\leq 1$, 此时有 $\dfrac{1}{u^p(\ln u)^q}\geq\dfrac{1}{u^p}$ 成立.

而 $\displaystyle\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{u^p}\mathrm{d}u$ 发散, 从而原反常积分发散.

⑤ $p<1,\ q>0$ 时, 有

$$\lim_{u\to+\infty}u^{\frac{p+1}{2}}\frac{1}{u^p\ln^q u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^{\frac{1-p}{2}}}{\ln^q u}=+\infty.$$

且 $\dfrac{p+1}{2}<1$, 则原反常积分发散.

综上, 当 $p>1$ 或 $p=1,\ q>1$ 时则反常积分收敛; $p<1$ 或 $p=1,\ q\leq 1$ 时反常积分发散.

再由积分判别法, 当 $p>1$ 或 $p=1,\ q>1$ 时则级数收敛, $p=1,\ q\leq 1$ 或 $p<1$ 时则级数发散.

(6) 这里先证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{\ln n}=1$.

【法 1】利用夹逼准则求解.

由于 $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_n^{n+1}=\ln(n+1)-\ln n=\ln\frac{n+1}{n}$,

则有 $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x>\int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1};\quad \int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x<\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}$.

即 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{1}{n}$ 成立. 从而有

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}>\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)=\ln\prod_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i}=\ln(n+1).$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i+1}<1+\sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)=1+\ln\prod_{i=1}^{n-1}\frac{i+1}{i}=1+\ln n.$$

因此有

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}<\frac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{\ln n}<\frac{1+\ln n}{\ln n}=1+\frac{1}{\ln n}.$$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$,

且 $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\dfrac{1}{\ln n}=1+0=1$. 由夹逼准则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{\ln n}=1.$$

【法 2】* 利用 Stolz 定理求解.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}&\xlongequal{Stolz}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}\right)-\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}(n+1)\frac{1}{n}=1.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)^2}}{\dfrac{1}{n(\ln n)^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)^2}=1$.

由(3)知级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散, 由极限判别法, 则原级数发散.

(7) 由于

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x}{1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}-0\right)=\frac{1}{2n^2}.$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 由比较判别法, 则原级数收敛.

(8) 由于

$$\int_0^n \sqrt[3]{x^3+1}\mathrm{d}x > \int_0^n x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^n = \frac{n^2}{2}.$$

从而有 $\dfrac{1}{\int_0^n \sqrt[3]{x^3+1}\mathrm{d}x} < \dfrac{2}{n^2}$. 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛, 由比较判别法, 则原级数收敛.

(9) 利用 $(2n-1)(2n+1) < (2n)^2$, 有

$$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 = \frac{(1\cdot 3)(3\cdot 5)\cdots[(2n-3)(2n-1)][(2n-1)(2n+1)]}{[2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2](2n+1)} < \frac{1}{2n+1}.$$

再利用 $(2n-1)^2 > 2n(2n-2)$, 有

$$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 = \frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdots(2n-1)^2}{2\cdot(2\cdot 4)(4\cdot 6)\cdots[2n(2n-2)]\cdot(2n)} > \frac{1}{2(2n)} = \frac{1}{4n}.$$

从而有 $\dfrac{1}{4n} < \left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 < \dfrac{1}{2n+1}$, 即 $\dfrac{1}{4n^{\frac{p}{2}}} < \left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p < \dfrac{1}{(2n+1)^{\frac{p}{2}}}$.

当 $p>2$ 时, $\frac{p}{2}>1$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^{\frac{p}{2}}}$ 收敛, 由比较判别法则原级数收敛;

当 $p\le 2$ 时, $\frac{p}{2}\le 1$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^{\frac{p}{2}}}$ 发散, 由比较判别法则原级数发散.

综上, $p>2$ 时原级数收敛, $p\le 2$ 时原级数发散.

(10) 当 $0<a<1$ 时, 由于 $\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} < a^n$, 且等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^n$ 收敛.

由比较判别法, 则原级数收敛.

当 $a=1$ 时, $\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} = \dfrac{1^n}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$, 则原级数是公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比级数, 故收敛.

当 $a>1$ 时, 由于 $n\ge 2$ 时有

$$\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} < \frac{a^n}{a\cdot a^2\cdots a^n} < \frac{a^n}{a^n a^{n-1}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1},$$

且由于 $0<\frac{1}{a}<1$ 则等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}$ 收敛.

由比较判别法, 则原级数收敛.

综上, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ 在 $a>0$ 时均收敛.

12. 利用级数收敛的必要条件证明下列等式:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n!}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

证明: (1) 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{n!}$, 由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{en!}{(n+1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e}{n+1}=0<1.$$

由比值判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{n!}$ 收敛. 由级数收敛的必要性知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n!}=0$.

(2) 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$, 由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{(n!)^2(n+1)}{[(n+1)!]^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=e\cdot 0=0<1.$$

由比值判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛, 由级数收敛的必要性知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

13. 对收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$.

(1) 证明: 当 $\alpha>0$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{a_n}$ 也收敛;

(2) 当 $\alpha=0$ 时, 上面级数是否收敛? 若不收敛请举出反例.

证明: (1) 利用基本不等式, 有 $n^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{a_n}\le\frac{\frac{1}{n^{2\alpha+1}}+a_n}{2}$ 成立.

由 $\alpha>0$ 则 $2\alpha+1>1$, 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{2\alpha+1}}$ 收敛. 又因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\frac{1}{n^{2\alpha+1}}+a_n}{2}$ 收敛.

从而由比较判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{a_n}$ 收敛.

(2) 不一定收敛. 例如 $a_n=\dfrac{1}{n\ln^2 n}$, 由11(4)可知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

但此时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{a_n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n\ln^2 n}}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散.

14. 若 $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$, 试证:

(1) 当 $q>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛; (2) 当 $0\le q<1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

证明: (1) 由换底公式可知, $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=-\dfrac{\ln a_n}{\ln n}=-\log_n a_n$. 此时取 $q=1+2\varepsilon$, 其中 $\varepsilon>0$.

又由极限定义, 对上述 $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}_+$, 当 $n>N$ 时有 $|-\log_n a_n-q|<\varepsilon$ 成立.

因此有 $1+\varepsilon=q-\varepsilon<-\log_n a_n<q+\varepsilon$ 成立.

从而 $n^{1+\varepsilon}<n^{-\log_n a_n}=\dfrac{1}{a_n}$, 即 $a_n<\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$.

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ 收敛, 由比较判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

(2) 对 $\varepsilon_0=1-q>0$, $\exists N_0\in\mathbb{N}_+$, 当 $n>N$ 时有 $|-\log_n a_n-q|<\varepsilon_0$ 成立.

因此有 $q-\varepsilon<-\log_n a_n<q+\varepsilon=q+1-q=1$ 成立.

从而 $n^1>n^{-\log_n a_n}=\dfrac{1}{a_n}$, 即 $a_n>\dfrac{1}{n}$ 成立.

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 由比较判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

15. 设 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 为方程 $\tan x=x$ 的正根, 且从小到大排列, 试证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{x_n^2}$ 收敛.

证明: 考虑 $f(x)=\tan x$, 对任意正整数 k, 则 $f(x)$ 在 $x=k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ 处无定义.

由于 $\tan x>x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上成立, 故该区间内没有 x_n.

此时考虑区间 $I_k=\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{N}_+$.

由于 $x\to\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)^-$ 时 $f(x)\to+\infty$, 则必存在 $y_k\in I_k$ 使 $f(y_k)>k\pi+\dfrac{\pi}{2}>y_k$.

又 $f(k\pi)=0<k\pi$, 且显然 $y_k>k\pi$, 即对 $g(x)=\tan x-x$ 有 $g(k\pi)g(y_k)<0$.

由零点存在定理, 存在 $x_k \in (k\pi, y_k)$ 使得 $g(x_k)=0$. 又 $g(x)$ 严格单调递增, 则此时 x_k 唯一.

即 $x_n \in \left(n\pi, n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$, 因此有 $\dfrac{1}{x_n^2} < \dfrac{1}{n^2\pi^2}$ 成立.

而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2}$ 收敛, 由比较判别法, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n^2}$ 收敛.

16. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 严格单调递增, 求证:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \text{ 收敛} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \text{ 收敛.}$$

证明: ①先证充分性. 记 $b_n = \dfrac{n}{a_1+\cdots+a_n}$, 利用 $\{a_n\}$ 的严格单调递增性质有

$$b_{2n} = \frac{2n}{(a_1+\cdots+a_n)+(a_{n+1}+\cdots+a_{2n})} < \frac{2n}{na_1+na_n} < \frac{2}{a_n},$$

$$b_{2n+1} = \frac{2n+1}{a_1+\cdots+a_{2n+1}} < \frac{2n+1}{na_1+na_n+a_{2n+1}} < \frac{2n+1}{(n+1)a_n} < \frac{2n+1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n} = \frac{2}{a_n}.$$

记 $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} b_n$, $T_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{a_n}$. 对 S_k 考虑 k 分别为奇数和偶数的情况, 此时取 m 为任意正整数.

当 $k=2m+1$ 时

$$\begin{aligned} S_k &= b_1 + \sum_{n=2}^{2m+1} b_n = b_1 + \sum_{i=1}^{m}(b_{2i}+b_{2i+1}) < \frac{1}{a_1} + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2}{a_i}+\frac{2}{a_i}\right) \\ &= \frac{1}{a_1} + 4T_m < 5T_m < 5T_k. \end{aligned}$$

当 $k=2m$ 时

$$\begin{aligned} S_k &= b_1 + \sum_{n=2}^{2m} b_n = b_1 + b_{2m} + \sum_{i=1}^{m-1}(b_{2i}+b_{2i+1}) < \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_m} + \sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{2}{a_i}+\frac{2}{a_i}\right) \\ &< \frac{3}{a_m} + 4T_{m-1} < \frac{4}{a_m} + 4T_{m-1} = 4T_m < 4T_k < 5T_k. \end{aligned}$$

即对任意正整数 k 均有 $S_k < 5T_k$ 成立.

由于级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛, 则 T_k 有界, 从而 S_k 有界.

又 S_k 单调递增, 则 $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} S_k$ 存在, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛.

②再证必要性. 由单调性可知

$$\frac{1}{a_n}=\frac{n}{na_n}<\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛, 由比较判别法则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛.

综上, 原结论得证.

7.3 一般项级数的敛散性判别 习题

17. 判别下列级数是否收敛? 若收敛, 是条件收敛还是绝对收敛?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n(\ln n)^2+1}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)(a>0)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2n+3}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$;

解: 设(3)~(8)小题中的级数由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 表示, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 为正项级数.

(1) 由于 $\left|\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n(\ln n)^2+1}\right|<\frac{1}{|n(\ln n)^2+1|}<\frac{1}{n(\ln n)^2}$, 且由11(5)知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛.

由比较判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n(\ln n)^2+1}\right|$ 收敛, 因此原级数绝对收敛.

(2) 当 $a=1$ 时, 原级数转化为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}0$, 显然该级数绝对收敛.

当 $a\neq 1$ 且 $a>0$ 时, 由于 $|(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)|=|\sqrt[n]{a}-1|=\left|e^{\frac{\ln a}{n}}-1\right|$, 且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|e^{\frac{\ln a}{n}}-1\right|}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{\ln a}{n}}{\frac{1}{n}}\right|=|\ln a|>0.$$

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln a}{n}$ 发散, 则此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)|$ 发散.

当 $0<a<1$ 时, 级数转化为 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$, 此时 $a_n=1-\sqrt[n]{a}>0$.

对 $f(x)=1-\sqrt[x]{a}=1-a^{\frac{1}{x}}=1-e^{\frac{\ln a}{x}}$, 则 $f'(x)=\frac{\ln a}{x^2}e^{\frac{\ln a}{x}}$.

由于此时 $\ln a<0$, 则 $f'(x)<0$, 故数列 $\{a_n\}$ 单调递减.

且 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$ 则 $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$. 由 Leibniz 判别法, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

当 $a>1$ 时, 对 $b_n=\sqrt[n]{a}-1>0$, 原级数即为 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n$.

对 $g(x)=\sqrt[x]{a}-1=a^{\frac{1}{x}}-1=e^{\frac{\ln a}{x}}-1$, 则 $g'(x)=-\frac{\ln a}{x^2}e^{\frac{\ln a}{x}}$.

由于此时 $\ln a>0$, 则 $g'(x)<0$, 故数列 $\{b_n\}$ 单调递减.

且 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$ 则 $\lim_{n\to+\infty}b_n=0$. 由 Leibniz 判别法, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 收敛.

因此 $a>1$ 且 $a\neq 0$ 时原级数条件收敛.

综上, $a=1$ 时原级数绝对收敛, $a\neq 1$ 且 $a>0$ 时级数条件收敛.

(3) 由于 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{\pi}{n}=\pi$, 且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 由极限判别法, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

$n\geq 2$ 时, 由于 $\frac{\pi}{n+1}<\frac{\pi}{n}$, 且 $y=\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,

则此时有 $a_{n+1}<a_n$ 成立, 即从第二项开始数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$.

由 Leibniz 判别法, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

因此原级数条件收敛.

(4) 由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{2}{n}}=1,$$

且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 由极限判别法, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

对 $x\geq 1$, 考虑 $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{x+2}$, 则

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+2)-(\sqrt{x}+1)}{(x+2)^2}=\frac{x+2-2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}(x+2)^2}=\frac{2-x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+2)^2}.$$

令 $g(x)=2-x-2\sqrt{x}$, 则 $g'(x)=-1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}<0$, 则 $g(x)$ 单调递减.

对 $x\geq 1$ 有 $g(x)\leq g(1)=2-1-2=-1<0$, 即此时 $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}(x+2)^2}<0$.

因此 $f(x)$ 单调递减, 即数列 $\{a_n\}$ 单调递减.

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n+2}=0$, 由 Leibniz 判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

综上, 则原级数条件收敛.

(5) 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{2n+3}=\dfrac{1}{2}\neq 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+1}{2n+3}$ 发散. 因此原级数发散.

(6) 由于 $n\geq 3$ 时 $\ln n>1$, 此时有 $a_n>\dfrac{1}{n}$ 成立.

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

对 $x\geq 1$, 考虑 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

$f'(x)=0$ 时 $x=e$. 则 $x>e$ 时 $f'(x)<0$, 此时 $f(x)$ 单调递减.

因此当 $n\geq 3$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$.

由 Leibniz 判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

综上, 则原级数条件收敛.

(7) 由于 $a_n=\sqrt[n]{n}-1=e^{\frac{\ln n}{n}}-1>\dfrac{\ln n}{n}$, 且由(6)可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\ln n}{n}$ 发散,

由比较判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

对 $x\geq 1$, 考虑 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}-1=e^{\frac{\ln x}{x}}-1$, 则 $f'(x)=\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1-\ln x)$.

$f'(x)=0$ 时 $x=e$. 则 $x>e$ 时 $f'(x)<0$, 此时 $f(x)$ 单调递减.

因此当 $n\geq 3$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}-1=0$.

由 Leibniz 判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

综上, 则原级数条件收敛.

(8) 由10(5)可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^n n!}{n^n}$ 发散. 因此原级数发散.

18. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 满足 $a_n \le b_n \le c_n\ (n\in\mathbb{N}_+)$, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ 均收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛.

证明: 由题, 则 $0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n$, 又因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(c_n-a_n)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛,

由比较判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_n-a_n)$ 也收敛.

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_n-a_n)+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

19. 讨论级数 $1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^\alpha}+\cdots$ 的敛散性 $(\alpha\in\mathbb{R})$.

解: ①当 $\alpha>1$ 时, 则原级数可转化为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^\alpha}\right]=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^\alpha}$.

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^\alpha}$ 收敛. 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

②当 $\alpha=1$ 时, 则原级数可转化为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

由于 $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, 由 Leibniz 判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

③当 $\alpha<1$ 时, 则原级数可转化为 $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{(2n)^\alpha}+\frac{1}{2n+1}\right]=1-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(2n)^\alpha}-\frac{1}{2n+1}\right]$.

则 $a_n=\frac{1}{(2n)^\alpha}-\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}>0$. 又

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(2n)^\alpha}-\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n^\alpha}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^\alpha}-\frac{n^\alpha}{2n+1}=\frac{1}{2^\alpha}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n^{1-\alpha}+n^{-\alpha}}=\frac{1}{2^\alpha}.$$

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 发散, 由极限判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散, 即原级数发散.

综上, $\alpha=1$ 时原级数收敛, $\alpha\ne1$ 时原级数发散.

20. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=1$, 试问: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 是否收敛? 若收敛, 请证明你的结论; 若发散, 请举反例说明.

解: 不一定收敛.

此时令 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, b_n=1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=1$.

而此时 $a_nb_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}=a_n+\dfrac{1}{n}$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 发散.

21. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n\ (a_n>0)$ 条件收敛, 试问:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}$ 是否收敛? 为什么? (2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{2n}$ 收敛吗? 为什么?

解: 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 条件收敛, 且 $a_n>0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

又因为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n}.$$

(1) 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}=\dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n\right)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}$ 发散.

(2) 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{2n}=\dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n\right)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{2n}$ 发散.

22. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有 2 阶连续导数, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=a(a\geq0)$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解: 设 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内二阶导连续, 此时 $\delta>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\delta}\right]+1$. 则 $n>N$ 时必有 $\dfrac{1}{n}<\delta$ 成立.

且由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, 又 $f(x)$ 连续则 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=a$, 且 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=a$.

当 $a>0$ 时, 由保号性, 则存在 $N_0\in\mathbb{N}_+$ 使得 $n>N_0$ 时 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)>0$.

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 由极限判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

对 $n>N$, $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 在 $x=0$ 的泰勒展开式为

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)+f'(0)\cdot\frac{1}{n}+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{a}{n}+\frac{f''(\xi)}{2n^2},\qquad \xi\in\left[0,\frac{1}{n}\right].$$

由于 $f'(0)=a>0$, 且 $f'(x)$ 连续, 则由保号性, 存在 $N_1\in\mathbb{N}_+$ 且 $N_1\geq N$,

使得 $f'(x)>0$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{N_1}\right]$ 上成立, 此时 $f(x)$ 单调递增.

则对 $n\geq N_1$, 因为 $\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$, 则 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)>f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ 成立.

又 $f''(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$ 上连续, 则必有界, 因此存在 $M\geq 0$ 使得 $|f''(x)|\leq M$ 成立.

因此有 $|f''(\xi)|\leq M$ 成立. 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f''(\xi)}{n^2}=0$.

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a}{n}+\dfrac{f''(\xi)}{n^2}=0+0=0$.

由 Leibniz 判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛.

当 $a=0$ 时, 从而对 $n>N$, $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 在 $x=0$ 的泰勒展开式为

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)+f'(0)\cdot\frac{1}{n}+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{f''(\xi)}{2n^2},\qquad \xi\in\left[0,\frac{1}{n}\right].$$

又 $f''(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$ 上连续, 则必有界, 因此存在 $M\geq 0$ 使得 $|f''(x)|\leq M$ 成立.

从而 $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|=\left|\dfrac{f''(\xi)}{2n^2}\right|\leq\dfrac{M}{n^2}$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{M}{n^2}$ 收敛, 由比较判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 均收敛.

综上, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛; 当 $a>0$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 发散, $a=0$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛.

23. 设 $f(x)$ 为偶函数, 且在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数, $f(0)=1, f''(0)=2$. 试证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

证明: 由于 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(x)=f(-x)$ 始终成立.

从而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{-x}=-f'(0)$, 则 $f'(0)=0$.

设 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内二阶导连续, 此时 $\delta>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\delta}\right]+1$. 则 $n>N$ 时必有 $\dfrac{1}{n}<\delta$ 成立.

从而对 $n>N$, $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 在 $x=0$ 的泰勒展开式为

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)+f'(0)\cdot\frac{1}{n}+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}=1+\frac{f''(\xi)}{2n^2},\qquad \xi\in\left[0,\frac{1}{n}\right].$$

又 $f''(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ 上连续, 则必有界, 因此存在 $M\geq 0$ 使得 $|f''(x)|\leq M$ 成立.

因此有 $|f''(\xi)|\leq M$ 成立.

从而

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{|f''(\xi)|}{2n^2}\leq\frac{M}{2n^2}.$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{M}{2n^2}$ 收敛, 由比较判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|$ 收敛.

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

24. 设 $a_n>0$, 且 $\{a_n\}$ 单调递减, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 发散, 试判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 的敛散性.

解: 由 $\{a_n\}$ 单调递减且 $a_n>0$, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛. 此时令 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$. 因此 $A\geq 0$.

若 $A=0$, 由 Leibniz 判别法则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛, 与题设条件矛盾, 因此 $A>0$.

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{1+A}<1$.

由根值判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

25. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $f(x)=e^x-1+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$.

试证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 条件收敛.

证明: 由题

$$\begin{aligned}f(x)&=e^x-1+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{u=x-t}e^x-1+\int_x^0(x-u)f(u)\mathrm{d}(x-u)\\&=e^x-1+x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

从而 $f'(x)=e^x+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)=e^x+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$, $f''(x)=e^x+f(x)$.

因此 $f(0)=0$, $f'(0)=f''(0)=1$, 且 $f''(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

由于 $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)+f'(0)\frac{1}{n}+\frac{f''(\xi)}{2}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{f''(\xi)}{2n^2},\qquad \xi\in\left[0,\frac{1}{n}\right].$$

由于 $f'(0)=1>0$, 且 $f'(x)$ 连续, 则由保号性, 存在 $N\in\mathbb{N}_+$,

使得 $f'(x)>0$ 在 $\left[0,\frac{1}{N}\right]$ 上成立, 此时 $f(x)$ 单调递增.

则对 $n\geq N$, 因为 $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$, 则 $f\left(\frac{1}{n}\right)>f\left(\frac{1}{n+1}\right)$ 成立.

又 $f''(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ 上连续, 则必有界, 因此存在 $M\geq 0$ 使得 $|f''(x)|\leq M$ 成立.

因此有 $|f''(\xi)|\leq M$ 成立. 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f''(\xi)}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f''(\xi)}{n}=0$.

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\frac{f''(\xi)}{n^2}=0+0=0$.

由 Leibniz 判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\frac{1}{n}+\frac{f''(\xi)}{n^2}\right)=1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f''(\xi)}{n}=1$.

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 由极限判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散.

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 条件收敛.

26. 设 $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$ 收敛.

证明: 由题对 $n\geq 1$ 有

$$\begin{aligned}u_n&=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\xlongequal{u=x-n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(u+n\pi)}{\sqrt{u+n\pi}}\mathrm{d}(u+n\pi)\\&=\int_0^{\pi}\frac{(-1)^n\sin u}{\sqrt{u+n\pi}}\mathrm{d}u=(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{u+n\pi}}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

此时令 $u_n=(-1)^n a_n$, 则 $a_n>0$.

因为 $\frac{\sin x}{\sqrt{x+(n+1)\pi}}<\frac{\sin x}{\sqrt{x+n\pi}}$ 对 $0<x<\pi$ 均成立,

则 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x+(n+1)\pi}}\mathrm{d}x<\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x+n\pi}}\mathrm{d}x$ 成立, 即 $a_{n+1}<a_n$.

又由于 $\displaystyle a_n\le\int_0^{\pi}\frac{1}{x+n\pi}\mathrm{d}x=2\sqrt{x+n\pi}\Big|_0^{\pi}=2\left(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}\right)=\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$,

且 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$, 由夹逼准则有 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.

由 Leibniz 判别法, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛, 即级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛. 则 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=u_0+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛.

*27. 用阿贝尔判别法或狄利克雷判别法判别下列级数的敛散性.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\ (x>0)$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\ (0<x<2\pi,\alpha>0)$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos^2 n}{n}$.

解: (1) 当 $x=1$ 时, 原级数化为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$.

对 $a_n=\dfrac{1}{2n}$, 有 $a_{n+1}<a_n$ 且 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n$ 成立, 由 Leibniz 判别法, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ 收敛.

当 $x>0$ 且 $x\ne1$ 时, 令 $b_n=\dfrac{x^n}{x^n+1}=1-\dfrac{1}{x^n+1}$.

当 $0<x<1$ 时, $x^{n+1}<x^n$, 则 $\dfrac{1}{x^n+1}<\dfrac{1}{x^{n+1}+1}$, 从而 $b_{n+1}<b_n$, 即数列 $\{b_n\}$ 单调递减.

当 $x>1$ 时, $x^{n+1}>x^n$, 则 $\dfrac{1}{x^n+1}>\dfrac{1}{x^{n+1}+1}$, 从而 $b_{n+1}>b_n$, 即数列 $\{b_n\}$ 单调递增.

综上当 $x>0$ 且 $x\ne1$ 时数列 $\{b_n\}$ 单调有界.

且由刚才讨论可知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 由阿贝尔判别法, 则原级数收敛.

综上, $x>0$ 时原级数收敛.

(2) 因为 $0<x<2\pi$, 则 $0<\dfrac{x}{2}<\pi$, 从而 $\sin\dfrac{x}{2}>0$. 从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sin kx&=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}\sin x+\sin\frac{x}{2}\sin 2x+\cdots+\sin\frac{x}{2}\sin nx\right)\\&=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\left[\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)+\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+\cdots+\left(\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)\right]\\&=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},\end{aligned}$$

因此有 $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| \le \dfrac{\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|+\left|\cos\dfrac{2n+1}{2}x\right|}{2\sin\dfrac{x}{2}} \le \dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}$, 则 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ 有界.

又 $\alpha>0$, 则数列 $\left\{\dfrac{1}{n^\alpha}\right\}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0$,

由狄利克雷判别法, 则原级数收敛.

(3) 由于 $\sin n\sin n^2=\dfrac12\left(\cos\dfrac{n^2-n}{2}-\cos\dfrac{n^2+n}{2}\right)=\dfrac12\left(\cos\dfrac{(n-1)n}{2}-\cos\dfrac{n(n+1)}{2}\right)$,

从而

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sin k\sin k^2&=\frac12\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{(k-1)k}{2}-\cos\frac{k(k+1)}{2}\right]\\
&=\frac12\left[\left(\cos\frac{0\cdot1}{2}-\cos\frac{1\cdot2}{2}\right)+\left(\cos\frac{1\cdot2}{2}-\cos\frac{2\cdot3}{2}\right)+\cdots+\left(\cos\frac{(n-1)n}{2}-\cos\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]\\
&=\frac12\left[\cos0-\cos\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac12-\frac12\cos\frac{n(n+1)}{2},
\end{aligned}
$$

从而 $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\sin k^2\right|\le\dfrac12+\dfrac12\left|\cos\dfrac{n(n+1)}{2}\right|\le\dfrac12+\dfrac12=1$, 即 $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\sin k^2\right|$ 有界.

又数列 $\left\{\dfrac1n\right\}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac1n=0$,

由狄利克雷判别法, 则原级数收敛.

(4) 因为

$$
(-1)^{n-1}\frac{\cos^2 n}{n}=\frac{(-1)^{n-1}(1+\cos2n)}{2n}=\frac{(-1)^{n-1}}{2n}+\frac{(-1)^{n-1}}{2n}\cos2n,
$$

由(1)可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}$ 收敛, 接下来讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}\cos2n$ 的敛散性.

类似(2)的讨论方式, 对 $0<x<2\pi$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos kx&=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}(\cos x+\cos2x+\cdots+\cos nx)=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}\cos x+\sin\frac{x}{2}\cos2x+\cdots+\sin\frac{x}{2}\sin nx\right)\\
&=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\left[\left(\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{-x}{2}\right)+\left(\sin\frac{5x}{2}+\sin\frac{-3x}{2}\right)+\cdots+\left(\sin\frac{(2n+1)x}{2}+\sin\frac{-(2n-1)x}{2}\right)\right]\\
&=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},
\end{aligned}
$$

因此有 $\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \le \dfrac{\left|\sin\dfrac{2n+1}{2}x\right|+\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}{2\sin\dfrac{x}{2}} \le \dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}$, 则 $\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ 有界.

又因为 $\cos n\pi=(-1)^n$, 则

$$\frac{(-1)^{n-1}\cos 2n}{2n}=\frac{-\cos n\pi\cos 2n}{2n}=\frac{\sin n\pi\sin 2n-\cos n\pi\cos 2n}{2n}=-\frac{\cos(2n+n\pi)}{2n}.$$

对 $x=\pi+2$, 则有 $\left|\sum_{k=1}^{n}\cos k(2+\pi)\right|$ 有界. 又数列 $\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$ 单调递减, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n}=0$.

由狄利克雷判别法, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}\cos 2n=-\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos n(2+\pi)}{2n}$ 收敛.

综上, 则原级数收敛.

28. 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n^p}$ 收敛, 证明: 当 $q>p$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n^q}$ 收敛.

证明: 易知

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^q}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}\cdot\frac{1}{n^{q-p}},$$

且数列 $\left\{\dfrac{1}{n^{q-p}}\right\}$ 单调递减, 在 $n\ge 1$ 时满足 $0<\dfrac{1}{n^{q-p}}\le 1$, 即该数列单调有界.

又级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n^p}$ 收敛, 由阿贝尔判别法, 则原级数收敛.

29. 设 $a_n>0$, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散, 试判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{a_n+1}$ 的敛散性.

解: 假设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{a_n+1}$ 收敛, 则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}1-\dfrac{1}{a_n+1}=0$.

又因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{a_n}{a_n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n+1}=1,$$

且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散, 由极限判别法, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{a_n+1}$ 发散.

与假设矛盾, 假设不成立, 因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{a_n+1}$ 发散.

7.4 幂级数及其和函数 习题

30. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)\cdot 2^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3^n}{n^2}+\frac{n}{2^n}\right)x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n\cdot 4^n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$;

(5) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x+1)^n}{n(\ln n)^\alpha}(\alpha<1)$;

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$;

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^3(2x-1)^{2n}}{(3n)!}$;

(8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$;

(9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$;

(10) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot 3^n x^{2n}$.

解: (1) 对 $a_n=\frac{1}{(n+1)2^n}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+2)2^{n+1}}}{\frac{1}{(n+1)2^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2(n+2)} = \frac{1}{2},$$

设收敛半径为 r, 则 $\frac{1}{r}=\frac{1}{2}$, 从而 $r=2$.

则 $|x|<2$ 时幂级数收敛. 因此考虑 $|x|=2$, 即 $x=\pm 2$ 时的情况.

当 $x=2$ 时, 幂级数变为 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$, 显然发散.

当 $x=-2$ 时, 幂级数变为 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$, 该级数条件收敛.

因此原幂级数的收敛域为 $[-2,2)$.

(2) 对 $a_n=\frac{3^n}{n^2}+\frac{n}{2^n}=\frac{3^n\cdot 2^n+n^2\cdot n}{n^2 2^n}=\frac{6^n+n^3}{n^2 2^n}$, 因为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{6^{n+1}+(n+1)^3}{(n+1)^2 2^{n+1}}}{\frac{6^n+n^3}{n^2 2^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2(n+1)^2}\cdot\frac{6^{n+1}+(n+1)^3}{6^n+n^3}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2(n+1)^2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{6+\frac{(n+1)^3}{6^n}}{1+\frac{n^3}{6^n}} = \frac{1}{2}\times 6 = 3,\end{aligned}$$

设收敛半径为 r, 则 $\frac{1}{r}=3$, 从而 $r=\frac{1}{3}$.

则 $|x|<\frac{1}{3}$ 时幂级数收敛. 因此考虑 $|x|=\frac{1}{3}$, 即 $x=\pm\frac{1}{3}$ 时的情况.

当 $x=\frac{1}{3}$ 时, 幂级数变为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3^n}{n^2}+\frac{n}{2^n}\right)\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{6^n}$.

令 $b_n=\frac{n}{6^n}$, 则 $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{6n}=\frac{1}{6}<1$, 由比较判别法, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛.

又级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 因此幂级数收敛.

当 $x=-\frac{1}{3}$ 时, 幂级数变为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3^n}{n^2}+\frac{n}{2^n}\right)\frac{(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{6^n}$,

由上述讨论, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{6^n}$ 均绝对收敛, 因此幂级数收敛.

因此原幂级数的收敛域为 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$.

(3) 令 $t=(x+1)^2$, 则幂级数转化为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n}t^n$. 对 $a_n=\frac{1}{n\cdot 4^n}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\cdot 4^n}{(n+1)4^{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{4(n+1)}=\frac{1}{4},$$

设收敛半径为 r, 则 $\frac{1}{r}=\frac{1}{4}$, 从而 $r=4$.

则 $|t|<4$ 时幂级数收敛, 即 $|(x+1)^2|<4$, 解得 $-3<x<1$.

此时考虑 $|t|=4$ 时的情况, 则有 $|(x+1)^2|=4$, 即 $x=1$ 或 $x=-3$.

而此时幂级数变为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, 显然发散.

因此原幂级数的收敛域为 $(-3,1)$.

(4) 【法 1】对 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 因为 $n\to+\infty$ 时 $a_n\to+\infty$, 有

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n+\frac{1}{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}1+\frac{1}{(n+1)a_n}=1+0=1,$$

【法 2】对 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, 因为 $1 = n \cdot \frac{1}{n} \le a_n \le n \cdot 1 = n$,

则有 $1 \le \sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{n}$ 成立. 又 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 由夹逼准则, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

设收敛半径为 r, 则 $\frac{1}{r} = 1$, 从而 $r = 1$.

则 $|x| < 1$ 时幂级数收敛. 因此考虑 $|x| = 1$, 即 $x = \pm 1$ 时的情况.

当 $x = 1$ 时, 幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \ne 0$, 因此幂级数发散.

当 $x = -1$ 时, 幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, 类似地, 幂级数发散.

因此原幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

(5) 令 $t = x + 1$, 则幂级数转化为 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^\alpha} t^n$. 对 $a_n = \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^\alpha}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)[\ln(n+1)]^\alpha}{n(\ln n)^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^\alpha = 1 \times 1^\alpha = 1,$$

设收敛半径为 r, 则 $\frac{1}{r} = 1$, 从而 $r = 1$.

则 $|t| < 1$ 时幂级数收敛, 即 $|x + 1| < 1$, 解得 $-2 < x < 0$.

此时考虑 $|t| = 1$ 时的情况. 则有 $|x + 1| = 1$, 即 $x = 0$ 或 $x = -2$.

当 $x = -2$ 时, 幂级数变为 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, 此时幂级数发散.【利用11(5)】

当 $x = 0$ 时, 幂级数变为 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^\alpha}$, 令 $b_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, 此时 $b_n > 0$.

对 $x \ge 2$, 考虑 $f(x) = x(\ln x)^\alpha$, 则 $f'(x) = (\ln x)^\alpha + x \cdot \alpha(\ln x)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x} = (\ln x)^{\alpha-1}(\ln x + \alpha)$.

从而 $x > e$ 时, $f'(x) > 0$ 成立, 则 $f(x)$ 单调递增.

因此 $n \ge 3$ 时有 $(n+1)[\ln(n+1)]^\alpha > n(\ln n)^\alpha$ 成立, 从而此时 $b_{n+1} < b_n$.

又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, 由 Leibniz 判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^\alpha}$ 收敛.

因此原幂级数的收敛域为 $(-2, 0]$.

(6) 对 $a_n=\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{3^n+(-2)^n}}{\sqrt[n]{n}}=\frac{3\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}}=3,$$

设收敛半径为 r, 则 $\dfrac{1}{r}=3$, 从而 $r=\dfrac{1}{3}$.

则 $|x|<\dfrac{1}{3}$ 时幂级数收敛. 因此考虑 $|x|=\dfrac{1}{3}$, 即 $x=\pm\dfrac{1}{3}$ 时的情况.

当 $x=\dfrac{1}{3}$ 时, 幂级数变为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

由于 $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, 且级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛, 由比较判别法, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛.

因此级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ 绝对收敛. 又级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 从而此时幂级数发散.

当 $x=-\dfrac{1}{3}$ 时, 幂级数变为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

又 $\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$ 且 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, 由 Leibniz 判别法, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

又级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛, 从而此时幂级数收敛.

因此原幂级数的收敛域为 $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

(7) 令 $t=(2x-1)^2$, 则幂级数转化为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}t^n$. 对 $a_n=\dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{[(n+1)!]^3}{(3n+3)!}\frac{(n!)^3}{(3n)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}.$$

设收敛半径为 r, 则 $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{27}$, 从而 $r=27$.

则 $|t|<27$ 时幂级数收敛, 即 $|(2x-1)^2|<27$, 解得 $\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$.

此时考虑 $|t|=27$ 时的情况, 有 $|(2x-1)^2|=27$, 即 $x=\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$ 或 $x=\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$.

而此时幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n!)^3\cdot 27^n}{(3n)!}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(3^n\cdot n!)^3}{(3n)!}$, 又因为

$$
\begin{aligned}
(3n)! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdots(3n-2)(3n-1)\cdot 3n \\
&= [1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-1)][2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)][3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)] \\
&< [3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)][3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)][3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)] = (3^n n!)^3,
\end{aligned}
$$

则 $\dfrac{(n!)^3\cdot 27^n}{(3n)!}>1$ 始终成立, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n!)^3\cdot 27^n}{(3n)!}\neq 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n!)^3\cdot 27^n}{(3n)!}$ 发散.

因此原幂级数的收敛域为 $\left(\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2},\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)$.

(8) 对 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$, 因为

$$
\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e,
$$

设收敛半径为 r, 则 $\dfrac{1}{r}=e$, 从而 $r=\dfrac{1}{e}$.

则 $|x|<\dfrac{1}{e}$ 时幂级数收敛. 因此考虑 $|x|=\dfrac{1}{e}$, 即 $x=\pm\dfrac{1}{e}$ 时的情况.

当 $x=\dfrac{1}{e}$ 时, 幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n}$. 因为

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n &\xlongequal{x=\frac{1}{n}}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \\
&=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-(1+x)}{2x(1+x)}=-\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n}=e^{-\frac{1}{2}}\neq 0$, 则该幂级数发散.

当 $x=-\dfrac{1}{e}$ 时, 幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$, 由上讨论则该幂级数发散.

因此原幂级数的收敛域为 $\left(-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}\right)$.

(9) 令 $t=x^2$, 则幂级数转化为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}t^n$. 对 $a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}=4.$$

设收敛半径为 r, 则 $\frac{1}{r}=4$, 从而 $r=\frac{1}{4}$.

则 $|t|<\frac{1}{4}$ 时幂级数收敛, 即 $|x^2|<\frac{1}{4}$, 解得 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$.

此时考虑 $|t|=\frac{1}{4}$ 的情况, 有 $|x^2|=\frac{1}{4}$, 即 $x=\pm\frac{1}{2}$.

此时幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!(2n)!!}{(2n)!!(2n)!!}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

因为

$$\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2=\frac{3^2\times5^2\cdots(2n-1)^2}{2\times(2\times4)\times(4\times6)\cdots(2n-2)(2n)\cdot(2n)}>\frac{1}{4n},$$

从而 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}>\frac{1}{2\sqrt{n}}$, 又级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散, 由比较判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 发散.

因此原幂级数收敛域为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

(10) 令 $t=x^2$, 则幂级数转化为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})3^n t^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}t^n$.

对 $a_n=\frac{3^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}}{\frac{3^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}=3\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=3,$$

设收敛半径为 r, 则 $\frac{1}{r}=3$, 从而 $r=\frac{1}{3}$.

则 $|t|<\frac{1}{3}$ 时幂级数收敛, 即 $|x^2|<\frac{1}{3}$, 解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

此时考虑 $|t|=\frac{1}{3}$ 的情况, 则 $|x^2|=\frac{1}{3}$, 即 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

此时幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\dfrac{1}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, 该级数显然发散.

因此原幂级数收敛域为 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

31. 求下列幂级数的收敛域与和函数:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^{n-1}$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n-1}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{4n-3}}{4n-3}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n+2)}$.

解: 用 u_n 表示下列各小题中幂级数的通项, $S(x)$ 表示其和函数.

(1) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)|x|^n}{(n+1)|x|^{n-1}}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n+1}=|x|,$$

由比值法, 当 $|x|<1$, 即 $-1<x<1$ 时幂级数收敛, 其在 $(-1,1)$ 内逐项可积.

因为 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}+\dfrac{1}{1-x}$, 令 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$.

再令 $T(x)=\displaystyle\int_0^x S_1(t)\mathrm{d}t$, 则 $x\in(-1,1)$ 时, $T'(x)=S_1(x)$. 又因为

$$T(x)=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}t^n\Big|_0^x=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

因此 $x\in(-1,1)$ 时 $S_1(x)=T'(x)=\dfrac{(1-x)-(-x)}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

从而 $x\in(-1,1)$ 时有 $S(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1+(1-x)}{(1-x)^2}=\dfrac{2-x}{(1-x)^2}$.

再考虑 $|x|=1$ 即 $x=\pm1$ 的情况. 显然 $x=\pm1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^{n-1}$ 均发散.

则有和函数 $S(x)=\dfrac{2-x}{(1-x)^2}$, $x\in(-1,1)$.

(2) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{n+2}}{\dfrac{|x|^n}{n+1}}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2}=|x|,$$

由比值法, 当 $|x|<1$, 即 $-1<x<1$ 时幂级数收敛, 其在 $(-1,1)$ 内逐项可导.

因为 $x=0$ 时 $S(0)=0$, 而 $-1<x<1$ 且 $x\neq 0$ 时

$$S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}.$$

对 $T(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$, 则 $T'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$. 又 $T(0)=0$, 从而有

$$T(x)=\int_0^x T'(t)\mathrm{d}t+T(0)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln|1-t|\Big|_0^x=-\ln|1-x|.$$

则 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ 时有 $S(x)=\dfrac{1}{x}T(x)=-\dfrac{1}{x}\ln|1-x|$.

再考虑 $|x|=1$ 即 $x=\pm1$ 的情况. 而 $x=1$ 时级数化为 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n+1}$, 则其发散;

$x=-1$ 时, 级数化为 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$, 由 Leibniz 判别法可知该级数收敛.

因为 $T(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 在 $x=-1$ 处也收敛, 则 $T(-1)=-\ln|1-(-1)|=-\ln 2$.

从而 $S(-1)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=-T(-1)=\ln 2$, 满足 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ 内的表达式.

则和函数

$$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln|1-x|, & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\[2ex] 0, & x=0.\end{cases}$$

(3) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{|x|^n}{n(n+1)}}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=|x|,$$

由比值法, 当 $|x|<1$, 即 $-1<x<1$ 时幂级数收敛, 其在 $(-1,1)$ 内逐项可导.

因为 $x=0$ 时 $S(0)=0$, 而 $-1<x<1$ 且 $x\neq 0$ 时

$$
\begin{aligned}
S(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-x\right)=1+\left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}.
\end{aligned}
$$

令 $T(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, 则 $T'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$.

又因为 $T(0)=0$, 因此对 $x\in(-1,1)$ 有

$$
T(x)=\int_0^x T'(t)\mathrm{d}t+T(0)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t+0=-\ln|1-t|\Big|_0^x=-\ln|1-x|.
$$

此时有 $S(x)=1+\frac{x-1}{x}T(x)=1-\frac{x-1}{x}\ln|1-x|$, 且 $x\in(-1,1)$, $x\neq 0$.

再考虑 $|x|=1$ 即 $x=\pm 1$ 的情况. 而 $x=1$ 时级数化为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, 显然收敛;

$x=-1$ 时, 级数化为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$, 由 Leibniz 判别法可知该级数收敛.

因为 $T(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ 在 $x=-1$ 处也收敛, 则 $T(-1)=-\ln|1-(-1)|=-\ln 2$.

从而 $S(-1)=1+\left(1-\frac{1}{-1}\right)T(-1)=1-2\ln 2$, 满足 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ 内的表达式.

又 $S(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{n+1}=1$.

则和函数

$$
S(x)=\begin{cases}1-\frac{x-1}{x}\ln|1-x|, & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0,\\ 1, & x=1.\end{cases}
$$

(4) 因为

$$
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{|x|^{2n+3}}{2n+1}}{\frac{|x|^{2n+1}}{2n-1}}=|x|^2\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=|x|,
$$

由比值法, 当 $|x|^2<1$, 即 $-1<x<1$ 时幂级数收敛, 其在 $(-1,1)$ 内逐项可导.

因为 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n-1}=x^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, 对 $T(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

则 $T'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$.

又因为 $T(0)=0$, 因此对 $x\in(-1,1)$ 有

$$
\begin{aligned}
T(x)&=\int_0^x T'(t)\mathrm{d}t+T(0)=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t+0=\frac{1}{2}\left(\ln|1+t|-\ln|1-t|\right)\Big|_0^x\\
&=\frac{1}{2}\left(\ln|1+x|-\ln|1-x|\right)-0=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.
\end{aligned}
$$

从而 $x\in(-1,1)$ 时 $S(x)=x^2T(x)=\frac{x^2}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$.

再考虑 $|x|=1$ 即 $x=\pm1$ 的情况. 当 $x=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}$ 显然发散;

当 $x=-1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}$ 也发散.

则有和函数 $S(x)=\frac{x^2}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$, $x\in(-1,1)$.

(5) 因为

$$
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{|x|^{4n+1}}{4n+1}}{\frac{|x|^{4n-3}}{4n-3}}=|x|^4\lim_{n\to+\infty}\frac{4n-3}{4n+1}=|x|^4,
$$

由比值法, 当 $|x|^4<1$, 即 $-1<x<1$ 时幂级数收敛, 其在 $(-1,1)$ 内逐项可导.

因为 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$, 则 $S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{4n-4}=\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{(1-x^2)(1+x^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)$.

又 $S(0)=0$, 因此对 $x\in(-1,1)$ 有

$$
\begin{aligned}
S(x)&=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t+S(0)=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t^2}+\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t+0\\
&=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\arctan t\Big|_0^x\\
&=\frac{1}{4}\left(\ln|1+t|-\ln|1-t|\right)\Big|_0^x+\frac{1}{2}\arctan x-0\\
&=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\arctan x.
\end{aligned}
$$

再考虑 $|x|=1$ 即 $x=\pm1$ 的情况. $x=1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n-3}$ 显然发散;

当 $x=-1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{4n-3}}{4n-3}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n-3}$ 也发散.

则有和函数 $S(x)=\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+\dfrac{1}{2}\arctan x,\ x\in(-1,1)$.

(6) 令 $t=\dfrac{(x-2)^2}{4}$, 则原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}t^n$, 此时令其和函数为 $T(t)$. 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{t^{n+1}}{n+1}}{\frac{t^n}{n}}\right|=|t|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=|t|,$$

由比值法, 当 $|t|<1$, 即 $-1<t<1$ 时幂级数收敛, 其在 $(-1,1)$ 内逐项可导.

又 $T'(t)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}t^{n-1}=\dfrac{1}{1-t}$, 且 $T(0)=0$, 从而

$$T(t)=\int_0^t T'(u)\mathrm{d}u+T(0)=\int_0^t\frac{1}{1-u}\mathrm{d}u=-\ln|1-u|\Big|_0^t=-\ln|1-t|.$$

再考虑 $|t|=1$ 的情况. 由于 $t\geq 0$, 此时只能有 $t=1$, 级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 显然发散.

用 $t=\dfrac{(x-2)^2}{4}$ 代换, 由 $|t|<1$ 则 $(x-2)^2<4$, 解得 $0<x<4$. 因此

$$S(x)=-\ln\left|1-\frac{(x-2)^2}{4}\right|=-\ln\left|\frac{-x^2+4x}{4}\right|=\ln 4-\ln|-x^2+4x|.$$

则和函数 $S(x)=\ln 4-\ln|-x^2+4x|,\ x\in(0,4)$.

(7) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2|x|^{n+1}}{n^2|x|^n}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=|x|,$$

由比值法, 当 $|x|<1$, 即 $-1<x<1$ 时幂级数收敛, 其在 $(-1,1)$ 内逐项可积.

又因为

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^n+x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}\\&=x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1},\end{aligned}$$

此时令 $T_1(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}$, $T_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$, 则 $S(x)=x^2T_1(x)+xT_2(x)$.

对 $T_1(x)$, 因为

$$\begin{aligned}\int_0^x T_1(t)\mathrm{d}t&=\int_0^x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)t^{n-2}\mathrm{d}t=\sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^x n(n-1)t^{n-2}\mathrm{d}t=\sum_{n=2}^{+\infty}nt^{n-1}\Big|_0^x\\&=\sum_{n=2}^{+\infty}nx^{n-1}=T_2(x)-1,\end{aligned}$$

对 $T_2(x)$, 因为

$$\int_0^x T_2(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}t^n\Big|_0^x=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

从而 $T_2(x)=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{(1-x)+x}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$,

$T_1(x)=[T_2(x)-1]'=T_2'(x)=\dfrac{2(1-x)}{(1-x)^4}=\dfrac{2}{(1-x)^3}$.

因此 $x\in(-1,1)$ 时有 $S(x)=x^2T_1(x)+xT_2(x)=\dfrac{2x^2}{(1-x)^3}+\dfrac{x}{(1-x)^2}=\dfrac{2x^2+x(1-x)}{(1-x)^3}=\dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$.

再考虑 $|x|=1$ 即 $x=\pm1$ 的情况. 显然 $x=\pm1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$ 均发散.

则有和函数 $S(x)=\dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$, $x\in(-1,1)$.

(8) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)(n+3)}}{\dfrac{|x|^n}{n(n+2)}}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}=|x|,$$

由比值法, 当 $|x|<1$, 即 $-1<x<1$ 时幂级数收敛, 其在 $(-1,1)$ 内逐项可导.

因为 $x=0$ 时 $S(0)=0$, 而 $-1<x<1$ 且 $x\neq0$ 时

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2x^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-x-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2x}+\frac{x^2-1}{2x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}.\end{aligned}$$

令 $T(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, 由(3)可知, $T(x)=-\ln|1-x|$.

此时有 $S(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2x}+\frac{x^2-1}{x}T(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2x}-\frac{x^2-1}{x}\ln|1-x|$, 且 $x\in(-1,1)$, $x\neq 0$.

再考虑 $|x|=1$ 即 $x=\pm 1$ 的情况. 而 $x=1$ 时级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}$, 显然收敛;

$x=-1$ 时, 级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}$, 由 Leibniz 判别法可知该级数收敛.

因为 $T(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ 在 $x=-1$ 处也收敛, 则 $T(-1)=-\ln|1-(-1)|=-\ln 2$.

从而 $S(-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{-2}+\frac{1^2-1}{2}T(-1)=-\frac{1}{4}$, 满足 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ 内的表达式.

又 $S(1)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$.

则和函数

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}+\frac{1}{2x}+\frac{x^2-1}{2x^2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}, & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0,\\ \frac{3}{4}, & x=1.\end{cases}$$

32. 证明下列级数收敛, 并计算级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 4^n}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

解: 用 u_n 表示下列各小题中级数的通项.

(1) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(2n+1)4^{n+1}}}{\frac{1}{(2n-1)4^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{4(2n+1)}=\frac{1}{4}<1,$$

由比值判别法, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 4^n}$ 收敛.

此时考虑幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}$, 则原级数可化为 $S\left(\frac{1}{2}\right)$.

因为 $S(x)=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, 且对 $T(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, 其在 $(-1,1)$ 内逐项可导,

并有 $T'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$.

又因为 $T(0)=0$, 因此对 $x\in(-1,1)$ 有

$$T(x)=\int_0^x T'(t)\mathrm{d}t+T(0)=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t+0=\frac{1}{2}\left(\ln|1+t|-\ln|1-t|\right)\Big|_0^x$$
$$=\frac{1}{2}\left(\ln|1+x|-\ln|1-x|\right)-0=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

从而有 $S(x)=xT(x)=\dfrac{x}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|, x\in(-1,1)$.

因此 $S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right|=\dfrac{\ln 3}{4}$, 即 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 4^n}=\frac{\ln 3}{4}$.

(2) 因为 $u_n\le\dfrac{1}{2^n}$, 且级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛, 由比较判别法, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ 收敛.

此时考虑幂级数 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, 则原级数可化为 $S\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

其在 $(-1,1)$ 内逐项可导, 且 $S'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$.

又因为 $S(0)=0$, 因此对 $x\in(-1,1)$ 有

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t+S(0)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t+0=-\ln|1-t|\Big|_0^x=-\ln|1-x|.$$

从而 $S\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln\left|1-\dfrac{1}{2}\right|=-\ln\dfrac{1}{2}=\ln 2$, 即 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\ln 2$.

(3) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_n|}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n(2n-1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}.$$

且级数 $\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 收敛, 即级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$ 绝对收敛.

此时考虑幂级数 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}x^{2n}$, 则该幂级数的收敛域为 $[-1,1]$, 原级数转化为 $S(1)$.

在 $(-1,1)$ 上, 因为 $S'(x)=2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}$, 则 $S'(0)=0$.

又因为 $S''(x)=2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{2n-2}=-2\sum_{n=1}^{+\infty}(-x^2)^{n-1}=-2\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{-2}{1+x^2}$, 则

$$S'(x)=\int_0^x S''(t)\mathrm{d}t+S'(0)=-2\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+0=-2\arctan t\Big|_0^x=-2\arctan x.$$

又因为 $S(0)=0$, 则有

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \int_0^x S'(t)\mathrm{d}t + S(0) = -2\int_0^x \arctan t\mathrm{d}t + 0 = -2\left(t\arctan t\Big|_0^x - \int_0^x t\mathrm{d}\arctan t\right) \\
&= -2x\arctan x + 2\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = -2x\arctan x + \int_0^x \frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{1+t^2} \\
&= -2x\arctan x + \ln(1+t^2)\Big|_0^x = -2x\arctan x + \ln(1+x^2).
\end{aligned}
$$

又幂级数展开在 $x=1$ 处左连续, 从而 $x=1$ 也满足上述对 $-1<x<1$ 的函数表达式.

则 $S(1) = -2\arctan 1 + \ln(1+1) = \ln 2 - \dfrac{\pi}{2}$, 即 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)} = S(1) = \ln 2 - \frac{\pi}{2}$.

(4) 因为

$$
\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1,
$$

由比值判别法, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 收敛. 此时考虑幂级数 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$, 则原级数可化为 $S\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

利用31(7), 则 $S(x) = \dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$, 代入 $x=\dfrac{1}{2}$, 则

$$
S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}} = 6.
$$

因此有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = 6$.

33. 求函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2-1)^n}{n(n+1)}$ 的收敛域与和函数.

解: 令 $t=x^2-1$, 则原级数化为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n(n+1)}$, 记其和函数为 $T(t)$.

由31(3)知

$$
T(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t-1}{t}\ln|1-t|, & t\in[-1,0)\cup(0,1), \\ 0, & t=0, \\ 1, & t=1. \end{cases}
$$

此时 $t\in[-1,1]$, 从而 $x^2-1\in[-1,1]$, 则 $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, 即原级数的收敛域为 $-[\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

又 $t=0$ 时 $x=\pm1$, $t=1$ 时 $x=\pm\sqrt{2}$,

且 $\dfrac{t-1}{t}\ln|1-t| = \dfrac{(x^2-1)-1}{x^2-1}\ln|1-(x^2-1)| = \dfrac{x^2-2}{x^2-1}\ln|2-x^2|$.

所以原级数的和函数

$$S(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x^2-2}{x^2-1}\ln|2-x^2|, & x\in(-\sqrt{2},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{2}),\\ 0, & x=\pm 1,\\ 1, & x=\pm\sqrt{2}.\end{cases}$$

7.5 函数的幂级数展开 习题

34. 证明泰勒定理.

证明: 泰勒定理的内容: 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内存在任意阶导数, 则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \iff \lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0.$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ $(0<\theta<1)$ 为拉格朗日余项.

此时 $T_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 是 $f(x)$ 的泰勒多项式.

因为 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内有任意阶导数, 因此在该邻域内,

对任意正整数 n, 均有 $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$ 成立.

先证明充分性. 由题, 则此时有 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}T_n(x)$ 成立.

又因为 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$, 等式两边同时取 $n\to+\infty$,

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}[f(x)-T_n(x)]=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)-\lim\limits_{n\to+\infty}T_n(x)=0$, 充分性得证.

再证明必要性. 由题此时有 $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=0$ 成立.

因为对任意正整数 n 均有 $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$, 则取 $n\to+\infty$, 此时有

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}T_n(x)+R_n(x)=\lim_{n\to+\infty}T_n(x)+\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

从而必要性得证.

综上, 则泰勒定理得证.

35. 将 $f(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ 展开成麦克劳林级数, 并计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$.

解: 因为 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 则有

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!},\quad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

因此

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!},\quad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

故此时有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}=f(1)$ 成立.

又因为 $f(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$, 从而 $f(1)=\dfrac{e-e+1}{1^2}=1$.

则有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}=1$.

36. 将下列函数展开成关于 x 的幂级数, 并求其收敛域:[尽量用收敛域来描述]

【这里我们可以直接利用 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ 展开时的收敛域结果, 但如果所求函数不直接用到这些函数, 例如需要对这些函数进行积分得到结果时(10), 则边界处要额外进行考虑.】

(1) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;

(2) $(x+1)e^{2x}$;

(3) $\sin^2 x$;

(4) $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$;

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{1+x}$;

(6) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

(7) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(8) $\dfrac{1}{x^2-5x-14}$;

(9) $\ln(2-x-x^2)$;

(10) $\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

解: (1) 由 e^x 的展开式则有

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{2(n)!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

再确定收敛域. 由题, $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. 对 $a_n=\dfrac{1}{(2n)!}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=0,$$

因此其收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 由 e^x 的展开式则有

$$\begin{aligned}(x+1)e^{2x}&=xe^{2x}+e^{2x}=x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2x)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}x^n\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}x^n+1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}x^n=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{n2^{n-1}}{n(n-1)!}+\frac{2^n}{n!}\right]x^n\\&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+2)2^{n-1}}{n!}x^n.\end{aligned}$$

再确定收敛域. 由题, $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. 对 $a_n=\dfrac{(n+2)2^{n-1}}{n!}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+3)2^n}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(n+2)2^{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2(n+3)}{(n+1)(n+2)}=0,$$

因此其收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(3) 由 $\cos x$ 的展开式则有

$$\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac12-\frac12\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

再确定收敛域. 由题, $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. 由于对 $\cos 2x$ 展开时有 $-\infty<2x<+\infty$, 即 $-\infty<x<+\infty$.

因此其收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(4) 因为 $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac12\cos x+\dfrac{\sqrt3}{2}\sin x$, 由 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的展开式则有

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac12\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{\sqrt3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

再确定收敛域. 由题, $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. 由于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 展开时, 都有 $-\infty < x < +\infty$.

因此其收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

(5) 因为 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1+x} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}$, 由 $(1+x)^{\alpha}$ 的展开式则有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1+x} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x)^n + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n \\
&= 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n[1\cdot 3\cdots(2n-1)]}{2^n n!}(-1)^n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n[-1\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)]}{2^n n!}x^n \\
&= 2 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n \\
&= 2 + x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)!![2n-1+(-1)^{n-1}]}{(2n)!!}x^n.
\end{aligned}$$

再确定其收敛域. 首先考虑其定义域, 则有 $1-x>0$ 且 $1+x \geq 0$, 解得定义域为 $[-1,1)$.

对 $a_n = \dfrac{(2n-3)!![2n-1+(-1)^{n-1}]}{(2n)!!}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(2n-1)!![2n+1+(-1)^n]}{(2n+2)!!}}{\dfrac{(2n-3)!![2n-1+(-1)^{n-1}]}{(2n)!!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{2n+2}\cdot\frac{2n+1+(-1)^n}{2n-1+(-1)^{n-1}} = 1.$$

从而收敛半径为 1, 幂级数在 $(-1,1)$ 内绝对收敛. 此时考虑 $x=\pm 1$ 的情况.

因为 $x=1$ 不在 $f(x)$ 定义域内, 从而不考虑.

$x=-1$ 时, 幂级数化为 $2+x+\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$.

对 $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 因为 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, 且 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$, 从而有 $a_{n+1} < a_n$.

由 Leibniz 判别法, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ 收敛.

再考虑 $b_n = \dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$, 由11(9), $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 从而 $b_n = \dfrac{(2n-3)!!}{2n(2n-2)!!} < \dfrac{1}{2n\sqrt{2n-1}}$,

由于级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2n\sqrt{2n-1}}$ 收敛, 由比较判别法, 从而级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} b_n$ 收敛.

则原幂级数收敛. 因此其收敛域为 $[-1,1)$.

(6) 因为 $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\ln\sqrt{1+x}-\ln\sqrt{1-x}=\dfrac{1}{2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2}\ln(1-x)$,

由 $\ln(1+x)$ 的展开式则有

$$
\begin{aligned}
\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}-(-1)}{n}x^n\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.
\end{aligned}
$$

再确定其收敛域. 首先考虑其定义域. 则有 $(1+x)(1-x)>0$, 解得定义域为 $-1<x<1$.

对 $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$, 因为

$$
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=1,
$$

从而收敛半径为 1, 幂级数在 $(-1,1)$ 内绝对收敛.

因此其收敛域为 $(-1,1)$.

(7) 令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, 则求导有

$$
f'(x)=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.
$$

由 $(1+x)^\alpha$ 的展开式则有

$$
\begin{aligned}
f(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(x^2)^n\\
&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n[1\cdot3\cdots(2n-1)]}{2^n n!}x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},
\end{aligned}
$$

又 $f(0)=\ln(0+1)=0$, 则利用积分可得

$$
f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]\mathrm{d}t=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}.
$$

再确定其收敛域. 由题, $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. 对 $a_n=\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+3)(2n+2)!!}}{\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}=1,$$

从而收敛半径为 1, 幂级数在 $(-1,1)$ 内绝对收敛. 此时考虑 $x=\pm1$ 的情况.

$x=\pm1$ 时 $x^{2n}=1$, 原级数化为 $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}$. 由11(9)可知, $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$,

从而 $\left|\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\right|<\dfrac{1}{(2n+1)\sqrt{2n+1}}$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\sqrt{2n+1}}$ 收敛,

由比较判别法, 则原级数绝对收敛.

因此其收敛域为 $[-1,1]$.

(8) 因为

$$\frac{1}{x^2-5x-14}=\frac{1}{(x+2)(x-7)}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x+2}\right)=-\frac{1}{63}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7}x}-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}x},$$

由 $(1+x)^\alpha$ 的展开式则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-5x-14}&=-\frac{1}{63}\left(1-\frac{x}{7}\right)^{-1}-\frac{1}{18}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}\\&=-\frac{1}{63}\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}\left(-\frac{x}{7}\right)^n\right]-\frac{1}{18}\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]\\&=-\frac{1}{63}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{7^n}x^n-\frac{1}{18}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n\\&=-\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{7^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right]x^n.\end{aligned}$$

再考虑收敛域. 首先考虑其定义域, 则有 $x^2-5x-14\neq0$, 解得定义域为 $x\neq7$ 或 $x\neq2$.

对 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{7^n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{|x|^{n+1}}{7^{n+1}}}{\frac{|x|^n}{7^n}}=\dfrac{|x|}{7}$.

由比值法, 当 $\dfrac{|x|}{7}<1$, 即 $-7<x<7$ 时幂级数收敛, 且 $|x|=7$ 时易验证幂级数发散.

类似地, 对 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nx^n}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{|x|^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{|x|^n}{2^n}}=\dfrac{|x|}{2}$.

由比值法, 当 $\dfrac{|x|}{2}<1$, 即 $-2<x<2$ 时幂级数收敛, 且 $|x|=2$ 时易验证幂级数发散.

而原级数为两个级数的和, 此时取两级数收敛域的交集.

因此其收敛域为 $(-2,2)$.

(9) 由 $\ln(1+x)$ 的展开式则有

$$
\begin{aligned}
\ln\left(2-x-x^2\right)=\ln\left(x+2\right)(1-x)=\ln\left(x+2\right)+\ln\left(1-x\right)&=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)+\ln\left(1-x\right)\\
&=\ln 2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n\\
&=\ln 2+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}+\frac{-1}{n}\right]x^n\\
&=\ln 2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n2^n}x^n,
\end{aligned}
$$

再考虑收敛域. 首先考虑定义域, 则 $2-x-x^2=(x+2)(1-x)>0$, 解得定义域为 $-2<x<1$.

由于对 $\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$ 进行展开时有 $-1<\dfrac{x}{2}\leq 1$, 即 $-2<x\leq 2$;

对 $\ln(1-x)$ 进行展开时有 $-1<-x\leq 1$, 即 $-1\leq x<1$.

且原级数是两个函数展开后的幂级数的和, 此时取两级数收敛域的交集, 即 $-1\leq x<1$, 在函数定义域内.

因此其收敛域为 $[-1,1)$.

(10) 令 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, 则求导有

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\cdot\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2+(1-x^2)^2}\\
&=\frac{-4x}{1+x^4+2x^2+1+x^4-2x^2}=-\frac{2x}{1+x^4}=-2x(1+x^4)^{-1}.
\end{aligned}
$$

由 $(1+x)^\alpha$ 的展开式则有

$$
\begin{aligned}
f'(x)=-2x(1+x^4)^{-1}&=-2x\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}(x^4)^n\right]\\
&=-2x\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^nx^{4n}\right]=-2x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{4n}=2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{4n+1}.
\end{aligned}
$$

又因为 $f(0)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$, 因此积分可得

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\frac{\pi}{4}+2\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}t^{4n+1}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}+2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\int_0^x t^{4n+1}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\pi}{4}+2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n+2}}{4n+2}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{4n+2}.$$

再考虑收敛域. 由题, $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. 对 $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{4n+2}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x|^{4(n+1)+2}}{|x|^{4n+2}}\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=|x|^4,$$

由比值法, 当 $|x|^4<1$, 即 $-1<x<1$ 时幂级数收敛, 且 $|x|^4=1$ 时有 $x^{4n+2}=1$.

此时原幂级数化为 $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, 由 Leibniz 判别法可知其收敛.

因此其收敛域为 $[-1,1]$.

37. 设 $f(x)=\sin 3x\cos x$, 计算: $f^{(n)}(0)$ $(n=1,2\cdots)$.

解: 因为 $f(x)=\sin 3x\cos x=\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)$, 由 $\sin x$ 的麦克劳林级数展开,

则 $\sin 4x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(4x)^{2n+1}$, $\sin 2x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2x)^{2n+1}$. 从而

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(4x)^{2n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2x)^{2n+1}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(4^{2n+1}+2^{2n+1})}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2^{4n+1}+2^{2n})}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

由于展开 $\sin 2x$ 时有 $-\infty<2x<+\infty$, 展开 $\sin 4x$ 时有 $-\infty<4x<+\infty$, 即对任意 $x\in\mathbb{R}$ 均成立.

且 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 因此有 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2^{4n+1}+2^{2n})}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

又 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 即为展开式中 x^n 项的系数, 因此当 n 为偶数时, $f^{(n)}(0)=0$.

当 n 为奇数时, 取 $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, 从而有

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}=\frac{(-1)^k(2^{4k+1}+2^{2k})}{(2k+1)!}=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2^{2n-1}+2^{n-1})}{n!},$$

因此 $f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2^{2n-1}+2^{n-1})$.

综上,

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k, k\in\mathbb{N}_+,\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(2^{2n-1}+2^{n-1}), & n=2k+1, k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

38. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并计算 $f^{(n)}(0)$ $(n=1,2\cdots)$.

解: 先对 $f(x)$ 求导有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right)^2}\cdot\frac{-2(1+2x)-2(1-2x)}{(1+2x)^2}=\frac{-2-4x-2+4x}{(1+2x)^2+(1-2x)^2}\\&=\frac{-4}{1+4x^2+4x+1+4x^2-4x}=\frac{-2}{1+4x^2}=-2(1+4x^2)^{-1}.\end{aligned}$$

由 $(1+x)^{\alpha}$ 的展开式则有

$$\begin{aligned}f'(x)=-2(1+4x^2)^{-1}&=-2\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}(4x^2)^n\right]\\&=-2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n4^nx^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n}.\end{aligned}$$

又因为 $f(0)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$, 因此积分可得

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\frac{\pi}{4}+\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}2^{2n+1}t^{2n}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}2^{2n+1}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}.\end{aligned}$$

再考虑收敛域. 先考虑 $f(x)$ 的定义域, 此时有 $1+2x\neq 0$, 解得函数定义域为 $x\neq-\dfrac{1}{2}$.

对 $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{2^{2n+3}}{2n+3}|x|^{2n+3}}{\dfrac{2^{2n+1}}{2n+1}|x|^{2n+1}}=|x|^2\lim_{n\to+\infty}\frac{4(2n+1)}{2n+3}=4|x|^2,$$

由比值法, 当 $4|x|^2<1$, 即 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ 时级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛, 此时再考虑 $x=\pm\frac{1}{2}$ 时的情况.

且 $x=\frac{1}{2}$ 时 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, 其收敛; $x=-\frac{1}{2}$ 时函数无定义.

因此有 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$, $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

又 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 即为展开式中 x^n 项的系数, 因此当 n 为偶数时, $f^{(n)}(0)=0$.

当 n 为奇数时, 取 $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, 从而有

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}=\frac{(-1)^{k+1}2^{2k+1}}{2k+1}=\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}2^n}{n},$$

因此 $f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n+1}{2}}2^n(n-1)!$.

综上,

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k, k\in\mathbb{N}_+,\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}2^n(n-1)!, & n=2k+1, k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

39. 计算 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3n-4}{n!}$ 的值.

解: 由题, 将原级数拆开转化则有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3n-4}{n!}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)+4n-4}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}+4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n!}-4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\\&=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}-4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}-4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}+4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}-4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

由 e^x 的展开式, 则 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$.

从而令 $x=1$, 则 $e=e^1=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$, 故 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3n-4}{n!}=e$.

40. 利用函数的幂级数展开, 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2[\ln(1+x)-\sin x]+x^2}{x(\sqrt{1-2x}-1)\cdot\arcsin x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\arcsin x}{\ln(1+x^2)(\sqrt{1-x}-1)}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(1+\cos x)-2\sin^2 x}{x^4}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{\ln(1-2x^3)\cdot\arcsin x}$.

解: (1) 由于 $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$, $\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)$, $x\to0$, 则

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{2[\ln(1+x)-\sin x]+x^2}{x(\sqrt{1-2x}-1)\cdot\arcsin x}&=\lim_{x\to0}\frac{2[\ln(1+x)-\sin x]+x^2}{x\cdot\frac{1}{2}(-2x)\cdot x}\\
&=-\lim_{x\to0}\frac{2\left[\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)\right]+x^2}{x^3}\\
&=-\lim_{x\to0}\frac{-x^2+x^3+x^2+o(x^3)}{x^3}=-1.
\end{aligned}
$$

(2) 由于 $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$, $\arcsin x=x+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$, $x\to0$, 则

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\arcsin x}{\ln(1+x^2)(\sqrt{1-x}-1)}&=\lim_{x\to0}\frac{\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)-\left(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}{x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right)}\\
&=-2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

(3) 由于 $\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^4)$, $x\to0$,

从而 $-2\sin^2 x=\cos 2x-1=1-\dfrac{1}{2!}(2x)^2+\dfrac{1}{4!}(2x)^4+o(x^4)-1=-2x^2+\dfrac{2}{3}x^4+o(x^4)$, 因此

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos x)-2\sin^2 x}{x^4}&=\lim_{x\to0}\frac{x^2\left[1+\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)\right]+\left(-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)}{x^4}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{2x^2-\frac{1}{2}x^4-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

(4) 由于 $e^{-\frac{x^2}{2}}=1+\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)+\dfrac{1}{2!}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2+o\left(\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2\right)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+o(x^4)$, $x\to0$, 因此

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{\ln(1-2x^3)\cdot\arcsin x}&=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)}{(-2x^3)\cdot x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)}{-2x^4}=-\frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$

41. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{ax-\sin x}\displaystyle\int_b^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t=c$ (c 为实常数), 求常数 a,b,c 的值.

解: 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(ax-\sin x)=0$, 则有 $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_b^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t=\int_b^0\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t=0.$

因为 $\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\geq 0$ 且只在 $t=0$ 处取 0,

所以若 $b<0$, 有 $\displaystyle\int_b^0\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t>\int_b^0 0\ \mathrm{d}t=0$; 若 $b>0$, 有 $\displaystyle\int_b^0\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t<\int_b^0 0\ \mathrm{d}t=0.$

从而均与题意矛盾, 因此有 $b=0$.

由于又由原题极限可知, 用洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_b^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{ax-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{a-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{a+x}(a-\cos x)}.$$

此时由洛必达法则的使用原则, 则函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}$ 在 $x=0$ 的一个邻域内连续,

从而在邻域内应有 $a+x>0$ 成立, 则 $a>0$.

则当 $a=1$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}(a-\cos x)=0$, 从而原极限化为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x}(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x}\cdot\dfrac{1}{2}x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}}=2=c.$$

当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时, 原极限化为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{a}(a-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{a}(a-1)}=0=c.$$

综上, $a=1,b=0,c=2$ 或 $b=c=0$, $a>0$ 且 $a\neq 1$.

42. 当 $x\to 0$ 时, $\displaystyle\int_0^x e^t\cos t\mathrm{d}t-x-\frac{x^2}{2}$ 与 Ax^n 为等价无穷小, 求常数 A 与 n 的值.

解: 由题意知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x e^t\cos t\mathrm{d}t-x-\frac{x^2}{2}}{Ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1-x}{Anx^{n-1}}.$$

因为 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, 则

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

从而有

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \cos x - 1 - x}{Anx^{n-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - 1 - x}{Anx^{n-1}} = -\frac{1}{3An} \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{x^{n-1}} = 1,$$

因此 $n - 1 = 3$, 则 $n = 4$. 又 $-\frac{1}{3An} = 1$, 从而 $A = -\frac{1}{12}$.

43. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$ 的收敛域与和函数, 并计算 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)2^n}{n!}$ 的值.

解: 对 $u_n = \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2n+3}{(n+1)!}|x|^{2n+2}}{\frac{2n+1}{n!}|x|^{2n}} = x^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{(2n+1)(n+1)} = 0 < 1,$$

从而该幂级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

令和函数 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$, 积分可得

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{2n+1}{n!} t^{2n}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = xe^{x^2}.$$

因此 $S(x) = (xe^{x^2})' = e^{x^2} + x \cdot 2xe^{x^2} = (2x^2+1)e^{x^2}$, 此时 $x \in \mathbb{R}$.

从而 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n!} 2^n = S(\sqrt{2}) = (2 \times 2 + 1)e^2 = 5e^2$.

44. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2-6x-4)^n}{n \cdot 12^n}$ 的收敛域与和函数.

解: 令 $t = x^2 - 6x - 4$, 幂级数转化为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 12^n} t^n$. 对 $a_n = \frac{1}{n \cdot 12^n}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)12^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 12^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{12(n+1)}=\frac{1}{12}.$$

从而收敛半径为 12, 则 $-12<t<12$ 时幂级数绝对收敛, 此时考虑 $t=\pm 12$ 时的情况.

$t=12$ 时, 原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, 显然发散; $t=-12$ 时原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 其收敛.

从而 $-12\le t<12$ 时幂级数收敛, 即 $-12\le x^2-6x-4<12$. 解得 $-2<x\le 2$ 或 $4\le x<8$.

因此幂级数的收敛域为 $(-2,2]\cup[4,8)$.

令 $S(t)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n\cdot 12^n}$, 则有 $S'(t)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{12^n}=\frac{1}{12}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{t}{12}\right)^{n-1}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{12}}=\frac{1}{12-t}$.

又 $S(0)=0$, 则

$$S(t)=\int_0^t S'(u)\mathrm{d}u+S(0)=\int_0^t\frac{1}{12-u}\mathrm{d}u=-\ln|12-u|\Big|_0^t=\ln\frac{12}{12-t}.$$

用 x^2-6x-4 替换 t, 从而幂级数的和函数 $T(x)=\ln\frac{12}{12-(x^2-6x-4)}=\ln\frac{12}{16+6x-x^2}$,

$x\in(-2,2]\cup[4,8)$.

45. 将下列函数在指定点 x_0 处展开成泰勒级数:

(1) $\ln(x+1), x_0=2$;

(2) $\frac{2x+3}{x^2+3x}, x_0=-2$.

解: (1) 令 $t=x-2$, 则有 $\ln(x+1)=\ln(t+3)=\ln 3+\ln\left(1+\frac{t}{3}\right)$.

由 $\ln(1+x)$ 的展开式则有

$$\begin{aligned}\ln(x+1)&=\ln 3+\ln\left(1+\frac{t}{3}\right)=\ln 3+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{t}{3}\right)^n\\&=\ln 3+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}(x-2)^n.\end{aligned}$$

再考虑收敛域. 对 $\ln\left(1+\dfrac{t}{3}\right)$ 展开时有 $-1<t\leq 1$, 即 $-1<\dfrac{x-2}{3}\leq 1$, 解得 $-1<x\leq 5$.

从而泰勒级数的收敛域为 $(-1,5]$.

(2)令 $t=x+2$, 则有 $\dfrac{2x+3}{x^2+3x}=\dfrac{2(t-2)+3}{(t-2)^2+3(t-2)}=\dfrac{t-2+t+1}{(t-2)(t+1)}=\dfrac{1}{t-2}+\dfrac{1}{t+1}$.

由 $(1+x)^\alpha$ 的展开式则有

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{x^2+3x}&=\frac{1}{t-2}+\frac{1}{t+1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{t}{2}}+\frac{1}{1+t}\\&=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}t^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nt^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n-\frac{1}{2^{n+1}}\right]t^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n-\frac{1}{2^{n+1}}\right](x+2)^n.\end{aligned}$$

再考虑收敛域. 首先原函数的定义域为 $x\neq 0$ 或 $x\neq -3$.

对 $a_n=(-1)^n-\dfrac{1}{2^{n+1}}$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}-\dfrac{1}{2^{n+2}}}{(-1)^n-\dfrac{1}{2^{n+1}}}\right|=1,$$

从而收敛半径为 1, 当 $-1<x+2<1$ 即 $-3<x<-1$ 时幂级数绝对收敛.

此时考虑 $x+2=\pm 1$ 的情况. $x+2=1$ 时, 原级数化为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$,

因为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ 发散, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$ 收敛, 则原级数发散.

$x+2=-1$ 时, 原级数化为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$, 因为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}1$ 发散, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ 收敛, 则原级数发散.

从而泰勒级数的收敛域为 $(-3,-1)$.

46. 利用函数幂级数的展开式, 计算下列定积分的近似值:

(1) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ (精确到 10^{-4});

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$ (精确到 10^{-4}).

解: (1) 由 e^x 的展开式则有

$$\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}\approx\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}+R_N$$

又余项需满足误差

$$|R_N|\le\frac{1}{(2N+1)\cdot N!}<10^{-4},$$

故取 $N=7$, 此时 $|R_7|\le\dfrac{1}{15\times 7!}=\dfrac{1}{75600}<10^{-4}$, 从而

$$\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x\approx\sum_{n=0}^{6}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}\approx 0.7468.$$

(2) 如果直接依据 $(1+x)^\alpha$ 的展开式展开, 则

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x^3)^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1},$$

若满足误差要求则需计算 3333 项, 因此不能用这种方法.

此时选择用因式分解处理被积函数.

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{-x+2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{t=x-\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\ln 2+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{3}\ln 2+0+\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2+1}\mathrm{d}\frac{2}{\sqrt{3}}t=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

此时对两部分分开进行考虑, 则每一项考虑误差位数精确到 10^{-5}, 再求和时误差一定小于 10^{-4}.

由于 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}=2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 令 $\dfrac{1+x}{1-x}=2$, 则 $x=\dfrac{1}{3}$. 从而

$$\frac{1}{3}\ln 2=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{2}{(2n+1)3^{2n+2}}+R_N.$$

又余项需满足误差, 且

$$|R_N|=\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)3^{2n+2}}<\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{n3^{2n+2}}<\frac{1}{N}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{3^{2n+2}}=\frac{1}{N}\cdot\frac{\frac{1}{3^{2N+2}}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{8N(3^{2N})}.$$

取 $N=4$, 则 $|R_4|=\dfrac{1}{32\times 3^8}=\dfrac{1}{209952}<10^{-5}$.

从而

$$\frac{1}{3}\ln 2\approx\sum_{n=0}^{3}\frac{2}{(2n+1)3^{2n+2}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{243}+\frac{2}{3645}+\frac{2}{45927}\approx 0.23104.$$

又因为 $\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 从而

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n+1)3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{2(-1)^n}{(2n+1)3^{n+1}}+R'_N.$$

又余项需满足误差

$$|R'_N|\leq\frac{2}{(2N+1)\cdot 3^{N+1}}<10^{-5},$$

故取 $N=8$, 则 $|R'_8|\leq\dfrac{2}{17\cdot 3^9}=\dfrac{2}{334611}<10^{-5}$.

从而

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}&\approx\sum_{n=0}^{7}\frac{2(-1)^n}{(2n+1)\cdot 3^{n+1}}\\&=\frac{2}{3}-\frac{2}{27}+\frac{2}{135}-\frac{2}{567}+\frac{2}{2187}-\frac{2}{8019}+\frac{2}{28431}-\frac{2}{98415}\approx 0.60460.\end{aligned}$$

故 $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0.23104+0.60460\approx 0.8356.$

7.7 函数的傅里叶级数 习题

先列出几个常见的 $f(x)$, 与计算 $\int_0^\pi f(x)\cos nx\mathrm{d}x$, $\int_0^\pi f(x)\sin nx\mathrm{d}x$ 的过程.

这样做为了简化下文傅里叶系数计算中积分部分的答案书写, 需要写过程的时候参考这里即可.

同时也要注意到 $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

[1] $f(x) = k$, k 是常数.

$$\int_0^\pi f(x)\cos nx\mathrm{d}x = k\int_0^\pi \cos nx\mathrm{d}x = \frac{k}{n\pi}\sin nx\Big|_0^\pi = 0;$$

$$\int_0^\pi f(x)\sin nx\mathrm{d}x = k\int_0^\pi \sin nx\mathrm{d}x = -\frac{k}{n}\cos nx\Big|_0^\pi = -\frac{k}{n}[(-1)^n - 1].$$

[2] $f(x) = x$.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin nx\mathrm{d}x &= -\frac{1}{n}\int_0^\pi x\ \mathrm{d}\cos nx = -\frac{1}{n}\left[x\cos nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos nx\mathrm{d}x\right] \\ &= -\frac{1}{n}\left[\pi\cos n\pi - 0 - \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^\pi\right] \\ &= -\frac{(-1)^n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}(\sin n\pi - 0) = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\cos nx\mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\int_0^\pi x\ \mathrm{d}\sin nx = \frac{1}{n}\left[x\sin nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[\pi\sin n\pi - 0 - \left(-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^\pi\right)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.\end{aligned}$$

[3] $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin nx\mathrm{d}x &= -\frac{1}{n}\int_0^\pi x^2\ \mathrm{d}\cos nx = -\frac{1}{n}\left[x^2\cos nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos nx\mathrm{d}x^2\right] \\ &= -\frac{1}{n}\left[\pi^2\cos n\pi - 0 - 2\int_0^\pi x\cos nx\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\int_0^\pi x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\cdot\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{2(-1)^n - 2}{n^3}.\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} x^2\ \mathrm{d}\sin nx = \frac{1}{n}\left[x^2\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x^2\right]$$
$$= \frac{1}{n}\left[\pi\sin n\pi - 0 - 2\int_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x\right]$$
$$= \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{2}{n}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}.$$

53. 设 $f(x)=x^2\ (0\le x\le 1)$, 而 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin n\pi x\ (-\infty<x<+\infty)$. 其中 $b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$ $(n=1,2,\cdots)$, 求 $S\left(-\frac{1}{2}\right)$ 的值.

解: 此时要考虑将 $f(x)$ 展开成正弦级数. 先将 $f(x)$ 延拓成 $(-1,1]$ 上的奇函数 $F(x)$.

则 $-1<x<0$ 时, $F(x)=-f(-x)=-x^2$; $0\le x\le 1$ 时 $F(x)=f(x)=x^2$.

再将 $F(x)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2 的函数, 仍记为 $F(x)$.

因为 $F(-1)=F(1)=1^2=1$, $F(-1^-)=-(-1)^2=-1$,

从而 $F(x)$ 在 $x=2k-1$, $k\in\mathbb{Z}$ 处不连续, 满足狄利克雷收敛定理.

则函数 $F(x)$ 的傅里叶展开系数

$$A_n = 0.\ (n=0,1,2,\cdots)$$

$$B_n = \frac{2}{1}\int_0^1 F(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x = b_n.$$

因此
$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin n\pi x = \frac{F(x-0)+F(x+0)}{2}.$$

又 $F(x)$ 在 $x=-\frac{1}{2}$ 处连续, 从而 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=F\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$.

54. 将下列周期为 2π 的函数展开成傅里叶级数:

(1) $f(x)=\begin{cases}1-x, & -\pi\le x<0,\\ 1+x, & 0\le x<\pi;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x<0,\\ 2x, & 0\le x<\pi;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0<x<\pi, \\ 0, & x=\pi, \\ -x^2, & \pi<x\leq 2\pi; \end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases} -x-1, & -\pi\leq x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\leq x<\dfrac{\pi}{2}, \\ x-1, & \dfrac{\pi}{2}\leq x<\pi; \end{cases}$

(5) $f(x)=\pi^2-x^2$, $-\pi\leq x<\pi$.

解: (1) 由题, 考虑 $[-\pi,\pi]$ 上, 因为 $f(-\pi)=f(\pi)=f(\pi^-)=1+\pi$, 则 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,

由周期性, 从而 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

则 $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理, 因此对 $n\in\mathbb{N}_+$ 有

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(1-x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}(1+x)\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{\pi}\left[\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-\pi}^{0}+\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[0-\left(-\pi-\frac{1}{2}\pi^2\right)+\pi+\frac{1}{2}\pi^2-0\right] = \frac{2\pi+\pi^2}{\pi} = 2+\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(1-x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}(1+x)\cos nx\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x \\ &= 0+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2} = \frac{2(-1)^n-2}{\pi n^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(1-x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}(1+x)\sin nx\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[0-\int_{0}^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x\right] = 0. \end{aligned}$$

【这里因为 $x\cos nx$ 是偶函数, $x\sin nx$ 是奇函数, 这里利用了对称区间奇/偶函数的定积分性质】

【下面几题中一些积分的直接化简也是利用了对称性, 就不再赘述了】

根据狄利克雷收敛定理, 有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{2+\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx.$$

此时有 $x\in\mathbb{R}$.

【这里 $f(x)$ 也可化成 $f(x)=\dfrac{2+\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$, 因为 n 取偶数时 $(-1)^n-1=0$.】

(2) 由题, 考虑 $[-\pi,\pi]$ 上, 因为 $f(-\pi)=f(\pi)=-\pi$, 又 $f(\pi^-)=2\pi$, 则 $f(x)$ 在 $x=\pi$ 处不连续.

由周期性, 从而 $f(x)$ 在 $x=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ 处不连续.

则 $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理, 因此对 $n\in\mathbb{N}_+$ 有

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}x\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}2x\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}x^2\bigg|_{-\pi}^{0}+x^2\bigg|_{0}^{\pi}\right)\\&=\frac{1}{\pi}\left(0-\frac{1}{2}\pi^2+\pi^2-0\right)=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}2x\cos nx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{0}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}2x\cos nx\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2}=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}2x\sin nx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}2x\sin nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}=\frac{3(-1)^{n+1}}{n}.\end{aligned}$$

根据狄利克雷收敛定理, 有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

此时有 $x\neq(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

(3) 由题, 考虑 $[0,2\pi]$ 上, 因为 $f(0)=f(2\pi)=-4\pi^2$, $f(0^+)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续;

又因为 $f(\pi)=0$, $f(\pi^-)=\pi^2$, 则 $f(x)$ 在 $x=\pi$ 处不连续.

由周期性, 从而 $f(x)$ 在 $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ 处不连续.

则 $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理, 因此对 $n\in\mathbb{N}_+$ 有

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x^2\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} -x^2\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}\pi^3 - 0 - \left(\frac{8}{3}\pi^3 - \frac{1}{3}\pi^3\right)\right] = -2\pi^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (-x^2)\cos nx\mathrm{d}x\right] \\
&\xlongequal{t=x-\pi} \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi(-1)^n}{n^2} - \int_0^{\pi}(t+\pi)^2\cos(nt+n\pi)\mathrm{d}(t+\pi)\right] \\
&= \frac{2(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)^n(t^2+2\pi t+\pi^2)\cos nt\mathrm{d}t \\
&= \frac{2(-1)^n}{n^2} - \frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos nt\mathrm{d}t - 2(-1)^n\int_0^{\pi} t\cos nt\mathrm{d}t - (-1)^n\pi\int_0^{\pi}\cos nt\mathrm{d}t \\
&= \frac{2(-1)^n}{n^2} - \frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{2\pi(-1)^n}{n^2} - 2(-1)^n\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2} - 0 \\
&= \frac{2(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^2} + \frac{2(-1)^n}{n^2} = \frac{4[(-1)^n-1]}{n^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x^2\sin nx\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (-x^2)\sin nx\mathrm{d}x\right] \\
&\xlongequal{t=x-\pi} \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{2(-1)^n-2}{n^3} - \int_0^{\pi}(t+\pi)^2\sin(nt+n\pi)\mathrm{d}(t+\pi)\right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2(-1)^n-2}{n^3\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)^n(t^2+2\pi t+\pi^2)\sin nt\mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2(-1)^n-2}{n^3\pi} - \frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\sin nt\mathrm{d}t - 2(-1)^n\int_0^{\pi} t\sin nt\mathrm{d}t - (-1)^n\pi\int_0^{\pi}\sin nt\mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2(-1)^n-2}{n^3\pi} - \frac{(-1)^n}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{2(-1)^n-2}{n^3}\right] - \frac{2(-1)^n(-1)^{n+1}\pi}{n} - (-1)^n\pi\cdot\frac{1-(-1)^n}{n} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2(-1)^n-2}{n^3\pi} - \frac{-\pi}{n} - \frac{2-2(-1)^n}{n^3\pi} + \frac{2\pi}{n} - \frac{(-1)^n\pi}{n} + \frac{\pi}{n} \\
&= \frac{[4-2(-1)^n]\pi}{n} + \frac{4[(-1)^n-1]}{n^3\pi}.
\end{aligned}
$$

根据狄利克雷收敛定理, 有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \\
&= -\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{[4-2(-1)^n]\pi}{n} + \frac{4[(-1)^n-1]}{n^3\pi}\right\}\sin nx.
\end{aligned}
$$

此时有 $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(4) 由题, 考虑 $[-\pi,\pi]$ 上, 因为 $f(\pi)=f(-\pi)=\pi-1=f(\pi^-)$, 则 $f(x)$ 在 $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ 上连续.

又因为 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$, $f\left(-\frac{\pi}{2}^-\right)=\frac{\pi}{2}-1$. 则 $f(x)$ 在 $x=-\frac{\pi}{2}$ 处不连续,

且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1$, $f\left(\frac{\pi}{2}^-\right)=\frac{\pi}{2}$. 则 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处不连续.

由周期性, 则 $f(x)$ 在 $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ 上不连续.

则 $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理, 因此对 $n\in\mathbb{N}_+$ 有

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(-x-1)\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-1)\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+0+\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi^2}{2}+\pi\right)+\left(\frac{\pi^2}{2}-\pi\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-\pi-\pi+\frac{\pi}{2}\right)\\
&=\frac{3\pi}{4}-1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(-x-1)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-1)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\
&\xlongequal{t=-x}\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(t-1)\cos(-tn)\mathrm{d}(-t)+0+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-1)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(t-1)\cos nt\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-1)\cos nx\mathrm{d}x\right]=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-1)\cos nx\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{n\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-1)\mathrm{d}\sin nx=\frac{2}{n\pi}\left[(x-1)\sin nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}(x-1)\right]\\
&=\frac{2}{n\pi}\left[0-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sin\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{2}{n\pi}\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\
&=\frac{2-\pi}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n^2\pi}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\\
&=\frac{2-\pi}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}.
\end{aligned}$$

【这里对于 $\sin\frac{n\pi}{2}$ 和 $\cos\frac{n\pi}{2}$ 没有必要强行化简, 除非是要具体打开算某些级数的值的时候】

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(-x-1)\sin nx\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-1)\sin nx\mathrm{d}x\right] \\
&\xlongequal{t=-x} \frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(t-1)\sin(-tn)\mathrm{d}(-t) + 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-1)\sin nx\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-t)\sin nt\mathrm{d}t + 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-1)\sin nx\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{n}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\cos nx\right) = -\frac{2}{n\pi}\left[x\cos nx\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x\right] \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} - 0 - \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{2}{n\pi}\left[\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} - \left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} - 0\right)\right] \\
&= -\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

根据狄利克雷收敛定理, 有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \\
&= \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2-\pi}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\right]\cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx.
\end{aligned}
$$

此时有 $x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

(5) 由题, 考虑 $[-\pi,\pi]$ 上, 因为 $f(\pi) = f(-\pi) = 0 = f(\pi^-)$, 则 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,

由周期性, 从而 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则 $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理.

又 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为偶函数, 因此对 $n \in \mathbb{N}_+$ 有

$$
b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0.
$$

$$
a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\pi^2 x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\pi^3 - \frac{1}{3}\pi^3 - 0\right) = \frac{4\pi^2}{3}.
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos nx\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\int_{0}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x \\
&= 0 - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi(-1)^n}{n^2} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.
\end{aligned}
$$

根据狄利克雷收敛定理, 有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$$

此时有 $x\in\mathbb{R}$.

55. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 在指定区间内将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数:

(1) $f(x)=x$, (i) $-\pi\leq x<\pi$; (ii) $0\leq x<2\pi$;

(2) $f(x)=x^2$, (i) $-\pi\leq x<\pi$; (ii) $0\leq x<2\pi$;

(3) $f(x)=ax^2+bx+c$, (i) $-\pi\leq x<\pi$; (ii) $0\leq x<2\pi$.

解: (1) (i) 由题, $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理, 在 $x=2k\pi+\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ 处不连续.

在 $(-\pi,\pi)$ 上, $f(x)$ 是奇函数, 从而有 $a_n=0$, $n=0,1,2,\cdots$;

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n},n\in\mathbb{N}_+.$$

根据狄利克雷收敛定理, 在 $(-\pi,\pi)$ 上有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

(ii) 由题, $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理, 在 $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ 处不连续.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}x^2\Big|_0^{2\pi}=2\pi.$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}x\mathrm{d}\sin nx=\frac{1}{n\pi}\left(x\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{n\pi}\left(0-0+\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{1}{n^2\pi}(\cos 2n\pi-\cos 0)=0.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\sin nx\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\mathrm{d}\cos nx = -\frac{1}{n\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(2\pi\cos 2n\pi - 0 - \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi}\right) \\
&= -\frac{2\pi}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi}(\sin 2n\pi - \sin 0) = -\frac{2}{n}.
\end{aligned}
$$

根据狄利克雷收敛定理, 在 $(0, 2\pi)$ 上有

$$
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin nx.
$$

(2) (i) 由题, $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理, 在 $x = 2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$ 处不连续.

在 $(-\pi, \pi)$ 上, $f(x)$ 是偶函数, 从而有 $b_n = 0$, $n = 1, 2, \cdots$;

$$
a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3\pi}x^3\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.
$$

$$
a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi(-1)^n}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.
$$

根据狄利克雷收敛定理, 在 $(-\pi, \pi)$ 上有

$$
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.
$$

(ii) 由题, $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理, 在 $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ 处不连续.

因此对 $n \in \mathbb{N}_+$ 有【这里要借用(1)(ii)的结论】

$$
a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3\pi}x^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^2.
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} x^2\mathrm{d}\sin nx = \frac{1}{n\pi}\left(x^2\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x^2\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(0 - 0 - 2\int_0^{2\pi} x\sin nx\mathrm{d}x\right) = -\frac{2}{n\pi}\cdot\left(-\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{4}{n^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\sin nx\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\mathrm{d}\cos nx = -\frac{1}{n\pi}\left(x^2\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x^2\right) \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(4\pi^2\cos 2n\pi - 0 - 2\int_0^{2\pi} x\cos nx\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{1}{n\pi}(4\pi^2 - 0 - 0) = -\frac{4\pi}{n}.
\end{aligned}
$$

根据狄利克雷收敛定理, 在 $(0, 2\pi)$ 上有

$$
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{\pi}{n}\sin nx\right).
$$

(3) (i) 由题, $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理.

$b=0$ 时 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续; $b\neq 0$ 时 $f(x)$ 在 $x = 2k\pi+\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ 处不连续. 此时有

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(a\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x + b\int_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}c\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi^3}{3}a + 0 + 2c\pi\right) = \frac{2\pi^2}{3}a + 2c.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(a\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x + b\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x + c\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(2a\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x + b\cdot 0 + 2c\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(2a\cdot\frac{2\pi(-1)^n}{n^2} + 0 + 2c\cdot 0\right) = \frac{4a(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(a\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x + b\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x + c\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(a\cdot 0 + 2b\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x + c\cdot 0\right) \\
&= \frac{2b}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} = \frac{2b(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}
$$

根据狄利克雷收敛定理, 在 $(-\pi, \pi)$ 上有

$$
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{a\pi^2}{3} + c + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{4a(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{2b(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right].
$$

(ii) 由题, $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理.

$2a\pi + b = 0$ 时 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续; $2a\pi + b \neq 0$ 时 $f(x)$ 在 $x = 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ 处不连续.

借助(1)(ii)与(2)(ii)的结果, 从而

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{8a\pi^3}{3}+\frac{4b\pi^2}{2}+2c\pi\right) \\
&= \frac{8a\pi^2}{3}+2b\pi+2c.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{a}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x + \frac{b}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\mathrm{d}x + \frac{c}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{a}{\pi}\cdot\frac{4\pi}{n^2}+\frac{b}{\pi}\cdot 0+0 = \frac{4a}{n^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{a}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\mathrm{d}x + \frac{b}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\mathrm{d}x + \frac{c}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{a}{\pi}\cdot\left(-\frac{4\pi^2}{n}\right)+\frac{b}{\pi}\cdot\left(-\frac{2\pi}{n}\right)+0 = -\frac{4\pi a+2b}{n}.
\end{aligned}
$$

根据狄利克雷收敛定理, 在 $(0,2\pi)$ 上有

$$
f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) = \frac{4a\pi^2}{3}+b\pi+c+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4a}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi a+2b}{n}\sin nx\right).
$$

56. 将函数

$$
f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{\pi}{4}, & 0 \le x < \pi \end{cases}
$$

展开成傅里叶级数, 并由此推出

(1) $\dfrac{\pi}{4} = 1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots;$

(2) $\dfrac{\pi}{3} = 1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\dfrac{1}{19}-\dfrac{1}{23}+\cdots.$

解: 先将 $f(x)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数, 仍记为 $f(x)$.

由题, $f(x)$ 在 $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ 上不连续, 则 $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理.

又因为在 $(-\pi,0)\cup(0,\pi)$ 上有 $f(x)=-f(-x)$ 成立, 则 $f(x)$ 展开成的级数为正弦级数.

因此对 $n\in\mathbb{N}_+$ 有 $a_0=a_n=0$. 且

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}=\frac{1-(-1)^n}{2n}.$$

根据狄利克雷收敛定理, 有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{2n}\sin nx.$$

此时有 $x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

(1) 令 $x=\dfrac{\pi}{2}$, 则 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$, 且 n 为偶数时, $\sin\dfrac{n\pi}{2}=0$; n 为奇数时 $\sin\dfrac{n\pi}{2}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$.

从而对奇数项偶数项分开考虑有

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}\right)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2k+1}}{2(2k+1)}\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2k}}{4k}\sin k\pi\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}(-1)^k=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\end{aligned}$$

即有 $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$ 成立.

(2) 设 $A=1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\dfrac{1}{19}-\dfrac{1}{23}+\cdots$.

将 A 的表达式与(1)中求得结果进行比较, 则有

$$A+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{21}-\cdots\right)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}.$$

又因为

$$\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{21}-\cdots\right)=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{12},$$

从而有 $A+\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi}{4}$, 解得 $A=\dfrac{\pi}{3}$, 从而题中所给结论得证.

57. 将 $f(x)=\sin^4 x$ 展开成傅里叶级数.

解: 先对 $f(x)$ 进行降次, 则有

$$
\begin{aligned}
\sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 = (1-\cos^2 x)^2 = \left(1-\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{(1-\cos 2x)^2}{4} \\
&= \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2} \\
&= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.
\end{aligned}
$$

又因为 $f(x)$ 的周期为 2π, 且 $f(x)$ 为偶函数, 则展开成的级数为余弦级数.

因此对 $n \in \mathbb{N}_+$ 有 $b_n = 0$.

$$
a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{3}{8}\cdot 2\pi = \frac{3}{4}.
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)\cos nx\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos nx\mathrm{d}x + \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 4x\cos nx\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

利用三角函数系的正交性,

$n = 2$ 时, $a_2 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 2x\mathrm{d}x + \dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos 4x\cos 2x\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2\pi}\cdot\pi + 0 = -\dfrac{1}{2}$.

$n = 4$ 时, $a_4 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos 4x\mathrm{d}x + \dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 4x\mathrm{d}x = 0 + \dfrac{1}{8\pi}\cdot\pi = \dfrac{1}{8}$.

$n \neq 2$ 且 $n \neq 4$ 时, 则 $a_n = 0$.

根据狄利克雷收敛定理, 有

$$
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.
$$

此时有 $x \in \mathbb{R}$.

58. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数:

(1) $f(x) = x - 1\ (0 \le x < \pi)$;

(2) $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\ \left(0 < x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$;

(3) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi; \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} x - 2, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$

解: (1) (i) 展开成正弦级数. 先将 $f(x)$ 延拓成 $[-\pi,\pi)$ 上的奇函数 $F(x)$, 则 $F(0)=0$.

又因为 $f(0)=-1\neq 0$, 从而 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

再将 $F(x)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数, 仍记为 $F(x)$.

因此对 $n\in\mathbb{N}_+$ 有 $a_0=a_n=0$. 且

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x-1)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}\\&=\frac{2[(-1)^{n+1}\pi-1+(-1)^n]}{n\pi}.\end{aligned}$$

根据狄利克雷收敛定理, 对 $x\in(0,\pi)$ 有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi-1+(-1)^n}{n}\sin nx.$$

(ii) 展开成余弦级数. 先将 $f(x)$ 延拓成 $[-\pi,\pi)$ 上的偶函数 $F(x)$, 从而 $F(x)$ 在 $[0,\pi)$ 上连续.

再将 $F(x)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数, 仍记为 $F(x)$.

因此对 $n\in\mathbb{N}_+$ 有 $b_n=0$. 且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x-1)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\bigg|_0^\pi=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}-\pi\right)=\pi-2.$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x-1)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2}-\frac{2}{\pi}\cdot 0=\frac{2(-1)^n-2}{n^2\pi}.\end{aligned}$$

根据狄利克雷收敛定理, 对 $x\in[0,\pi)$ 有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{\pi}{2}-1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n}\sin nx.$$

(2) (i) 展开成正弦级数. 先将 $f(x)$ 延拓成 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的奇函数 $F(x)$.

再将 $F(x)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 π 的函数, 仍记为 $F(x)$. 从而 $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

又 $F\left(\frac{\pi}{2}^{+}\right)=F\left(-\frac{\pi}{2}^{+}\right)=-F\left(\frac{\pi}{2}^{-}\right)=0$, 则此时 $F(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 上连续.

因此对 $n\in\mathbb{N}_+$ 有 $a_0=a_n=0$. 且

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{2}{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin nx\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\cos nx\\
&=-\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)+\frac{2}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n}+\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}-0-\frac{2}{n^2\pi}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.
\end{aligned}$$

根据狄利克雷收敛定理, 对 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin 2nx.$$

(ii) 展开成余弦级数. 先将 $f(x)$ 延拓成 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的偶函数 $F(x)$.

再将 $F(x)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 π 的函数, 仍记为 $F(x)$, 此时 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

因此对 $n\in\mathbb{N}_+$ 有 $b_n=0$. 且

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\mathrm{d}x\\
&=\left(x-\frac{1}{\pi}x^2\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{4\pi}=\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{2}{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos nx\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\sin nx\\
&=\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-0\right)-\frac{2}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n\pi}\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}-0\right)-\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)=\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}.
\end{aligned}$$

根据狄利克雷收敛定理, 对 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos 2nx + b_n \sin 2nx) = \frac{\pi}{8} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) \cos 2nx.$$

(3) (i) 展开成正弦级数. 先将 $f(x)$ 延拓成 $[-\pi, \pi)$ 上的奇函数 $F(x)$.

再将 $F(x)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数, 仍记为 $F(x)$, 由题则 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

因此对 $n \in \mathbb{N}_+$ 有 $a_0 = a_n = 0$. 且

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \sin nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin nx \mathrm{d}x\right] \\
&\xlongequal{t=\pi-x} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \mathrm{d}x + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} t \sin(n\pi - nt) \mathrm{d}(\pi - t) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \mathrm{d}x + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -t \cos n\pi \sin nt \mathrm{d}t = \frac{2[1-(-1)^n]}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{2[1-(-1)^n]}{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mathrm{d} \cos nx\right) = -\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi} \left[x \cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \mathrm{d}x\right] \\
&= -\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi} \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} - 0 - \frac{1}{n} \sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi} \left[\frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} - \left(\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} - 0\right)\right] \\
&= -\frac{1-(-1)^n}{n} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi} \sin \frac{n\pi}{2}.
\end{aligned}$$

根据狄利克雷收敛定理, 对 $x \in [0, \pi]$ 有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2 - 2(-1)^n}{n^2\pi} \sin \frac{n\pi}{2}\right] \sin nx.$$

(ii) 展开成余弦级数. 先将 $f(x)$ 延拓成 $[-\pi, \pi)$ 上的偶函数 $F(x)$.

再将 $F(x)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数, 仍记为 $F(x)$.

因此对 $n \in \mathbb{N}_+$ 有 $b_n = 0$. 且

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \mathrm{d}x\right] \xlongequal{t=\pi-x} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mathrm{d}x + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} t \mathrm{d}(\pi - t) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mathrm{d}x + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\mathrm{d}x\right] \\
&\xlongequal{t=\pi-x} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} t\cos(n\pi - nt)\mathrm{d}(\pi - t) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos n\pi\cos nt\mathrm{d}t = \frac{2[1+(-1)^n]}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{2[1+(-1)^n]}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\sin nx = \frac{2[1+(-1)^n]}{n\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2[1+(-1)^n]}{n\pi}\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2} - 0 + \frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2[1+(-1)^n]}{n\pi}\left[\frac{\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - 1\right)\right] \\
&= \frac{1+(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2+2(-1)^n}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2+2(-1)^n}{n^2\pi}.
\end{aligned}
$$

根据狄利克雷收敛定理, 对 $x\in[0,\pi]$ 有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \\
&= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1+(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2+2(-1)^n}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2+2(-1)^n}{n\pi}\right]\cos nx.
\end{aligned}
$$

(4) (i) 展开成正弦级数. 先将 $f(x)$ 延拓成 $(-\pi,\pi]$ 上的奇函数 $F(x)$, 从而 $F(0)=0$.

因为 $f(0)=-2\neq 0$, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}^-\right)=\frac{\pi}{2}-2\neq 0$, 从而 $F(x)$ 在 $x=0$ 与 $x=\frac{\pi}{2}$ 处不连续.

再将 $F(x)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数, 仍记为 $F(x)$.

又因为 $F(\pi)=f(\pi)=0$, 且此时 $F(\pi^+)=F(-\pi^+)=-F(\pi^-)=0$, 则 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续.

因此对 $n\in\mathbb{N}_+$ 有 $a_0=a_n=0$. 且

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-2)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\mathrm{d}x - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\cos nx\right) + \frac{4}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{n\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x\right] + \frac{4}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} - 0 - \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n\pi} \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left[\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} - \left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} - 0\right)\right] + \frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n\pi} \\
&= -\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n\pi} \\
&= \frac{4-\pi}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

根据狄利克雷收敛定理, 对 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4-\pi}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n\pi} \right) \sin nx.$$

(ii) 展开成余弦级数. 先将 $f(x)$ 延拓成 $(-\pi, \pi]$ 上的偶函数 $F(x)$.

则 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, $x = \frac{\pi}{2}$ 处不连续. 再将 $F(x)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数, 仍记为 $F(x)$.

又因为 $F(\pi) = f(\pi) = 0$, 且此时 $F(\pi^+) = F(-\pi^+) = F(\pi^-) = 0$, 则 $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续.

因此对 $n \in \mathbb{N}_+$ 有 $b_n = 0$. 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-2) \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} - \pi - 0 \right) = \frac{\pi}{4} - 2.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \cos nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-2) \cos nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos nx \mathrm{d}x - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mathrm{d} \sin nx - \frac{4}{n\pi} \sin nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx \mathrm{d}x \right] - \frac{4}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - 0 \right) \\
&= \frac{2}{n\pi} \left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} - 0 + \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) - \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \right] - \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n^2\pi} - \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{\pi-4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n^2\pi}.
\end{aligned}$$

根据狄利克雷收敛定理, 对 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{\pi}{8} - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi-4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n^2\pi} \right) \cos nx.$$

59. 将 $f(x) = 2\pi^2 - x^2$ $(-\pi \le x < \pi)$ 展开成傅里叶级数, 并计算级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的值.

解: 先将 $f(x)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数, 仍记为 $f(x)$.

由题, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则 $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理.

又 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为偶函数, 因此对 $n \in \mathbb{N}_+$ 有

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2\pi^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(2\pi^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(2\pi^3-\frac{1}{3}\pi^3-0\right)=\frac{10\pi^2}{3}.$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2\pi^2-x^2)\cos nx\mathrm{d}x\\&=4\pi\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x\\&=0-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.\end{aligned}$$

根据狄利克雷收敛定理, 有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{5\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$$

此时有 $x\in\mathbb{R}$.

令 $x=\pi$, 则 $f(\pi)=f(-\pi)=2\pi^2-(-\pi)^2=\pi^2$.

又由展开式 $\pi^2=\frac{5\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\pi=\frac{5\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n^2}=\frac{5\pi^2}{3}-4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$,

因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{5\pi^2}{3}-\pi^2\right)=\frac{\pi^2}{6}$.

令 $x=0$, 则 $f(0)=2\pi^2$, 又由展开式 $f(0)=2\pi^2=\frac{5\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos 0=\frac{5\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{1}{4}\left(2\pi^2-\frac{5\pi^2}{3}\right)=\frac{\pi^2}{12}$.

60. 求 $f(x)=\arccos(\cos x)$ 的傅里叶级数展开式.

解: 要先对 $f(x)$ 进行化简. 由题 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$.

由于 $\cos x=\cos(x+2\pi)$, 则 $f(x)=f(x+2\pi)$, 从而 $f(x)$ 以 2π 为周期.

且因为 $\cos x=\cos(-x)$, 则 $f(x)=f(-x)$, $f(x)$ 为偶函数, 则展开成的级数为余弦级数.

又 $x\in[0,\pi]$ 时, 对 $y=\arccos(\cos x)$, 有 $\cos y=\cos x$, 此时 $y=x$, 即 $f(x)=x$, $x\in[0,\pi]$.

因此对 $n \in \mathbb{N}_+$ 有 $b_n = 0$. 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^\pi = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2} = \frac{2(-1)^n-2}{n^2\pi}.$$

根据狄利克雷收敛定理, 有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx.$$

此时有 $x \in \mathbb{R}$.

61. 将函数 $f(x) = (x-1)^2\ (0 < x < 1)$ 展开成傅里叶级数, 并推出

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

解: 先将 $f(x)$ 延拓成 $(-1,1)$ 上的偶函数, 再延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2 的函数, 仍记为 $f(x)$.

因此对 $n \in \mathbb{N}_+$ 有 $b_n = 0$. 且

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x-1)^2\mathrm{d}x = \frac{2(x-1)^3}{3}\Big|_0^1 = 0 - \frac{-2}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x \xlongequal{t=\pi x} 2\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi}-1\right)^2\cos nt\mathrm{d}\frac{t}{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left[\frac{t^2}{\pi^2}\cos nt - \frac{2t}{\pi}\cos nt + \cos nt\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi^3}\int_0^\pi t^2\cos nt\mathrm{d}t - \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi t\cos nt\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos nt\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi^3}\cdot\frac{2\pi(-1)^n}{n^2} - \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2} + 0 \\
&= \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{4(-1)^n-4}{n^2\pi^2} = \frac{4}{n^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

根据狄利克雷收敛定理, 对 $0 < x < 1$ 有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx.$$

又因为延拓后的 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 从而 $x=0$ 时展开式也成立. 又因为 $f(0)=(0-1)^2=1$, 因此

$$f(0)=1=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 0}{n^2}=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},$$

则有

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{4}{\pi^2}}=\frac{\pi^2}{6}.$$

62. 试求三角多项式

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$$

的傅里叶级数展开式, 其中 A_0, A_k, B_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 均为常数.

解: 由题 $T_n(x)$ 周期为 2π, 且在 $\mathbb{R}$ 上连续. 从而对 $N\in\mathbb{N}$ 有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{A_0}{2}\cdot 2\pi=A_0.$$

$$\begin{aligned}a_N&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)\cos Nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right]\cos Nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}A_k\cos kx\cos Nx\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos Nx\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_N&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)\sin Nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right]\sin Nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}B_k\sin kx\sin Nx\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin Nx\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用三角函数系的正交性, $k=N$ 时有 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos Nx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin Nx\mathrm{d}x=\pi$,

$k\neq N$ 时有 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos Nx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin Nx\mathrm{d}x=0$.

因此当 $N>n$ 时, $a_N=b_N=0$; 当 $N\leq n$ 时, $a_N=\frac{A_n}{\pi}\cdot\pi=A_n$, $b_N=\frac{B_n}{\pi}\cdot\pi=B_n$.

根据狄利克雷收敛定理, 对 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{N=1}^{+\infty}(a_N\cos Nx+b_N\sin Nx)=\frac{A_0}{2}+\sum_{N=1}^{n}(A_N\cos Nx+B_N\sin Nx).$$

63. 设 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数, a_0,a_k,b_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 为 f 的傅里叶系数, 记

$T_n(x)=\dfrac{A_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$, 证明: 积分 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x$ 的最小值为

$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-\pi\left[\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]$.

证明: 注意到此时 A_0,A_k,B_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 是未知数.

由题对 $n\in\mathbb{N}$, $a_0\pi=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$, $a_n\pi=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$, $b_n\pi=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$.

又因为

$$
\begin{aligned}
T_n^2(x)=&\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right]^2\\
=&\frac{A_0^2}{4}+A_0\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)+\left[\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right]^2\\
=&\frac{A_0^2}{4}+A_0\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)+\left[\sum_{k=1}^{n}(A_k^2\cos^2 kx+B_k^2\sin^2 kx)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_iB_k\cos ix\sin kx\right].
\end{aligned}
$$

利用三角函数系的正交性, 因此有

$$
\begin{aligned}
I&=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{\pi}2f(x)T_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}[T_n(x)]^2\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-\left[\int_{-\pi}^{\pi}A_0f(x)\mathrm{d}x+2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\mathrm{d}x\right]\\
&\quad+\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{A_0^2}{4}\mathrm{d}x+A_0\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}(A_k^2\cos^2 kx+B_k^2\sin^2 kx)\mathrm{d}x\right.\\
&\quad\left.+2\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_iB_k\cos ix\sin kx\mathrm{d}x\right]\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-\left[A_0a_0\pi+2\pi\sum_{k=1}^{n}(A_ka_k+B_kb_k)\right]+\left[\frac{A_0^2}{4}\cdot 2\pi+A_0\cdot 0+\pi\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2)+2\cdot 0\right]\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}A_0^2-a_0\pi A_0+\pi\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2-2A_ka_k-2B_kb_k)\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}(A_0-a_0)^2-\frac{a_0^2\pi}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}[(A_k-a_k)^2+(B_k-b_k)^2]-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\\
&\geq\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].
\end{aligned}
$$

当且仅当 $A_0=a_0$, $A_k=a_k$, $B_k=b_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 的时候等号成立, 则此时所求积分 I 取最小值,

且最小值即为 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-\pi\left[\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]$.