曲线积分典型例题

曲线积分路径无关

Info

若曲线积分

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

中

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$$

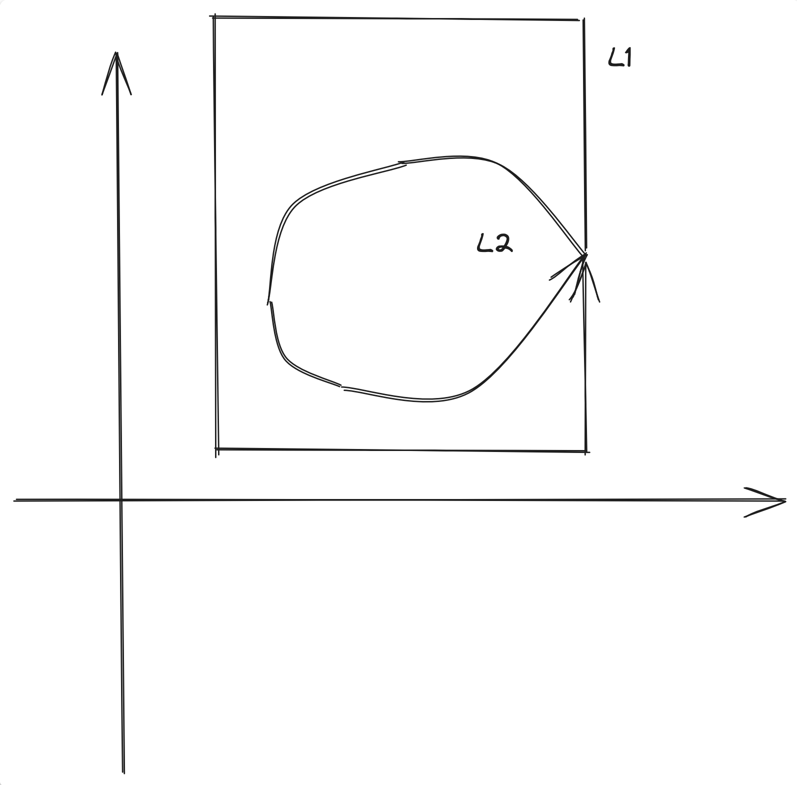
即$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$可以表示称全微分$dF(x,y)$的形式，则称曲面积分是路径无关的且

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_L dF(x,y)=F(x,y)|_{终点}^{起点}$$

Tip

只要满足被积函数是某个二元函数的全微分的曲线积分，其从一个点出发回到自身的积分值不变，并且**通常为0**,如下图

$$\oint_{L1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_{L2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy(通常=0)$$



为什么是通常等于0?

从另一个角度看，由于$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$由格林公式得

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0$$

但是，请注意$\frac{\partial P}{\partial x}$和$\frac{\partial Q}{\partial y}$在区域$D$内有可能并不存在！

$\frac{\partial P}{\partial x}$或者$\frac{\partial Q}{\partial y}$不存在或者未定义的点叫做**奇点**

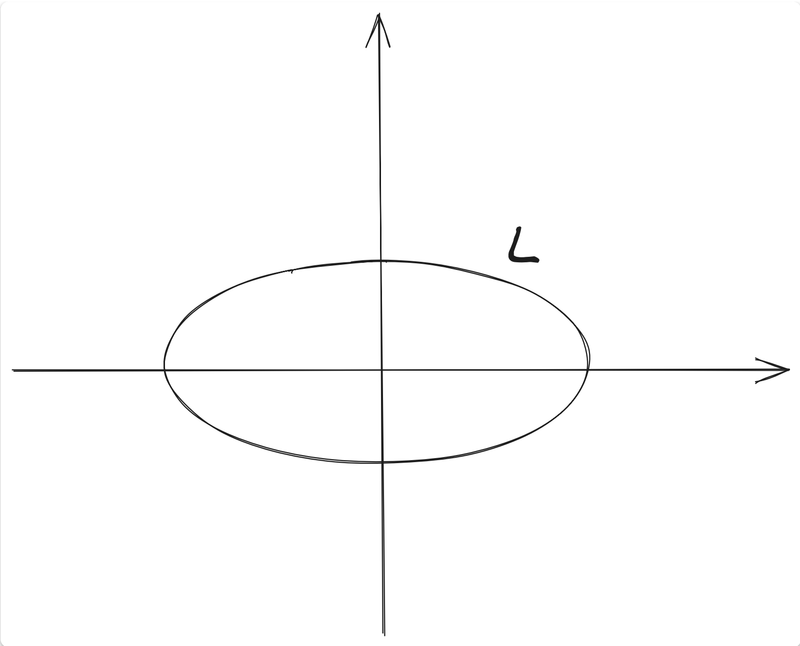
若积分区域内存在奇点，则曲面回到出发点的曲面积分**仍然路径无关**但是值**不一定为零**

典型例子

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{Ax^2+By^2} \quad 方向为逆时针$$

计算可得到，$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$但两者在原点处皆**不存在!**

所以如果此积分路径围成的区域包含原点，则积分值不一定为零



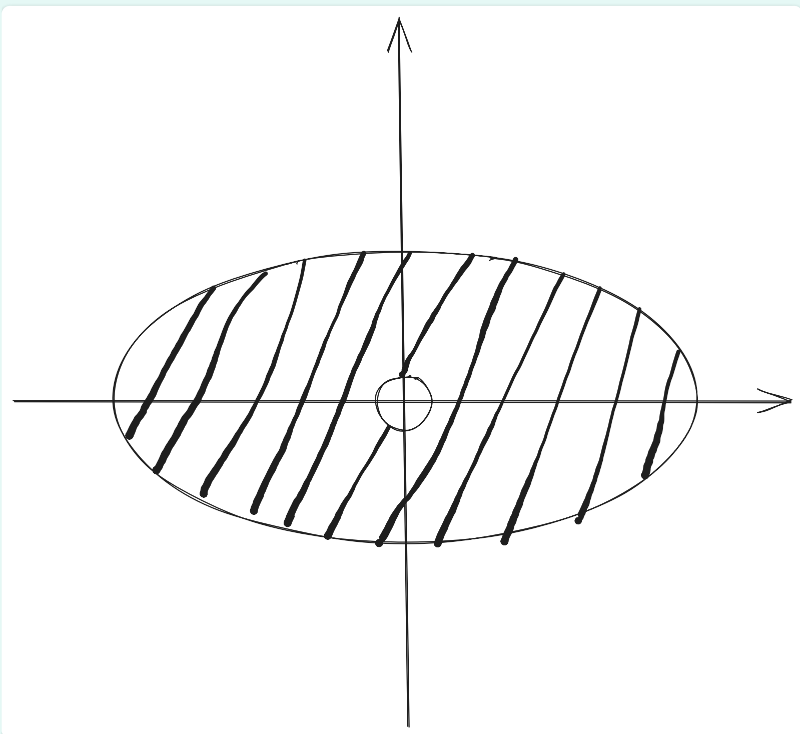
Tip

如何计算?

显然这个积分在原点的任意邻域外都是"**正常**"的，即Q和P的偏导数都有良好定义
我们可以说:这个积分的值只由原点这一个点来决定!
先给出做法:

取路径$L_2: Ax^2+By^2=\varepsilon^2$方向逆时针(可以取得充分小的$\varepsilon$使得路径包含原点又被原路径包含),
然后对阴影部分使用格林公式

$$(\oint_L - \oint_{L_2})P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \iint_{\text{阴影面积}} 0\,dxdy = 0$$



如此一来，只需要计算

$$\oint_{L_2} \frac{xdy - ydx}{Ax^2 + By^2}$$

注意到$Ax^2 + By^2 = \varepsilon^2$,则原式可以化为

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{L_2} xdy - ydx$$

再用一次格林公式

$$原式 = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{Ax^2+By^2 \le \varepsilon^2} 2\,dxdy$$

显然后式是椭圆的面积乘以2,将$Ax^2 + By^2 = \varepsilon^2$化为标准型

$$\frac{x^2}{\frac{\varepsilon^2}{A}} + \frac{y^2}{\frac{\varepsilon^2}{B}} = 1$$

容易计算面积为$\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{AB}}\pi$带入到$\frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{Ax^2+By^2 \le \varepsilon^2} 2\,dxdy$

得到原积分为$\frac{2}{\sqrt{AB}}\pi$

解释

为什么选取$L_2 : Ax^2 + By^2 = \varepsilon^2$?

从过程中可以看出无论什么路径，只要选取的路径L_2包含原点

$$(\oint_L - \oint_{L_2})P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{阴影面积} 0\,dxdy = 0$$

这个式子是一定成立的。即

$$原积分 = \oint_{L_2} \frac{xdy - ydx}{Ax^2 + By^2}$$

但是，你会发现后者跟原式的形式是一模一样的，依旧不好计算

所以我们为了使得后者更加好计算，取得$L_2 : Ax^2 + By^2 = \varepsilon^2$，这样子一来，分母就是一个常数可以被提出来，为了使得路径L_2包含在L中，需要取得ε充分小

而摆脱分母之后，剩下的$\oint_{L_2} xdy - ydx$也就只是个简单的曲线积分了

Tip

对于路径的选取，其实更像一种计算的技巧，不用纠结于这是怎么想出来的，前人做的工作，我们会用就行了