南开大学 2020 级“场论与无穷级数（信）”结课统考试卷 （A 卷）

2021 年 6 月 21 日

一、判定下列级数的敛散性($4\times5=20$分):

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+3}{(1+n^2)}(-1)^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$

二、求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2-n+2)x^n$的收的收敛域、和函数。(本题 10 分)．

三、将函数$f(x)=\dfrac{1}{(x^2+x-2)}$展开为$x$的幂级数，并说明其收敛域。(本题 10 分)

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解（每小题 5 分）:

．(1) $\dfrac{dy}{dx}=e^{-y}(1+x+x^2)$；(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{1+x^2}$； (3) $y''+y=2+x$；

(4) $y''+2y'+y=-2\sin x$; (5) $x^2\dfrac{dy}{dx}=xy-y^2, y(1)=1,(x\neq0)$.

五、计算下列广义积分:（每小题 5 分）:

(1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{(x+1)^2}dx$；(2) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x-1}(x+3)}$

六、(本题 9 分）将函数$f(x)=2|x|-1,(-\pi\le x\le\pi)$展开为（周期为$2\pi$）的傅里叶级数。

七、(本题 8 分）设$\alpha>0$，讨论广义积分$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$的敛散性。

八、(8 分）设$\alpha>0$，计算积分$I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\arctan(\alpha\sin x)}{\sin x}dx$。

1) 令$f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+1}$

则$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{2x(x+3)}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{1-x^2-6x}{(1+x^2)^2}<0\ (x\ge1)$

$\therefore \dfrac{n+3}{n^2+1}=f(n)$单减趋于0

$\therefore$ 级数收敛

记$x_n=(-1)^n\dfrac{n+3}{n^2+1}$

$y_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$

则$|x_n-y_n|=\left|\dfrac{n+3}{n^2+1}-\dfrac{1}{n}\right|$

$=\dfrac{3n-1}{n(n^2+1)}\sim\dfrac{3}{n^2}$

$\because \sum\limits_{n\ge1}y_n, \sum\limits_{n\ge1}(x_n-y_n)$收敛.

$\therefore \sum\limits_{n\ge1}x_n$收敛

2, 记$x_n=4^n\cdot\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

则$\sqrt[n]{x_n}=4/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to4/e>1$

$\therefore$ 级数发散.

3, 记$y_n=2^n\cdot n!/n^n$

$y_{n+1}/y_n=2\cdot\dfrac{n+1}{(n+1)^{n+1}}\cdot n^n=2/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to2/e<1$

$\therefore$ 级数收敛

4,

记$z_n=n\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

则$z_n\sim n\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$

$=\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{n}$.

而$\sum\limits_{n\ge1}\frac{1}{n}$发散

$\therefore \sum\limits_{n\ge1}z_n$发散

南开大学 2020 级“场论与无穷级数（信）”结课统考试卷　（A 卷）

2021 年 6 月 21 日

一、判定下列级数的敛散性($4\times5=20$ 分):

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{(1+n^2)}(-1)^n$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}4^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$；(4) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

二、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n+2)x^n$ 的收的收敛域、和函数。（本题 10 分）.

RHS $= n^2+3n+2$
$-4n-4$

Σn^2x^n

三、将函数 $f(x)=\frac{1}{(x^2+x-2)}$ 展开为 x 的幂级数，并说明其收敛域。（本题 10 分）

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解（每小题 5 分）:

.（1） $\frac{dy}{dx}=e^{-y}(1+x+x^2)$；（2） $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{1+x^2}$；　(3) $y''+y=2+x$；

（4） $y''+2y'+y=-2\sin x$;　(5) $x^2\frac{dy}{dx}=xy-y^2, y(1)=1,(x\neq0)$.

五、计算下列广义积分:（每小题 5 分）:

（1） $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$；（2） $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-1}(x+3)}$

六、（本题 9 分）将函数 $f(x)=2|x|-1,(-\pi\le x\le\pi)$ 展开为（周期为 2π）的傅里叶级数。

七、（本题 8 分）设 $\alpha>0$，讨论广义积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 的敛散性。

八、（8 分）设 $\alpha>0$，计算积分 $I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(\alpha\sin x)}{\sin x}dx$。

解. $\sqrt[n]{n^2-n+2}\to1\Rightarrow R=1$

$x=\pm1$ 时 $|(n^2-n+2)x^n|=n^2-n+2\not\to0$

$\therefore$ 收敛域为 $(-1,1)$

由 $\sum_{n\ge0}x^n=1/(1-x)$　(1)

$\Rightarrow\sum_{n\ge1}nx^{n-1}=1/(1-x)^2=\sum_{m\ge0}(m+1)x^m$　(2)

$\Rightarrow\sum_{n\ge2}n(n-1)x^{n-2}=2/(1-x)^3=\sum_{m\ge0}(m+2)(m+1)x^m$　(3)

又 $n^2-n+2=1\cdot(n+2)(n+1)$
$+(-4)(n+1)-4$

$\therefore$ 原式 $=2/(1-x)^3-4/(1-x)^2+4/(1-x)-2$

$x\in(-1,1)$

$\frac{2+x}{(1-x)^3}-\frac{4}{(1-x)^2}-\frac{x}{(1-x)^3}+\frac{4}{1-x}-2$

$\sum_{n\ge1}(n^2-n+2)x^n$

$=\sum_{n\ge1}n^2x^n-\sum_{n\ge1}nx^n$
$+2\sum_{n\ge1}x^n$

$=\sum_{n\ge1}(n+2)(n+1)x^n$
$-4\sum_{n\ge1}(n+1)x^n$
$+4\sum_{n\ge1}x^n$

Printout

2022年5月25日　7:41

南开大学 2020 级“场论与无穷级数（信）”结课统考试卷　（A 卷）

2021 年 6 月 21 日

一、判定下列级数的敛散性($4\times5=20$ 分):

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+3}{(1+n^2)}(-1)^n$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$；(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$

二、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2-n+2)x^n$ 的收的收敛域、和函数。（本题 10 分）.

三、将函数 $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+x-2)}$ 展开为 x 的幂级数，并说明其收敛域。（本题 10 分）

解， $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)(x-1)}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$=\dfrac{-1}{3}\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}}$

$=\dfrac{-1}{3}\sum\limits_{n\geq0}x^n-\dfrac{1}{6}\sum\limits_{n\geq0}\left(-\dfrac{x}{2}\right)^n$

$=\sum\limits_{n\geq0}x^n\left(\dfrac{-1}{3}-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\right)$

由 $|x|<1$ ⇒ 收敛域为 $(-1,1)$

$|x|<1$

$\left|\dfrac{x}{2}\right|<1$

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解（每小题 5 分）:

(1) $\dfrac{dy}{dx}=e^{-y}(1+x+x^2)$；(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{1+x^2}$；(3) $y''+y=2+x$；

(4) $y''+2y'+y=-2\sin x$; (5) $x^2\dfrac{dy}{dx}=xy-y^2, y(1)=1,(x\neq0)$.

五、计算下列广义积分:（每小题 5 分）:

(1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{(x+1)^2}dx$；(2) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x-1}(x+3)}$

六、(本题 9 分) 将函数 $f(x)=2|x|-1,(-\pi\leq x\leq\pi)$ 展开为（周期为 2π ）的傅里叶级数。

七、(本题 8 分) 设 $\alpha>0$，讨论广义积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 的敛散性。

八、(8 分) 设 $\alpha>0$，计算积分 $I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\arctan(\alpha\sin x)}{\sin x}dx$。

南开大学 2020 级“场论与无穷级数（信）”结课统考试卷 （A 卷）

2021 年 6 月 21 日

一、判定下列级数的敛散性($4\times 5=20$ 分):

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{(1+n^2)}(-1)^n$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}4^n(\frac{n}{n+1})^{n^2}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$；(4) $\sum_{n=1}^{\infty}n(1-\cos\frac{\pi}{n})$

二、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n+2)x^n$ 的收的收敛域、和函数。(本题 10 分).

三、将函数 $f(x)=\frac{1}{(x^2+x-2)}$ 展开为 x 的幂级数，并说明其收敛域。(本题 10 分)

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解（每小题 5 分）:

.（1）$\frac{\mathrm{dy}}{dx}=e^{-y}(1+x+x^2)$；（2）$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{1+x^2}$； (3) $y''+y=2+x$；

（4）$y''+2y'+y=-2\sin x$; (5) $x^2\frac{dy}{dx}=xy-y^2, y(1)=1,(x\neq 0)$.

五、计算下列广义积分:（每小题 5 分）:

（1） $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$；（2） $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-1}(x+3)}$

六、(本题 9 分) 将函数 $f(x)=2|x|-1,(-\pi\le x\le\pi)$ 展开为（周期为2π）的傅里叶级数。

七、(本题 8 分) 设 $\alpha>0$，讨论广义积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 的敛散性。

八、(8 分) 设 $\alpha>0$，计算积分 $I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(\alpha\sin x)}{\sin x}dx$ 。

1) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$

$= \frac{-1}{(1+x)}\ln x\Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{1}{1+x}\frac{1}{x}dx$

$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx - \int_1^\infty \frac{1}{1+x}dx$ ✗

$= \int_1^\infty (\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x})dx$

$= [\ln x - \ln(1+x)]\Big|_1^\infty$

$= \ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^\infty = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$

2) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-1}(x+3)}$

令 $t=\sqrt{x-1}$ 则 $x=t^2+1$

$\therefore dx = 2t\,dt$

原式 $= \int_0^\infty \frac{2t\,dt}{t\cdot(t^2+4)}$

$= \arctan\frac{t}{2}\Big|_0^\infty$

$= \pi/2.$

$\frac{1}{1+t^2/4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2$

南开大学 2020 级“场论与无穷级数（信）”结课统考试卷 （A 卷）

2021 年 6 月 21 日

一、判定下列级数的敛散性($4\times5=20$ 分):

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+3}{(1+n^2)}(-1)^n$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$；(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$

二、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2-n+2)x^n$ 的收的收敛域、和函数。（本题 10 分）.

三、将函数 $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+x-2)}$ 展开为 x 的幂级数，并说明其收敛域。（本题 10 分）

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解（每小题 5 分）:

.（1）$\dfrac{dy}{dx}=e^{-y}(1+x+x^2)$；（2）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{1+x^2}$； (3) $y''+y=2+x$；

（4）$y''+2y'+y=-2\sin x$; (5) $x^2\dfrac{dy}{dx}=xy-y^2, y(1)=1, (x\neq 0)$.

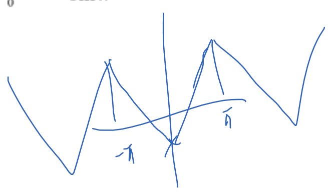
五、计算下列广义积分:（每小题 5 分）:

（1） $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{(x+1)^2}dx$；（2） $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x-1}(x+3)}$

六、（本题 9 分）将函数 $f(x)=2|x|-1, (-\pi\le x\le\pi)$ 展开为（周期为 2π ）的傅里叶级数。

七、（本题 8 分）设 $\alpha>0$，讨论广义积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 的敛散性。

八、（8 分）设 $\alpha>0$，计算积分 $I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\arctan(\alpha\sin x)}{\sin x}dx$ 。



解 依题意 $b_n=0$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x-1)dx$

$=\frac{2}{\pi}(x^2-x)\Big|_0^{\pi}=2(\pi-1)$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x-1)\cos nx\,dx$

$=\frac{2}{\pi}(2x-1)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\cdot 2dx$

$=\frac{-4}{n\pi}\cdot\frac{\cos nx}{-n}\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)$

$=\begin{cases}0 & n=2m\\ -\frac{8}{\pi(2m+1)^2} & n=2m+1\end{cases}$

$\therefore f(x)\sim S(x)=(\pi-1)-\frac{8}{\pi}\sum\limits_{m\geq 0}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

$=2|x|-1 \quad x\in[-\pi,\pi]$

南开大学 2020 级“场论与无穷级数（信）”结课统考试卷 （A 卷）

2021 年 6 月 21 日

一、判定下列级数的敛散性($4\times5=20$分):

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{(1+n^2)}(-1)^n$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$；(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

二、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2-n+2)x^n$ 的收的收敛域、和函数。（本题 10 分）.

三、将函数 $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+x-2)}$ 展开为 x 的幂级数，并说明其收敛域。（本题 10 分）

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解（每小题 5 分）:

. （1） $\frac{dy}{dx}=e^{-y}(1+x+x^2)$；（2） $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{1+x^2}$； (3) $y''+y=2+x$；

（4） $y''+2y'+y=-2\sin x$; （5） $x^2\frac{dy}{dx}=xy-y^2, y(1)=1,(x\neq0)$.

五、计算下列广义积分:（每小题 5 分）:

（1） $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$；（2） $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-1}(x+3)}$

六、(本题 9 分）将函数 $f(x)=2|x|-1,(-\pi\le x\le\pi)$ 展开为（周期为 2π ）的傅里叶级数。

七、(本题 8 分）设 $\alpha>0$，讨论广义积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 的敛散性。

八、(8 分）设 $\alpha>0$，计算积分 $I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(\alpha\sin x)}{\sin x}dx$ 。

瑕? +∞区间

$\ln x << x^a << b^x$

$f(x)/g \to 0$ 且 g收 ⇒ f收

$f(x)/g \to \infty$ 且 g发 ⇒ f发

记 $f(x)=\ln(1+x^2)/x^\alpha$.

$\frac{1+\alpha}{2}$

$x\to0+$时 $f(x)\sim x^{2-\alpha}$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx$ 收敛 当且仅当 $2-\alpha>-1$ 即 $\alpha<3$

$\frac{2+\alpha}{3}$ $\frac{1+2\alpha}{3}$

$x\to+\infty$时

$\alpha>1$时 取 $p=\frac{1+\alpha}{2}\in(1,\alpha)$

则 $f(x)/x^{-p}=\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha-p}}\to0$.

$\therefore \int_1^\infty f(x)dx$ 收敛

$\alpha\le1$时 $f(x)/x^{-1}=x^{1-\alpha}\ln(1+x^2)\to\infty$

$\therefore \int_1^\infty f(x)dx$ 发散

$\therefore$ 综上 $\int_0^\infty f(x)dx$ 收敛 当且仅当 $\alpha\in(1,3)$

$+\infty$

$\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}$

$\approx\frac{1}{x^\alpha}$ $\boxed{\alpha>1}$ √

$\alpha\le1$ ×

① x^{-p} $p>1$

② $f(x)/x^{-p}\to0$ $p<\alpha$

南开大学 2020 级“场论与无穷级数（信）”结课统考试卷 （A 卷）

2021 年 6 月 21 日

一、判定下列级数的敛散性($4\times 5=20$ 分):

（1） $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{(1+n^2)}(-1)^n$； （2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^n(\frac{n}{n+1})^{n^2}$；

（3） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$；（4） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(1-\cos\frac{\pi}{n})$

二、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2-n+2)x^n$ 的收的收敛域、和函数。（本题 10 分）.

三、将函数 $f(x)=\frac{1}{(x^2+x-2)}$ 展开为 x 的幂级数，并说明其收敛域。（本题 10 分）

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解（每小题 5 分）：

. （1） $\frac{dy}{dx}=e^{-y}(1+x+x^2)$；（2） $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{1+x^2}$； (3) $y''+y=2+x$；

（4） $y''+2y'+y=-2\sin x$; （5） $x^2\frac{dy}{dx}=xy-y^2, y(1)=1,(x\neq 0)$.

五、计算下列广义积分:（每小题 5 分）:

（1） $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$；（2） $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-1}(x+3)}$

六、（本题 9 分）将函数 $f(x)=2|x|-1,(-\pi\le x\le\pi)$ 展开为（周期为 2π ）的傅里叶级数。

七、（本题 8 分）设 $\alpha>0$，讨论广义积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha}}dx$ 的敛散性。

八、（8 分）设 $\alpha>0$，计算积分 $I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(\alpha\sin x)}{\sin x}dx$。

解 $I'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\alpha^2\sin^2 x}\frac{dx}{\sin x}$

令 $t=\operatorname{tg} x$ 则 $dt=dx/\cos^2 x$

$\therefore I'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+(1+\alpha^2)\sin^2 x}$

$=\int_0^{\infty}dt\,\frac{1}{1+(1+\alpha^2)t^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{1+\alpha^2}\,t)\Big|_0^{\infty}$

$=\frac{\pi}{2}\Big/\sqrt{1+\alpha^2}$

$\frac{1}{1+(1+\alpha^2)t^2}$

又 $I(0)=0$

$\Rightarrow I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\int_0^{\alpha}dt\Big/\sqrt{1+t^2}$

$=\frac{\pi}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_0^{\alpha}$

$=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$