△ 两直线 L_1. L_2 共面与否

① 共面 $\Rightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$

② 异面 $\Rightarrow$ 在两线上分别取点 A.B，混合积 $[\vec{AB}, \vec{s_1}, \vec{s_2}] \neq 0$

必存在公垂线 $\vec{s} = \vec{s_1} \times \vec{s_2}$

例 11.7 求过点 $M(2,1,3)$，且与直线 L：$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程。

解 过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 L 垂直的平面方程为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0, \quad 即 \quad 3x+2y-z-5=0。$$

而 L 的参数方程是：$x=-1+3t, y=1+2t, z=-t$，代入上述平面方程，得到参数 $t=\frac{3}{7}$，所以直线与平面的交点坐标为 $N\left(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7}\right)$。因此过点 M 和 N 的直线方程是

$$\frac{x-2}{-\frac{12}{7}}=\frac{y-1}{\frac{6}{7}}=\frac{z-3}{-\frac{24}{7}}, \quad 即 \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}。$$

例 11.8 求直线 $\begin{cases}x+y-z-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程。

解 设过直线 $\begin{cases}x+y-z-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0,$$

即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+\lambda-1=0。$$

由于该平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直，则

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0,$$

解得 $\lambda=-1$，代入平面束方程中得 $y-z-1=0$，所以投影直线方程为

$$\begin{cases}y-z-1=0,\\x+y+z=0。\end{cases}$$

例 11.9 求点 $M(1,2,3)$ 关于直线 $\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+z=3\end{cases}$ 的对称点坐标。

解 直线的方向向量为

$$\boldsymbol{t}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & -1 & 1\\2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}。$$

于是过 $M(1,2,3)$ 且垂直于该直线的平面方程为

$$-(x-1)+(y-2)+2(z-3)=0,$$

即 $x-y-2z+7=0$。因此平面与直线的交点 M_1 的坐标为线性方程组

$$\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+z=3,\\x-y-2z+7=0\end{cases}$$

的解，解得 $M_1\left(\frac{1}{6},\frac{11}{6},\frac{8}{3}\right)$。设点 M 关于直线的对称点坐标为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则

$$x_0=\frac{x+\lambda x_1}{1+\lambda}=\frac{1+(-2)\cdot\frac{1}{6}}{-1}=-\frac{2}{3}; \quad y_0=\frac{y+\lambda y_1}{1+\lambda}=\frac{1+(-2)\cdot\frac{11}{6}}{-1}=\frac{5}{3};$$

$$z_0=\frac{z+\lambda z_1}{1+\lambda}=\frac{1+(-2)\cdot\frac{8}{3}}{-1}=\frac{7}{3}。$$

所以点 $M(1,2,3)$ 关于直线 $\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+z=3\end{cases}$ 的对称点坐标为 $\left(-\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$。

例3 求满足下列条件的平面方程：

(1)过点$(3,1,-3)$且与直线$x-2y+4z-7=0,3x+5y-2z+1=0$垂直；

(2)过点$(3,1,-2)$且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$.

解 (1)直线的方向向量即平面的法向量，故

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(1,-2,4)\times(3,5,-2)=(-16,14,11),$$

故所求平面的方程为

$$-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0,$$

即

$$16x-14y-11z-65=0.$$

(2)平面也过点$A(3,1,-2)$且平行于$\boldsymbol{s}=(5,2,1)$. 平面还过点$B(4,-3,0)$，所以向量$\overrightarrow{AB}=(1,-4,2)$也平行于平面. 于是，平行法向量

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{s}=(1,-4,2)\times(5,2,1)=(-8,9,22),$$

故所求平面方程为

$$-8(x-3)+9(y-1)+22(z+2)=0,$$

即

$$8x-9y-22z-59=0.$$

例9 求点$(-1,2,0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影.

解 因为$\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$，所以过点$(-1,2,0)$且垂直于平面的直线方程为$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$，其参数方程为：$x=-1+t,y=2+2t,z=-t$. 代入平面方程得

$$(-1+t)+2(2+2t)-(-t)+1=0,$$

即

$$t=-2/3.$$

故垂足坐标$(-5/3,2/3,2/3)$即为所求的投影.

例13 设一平面垂直于平面$z=0$，并通过从点$(1,-1,1)$到直线$y-z+1=0,x=0$的垂线，求此平面的方程.

解 因为$\boldsymbol{s}=(0,1,-1)\times(1,0,0)=(0,-1,-1)$，所以直线的对称式方程为

$$\frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-1}{1},$$

参数方程为$x=0,y=t,z=1+t$. 又点$A(1,-1,1)$到直线的垂线的垂足为$B(0,t_0,1+t_0)$，而$\overrightarrow{AB}\perp L$，所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{s}=(-1)\times0+(t_0+1)\times1+(1+t_0-1)\times1=0,$$

即

$$t_0=-1/2.$$

于是，垂足B的坐标为$(0,-1/2,1/2)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,1/2,-1/2)$. 由于所求平面$\pi$垂直于$z=0(\boldsymbol{n}_z=(0,0,1))$，又$\pi$过$\overrightarrow{AB}$，所以，平面$\pi$的法向量

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{n}_z=(-1,1/2,-1/2)\times(0,0,1)=(1/2,1,0),$$

平面π的方程为

$$1/2\times(x-1)+1\times(y+1)+0\times(z-1)=0,$$

即

$$x+2y+1=0.$$

例14 求过点$A(-1,0,4)$、且平行于平面$3x-4y+z-10=0$、又与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线方程.

解 因已知直线的参数方程为$x=-1+t,y=3+t,z=2t$，故所求直线与已知直线的交点为$B(-1+t_0,3+t_0,2t_0)$，向量$\overrightarrow{AB}=(t_0,3+t_0,2t_0-4)$. 又所求直线平行于平面，则$\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0$，故

$$3t_0+(-4)\times(3+t_0)+1\times(2t_0-4)=0,$$

即

$$t_0=16,$$

$\overrightarrow{AB}=(16,19,28)$为所求直线的方向向量. 于是，所求直线方程为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$

例 11.13 曲线 L 是抛物柱面 $x=2y^2$ 与平面 $x+z=1$ 的交线,求:

(1) 曲线 L 在各个坐标面上的投影;

(2) 曲线 L 分别绕各个坐标轴旋转一周的旋转曲面方程。

解 (1) 曲线 L 在 xOy 面的投影为 $\begin{cases}x=2y^2,\\z=0。\end{cases}$曲线 L 在 xOz 面的投影为 $\begin{cases}x+z=1,\\y=0。\end{cases}$曲线 L 在 yOz 面的投影为 $\begin{cases}2y^2+z=1,\\x=0。\end{cases}$

(2) 曲线 L 以 x 的参数的参数方程是 $\begin{cases}x=x,\\y=\sqrt{\dfrac{x}{2}},x\geqslant 0,\\z=1-x,\end{cases}$则曲线 L 绕 x 轴旋转的旋转曲面方程为 $y^2+z^2=\dfrac{1}{2}x+(1-x)^2$。

曲线 L 以 y 的参数的参数方程是 $\begin{cases}x=2y^2,\\y=y, & -\infty<y<+\infty,\\z=1-2y^2,\end{cases}$则曲线 L 绕 y 轴旋转的旋转曲面方程为 $x^2+z^2=4y^4+(1-2y^2)^2$。

曲线 L 以 z 的参数的参数方程是 $\begin{cases}x=1-z,\\y=\sqrt{\dfrac{1}{2}(1-z)},1\leqslant z,\\z=z,\end{cases}$则曲线 L 绕 z 轴旋转的旋转曲面方程为 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}(1-z)+(1-z)^2$。

例 11.14 设 P 为椭球面 S: $x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点,若 S 上的点 P 处的切平面与 xOy 面垂直,求点 P 的轨迹方程。

解 椭球面 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1=0$ 上的动点 $P(x,y,z)$ 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)=(2x,2y-z,2z-y)。$$

由于 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直,xOy 面的法向量 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$,于是

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}=(2x,2y-z,2z-y)\cdot(0,0,1)=2z-y=0。$$

由于 P 点在椭球面上,故所求的 P 点应满足

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz-1=0,\\2z-y=0,\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1,\\2z-y=0。\end{cases}\quad(\text{它是圆柱面与平面的交线})$$