

南开大学 2020 级“场论与无穷级数（信）”结课统考试卷（A 卷）

2021 年 6 月 21 日

一、判定下列级数的敛散性( $4 \times 5 = 20$  分):

(1)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{(1+n^2)}(-1)^n$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ;

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ ; (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} n(1 - \cos \frac{\pi}{n})$

二、求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n + 2)x^n$  的收敛域、和函数。(本题 10 分)。

三、将函数  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x - 2)}$  展开为  $x$  的幂级数, 并说明其收敛域。(本题 10 分)

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解 (每小题 5 分):

(1)  $\frac{dy}{dx} = e^{-y}(1+x+x^2)$ ; (2)  $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{1+x^2}$ ; (3)  $y'' + y = 2 + x$ ;

(4)  $y'' + 2y' + y = -2\sin x$ ; (5)  $x^2 \frac{dy}{dx} = xy - y^2, y(1) = 1, (x \neq 0)$ 。

五、计算下列广义积分: (每小题 5 分):

(1)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$ ; (2)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}(x+3)}$

六、(本题 9 分) 将函数  $f(x) = 2|x| - 1, (-\pi \leq x \leq \pi)$  展开为 (周期为  $2\pi$ ) 的傅里叶级数。

七、(本题 8 分) 设  $\alpha > 0$ , 讨论广义积分  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx$  的敛散性。

八、(8 分) 设  $\alpha > 0$ , 计算积分  $I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\alpha \sin x)}{\sin x} dx$ 。