2016 级多元函数微积分 参考答案

一、求曲面$x^3+y^3+z^3=3$上点$(1,1,1)$处的切平面与法线方程。

解：记曲面方程为

$$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3=0$$

有

$$\begin{cases}F_x=3x^2=3\\F_y=3y^2=3\\F_z=3z^2=3\end{cases}$$

故

$$\vec{n}=(1,1,1)$$

故切平面方程为

$$(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$$

或

$$x+y+z=3$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=-\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}.$$

二、求函数$f(x,y)=x^2+2y^2-x$在条件$x^2+y^2\le 1$下的最大、最小值。

解：先证明，最大值一定在边界上取到。用反证法，假设在圆域内部一点取到最大值，则过该点作平行于y轴直线，与圆的上侧交点处函数值必大于该点处函数值，矛盾！故最大值一定在边界处取到。

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x+\lambda(x^2+y^2-1)$$

令

$$\begin{cases}L_x=2x-1+2\lambda x=0\\L_y=4y+2\lambda y=0\\L_\lambda=x^2+y^2-1=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

故最大值为$\frac{9}{4}$.

再证明，最小值一定于直线$y=0$上取到。用反证法，假如在$y=k(k\neq 0)$上取得一最小值点，那么过该点作平行于y轴直线，于$y=0$的交点处的函数值一定比这一点小，矛盾！故最小值一定于直线$y=0$上取得。即求

$$g(x)=x^2-x, x\in[-1.1]$$

的最小值，容易知道最小值在$x=\frac{1}{2}$处取，为$-\frac{1}{4}$.

（注：也可以直接用$y^2=1-x^2$代换，变为求一元函数最值问题）

三、计算下列二重积分：

(1) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, 其中$D: x^2+y^2\leq R^2(R>0)$；

解：作极坐标换元，故原式可写为

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr=\frac{\pi R^4}{2}.$$

(2) $\iint_D (x^2+y)\,dxdy, D: x+y\leq 1, x\geq 0, y\geq 0.$

解：直接化为累次积分

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y)dy=\frac{1}{4}.$$

四、计算下列三重积分：

(1) $\iiint_V (x+y+z)^2dxdydz$, 其中$V: x^2+y^2+z^2\leq 1$；

解：先展开，由奇偶性知

$$I=\iiint_V (x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)dxdydz=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz.$$

此时，作球坐标换元

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^4dr=2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{5}=\frac{4\pi}{5}.$$

(2) $\iiint_V zdxdydz, V$是球面$x^2+y^2+z^2=3$与抛物面$x^2+y^2=2z$围成的区域。

解：先解出其交线在xy平面上的投影

$$D: x^2+y^2\leq 2$$

作柱坐标换元，得

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}}zdz=2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{2}}r\left(\frac{3-r^2}{2}-\frac{r^4}{8}\right)dr=\frac{5\pi}{3}.$$

五、计算下列曲线积分

(1) 计算曲线积分$I=\int_L x^2ydx$，其中L为抛物线$y=1-x^2$上，从点$A(-1,0)$到$B(1,0)$的有向弧；

解：直接化为定积分

$$I=\int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)dx=\frac{4}{15}.$$

(2) 求$I=\iint_S f(x,y,z)dS$, 其中S为球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$,

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2-y^2}, z\geq\sqrt{x^2+y^2}\\ 0, z<\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$

解：首先化简积分形式

$$I=\iint_{S'}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dS$$

其中S'为球面被锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所截的部分，化为二重积分

$$I=\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=aS_D=\frac{\pi a^3}{2}.$$

六、求曲线积分

$$\oint_L\frac{xdy-(y-1)dx}{6x^2+(y-1)^2}$$

其中L是以$(0,0)$为中心，$R(R>0,R\neq1)$为半径的圆周，取逆时针方向。

解：容易发现

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(y-1)^2-6x^2}{[6x^2+(y-1)^2]^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

故分类讨论，当$R<1$时，此时满足格林公式的条件，故

$$I=0$$

当$R>1$时，此时L所围区域内包含不可导点$(0,1)$，故以该点为中心，作椭圆

$$C: 6x^2+(y-1)^2=\epsilon^2$$

使椭圆完全包含于圆域内部，对两曲线所夹部分用格林公式，得

$$I=\oint_{L+C}-\oint_{C^-}=\oint_C\frac{1}{\epsilon^2}[xdy-(y-1)dx]$$

故此时在椭圆域上用格林公式

$$I=\frac{1}{\epsilon^2}\iint_D 2d\sigma=\frac{2\pi}{\epsilon^2}\cdot\frac{\epsilon^2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\pi.$$

七、设Σ是柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0,z=3$所围成的闭区域的边界曲面外侧，求

$$I=\oiint_\Sigma(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

解：容易发现

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=y-z$$

且没有偏导数不连续点。在所求区域内，应用高斯公式，有

$$I=\iiint_V (y-z)dxdydz$$

化为累次积分，得到

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^3 (r\sin\theta - z)dz = -\frac{9\pi}{2}.$$

八、求球面$x^2+y^2+z^2=R^2$被平面$2x+2y+z=R(R>0)$所截两部分的面积。

解：先求出原点到该平面的距离

$$d=\frac{R}{3}$$

故所求面积等价于，平面$z=\frac{R}{3}$截该球面的面积，即

$$S=\iint_S dS$$

其中，S在xy面上的投影为

$$D: x^2+y^2\le\frac{8R^2}{9}$$

而

$$\begin{cases} z_x=-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \\ z_y=-\dfrac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{cases}$$

故

$$S=\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

化为累次积分

$$S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{2\sqrt{2}R}{3}}\frac{R\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho=\frac{4}{3}\pi R^2$$

而另一部分的面积为

$$S'=S_\Sigma - S = 4\pi R^2-\frac{4}{3}\pi R^2=\frac{8}{3}\pi R^2.$$