《微积分甲(II)》

2021-2022 学年第二学期期末考试 A 卷

1 求函数 f(r)-1 1 areter w 的事。	克劳林级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$,并求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.
T. A. M. M. J. (1)—1 — arctalix 的友为	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x}{a_n x}$,并未被称为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x}{a_n x}$,就就能成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x}{a_n x}$,就就能成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x}{a_n x}$,就能能成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac$
	019-2020 学年算二学與明末当武人卷
25	019-2028年年第二学期期末普段4種含含蓄率。
82	是多人为古木旗牌学二位工艺 6107-818
34	018-2019 学年第二学期切尔考试《普查考答案、。
38	的79-2018 学年第二学期期末专员 A 聲
45	2019-2018 学年第二学則朝末考試入營金馬李家
2 设有一个层薄片。 甘取和北本	
$_{_{_{_{_{_{_{_{_{_{_{_{_{_{_{_{_{_{_{$	$=xy$ 与圆柱体 $x^2+y^2=1$ 相交的部分,其面密度为 e ,求薄片的
灰里 <i>m</i> .	2015-2016 学年第二学柯朝末等代试管
67	2015-2016 学年第二学期期末考试试验多生络差
ZT	2014-2015 李辛第二学期期末专员员各
75	2014-2015 學年第二學期與求考试從卷至考查案。特徵式 除資
08	2013-2014 学年第二学期期末考试试器
18	2013-2014 学年第二学期期末考试社会参考音楽。人間漏土用
TB-	All And And Adventor 1984 Chair and Adventor Land
3.设空间曲线 Γ : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}\}$	$\mathbb{R}^{3} x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, t\in [\sqrt{2}, \sqrt{\pi^{2}-2}]\}, \hat{x}$
类曲线积分 $I_1 = \int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	2010-2011 学年第二学期期末专民政治制品。 总统 经 2010-2011
Te. Jr	2010-2011 学年第二学期期末考试社会参考符第一。
101	2019-2010 学年第二学规模求考试试卷
	2009-2010 学年第二学期期末考试试卷套汽铃案

4.已知曲线C: $(x-1)^2 + y^2 = 4$,且 C 取逆时针方向,求第二类曲线积分 $I_2 = \oint_C \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$.

5.设 S 为球面片 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$, 取外(上)侧为正侧, 计 算第二类曲面积分 $J = \iint z^3 dx dy$.

6.求 $f(x) = \arcsin(\cos x)$ 的以 2π 为周期的 Fourier 级数 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,并求 +2gi(u, v)+0, 耐酸:= z(x, v). (x, y) = O 由方程g(x

7.已知单位闭球体 $B: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 求函数u = x + y + z在 B上的最大值 与最小值.

8.设函数
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
, 已知 $I = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \alpha \in [0, 2\pi).$

- (1)求f(x, y)在(0, 0)处沿方向I的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial I}\Big|_{(0, 0)}$.
- (2)证明f(x, y)在(0, 0)处不可微.

9.已知函数g(u, v)存在连续的一阶偏导数 $\frac{\partial g(u, v)}{\partial u}$, $\frac{\partial g(u, v)}{\partial v}$, 且 $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g_1'(u, v)$ $+2g_2'(u, v) \neq 0$, 函数z = z(x, y), $(x, y) \in \mathcal{O}$ 由方程g(x-z, y-2z) = 0确定.

- (1)证明: $\forall (x, y) \in \mathcal{O}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + 2 \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 1.$
- (2)证明: 曲面g(x-z, y-2z)=0上的每一点处的切平面的法向量都垂直于向量l=i+2j+k.

10.已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \frac{1}{2}$,证明交错级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ 收敛.

COMES ASSOCIATION OF THE METERS OF THE ESTABLES TO THE STATE OF THE ST

 $=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}(-1)^{n}t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}x^{2n+1}, \quad ||t|| = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}(-1)^{n}t^{2n}dt$

 $0.1000 \times 10^{-1} \times 10^{-$

11.设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leq 1\}$,U是 \mathbb{R}^2 包含D的开区域,函数z=f(x,y)为定义再U上的一个非负二元函数,存在连续的一阶偏导且 $f|_{\partial D}=0$,证明:

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\pi}{3} \max_{(x, y) \in D} \sqrt{\left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right]^2} = \frac{\pi}{3} \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right]^2 + \frac{\pi}{3} \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right]^2 = \frac{\pi}{3} \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right]^2 + \frac{\pi}{3} \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right]^2 = \frac{\pi}{3} \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right]^2 + \frac{\pi}{3} \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right] + \frac{$$

 $m = \iint mdS = m \iint \sqrt{1 + z_1^2 + z_2^2} dxdy = m \iint \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy = m \int_0^\infty d\theta \int_0^\infty r \sqrt{1 + r^2} dr$

 $= \pi m \int \sqrt{1 + r^2} d(r^2 + 1) = \frac{2\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi m}{3} (r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \right] \right] = \frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \right] \right] = \frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \right] = \frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \right] \right] = \frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \right] \right] = \frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \right] = \frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \right] \right] = \frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \right] \right] = \frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \right] = \frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \right] \right] = \frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \right] = \frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \left[\frac{\pi m}{3} \right] \right] = \frac{\pi m}{3} \left[\frac{$

【考点证件】(考试完集》专题九 重积分 第四部分 重积分的应用 化空油面的面积 288022

12.设 M 为 \mathbb{R}^3 中由一光滑简单封闭曲面 S 所围成的有界闭区域.V(M) 为M 的体积,u 为包含 M 的一个开集. $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \, \cos \beta, \, \cos \gamma)$ 为S 的单位外法向量, $f(x, \, y, \, z)$ 为定义在 u 上并具有所有连续二阶偏导的函数,且满足 $\forall (x, \, y, \, z) \in M$, $f(x, \, y, \, z) \neq 0$, $div(f \cdot \overrightarrow{grad}(f)) = 2f(x, \, y, \, z)$,

 $\left\|\overrightarrow{grad}(f)\right\|^2 = f(x, y, z)$.证明: $\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = V(M)$.

果代解疗量深,增加在血量吃肉脂,在使压暖小器等多方,也不一类。主义是多兴元高级的存去

 $\partial_{x} = \frac{-y}{4x^{2} + y} \frac{x}{2} \frac{y}{2} \frac{y}{2} \frac{y}{2} \frac{\partial_{x} (x + y)}{\partial_{x} (x + y)} \frac{$

②表现体的界上时,构造影响现象整义(c.)地图· (de + 26) (de + 26)

 $I_{3} = -\oint_{1} \frac{x dy - y dx}{4x^{3} + y^{2}} = \frac{1}{e^{2}} \oint_{1} x dy - y dx = \frac{1}{e^{3}} \iint 2 dx dy = \frac{1}{e^{3}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{e}{2} \cdot \varepsilon = \pi.$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 曲线积分与曲面积分 第二部分 对坐标的曲线积分

2021-2022 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

1. 【解析】
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$
, $\iint f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} dt$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad \iiint$$

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n-1}$$

得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R=1.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一章 无穷级数 第四部分 函数展开成幂级数

2. 【解析】有 $z_x = y$, $z_y = x$, 曲面在xOy面上的投影为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 1\}$, 则质量 m

$$m = \iint_{S} mdS = m \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}} dxdy = m \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + x^{2} + y^{2}} dxdy = m \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{1} r \sqrt{1 + r^{2}} dr$$

$$=\pi m \int_0^1 \sqrt{1+r^2} d(r^2+1) = \frac{2\pi m}{3} (r^2+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2\pi m}{3} (2\sqrt{2}-1).$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 重积分 第四部分 重积分的应用 4.1 曲面的面积

3.【解析】有 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \sqrt{t^2 + 2} dt$,又 $x^2 + y^2 + z^2 = 2t^2$,因此

$$I_{1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\pi^{3}-2}} \sqrt{2t^{2}} \cdot \sqrt{t^{2}+2} \, dt = \int_{2}^{\pi^{2}-2} \frac{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{x+2}}{2\sqrt{x}} \, dx = \int_{2}^{\pi^{2}-2} \sqrt{x+2} \, d(x+2)$$

$$= \frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{2}^{\pi^{2}-2} = \frac{2}{3} (\pi^{3}-8).$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 曲线积分与曲面积分 第一部分 对弧长的曲线积分 1.1 对弧长的曲线积分的概念与性质

4.【解析】显然,原点在曲线 C 内部,任取足够小的 $\varepsilon > 0$,记l: $4x^2 + y^2 \le \varepsilon^2$,方向取顺时针方

向,令
$$P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}$$
, $Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}$,则容易得到 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-4x^2 + y^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$,利用格林公式得到

$$\oint_{C+1} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0, \text{ Bit}$$

$$I_2 = -\oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Gamma} 2 dx dy = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \varepsilon = \pi .$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 曲线积分与曲面积分 第二部分 对坐标的曲线积分

5. 【解析】容易得到
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$
, $S \in xOy$ 面上的投影为

$$D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$$

$$\mathbb{D} J = \iint_D (1 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r(1 - r^2)^{\frac{3}{2}} dr = -\frac{\pi}{4} \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} d(1 - r^2)$$

$$= -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{5} (1 - r^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{10}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 曲线积分与曲面积分 第五部分 对坐标的曲面积分 5.1 对坐标的曲面积分

6. 【解析】
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \arcsin(\cos x) dx = \frac{x \arcsin(\cos x)}{\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} dx$$

 $u = \arcsin(\cos x)$, $v = \cos nx$, 采用列表法求解该积分:

и	$\arcsin(\cos x)$	$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	0 (1) 教婦力四元
ν	cosnx	$\frac{\sin nx}{n}$ mil	$\frac{\cos \alpha}{n^2}$ $\frac{\cos nx}{n^2}$ $=$

$$\mathbb{I} a_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\arcsin(\cos x) \cdot \sin nx}{n} - \frac{\sin x \cdot \cos nx}{n^2 \sqrt{1 - \cos^2 x}} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\sin x \cdot \cos nx}{\pi n^2 |\sin x|} \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\cos nx}{\pi n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{2\cos nx}{\pi n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2 - 2\cos n\pi}{\pi n^2} = \frac{2[1 - (-1)^n]}{\pi n^2} = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}, a_0$$
在通项中.

同理对于
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \arcsin(\cos x) \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\arcsin(\cos x) \cdot \cos nx}{n} - \frac{\sin x \cdot \sin nx}{n^2 \sqrt{1 - \cos^2 x}} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$
,

则函数的 Fourier 级数
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2[1-(-1)^n]}{\pi n^2} \cos nx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi (2n+1)^2} \cos (2n+1)x$$
. 令 $x=1$ 带入

其中得到
$$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\cos(2n+1)}{\pi(2n+1)^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)}{(2n+1)^2} = \frac{\pi f(1)}{4} = \frac{\pi(\frac{\pi}{2}-1)}{4} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}$$
.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一章 无穷级数 第五部分 傅里叶级数 5.2 函数展开成傅里叶级数 3.2 函数 3.2 函数

7. 【解析】①在球体内部时,有 $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq 0$,因此不存在极值,也不存在最值;

②在球体边界上时,构造拉格朗日函数 $L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$,令

 $\sqrt{4} \frac{\partial z(x, y)}{\partial x(x, y)} + 2 \frac{\partial z(x, y)}{\partial x(x, y)} + 2 \frac{g_1}{g_2} + \frac{2g_2}{g_2} + \frac{g_2}{g_2} + \frac{g_3}{g_3} + \frac{g_4}{g_3} + \frac{g_4}{$

《微积分甲(Ⅱ)》期末历年题

$$H = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$
,当 $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, H 正定,取得极小值,此时 $u_{W^{+}} = -\sqrt{3}$,当 $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, H 负

定,取得极大值,此时 $u_{\text{极大}} = \sqrt{3}$,综上所述函数u在B上的最大值为 $\sqrt{3}$,最小值为 $-\sqrt{3}$.(此 处把可能是最值的点直接带进去比较 u 的大小也是可以的)

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分及其以应用 第七部分 多元函数的极值及其求法 7.2 条

8. 【解析】(1)根据方向导数的定义得到
$$\frac{\partial f}{\partial I}\Big|_{(0,0)} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)}{\rho} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\frac{\rho \cos \alpha \cdot \rho \sin \alpha}{\sqrt{\rho^2}}}{\rho} = \cos \alpha \cdot \sin \alpha.$$

(2)有
$$f_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$
,同理可得 $f_y(0, 0) = 0$,那么有

$$\Delta z = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(x, y) - x f_x(0, 0) - y f_y(0, 0) - f(0, 0)}{\rho} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(x, y)}{\rho} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{xy}{(x^2 + y^2)}$$

取路径
$$y = kx$$
,则 $\Delta z = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$,结果与 k 有关,所以极限不存在,因此 $f(x, y)$

在(0,0)处不可微.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分及其以应用 第六部分 方向导数与梯度 6.1 方向导数

9.【解析】(1)对方程
$$g(x-z, y-2z)=0$$
两边关于 x 求偏导得到 $\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}\right)g_1'-2\frac{\partial z}{\partial x}g_2'=0\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=0$

$$\frac{g_1'}{g_1'+2g_2'}; 两边关于 y 求偏导得到 - \frac{\partial z}{\partial y}g_1' + \left(1-2\frac{\partial z}{\partial y}\right)g_2' = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{g_2'}{g_1'+2g_2'}, 因此 \forall (x, y) \in \mathcal{O},$$

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + 2 \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 1.$$

(2)由(1)可知曲面
$$g(x-z, y-2z)=0$$
在任意点处的法向量为 $n=\left(\frac{g_1'}{g_1'+2g_2'}, \frac{g_2'}{g_1'+2g_2'}, -1\right)$,

又有
$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + 2\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 1$$
,即 $\frac{g_1'}{g_1' + 2g_2'} + \frac{2g_2'}{g_1' + 2g_2'} - 1 = n \cdot l = 0$,即每一点处的切平面的 法向量都垂直于向量 $l = i + 2j + k$.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分及其以应用 第五部分 多元函数微分学的几何应用 5.2 曲面的切平面与法线

10.【解析】依据题意,对
$$\forall \varepsilon > 0$$
,存在 N_0 ,当 $n > N_0$ 时,成立 $\left| n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$,即有

$$1 + \frac{1 - 2\varepsilon}{2n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{1 + 2\varepsilon}{2n}$$

显然有 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$,得到数列 $\{a_n\}$ 单调减少.下面证明 $\lim_{n\to +\infty}a_n=0$:取 $0<\sigma<\frac{1}{4}$,则有

$$\lim_{n \to +\infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\sigma} - 1 \right] = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\sigma} - 1}{\frac{1}{n}} = \sigma < \frac{1}{4}$$

因此存在 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 有 $n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\sigma} - 1 \right] < \frac{1}{4} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\sigma} < 1 + \frac{1}{4n}$, 取 $n > \max\{N_0, N_1\}$,

则
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}$$
< $1+\frac{1}{4n}$ < $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ \Rightarrow $n^{\sigma}a_n$ > $(n+1)^{\sigma}a_{n+1}$ > 0 ,即数列 $\{n^{\sigma}a_n\}$ 单调递减且有下界,故数列

 $\{n^{\sigma}a_{n}\}$ 收敛,亦有界,则 $0 < n^{\sigma}a_{n} \leq M \Rightarrow 0 < a_{n} \leq \frac{M}{n^{\sigma}}$,利用夹逼原理可以得到 $\lim_{n \to +\infty} a_{n} = 0$.结合莱

布尼茨判别法可知,级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ 收敛.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一章 无穷级数 交错级数 🖦 🐧 🔞 🖎

11.【解析】记
$$M = \max_{(x, y) \in D} \sqrt{\left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right]^2}$$
, 对 $\forall (x, y) \in D$, 由原点向 (x, y) 引一

条射线,与圆周交于(xo, yo),由泰勒展开式和柯西-施瓦兹不等式得到

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(\xi)(x - x_0) + f'_y(\eta)(y - y_0) = f'_x(\xi)(x - x_0) + f'_y(\eta)(y - y_0)$$

$$\leq \sqrt{[f'_x(\xi)]^2 + [f'_y(\eta)]^2} \cdot \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq M(1 - r), 其中 r = \sqrt{x^2 + y^2}, 因此$$

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq M \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r(1-r) dr = \frac{M\pi}{3}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 重积分 第二部分 二重积分的计算方法 2.2 利用极坐标计算二 重积分

12.【解析】有
$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$
,则由高斯公式得到

$$\iint_{S} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS = \iint_{S} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \right) dS = \iiint_{M} \left(\frac{\partial^{2} f}{\partial^{2} x} + \frac{\partial^{2} f}{\partial^{2} y} + \frac{\partial^{2} f}{\partial^{2} z} \right) dx dy dz$$

《微积分甲(Ⅱ)》期末历年题

又
$$f \cdot \overrightarrow{grad}(f) = \left(f \frac{\partial f}{\partial x}, f \frac{\partial f}{\partial y}, f \frac{\partial f}{\partial z}\right) \Rightarrow \operatorname{div}\left(f \cdot \overrightarrow{grad}(f)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$$

$$+ f \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + f \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} = 2f(x, y, z), \quad \overrightarrow{\text{m}} \| \overrightarrow{grad}(f) \|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = f(x, y, z), \quad \overrightarrow{\text{M}}$$
此 $\operatorname{div}\left(f \cdot \overrightarrow{grad}(f)\right) = \|\overrightarrow{grad}(f)\|^2 + f(x, y, z) \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}\right), \quad \overrightarrow{\text{4}}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} = 1$$

因此 $\iint_{S} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_{M} \left(\frac{\partial^{2} f}{\partial^{2} x} + \frac{\partial^{2} f}{\partial^{2} y} + \frac{\partial^{2} f}{\partial^{2} z} \right) dx dy dz = \iiint_{M} dx dy dz = V(M).$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 曲线积分与曲面积分 第五部分 对坐标的曲面积分 【5-1】两类

馈错误,我们会及时更正在二维码里哦 (5⁻³⁻) 5)