Printout

2022年5月25日 7:39

姓名 学号 专业 任课教师

南开大学 2018 级“多元函数微积分（信）”结课统考试卷（A 卷） 2019 年 4 月 20 日

（说明：答案务必写在装订线右侧，写在装订线左侧无效。影响成绩后果自负。）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	卷面成绩	核分签名	复核签名
得分											

一、求曲面 $x^2+y^2+z^3=1$ 上点 $(1,-1,-1)$ 处的切平面与法线方程.(本题 10 分)

一 题 得分	

解 依题意 $n_{法}=(2x,2y,3z^2)$

$\therefore n_{法}\big|_{(1,-1,-1)}=(2,-2,3)$

$\Rightarrow \pi_{切}: 2x-2y+3z=1$

$l_{法}: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{3}$

二、求函数 $f(x,y,z)=(x+2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2$ 在区域 $D: x^2+y^2+z^2\le 1$ 上的最大值、最小值（10 分）

二题 得分	

解 由 $\begin{cases} f_x=2(x+2)=0 \\ f_y=2(y+2)=0 \\ f_z=2(z-1)=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(-2,-2,1)\notin D$

取 $L=f(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

由 $\begin{cases} L_x=2(x+2)+2\lambda x=0 & ① \\ L_y=2(y+2)+2\lambda y=0 & ② \\ L_z=2(z-1)+2\lambda z=0 & ③ \\ x^2+y^2+z^2=1 & ④ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)(1+\lambda)=0 \\ (y+2z)(1+\lambda)=0 \end{cases}$

$\lambda=-1$ 时 无解

$\therefore x=y,\ y=-2z$

$\Rightarrow 9z^2=1 \Rightarrow z=\pm 1/3$

$\Rightarrow (x,y,z)=(-2/3,-2/3,1/3)$

$(2/3,2/3,-1/3)$

三、计算下列二重积分：（每小题 8 分）

三题 得分	

（1）$\iint_D |x^2+y^2-1|\,dxdy$，其中 D：$x^2+y^2\le 4$；

$=\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)\,dxdy+\iint_{D_2}(1-x^2-y^2)\,dxdy$

$D_1: 1\le r\le 2,\ \theta\in[0,2\pi]$ ； D_2 $r\le 1$, $\theta\in[0,2\pi]$

$\therefore$ 原式 $=\int_1^2 (r^2-1)\cdot r\,dr\int_0^{2\pi}d\theta+\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}d\theta\ r(1-r^2)$

$=2\pi\frac{1}{4}(r^2-1)^2\Big|_1^2+2\pi\cdot\frac{-1}{4}(1-r^2)^2\Big|_0^1=\frac{18\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}=5\pi$

草稿区

$F(x,y,z)=0$ | $z=f(x,y)$

$n_{法}=(F_x,F_y,F_z)$ | $(f_x,f_y,-1)$

$(x(t),y(t),z(t))$

$v_{切}=(x'(t),y'(t),z'(t))$

$v_{切}=n_1\times n_2$.

$(1,2,3)\times(6,5,4)$

$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$=i\cdot(-7)-j(-14)+k(-7)$

$=(-7,14,-7)$

解 Case2.

step1. 无条件驻点 $\cap D$

step2. 条件 ∂D

step3 代值比较.

⊕特.

$(-2\lambda,-2z,1)$

$\therefore f(x)$ 在 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3})$ 取最大值 16

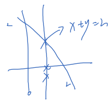
$(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ 取最小值 4

$(\frac{4}{3})^2+(\frac{2}{3})^2$ $32\ \frac{16\times 2+4}{9}$

$(\frac{8}{3})^2\times 2+(\frac{4}{3})^2$ $\frac{128+16}{9}$

姓名 学号 专业 任课教师

（2）$\iint_D (x+y)\,dxdy$，其中区域 D 为直线 $y+x=2$ 与坐标轴所围成的三角形区域。



解：依题意 $D: 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2-x$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}dy\,(x+y)$

$=\int_0^2 dx\ \frac{1}{2}(x+y)^2\Big|_0^{2-x}=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\,(4-x^2)=\frac{1}{2}(4x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2$

$=8/3$

四、计算下列三重积分（每小题 8 分）：

四题 得分	

（1）$\iiint_\Omega(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})\,dxdydz$，其中 Ω 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围的区域（$a,b,c>0$）；

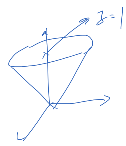
解 令 $x=ar\sin\varphi\cos\theta,\ y=br\sin\varphi\sin\theta,\ z=cr\cos\varphi$

则 $\varphi\in[0,\pi],\ \theta\in[0,2\pi],\ r\le 1$，$dxdydz=abc\cdot r^2\sin\varphi$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^1 dr\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\ r^2\cdot r^2\sin\varphi\cdot abc$

$=abc\ \frac{1}{5}r^5\Big|_0^1\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\cdot 2\pi=\frac{4}{5}\pi abc$

(2) $\iiint_\Omega(1+z^3)\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=1$ 所围成的区域。



解：依题意 $\Omega: 0<z<1,\ x,y\in D_z$.

$D_z: x^2+y^2\le z^2$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^1 dz\iint_{D_z}dxdy\,(1+z^3)=\int_0^1(1+z^3)\,dz\cdot\pi z^2$

$=\pi\cdot(\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{6}z^6)\Big|_0^1=\pi/2$

草稿区

$4-\frac{1}{2}\frac{1}{3}8$

$4-\frac{4}{3}$

$\frac{1}{5}\cdot 2\cdot 2\pi$

五、计算下列曲线积分与曲面积分：（每小题 10 分）

（1）设 C 为曲线 $y=\sqrt{\pi}x^2$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,\sqrt{\pi})$ 的曲线段，求积分 $\int_C \cos y^2dx-2xy\sin y^2dy$

2 类

Q_x-P_y

五题得分	

解 依题意 $P=\cos y^2$，$Q=-2xy\sin y^2$

$\Rightarrow Q_x=-2y\sin y^2$，$P_y=-2y\sin y^2=Q_x$

∴ 积分与路径无关

取 $y=\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{x}$，$x$，$0\to1$

A $(1,\sqrt{\pi})$　B $(1,0)$　O

∴ 原式 $=\int_0^1\left(\cos\pi x\,dx-2x\sqrt{\pi}\sqrt{x}\cdot\sin(\pi x)\cdot\sqrt{\pi}\frac{dx}{2\sqrt{x}}\right)$

$=\int_0^1(\cos\pi x-\pi x\sin\pi x)dx$

$=\frac{\sin\pi x}{\pi}\Big|_0^1-\pi x\frac{\cos\pi x}{-\pi}\Big|_0^1-\int_0^1\cos\pi x\,dx$

$=0+(-1)-\frac{\sin\pi x}{\pi}\Big|_0^1=(-1)$

（2）求 $I=\iint_\Sigma z^3dS$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2,(R>0)$ 在第一卦限部分

一类

解 依题意 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

D：$r\le R$，$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

则 $z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$，$z_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

∴ $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

∴ $I=\iint_D R(R^2-x^2-y^2)dxdy=\int_0^R dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\,R(R^2-r^2)\cdot r=\frac{\pi}{2}\cdot R\cdot\frac{-1}{4}(R^2-r^2)^2\Big|_0^R=\frac{\pi R^5}{8}$.

草稿区

1 类曲线 dl ds

1 类曲面 dS

2 类曲线

$Pdx+Qdy+Rdz$

2 类曲面 $Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

$f(x)=y$

$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt=\sqrt{1+(f')^2}dx$

$dS=\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}dxdy$　$(z=f(x,y))$

$=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$　参

$(A,B,C)=(x_u,y_u,z_u)\times(x_v,y_v,z_v)$

上半

六、（10 分）求曲线积分 $I=\oint_L\frac{(x+4y)dy+(x-y)dx}{x^2+4y^2}$，其中 L 是单位圆：$x^2+y^2=1$，

取逆时针方向；

六题得分	

解：依题意 $P=\frac{x-y}{x^2+4y^2}$，$Q=\frac{x+4y}{x^2+4y^2}$

$Q_x=\frac{1}{x^2+4y^2}-\frac{(x+4y)2x}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{4y^2-8xy-x^2}{(x^2+4y^2)^2}$

$P_y=\frac{-1}{x^2+4y^2}-\frac{(x-y)8y}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{4y^2-8xy-x^2}{(x^2+4y^2)^2}=Q_x$

x^2+4y^2
$-2x^2-8xy$

$-x^2-4y^2$
$-8xy+8y^2$

取 l_1：$x^2+4y^2=\varepsilon^2$　(ε 较小)

则 $I+\oint_{l_1^-}(Pdx+Qdy)=\iint_D(Q_x-P_y)dxdy=0$

∴ $I=\oint_{l_1^+}(Pdx+Qdy)=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{l_1^+}[(x+4y)dy+(x-y)dx]=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}(1-(-1))dxdy=\frac{2}{\varepsilon^2}S(D_1)$

其中 D_1：$x^2+4y^2\le\varepsilon^2$

∴ $I=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\pi$.

$x^2+4y^2=\varepsilon^2$

$\frac{x^2}{\varepsilon^2}+\frac{y^2}{\varepsilon^2/4}=1$

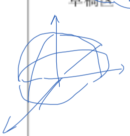
$dS_{yz}=-z_xdS_{xy}$，$dS_{zx}=-z_ydS_{xy}$

七、（10 分）设 Σ 是曲面 $z=\sqrt{4-(x^2+y^2)}$ 的外侧，

求曲面积分：$I=\iint_\Sigma yx\,dydz+xdzdx+x^2dxdy$

七题得分	

草稿区



解 依题意 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 方向向上.

$z_x=-\frac{x}{z}$，$z_y=-\frac{y}{z}$

∴ $dS_{yz}=\frac{x}{z}dS_{xy}$，$dS_{zx}=\frac{y}{z}dS_{xy}$

$\Rightarrow I=\iint_\Sigma\left(\frac{x^2y}{z}+\frac{xy}{z}+x^2\right)dxdy$

$=\iint_D\left(\frac{x^2y}{z}+\frac{xy}{z}+x^2\right)dxdy$

D：$x^2+y^2\le4\Rightarrow r\le2$，$\theta\in[0,2\pi]$

∴ $I=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy$

$=\frac{1}{2}\int_0^2dr\int_0^{2\pi}d\theta\cdot r^2\cdot r$

$=\frac{1}{2}\cdot2\pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2=4\pi$

Gauss

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

$I=\iint_\Sigma yx\,dydz+xdzdx+x^2dxdy$

则 $P=yx$，$Q=x$　$R=x^2$

∴ $P_x+Q_y+R_z=y$

取 Σ_2：$z=0$，$x^2+y^2\le R^2$，方向向下

记 $J=\iint_{\Sigma_2}(Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)$

则 $I+J=\iiint_\Omega(P_x+Q_y+R_z)dV=\iiint_\Omega y\,dxdydz$

Ω：$z\ge0$，$x^2+y^2+z^2\le4$

∴ $I+J=0$

又 $J=\iint_{\Sigma_2}x^2dS_{xy}=-\iint_D x^2dxdy$

D：$x^2+y^2\le4\Rightarrow r\le2$，$\theta\in[0,2\pi]$

∴ $J=-\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy$

$=-\frac{1}{2}\int_0^2dr\int_0^{2\pi}d\theta\cdot r^2\cdot r$

$=-\frac{1}{2}\cdot2\pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2=-4\pi$

∴ $I=4\pi$

$|A|=|A'|$

x，y，z　u，v，w

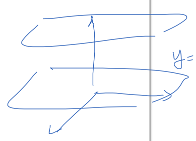
八、（8 分）设 Ω 是由曲面 $x^2+(y-z)^2=4,z=0,z=1$ 所围成的立体区域，求三重积分：

$I=\iiint_\Omega(y-z)^2z^2dxdydz$

八题得分	

$dxdydz=\left|\begin{vmatrix}x_u&x_v&x_w\\y_u&y_v&y_w\\z_u&z_v&z_w\end{vmatrix}\right|dudvdw$.

$y=v+w$　$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{vmatrix}$



令 $u=x$，$v=z$，$w=y-z$

则 Ω 由 $u^2+w^2=4$　$v=0$，$v=1$ 所围

$dxdydz=dudvdw$.

∴ $I=\iiint_\Omega w^2\cdot v^2\,dudvdw$

Ω：$0\le v\le1$，$u^2+w^2\le4$

∴ $I=\int_0^1dv\,v^2\iint_{D_v}w^2dwdu$

$=\frac{1}{2}\int_0^1dv\,v^2\iint_{D_v}(u^2+w^2)dudw$

$=\frac{1}{2}\int_0^1v^2dv\int_0^2dr\int_0^{2\pi}d\theta\cdot r^2\cdot r$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}v^3\Big|_0^1\cdot2\pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2=\frac{4}{3}\pi$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot4\pi\cdot\frac{4}{16}$