第 9 章　多元函数微分学

9.1　多元函数 习题

1. 试问集合 $A=\{(x,y)|0<|x-a|<\delta,0<|y-b|<\delta,\delta>0\}$ 与集合 $B=\{(x,y)||x-a|<\delta,|y-b|<\delta$ 且 $(x,y)\neq(a,b),\delta>0\}$ 是否相同?

解: 不同. 例如点 $\left(a,b+\dfrac{\delta}{2}\right)$, 其在集合 B 中但不在集合 A 中.

2. 求下列函数的定义域, 并在 xOy 平面内画出其图形:

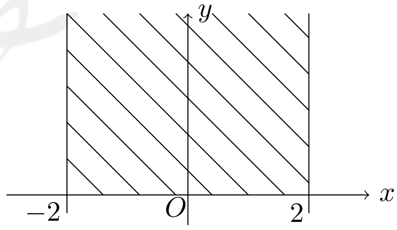
(1) $z=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{y}$;　　(2) $z=\sqrt{(x^2+y^2-1)(9-x^2-y^2)}$;

(3) $z=\ln(x^2+2y^2-8)$;　　(4) $z=\arcsin\sqrt{2-x-y}$;

(5) $z=\arcsin\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$;　　(6) $z=\ln\dfrac{y}{x}+\sqrt{1-x^2-y^2}$.

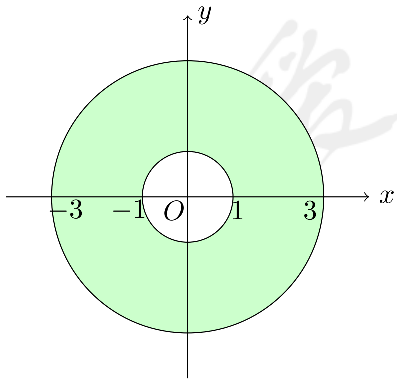
解: (1) 由题则有 $\begin{cases}4-x^2\geq 0,\\ y\geq 0.\end{cases}$ 解得函数定义域为 $\{(x,y)|-2\leq x\leq 2,y\geq 0\}$.

其定义域如图中阴影所示, 其中边界处都可以取到.



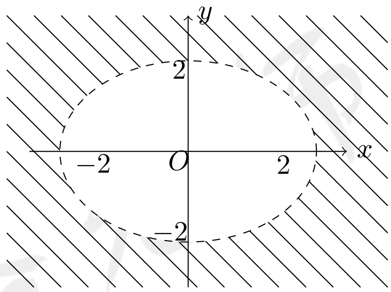
(2) 由题则有 $\begin{cases}x^2+y^2-1\geq 0,\\ 9-x^2-y^2\geq 0.\end{cases}$ 解得函数定义域为 $\{(x,y)|1\leq x^2+y^2\leq 9\}$.

其定义域如图中绿色区域所示, 其中两圆的边界都可以取到.



(3) 由题则有 $x^2+2y^2-8>0$, 即函数定义域为 $\{(x,y)|x^2+2y^2>8\}$.

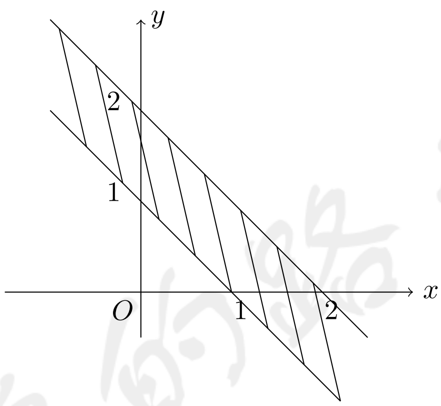
其定义域如图中阴影所示.



(4) 由 $\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$, 则有 $-1\le\sqrt{2-x-y}\le 1$, 且同时有 $2-x-y\ge 0$.

即有 $0\le 2-x-y\le 1$, 解得函数定义域为 $\{(x,y)|1\le x+y\le 2\}$.

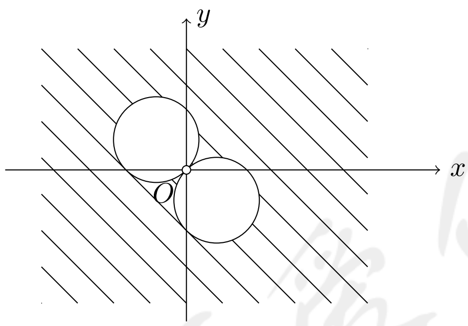
其定义域如图中阴影所示, 其中两直线均可取到.



(5) 由题则有 $-1\le\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\le 1$, 且同时有 $x^2+y^2\ne 0$.

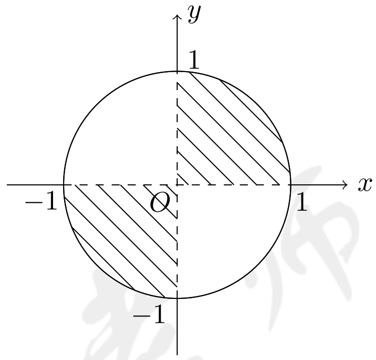
从而函数定义域为 $\{(x,y)|x^2+y^2-x+y\ge 0, x^2+y^2+x-y\ge 0$ 且 $(x,y)\ne(0,0)\}$.

其定义域如图中阴影所示. 其中圆的边界可取, 但画圈的原点不可取.



(6) 由题则有 $\begin{cases}\dfrac{y}{x}>0,\\ 1-x^2-y^2\ge 0,\\ x\ne 0.\end{cases}$ 解得函数定义域为 $\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, xy>0\}$.

其定义域如图中阴影所示. 其中圆的边界可取, 但坐标轴不可取.



3. 求下列函数的定义域, 并在三维直角坐标系中画出其图形:

(1) $u=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}+\ln(z-x^2-y^2)$;

(2) $u=\arccos(2x^2+y^2+3z^2-1)$;

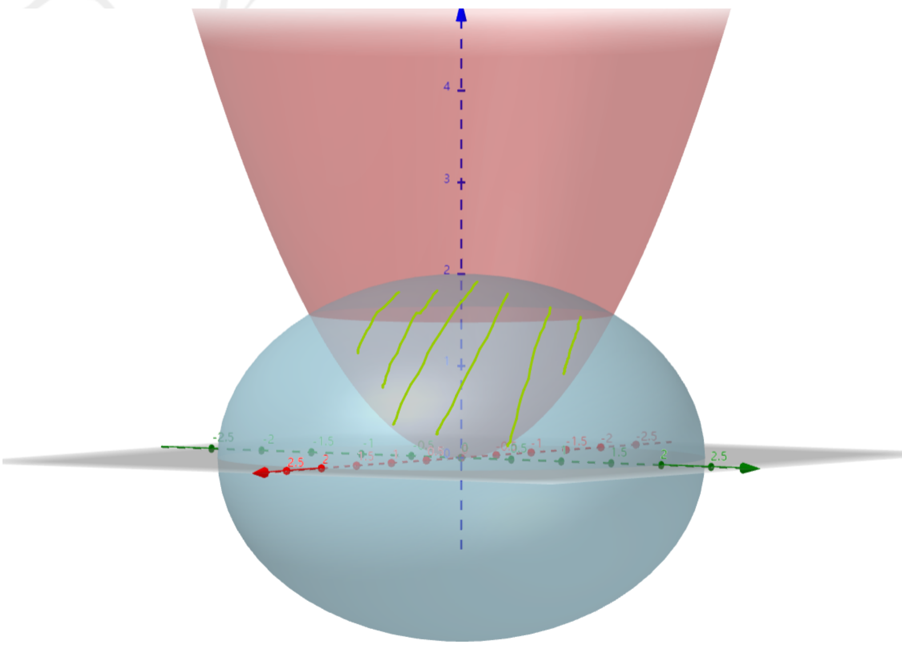
(3) $u=\ln[(z^2-x^2-y^2)(1-z^2)]$;

(4) $u=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x^2+y^2+z^2-1)}$.

解: 下面立体图形的图片中, 红色轴为 x 轴, 绿色轴为 y 轴, 蓝色轴为 z 轴.

(1) 由题有 $\begin{cases}4-x^2-y^2-z^2\geq 0,\\ z-x^2-y^2>0,\end{cases}$ 解得函数定义域为 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leq 4 \text{ 且 } x^2+y^2<z\}$.

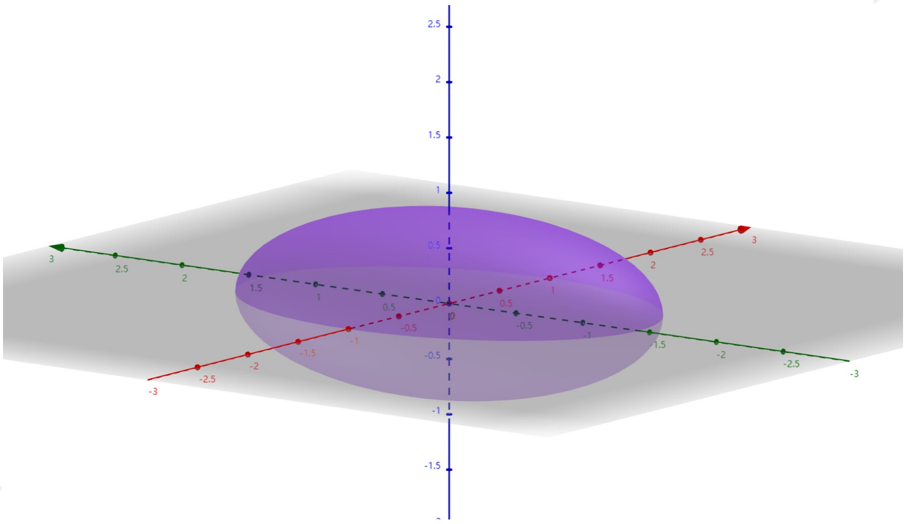
如图所示作出定义域, 为椭圆抛物面和球面所围成区域, 包括球面上但不包括椭圆抛物面上.



(2) 利用 $\arccos x$ 的定义域则有 $-1\leq 2x^2+y^2+3z^2-1\leq 1$.

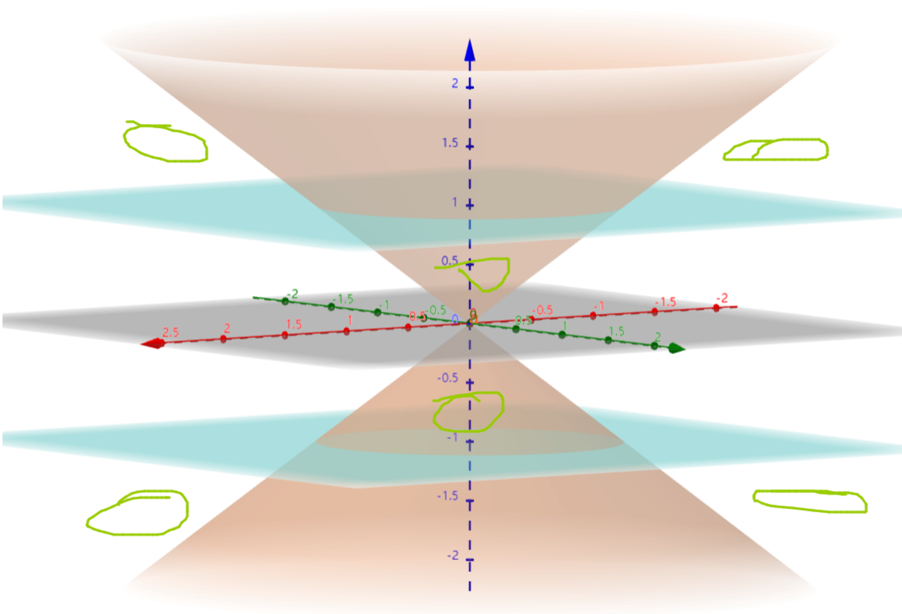
解得函数定义域为 $\{(x,y,z)|2x^2+y^2+3z^2\le 2\}$.

如图所示作出定义域, 其为椭球面内部, 包括椭球面上.



(3) 由题有 $(z^2-x^2-y^2)(1-z^2)>0$. 解得函数定义域为 $\{(x,y,z)|x^2+y^2<z^2<1$ 或 $1<z^2<x^2+y^2\}$.

如图所示作出定义域, 即在 $-1<z<1$ 时取锥面内部, $z^2>1$ 时取锥面外部, 且均不包括边界.

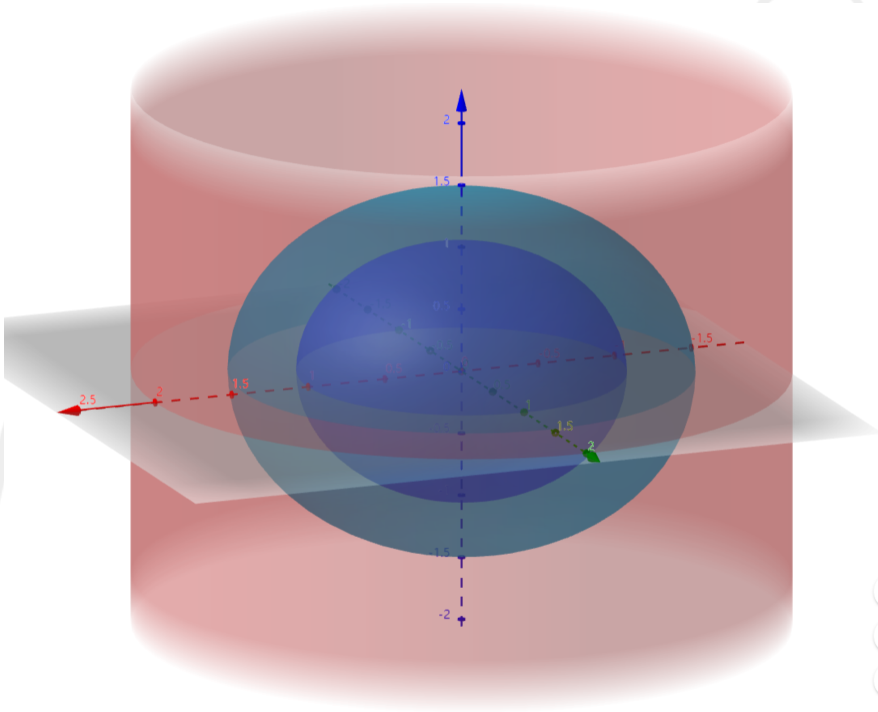


(4) 由题有
$$\begin{cases} 4-x^2-y^2\ge 0, \\ x^2+y^2+z^2-1>0, \\ x^2+y^2+z^2-1\ne 1. \end{cases}$$

解得函数定义域为 $\{(x,y,z)|x^2+y^2\le 4, x^2+y^2+z^2>1$ 且 $x^2+y^2+z^2\ne 2\}$.

如图所示作出定义域, 其为圆柱内部, 小球的外部, 且不包括大球的球面.

其中圆柱面上可取, 小球面上不可取.



4. 设

$$f\left(x+\frac{1}{x}, y-1\right)=x^2+y^2+2xy+\frac{1}{x^2}+\frac{2y}{x}-2(x+y)-\frac{2}{x}+4,$$

求 $f(x,y)$ 的表达式.

解: 由题, 对所给函数进行分组合并则有

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{1}{x}, y-1\right) &= x^2+y^2+2xy+\frac{1}{x^2}+\frac{2y}{x}-2(x+y)-\frac{2}{x}+4 \\ &= x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+2y\left(x+\frac{1}{x}\right)-2y+y^2+4 \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+2(y-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)+(y-1)^2-1+4 \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2(y-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)+(y-1)^2+1. \end{aligned}$$

用 u 替换 $x+\frac{1}{x}$, v 替换 $y-1$, 则 $f(u,v)=u^2+2vu+v^2+1=(u+v)^2+1$.

当 $x>0$ 时 $x+\frac{1}{x}\geq 2$, $x<0$ 时 $x+\frac{1}{x}=-\left(-x+\frac{1}{-x}\right)\leq -2$,

从而第一个自变量的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

从而 $f(x,y)=(x+y)^2+1$, 其中 $x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$, $y\in\mathbb{R}$.

5. 已知 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$, 求:

(1) $f(y,x)$; (2) $f(-x,-y)$; (3) $f(-x,y)$; (4) $f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$.

解: (1) 由题, $f(y,x)=\dfrac{y^2-x^2}{2yx}$.

(2) 由题, $f(-x,-y)=\dfrac{(-x)^2-(-y)^2}{2(-x)(-y)}=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$.

(3) 由题, $f(-x,y)=\dfrac{(-x)^2-y^2}{2(-x)y}=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$.

(4) 由题, $f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(\dfrac{1}{y}\right)^2}{2\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y}}=\dfrac{\dfrac{y^2-x^2}{x^2y^2}}{\dfrac{2}{xy}}=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$.

9.2 二元函数的极限与连续 习题

6. 利用极限定义证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{|x|+|y|}=0$; (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x+y+2}{2-x-2y}=1$.

解: (1) 由基本不等式有 $|x|+|y|\geq 2\sqrt{|xy|}$ 成立.

因此对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=2\varepsilon$, 当 $|x-0|<\delta$, $|y-0|<\delta$ 且 $(x,y)\neq(0,0)$ 时有

$$\left|\frac{xy}{|x|+|y|}\right|\leq\frac{|xy|}{2\sqrt{|xy|}}=\frac{\sqrt{|xy|}}{2}<\frac{\sqrt{\delta^2}}{2}=\frac{\delta}{2}=\varepsilon.$$

因此有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{|x|+|y|}=0.$$

(2) 先限定 $|x|<\dfrac{1}{2}$, $|y|<\dfrac{1}{2}$, 此时有 $|x+2y|<|x|+|2y|<\dfrac{3}{2}$.

因此有 $|2-x-2y|>\big|2-|x+2y|\big|>\left|2-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$, 从而有 $\dfrac{1}{|2-x-2y|}<2$ 成立.

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{12}\varepsilon\right\}$, 当 $|x-0|<\delta$, $|y-0|<\delta$ 且 $(x,y)\neq(0,0)$ 时有

$$\left|\frac{2x+y+2}{2-x-2y}-1\right|=\frac{|(2x+y+2)-(2-x-2y)|}{|2-x-2y|}=\frac{|3x+3y|}{|2-x-2y|}<6|x+y|<6(|x|+|y|)<12\delta=\varepsilon.$$

因此有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+y+2}{2-x-2y} = 1.$$

7. 说明下列函数在 $(x,y)\to(0,0)$ 时是否存在极限? 若存在, 求出其极限:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{|x|+|y|}$;

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x+y}$;

(3) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2-y^2)}{e^{-x^2+y^2}-1}$;

(4) $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}$;

(5) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$;

(6) $f(x,y)=\dfrac{x-y^2}{x+y}$;

(7) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

(8) $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

解: (1) 考虑沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 点, 此时有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x+x}{|x|+|x|} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}.$$

从而 $x\to 0^+$ 时 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|}=1$; $x\to 0^-$ 时 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}=-1$, 故极限不存在.

因此 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时不存在极限.

(2) 考虑沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 点, 此时有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2x^2}{x+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2} = 0.$$

再考虑沿直线 $y=-x+x^4$ 趋于 $(0,0)$ 点, 此时有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(-x+x^4)^2}{x+(-x+x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^8-2x^5+x^2)}{x^4} = \lim_{x\to 0}(x^6-2x^3+1) = 1.$$

二者值不相等, 因此 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时不存在极限.

【对第二条路径, 那个 x^4 的得到方式是这样的: 先令路径为 $y=-x+x^a$, 类似上述步骤进行到求极限的

位置, 使得其中有一项 x 的次数为 0 来解出 a 值.】

(3) 令 $t=x^2-y^2$, 则此时 $f(x,y)=\dfrac{\sin t}{e^{-t}-1}$.

又因为当 $(x,y)\to(0,0)$ 时有 $t\to0$ 成立, 则有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{e^{-t}-1}=\lim_{t\to0}\frac{t}{-t}=-1.$$

(4) 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时有 $xy\to0$ 成立. 从而此时有 $1-\cos(xy)\sim\dfrac{1}{2}x^2y^2$ 成立.

从而有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{2(x^2+y^2)}.$$

由基本不等式, $x^2+y^2\geq 2xy$, 从而有 $\dfrac{x^2y^2}{2(x^2+y^2)}\leq\dfrac{x^2y^2}{2\cdot2xy}=\dfrac{xy}{4}$.

此时有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{4}=0$, 又因为 $\dfrac{x^2y^2}{2(x^2+y^2)}\geq0$, 由夹逼定理, 从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{2(x^2+y^2)}=0$.

因此 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限存在, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

(5) 由于 $(|x|+|y|)^2=|x|^2+|y|^2+2|xy|\geq x^2+y^2$, 从而有 $f(x,y)\leq\dfrac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|}=|x|+|y|$.

此时有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|+|y|=0$, 又因为 $f(x,y)>0$ 始终成立,

由夹逼定理, 从而 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限存在, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

(6) 考虑沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 点, 此时有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x-x^2}{x+x}=\lim_{x\to0}\frac{1-x}{2}=\frac{1}{2}.$$

再考虑沿直线 $y=0$ 趋于 $(0,0)$ 点, 此时有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x-0}{x+0}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1.$$

二者值不相等, 因此 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时不存在极限.

(7) 考虑沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 点, 此时有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2x^2}{x^2x^2+(x-x)^20}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1.$$

再考虑沿直线 $y=0$ 趋于 $(0,0)$ 点, 此时有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{0+(x-0)^2}=0.$$

二者值不相等, 因此 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时不存在极限.

(8) 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 此时 $r>0$. 从而当 $(x,y)\to(0,0)$ 时有 $r\to 0^+$.

从而有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0^+}\frac{(r\cos\theta)^4+(r\sin\theta)^4}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}=\lim_{r\to 0^+}\frac{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{r^2}=\lim_{r\to 0^+} r^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)=0.$$

8. 设 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, 试分析下列极限的存在性:

(1) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$;　　(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

解: (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{0}{0+y^2}=0$,

从而 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} 0=0$.

(2) 因为 $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{0}{x^2+0}=0$,

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$.

(3) 考虑沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 点, 此时有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2xx}{x^2+x^2}=\lim\nolimits_{x\to 0}\frac{2x^2}{2x^2}=1.$$

再考虑沿直线 $y=0$ 趋于 $(0,0)$ 点, 此时有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2+0} = 0.$$

二者值不相等, 因此 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

9. 计算下列极限:

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{1-\cos(xy)}{\ln(1-2x^2)}$;　　(2) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\tan x - x}{\sqrt{1+yx^3}-1}$.

解: (1) 当 $(x,y)\to(0,2)$ 时有 $xy\to 0$ 成立, 从而此时有 $1-\cos(xy)\sim \frac{1}{2}x^2y^2$.

从而

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{1-\cos(xy)}{\ln(1-2x^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\frac{1}{2}x^2y^2}{-2x^2} = -\lim_{y\to 2} \frac{y^2}{4} = -1.$$

(2) 当 $(x,y)\to(0,2)$ 时有 $yx^3\to 0$ 成立, 从而此时有 $\sqrt{1+yx^3}-1\sim \frac{1}{2}yx^3$. 又

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2\cdot 2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

即 $x\to 0$ 时有 $\tan x - x\sim \frac{1}{3}x^3$. 从而

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\tan x - x}{\sqrt{1+yx^3}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}yx^3} = \lim_{y\to 2} \frac{2}{3y} = \frac{1}{3}.$$

10. 证明: 函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

证明: 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 此时 $r>0$. 从而当 $(x,y)\to(0,0)$ 时有 $r\to 0^+$.

从而有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0+} \frac{r^3\sin^2\theta\cos\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0+} r\sin^2\theta\cos\theta = 0.$$

又 $f(0,0) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

11. 试举例说明二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 对每个变量 x,y 均连续, 但 $f(x,y)$ 在点 P 处不连续.

解: 考虑函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $P(0,0)$ 处的情况.

此时有 $f(x,0)=0$, $f(0,y)=0$. 因此有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=\lim\limits_{y\to 0}f(0,y)=0=f(0,0)$.

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处关于 x,y 均连续.

下面考虑 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$. 考虑沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 点, 此时有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\frac{2k}{1+k^2}.$$

其结果与 k 相关, 故极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在.

从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

9.3 偏导数与全微分 习题

12. 求下列函数在指定点处的偏导数:

(1) 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arctan\dfrac{x}{y}$, 求 $f'_x(0,1)$ 和 $f'_y(0,1)$;

(2) 设 $f(x,y)=(x-1)^2\arctan(1+y^2)+\sin\pi y\cdot\ln\sqrt{1+x^2}$, 求 $f'_x(1,0)$ 和 $f'_y(1,0)$.

解: (1) 由于 $f(x,1)=x+(1-1)\arctan\dfrac{x}{1}=x$, $f(0,y)=0+(y-1)\arctan\dfrac{0}{y}=0$.

于是有 $f'_x(x,1)=1$, $f'_y(0,y)=0$.

从而 $f'_x(0,1)=1$, $f'_y(0,y)=0$.

(2) 由于 $f(1,0)=(1-1)^2\arctan(1+0^2)+\sin 0\cdot\ln\sqrt{1+1^2}=0$.

$f(x,0)=(x-1)^2\arctan(1+0^2)+\sin 0\cdot\ln\sqrt{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}(x-1)^2$.

$f(1,y)=(1-1)^2\arctan(1+y^2)+\sin\pi y\cdot\ln\sqrt{1+1^2}=\dfrac{\ln 2}{2}\sin\pi y$.

从而

$$f_x'(1,0)=\lim_{x\to1}\frac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\pi}{4}(x-1)^2-0}{x-1}=\frac{\pi}{4}\lim_{x\to1}(x-1)=0.$$

$$f_y'(1,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(1,y)-f(1,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{\ln 2}{2}\sin\pi y}{y}=\frac{\ln 2}{2}\lim_{y\to0}\frac{\pi y}{y}=\frac{\pi\ln 2}{2}.$$

13. 计算下列函数对各个变量的一阶偏导数:

(1) $z=e^x(x\cos y+\sin y)$; (2) $z=e^{\frac{y}{x}}(x+y)$;

(3) $z=\ln(2x+\sqrt{x^2+y^2})$; (4) $z=\left(\frac{y}{x}\right)^{xy}\ (xy>0)$;

(5) $u=(x+y+z)^{xyz}\ (x+y+z>0)$; (6) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解: (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^x(x\cos y+\sin y)+e^x\cdot\cos y=e^x(x\cos y+\cos y+\sin y)$.

$\frac{\partial z}{\partial y}=e^x(-x\sin y+\cos y)$.

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{y}{x}}\cdot 1+e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)(x+y)=e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)$.

$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{\frac{y}{x}}\cdot 1+e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot(x+y)=e^{\frac{y}{x}}\left(2+\frac{y}{x}\right)$.

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(2+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x\right)=\frac{2+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{2x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2\sqrt{x^2+y^2}+x}{2x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$.

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\frac{y}{2x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$.

(4) 因为 $z=\left(\frac{y}{x}\right)^{xy}=e^{xy\ln\frac{y}{x}}=e^{xy(\ln y-\ln x)}$, 从而有

$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy(\ln y-\ln x)}\cdot\left[y(\ln y-\ln x)+xy\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\right]=\left(\frac{y}{x}\right)^{xy}\left(y\ln\frac{y}{x}-y\right)$.

$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy(\ln y-\ln x)}\cdot\left[x(\ln y-\ln x)+xy\cdot\frac{1}{y}\right]=\left(\frac{y}{x}\right)^{xy}\left(x\ln\frac{y}{x}+x\right)$.

(5) 因为 $u=(x+y+z)^{xyz}=e^{xyz\ln(x+y+z)}$, 从而有

$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{xyz\ln(x+y+z)}\cdot\left[xyz\cdot\frac{1}{x+y+z}+yz\ln(x+y+z)\right]=(x+y+z)^{xyz}\left[\frac{xyz}{x+y+z}+yz\ln(x+y+z)\right]$.

$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{xyz\ln(x+y+z)}\cdot\left[xyz\cdot\frac{1}{x+y+z}+xz\ln(x+y+z)\right]=(x+y+z)^{xyz}\left[\frac{xyz}{x+y+z}+xz\ln(x+y+z)\right]$.

$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{xyz\ln(x+y+z)}\cdot\left[xyz\cdot\frac{1}{x+y+z}+xy\ln(x+y+z)\right]=(x+y+z)^{xyz}\left[\frac{xyz}{x+y+z}+xy\ln(x+y+z)\right]$.

(6) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=-\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2z=-\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

14. 设 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 求 $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$.

解: 由题, $f(0,0)=e^{\sqrt{0^2+0^4}}=1$, 且 $f(x,0)=e^{\sqrt{x^2+0^4}}=e^{|x|}$; $f(0,y)=e^{\sqrt{0^2+y^4}}=e^{y^2}$.

从而有

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{|x|}-1}{x}.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=-1$.

则 $f_x'(0,0)$ 不存在.

且同时有

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y^2}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y}=0.$$

15. 设 $f(x,y)=(x-1)(y-1)(x-2)(y-2)\cdots(x-100)(y-100)$, 求 $f_x'(1,0)$ 和 $f_{xy}''(1,1)$.

解: 由题, $f(x,0)=(x-1)(x-2)\cdots(x-100)\cdot(-1)\cdot(-2)\cdots(-100)=100!(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$.

又此时 $f(1,0)=0$, 从而有

$$\begin{aligned}f_x'(1,0)&=\lim_{x\to 1}\frac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{100!(x-1)(x-2)\cdots(x-100)}{x-1}\\&=100!\lim_{x\to 1}(x-2)(x-3)\cdots(x-100)\\&=100!\cdot(-1)\cdot(-2)\cdots(-99)=-100!\times 99!.\end{aligned}$$

类比上述过程, 由 $f(1,y)=0$ 可知

$$f_x'(1,y)=\lim_{x\to1}\frac{f(x,y)-f(1,y)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(y-1)(x-2)(y-2)\cdots(x-100)(y-100)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x-2)(x-3)\cdots(x-100)(y-1)(y-2)\cdots(y-100)$$

$$=(-1)\cdot(-2)\cdots(-99)(y-1)(y-2)\cdots(y-100)$$

$$=-99!(y-1)(y-2)\cdots(y-100).$$

由于 $f_x'(1,1)=0$, 从而

$$f_{xy}''(1,1)=\lim_{y\to1}\frac{f_x'(1,y)-f_x'(1,1)}{y-1}=\lim_{y\to1}\frac{-99!(y-1)(y-2)\cdots(y-100)}{y-1}$$

$$=-99!\lim_{y\to1}(y-2)(y-3)\cdots(y-100)$$

$$=-99!\cdot(-1)\cdot(-2)\cdots(-99)=(99!)^2.$$

16. 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 求 $f_x'(x,y)$.

解: 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, 直接求偏导有 $f_x'(x,y)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

此时考虑点 $(0,0)$ 处, 则 $f(x,0)=\sqrt{x^2+0^2}=|x|$, $f(0,0)=0$.

从而 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$, 该极限不存在, 从而 $f_x'(0,0)$ 不存在.

此时则有 $f_x'(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

【写成这样已经暗含了分母不为 0 的条件, 所以就不用再额外注明 $(x,y)\neq(0,0)$ 】

17. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

求 $f_x'(x,y)$, 并证明 $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

解: 由题, 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, 直接求偏导可得

$$f_x'(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x)$$

$$=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

再考虑 $(0,0)$ 处. 由题, 当 $x \neq 0$ 时, $f(x,0) = (x^2+0^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+0^2}} = x^2\sin\dfrac{1}{|x|}$.

从而有

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{|x|} = 0.$$

因此有

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

为讨论连续性, 应考虑 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)$.

令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 其中 $r>0$. 从而此时有 $r\to 0^+$, 且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = \lim_{r\to 0^+} 2r\cos\theta\sin\frac{1}{r} - \frac{r\cos\theta}{r}\cos\frac{1}{r} = \lim_{r\to 0^+} 2\cos\theta\cdot r\sin\frac{1}{r} - \cos\theta\cos\frac{1}{r}.$$

因为 $\lim\limits_{r\to 0^+} r\sin\dfrac{1}{r} = 0$, 且 $\lim\limits_{r\to 0^+}\cos\dfrac{1}{r}$ 不存在, 从而原极限不存在.

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)$ 不存在, 因此 $f'_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

18. 设

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

讨论 $f'_x(0,0)$ 与 $f'_y(0,0)$ 是否存在; 若存在, 求出其值.

解: 由题, $x\neq 0$ 时 $f(x,0) = \dfrac{x^3+0^2}{x^2+0^2} = x$; $y\neq 0$ 时 $f(0,y) = \dfrac{0^3+y^2}{0^2+y^2} = 1$.

从而有

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1.$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}.$$

因此 $f'_y(0,0)$ 不存在.

19. 设 $z = f(x^2-y^2)$, 且 f 二阶可导, 计算 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解: 由题, $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x^2-y^2)\cdot(2x)=2xf'(x^2-y^2)$.

从而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2x\left[f''(x^2-y^2)\cdot(-2y)\right]=-4xyf''(x^2-y^2)$.

20. 设 $z=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)$, 且 f 可微, 证明: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

证明: 由题, $\frac{\partial z}{\partial x}=y+f\left(\frac{y}{x}\right)+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=x+f'\left(\frac{y}{x}\right)$.

因此有

$$
\begin{aligned}
x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}&=x\left[y+f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)\right]+y\left[x+f'\left(\frac{y}{x}\right)\right]\\
&=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)-yf'\left(\frac{y}{x}\right)+xy+yf'\left(\frac{y}{x}\right)=z+xy.
\end{aligned}
$$

从而原式得证.

21. 设 $z=xf(x+y)+yg(x+y)$, 且 f,g 二阶可导, 证明:

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.
$$

证明: 由题, $\frac{\partial z}{\partial x}=f(x+y)+xf'(x+y)+yg'(x+y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xf'(x+y)+g(x+y)+yg'(x+y)$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'(x+y)+f'(x+y)+xf''(x+y)+yg''(x+y)=2f'(x+y)+xf''(x+y)+yg''(x+y)$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xf''(x+y)+g'(x+y)+yg''(x+y)+g'(x+y)=2g'(x+y)+xf''(x+y)+yg''(x+y)$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x+y)+xf''(x+y)+g'(x+y)+yg''(x+y)$.

因此有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=[2f'(x+y)+xf''(x+y)+yg''(x+y)]+[2g'(x+y)+xf''(x+y)+yg''(x+y)]\\
&=2[f'(x+y)+xf''(x+y)+g'(x+y)+yg''(x+y)]=2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.
\end{aligned}
$$

从而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

22. 验证函数 $z=\frac{1}{2\sqrt{\pi x}}e^{-\frac{(y-1)^2}{4x}}$ 满足方程 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

证明: 由题, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{\pi x}}e^{-\frac{(y-1)^2}{4x}}\cdot\left(-\frac{1}{4x}\right)\cdot 2(y-1)=-\frac{y-1}{4\sqrt{\pi x^3}}e^{-\frac{(y-1)^2}{4x}}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{(y-1)^2}{4x}}+\frac{1}{2\sqrt{\pi x}}e^{-\frac{(y-1)^2}{4x}}\cdot\left[-\frac{(y-1)^2}{4}\right]\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\&=-\frac{1}{4\sqrt{\pi x^3}}e^{-\frac{(y-1)^2}{4x}}\left[1-\frac{(y-1)^2}{2x}\right].\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=-\frac{1}{4\sqrt{\pi x^3}}\left[e^{-\frac{(y-1)^2}{4x}}+(y-1)e^{-\frac{(y-1)^2}{4x}}\cdot\left(-\frac{1}{4x}\right)\cdot 2(y-1)\right]\\&=-\frac{1}{4\sqrt{\pi x^3}}e^{-\frac{(y-1)^2}{4x}}\left[1-\frac{(y-1)^2}{2x}\right]=\frac{\partial z}{\partial x}.\end{aligned}$$

从而结论得证.

23. 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$, 求证: $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

证明: 由题, $\frac{\partial z}{\partial x}=-e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=-e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{1}{y^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$.

因此有

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}+e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z.$$

24. 求下列函数的全微分:

(1) $z=(1+x+y)^{xy}\ (x+y+1>0)$;　　(2) $u=(x+\sin y)^z\ (x>1)$;

(3) $u=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}$, 求 $\mathrm{d}u\big|_{(1,1,1)}$;　　(4) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 求 $\mathrm{d}u\big|_{(1,2,-2)}$.

解: (1) 由于 $z=(1+x+y)^{xy}=e^{xy\ln(1+x+y)}$, 从而有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy\ln(1+x+y)}\left[y\ln(1+x+y)+xy\cdot\frac{1}{1+x+y}\right]=y(1+x+y)^{xy}\left[\ln(1+x+y)+\frac{x}{1+x+y}\right].$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy\ln(1+x+y)}\left[x\ln(1+x+y)+xy\cdot\frac{1}{1+x+y}\right]=x(1+x+y)^{xy}\left[\ln(1+x+y)+\frac{y}{1+x+y}\right].$$

则全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=y(1+x+y)^{xy}\left[\ln(1+x+y)+\frac{x}{1+x+y}\right]\mathrm{d}x+y(1+x+y)^{xy}\left[\ln(1+x+y)+\frac{x}{1+x+y}\right]\mathrm{d}y.$$

(2) 由于 $u=(x+\sin y)^z=e^{z\ln(x+\sin y)}$, 从而有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{z\ln(x+\sin y)}z\cdot\frac{1}{x+\sin y}=\frac{z}{x+\sin y}(x+\sin y)^z=z(x+\sin y)^{z-1}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{z\ln(x+\sin y)}z\cdot\frac{1}{x+\sin y}\cos y=\frac{z\cos y}{x+\sin y}(x+\sin y)^z=z\cos y(x+\sin y)^{z-1}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{z\ln(x+\sin y)}\ln(x+\sin y)=(x+\sin y)^z\ln(x+\sin y).$$

则全微分

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z=z(x+\sin y)^{z-1}\mathrm{d}x+z\cos y(x+\sin y)^{z-1}\mathrm{d}y+(x+\sin y)^z\ln(x+\sin y)\mathrm{d}z.$$

(3) 由于 $u=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{\ln x-\ln y}{z}}=x^{\frac{1}{z}}y^{-\frac{1}{z}}$, 从而有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^{-\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z}x^{\frac{1}{z}-1}=x^{\frac{1}{z}-1}y^{-\frac{1}{z}}z^{-1};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{1}{z}}\cdot\left(-\frac{1}{z}\right)y^{-\frac{1}{z}-1}=-x^{\frac{1}{z}}y^{-\frac{1}{z}-1}z^{-1}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{\frac{\ln x-\ln y}{z}}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)(\ln x-\ln y)=\frac{\ln y-\ln x}{z^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}.$$

因此将 $(1,1,1)$ 代入, 求得 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=1$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=-1$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=0$.

则全微分 $\left.\mathrm{d}u\right|_{(1,1,1)}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}\mathrm{d}y+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$

(4) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

将 $(1,2,-2)$ 代入, 求得 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,-2)}=\frac{1}{3}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,-2)}=\frac{2}{3}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,-2)}=-\frac{2}{3}$.

则全微分 $\left.\mathrm{d}u\right|_{(1,2,-2)}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,-2)}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,-2)}\mathrm{d}y+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,-2)}\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\mathrm{d}y-\frac{2}{3}\mathrm{d}z.$

25. 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续. 证明: $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微 $\iff\varphi(0,0)=0$.

证明: 先证充分性. 此时 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

因此 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\varphi(x,0)}{x}$ 存在.

因为 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x,0)=\varphi(0,0)$.

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|\varphi(x,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x,0)=\varphi(0,0)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|\varphi(x,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}-\varphi(x,0)=-\varphi(0,0)$.

因此由极限存在则 $\varphi(0,0)=-\varphi(0,0)$, 则可得 $\varphi(0,0)=0$.

再证充分性. 此时 $\varphi(0,0)=0$.

由上述过程, 有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|\varphi(x,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|\varphi(x,0)}{x}=0$, 即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\varphi(x,0)}{x}=0$.

从而 $f'_x(0,0)=0$, 类似地, $f'_y(0,0)=0$. 此时有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

又因为 $|x-y|\le|x|+|y|\le 2\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}=\sqrt{2(x^2+y^2)}$, 从而 $\left|\dfrac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\sqrt{2}|\varphi(x,y)|$,

又因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=\varphi(0,0)=0$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|\varphi(x,y)|=0$.

从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

综上, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微 $\iff$ $\varphi(0,0)=0$.

26. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

试讨论函数 f 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性和可微性, 并说明其一阶偏导数在点 $(0,0)$ 处是否连续.

解: 先讨论连续性. 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 此时 $r>0$. 从而当 $(x,y)\to(0,0)$ 时有 $r\to 0^+$.

于是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{r\to 0^+}r^2\sin\dfrac{1}{r}=0$.

因此有 $f(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$, 从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

再讨论可偏导性. 则此时有 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{|x|}=0$.

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\sin\dfrac{1}{|y|}}{y}=\lim_{x\to 0}y\sin\frac{1}{|y|}=0.$$

从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数均存在, 即关于 x,y 均可偏导.

最后讨论可微性. 此时考虑

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0^+}r\sin\frac{1}{r}=0.$$

于是 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

再讨论一阶偏导数在 $(0,0)$ 处的连续性. 当 $(x,y)\neq 0$ 时有

$$\begin{aligned}f'_x(x,y)&=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x)\\&=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

此时对 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f'_x(x,y)$, 考虑沿直线 $y=0$ 趋于 $(0,0)$ 点, 则有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f'_x(x,y)=\lim_{x\to 0}2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to 0}2x\sin\frac{1}{|x|}-\frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{|x|}.$$

又因为 $x\to 0^+$ 时 $\lim\limits_{x\to 0^+}2x\sin\dfrac{1}{|x|}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|}\cos\dfrac{1}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在.

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f'_x(x,y)$ 不存在, 则 $f'_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

同理可得 $f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

27. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性和可微性.

解: (1) 先讨论连续性. 由于 $x^2+y^4\geq 2\sqrt{x^2y^4}=2|x|y^2$, 从而有 $\left|\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}\right|\leq\left|\dfrac{xy^3}{2|x|y^2}\right|=\dfrac{|y|}{2}$ 成立.

又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0$, 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}=0$.

因此有 $f(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$, 从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

再讨论可偏导性. 则此时有 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$.

$f_y'(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-0}{y}=0$.

从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数均存在, 即关于 x,y 均可偏导.

最后讨论可微性. 此时考虑

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{xy^3}{x^2+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

考虑沿曲线 $x=y^2$ 趋于 $(0,0)$ 点, 则有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2y^3}{(y^4+y^4)\sqrt{y^4+y^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{2|y|\sqrt{y^2+1}}.$$

又 $y\to 0^+$ 时 $\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{y}{2|y|\sqrt{y^2+1}}=\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{1}{2\sqrt{y^2+1}}=\dfrac{1}{2}$, 该极限值不为 0.

于是 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

28. 设 $z=f(x,y)$ 可微, 且 $\mathrm{d}z=\dfrac{3(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)}{(x-y)^2}$, $f(1,0)=1$. 求 $f(x,y)$ 的表达式.

解: 由题 $\mathrm{d}z=\dfrac{-3y}{(x-y)^2}\mathrm{d}x+\dfrac{3x}{(x-y)^2}\mathrm{d}y$. 从而有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-3y}{(x-y)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3x}{(x-y)^2}$.

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-3y}{(x-y)^2}$, 对 x 积分有

$$z=\int\frac{-3y}{(x-y)^2}\mathrm{d}x=\frac{3y}{x-y}+\varphi(y).$$

上式对 y 求偏导数有

$$\frac{3x}{(x-y)^2}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3(x-y)+3y}{(x-y)^2}+\varphi'(y)=\frac{3x}{(x-y)^2}+\varphi'(y).$$

解得 $\varphi'(y)=0$, 从而有 $\varphi(y)=C$, 且 C 为任意常数.

因为 $f(1,0)=1$, 将其代入 $f(x,y)=z=\dfrac{3y}{x-y}+C$, 有 $1=0+C$, 从而 $C=1$.

综上, $z=f(x,y)=\dfrac{3y}{x-y}+1=\dfrac{x+2y}{x-y}$.

29. 设 $u=u(x,y)$ 可微, 且 $\mathrm{d}u=(\cos x+2xy^3)\mathrm{d}x+(ye^y+3x^2y^2)\mathrm{d}y$, 求 $u(x,y)$ 的表达式.

解: 由题有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x+2xy^3$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=ye^y+3x^2y^2$.

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x+2xy^3$, 对 x 积分有

$$u(x,y)=\int(\cos x+2xy^3)\mathrm{d}x=\sin x+y^3x^2+\varphi(y).$$

上式对 y 求偏导数有

$$ye^y+3x^2y^2=\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2x^2+\varphi'(y).$$

解得 $\varphi'(y)=ye^y$. 从而 $\varphi(y)=\displaystyle\int ye^y\mathrm{d}y=\int y\mathrm{d}e^y=ye^y-\int e^y\mathrm{d}y=ye^y-e^y+C$.

综上, $u(x,y)=\sin x+y^3x^2+\varphi(y)=\sin x+y^3x^2+ye^y-e^y+C$, 其中 C 为任意常数.

30. 设 $u=u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且

$$\mathrm{d}u=\frac{(x+ay)\mathrm{d}x+(-x+by)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}\ (x>0).$$

求: (1) 常数 a,b 的值; (2) $u(x,y)$ 的表达式 $(x>0)$.

解: (1) 由题, 记 $P(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x+ay}{x^2+4y^2}$, $Q(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-x+by}{x^2+4y^2}$.

从而有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{a(x^2+4y^2)-(x+ay)\cdot 8y}{(x^2+4y^2)^2}=\dfrac{ax^2-8xy-4ay^2}{(x^2+4y^2)^2}$,

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{-(x^2+4y^2)-(-x+by)\cdot 2x}{(x^2+4y^2)^2}=\dfrac{x^2-2bxy-4y^2}{(x^2+4y^2)^2}$.

由于 $u=u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 对满足定义的任意 x,y 均成立.

此时有 $ax^2-8xy-4ay^2=x^2-2bxy-4y^2$, 即 $(a-1)x^2+4(1-a)y^2+(2b-8)xy=0$.

因此有 $a-1=0$, $2b-8=0$. 从而解得 $a=1,b=4$.

(2) 由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x+y}{x^2+4y^2}$, 对 x 积分有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int\frac{x+y}{x^2+4y^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+4y^2}\mathrm{d}(x^2+4y^2)+y\int\frac{1}{x^2+4y^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2+4y^2)+\frac{y\cdot 2y}{4y^2}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{2y}\right)^2+1}\mathrm{d}\frac{x}{2y}\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2+4y^2)+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2y}+\varphi(y).\end{aligned}$$

上式对 y 求偏导数有

$$\frac{-x+4y}{x^2+4y^2}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8y}{x^2+4y^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2y}\right)^2}\cdot\frac{-1}{(2y)^2}\cdot x\cdot 2+\varphi'(y)$$

$$=\frac{4y}{x^2+4y^2}-\frac{x}{x^2+4y^2}+\varphi'(y)=\frac{-x+4y}{x^2+4y^2}+\varphi'(y).$$

解得 $\varphi'(y)=0$, 从而有 $\varphi(y)=C$, 且 C 为常数.

综上, $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+4y^2)+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2y}+C$, 其中 C 为任意常数.

9.4 多元复合函数的偏导数 习题

31. 求下列函数的偏导数:

(1) $z=\sqrt{u^2+v^2}$, $u=x\sin y$, $v=e^{xy}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$;

(2) $z=e^{uv}$, $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\arctan\frac{y}{x}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$;

(3) $z=\ln(x^2+y^2)$, $x=t\cos t$, $y=-\sin t$, 求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$;

(4) $z=uv\arctan\frac{u}{v}$, $u=x+y$, $v=x-y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解: (1) 由题有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2u}{2\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\sin y+\frac{2v}{2\sqrt{u^2+v^2}}\cdot ye^{xy}$$

$$=\frac{u\sin y}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{vye^{xy}}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{u\sin y+vye^{xy}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$=\frac{x\sin^2 y+ye^{2xy}}{z}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2u}{2\sqrt{u^2+v^2}}\cdot x\cos y+\frac{2u}{2\sqrt{u^2+v^2}}\cdot xe^{xy}$$

$$=\frac{ux\cos y}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{vxe^{xy}}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{ux\cos y+vxe^{xy}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$=\frac{x^2\sin y\cos y+xe^{2xy}}{z}.$$

(2) 由题有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=ve^{uv}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}+ue^{uv}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}\cdot y$$

$$=ve^{uv}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}-ue^{uv}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{e^{uv}}{x^2+y^2}(xv-yu).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=ve^{uv}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}+ue^{uv}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=ve^{uv}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}+ue^{uv}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{e^{uv}}{x^2+y^2}(yv+xu).$$

(3) 【法 1】直接得到 z 和 t 的关系式.

由题将 $x=t\cos t,\ y=-\sin t$ 代入 z 中有 $z=\ln(t^2\cos^2 t+\sin^2 t)$.

从而

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{2t\cos^2 t+t^2\cdot 2\cos t(-\sin t)+2\sin t\cos t}{t^2\cos^2 t+\sin^2 t}=\frac{2t\cos^2 t+2(1-t^2)\cos t\sin t}{t^2\cos^2 t+\sin^2 t}.$$

【法 2】利用复合函数偏导的链式法则.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot(\cos t-t\sin t)+\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot(-\cos t)\\&=\frac{2x(\cos t-t\sin t)-2y\cos t}{x^2+y^2}=\frac{2t\cos t(\cos t-t\sin t)+2\sin t\cos t}{t^2\cos^2 t+\sin^2 t}\\&=\frac{2t\cos^2+2(1-t^2)\sin t\cos t}{t^2\cos^2 t+\sin^2 t}.\end{aligned}$$

(4) 由题有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\left(v\arctan\frac{u}{v}+uv\frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot\frac{1}{v}\right)\cdot 1+\left(u\arctan\frac{u}{v}+uv\frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot\frac{-1}{v^2}\cdot u\right)\cdot 1$$

$$=v\arctan\frac{u}{v}+\frac{uv^2}{u^2+v^2}+u\arctan\frac{u}{v}-\frac{u^2v}{u^2+v^2}$$

$$=(u+v)\arctan\frac{u}{v}+\frac{uv(v-u)}{u^2+v^2}$$

$$=(x+y+x-y)\arctan\frac{x+y}{x-y}+\frac{(x+y)(x-y)(x-y-x-y)}{(x+y)^2+(x-y)^2}$$

$$=2x\arctan\frac{x+y}{x-y}-\frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\left(v\arctan\frac{u}{v}+uv\frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot\frac{1}{v}\right)\cdot 1+\left(u\arctan\frac{u}{v}+uv\frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot\frac{-1}{v^2}\cdot u\right)\cdot(-1)$$

$$=v\arctan\frac{u}{v}+\frac{uv^2}{u^2+v^2}-u\arctan\frac{u}{v}+\frac{u^2v}{u^2+v^2}$$

$$=(v-u)\arctan\frac{u}{v}+\frac{uv(v+u)}{u^2+v^2}$$

$$=(x-y-x-y)\arctan\frac{x+y}{x-y}+\frac{(x+y)(x-y)(x-y+x+y)}{(x+y)^2+(x-y)^2}$$

$$=-2y\arctan\frac{x+y}{x-y}+\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}.$$

32. 设 $z=2\ln\dfrac{x+y}{x-y}$, $x=\sec t$, $y=2\sin t$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}$.

【法 1】直接得到 z 和 t 的关系式.

由题将 $x=\sec t$, $y=2\sin t$ 代入 z 中有

$$z=2\ln\frac{\sec t+2\sin t}{\sec t-2\sin t}=2\ln\frac{1+2\sin t\cos t}{1-2\sin t\cos t}=2\ln\frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}.$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=2\cdot\frac{1-\sin 2t}{1+\sin 2t}\cdot\frac{2\cos 2t(1-\sin 2t)-(1+\sin 2t)(-2\cos 2t)}{(1-\sin 2t)^2}$$

$$=\frac{2(2\cos 2t+2\cos 2t)}{(1+\sin 2t)(1-\sin 2t)}=\frac{8\cos 2t}{\cos^2 2t}=8\sec 2t.$$

代入 $t=\dfrac{\pi}{3}$, 则

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=8\sec\frac{2\pi}{3}=\frac{8}{\cos\frac{2\pi}{3}}=\frac{8}{-\frac{1}{2}}=-16.$$

【法 2】利用复合函数偏导的链式法则.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$=2\cdot\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2}\cdot(\sec t\tan t)+2\cdot\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{(x-y)+(x+y)}{(x-y)^2}\cdot(2\cos t)$$

$$=\frac{2(-2y)}{(x+y)(x-y)}\sec t\tan t+\frac{2\cdot 2x}{(x+y)(x-y)}2\cos t=\frac{-4y\sec t\tan t+8x\cos t}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{-8\sin t\sec t\tan t+8}{\sec^2 t-4\sin^2 t}=\frac{-8\sin^2 t+8\cos^2 t}{1-4\sin^2 t\cos^2 t}.$$

代入 $t=\frac{\pi}{3}$, 则

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=\frac{8\left(\frac{1}{2}\right)^2-8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{1-4\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2-6}{1-\frac{3}{4}}=\frac{-4}{\frac{1}{4}}=-16.$$

33. 设 $z=f(u,x+y)$, $u=xe^y$, 且 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解: 由题, $\frac{\partial u}{\partial x}=e^y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xe^y$. 有 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\cdot 1=e^yf_1'+f_2'$, 从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=e^yf_1'+e^y\frac{\partial f_1'}{\partial y}+\frac{\partial f_2'}{\partial y}=e^yf_1'+e^y\left(f_{11}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{12}''\cdot 1\right)+\left(f_{21}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{22}''\cdot 1\right)\\&=e^yf_1'+e^y\cdot xe^yf_{11}''+e^yf_{12}''+xe^yf_{21}''+f_{22}''\\&=e^yf_1'+xe^{2y}f_{11}''+(1+x)e^yf_{12}''+f_{22}''.\end{aligned}$$

34. 设 $z=f(x^2-y^2,x\sin y)$, 且 f 具有二阶连续偏导数, 计算 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解: 由题, 令 $u=x^2-y^2$, $v=x\sin y$.

因此有 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot\sin y=2xf_1'+\sin yf_2'$. 从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2x\frac{\partial f_1'}{\partial y}+\cos yf_2'+\sin y\frac{\partial f_2'}{\partial y}\\&=\cos yf_2'+2x\left(f_{11}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{12}''\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\sin y\left(f_{21}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{22}''\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\&=\cos yf_2'+2x(-2yf_{11}''+x\cos yf_{12}'')+\sin y(-2yf_{21}''+x\cos yf_{22}'')\\&=\cos yf_2'-4xyf_{11}''+(2x^2\cos y-2y\sin y)f_{12}''+x\sin y\cos yf_{22}''.\end{aligned}$$

35. 设 $z=f\left(x^2+y^2,\frac{y}{x}\right)$, 且 f 具有二阶连续偏导数, 计算 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解: 由题, 令 $u=x^2+y^2$, $v=\frac{y}{x}$.

因此有 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot y=2xf_1'-\frac{y}{x^2}f_2'$.

从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)&=2x\frac{\partial f_1'}{\partial y}-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^2}\frac{\partial f_2'}{\partial y}\\&=-\frac{1}{x^2}f_2'+2x\left(f_{11}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{12}''\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{y}{x^2}\left(f_{21}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{22}''\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\&=-\frac{1}{x^2}f_2'+2x\left(2yf_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''\right)-\frac{y}{x^2}\left(2yf_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''\right)\\&=-\frac{1}{x^2}f_2'+4xyf_{11}''+2\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)f_{12}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''.\end{aligned}$$

36. 设 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+yg\left(\frac{x}{y}\right)$, 且 f,g 具有二阶连续导数, 证明:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

证明: 由题有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot y+yg'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+g'\left(\frac{x}{y}\right).$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot y+\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot y+g''\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\\&=\frac{y^2}{x^3}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{y}g''\left(\frac{x}{y}\right).\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}+g\left(\frac{x}{y}\right)+yg'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot x=f'\left(\frac{y}{x}\right)+g\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}g'\left(\frac{x}{y}\right).$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=f''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}+g'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot x+\frac{x}{y^2}g'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}g''\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot x\\&=\frac{1}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y^3}g''\left(\frac{x}{y}\right).\end{aligned}$$

由上结果可得

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y}g''\left(\frac{x}{y}\right)=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

因此原命题得证.

37. 设函数 $z=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

证明: 函数 $z=f(x^2-y^2,2xy)$ 也满足拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

证明: 记 $u=x^2-y^2, v=2xy$, 则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2x\frac{\partial z}{\partial u}+2y\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=2\frac{\partial z}{\partial u}+2x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2y\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\&=2\frac{\partial z}{\partial u}+4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+4xy\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2y\frac{\partial z}{\partial u}+2x\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=-2\frac{\partial z}{\partial u}+(-2y)\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=-2\frac{\partial z}{\partial u}+4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-4xy\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

由于 z 有二阶连续偏导数, 故 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$.

从而有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4x^2+4y^2)\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0$, 因此原命题得证.

38. 设 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 且满足 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. 如果引进变换 $\begin{cases}u=x-2y,\\v=x+3y,\end{cases}$ 试将上面方程变换为关于 u,v 的方程.

解: 由于 z 有二阶连续偏导数, 故 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$.

且由变换可知, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=3$.

根据复合函数求导的链式法则, 可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+3\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+3\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-12\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}.$$

将上述结果代入 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 中, 则有

$$(6-4-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(12+1+12)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+3-9)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

综上可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

39. 设 $z=f(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 求常数 a 的值, 使得变换 $\begin{cases}u=x+2y,\\ v=x+ay\end{cases}$ 把方程

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

解: 由于 z 有二阶连续偏导数, 故 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$.

且由变换可知, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2$, $\frac{\partial v}{\partial y}=a$.

根据复合函数求导的链式法则, 可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+(a+2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}.$$

将上述结果代入 $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 中, 则有

$$(2+2-4)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(4+a+2-4a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(2+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

由题可知 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$. 因此有

$$\begin{cases}2+a-a^2=(2-a)(a+1)=0,\\ 4+a+2-4a=6-3a\neq 0.\end{cases}$$

解得 $a=-1$.

40. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微, 且 $f(1,1)=1$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$. 若 $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\varphi(x)]^3\right|_{x=1}$.

解: 由于 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\varphi(x)]^3\right|_{x=1}=3\varphi^2(1)\left.\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=3\varphi^2(1)\left.\frac{\mathrm{d}f(x,f(x,x))}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$.

因为 $\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$, $f_1'(1,1)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$, $f_2'(1,1)=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$.

又因为

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}f(x,f(x,x))}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}&=\left.f_1'(x,f(x,x))\right|_{x=1}\cdot 1+\left.f_2'(x,f(x,x))\right|_{x=1}\cdot\left.\frac{\partial f(x,x)}{\partial x}\right|_{x=1}\\&=f_1'(1,1)+f_2'(1,1)\cdot\left[\left.f_1'(x,x)\right|_{x=1}+\left.f_2'(x,x)\right|_{x=1}\right]\\&=2+3[f_1'(1,1)+f_2'(1,1)]=2+3\times(2+3)=17.\end{aligned}$$

从而 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\varphi(x)]^3\right|_{x=1}=3\times1\times17=51$.

41. 使用一阶微分的形式不变性求下列函数的偏导数:

(1) 设 $x^2+y^2+2z^2-2x+6z=9$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$;

(2) 设 $z=f(e^{xy},x^2-y^2)$, 且 f 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解: (1) 对等式两边求微分有

$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+4z\mathrm{d}z-2\mathrm{d}x+6\mathrm{d}z=0.$$

从而有 $(4z+6)\mathrm{d}z=(2-2x)\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$, 即 $\mathrm{d}z=\frac{1-x}{2z+3}\mathrm{d}x-\frac{y}{2z+3}\mathrm{d}y$.

因此 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-x}{2z+3}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{2z+3}$.

(2) 设 $u=e^{xy}$, $v=x^2-y^2$, 则 $\mathrm{d}u=e^{xy}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$, $\mathrm{d}v=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v&=f_1'[e^{xy}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)]+f_2'(2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y)\\&=(ye^{xy}f_1'+2xf_2')\mathrm{d}x+(xe^{xy}f_1'-2yf_2')\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因此 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}f_1'+2xf_2'$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}f_1'-2yf_2'$.

9.5 隐函数的偏导数 习题

42. 已知方程

$$x+y-z-e^{zx}+e^{-x-y}=4. \tag{*}$$

(1) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(*)$ 所确定, 求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,-2)}$;

(2) 若函数 $y=y(z,x)$ 由方程 $(*)$ 所确定, 求 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{(1,1,-2)}$.

解: (1) 由题, 方程两边同时对 x 求偏导, 有

$$1-\frac{\partial z}{\partial x}-e^{zx}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)-e^{-x-y}=0.$$

整理有 $(1+xe^{zx})\dfrac{\partial z}{\partial x}=1-ze^{zx}-e^{-x-y}$.

代入 $x=1$, $y=1$, $z=-2$ 则有

$$(1+e^{-2})\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,-2)}=1+2e^{-2}-e^{-2}=1+e^{-2}.$$

解得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,-2)}=1$.

(2) 由题, 方程两边同时对 x 求偏导, 有

$$1+\frac{\partial y}{\partial x}-ze^{zx}+e^{-x-y}\left(-1-\frac{\partial y}{\partial x}\right)=0.$$

整理有 $(1-e^{-x-y})\dfrac{\partial y}{\partial x}=ze^{zx}+e^{-x-y}-1$.

代入 $x=1$, $y=1$, $z=-2$ 则有

$$(1-e^{-2})\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(1,1,-2)}=-2e^{-2}+e^{-2}-1=-1-e^{-2}.$$

解得 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{(1,1,-2)}=\dfrac{-1-e^{-2}}{1-e^{-2}}=\dfrac{1+e^2}{1-e^2}$.

43. 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解: 令 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\arctan\dfrac{y}{x}=0$.

从而

$$F'_x(x,y)=\frac{2x}{2(x^2+y^2)}-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}\cdot y=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

$$F'_y(x,y)=\frac{2y}{2(x^2+y^2)}-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

由隐函数定理则有

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{\frac{x+y}{x^2+y^2}}{\frac{y-x}{x^2+y^2}}=\frac{x+y}{x-y}.$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}=\frac{-2y+2xy'}{(x-y)^2}=\frac{-2y+2x\frac{x+y}{x-y}}{(x-y)^2}$$
$$=\frac{-2y(x-y)+2x(x+y)}{(x-y)^3}=\frac{2x^2+2y^2}{(x-y)^3}.$$

44. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $xyze^{x+y+z}=1$ 所确定的函数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: 由题, 方程两边同时对 x 求偏导, 有

$$yze^{x+y+z}+xy\frac{\partial z}{\partial x}e^{x+y+z}+xyze^{x+y+z}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0.$$

从而有 $(xye^{x+y+z}+xyze^{x+y+z})\dfrac{\partial z}{\partial x}=-yze^{x+y+z}-xyze^{x+y+z}$.

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{yz+xyz}{xy+xyz}=-\dfrac{z+xz}{x+xz}$.

方程两边同时对 y 求偏导, 有

$$xze^{x+y+z}+xy\frac{\partial z}{\partial y}e^{x+y+z}+xyze^{x+y+z}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

从而有 $(xye^{x+y+z}+xyze^{x+y+z})\dfrac{\partial z}{\partial y}=-xze^{x+y+z}-xyze^{x+y+z}$.

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{xz+xyz}{xy+xyz}=-\dfrac{z+yz}{y+yz}$.

因为 $x(1+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}=-z(1+x)$, 方程两边同时对 x 求偏导, 有

$$(1+z)\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+x(1+z)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial z}{\partial x}(1+x)-z.$$

从而有 $x(1+z)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(1+x)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(1+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2-z.$

因此有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{1}{x(1+z)}\cdot\left[(-2-x-z)\frac{-z(1+x)}{x(1+z)}-x\left(-\frac{z+xz}{x+xz}\right)^2-z\right]\\
&=\frac{1}{x(1+z)}\left[\frac{z(x+z+2)(1+x)}{x(1+z)}-\frac{xz^2(1+x)^2}{x^2(1+z)^2}-z\right]\\
&=\frac{1}{x(1+z)}\cdot\frac{z(x+z+2)(1+x)(1+z)-z^2(1+x)^2-zx(1+z)^2}{x(1+z)^2}\\
&=\frac{z(1+x)[(x+z+2)(1+z)-z(1+x)]-zx(1+z)^2}{x^2(1+z)^3}\\
&=\frac{z(1+x)[(x+1)+(z+1)^2]-zx(1+z)^2}{x^2(1+z)^3}\\
&=\frac{z(1+x)(x+1)+z(1+x)(z+1)^2-zx(z+1)^2}{x^2(1+z)^3}\\
&=\frac{z(1+x)^2+z(z+1)^2}{x^2(1+z)^3}.
\end{aligned}$$

类似地对方程 $x(1+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}=-z(1+x)$, 方程两边同时对 y 求偏导, 有

$$x\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+x(1+z)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-(1+x)\frac{\partial z}{\partial y}.$$

从而有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{1}{x(1+z)}\left[-x\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-(1+x)\frac{\partial z}{\partial y}\right]\\
&=\frac{1}{x(1+z)}\left[-x\frac{z(1+y)}{y(1+z)}\cdot\frac{z(1+x)}{x(1+z)}+(1+x)\frac{z(1+y)}{y(1+z)}\right]\\
&=\frac{(1+y)(1+x)z}{x(1+z)^2}\left[-\frac{z}{y(1+z)}+\frac{1}{y}\right]=\frac{(1+x)(1+y)z}{xy(1+z)^2}\left(1-\frac{z}{1+z}\right)\\
&=\frac{(1+x)(1+y)z}{xy(1+z)^3}.
\end{aligned}$$

45. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-3xyz=a^3\ (a\neq 0)$ 所确定的函数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解: 由题, 方程两边同时对 x 求偏导, 有

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

从而有 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy}$.

方程两边同时对 y 求偏导, 有

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial y}-3xz-3xy\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

从而有 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy}$.

因为 $(z^2-xy)\frac{\partial z}{\partial x}=yz$, 方程两边同时对 y 求偏导, 有

$$\left(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)\frac{\partial z}{\partial x}+(z^2-xy)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z+y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

从而有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{1}{z^2-xy}\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)\\&=\frac{1}{z^2-xy}\left(z+\frac{xyz}{z^2-xy}-2z\frac{xz}{z^2-xy}\cdot\frac{yz}{z^2-xy}+x\frac{yz}{z^2-xy}\right)\\&=\frac{1}{z^2-xy}\cdot\frac{z(z^2-xy)^2+2xyz(z^2-xy)-2xyz^3}{(z^2-xy)^2}\\&=\frac{(z^2-xy)(z^3-xyz+2xyz)-2xyz^3}{(z^2-xy)^3}=\frac{(z^2-xy)z(z^2+xy)-2xyz^3}{(z^2-xy)^3}\\&=\frac{z^5-x^2y^2z-2xyz^3}{(z^2-xy)^3}.\end{aligned}$$

46. 设 $u=f(x,y,z)$, $g(x^2,e^y,z)=0$, $y=\sin x$, 其中 f,g 均有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial g}{\partial z}\neq 0$, 求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解: 由题, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'+f_2'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f_3'\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

此时对 $g(x^2,e^y,z)=0$, 对 x 求导有 $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=2xg_1'+e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}g_2'+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}g_3'=0$.

又因为 $y=\sin x$, 有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$, 且 $g_3'=\frac{\partial g}{\partial z}\neq 0$, 从而

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{2xg_1'+e^y\cos xg_2'}{g_3'}.$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'+f_2'\cos x-\frac{f_3'}{g_3'}(2xg_1'+e^{\sin x}\cos xg_2').$$

47. 设 $u=f(x,y,z)$, $g(x,y)=0$, $h(x,z)=0$, 且 f,g,h 有一阶连续偏导数. 若 $g'_y(x,y)\neq 0$, $h'_z(x,z)\neq 0$. 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解: 由题, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'_1+f'_2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f'_3\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

对 $g(x,y)=0$, 对 x 求导有 $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=g'_x+g'_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$, 从而 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{g'_x}{g'_y}$.

对 $h(x,z)=0$, 对 x 求导有 $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}=h'_x+h'_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$, 从而 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{h'_x}{h'_z}$.

从而 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'_1-\dfrac{g'_x}{g'_y}f'_2-\dfrac{h'_x}{h'_z}f'_3$.

48. 设 $u=u(x,y)$ 是由方程 $u=f(u)+\displaystyle\int_y^x g(t)\mathrm{d}t$ 所确定的隐函数, 且 f',g 连续, $f'\neq 1$. 若 $z=\varphi(u)$ 连续可导, 求 $g(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+g(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解: 由题可知, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+g(x)$, $\quad\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}-g(y)$.

则有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{g(x)}{1-f'(u)}$, $\quad\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-g(y)}{1-f'(u)}$.

从而 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\varphi'(u)g(x)}{1-f'(u)}$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\varphi'(u)g(y)}{1-f'(u)}$.

因此

$$g(y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{g(y)\varphi'(u)g(x)}{1-f'(u)}-\frac{g(x)\varphi'(u)g(y)}{1-f'(u)}=0.$$

49. 设 $\begin{cases}u^2-v+x=0,\\ u+v^2-y=0,\end{cases}$ 求 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}v$.

解: 先在方程组两边分别对 x 求偏导, 有

$$\begin{cases}2u\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x}+1=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}$$

此时解得 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-2v}{4uv+1},\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{1}{4uv+1}.\end{cases}$

再在方程组两边分别对 y 求偏导, 有

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial y} - 1 = 0. \end{cases}$$

此时解得 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{4uv+1}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{2u}{4uv+1}. \end{cases}$

因此

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y = -\frac{2v}{4uv+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{4uv+1}\mathrm{d}y.$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{1}{4uv+1}\mathrm{d}x + \frac{2u}{4uv+1}\mathrm{d}y.$$

50. 设 $\begin{cases} x = e^r\cos\theta, \\ y = e^r\sin\theta, \end{cases}$ 求:

(1) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ 和 $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$; (2) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \cdot \dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$.

解: (1) 由题, $x'_r = \dfrac{\partial x}{\partial r} = e^r\cos\theta$, $x'_\theta = \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -e^r\sin\theta$; $y'_r = \dfrac{\partial y}{\partial r} = e^r\sin\theta$, $y'_\theta = \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = e^r\cos\theta$.

此时有 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta \end{vmatrix} = e^r\cos\theta \cdot e^r\cos\theta - (e^r\sin\theta \cdot e^r\sin\theta) = e^{2r}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = e^{2r}$.

因为 $\dfrac{y}{x} = \dfrac{e^r\sin\theta}{e^r\cos\theta} = \tan\theta$, 则 $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$.

且 $x^2+y^2 = e^{2r}\cos^2\theta + e^{2r}\sin^2\theta = e^{2r}$, 则 $r = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

因此 $r'_x = \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{2x}{2(x^2+y^2)} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $r'_y = \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{2y}{2(x^2+y^2)} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$;

$\theta'_x\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \cdot y = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\theta'_y = \dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

此时有 $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} r'_x & r'_y \\ \theta'_x & \theta'_y \end{vmatrix} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{x^2+y^2} \cdot \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

(2) 由(1)可知, $x^2+y^2 = e^{2r}$.

因此 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \cdot \dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \dfrac{e^{2r}}{x^2+y^2} = \dfrac{e^{2r}}{e^{2r}} = 1$.

51. 设 $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 均有连续偏导数, 且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, 求 u,v 作为 x,y 的反函数时的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$; 并验证 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$.

解: 对 $F(x,y,u,v) = x - x(u,v) = 0$, 此时有 $F'_u = -\dfrac{\partial x}{\partial u}, F'_v = -\dfrac{\partial x}{\partial v}$.

对 $G(x,y,u,v) = y - y(u,v) = 0$, 此时有 $G'_u = -\dfrac{\partial y}{\partial u}, G'_v = -\dfrac{\partial y}{\partial v}$.

此时对应 Jacobi 行列式 $J = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}$.

又因为 $F'_x = 1 = G'_y, F'_y = 0 = G'_x$, 从而

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_v \\ G'_x & G'_v \end{vmatrix} = -\frac{\partial y}{\partial v}; \qquad \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_x \\ G'_u & G'_x \end{vmatrix} = \frac{\partial y}{\partial u}.$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = \begin{vmatrix} F'_y & F'_v \\ G'_y & G'_v \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial v}; \qquad \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_y \\ G'_u & G'_y \end{vmatrix} = -\frac{\partial x}{\partial u}.$$

则 $u'_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{J} \cdot \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \dfrac{\frac{\partial y}{\partial v}}{J}$; $\quad u'_y = \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{J} \cdot \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = -\dfrac{\frac{\partial x}{\partial v}}{J}$;

$v'_x = \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{J} \cdot \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = -\dfrac{\frac{\partial y}{\partial u}}{J}$; $\quad v'_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{J} \cdot \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = \dfrac{\frac{\partial x}{\partial u}}{J}$.

因此有 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \dfrac{\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}}{J^2} - \dfrac{\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}{J^2} = \dfrac{J}{J^2} = \dfrac{1}{J}$.

又因为 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_x & y'_v \end{vmatrix} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial x} = J$.

从而有 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$.

52. 设 $z = z(x,y)$ 由方程 $f\left(x + \dfrac{z}{y}, y + \dfrac{z}{x}\right) = 0$ 所确定, 且 f 具有二阶连续偏导数, 证明: $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

证明: 此时在方程两边对 x 求偏导, 有

$$f'_1\left(1 + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + f'_2\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + z \cdot \frac{-1}{x^2}\right) = 0.$$

从而有

$$\left(\frac{f'_1}{y} + \frac{f'_2}{x}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zf'_2}{x^2} - f'_1, \qquad \text{则 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy}{xf'_1 + yf'_2}\left(\frac{zf'_2}{x^2} - f'_1\right).$$

在方程两边对 y 求偏导, 有

$$f_1'\left(\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}+z\cdot\frac{-1}{y^2}\right)+f_2'\left(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

从而有

$$\left(\frac{f_1'}{y}+\frac{f_2'}{x}\right)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zf_1'}{y^2}-f_2',\qquad \text{则}\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xy}{xf_1'+yf_2'}\left(\frac{zf_1'}{y^2}-f_2'\right).$$

因此

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{x^2y}{yf_1'+xf_2'}\left(\frac{zf_2'}{x^2}-f_1'\right)+\frac{xy^2}{xf_1'+yf_2'}\left(\frac{zf_1'}{y^2}-f_2'\right)\\
&=\frac{1}{xf_1'+yf_2'}[(yzf_2'-x^2yf_1')+(xzf_1'-xy^2f_2')]\\
&=\frac{xf_1'(z-xy)+yf_2'(z-xy)}{xf_1'+yf_2'}\\
&=\frac{(z-xy)(xf_1'+yf_2')}{xf_1'+yf_2'}=z-xy.
\end{aligned}$$

从而原结论得证.

53. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z-x-y+xe^{z-x-y}=0$ 所确定的函数, 求 $\mathrm{d}z$.

解: 对方程两边同时求微分, 有

$$\mathrm{d}z-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+xe^{z-x-y}(\mathrm{d}z-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)+e^{z-x-y}\mathrm{d}x=0.$$

从而有

$$\begin{aligned}
(1+xe^{z-x-y})\mathrm{d}z&=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+xe^{z-x-y}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)-e^{z-x-y}\mathrm{d}x\\
&=(1+xe^{z-x-y}-e^{z-x-y})\mathrm{d}x+(1+xe^{z-x-y})\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

解得 $\mathrm{d}z=\dfrac{1+(x-1)e^{z-x-y}}{1+xe^{z-x-y}}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y.$

54. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{x+y+z}-zx+y-2=0$ 所确定的函数, 求 $\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}$.

解: 将 $x=0,\ y=1$ 代入原方程, 有 $e^{1+z}+1-2=0$, 此时解得 $z=-1$.

对方程两边同时求微分, 有

$$e^{x+y+z}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)-(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z)+\mathrm{d}y=0.$$

从而有

$$(x-e^{x+y+z})\mathrm{d}z = e^{x+y+z}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y) - z\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$$

$$= (e^{x+y+z}-z)\mathrm{d}x + (e^{x+y+z}+1)\mathrm{d}y.$$

此时将 $x=0$, $y=1$, $z=-1$ 代入上式中, 则有

$$(0-e^{1-1})\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = -\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = [e^{1-1}-(-1)]\mathrm{d}x + (e^{1-1}+1)\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y.$$

因此有 $\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = -2\mathrm{d}x - 2\mathrm{d}y.$

55. 证明: 方程 $\sin y + \arctan(x^2+y^2) = x$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内能唯一确定一个可导函数 $y=y(x)$, 且满足 $y(0)=0$; 并求 $y'(0)$.

证明: 令 $F(x,y) = \sin y + \arctan(x^2+y^2) - x = 0$, 从而 F 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续.

又因为 $F'_x(x,y) = \dfrac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\cdot(2x) - 1 = \dfrac{2x}{1+x^4+y^4+2x^2y^2} - 1,$

$F'_y(x,y) = \cos y + \dfrac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\cdot(2y) = \cos y + \dfrac{2y}{1+x^4+y^4+2x^2y^2}.$

则 $F'_x(x,y)$ 与 $F'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续. 又 $F'_y(0,0) = \cos 0 + \dfrac{0}{1+0} = 1 \neq 0,$

由隐函数存在性定理, 则在点 $(0,0)$ 的某邻域内, 原方程能唯一确定一个可导函数 $y=y(x)$.

且满足 $y(0)=0$, $y'(x) = -\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$

代入 $x=y=0$ 有 $F'_x(0,0) = \dfrac{0}{1+0} - 1 = -1$, 从而 $y'(0) = -\dfrac{F'_x(0,0)}{F'_y(0,0)} = -\dfrac{-1}{1} = 1.$

9.6 多元函数的极值 习题

56. 判断下列函数是否有极值, 若有请判断是极大值还是极小值; 并求极值.

(1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$;

(2) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 2$;

(3) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$;

(4) $f(x,y)=e^{2x}(x+2y+y^2)$;

(5) $f(x,y)=3axy-x^3y^3\ (a>0)$;

(6) $f(x,y)=xy(6-x-y)$.

解: (1) 由题, $f'_x(x,y)=2x-y-2$, $f'_y(x,y)=-x+2y+1$.

令 $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$, 从而有 $\begin{cases}2x-y=2,\\ x-2y=1.\end{cases}$ 解得 $x=1$, $y=0$.

又因为 $f''_{xx}(x,y)=2$, $f''_{xy}(x,y)=-1$, $f''_{yy}(x,y)=2$, 则 $A=2$, $B=-1$, $C=2$.

从而有 $B^2-AC=1-4=-3<0$, 且 $A>0$.

因此函数在 $(1,0)$ 处取极小值, 极小值为 $f(1,0)=1^2-0+0-2+0=-1$.

(2) 由题, $f'_x(x,y)=2x+y+1$, $f'_y(x,y)=x+2y-1$.

令 $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$, 从而有 $\begin{cases}2x+y=-1,\\ x+2y=1.\end{cases}$ 解得 $x=-1$, $y=1$.

又因为 $f''_{xx}(x,y)=2$, $f''_{xy}(x,y)=1$, $f''_{yy}(x,y)=2$, 从而 $A=2$, $B=1$, $C=2$.

从而有 $B^2-AC=1-4=-3<0$, 且 $A>0$.

因此函数在 $(-1,1)$ 处取极小值, 极小值为 $f(-1,1)=(-1)^2-1+1^2+(-1)-1+2=1$.

(3) 由题, $f'_x(x,y)=3x^2-3y$, $f'_y(x,y)=-3x+3y^2$.

令 $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$, 从而有 $\begin{cases}3x^2-3y=0,\\ -3x+3y^2=0.\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x^4=x,\\ y=y^4.\end{cases}$ 解得 $x=y=1$ 或 $x=y=0$.

又因为 $f''_{xx}(x,y)=6x$, $f''_{xy}(x,y)=-3$, $f''_{yy}(x,y)=6y$.

当取 $(1,1)$ 时有 $A=f''_{xx}(1,1)=6$, $B=-3$, $C=f''_{yy}(1,1)=6$.

此时有 $B^2-AC=9-36=-27<0$, 且 $A>0$.

因此函数在 $(1,1)$ 处取极小值, 极小值为 $f(1,1)=1^3-3+1^3=-1$.

当取 $(0,0)$ 时有 $A=f''_{xx}(0,0)=0$, $B=-3$, $C=f''_{yy}(0,0)=0$.

此时有 $B^2-AC=9-0=9>0$, 从而函数在 $(0,0)$ 处不取极值.

综上, 函数有极小值 $f(1,1)=-1$.

(4) 由题, $f_x'(x,y)=2e^{2x}(x+2y+y^2)+e^{2x}=e^{2x}(2y^2+4y+2x+1)$, $f_y'(x,y)=e^{2x}(2+2y)$.

令 $f_x'(x,y)=f_y'(x,y)=0$, 从而有 $\begin{cases}2y^2+4y+2x+1=0,\\ 2+2y=0.\end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{1}{2}$, $y=-1$.

又因为 $f_{xx}''(x,y)=2e^{2x}(2y^2+4y+2x+1)+e^{2x}\cdot 2=e^{2x}(4y^2+8y+4x+4)$,

$f_{xy}''(x,y)=e^{2x}(4y+4)$, $f_{yy}''(x,y)=2e^{2x}$.

则 $A=f_{xx}''\left(\dfrac{1}{2},-1\right)=e(4-8+2+4)=2e$, $B=f_{xy}''\left(\dfrac{1}{2},-1\right)=e(-4+4)=0$, $C=f_{yy}''\left(\dfrac{1}{2},-1\right)=2e$.

从而有 $B^2-AC=-4e^2<0$, 且 $A>0$.

因此函数在 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$ 处取极小值, 极小值为 $f\left(\dfrac{1}{2},-1\right)=e^1\left(\dfrac{1}{2}-2+1\right)=-\dfrac{e}{2}$.

(5) 由题, $f_x'(x,y)=3ay-3x^2y^3=3y(a-x^2y^2)$, $f_y'(x,y)=3ax-3y^2x^3=3x(a-x^2y^2)$.

令 $f_x'(x,y)=f_y'(x,y)=0$, 从而有 $\begin{cases}3y(a-x^2y^2)=0,\\ 3x(a-x^2y^2)=0.\end{cases}$ 解得 $x=y=0$ 或 $x^2y^2=a$.

又因为 $f_{xx}''(x,y)=-6y^3x$, $f_{xy}''(x,y)=3a-9x^2y^2$, $f_{yy}''(x,y)=-6x^3y$.

当取 $(0,0)$ 时, $A=f_{xx}''(0,0)=0$, $B=f_{xy}''(0,0)=3a$, $C=f_{yy}''(0,0)=0$.

从而有 $B^2-AC=3a>0$. 因此 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

当取 $x^2y^2=a$ 的点时, $A=-6\sqrt{a}y^2$, $B=3a-9a=-6a$, $C=-6\sqrt{a}x^2$.

因此 $B^2-AC=(-6a)^2-36ax^2y^2=36a^2-36a\cdot a=0$, 需要进一步判断.

此时令 $xy=t$, $g(t)=f(x,y)=3at-t^3$. 从而 $g'(t)=3a-3t^2$, $g''(t)=-6t$.

又 $x^2y^2=a$ 时对应 $t=\sqrt{a}$ 或 $t=-\sqrt{a}$, 且此时有 $g'(\pm\sqrt{a})=0$ 成立.

又因为 $g''(\sqrt{a})=-6\sqrt{a}<0$, $g''(-\sqrt{a})=6\sqrt{a}>0$.

从而 $g(t)$ 在 $t=-\sqrt{a}$ 处取极小值, 在 $t=\sqrt{a}$ 处取极大值.

因此, $f(x,y)$ 在 $xy=-\sqrt{a}$ 处取极小值, 极小值为 $g(-\sqrt{a})=-3a\sqrt{a}-(-\sqrt{a})^3=-2a\sqrt{a}$.

$f(x,y)$ 在 $xy=\sqrt{a}$ 处取极大值, 极大值为 $g(\sqrt{a})=3a\sqrt{a}-(\sqrt{a})^3=2a\sqrt{a}$.

(6) 由题, $f_x'(x,y)=y[(6-x-y)+x(-1)]=y(6-2x-y)$,

$f_y'(x,y)=x[(6-x-y)+y(-1)]=x(6-x-2y)$.

令 $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$, 从而有 $\begin{cases} y(6-2x-y)=0, \\ x(6-x-2y)=0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=6, \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0, \\ y=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$

又因为 $f''_{xx}(x,y)=-2y$, $f''_{xy}(x,y)=(6-2x-y)+(-y)=6-2x-2y$, $f''_{yy}(x,y)=-2x$.

当取 $(0,0)$ 时, $A=f''_{xx}(0,0)=0$, $B=f''_{xy}(0,0)=6$, $C=f''_{yy}(0,0)=0$.

从而有 $B^2-AC=6^2-0=36>0$, 因此 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

当取 $(6,0)$ 时, $A=f''_{xx}(6,0)=0$, $B=f''_{xy}(6,0)=6-12=-6$, $C=f''_{yy}(6,0)=-12$.

从而有 $B^2-AC=(-6)^2-0=36>0$, 因此 $(6,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

当取 $(0,6)$ 时, $A=f''_{xx}(0,6)=-12$, $B=f''_{xy}(0,6)=6-12=-6$, $C=f''_{yy}(0,6)=0$.

从而有 $B^2-AC=(-6)^2-0=36>0$, 因此 $(0,6)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

当取 $(2,2)$ 时, $A=f''_{xx}(2,2)=-4$, $B=f''_{xy}(2,2)=6-4-4=-2$, $C=f''_{yy}(2,2)=-4$.

从而有 $B^2-AC=(-2)^2-(-4)\cdot(-4)=4-16=-12<0$, 且 $A<0$.

因此函数在 $(2,2)$ 处取极大值, 极大值为 $f(2,2)=2\cdot 2\cdot(6-2-2)=8$.

57. 求下列函数在指定区域内的最值:

(1) $z=x^2+2xy-4x+8y$, $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$;

(2) $z=x^2y(4-x-y)$, $D=\{(x,y)|0\le y\le 6-x, 0\le x\le 6\}$;

(3) $z=x^2+9y^2+6$, $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$;

(4) $z=x^2+y^2+4$, $D=\{(x,y)|(x-1)^2+2y^2\le 18\}$.

解: 最值可能在 D 的内部取到, 也可能在 D 的边界取到.

(1) 先考虑 D 的内部. 此时 $z'_x=2x+2y-4$, $z'_y=2x+8$.

令 $z'_x=z'_y=0$, 解得 $x=-4$, $y=6$, 此时点 $(-4,6)$ 不在 D 的内部.

因此函数在 D 的内部没有极值, 则没有最值.

此时考虑 D 的边界.

当取 $y=0$, $0\le x\le 1$ 段时, $z=x^2+0-4x+0=(x-2)^2-4$. 则 z 在 $0\le x\le 1$ 时递减.

在 $x=0$ 时取最大值 $z(0,0)=0+0-0+0=0$, 在 $x=1$ 处取最小值 $z(1,0)=1+0-4+0=-3$.

当取 $y=2$, $0\le x\le 1$ 段时, $z=x^2+4x-4x+16=x^2+16$. 则 z 在 $0\le x\le 1$ 时递增.

在 $x=0$ 时取最小值 $z(0,2)=0+0-0+16=16$, 在 $x=1$ 处取最大值 $z(1,2)=1+4-4+16=17$.

当取 $x=0$, $0\le y\le 2$ 段时, $z=0+0-0+8y=8y$. 则 z 在 $0\le y\le 2$ 时递增.

在 $y=0$ 时取最小值 $z(0,0)=0$, 在 $y=2$ 处取最大值 $z(0,2)=16$.

当取 $x=1$, $0\le y\le 2$ 段时, $z=1+2y-4+8y=10y+3$. 则 z 在 $0\le y\le 2$ 时递增.

在 $y=0$ 时取最小值 $z(1,0)=-3$, 在 $y=2$ 处取最大值 $z(1,2)=17$.

综上, z 在点 $(1,2)$ 处取最大值 $z_{max}=17$, 在点 $(1,0)$ 处取最小值 $z_{min}=-3$.

(2) 先考虑 D 的内部. 此时 $z'_x=2xy(4-x-y)+x^2y\cdot(-1)=xy(8-3x-2y)$,

$z'_y=x^2(4-x-y)+x^2y\cdot(-1)=x^2(4-x-2y)$.

令 $z'_x=z'_y=0$, 从而有 $\begin{cases} xy(8-3x-2y)=0, \\ x^2(4-x-2y)=0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=0, \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=4, \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

则只有驻点 $(2,1)$ 在区域 D 的内部.

又因为 $z''_{xx}=y(8-3x-2y)+xy\cdot(-3)=2y(4-3x-y)$,

$z''_{xy}=x(8-3x-2y)+xy\cdot(-2)=x(8-3x-4y)$, $z''_{yy}=-2x^2$.

从而 $A=2(4-6-1)=-6$, $B=2(8-6-2)=0$, $C=-2\times 2^2=-8$.

则 $B^2-AC=0-(-6)\cdot(-8)=-48<0$, 且 $A<0$.

则 z 在 $(2,1)$ 处取极大值, 极大值为 $z(2,1)=2^2\cdot 1(4-2-1)=4$.

此时考虑 D 的边界.

当取 $y=0$, $0\le x\le 6$ 段时, $z=0$ 始终成立.

当取 $x=0$, $0\le y\le 6$ 段时, $z=0$ 始终成立.

当取 $y=6-x$, 即 $x+y=6$, $0\le x\le 6$ 段时, $z=x^2(6-x)[4-x-(6-x)]=2x^3-12x^2$.

此时 $z'=6x^2-24x=6x(x-4)$, 当 $z'=0$ 时 $x=0$ 或 $x=4$, $z'<0$ 时 $0<x<4$.

从而 z 在 $x\in[0,4]$ 时递减, 在 $x\in[4,6]$ 时递增.

则 $x=2$ 时 z 取最小值 $2\cdot 4^3-12\cdot 4^2=128-192=-64$, 此时 $y=6-4=2$.

又因为 $x=0$ 时 $z=0-0=0$, $x=6$ 时 $z=2\cdot 6^3-12\cdot 6^2=0$.

则在 $[0,6]$ 上 z 取最大值 0, 此时 $x=6$, $y=0$ 或 $x=0$, $y=6$.

综上, z 在点 $(4,2)$ 处取最小值 $z_{min}=-64$, 在点 $(2,1)$ 处取最大值 $z_{max}=4$.

(3) 先考虑 D 的内部. 此时 $z'_x=2x$, $z'_y=18y$.

令 $z'_x=z'_y=0$, 解得 $x=y=0$, 此时驻点 $(0,0)$ 在 D 的内部.

又因为 $z''_{xx}=2$, $z''_{xy}=0$, $z''_{yy}=18$, 则有 $A=2$, $B=0$, $C=18$.

从而 $B^2-AC=0-36=-36<0$, 且 $A>0$. 则函数在点 $(0,0)$ 处有极小值 $z(0,0)=0^2+9\cdot 0^2+6=6$.

此时考虑 D 的边界, 即 $x^2+y^2=1$.

此时有 $x^2\le 1$, 即 $-1\le x\le 1$, 且 $y^2=1-x^2$, 代入 z 中则有

$z=x^2+9(1-x^2)+6=-8x^2+15$.

则 $x=0$ 时 z 取最大值, 此时 $z=0+15=15$, $y=\pm 1$.

$x=\pm 1$ 时 z 取最小值, 此时 $z=-8+15=7$, $y=0$.

综上, z 在点 $(0,0)$ 处取最小值 $z_{min}=6$, 在点 $(0,\pm 1)$ 处取最大值 $z_{max}=15$.

(4) 先考虑 D 的内部. 此时 $z'_x=2x$, $z'_y=2y$.

令 $z'_x=z'_y=0$, 解得 $x=y=0$. 此时驻点 $(0,0)$ 在 D 的内部.

又因为 $z''_{xx}=2$, $z''_{xy}=0$, $z''_{yy}=2$, 则有 $A=C=2$, $B=0$.

从而 $B^2-AC=0-4=-4<0$, 且 $A>0$. 则函数在点 $(0,0)$ 处有极小值 $z(0,0)=0^2+0^2+4=4$.

此时考虑 D 的边界, 即 $(x-1)^2+2y^2=18$.

此时有 $(x-1)^2\le 18$, 即 $1-3\sqrt{2}\le x\le 1+3\sqrt{2}$. 且有 $y^2=9-\dfrac{(x-1)^2}{2}$, 代入 z 中则有

$z=x^2+9-\dfrac{(x-1)^2}{2}+4=\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{25}{2}=\dfrac{1}{2}(x+1)^2+12$.

则 $x=-1$ 时 z 取最小值, 此时 $z=12$, $y=\pm\sqrt{9-2}=\pm\sqrt{7}$.

再考虑最大值, $x=1-3\sqrt{2}$ 时 $y=0$, 此时 $z=\frac{1}{2}(2-3\sqrt{2})^2+12=\frac{18+4-12\sqrt{2}}{2}+12=23-6\sqrt{2}$;

$x=1+3\sqrt{2}$ 时 $y=0$, 此时 $z=\frac{1}{2}(2+3\sqrt{2})^2+12=\frac{18+4+12\sqrt{2}}{2}+12=23+6\sqrt{2}$.

从而 $x=1+3\sqrt{2}$ 时 z 有最大值 $23+6\sqrt{2}$.

综上, z 在点 $(0,0)$ 处取最小值 $z_{min}=4$, 在点 $(1+3\sqrt{2},0)$ 处取最大值 $z_{max}=23+6\sqrt{2}$.

58. 求 $f(x,y)=2x^2+12xy+y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+4y^2\le 25\}$ 上的最小值.

解: 最小值可能在 D 的内部取到, 也可能在 D 的边界取到.

先考虑内部. 此时 $f'_x(x,y)=4x+12y$, $f'_y(x,y)=12x+2y$.

令 $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$, 解得 $x=y=0$, 则驻点 $(0,0)$ 在 D 内部.

又因为 $f''_{xx}(x,y)=4$, $f''_{xy}(x,y)=12$, $f''_{yy}(x,y)=2$, 则 $A=4$, $B=12$, $C=2$. 从而

$B^2-AC=12^2-8>0$, 故点 $(0,0)$ 不是极值点.

再考虑边界 $x^2+4y^2=25$ 上.

构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(x^2+4y^2-25)=(2+\lambda)x^2+(1+4\lambda)y^2+12xy-25\lambda$.

令

$$\begin{cases} L'_x=(4+2\lambda)x+12y=0, \\ L'_y=(2+8\lambda)y+12x=0, \\ L'_\lambda=x^2+4y^2-25=0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} y=-\dfrac{2+\lambda}{6}x, \\ x=-\dfrac{1+4\lambda}{6}y, \\ x^2+4y^2-25=0. \end{cases}$$

此时显然 $y\neq 0$, 则有 $(2+\lambda)(1+4\lambda)=36$, 即 $(4\lambda+17)(\lambda-2)=0$, 解得 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-\frac{17}{4}$.

又由方程得 $\left[4+\frac{(1+4\lambda)^2}{36}\right]y^2=25$.

当 $\lambda=2$ 时有 $\frac{25}{4}y^2=25$, 解得 $y=\pm 2$, 从而有 $x=\mp 3$, 对应驻点 $(3,-2)$ 与 $(-3,2)$.

当 $\lambda=-\frac{17}{4}$ 时有 $\frac{100}{9}y^2=25$, 解得 $y=\pm\frac{3}{2}$, 从而有 $x=\pm 4$, 对应驻点 $\left(\frac{3}{2},4\right)$ 与 $\left(-\frac{3}{2},-4\right)$.

分别将上述四个驻点代入 $f(x,y)$ 中, 则有

$f(3,-2)=2\cdot 3^2+12\cdot 3\cdot(-2)+(-2)^2=18-72+4=-50$.

$f(-3,2)=2\cdot(-3)^2+12\cdot(-3)\cdot 2+2^2=18-72+4=-50$.

$f\left(\frac{3}{2},4\right)=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+12\cdot\frac{3}{2}\cdot4+4^2=\frac{9}{2}+72+16=\frac{195}{2}.$

$f\left(-\frac{3}{2},-4\right)=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+12\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(-4)+(-4)^2=\frac{9}{2}+72+16=\frac{195}{2}.$

因此函数在 $(3,-2)$ 和 $(-3,2)$ 处取到极小值, 也即最小值, 最小值为 -50.

59. 设 A,B,C 为 $\triangle ABC$ 的内角, 求 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的最大值.

解: 由于 $A+B+C=\pi$, 此时构造拉格朗日函数 $L(A,B,C,\lambda)=\sin A+\sin B+\sin C+\lambda(A+B+C-\pi)$.

令

$$\begin{cases} L'_A=\cos A+\lambda=0, \\ L'_B=\cos B+\lambda=0, \\ L'_C=\cos C+\lambda=0, \\ L'_\lambda=A+B+C-\pi=0. \end{cases}$$

则解得 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$, 即驻点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

由题则求和式的最大值存在, 则原函数在驻点处取到最大值.

此时 $\sin A+\sin B+\sin C=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 即 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

60. 已知三角形的周长为 $2s$, 求其面积的最大值.

解: 设三角形三边边长为 a,b,c, 且满足 $a\le b\le c$, 因此有 $c=2s-a-b$.

由海伦公式, 三角形的面积 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(a+b-s)}$.

此时令 $f(a,b)=s(s-a)(s-b)(a+b-s)$, 则 $f(a,b)$ 取最大值时三角形面积也取最大值.

由于 $f'_a(a,b)=s(s-b)[-(a+b-s)+(s-a)]=s(s-b)(2s-2a-b)$,

$f'_b(a,b)=s(s-a)[-(a+b-s)+(s-b)]=s(s-a)(2s-2b-a)$.

当 $f'_b(a,b)=0$ 时, 由于 $0<a\le\frac{2s}{3}$(这里 a 是最短边), 则解得 $a+2b=2s$, 从而有 $b<s$.

此时取 $f'_a(a,b)=0$, 可解得 $2a+b=2s$.

两式相加有 $3a+3b=4s$, 因此可解得 $a=b=\frac{2s}{3}$, 此时 $c=2s-a-b=\frac{2s}{3}=a=b$.

又因为 $f''_{aa}(a,b)=-2s(s-b)$, $f''_{ab}(a,b)=s[-(2s-2a-b)+(s-b)\cdot(-1)]=-s(3s-2a-2b)$,

$f''_{bb}(a,b) = -2s(s-a)$. 代入 $a = b = \dfrac{2s}{3}$,

则 $A = f''_{aa}\left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right) = -\dfrac{2s^2}{3}$, $B = f''_{ab}\left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right) = -\dfrac{s^2}{3}$, $C = f''_{bb}\left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right) = -\dfrac{2s^2}{3}$.

此时有 $B^2 - AC = \dfrac{s^4}{9} - \dfrac{4s^4}{9} = -\dfrac{3s^4}{9} < 0$, 且 $A < 0$, 从而此时函数取极大值, 也即取最大值.

对应最大值为 $f\left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right) = s \cdot \dfrac{s}{3} \cdot \dfrac{s}{3} \cdot \dfrac{s}{3} = \dfrac{s^4}{27}$,

则三角形面积最大值 $S_{max} = \sqrt{f\left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}s^2$.

61. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为 p_1 和 p_2, 销售量分别为 q_1 和 q_2, 需求函数分别为

$$q_1 = 24 - 0.2p_1 \quad \text{和} \quad q_2 = 10 - 0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C = 35 + 40(q_1 + q_2),$$

试问: 厂家如何确定两个市场的售价, 能使其获得的总利润最大? 其最大利润是多少?

解: 设利润

$$\begin{aligned} W(p_1, p_2) &= p_1q_1 + p_2q_2 - C \\ &= p_1(24 - 0.2p_1) + p_2(10 - 0.05p_2) - 35 - 40(24 - 0.2p_1 + 10 - 0.05p_2) \\ &= -0.2p_1^2 - 0.05p_2^2 + 32p_1 + 12p_2 - 1395. \end{aligned}$$

从而有 $W'_{p_1}(p_1, p_2) = -0.4p_1 + 32$, $W'_{p_2}(p_1, p_2) = -0.1p_2 + 12$.

令 $W'_{p_1} = W'_{p_2} = 0$, 解得 $p_1 = 80$, $p_2 = 120$.

又因为 $W''_{p_1p_1} = -0.4$, $W''_{p_1p_2} = 0$, $W''_{p_2p_2} = -0.1$, 则 $A = -0.4$, $B = 0$, $C = -0.1$.

从而 $B^2 - AC = 0 - 0.4 \times 0.1 = -0.04 < 0$, 且 $A < 0$.

因此 W 在 $(80, 120)$ 处取极大值, 由题此时也取最大值.

有 $q_1 = 24 - 0.2 \times 80 = 8$, $q_2 = 10 - 0.05 \times 120 = 4$,

从而 $W(80, 120) = 80 \times 8 + 120 \times 4 - [35 + 40 \times (8 + 4)] = 640 + 480 - 35 - 480 = 605$.

则厂家确定售价分别为 80 和 120 时能获得总利润最大, 最大利润为 605.

62. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 所确定的函数, 求函数 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

解: 对方程等号两边分别对 x 和 y 求偏导, 则有

$$\begin{cases}2x-6y-2yz'_x-2zz'_x=0,\\ -6x+20y-2yz'_y-2z-2zz'_y=0.\end{cases}\quad 令\ z'_x=z'_y=0\ 则有\ \begin{cases}2x-6y=0,\\ -6x+20y-2z=0.\end{cases}$$

此时则有 $x=3y$, $z=y$, 代入原方程有 $9y^2-18y^2+10y^2-2y^2-y^2+18=0$,

即 $-2y^2+18=0$, 解得 $y=\pm3$. 则对应驻点 $(9,3)$ 与 $(-9,-3)$.

对上述方程组中每个方程, 等号两边分别再对 x 和 y 求偏导, 则有

$$\begin{cases}2-2yz''_{xx}-2(z'_x)^2-2zz''_{xx}=0,\\ -6-2yz''_{xy}-2z'_x-2z'_yz'_x-2zz''_{xy}=0,\\ -6-2yz''_{xy}-2z'_x-2z'_xz'_y-2zz''_{xy}=0,\\ 20-2z'_y-2yz''_{yy}-2z'_y-2(z'_y)^2-2zz''_{yy}=0.\end{cases}\quad 代入\ z'_x=z'_y=0\ 则有\ \begin{cases}2-2yz''_{xx}-2zz''_{xx}=0,\\ -6-2yz''_{xy}-2zz''_{xy}=0,\\ 20-2yz''_{yy}-2zz''_{yy}=0.\end{cases}$$

再代入 $z=y$, 从而有 $z''_{xx}=\dfrac{1}{2y}$, $z''_{xy}=-\dfrac{3}{2y}$, $z''_{yy}=\dfrac{5}{y}$.

因此 $B^2-AC=\left(-\dfrac{3}{2y}\right)^2-\dfrac{1}{2y}\cdot\dfrac{5}{y}=\dfrac{9}{4y^2}-\dfrac{5}{2y^2}=-\dfrac{1}{4y^2}<0$.

当 $y=3$ 时 $A=\dfrac{1}{6}>0$, 此时函数取极小值 3; 当 $y=-3$ 时 $A=-\dfrac{1}{6}<0$, 此时函数取极大值 -3.

因此函数的极小值点 $(9,3)$, 对应极小值 3; 极大值点 $(-9,-3)$, 对应极大值 -3.

63. 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点, 使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

解: 设椭圆上任一点 $P(x,y)$, 则 P 到已知直线的距离 $d=\dfrac{|2x+3y-6|}{\sqrt{2^2+3^2}}$.

从而 d 取最小值时 $d^2=\dfrac{(2x+3y-6)^2}{13}$ 也取最小值. 又由于 P 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上,

构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=d^2+\lambda(x^2+4y^2-4)=\dfrac{(2x+3y-6)^2}{13}+\lambda(x^2+4y^2-4)$.

令

$$\begin{cases}L'_x=\dfrac{2(2x+3y-6)\cdot2}{13}+2\lambda x=0,\\ L'_y=\dfrac{2(2x+3y-6)\cdot3}{13}+8\lambda y=0,\\ L'_\lambda=x^2+4y^2-4=0.\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}2x+3y-6=-\dfrac{13}{2}\lambda x,\\ 2x+3y-6=-\dfrac{52}{3}\lambda y,\\ x^2+4y^2-4=0.\end{cases}$$

由前两个方程解得 $\lambda = 0$ 或 $x = \frac{8}{3}y$.

当 $\lambda = 0$ 时, 联立 $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0, \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$ 得 $25y^2 - 36y + 20 = 0$.

此时判别式 $\Delta = 36^2 - 4 \cdot 25 \cdot 20 = 1296 - 2000 < 0$, 从而此时无解.

当 $x = \frac{8}{3}y$ 时, 代入椭圆方程则有 $\frac{64}{9}y^2 + 4y^2 = 4$, 解得 $y = \pm\frac{3}{5}$, 对应 $x = \pm\frac{8}{5}$.

综上则函数驻点 $P_1\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 和 $P_2\left(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

由实际情况可知, 使得 P 到已知直线距离最短的点一定存在. 故分别考虑 P_1, P_2 处 d 的值.

在 P_1 处 $d = \frac{\left|\frac{16}{5} + \frac{9}{5} - 6\right|}{\sqrt{13}} = \frac{|5-6|}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$; 在 P_2 处 $d = \frac{\left|-\frac{16}{5} - \frac{9}{5} - 6\right|}{\sqrt{13}} = \frac{|-5-6|}{\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{13}}$.

因此 d 的最小值在点 $P_1\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 处取到, 最短距离为 $\frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$.

64. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 上与定点 $M(3, 1, -1)$ 相距最远和最近点的坐标.

解: 设球面上任一点 $P(x, y, z)$, 则距离 $d = |PM| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$.

由题, 所求即为 $|PM|$ 的最值, 则转化为求 $|PM|^2$ 的最值.

此时构造拉格朗日函数 $L(x, y, z, \lambda) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$.

令

$$\begin{cases} L'_x = 2(x-3) + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 2(y-1) + 2\lambda y = 0, \\ L'_z = 2(z+1) + 2\lambda z = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0. \end{cases} \quad \text{由前三个式子解得} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{1+\lambda}, \\ y = \frac{1}{1+\lambda}, \\ z = -\frac{1}{1+\lambda}. \end{cases}$$

代入到 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 中有 $\frac{3^2 + 1^2 + (-1)^2}{(1+\lambda)^2} = 4$, 则 $(1+\lambda)^2 = \frac{11}{4}$, 解得 $1 + \lambda = \pm\frac{\sqrt{11}}{2}$.

对应驻点 $P_1\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$, $P_2\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$.

由于实际情况中最远距离和最近距离一定存在, 则距离在 P_1 和 P_2 处取到最值.

代入 P_1 坐标, 则此时

$$\begin{aligned}d^2&=\left(\frac{6}{\sqrt{11}}-3\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{11}}-1\right)^2+\left(-\frac{2}{\sqrt{11}}+1\right)^2\\&=\frac{36}{11}-\frac{36}{\sqrt{11}}+9+\frac{4}{11}-\frac{4}{\sqrt{11}}+1+\frac{4}{11}-\frac{4}{\sqrt{11}}+1\\&=\frac{44}{11}+11-\frac{44}{\sqrt{11}}=15-4\sqrt{11}.\end{aligned}$$

代入 P_2 坐标, 则此时

$$\begin{aligned}d^2&=\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}-3\right)^2+\left(-\frac{2}{\sqrt{11}}-1\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{11}}+1\right)^2\\&=\frac{36}{11}+\frac{36}{\sqrt{11}}+9+\frac{4}{11}+\frac{4}{\sqrt{11}}+1+\frac{4}{11}+\frac{4}{\sqrt{11}}+1\\&=\frac{44}{11}+11+\frac{44}{\sqrt{11}}=15+4\sqrt{11}.\end{aligned}$$

则在 P_2 处 d^2 取最大值, 在 P_1 处 d^2 取最小值.

综上, 球面上与 M 相距最远的点为 $\left(-\frac{6}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$, 最近的点为 $\left(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$.

65. 求原点到曲面 $S:z^2=xy+x-y+6$ 上点的最短距离.

解: 设曲面上任一点 $P(x,y,z)$, 则原点到 P 的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+xy+x-y+6}$.

令 $f(x,y)=x^2+y^2+xy+x-y+6$, 则 $f(x,y)$ 取最小值时 d 也取最小值.

由题有 $f'_x(x,y)=2x+y+1$, $f'_y(x,y)=2y+x-1$, $f''_{xx}(x,y)=2$, $f''_{xy}(x,y)=1$, $f''_{yy}(x,y)=2$.

令 $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$, 从而有 $\begin{cases}2x+y+1=0,\\x+2y-1=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=1.\end{cases}$

又因为此时 $A=C=2$, $B=1$, 则 $B^2-AC=1-4=-3<0$, 且 $A>0$.

从而 $f(x,y)$ 在 $(-1,1)$ 处取极小值, 也即最小值. 此时 $f(-1,1)=(-1)^2+1^2-1+(-1)-1+6=5$.

因此最短距离 $d_{min}=\sqrt{f(-1,1)}=\sqrt{5}$. 【要灵活考虑, 不一定非要采用拉格朗日乘数法】

66. 在曲面 $z=x^2+y^2$ 上求一点 M, 使得点 M 到平面 $x+y-2z=2$ 的距离最小.

解: 设曲面上任一点 $M(x,y,z)$, 则 M 到已知平面的距离 $d=\dfrac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{6}}$.

从而 d 取最小值时 $d^2=\dfrac{(x+y-2z-2)^2}{6}$ 也取最小值. 又由于 M 在曲面 $z=x^2+y^2$ 上,

构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=d^2+\lambda(x^2+y^2-z)=\dfrac{(x+y-2z-2)^2}{6}+\lambda(x^2+y^2-z)$.

令

$$\begin{cases} L'_x=\dfrac{2(x+y-2z-2)\cdot 1}{6}+2\lambda x=0, \\ L'_y=\dfrac{2(x+y-2z-2)\cdot 1}{6}+2\lambda y=0, \\ L'_z=\dfrac{2(x+y-2z-2)\cdot(-2)}{6}-\lambda=0, \\ L'_\lambda=x^2+y^2-z=0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x+y-2z-2=-6\lambda x, \\ x+y-2z-2=-6\lambda y, \\ x+y-2z-2=-\dfrac{3}{2}\lambda, \\ x^2+y^2-z=0. \end{cases}$$

由前三个方程有 $4\lambda x=4\lambda y=\lambda$, 则 $\lambda=0$ 或 $x=y=\dfrac{1}{4}$.

当 $\lambda=0$ 时, 联立 $\begin{cases} x+y-2z-2=0, \\ x^2+y^2-z=0 \end{cases}$ 得 $2x^2+2y^2-x-y+2=0$.

配方有 $2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+2\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{4}=0$, 显然无解.

当 $x=y=\dfrac{1}{4}$ 时, 代入曲线方程则有 $z=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}$, 则函数驻点为 $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$.

由实际情况可知, 使得 M 到已知平面距离最短的点一定存在, 从而当 $M\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$ 时距离最小.

此时 $d=\dfrac{\left|\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{8}-2\right|}{\sqrt{6}}=\dfrac{\left|\dfrac{1}{4}-2\right|}{\sqrt{6}}=\dfrac{7}{4\sqrt{6}}=\dfrac{7\sqrt{6}}{24}$.

因此曲面上点 $M\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$ 到平面 $x+y-2z=2$ 的距离最小.

67. 求过点 $M(1,2,3)$ 的平面, 使其与三个坐标平面所围四面体的体积最小.

解: 由题该平面与三个坐标平面能围成四面体, 则其在三个坐标轴上的截距均存在.

设平面与 x 轴交于点 $A(a,0,0)$, 与 y 轴交于点 $B(0,b,0)$, 与 z 轴交于点 $C(0,0,c)$.

因此所围四面体即为 $OABC$, 对应四面体的体积 $V=\dfrac{1}{3}|c|\cdot\dfrac{1}{2}|ab|=\dfrac{|abc|}{6}$.

此时列出平面的截距式方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. 因为平面过点 M 则有 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1$.

此时 $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$. 则当 V 取最小值时 V^2 取最小值.

构造拉格朗日函数 $L(a,b,c,\lambda)=V^2+\lambda\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}-1\right)=\dfrac{a^2b^2c^2}{36}+\lambda\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}-1\right)$.

令

$$\begin{cases} L'_a = \dfrac{2ab^2c^2}{36} - \dfrac{\lambda}{a^2} = 0, \\ L'_b = \dfrac{2a^2bc^2}{36} - \dfrac{2\lambda}{b^2} = 0, \\ L'_c = \dfrac{2a^2b^2c}{36} - \dfrac{3\lambda}{c^2} = 0, \\ L'_\lambda = \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{c} - 1 = 0. \end{cases} \quad 则有 \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{a^3b^2c^2}{18}, \\ 2\lambda = \dfrac{a^2b^3c^2}{18}, \\ 3\lambda = \dfrac{a^2b^2c^3}{18}. \end{cases}$$

从而解得 $c = 3a$, $b = 2a$, 代入 $L'_\lambda = 0$ 中有 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{2a} + \dfrac{3}{3a} = 1$, 解得 $a = 3$, 对应驻点 $(3, 6, 9)$.

由实际情况则体积最小值应存在, 因此在 $(3, 6, 9)$ 处体积取最小值.

此时体积最小值 $V_{min} = \dfrac{|3 \cdot 6 \cdot 9|}{6} = 27$.

68. 求平面 $x + y + z = 0$ 截立体 $x^2 + y^2 \leq 1$ 所得的截面面积.

解: 由题, 所给平面截圆柱所得应为一个椭圆, 此时应求出椭圆的长半轴和短半轴的长度.

由于圆柱的对称轴为 z 轴, 此时将 $x = y = 0$ 代入平面方程中解得 $z = 0$.

即所得截面的椭圆中心为点 $(0, 0, 0)$.

设截面椭圆上任意一点 $P(x, y, z)$, 则 P 点到中心 $(0, 0, 0)$ 的距离 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

此时需要求 d 的最大值与最小值, 便于计算则考虑 d^2 的最值即可.

又因为 P 既在平面 $x + y + z = 0$ 上, 则 $z = -x - y$, 有 $d^2 = x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$.

又 P 在圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 则构造拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda) = d^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

令

$$\begin{cases} L'_x = 4x + 2y + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 4y + 2x + 2\lambda y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

利用 $L'_x + L'_y = 0$ 可得 $(6 + 2\lambda)(x + y) = 0$, 解得 $\lambda = -3$ 或 $x = -y$.

当 $x = -y$ 时, 代入 $x^2 + y^2 = 1$ 中则有 $2x^2 = 1$, 解得 $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 对应 $y = \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

则此时对应驻点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 与 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

当 $\lambda=-3$ 时代入 $L'_x=0$ 中有 $2y-2x=0$, 从而 $x=y$.

代入 $x^2+y^2=1$ 中则有 $2x^2=1$, 解得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, 对应 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

则此时对应驻点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 与 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

由于 d^2 的最值一定存在, 则函数应在上述驻点处取到最值.

代入 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 则 $d^2=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1+1+1=3$.

代入 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 则 $d^2=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1+1-1=1$.

代入 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 则 $d^2=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+1-1=1$.

代入 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 则 $d^2=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+1+1=3$.

因此 d 的最大值为 $\sqrt{3}$. d 的最小值为 1, 即椭圆的长半轴长 $a=\sqrt{3}$, 短半轴长 $b=1$.

从而截面面积 $S=\pi ab=\sqrt{3}\pi$.

69. 求下列函数在指定点处的泰勒展开式:

(1) $f(x,y)=xy^2$ 在点 $P(2,1)$ 处 (二阶);

(2) $f(x,y)=x^y$ 在点 $P(1,4)$ 处 (二阶);

(3) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ 在点 $P(0,0)$ 处 (二阶);

(4) $f(x,y)=x^2-3xy+y^2-2x+3y+9$ 在点 $P(1,-1)$ 处.

解: (1) 由题 $f(2,1)=2$, $\frac{\partial f}{\partial x}=y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x$.

且 $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=2$.

因此在 $P(2,1)$ 处 $\frac{\partial f}{\partial x}=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4$.

所以

$$
\begin{aligned}
f(x,y)&=f(2,1)+\left[(x-2)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(2,1)+\frac{1}{2!}\left[(x-2)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(2,1)+R_2\\
&=2+(x-2)+4(y-1)+2(x-2)(y-1)+2(y-1)^2+R_2.
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
R_2 =& \frac{1}{3!}\left[(x-2)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^3 f(2+\theta(x-2),1+\theta(y-1)) \\
=& \frac{1}{6}C_3^2(x-2)(y-1)^2\cdot 2=(x-2)(y-1)^2. \qquad (0<\theta<1)
\end{aligned}
$$

(2) 由题 $f(1,4)=1$, 且 $f(x,y)=x^y=e^{y\ln x}$. 又因为 $\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=e^{y\ln x}\ln x=x^y\ln x$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}\cdot e^{y\ln x}+\ln x e^{y\ln x}\cdot\frac{1}{x}=(1+\ln x)x^{y-1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{y\ln x}\ln^2 x=x^y\ln^2 x$.

因此在 $P(1,4)$ 处 $\frac{\partial f}{\partial x}=4$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

所以对 $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$,

$$
\begin{aligned}
f(x,y)&=f(1,4)+\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-4)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(1,4)+\frac{1}{2!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-4)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(1,4)+o(\rho^2) \\
&=1+4(x-1)+6(x-1)^2+(x-1)(y-4)+o(\rho^2).
\end{aligned}
$$

(3) 由题 $f(0,0)=0$, 又因为 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x\cos(x^2+y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y\cos(x^2+y^2)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\cos(x^2+y^2)+2x\cdot(-\sin(x^2+y^2)\cdot 2x)=2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x\cdot(2y)\cdot(-\sin(x^2+y^2))=-4xy\sin(x^2+y^2)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\cos(x^2+y^2)+2y\cdot(-\sin(x^2+y^2)\cdot 2y)=2\cos(x^2+y^2)-4y^2\sin(x^2+y^2)$.

因此在 $P(0,0)$ 处 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$.

所以对 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$
\begin{aligned}
f(x,y)&=f(0,0)+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)+o(\rho^2) \\
&=x^2+y^2+o(\rho^2).
\end{aligned}
$$

(4) 由题 $f(1,-1)=1-3+1-2+3+9=9$, 又因为 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x-3y-2$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-3x+2y+3$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$.

且 $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=0$.

因此在 $P(1,-1)$ 处 $\frac{\partial f}{\partial x}=2+3-2=3$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-3-2+3=-2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$.

所以

$$f(x,y)=f(1,-1)+\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y+1)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(1,-1)+\frac{1}{2!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y+1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(1,-1)+R_2$$

$$=9+3(x-1)-2(y+1)+(x-1)^2-3(x-1)(y+1)+(y+1)^2+R_2.$$

其中

$$R_2=\frac{1}{3!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y+1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^3 f(1+\theta(x-1),-1+\theta(y+1))=0. \qquad (0<\theta<1)$$

70. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x)>0$, $f(0)>1$, $f'(0)=0$, $f''(0)>0$. 试问: 函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在 $(0,0)$ 处有没有极值? 如果有极值, 试确定是极大值还是极小值.

解: 由题, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)\ln f(y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x)\cdot\dfrac{f'(y)}{f(y)}=\dfrac{f(x)f'(y)}{f(y)}$.

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, 则 $y=0$, 从而 $\ln f(y)=\ln f(0)>0$, 从而 $x=0$.

又因为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)\ln f(y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)\cdot\dfrac{f'(y)}{f(y)}=\dfrac{f'(x)f'(y)}{f(y)}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x)\cdot\dfrac{f''(y)f(y)-f'(y)f'(y)}{f^2(y)}=\dfrac{f(x)[f''(y)f(y)-f'^2(y)]}{f^2(y)}$.

代入 $x=y=0$, 则 $A=f''(0)\ln f(0)>0$, $B=\dfrac{f'^2(0)}{f(0)}=0$, $C=\dfrac{f(0)[f''(0)f(0)-f'^2(0)]}{f^2(0)}=f''(0)>0$.

因此 $B^2-AC=0-[f''(0)]^2\ln f(0)<0$ 且 $A>0$,

从而 z 在 $(0,0)$ 处有极小值, 极小值为 $f(0)\ln f(0)$.

71. 记 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$, $u(x,y,z)$ 是 D 上的连续函数, 且满足

(i) 在 D 的内部有连续的二阶偏导数, 而且 $u''_{xx}u''_{yy}<0$;

(ii) 在球面上 $u(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2-xy$,

试求 $u(x,y,z)$ 在 D 上的最大值.

解: 先考虑 D 的内部. 对 D 的内部, 固定 z 值, 此时则 $u(x,y,z)$ 转化成只是 x,y 的函数.

【这时相当于将 D 的内部考虑成一个一个小球面的组合】

此时考虑满足 $u'_x = u'_y = 0$ 的点 (x_0, y_0), 有 $A = u''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = u''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = u''_{yy}(x_0, y_0)$.

由题有 $AC < 0$ 成立. 因此 $B^2 - AC > 0$ 始终成立 $(B^2 \geq 0, -AC > 0)$, 从而点 (x_0, y_0) 不是极值点.

从而对所有 D 内部的点, 不存在极值点.

再考虑 D 的边界, 也即球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上.

构造拉格朗日函数 $L(x, y, z, \lambda) = u(x, y, z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = x^2 + y^2 - 2z^2 - xy + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

令

$$\begin{cases} L'_x = 2x - y + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 2y - x + 2\lambda y = 0, \\ L'_z = -4z + 2\lambda z = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad \text{则有} \quad \begin{cases} (x+y)(1+2\lambda) = 0, (\text{利用} L'_x + L'_y = 0) \\ 2z(\lambda - 2) = 0. \end{cases}$$

由 x 和 y 的方程解得 $x = -y$ 或 $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

当 $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ 时, 代入 $L'_x = 0$ 中则有 $2x - y - x = 0$, 即有 $x = y$; 再由 z 的方程解得 $z = 0$.

代入球面方程有 $x^2 + x^2 = 1$, 解得 $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 对应有 $y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

则此时对应驻点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ 与 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

当 $x = -y$ 时代入 $L'_x = 0$ 中则有 $(3 + 2\lambda)x = 0$, 则解得 $x = 0$ 或 $\lambda = -\dfrac{3}{2}$.

当 $x = 0$ 时则 $y = 0$, 代入球面方程有 $z^2 = 1$, 则 $z = \pm 1$, 此时有 $\lambda = 2$, 对应驻点 $(0, 0, \pm 1)$.

当 $\lambda = -\dfrac{3}{2}$ 时, 由 z 的方程解得 $z = 0$.

代入球面方程有 $x^2 + (-x)^2 = 1$, 解得 $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 对应 $y = \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

则此时对应驻点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ 与 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

由于函数在边界上最值一定存在, 则函数应在上述驻点处取到最值.

分别代入上述驻点坐标, 此时 $u(0, 0, 1) = 0^2 + 0^2 - 2 \cdot 1^2 - 0 = -2$;

$u(0, 0, -1) = 0^2 + 0^2 - 2 \cdot (-1)^2 - 0 = -2$;

$$u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$u\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$u\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

$$u\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

因此 $u(x,y,z)$ 在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 与 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 处取最大值 $\frac{3}{2}$.

72. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数, $g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$, 且

$$f(x,y)=-x-y+1+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right).$$

证明: $g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处有极值; 判断此极值是极大值还是极小值, 并求出此极值.

证明: 由题, $x=y=0$ 时 $e^{xy}=e^0=1$, $x^2+y^2=0$, 即 $g(0,0)=f(1,0)$.

考虑 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处的皮亚诺余项形式的泰勒展开, 则有

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(1,0)+f_1'(1,0)(x-1)+f_2'(1,0)y+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)\\&=f_1'(1,0)x+f_2'(1,0)y+[f(1,0)-f_1'(1,0)]+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right).\end{aligned}$$

与已知条件对比系数可得 $f_1'(1,0)=-1$, $f_2'(1,0)=-1$, $f(1,0)=0$.

又由题可知, $g_x'(x,y)=f_1'\cdot ye^{xy}+f_2'\cdot 2x$, $g_y'(x,y)=f_1'\cdot xe^{xy}+f_2'\cdot 2y$.

代入 $x=y=0$, 则有 $g_x'(0,0)=g_y'(0,0)=0$, 则点 $(0,0)$ 为驻点.

由于 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导, 则 $g(x,y)$ 也有二阶连续偏导, 从而

$$\begin{aligned}g_{xx}''(x,y)&=yf_1'\cdot ye^{xy}+ye^{xy}(f_{11}''\cdot ye^{xy})+2f_2'+2x(f_{21}''\cdot 2x)\\&=y^2e^{xy}f_1'+y^2e^{2xy}f_{11}''+2f_2'+4x^2f_{21}''.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{xy}''(x,y)&=f_1'e^{xy}+yf_1'\cdot xe^{xy}+ye^{xy}(f_{12}''\cdot xe^{xy})+2x(f_{22}''\cdot 2y)\\&=(xy+1)e^{xy}f_1'+xye^{2xy}f_{12}''+4xyf_{22}''.\end{aligned}$$

$$g''_{yy}(x,y) = xf'_1 \cdot xe^{xy} + xe^{xy}(f''_{12} \cdot xe^{xy}) + 2f'_2 + 2x(f''_{22} \cdot 2y)$$

$$= x^2e^{xy}f'_1 + x^2e^{2xy}f''_{12} + 2f'_2 + 4y^2f''_{21}.$$

此时代入 $x = y = 0$, 对应 f'_1, f'_2 即变为 $f'_1(1,0)$ 与 $f'_2(1,0)$, 此时有

$A = g''_{xx}(0,0) = 0 + 0 + 2f'_2(1,0) + 0 = -2$, $B = g''_{xy}(0,0) = e^0 f'_1(1,0) + 0 + 0 = -1$,

$C = g''_{yy}(0,0) = 0 + 0 + 2f'_2(1,0) + 0 = -2$.

从而 $B^2 - AC = (-1)^2 - (-2)\cdot(-2) = -3 < 0$, 且 $A < 0$.

因此 $g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取极大值, 极大值为 $g(0,0) = 0$.

9.7　方向导数与梯度　习题

73. 求下列向量函数的导数:

(1) $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos 2t, e^t\sin 2t, e^{-2t})$;

(2) $\boldsymbol{r}(t) = \left(\ln\sqrt{1+t^2}, \arctan t, \dfrac{t}{1+t^2}\right)$;

(3) $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t(\cos t - \sin t))$;

(4) $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4t)$.

解: (1) 由于 $(e^t\cos 2t)' = e^t\cos 2t + e^t(-2\sin 2t) = e^t(\cos 2t - 2\sin 2t)$,

$(e^t\sin 2t)' = e^t\sin 2t + e^t(2\cos 2t) = e^t(2\cos 2t + \sin 2t)$, $(e^{-2t})' = -2e^{-2t}$.

从而有 $\boldsymbol{r}'(t) = (e^t(\cos 2t - 2\sin 2t), e^t(2\cos 2t + \sin 2t), -2e^{-2t})$.

(2) 由于 $(\ln\sqrt{1+t^2})' = \left(\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)' = \dfrac{2t}{2(1+t^2)} = \dfrac{t}{1+t^2}$, $(\arctan t)' = \dfrac{1}{1+t^2}$,
$\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)' = \dfrac{(1+t^2) - t\cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$.
从而有 $\boldsymbol{r}'(t) = \left(\dfrac{t}{1+t^2}, \dfrac{1}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\right)$.

(3) 由于 $(t\cos t)' = \cos t - t\sin t$, $t\sin t = \sin t + t\cos t$, $[t(\cos t - \sin t)]' = (\cos t - \sin t) + t(-\sin t - \cos t)$,

从而有 $\boldsymbol{r}'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, \cos t - \sin t - t\sin t - t\cos t)$.

(4) 由题, $\boldsymbol{r}'(t)=(-2\sin t,2\cos t,4)$.

74. 设 $\boldsymbol{r}(t)=\left(\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{1-t^2}{1+t^2},1\right)$, 证明: $\boldsymbol{r}(t)$ 与 $\boldsymbol{r}'(t)$ 之间的夹角为定值.

解: 由于 $\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)'=\dfrac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$,

$\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)'=\dfrac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$.

从而有 $\boldsymbol{r}'(t)=\left(\dfrac{2-2t^2}{(1+t^2)^2},\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2},0\right)$.

此时 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}\cdot\dfrac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}+0=\dfrac{4t-4t^3-4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3}=0$.

因此有 $\boldsymbol{r}(t)\perp\boldsymbol{r}'(t)$, 从而二者之间的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$, 即为定值.

75. 求函数 $u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数.

解: 由于 $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, 此时令 $\boldsymbol{l}=\overrightarrow{AB}$. 因为 $|\boldsymbol{l}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2=3}$,

从而 $\boldsymbol{l}$ 对应的方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{-2}{3}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{3}$.

又因为 u 在 A 处可微, 且有 $u_x'=\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}$, $u_y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\dfrac{2y}{2\sqrt{y^2+z^2}}=\dfrac{y}{x\sqrt{y^2+z^2}+y^2+z^2}$,

$u_z'=\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\dfrac{2z}{2\sqrt{y^2+z^2}}=\dfrac{z}{x\sqrt{y^2+z^2}+y^2+z^2}$.

从而 $u_x'(A)=\dfrac{1}{1+\sqrt{0+1^2}}=\dfrac{1}{2}$, $u_y'(A)=\dfrac{0}{1+0+1}=0$, $u_z'(A)=\dfrac{1}{1+0+1}=\dfrac{1}{2}$.

因此方向导数

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_A=u_x'(A)\cos\alpha+u_y'(A)\cos\beta+u_z'(A)\cos\gamma=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+0\cdot\frac{-2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

76. 设 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\boldsymbol{l}=(-1,2,-2)$, 求 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,2,2)}$ 和 $\left.\operatorname{grad} f\right|_{(1,2,2)}$.

解: 由于 $|\boldsymbol{l}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=3$, 从而 $\boldsymbol{l}$ 对应的方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{-1}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma=\dfrac{-2}{3}$.

又因为 $f(x,y,z)$ 在点 $(1,2,2)$ 处可微, 且

$$f_x'(x,y,z)=-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$f_y'(x,y,z)=-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$f_z'(x,y,z)=-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

从而 $f'_x(1,2,2)=-\dfrac{1}{(1^2+2^2+2^2)^{\frac{3}{2}}}=-\dfrac{1}{27}$, $f'_y(1,2,2)=-\dfrac{2}{(1^2+2^2+2^2)^{\frac{3}{2}}}=-\dfrac{2}{27}$,

$f'_z(1,2,2)=-\dfrac{2}{(1^2+2^2+2^2)^{\frac{3}{2}}}=-\dfrac{2}{27}$.

因此方向导数

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,2,2)}&=f'_x(1,2,2)\cos\alpha+f'_y(1,2,2)\cos\beta+f'_z(1,2,2)\cos\gamma\\&=-\frac{1}{27}\cdot\frac{-1}{3}-\frac{2}{27}\cdot\frac{2}{3}-\frac{2}{27}\cdot\frac{-2}{3}\\&=\frac{1}{81}-\frac{4}{81}+\frac{4}{81}=\frac{1}{81}.\end{aligned}$$

梯度 $\operatorname{grad} f\big|_{(1,2,2)}=(f'_x(1,2,2),f'_y(1,2,2),f'_z(1,2,2))=\left(-\dfrac{1}{27},-\dfrac{2}{27},-\dfrac{2}{27}\right)$.

77. 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量(外法向量), 求:

(1) 函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 M 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数;

(2) 函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 M 处的最大方向导数.

解: (1) 对 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6=0$, 有 $F'_x(x,y,z)=4x$, $F'_y(x,y,z)=6y$, $F'_z(x,y,z)=2z$.

从而外法向量 $\boldsymbol{n}=(F'_x(M),F'_y(M),F'_z(M))=(4,6,2)$.

又因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{12x}{2\sqrt{6x^2+8y^2}}\cdot\dfrac{1}{z}=\dfrac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{16y}{2\sqrt{6x^2+8y^2}}\cdot\dfrac{1}{z}=\dfrac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}$.

则 $u'_x(M)=\dfrac{6}{\sqrt{6+8}}=\dfrac{6}{\sqrt{14}}$, $u'_y(M)=\dfrac{8}{\sqrt{6+8}}=\dfrac{8}{\sqrt{14}}$, $u'_z(M)=-\dfrac{\sqrt{6+8}}{1}=-\sqrt{14}$.

由于 $|\boldsymbol{n}|=\sqrt{4^2+6^2+2^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$, 从而 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦

$\cos\alpha=\dfrac{4}{2\sqrt{14}}=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\dfrac{6}{2\sqrt{14}}=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\dfrac{2}{2\sqrt{14}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

因此 u 在点 M 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{M}&=u'_x(M)\cos\alpha+u'_y(M)\cos\beta+u'_z(M)\cos\gamma\\&=\frac{6}{\sqrt{14}}\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{8}{\sqrt{14}}\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}+(-\sqrt{14})\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\\&=\frac{6}{7}+\frac{12}{7}-1=\frac{11}{7}.\end{aligned}$$

(2) 由题, u 在点 M 处的梯度 $\mathrm{grad}u\Big|_M = (u'_x(M), u'_y(M), u'_z(M)) = \left(\dfrac{6}{\sqrt{14}}, \dfrac{8}{\sqrt{14}}, -\sqrt{14}\right)$.

因此 u 在点 M 处的最大方向导数

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_M\right)_{max} = \left|\mathrm{grad}u\Big|_M\right| = \left|\left(\frac{6}{\sqrt{14}}, \frac{8}{\sqrt{14}}, -\sqrt{14}\right)\right| = \sqrt{\frac{36}{14} + \frac{64}{14} + 14}$$
$$= \sqrt{\frac{50}{7} + \frac{98}{7}} = \frac{\sqrt{148}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{37 \times 7}}{7} = \frac{2}{7}\sqrt{259}.$$

78. 设 $z = f(x, y)$ 有连续偏导数, $\boldsymbol{l}_1 = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{l}_2 = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$; 在点 $P(1, 2)$ 处有 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1} = 11$, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2} = -3$.

求函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(1, 2)$ 处的全微分.

解: 因为 $|\boldsymbol{l}_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $|\boldsymbol{l}_2| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

从而 $\boldsymbol{l}_1$ 的方向余弦 $\cos\alpha_1 = \dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha_1 = \dfrac{3}{5}$; $\boldsymbol{l}_2$ 的方向余弦 $\cos\alpha_2 = \dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha_2 = -\dfrac{4}{5}$.

又因为在 $P(1, 2)$ 处 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1} = f'_x(P)\cos\alpha_1 + f'_y(P)\sin\alpha_1 = 11$, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2} = f'_x(P)\cos\alpha_2 + f'_y(P)\sin\alpha_2 = -3$.

则有 $\begin{cases} \dfrac{4}{5}f'_x(P) + \dfrac{3}{5}f'_y(P) = 11, \\ \dfrac{3}{5}f'_x(P) - \dfrac{4}{5}f'_y(P) = -3. \end{cases}$ 从而解得 $\begin{cases} f'_x(P) = 7, \\ f'_y(P) = 9. \end{cases}$

则 $z = f(x, y)$ 在点 $P(1, 2)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z = f'_x(P)\mathrm{d}x + f'_y(P)\mathrm{d}y = 7\mathrm{d}x + 9\mathrm{d}y$.

79. 求下列函数在指定点处的梯度:

(1) $f(x, y, z) = xy(x^2 + y^2 + z - 2)$, 在点 $M(1, 2, -1)$ 处;

(2) $f(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$, 在点 $M(-3, 0, 1)$ 处;

(3) $f(x, y) = \cos x + \cos y - \sin(x + y)$, 在点 $P\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ 处.

解: (1) 因为 $f'_x(x, y, z) = y(x^2 + y^2 + z - 2) + xy \cdot (2x) = 3x^2y + y^3 + yz - 2y$,

$f'_y(x, y, z) = x(x^2 + y^2 + z - 2) + xy \cdot (2y) = 3xy^2 + x^3 + xz - 2x$, $f'_z(x, y, z) = xy$.

从而有 $f'_x(1, 2, -1) = 3 \cdot 1^2 \cdot 2 + 2^3 + 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = 6 + 8 - 2 - 4 = 8$,

$f'_y(1, 2, -1) = 3 \cdot 1 \cdot 2^2 + 1^3 + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = 12 + 1 - 1 - 2 = 10$, $f'_z(1, 2, -1) = 1 \cdot 2 = 2$.

因此梯度 $\mathrm{grad}f\Big|_M = (f'_x(1, 2, -1), f'_y(1, 2, -1), f'_z(1, 2, -1)) = (8, 10, 2)$.

(2) 因为 $f'_x(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2+z^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\dfrac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$,

$f'_y(x,y,z)=\dfrac{0-x\cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $f'_z(x,y,z)=\dfrac{0-x\cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}=-\dfrac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

从而有 $f'_x(-3,0,1)=\dfrac{-(-3)^2+0+1^2}{[(-3)^2+0+1^2]^2}=\dfrac{-9+1}{10^2}=-\dfrac{2}{25}$,

$f'_y(-3,0,1)=-\dfrac{2\cdot(-3)\cdot 0}{[(-3)^2+0+1^2]^2}=0$, $f'_z(-3,0,1)=-\dfrac{2\cdot(-3)\cdot 1}{[(-3)^2+0+1^2]^2}=\dfrac{6}{10^2}=\dfrac{3}{50}$.

因此梯度 $\operatorname{grad}f\Big|_M=(f'_x(-3,0,1),f'_y(-3,0,1),f'_z(-3,0,1))=\left(-\dfrac{2}{25},0,\dfrac{3}{50}\right)$.

(3) 因为 $f'_x(x,y)=-\sin x-\cos(x+y)$, $f'_y(x,y)=-\sin y-\cos(x+y)$,

从而有 $f'_x\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

$f'_y\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

因此梯度 $\operatorname{grad}f\Big|_P=\left(f'_x\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right),f'_y\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

80. 设 $f(x,y,z)=axy^2+byz+cz^2x^3$ 在点 $M(1,2,-1)$ 处沿 z 轴正向的方向导数为点 M 处所有方向导数的最大值, 且其最大值为 64, 求常数 a, b, c 的值.

解: 由题, z 轴正向对应方向向量 $\boldsymbol{l}=(0,0,1)$.

因为函数沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数最大, 因此 $\operatorname{grad}f\Big|_M\,/\!/\,\boldsymbol{l}$. 且二者方向相同.

由于 $f'_x(x,y,z)=ay^2+3cx^2z^2$, $f'_y(x,y,z)=2axy+bz$, $f'_z(x,y,z)=by+2cx^3z$.

代入 M 点坐标则有 $f'_x(M)=4a+3c$, $f'_y(M)=4a-b$, $f'_z(M)=2b-2c$.

从而函数在 M 处的梯度 $\operatorname{grad}f\Big|_M=(f'_x(M),f'_y(M),f'_z(M))=(4a+3c,4a-b,2b-2c)$.

由平行且方向相同有 $4a+3c=4a-b=0$, 且 $2b-2c>0$.

又因为最大值为 64 则有 $\left|\operatorname{grad}f\Big|_M\right|=2b-2c=64$.

由于 $b=-3c$ 则有 $-8c=64$, 解得 $c=-8$. 从而对应 $b=24$, $a=6$.

81. 证明: 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处沿任何方向的方向导数均存在. 试问: f 在点 $(0,0)$ 处是否连续?

证明: 取方向 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $0\le\alpha<2\pi$. 由方向导数的定义

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to0}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho\cos\alpha+\rho\sin\alpha+\dfrac{\rho^3\cos^3\alpha\rho\sin\alpha}{\rho^4\cos^4\alpha+\rho^2\sin^2\alpha}}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to0}\cos\alpha+\sin\alpha+\frac{\rho\cos^3\alpha\sin\alpha}{\rho^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}$$

当 $\alpha=0$ 或 $\alpha=\pi$ 时, $\sin\alpha=0$, 则此时 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)}=\cos\alpha+0+0=\cos\alpha$.

当 $\sin\alpha\ne0$ 时, $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\rho\cos^3\alpha\sin\alpha}{\rho^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{0}{0+\sin^2\alpha}=0$, 此时 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)}=\cos\alpha+\sin\alpha$.

因此函数在点 $(0,0)$ 处沿任何方向的方向导数均存在.

又由基本不等式, $x^4+y^2\ge2\sqrt{x^4y^2}=2x^2|y|$, 则 $\dfrac{|x^3y|}{x^4+y^2}\le\dfrac{|x^3y|}{2x^2|y|}=\dfrac{|x|}{2}$.

又因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|x|}{2}=0$, 由夹逼准则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|x^3y|}{x^4+y^2}=0$.

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}=0$, 则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x+y+0=0$.

即有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$ 成立, 从而函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

82. 设 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$, 证明: $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿任何方向的方向导数均存在, 但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

证明: 先考虑 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性. 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 此时 $r>0$.

从而当 $(x,y)\to(0,0)$ 时有 $r\to0^+$. 于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{r\to0^+}\sqrt[3]{r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta}=\lim_{r\to0^+}r\sqrt[3]{\cos^3\theta+\sin^3\theta}=\sqrt[3]{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\lim_{r\to0^+}r=0.$$

因此有 $f(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$, 从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

再考虑 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可偏导性.

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^3}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1.$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\sqrt[3]{y^3}-0}{y}=\lim_{y\to0}\frac{y}{y}=1.$$

最后考虑 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性, 有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-0-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
=&\lim_{r\to0^+}\frac{\sqrt[3]{r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta}-r\cos\theta-r\sin\theta}{r}\\
=&\lim_{r\to0^+}\sqrt[3]{\cos^3\theta+\sin^3\theta}-\cos\theta-\sin\theta=\sqrt[3]{\cos^3\theta+\sin^3\theta}-\cos\theta-\sin\theta.
\end{aligned}
$$

当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时, $\sqrt[3]{\cos^3\theta+\sin^3\theta}-\cos\theta-\sin\theta=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt[3]{1+3\sqrt{3}}-1-\sqrt{3}}{2}\neq0.$

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

9.8 偏导数在几何中的应用 习题

83. 求下列曲线在指定点处的切线方程:

(1) $\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=2\sin t,\\ z=6t,\end{cases}\quad t=\dfrac{\pi}{3};$ (2) $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t,\\ z=4\sin\dfrac{t}{2},\end{cases}\quad t=\dfrac{\pi}{2};$

(3) $\begin{cases}x=e^t\cos t,\\ y=e^t\sin t,\\ z=e^t,\end{cases}\quad t=\dfrac{\pi}{4};$ (4) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=50,\\ x^2+y^2=z^2,\end{cases}$ 点 $(3,4,5)$.

解: (1) 由题, 对 $\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t,2\sin t,6t)$, 则 $\boldsymbol{r}'(t)=(-2\sin t,2\cos t,6)$.

代入 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 则 $x=2\cos\dfrac{\pi}{3}=1$, $y=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $z=6\cdot\dfrac{\pi}{3}=2\pi$,

$\boldsymbol{r}'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\left(-2\sin\dfrac{\pi}{3},2\cos\dfrac{\pi}{3},6\right)=(-\sqrt{3},1,6).$

则取在点 $(1,\sqrt{3},2\pi)$ 处的切线, 且切线的方向向量即为 $\boldsymbol{r}'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=(-\sqrt{3},1,6)$.

因此切线方程为 $\dfrac{x-1}{-\sqrt{3}}=\dfrac{y-\sqrt{3}}{1}=\dfrac{z-2\pi}{6}$.

(2) 由题, 对 $\boldsymbol{r}(t)=\left(t-\sin t,1-\cos t,4\sin\dfrac{t}{2}\right)$, 则 $\boldsymbol{r}'(t)=\left(1-\cos t,-\sin t,2\cos\dfrac{t}{2}\right)$.

代入 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 则 $x=\dfrac{\pi}{2}-\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}-1$, $y=1-\cos\dfrac{\pi}{2}=1$, $z=4\sin\dfrac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$,

$\boldsymbol{r}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(1-\cos\dfrac{\pi}{2},-\sin\dfrac{\pi}{2},2\cos\dfrac{\pi}{4}\right)=(1,-1,\sqrt{2}).$

则取在点 $\left(\frac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$ 处的切线, 且切线的方向向量即为 $\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=(1,-1,\sqrt{2})$.

因此切线方程为 $\dfrac{x-1}{-\sqrt{3}}=\dfrac{y-\sqrt{3}}{1}=\dfrac{z-2\pi}{6}$.

(3) 由题, 对 $\boldsymbol{r}(t)=(e^t\cos t,e^t\sin t,e^t)$, 则 $\boldsymbol{r}'(t)=(-e^t\sin t+e^t\cos t,e^t\cos t+e^t\sin t,e^t)$.

代入 $t=\frac{\pi}{4}$ 则 $x=e^{\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$, $y=e^{\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$, $z=e^{\frac{\pi}{4}}$,

$\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(-e^{\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{4}+e^{\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\pi}{4},e^{\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\pi}{4}+e^{\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{4},e^{\frac{\pi}{4}}\right)=\left(0,\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}},e^{\frac{\pi}{4}}\right)$.

则取在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}},e^{\frac{\pi}{4}}\right)$ 处的切线, 且切线的方向向量即为 $\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(0,\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}},e^{\frac{\pi}{4}}\right)$.

因此切线方程为 $\dfrac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{0}=\dfrac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}=\dfrac{z-e^{\frac{\pi}{4}}}{e^{\frac{\pi}{4}}}$.

(4) 对 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-50=0$, 此时有 $F'_x=2x$, $F'_y=2y$, $F'_z=2z$.

对 $G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2=0$, 此时有 $G'_x=2x$, $G'_y=2y$, $G'_z=-2z$.

此时有 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\ G'_y & G'_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 2y & -2z\end{vmatrix}=-4yz-4yz=-8yz$;

$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}F'_z & F'_x\\ G'_z & G'_x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2z & 2x\\ -2z & 2x\end{vmatrix}=4xz-(-4xz)=8xz$;

$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\ G'_x & G'_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ 2x & 2y\end{vmatrix}=4xy-4xy=0$.

于是曲线在点 $(3,4,5)$ 处的切向量, 即切线的方向向量

$$\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)\Bigg|_{(3,4,5)}=(-8yz,8xz,0)\Big|_{(3,4,5)}=(-160,120,0).$$

因此切线方程为 $\dfrac{x-3}{-160}=\dfrac{y-4}{120}=\dfrac{z-5}{0}$.

84. 在曲线 $C:\boldsymbol{r}(t)=\left(t,\frac{1}{2}t^2,\frac{1}{3}t^3\right)$ 上求一点, 使该点处切线与平面 $x-2y+z=4$ 平行, 并求该点处的切线方程.

解: 由题, $\boldsymbol{r}'(t)=(1,t,t^2)$. 且已知平面法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-2,1)$.

则在点 $\left(t_0,\frac{t_0^2}{2},\frac{t_0^3}{3}\right)$ 处的切线法向量为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}'(t_0)=(1,t_0,t_0^2)$.

因为切线与平面平行, 则应有 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{v}$, 即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=(1,-2,1)\cdot(1,t_0,t_0^2)=1-2t_0+t_0^2=0$.

解得 $t_0=1$, 对应点坐标 $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$, $\boldsymbol{v}=(1,1,1)$, 从而切线方程为 $x-1=y-\frac{1}{2}=z-\frac{1}{3}$.

85. 证明: 螺旋线 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$ 上任意一点处的切线与 z 轴成定角.

证明: 由题, 螺旋线的切向量 $\boldsymbol{r}'(t)=(-a\sin t,a\cos t,b)$.

即对螺旋线上任意一点 $P(a\cos t_0,a\sin t_0,bt_0)$, 其切线的方向向量 $\boldsymbol{l}=(-a\sin t_0,-a\cos t_0,b)$.

又 z 轴有一方向向量 $\boldsymbol{v}=(0,0,1)$, 设切线与 z 轴所成的锐角为 θ, 则有

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{l}||\boldsymbol{v}|}=\frac{|0+0+b|}{\sqrt{(-a\sin t_0)^2+(a\cos t_0)^2+b^2}\sqrt{1}}=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

则 $\cos\theta$ 与 t_0 无关, 为一定值, 从而 θ 也为定值.

因此螺旋线 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$ 上任意一点处的切线与 z 轴成定角.

86. 求曲面 $S:x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面, 使得所求切平面平行于平面 $x+4y+6z=6$.

解: 对 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21=0$, 有 $F'_x=2x$, $F'_y=4y$, $F'_z=6z$.

从而在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面法向量 $\boldsymbol{n}_0=(F'_x,F'_y,F'_z)\Big|_M=(2x_0,4y_0,6z_0)$.

又已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,4,6)$, 且切平面平行于已知平面.

则有 $\boldsymbol{n}_0\,/\!/\,\boldsymbol{n}$, 从而 $\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6}$, 即 $y_0=z_0=2x_0$.

又因为点 $M(x_0,2x_0,2x_0)$ 在曲面 S 上, 代入坐标则有 $x_0^2+2(2x_0)^2+3(2x_0)^2=21$, 即 $21x_0^2=21$.

解得 $x_0=\pm1$, 对应 $M(1,2,2)$ 或 $M(-1,-2,-2)$.

$x_0=1$ 时, $\boldsymbol{n}_0=(2,8,12)$, 则切平面方程为 $2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0$,

化简即 $x+4y+6z-21=0$.

$x_0=-1$ 时, $\boldsymbol{n}_0=(-2,-8,-12)$, 则切平面方程为 $-2(x+1)-8(y+2)-12(z+2)=0$,

化简即 $x+4y+6z+21=0$.

综上, 所求切平面方程为 $x+2y+3z-21=0$ 或 $x+2y+3z+21=0$.

87. 求曲面 $S: x^2+2y^2+3z^2=20$ 在点 $(3,2,1)$ 处的法线方程.

解: 对 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-20=0$, 有 $F_x'=2x$, $F_y'=4y$, $F_z'=6z$.

从而在点 $P(3,2,1)$ 处的切平面法向量 $\boldsymbol{n}=(F_x',F_y',F_z')\Big|_M=(6,8,6)$.

因此在点 $(3,2,1)$ 处的法线方程为 $\dfrac{x-3}{6}=\dfrac{y-2}{8}=\dfrac{z-1}{6}$.

88. 求曲面 $S: x^2+2y^2-3z^2=3$ 在点 $(2,-1,1)$ 处的切平面方程.

解: 对 $F(x,y,z)=x^2+2y^2-3z^2-3=0$, 有 $F_x'=2x$, $F_y'=4y$, $F_z'=-6z$.

从而在点 $P(2,-1,1)$ 处的切平面法向量 $\boldsymbol{n}_0=(F_x',F_y',F_z')\Big|_M=(4,-4,-6)$.

因此切平面方程为 $4(x-2)+(-4)(y+1)+(-6)(z-1)=0$, 化简即 $2x-2y-3z-3=0$.

89. 求曲面 $S: 2x^2+3y^2+z^2=9$ 上与直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{2}$ 垂直的切平面方程.

解: 对 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-9=0$, 有 $F_x'=4x$, $F_y'=6y$, $F_z'=2z$.

从而在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面法向量 $\boldsymbol{n}_0=(F_x',F_y',F_z')\Big|_M=(4x_0,6y_0,2z_0)$.

又已知直线的方向向量 $\boldsymbol{v}=(2,-3,2)$, 且切平面与已知直线垂直.

则有 $\boldsymbol{n}_0 \,/\!/\, \boldsymbol{v}$, 从而 $\dfrac{4x_0}{2}=\dfrac{6y_0}{-3}=\dfrac{2z_0}{2}$, 即 $z_0=2x_0=-2y_0$.

又因为点 $M(-y_0,y_0,-2y_0)$ 在曲面 S 上, 代入坐标则有 $2(-y_0)^2+3y_0^2+(-2y_0)^2=9$, 即 $9y_0^2=9$.

解得 $y_0=\pm1$, 对应 $M(-1,1,-2)$ 或 $M(1,-1,2)$.

$y_0=1$ 时, $\boldsymbol{n}_0=(-4,6,-4)$, 则切平面方程为 $-4(x+1)+6(y-1)+(-4)(z+2)=0$,

化简即 $2x-3y+2z+9=0$.

$y_0=-1$ 时, $\boldsymbol{n}_0=(4,-6,4)$, 则切平面方程为 $4(x-1)+(-6)(y+1)+4(z-2)=0$,

化简即 $2x-3y+2z-9=0$.

综上, 所求切平面方程为 $2x-3y+2z+9=0$ 或 $2x-3y+2z-9=0$.

90. 证明: 曲面 $S: \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$ 上任意一点处的切平面在三个坐标轴上的截距之和

为定值.

证明: 对 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}=0$, 有 $F'_x=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $F'_y=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, $F'_z=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$.

对曲面上任意一点 $P(x_0,y_0,z_0)$, 当 $x_0y_0z_0=0$ 时, 切平面不存在, 从而此时考虑 $x_0,y_0,z_0>0$ 的情况.

则在点 P 处的切平面法向量 $\boldsymbol{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)\big|_P=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}},\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}},\dfrac{1}{2\sqrt{z_0}}\right)$.

因此在 P 点处的切平面方程为 $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\dfrac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$.

又因为 P 在曲面 S 上满足 $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$, 从而化简有切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{\sqrt{z_0}}z-\sqrt{a}=0.$$

由此可得切平面的截距式方程为 $\dfrac{x}{\sqrt{ax_0}}+\dfrac{y}{\sqrt{ay_0}}+\dfrac{z}{\sqrt{az_0}}=1$.

从而在三个坐标轴上的截距分别为 $\sqrt{ax_0}$, $\sqrt{ay_0}$, $\sqrt{az_0}$.

因此截距之和为 $\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$, 则为定值.

91. 设 $F(x,y,z)$ 具有连续偏导数, 证明: 曲面 $F\left(\dfrac{z}{y},\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{x}\right)=0$ 的切平面过定点.

证明: 由题, $F'_x=F'_1\cdot 0+F'_2\cdot\dfrac{1}{z}+F'_3\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot y=\dfrac{1}{z}F'_2-\dfrac{y}{x^2}F'_3$.

$F'_y=F'_1\cdot\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)\cdot z+F'_2\cdot 0+F'_3\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{z}{y^2}F'_1+\dfrac{1}{x}F'_3$.

$F'_z=F'_1\cdot\dfrac{1}{y}+F'_2\cdot\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)\cdot x+F'_3\cdot 0=\dfrac{1}{y}F'_1-\dfrac{x}{z^2}F'_2$.

因此对曲面上任意一点 $P(a,b,c)$, 在 P 处的切平面法向量

$$\boldsymbol{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)\big|_P=\left(\frac{1}{c}F'_2-\frac{b}{a^2}F'_3,-\frac{c}{b^2}F'_1+\frac{1}{a}F'_3,\frac{1}{b}F'_1-\frac{a}{c^2}F'_2\right).$$

从而在 P 处的切平面方程为

$$\left(\frac{1}{c}F'_2-\frac{b}{a^2}F'_3\right)(x-a)+\left(-\frac{c}{b^2}F'_1+\frac{1}{a}F'_3\right)(y-b)+\left(\frac{1}{b}F'_1-\frac{a}{c^2}F'_2\right)(z-c)=0.$$

将相同的偏导合并整理有

$$F'_1\left(-\frac{c}{b^2}y+\frac{c}{b}+\frac{1}{b}z-\frac{c}{b}\right)+F'_2\left(\frac{1}{c}x-\frac{a}{c}-\frac{a}{c^2}z+\frac{a}{c}\right)+F'_3\left(-\frac{b}{a^2}x+\frac{b}{a}+\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}\right)=0.$$

再次整理, 则切平面方程为

$$\left(\frac{1}{c}F'_2-\frac{b}{a^2}F'_3\right)x+\left(-\frac{c}{b^2}F'_1+\frac{1}{a}F'_3\right)y+\left(\frac{1}{b}F'_1-\frac{a}{c^2}F'_2\right)z=0.$$

从而该切平面恒过点 $(0,0,0)$.

92. 设 P_0 是曲面 $S: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 外一定点, $P_1 \in S$, 若 $|P_0P_1|=\max\limits_{P\in S}|P_0P|$. 证明: 直线 P_0P_1 为曲面 S 在点 P_1 处的法线.

证明: 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 曲面 S 上任意一点 $P(x_P,y_P,z_P)$, 此时 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}>1$.

从而 $|P_0P|=\sqrt{(x_P-x_0)^2+(y_P-y_0)^2+(z_P-z_0)^2}$, 则 $|P_0P|$ 取最大值时, $|P_0P|^2$ 也取最大值.

又 P 在曲面 S 上, 有 $\frac{x_P^2}{a^2}+\frac{y_P^2}{b^2}+\frac{z_P^2}{c^2}=1$.

则构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$.

令

$$\begin{cases} L_x'=2(x-x_0)+\frac{2\lambda}{a^2}x=0, \\ L_y'=2(y-y_0)+\frac{2\lambda}{b^2}y=0, \\ L_z'=2(z-z_0)+\frac{2\lambda}{c^2}z=0, \\ L_\lambda'=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0. \end{cases} \quad \text{即有} \quad \begin{cases} x-x_0=-\lambda\frac{x}{a^2}, \\ y-y_0=-\lambda\frac{y}{b^2}, \\ z-z_0=-\lambda\frac{z}{c^2}. \end{cases}$$

因为 $\overrightarrow{P_0P}=(x_P-x_0,y_P-y_0,z_P-z_0)$, 则当取驻点时, 有

$\overrightarrow{P_0P}=\left(-\lambda\frac{x_P}{a^2},-\lambda\frac{y_P}{b^2},-\lambda\frac{z_P}{c^2}\right) \mathbin{/\mkern-5mu/} \left(\frac{x_P}{a^2},\frac{y_P}{b^2},\frac{z_P}{c^2}\right)$.

由实际情况, $|P_0P|$ 有最大值, 则最大值在驻点处取到.

从而对 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $\overrightarrow{P_0P_1} \mathbin{/\mkern-5mu/} \left(\frac{x_1}{a^2},\frac{y_1}{b^2},\frac{z_1}{c^2}\right)$.

对 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, 有 $F_x'=\frac{2x}{a^2}$, $F_y'=\frac{2y}{b^2}$, $F_z'=\frac{2z}{c^2}$.

因此在 P_1 处的法线方向向量 $\boldsymbol{v}=(F_x',F_y',F_z')\Big|_{P_1}=\left(\frac{2x_1}{a^2},\frac{2y_1}{b^2},\frac{2z_1}{c^2}\right)$.

则有 $\overrightarrow{P_0P_1} \mathbin{/\mkern-5mu/} \boldsymbol{v}$, 从而直线 P_0P_1 为曲面在点 P_1 处的法线.

93. 在曲面 $S: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a,b,c>0)$ 的第一卦限上求一点, 使该点处的切平面与三个坐标平面所围立体的体积最小, 并求此最小体积.

解: 设曲面 S 上第一卦限内的点 $P(x_0,y_0,z_0)$, 此时 $x_0,y_0,z_0>0$.

对 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, 有 $F_x'=\frac{2x}{a^2}$, $F_y'=\frac{2y}{b^2}$, $F_z'=\frac{2z}{c^2}$.

因此在 P 处的切平面法向量 $\boldsymbol{n}=(F_x',F_y',F_z')\Big|_P=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)$.

从而对应切平面方程为 $\dfrac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\dfrac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\dfrac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$.

又因为点 P 在曲面 S 上有 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$,

从而化简的切平面方程为 $\dfrac{x_0}{a^2}x+\dfrac{y_0}{b^2}y+\dfrac{z_0}{c^2}z-1=0$.

代入 $x=y=0$ 解得 $z=\dfrac{c^2}{z_0}$; 代入 $x=z=0$ 解得 $y=\dfrac{b^2}{y_0}$; 代入 $y=z=0$ 解得 $x=\dfrac{a^2}{x_0}$.

即切平面与坐标轴交点分别为 $A\left(\dfrac{a^2}{x_0},0,0\right)$, $B\left(0,\dfrac{b^2}{y_0},0\right)$, $C\left(0,0,\dfrac{c^2}{z_0}\right)$.

从而切平面与三个坐标平面所围立体即四面体 $OABC$. 其体积

$$V=\frac{1}{3}|OC|\cdot\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{6}\cdot\frac{c^2}{z_0}\cdot\frac{a^2}{x_0}\cdot\frac{b^2}{y_0}=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}.$$

当 V 最小时, 则 $x_0y_0z_0$ 最大. 利用点 P 在曲面 C 上的条件,

构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$, 此时 $x,y,z>0$.

令

$$\begin{cases}L_x'=yz+\dfrac{2\lambda}{a^2}x=0,\\ L_y'=xz+\dfrac{2\lambda}{b^2}y=0,\\ L_z'=xy+\dfrac{2\lambda}{c^2}z=0,\\ L_\lambda'=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0.\end{cases}\quad \text{由前三个方程有}\quad \begin{cases}xyz=-\dfrac{2\lambda}{a^2}x^2,\\ xyz=-\dfrac{2\lambda}{b^2}y^2,\\ xyz=-\dfrac{2\lambda}{c^2}z^2.\end{cases}$$

因为 $x,y,z>0$, 则 $\lambda\neq 0$, 从而有 $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{1}{3}$.

$\frac{1}{3}bc+\frac{2\lambda}{a}\frac{\sqrt{3}}{3}a=0$

解得 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$, $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b$, $z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}c$.

$\frac{1}{2\sqrt{3}}$ $\frac{1}{3}abc=\frac{2\sqrt{3}}{3}\lambda$

由实际情况, 则 xyz 一定有最大值, 从而当 $P(x_0,y_0,z_0)$ 取 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a,\dfrac{\sqrt{3}}{3}b,\dfrac{\sqrt{3}}{3}c\right)$ 时 $x_0y_0z_0$ 取到最大值.

此时 $x_0y_0z_0=\dfrac{\sqrt{3}}{9}abc$, 则 $V=\dfrac{a^2b^2c^2}{6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{9}abc}=\dfrac{\sqrt{3}abc}{2}$.

即点 $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a,\dfrac{\sqrt{3}}{3}b,\dfrac{\sqrt{3}}{3}c\right)$ 处切平面与三个坐标平面所围立体体积最小, 最小体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$.

94. 证明: 光滑曲面 $S:F(x,y,z)=0$ 上到平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$ 距离最短点处的切平面

与平面 π 平行.

证明: 这里需要说明的是, 原题应保证曲面与平面 π 没有交点, 否则该结论是不成立的.

设曲面 S 上的点 $P(x_0,y_0,z_0)$, 则 P 到平面 π 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

则 d 取最小值时, 则 $(Ax_0+By_0+Cz_0+D)^2$ 应取最小值.

构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=(Ax+By+Cz+D)^2+\lambda F(x,y,z)$.

由题, 此时应有 $(Ax+By+Cz+D)^2>0$, 保证 S 上没有与平面 π 相交的点.

令

$$\begin{cases} L'_x=2A(Ax+By+Cz+D)+\lambda F'_x(x,y,z)=0, \\ L'_y=2B(Ax+By+Cz+D)+\lambda F'_y(x,y,z)=0, \\ L'_z=2C(Ax+By+Cz+D)+\lambda F'_z(x,y,z)=0, \\ L'_\lambda=F(x,y,z)=0. \end{cases}$$

因为 $Ax+By+Cz+D\neq 0$, 则有 $\lambda\neq 0$. 此时设驻点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, 则应有

$F'_x(x_1,y_1,z_1)=-\dfrac{2A(Ax_1+By_1+Cz_1+D)}{\lambda}$, $F'_y(x_1,y_1,z_1)=-\dfrac{2B(Ax_1+By_1+Cz_1+D)}{\lambda}$,

$F'_z(x_1,y_1,z_1)=-\dfrac{2C(Ax_1+By_1+Cz_1+D)}{\lambda}$.

因此有 $(F'_x(x_1,y_1,z_1),F'_y(x_1,y_1,z_1),F'_z(x_1,y_1,z_1))\,/\!/\,(A,B,C)$.

由实际情况, d 有最小值, 且最小值在驻点 P_1 处取到, 即 P_1 是 S 到 π 的距离最短点.

又因为在 P_1 处的切平面法向量 $\boldsymbol{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)\Big|_{P_1}=(F'_x(x_1,y_1,z_1),F'_y(x_1,y_1,z_1),F'_z(x_1,y_1,z_1))$.

从而 $\boldsymbol{n}\,/\!/\,(A,B,C)$, 且 (A,B,C) 是平面 π 的法向量.

因此曲面 S 上到平面 π 距离最短点处的切平面与平面 π 平行.

95. 设 $z=f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且满足

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{f(x,y)+x-2y+6}{(x-1)^2+(y-2)^2}=2.$$

(1) 求曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处的切平面方程;

(2) 点 $(1,2)$ 是否为函数 $z=f(x,y)$ 的极值点, 为什么?

解: (1) 由极限式可知, 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x-1)^2+(y-2)^2=0$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}f(x,y)+x-2y+6=0$.

从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}-x+2y-6=-1+4-6=-3$.

由 $f(x,y)$ 的连续性则 $f(1,2)=\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}f(x,y)=-3$.

因此有 $f(x,y)+x-2y+6=f(x,y)+3+(x-1)-2(y-2)=f(x,y)-f(1,2)+(x-1)-2(y-2)$, 又

由极限式可知

$$f(x,y)+x-2y+6=2[(x-1)^2+(y-2)^2]+o(\rho^2),\text{ 其中 }\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}.$$

从而有

$$f(x,y)=f(1,2)-(x-1)+2(y-2)+o(\rho).$$

因此 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处可微, 且 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,2)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.【利用可微的定义】

则曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处的切平面方程为 $z-(-3)=-(x-1)+2(y-2)$, 即 $z=-x+2y-6$.

(2) 由(1)中 $\mathrm{d}z$ 表达式可知, $f'_x(1,2)=-1$, $f'_y(1,2)=2$.

又因为若 $(1,2)$ 为极值点, 应有 $f'_x(1,2)=f'_y(1,2)=0$ 成立, 产生矛盾.

从而点 $(1,2)$ 不是函数的极值点.