Printout

2022年5月25日 7:41

南开大学 2019 级“多元函数微积分（信）”结课统考试卷 （A 卷） 2020 年 9 月 4 日

（说明：答案务必写在装订线右侧，写在装订线左侧无效。影响成绩后果自负。）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	卷面成绩	核分签名	复核签名
得分											

姓名 学号 专业 任课教师

草稿区

一、求曲面 $x^3+y^2+z^3=1$ 上点 $(-1,1,1)$ 处的切平面与法线方程.(本题 10 分)

一题得分	

解 $n_{法} = (3x^2, 2y, 3z^2)\big|_{(-1,1,1)} = (3,2,3)$

∴ $\pi_{切}$: $3x+2y+3z=2$

$l_{法}$: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

参数

$S_1 \cap S_2$

$n_1 \times n_2$

二、求函数 $f(x,y,z)=x-y+z$ 在闭区域 $\Omega: \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{4}+(z-2)^2 \le 1$ 上的最大值、最小值（10 分）

二题得分	

解：由 $f_x=1 \Rightarrow$ 无驻点

记 $L = f+\lambda\left(\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{4}+(z-2)^2-1\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_x = 1+\frac{\lambda}{2}(x-1)=0 & ① \\ L_y = -1+\frac{\lambda}{2}(y+1)=0 & ② \\ L_z = 1+2\lambda(z-2)=0 & ③ \\ \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{4}+(z-2)^2=1 & ④ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda(x+y)=0 \\ \frac{\lambda}{2}(y+1+4z-8)=0 \end{cases}$$

$\lambda=0$ 时 无解

∴ $\begin{cases} x+y=0 \\ y+4z=7 \end{cases}$

$\left(\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{4}+(z-2)^2\right)$

$(4+4+1)$

$\Rightarrow (x-1-(y+1)+z-2)^2$

$=(x-y+z-4)^2$

无解驻

边田条件驻

$x=4z-7$

$y=7-4z$

∴ $\frac{(4z-8)^2}{4}+\frac{(8-4z)^2}{4}+(z-2)^2=1$

$\Rightarrow (z-2)^2=\frac{1}{9}$

$\Rightarrow (x,y,z)=(\frac{7}{3},-\frac{7}{3},\frac{7}{3})$

或 $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$

∴ 综上 f 在 $(\frac{7}{3},-\frac{7}{3},\frac{7}{3})$ 取最大值

$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$ 取最小值

草稿

$z=\frac{7}{3}$

$x=4\cdot\frac{7}{3}-7=\frac{7}{3}$

$z=\frac{5}{3}$

$x=4\cdot\frac{5}{3}-7=-\frac{1}{3}$

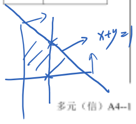
$x-y+z$

$-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$

三、计算下列二重积分（每小题8分）：

（1）$\iint\limits_D (1-x-y)dxdy$，其中 D：$x,y\ge 0, x+y\le 1$；

三题得分	



解 依题意 D: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$

∴ 原式 $= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, (1-x-y)$

$= \int_0^1 dx\, \frac{-1}{2}(1-x-y)^2\Big|_0^{1-x}$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\, (1-x)^2 = \frac{-1}{6}(1-x)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$

y v.s x^2

（2）$\iint\limits_D |y-x^2|\,dxdy$，其中区域 D 为：$0\le y\le 1, -1\le x\le 1$

$= \iint\limits_{D_1}(y-x^2)dx + \iint\limits_{D_2}(x^2-y)dxdy$

D_1: $-1\le x\le 1$, $x^2\le y\le 1$

D_2: $-1\le x\le 1$, $0\le y\le x^2$

∴ 原式 $= \int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 dy\,(y-x^2) + \int_{-1}^1 dx\int_0^{x^2} dy\,(x^2-y)$

$= \int_{-1}^1 dx\,\frac{1}{2}(y-x^2)^2\Big|_{x^2}^1 + \int_{-1}^1 dx\,\frac{-1}{2}(x^2-y)^2\Big|_0^{x^2}$

$= \int_{-1}^1 dx\,\frac{1}{2}((1-x^2)^2) + \int_{-1}^1 dx\cdot\frac{1}{2}x^4$

$= \frac{1}{2}(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5)\Big|_{-1}^1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^1$

$= 1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$

$= \frac{11}{15}$

$1-2x^2+x^4$

$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$

四、计算下列三重积分（每小题 8 分）：

（1）$\iiint\limits_\Omega (1+z^4)dxdydz$，其中 Ω 为由曲面 $z=x^2+y^2, z=1$ 所围的区域；

四题得分	

解：Ω: $0\le z\le 1$, $(x,y)\in D_z$

D_z: $x^2+y^2\le z$

∴ 原式 $= \int_0^1 dz\,(1+z^4)\iint\limits_{D_z} dxdy$

$= \int_0^1 dz\,(1+z^4)\pi z$

$= \pi\left(\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^6\right)\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}$

Ω: $x^2+y^2\le 1$, $x^2+y^2\le z\le 1$

(柱)，$r\le 1$ $\theta\in[0,2\pi]$ $r^2\le z\le 1$

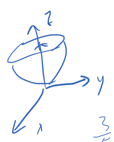
原式 $= \int_0^1 dr\int_0^{2\pi} d\theta \int_{r^2}^1 dz\,(1+z^4)\cdot r$

$= 2\pi\int_0^1 dr\, r\cdot(z+\frac{1}{5}z^5)\Big|_{r^2}^1$

$= 2\pi\int_0^1 dr\,(\frac{6}{5}-r^2-\frac{1}{5}r^{10})\cdot r$

$= 2\pi(\frac{3}{5}r^2-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{60}r^{12})\Big|_0^1$

$= \frac{2\pi}{3}$



$\frac{3}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{60}$

$\frac{36-15-1}{60} = \frac{20}{60}$

（2）$\iiint\limits_\Omega e^{|z|}dxdydz$，其中 Ω：$x^2+y^2+z^2\le 1$

$= 2\iiint\limits_{\Omega_1} e^z dxdydz$

Ω_1: $x^2+y^2+z^2\le 1$, $z\ge 0$

∴ $0\le z\le 1$, $x^2+y^2\le 1-z^2$

∴ 原式 $= 2\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z} dxdy\cdot e^z = 2\int_0^1 e^z\pi(1-z^2)dz$

$= 2\pi e^z(1-z^2)\Big|_0^1 + 2\pi\int_0^1 e^z\cdot 2z\,dz$

$= -2\pi + 4\pi e^z\cdot z\Big|_0^1 - 4\pi\int_0^1 e^z dz$

$= -2\pi + 4\pi\cdot e - 4\pi\cdot e^z\Big|_0^1 = 2\pi$

五、计算下列曲线积分与曲面积分：（每小题 10 分）

$Q_x = P_y$

（1）设曲线积分 $\int_C 2xydx+(2y+\varphi(x))dy$ 与路径无关，$\varphi(x)$ 连续，且 $\varphi(0)=0$，

求积分：$\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx+(2y+\varphi(x))dy$

五题得分	

解 记 $P=2xy$ $Q=2y+\varphi(x)$

依题意 $Q_x=P_y$

$\Rightarrow \varphi'(x)=2x$ 又 $\varphi(0)=0$

$\Rightarrow \varphi(x)=x^2$

∴ 因 u 使 $du=Pdx+Qdy$

由 $P=2xy$

$\Rightarrow u=x^2y+g(y)$

由 $u_y=x^2+g'(y)=Q$.

$\Rightarrow g'(y)=2y \Rightarrow g(y)=y^2+C$

∴ 取 $u=x^2y+y^2$

∴ 原式 $= u(1,1)-u(0,0)=2.$

草稿区

$Pdx+Qdy+Rdz$

$Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

$u=\int pdx + \int Qdy$

$P=2xy$ $Q=2y+x^2$

$\Rightarrow \int pdx = x^2y+C$ $\int Qdy = y^2+x^2y+C$

∴ $u=y^2+2x^2y$

$Q_x=P_y$

$du=Pdx+Qdy$

$\int_A^B(\text{——})$

$=u(B)-u(A)$

由 $u_x=P$

$\Rightarrow u=\int pdx+g(y)$

由 $u_y=Q$.

$\Rightarrow g=V.$

$\frac{r^3}{\sqrt{R^2-r^2}}$

（2）求曲面积分 $I=\iint\limits_\Sigma (x-y)^2 dS$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2, (R>0)$

解：由对称性

$I = 2\iint\limits_{\Sigma_1}(x-y)^2 dS$

Σ_1: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\le R^2$

$\Rightarrow z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $z_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

∴ $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

∴ 原式 $= 2\iint\limits_D (x^2-2xy+y^2)\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

$= 2\iint\limits_D (x^2+y^2)\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$

D: $x^2+y^2\le R^2 \Rightarrow r\le R$, $\theta\in[0,2\pi]$

∴ 原式 $= 2\int_0^R dr\int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{Rr^2}{\sqrt{R^2-r^2}}r$

$= 4\pi R\int_0^R dr\, r\,\frac{R^2-(R^2-r^2)}{\sqrt{R^2-r^2}}$

$= 4\pi R\int_0^R \left[R^2\cdot r\cdot(R^2-r^2)^{-\frac{1}{2}} - r(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\right]dr$

$\iint\limits_\Sigma (x-y)^2 dS$

$= \iint\limits_\Sigma (x^2+y^2-2xy)dS$

$= \iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)dS = 2\iint\limits_\Sigma x^2 dS$

$= \frac{2}{3}\iint\limits_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS$

Σ: $x^2+y^2+z^2=R^2$

六、（10 分）求曲线积分 $I=\oint\limits_L \frac{(x-y)dy-(x+y)dx}{x^2+y^2}$，其中 L 是以（1,0）为中心，$R$ 为半径（$R>0, R\ne 1$）的圆周，取逆时针方向；

六题得分	

$\therefore dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = \dfrac{R\,dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

$D: x^2+y^2\le R^2 \Rightarrow r\le R,\ \theta\in[0,2\pi]$

$= 4\pi R\int_0^R dr\, r\ \dfrac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}$

$= 4\pi R\int_0^R\left[R^2\cdot r\cdot(R^2-r^2)^{-\frac12} - r(R^2-r^2)^{\frac12}\right]dr$

$= 4\pi R\cdot\left(R^2\cdot(R^2-r^2)^{\frac12}(-1) + (R^2-r^2)^{\frac32}\tfrac13\right)\Big|_0^R$

$= 4\pi R\left(R^3-\tfrac13\cdot R^3\right) = \tfrac{4\pi}{3}R^4$

$= \iint_\Sigma (x^2+y^2)dS = 2\iint_\Sigma x^2 dS$

$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$

$= \tfrac23\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS$

$= \tfrac{2R^2}{3}\cdot S(\Sigma) = \tfrac{8\pi R^4}{3}$

六、（10 分）求曲线积分 $I=\oint_L \dfrac{(x-y)dy-(x+y)dx}{x^2+y^2}$，其中 L 是以（1,0）为中心，$R$ 为半径（$R>0, R\neq 1$）的圆周，取逆时针方向；

六题	
得分	

解：记 $P=\dfrac{-(x+y)}{x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{(x-y)}{x^2+y^2}$

则 $Q_x=\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{(x-y)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$P_y=\dfrac{-1}{x^2+y^2}+\dfrac{(x+y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\therefore Q_x-P_y=0$

若 $R<1 \Rightarrow I=\iint_{D_1}(Q_x-P_y)dxdy=0$

$D_1: (x-1)^2+y^2\le R^2$ 略

若 $R>1$ 取 L_2 $x^2+y^2=\varepsilon^2$（ε较小）

记 $J=\oint_{L_2^+}(Pdx+Qdy)$

则 $I-J=\iint_{D_2}(Q_x-P_y)dxdy=0$

$D_2: (x-1)^2+y^2\le R^2,\ x^2+y^2\ge\varepsilon^2$ 略

$\therefore I=J=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_2^+}(-(x+y)dx+(x-y)dy)$

$=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_3}(1-(-1))dxdy=\dfrac{2}{\varepsilon^2}S(D_3)$

! $D_3: x^2+y^2\le\varepsilon^2 \Rightarrow I=\dfrac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot\varepsilon^2 = 2\pi.$

草稿区

Gauss Green

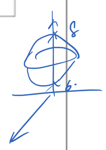
待选

七、（10 分）设 $f(u)$ 具有连续导函数，Σ 是曲面 $z=x^2+y^2+6$，$z=8-x^2-y^2$ 所围立体表面的外侧，求曲面积分：$\iint_\Sigma \frac{1}{z}f(\frac{e^x}{z})dydz+ydzdx+f(\frac{e^x}{z})dxdy$

七题	
得分	

解 记 $P=\frac1z f(\frac{e^x}{z})$ $Q=y$ $R=f(\frac{e^x}{z})$.

则 $P_x=\frac{e^x}{z^2}f'(\frac{e^x}{z})$、$Q_y=1$、$R_z=f'(\frac{e^x}{z})\cdot\frac{e^x}{-z^2}$



$\therefore$ 原式 $=\iiint_\Omega (P_x+Q_y+R_z)dxdydz=\iiint_\Omega dxdydz.$

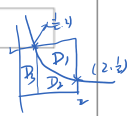
由 $\begin{cases} z=x^2+y^2+6\\ z=8-x^2-y^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1\\ z=7\end{cases}$ $\therefore \Omega$: $x^2+y^2\le 1$，$6+x^2+y^2\le z\le 8-x^2-y^2$

$\therefore$（柱）：$r\le 1$、$\theta\in[0,2\pi]$，$6+r^2\le z\le 8-r^2$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_{6+r^2}^{8-r^2}dz\cdot r = 2\pi\int_0^1 r\cdot(2-2r^2)dr = 2\pi\left(r^2-\frac{r^4}{2}\right)\Big|_0^1=\pi.$

八、（8 分）设有区域 $D=\{(x,y): 0\le x,\ y\le 2\}$，试求二重积分：$\iint_D |xy-1|dxdy$

八题	
得分	



解 原式 $=\iint_{D_1}(xy-1)dxdy+\iint_{D_2}(1-xy)dxdy+\iint_{D_3}(1-xy)dxdy$

D_1：$\frac12\le x\le 2$，$\frac1x\le y\le 2$

D_2：$\frac12\le x\le 2$，$0\le y\le\frac1x$

D_3：$0\le x\le\frac12$，$0\le y\le 2$

$\therefore$ 原式 $=\int_{\frac12}^2 dx\int_{\frac1x}^2 dy\,(xy-1)+\int_{\frac12}^2 dx\int_0^{\frac1x}dy\,(1-xy)+\int_0^{\frac12}dx\int_0^2 dy\,(1-xy)$

$=\int_{\frac12}^2 dx\left(\frac{xy^2}{2}-y\right)\Big|_{\frac1x}^2+\int_{\frac12}^2 dx\left(y-\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac1x}+\int_0^{\frac12}dx\left(y-\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_0^2$

$=\int_{\frac12}^2 dx\left(2x-2-\frac{1}{2x}+\frac1x\right)+\int_{\frac12}^2 dx\left(\frac1x-\frac{1}{2x}\right)+\int_0^{\frac12}dx\,(2-2x)$

$=x^2-2x+\frac12\ln x\Big|_{\frac12}^2+\frac12\ln x\Big|_{\frac12}^2+(2x-x^2)\Big|_0^{\frac12}$

$=(\frac34+\ln 2)+(\ln 2)+(\frac34)=\frac32+2\ln 2.$