

彭 · 高数

高等数学下期末试题集

(2012-2022)



彭康书院学业辅导与发展中心

2022 年高等数学下期末试题

一、选择题 (共 5 题, 每题 3 分)

1. 曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ z = xy \end{cases}$ 在点 $(2, 1, 2)$ 处的切线方程为 ()
 A. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ z = xy \end{cases}$ C. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$
2. 函数 $f(x, y) = xy^3$ 在椭圆 $2x^2 + 3y^2 \leq 4$ 上的最大值为 ()
 A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2
3. 极限 $\lim_{r \rightarrow 0^+} \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} e^{x^2 + y^2} dx dy$ 等于 ()
 A. 0 B. 1 C. π D. 2π
4. 设有向曲面 $\Sigma: x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, (z \geq 1)$, 定向为上侧, 则第二类曲面积分

$$\iint_{\Sigma} 2xy dy \wedge dz - y^2 dz \wedge dx - z dx \wedge dy$$

 等于 ()
 A. $-\frac{5}{3}\pi$ B. $-\frac{2}{3}\pi$ C. $-\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{3}$
5. 已知幂函数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 2, 则数项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ 是 ()
 A. 绝对收敛 B. 条件收敛
 C. 发散 D. 无法确定是否收敛

一、填空题 (共 5 题, 每题 3 分)

1. 设函数 $u(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}$, 则在点 $(e, 1, 1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l} = (1, -2, 2)$ 的方向导数 $\left. \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}} \right|_{(e, 1, 1)} =$ _____.
2. 设 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$, 则二重积分 $\iint_D (x + |y|) dx dy =$ _____.
3. 设 L 为圆 $x^2 + y^2 = 4$, 则 $\int_L (2x^2 - 3y^2) ds =$ _____.
4. 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n}$ 的收敛域为 _____.
5. 若级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n^b}, (a > 0, b > 0)$ 收敛, 则 a 和 b 满足的条件是 _____.

三、计算题

1. 求函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

2. 计算三次积分 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 x e^{z^2} dz$.

3. 设曲线 $C: 2x^2 + y^2 = 1$, 方向取逆时针方向. 求曲线积分 $\int_C \frac{(x+y)dx + (y-x)dy}{x^2 + y^2}$.

4. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} y^2 dS$, 其中 $\Sigma = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

5. 将 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数.

6. 设 $f(x)$ 为周期为 3 的周期函数, 它在一个周期内的表达式为: $f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1 \\ 1, & 1 \leq |x| \leq \frac{3}{2} \end{cases}$, 试写出 $f(x)$ 在一个周期内的 Fourier 级数及和函数 $S(x)$ 的表达式, 并求 $S(-2), S(3), S\left(\frac{9}{2}\right)$ 的值.

7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0, (n \geq 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数, 求 $S(x)$ 的表达式.

四、设连续函数 $f(x)$ 恒正, $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq t^2\}$, $F(t) = \frac{\iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dV}{\iint_D f(x^2 + y^2) d\sigma}$, 试判断 $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 的单调性.

五、设函数 $f(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数, 而且

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \left(x \frac{\partial f}{\partial z} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial x} - 3 \right) = 1$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 记

$$A_n = \iiint_{B(n)} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dx dy dz$$

其中 $B(n) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq n^2\}$. 试讨论级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{A_n}$ 的敛散性, 若收敛, 指出收敛类型, 说明理由.

2021 年高数下期末试题

一、 填空题

1. 曲面 $\sin^2 x + \cos(y+z) = \frac{3}{4}$ 在点 $(x, y, z) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, 0\right)$ 处的切平面方程是 _____。
2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{n}\right) x^n$ 的收敛半径 R 等于 _____。
3. 若 \square^2 上的可微函数 $u(x, y)$ 的梯度 $\text{grad} u = (2x + e^x \sin y, e^x \cos y)$, 且 $u(0, \pi) = 2$, 则 $u(x, y) =$ _____。
4. 设 $L: x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 2t (0 \leq t \leq \pi)$, 则 $\int_L \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds =$ _____。
5. 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数, 其和函数记为 $S(x)$, 则 $S\left(-\frac{15}{2}\right) =$ _____。

二、 选择题

1. 函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}, & x^2 + y^2 = 0 \\ 0, & x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$ 在原点 $(0, 0)$ 处 ()
 - (A) 连续且偏导数存在
 - (B) 沿各个方向的方向导数都存在, 但不可微
 - (C) 可微
 - (D) 连续但偏导数不存在
2. 设空间区域 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则 Ω 的体积等于 ()
 - (A) $4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r \sqrt{4 - r^2} dr$
 - (B) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r \sqrt{4 - r^2} dr$
 - (C) $4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \sqrt{4 - r^2} dr$
 - (D) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{4 - r^2} dr$
3. 设 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$, 在以下四组积分中, 一组中两个积分同时为 0 的是 ()
 - (A) $\iint_{\Sigma} z^2 dx dy, \iint_{\Sigma} z dx dy$
 - (B) $\iint_{\Sigma} xz dy dz, \iint_{\Sigma} z^2 dy dz$
 - (C) $\iint_{\Sigma} y dx dz, \iint_{\Sigma} y^2 dx dz$
 - (D) $\iint_{\Sigma} y^2 dx dz, \iint_{\Sigma} 1 dx dz$
4. 二次积分 $\int_1^2 dx \int_{1/x}^1 ye^{xy} dy$ 的值为 ()
 - (A) $e^2 - e$
 - (B) $\frac{1}{2}e^2 - e$
 - (C) $e^2 + e$
 - (D) $\frac{1}{2}e^2 + e$
5. 下列命题中正确的是 ()

- (A) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
- (B) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 必存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $a_n > \frac{1}{n}$
- (C) 设 $f(x) = x - \sin x$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 绝对收敛
- (D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

三、 计算题

1. 设函数 $f(u, v)$ 具有连续二阶偏导数, $z = xf\left(xy, \frac{x}{y}\right)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。
2. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xz dS$, 其中 Σ 是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax (a > 0)$ 所截部分。
3. 求函数 $z = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2} - 2y$ 的极值。
4. 计算曲线积分 $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + \left[2x + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})\right] dy$, 其中有向曲线 $C: y = x \sin x$, 方向: $A(\pi, 0) \rightarrow O(0, 0)$ 。

5. 计算第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^3 dydz - 3x^2 y dzdx + (z^3 - 2) dxdy$, 其中 Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ 的下侧。

6. (1) 将函数 $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ 展开成麦克劳林级数;

(2) 利用(1)中所得级数, 求积分 $\int_0^1 f(x) dx$ 的值(注: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)。

五、将函数 $f(x) = x - \frac{\pi}{2} + \left| x - \frac{\pi}{2} \right| (0 \leq x \leq \pi)$ 展成余弦级数。

六、求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} x^n$ 的和函数，并求 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和。

七、函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$ ，且 $f(0, y) = y+1$ ， L_t 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分

$$I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

并求 $I(t)$ 的最小值。

八、设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，且单调增加有上界。证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[f(n) - \int_{n-1}^n f(x) dx \right]$ 收敛。

2020 年高数下期末试题

一、 选择题

1. 函数 $f(x, y)$ 的下面四条性质:

- (1) 在点 (x_0, y_0) 处连续;
- (2) 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数连续;
- (3) 在点 (x_0, y_0) 处可微;
- (4) 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数存在;

则如下表示的推导关系成立的是

()

- (A) $(2) \rightarrow (3) \rightarrow (1)$ (B) $(3) \rightarrow (2) \rightarrow (1)$ (C) $(3) \rightarrow (4) \rightarrow (1)$ (D) $(3) \rightarrow (1) \rightarrow (4)$

2. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \sin \theta, r \cos \theta) r dr$ 等于 ()

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ (B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

3. 设 L 为逆时针方向的圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 则 $\oint \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} =$ ()

- (A) 0 (B) 2π (C) $-\pi$ (D) -2π

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 则下列级数中必定收敛的是 ()

(A) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ (B) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ (C) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1} - u_{2n}$ (D) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n - u_{n+1}$

5. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 它在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式 $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, 则 $f(x)$

的傅里叶级数在 $x = -\pi$ 收敛于

()

- (A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $-\frac{\pi}{2}$ (D) π

二、 填空题

1. 设曲面 $S: z = x + f(y - z)$, 其中 f 可导, 则该曲面在任一点处切平面的法向量 n 与向量 $(1, 1, 1)$ 的夹角 θ 为 _____。

2. $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx =$ _____。

3. 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy =$ _____。

4. 已知 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} = 5$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n =$ _____。

5. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{3n+4}$ 的和函数 $S(x)$ 为 _____。

三、 计算题

1. 设 $u = f(x, y, z)$, $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$, $y = \sin x$, 其中 f, φ 都具有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求

$$\frac{du}{dx}。$$

2. 求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值与最小值。

3. 设 n 为曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的单位切向量, 且与 OZ 轴正向夹角呈锐角, 求函数

$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $(0, 1, 2)$ 处沿向量 n 的方向导数。

4. 设 Ω 是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = 2 - x^2 - y^2$ 所围成的立体, 求 Ω 的体积 V 和表面积 S 。

5. 计算曲线积分 $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy$, 其中 L 为抛物线 $2x = \pi y^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的一段弧。

6. 设 S 是半空间 $x > 0$ 中任意有向封闭曲面, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内存在连续的一阶导数, 满足

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \text{ 又 } \iiint_S xf(x)dy \wedge dz - xyf(x)dz \wedge dx - e^{2x}zdx \wedge dy = 0, \text{ 求 } f(x)。$$

7. 计算三重积分 $\iiint_{(V)} (\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c})^2 dv$, 其中 (V) 为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, a, b, c 为正数。

四、设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(1) 将函数 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数；

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和。

五、设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ ，其中 a_n ($n=0,1,2,\dots$) 是函数

$f(x)$ 的傅里叶系数，求证： $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛。

2019 年高等数学下册期末试题

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 函数 $u = 2xy - z^2$ 在点 $(2, -1, 1)$ 处沿 $I = (1, 2, -2)$ 的方向导数是_____.
2. 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n} (x+1)^n$ 的收敛域是_____.
3. 曲面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $M_0(2, 1, 4)$ 处的切平面方程为_____.
4. 设曲线 L 是从点 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(1, 2, 2)$ 的直线段, 则对弧长的曲线积分 $\int_L xe^{yz} ds =$ _____.
5. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2-2x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$, $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$ ($-\infty < x < +\infty$), 其中 $a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 则 $S(-\frac{5}{2}) =$ _____.

二、计算题 (每小题 6 分, 共 18 分)

1. 设函数 $u = f(x, y, z)$, f 具有连续的二阶偏导数, 且 $z = e^x \sin y$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.
2. 计算 $\int_C -y^2 dx + x dy + z^2 dz$, 其中曲线 C 是平面 $y + z = 4$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2y$ 的交线, 且从 z 轴正向往下看是逆时针方向.
3. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 2$ 部分.

三、计算题 (每小题 7 分, 共 21 分)

1. 求曲面 $z = x^2 + y^2$ 与圆锥面 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围空间闭区域 Ω 的体积.

2. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n!} x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$.

3. 计算 $\iiint_{\Omega} (2 \sin y + z) dV$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

四、解答题 (每小题 8 分, 共 32 分)

1. 求曲线积分 $\int_L \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t - \pi, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 由 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段.

2. 求椭圆 $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ 上的点到点 $M(0, 0, 2)$ 的最长距离和最短距离.

3. 求向量场 $\vec{A} = (2x + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 通过抛物面 $\Sigma: z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ 下侧的通量.

4. 将函数 $f(x) = \sin \frac{x}{2} (-\pi \leq x \leq \pi)$ 展开成傅里叶级数.

五、(8 分) 将 $f(x) = (1+x) \ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ 的和.

六、(6 分) 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$, L 为 D 的边界正向.
证明: $\int_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq \frac{5}{2} \pi^2$.

2018 年高数下期末试题

一、单选题

1. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的某个领域内有定义, 则下列说法正确的是 ()
- A. 若 $f(x, y)$ 在点 P 处的偏导数存在, 则 $f(x, y)$ 在该点一定可微
- B. 若 $f(x, y)$ 在点 P 处连续, 则 $f(x, y)$ 在该点的偏导数一定存在
- C. 若 $f(x, y)$ 在点 P 处有极限, 则 $f(x, y)$ 在该点一定连续
- D. 若 $f(x, y)$ 在点 P 处可微, 则 $f(x, y)$ 在该点连续且偏导数一定存在
2. 若 $f(x, y)$ 在 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上有二阶连续偏导数, 则 $\iint_D \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy = ()$
- A. $f(a, d) - f(b, d) - f(b, c) + f(a, c)$ B. $f(b, d) - f(a, d) - f(b, c) + f(a, c)$
- C. $f(a, d) - f(b, d) - f(a, c) + f(b, c)$ D. $f(b, d) - f(a, d) - f(a, c) + f(b, c)$
3. 若 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 则 $I = \oint_L (x+1)^2 ds = ()$
- A. $\frac{28}{3}\pi$ B. 8π C. $\frac{19}{3}\pi$ D. 12π
4. 微分方程 $y'' + 3y' + 2y = (ax+b)e^{-x}$ 的特解形式为 ()
- A. $y = Axe^{-x}$ B. $y = (Ax+B)e^{-x}$ C. $y = (Ax+B)xe^{-x}$ D. $y = Ax^2e^{-x}$
5. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2) = ()$
- A. $2f(2)$ B. $f(2)$ C. $-f(2)$ D. 0

二、计算题

1. 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程和法线方程.

2. 求密度为 1 的抛物体 $V: x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ 绕 z 轴的转动惯量.

3. 设 S 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$, 计算 $\iiint_{(s)} (x + y + z) dS$.

4. 计算 $I = \int_L (y^2 + \sin^2(x + y)) dx + (x^2 - \cos^2(x + y)) dy$, 其中 L 为曲线 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 从上点 $A(1, 0)$ 到 $B(0, 1)$ 的一段弧.

5. 计算积分 $I = \oint_C z dx + x dy + y dz$, 其中 C 为 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截的三角形的边界, 方向与三角形上侧的法向量构成右手法则.

6. 设 $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, 计算 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(x, y, z)]$ 和 $\operatorname{rot}[\operatorname{grad} f(x, y, z)]$.

7. 已知 $y_1 = x$, $y_2 = x + e^x$, $y_3 = 1 + x + e^x$ 是 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = Q(x)$ 的解, 试求此方程的通解.

8. 计算 $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy$.

三、解答题

1. 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} xy \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性、偏导数存在性、可微性.

2. 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点 P ，使得函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在点 P 沿方向 $n=(1,-1,0)$ 的方向导数最大，并求此方向导数的最大值.

3. 计算 $I=\oint\limits_{(s)}(x-y+z)dy\wedge dz+(y-z+x)dz\wedge dx+(z^2-x+y)dx\wedge dy$ ，其中 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$

与 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ 所围立体表面的外侧.

4. 求微分方程 $x''+2x'+2x=te^{-t}\cos t$ 的通解.

5. 设 L 是不经过点 $(2,0)$ ， $(-2,0)$ 的分段光滑的简单正向闭曲线，试就 L 的不同情形计算曲线积分

$$I=\oint_L\left[\frac{y}{(2-x)^2+y^2}+\frac{y}{(2+x)^2+y^2}\right]dx+\left[\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}-\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}\right]dy$$

2017 年高数下期末试题

一、计算题

1. 求 $u = 4x^2 + y^2 + z^2$ 在点 $M(1,0,2)$ 处的梯度及最大方向导数.

2. 求微分方程 $y''' - y'' + 2y' - 2y = 0$ 的通解.

3. 设 $u = f(t), t = \varphi(xy, x)$, 其中 f, φ 具有连续的二阶导数及偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

4. 求曲线 $\begin{cases} x = t \\ y = -t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ 与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线方程.

5. 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的所有极值.

6. 计算累次积分 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 x^2 e^{-y^2} dy$.

7. 计算二重积分 $I = \iint_D (xy + |y|) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$.

8. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{x^3}{r^3} dy \wedge dz + \frac{y^3}{r^3} dz \wedge dx + \frac{z^3}{r^3} dx \wedge dy$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

9. 求第一型曲线积分 $I = \int_L \sqrt{2y^2 + z^2} ds$, 其中 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

10. 求双曲抛物面 (马鞍面) $z = xy$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截下那部分的面积.

二、解答题

1. 讨论 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 的偏导数存在性、可微性、偏导函数的连续性.

2. 计算第二型曲线积分 $I = \int_L \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy$, 其中 L 是从点 $A(-a,0)$ 经上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($y \geq 0$), 到点 $B(a,0)$ 的弧段.

3. 求微分方程 $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的特解.

4. (学习高数I的同学做(1), 其余的学生做(2))

(1) 求解微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$.

(2) 设曲线积分 $\int_{(C)} [f''(x) + 9f(x) + 2x^2 - 5x + 1]y dx + 2f'(x)dy$ 与路径无关, 求 $f(x)$.

5. 计算曲线积分 $\int_{(C)} (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, 其中曲线 (C) 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线, 其方向为从 oz 轴正向看进去为逆时针方向 ($z \geq 0$).

2016 年高数下期末试题

一、填空题

1. 设函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y + 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = ax + y^2 + 2$, 则 $a =$ _____.
2. 设三元函数 $f(x, y, z) = \int_0^{x+y+z} \cos^2(t^2) dt$, 则 $df|_{(1,0,-1)} =$ _____.
3. 设 $f(x) = \int_x^1 e^{\frac{y^2}{2}} dy$, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____.
4. 函数 $z = 3x + 4y$ 在条件 $x^2 + y^2 = 1$ 下的最大值为_____.
5. 微分方程 $xdy + (y - \sin x)dx = 0$ 满足 $y|_{x=\pi} = 1$ 的特解 $y =$ _____.

二、单选题

1. 设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 不可微, 则必有()
A. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 不连续
B. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的两个偏导数不存在
C. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的两个偏导数至少有一个不连续
D. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 沿某个方向的方向导数不存在
2. 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 内偏导数存在. 若 $f(x, y)$ 在 D 的边界上恒为零, 且满足等式 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + 2\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -f(x, y)$, 则 $f(x, y)$ 在 D 上()
A. 存在非零的最大值
B. 存在非零的最小值
C. 只在边界上取得最大值和最小值
D. 能在边界上取得最大值和最小值
3. 设 $I_1 = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} e^{xyz} dv$, $I_2 = \iiint_{|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1} e^{xyz} dv$, $I_3 = \iiint_{|x|+|y|+|z| \leq 1} e^{xyz} dv$, 则()
A. $I_3 < I_1 < I_2$
B. $I_1 < I_2 < I_3$
C. $I_2 < I_3 < I_1$
D. $I_1 < I_3 < I_2$
4. 质点在变力 $\vec{F} = \{P(x, y), 0\}$ 的作用下沿平面有向曲线 L 移动, 则该力所做的功为()
A. 0
B. $\int_L P(x, y) dx$
C. $\int_L P(x, y) dy$
D. $\int_L P(x, y) ds$
5. 设 L 是曲线 $x^2 + y^2 = a^2$, 则曲线积分 $\int_L (x+y)^2 ds$ 为()
A. a^2
B. a^3
C. $2\pi a^3$
D. πa^4

三、简答题

1. 设函数 $z = f(xy, \sin y)$ ，其中 f 具有二阶连续的偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ ， $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
2. 求曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12 \\ z = x \end{cases}$ 在点 $(1, \sqrt{3}, 1)$ 处的切线与法平面方程.
3. 求 $\iint_D \frac{x \cos y}{y} dx dy$ ，其中 D 是由曲线 $y = x^2 (x \geq 0)$ 和直线 $x = 0, y = 4$ 围成的平面区域.
4. 求 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dv$ ，其中 Ω 是由曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ ， $z = 1$ 与 $z = 2$ 所围成的区域.

5. 求函数 $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2 - x + 2y$ 的极值.

6. 计算曲线积分 $\int_L (y + \frac{e^y}{x}) dx + e^y \ln x dy$, 其中 L 为平面曲线 $x = 1 + \sqrt{2y - y^2}$ 上从点 $(1, 0)$ 到点 $(2, 1)$ 的一段有向弧段.

7. (学习高数I的同学做(1), 学习高数II的同学做(2)).

(1) 求解微分方程组 $\frac{dx}{dt} = Ax$ 的通解, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) 求方程 $y'' + 2y' + y = 2xe^{-x}$ 的通解.

8. 设三元函数 P, Q, R 在单连通区域 Ω 内有一阶连续偏导数, Γ 是 Ω 内的简单曲线.

(1) 写出曲线积分 $I = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ 与路径无关的一个充分条件.

(2) 计算积分 $I = \int_{\Gamma} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, 其中 Γ : $x = a \cos t, y = a \sin t, z = t$ 上从点 $(a, 0, 0)$ 到点 $(-a, 0, \pi)$ 的一段.

9. 计算曲面积分 $I = \iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, 其中曲面 S 为: $1 - \frac{z}{7} = \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} (z \geq 0)$ 的上侧.

2015 年高数下期末试题

一、单选题

1. 设 $f(x, y) = \frac{2x^2}{x^2 + y^2}$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的二重极限 ()
 A. 等于 0 B. 等于 1 C. 等于 2 D. 不存在
2. 设曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$, 取上侧, S_1 为 S 位于第一卦限部分, 则有 ()
 A. $\iint_S x dS = 4 \iint_{S_1} x dS$ B. $\iint_S y dS = 4 \iint_{S_1} y dS$
 C. $\iint_S x dy dz = 4 \iint_{S_1} x dy dz$ D. $\iint_S y dy dz = 4 \iint_{S_1} y dy dz$
3. 设曲线 $C: x^2 + y^2 = 1$, 取逆时针方向, 则 $\oint_C (y + \frac{y^3}{6}) dx + (2x - \frac{x^3}{3}) dy = ()$
 A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{8}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{5\pi}{8}$
4. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点沿方向 $\vec{l} = (1, \sqrt{3})$ 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} \Big|_{(0,0)} = ()$
 A. 0 B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ D. 3

二、填空题

1. 设 $f(x, y) = x^3 y - \sin(x^2 - y^2)$, 则 $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,3)} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 空间曲线 $\begin{cases} z = x^2 + 4y^2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ 在点 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ 处的切线与 Ox 的夹角 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 二次积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\cos y}{y} dy = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设空间曲线 C 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = \frac{3R}{2} \end{cases}$, 其中常数 $R > 0$, 则 $\oint_C y ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

1. 设函数 $f(u, v)$ 具有一阶连续偏导数, $z = \int_0^{xy} f(e^t, t) dt$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $e^z - 2x + yz = e$ 在 $(0, 0, 1)$ 点的某领域内确定的隐函数, 求全微分 $dz|_{(0,0)}$.

3. (学工科分析者做 (1), 其余做 (2))

(1) 求解微分方程组: $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x$.

(2) 求一个以四个函数 $y_1 = e^x, y_2 = 2xe^x, y_3 = \cos 2x, y_4 = 3\sin 2x$ 为特解的齐次线性微分方程, 并求方程的通解.

4. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{2x}$ 的通解.

5. $I = \iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

6. 设 Σ 是旋转抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$, 取上侧, 计算第二类曲面积分:

$$I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$$

7. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有连续的导数, L 是由点 $A(3, \frac{2}{3})$ 到点 $B(1, 2)$ 的直线段, 求:

$$\int_L \left[\frac{x}{y^2} - xf(xy) \right] dy - \left[\frac{1}{y} + yf(xy) \right] dx$$

8. 在曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 位于第一卦限部分上求一点 P , 使 P 点的切平面与三个坐标面围成的四面体体积最小, 并求此最小体积.

9. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2) & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 证明: 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.

10. 设函数 $f(x, y)$ 在 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 上有二阶连续的偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-(x^2 + y^2)}$, 证明:

$$I = \iint_D \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \frac{\pi}{2e}$$

2014 年高数下期末试题

一、计算题

1. 在曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2$ 上求一点, 使曲面在该点处的切平面平行与平面 $2x + 2y - z = 0$.

2. 设 f 是连续函数, 交换积分次序: $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x, y) dy$.

3. 求微分方程 $x'' + 3x' + 2x = e^{-2t}$ 的通解.

4. 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq 1)$ 上任意一点处的线密度在数值上与该点的横坐标相同, 求曲线的质量.

5. (学工科分析者做 (1), 其余做 (2))

(1) 验证微分方程组 $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \frac{1}{2} \sin 2t - 1 \\ \frac{1}{2} \sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 通解为 $\vec{x} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, t \in R$.

(2) 验证 $y_1 = e^x, y_2 = e^x \ln|x|$ 是微分方程 $xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0$ 的解, 并求其通解.

6. 计算三重积分 $\iiint_V z dv$, 其中 V 是由不等式 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 确定的空间区域.

7. 求向量场 $\vec{A} = \{z + x^2, x, z^2 + 3y\}$ 穿过曲面 $\Sigma: z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ 下侧的通量.

8. 计算第一型曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 介于 $0 \leq z \leq 1$ 之间的部分.

9. 计算第二型线积分 $\int_L ye^{y^2} dx + (xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2}) dy$, 其中 L 为 $y = \sqrt[3]{x}$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的曲线段.

10. 求 $\operatorname{div}[\operatorname{grad}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})]$.

11. (学工科分析者做 (1), 其余做 (2))

(1) 求线性微分方程组 $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$ 的通解, 其中 $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

(2) 已知函数 $y = e^{2x} + (x+1)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 试确定 a, b, c , 并求该方程的通解.

12. 设 $y = f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的 x, y 的函数, 其中 f, F 都具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

13. 计算 $\iint_{(D)} x[1 + y \sin^2(x^2 + y^2)] d\sigma$, 其中 (D) 是由 $y = x^3, y = 1, x = -1$ 所围成的区域.

14. 设函数 $\varphi(y), \psi(y)$ 具有连续导数, 对平面内的任意分段光滑简单闭曲线 C , 有曲线积分

$$\oint_C 2[x\varphi(y) + \psi(y)]dx + [x^2\psi(y) + 2xy^2 + 2x\varphi(y)]dy = 0, \text{ 求:}$$

(1) 求满足条件 $\varphi(0) = -2, \psi(0) = 0$ 的函数 $\varphi(y), \psi(y)$.

(2) 计算 $\int_{(1,1)}^{(0,0)} 2[x\varphi(y) + \psi(y)]dx + [x^2\psi(y) + 2xy^2 + 2x\varphi(y)]dy$.

15. 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$

(1) 计算 $A = \iint_D |xy - 1| dx dy$.

(2) 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 且 $\iint_D f(x, y) dx dy = 0, \iint_D xyf(x, y) dx dy = 1$, 证明存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使

$$|f(\xi, \eta)| \geq \frac{1}{A}.$$

2013 年高数下期末试题

1. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^4 - 3xz$ 在点 $M_0(1,1,1)$ 处 $\vec{l} = (1,2,2)$ 方向的方向导数.

2. 求曲面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 在点 $M(2,2,0)$ 处的切平面方程.

3. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^2 y - xz^3 = 1$ 所确定, 求 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2,1)}$.

4. 求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解.

5. 设 L 是从点 $A(1,0)$ 到 $B(-1,2)$ 的直线段, 计算曲线积分 $\int_L (x+y)ds$.

6. 设 $z = xf(xy, \frac{x}{y})$, 其中 f 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

7. 计算 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy$.

8. 设有一物体, 它是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ 所围成, 已知它在任意的点 (x, y, z) 处的密度 $\rho = z$, 求此物体的质量 m .

9. 计算曲线积分 $\int_{(\widehat{AB})} (e^x \sin y + y + 1)dx + (e^x \cos y - x)dy$, 其中 \widehat{AB} 为曲线 $y = -\sqrt{-x^2 + 8x - 7}$ 从 $A(7,0)$ 到点 $B(1,0)$ 的一段弧.

10. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} x \cos^2(1+z) dy \wedge dz + y \sin^2(1+z) dz \wedge dx + 4(z+1) dx \wedge dy$, 其中 Σ 是下半球面 $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

11. (学工科分析者作(1), 其余作(2))

(1) 求线性微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ 的通解, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 设函数 u 的全微分 $du = [3f(x) + e^x]ydx + [2f'(x) + f(x)]dy$, 其中 $f(x) \in C^{(2)}$, 且 $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{5}$, 求 $f(x)$.

12. 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$, 在点 (0,0) 的连续性、可导性、可微性.

13. 设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{1}{\pi} \iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 D 是 $x^2 + y^2 \leq 1$, 求 $f(x, y)$.

14. 设对任意的分片光滑有向封闭曲面 S , 都有:

$$\oiint_S (y+1)f'(x)dy\wedge dz + (y-y^2)f(x)dz\wedge dx + [zyf'(x) - 2ze^x]dx\wedge dy = 0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有连续的二阶导数, 求 $f(x)$.

15. 证明: $\oint_L [xf(y) + x^2]dy - [\frac{y}{f(x)} + 2y^2]dx \geq 2\pi + 6a\pi$, 其中 L 为圆周曲线 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 1$, $(a > 0)$ 的正向, $f(x)$ 连续取正值.

2012 年高数下期末试题

一、计算题

1. 求曲线 $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \tan \frac{t}{2})$ 在点 $(0, 1, 1)$ 处的切线方程.

2. 求曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处的切平面方程.

3. 设 f 是连续函数, 交换下列积分次序 $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$.

4. 求微分方程 $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ 的通解.

5. 设 L 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$, ($a > 0$), 计算线积分 $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$.

6. 已知 $z = f(2x - y, y \sin x)$, $f(u, v)$ 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

6. 计算 $\iint_D \sin \frac{x}{y} dx dy$, 其中 D 是由 $x = 0, y = \frac{\pi}{2}, y = \pi$ 及 $x = y^2$ 所围的平面区域.

8. 设有一物体, 由曲面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 与 $z = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ 所围成, 已知它在任意点 (x, y, z) 处的密度 $\mu = z$, 求此物体的质量.

9. 计算曲线积分 $\int_L e^x [\cos y dx + (y - \sin y) dy]$, 其中 L 是 $y = \sin x$ 从 $A(0, 0)$ 到点 $B(\pi, 0)$ 的弧段.

10. 计算第二型面积分 $\iint_{\Sigma} xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + (z+1)dx\wedge dy$, 其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在 xoy 平面上方部分, 方向取上侧.

11. (学工科分析者作 (1), 其余作 (2))

(1) 求线性微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ 的通解, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

(2) 求微分方程 $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 4e^t$ 的通解.

12. 计算第一型曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dS$, 其中曲面 Σ 是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 上介于平面 $z=1$ 于 $z=2$ 之间的部分.

13. 设微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

(1) 证明: 若 $1 + P(x) + Q(x) = 0$, 则方程有一特解 $y = e^x$; 若 $P(x) + xQ(x) = 0$ 则方程有一特解 $y = x$.

(2) 根据 (1) 的结论, 求 $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ 的通解和满足初始条件 $y(0) = 2, y'(0) = 1$ 的特解.

(3) 求 $(x-1)y'' - xy' + y = 1$ 满足初始条件 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[y(x)-1]}{x} = -1$ 的特解.

14. 求函数 $u = x + y + z$, 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay - 2az + 2a^2 = 0$ ($a > 0$) 下的最小值, 并证明:
若 Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax + 2ay + 2az - 2a^2$, $\iiint_{\Sigma} (x + y + z + \sqrt{3}a)^3 dS \geq 108\pi a^5$.



彭康学导团

本试题集由彭康学导团制作，所有题目均改编自往年真题，鉴于教材改版和内容调整，已对部分题目进行了删减和修改。本试题集的编制及发放属于公益服务活动，如有打印店以此盈利，请勿购买。未经允许，请勿复印转载。

彭小帮 2.0: 397499749

搜索微信公众号“彭康书院学导团”或扫描下方二维码关注我们，了解更多学业动态，掌握更新学习资料。

