2017 级多元函数微积分 参考答案

一、求曲面$x^3+y^2+z^2=3$上点$(1,-1,1)$处的切平面与法线方程。

解：记曲面方程为

$$F(x,y,z)=x^3+y^2+z^2-3=0$$

有

$$\begin{cases} F_x=3x^2=3 \\ F_y=2y=-2 \\ F_z=2z=2 \end{cases}$$

故

$$\vec{n}=(3,-2,2)$$

故切平面方程为

$$3(x-1)-2(y+1)+2(z-1)=0$$

或

$$3x-2y+2z=7$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{3}=-\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{2}.$$

二、求函数$f(x,y,z)=x+y+z$在条件$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{5}+\frac{(z-3)^2}{4}\leq 1$下的最大、最小值。

解：先证明，最值一定在边界上取到。不妨先证明最大值的情况。用反证法，假设在椭球域内部一点取到最大值，则过该点作平行于z轴直线，与椭球的上侧交点处函数值必大于该点处函数值，矛盾！故最大值一定在边界处取到。最小值亦然。

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=x+y+z+\lambda\left(\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{5}+\frac{(z-3)^2}{4}-1\right)$$

令

$$\begin{cases} L_x=1+\frac{\lambda}{8}(x-1)=0 \\ L_y=1+\frac{2}{5}\lambda(y+2)=0 \\ L_z=1+\frac{\lambda}{2}(z-3)=0 \\ L_\lambda=\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{5}+\frac{(z-3)^2}{4}-1=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = 1 \pm \dfrac{16}{5} \\ y = -2 \pm 1 \\ z = 3 \pm \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

故最大值为 7，最小值为-3.

（注：也可以先做$f(x,y,z) = (x-1) + (y+2) + (z-3) + 2$，变为更加标准的最值问题）

三、计算下列二重积分：

(1) $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$, 其中$D: x^2 + y^2 \le 1$；

解：作极坐标换元，故原式可写为

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 re^{-r^2} dr = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

(2) $\iint_D (1+y)\, dxdy\,, D: x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0.$

解：直接化为累次积分

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1+y) dx = \frac{2}{3}.$$

四、计算下列三重积分：

(1) $\iiint_V \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} dxdydz$, 其中$V: x^2 + y^2 + z^2 \le 1$；

解：作球坐标换元

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2} dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 4\pi - \pi^2.$$

(2) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz\,, V$是平面$x + y + z = 1$与三坐标平面围成的区域。

解：利用高斯公式，将原积分写为

$$I = \frac{1}{3} \oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$$

不难发现，对于该四面体外表面，其曲面积分只有在平面$x + y + z = 1$上才非零，即

$$I = \frac{1}{3} \iint_{x+y+z=1} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$$

$$= \frac{1}{3}\left[\iint_{D_{yz}} (1-y-z)^3 dydz + \iint_{D_{zx}} (1-z-x)^3 dzdx + \iint_{D_{xy}} (1-x-y)^3 dxdy\right]$$

又注意到，平面在三个坐标面上的投影区域均相同，即

$$I=\frac{1}{3}\cdot 3\iint_{D_{xy}}(1-x-y)^3dxdy=\iint_{D_{xy}}(1-x-y)^3dxdy$$

化为累次积分

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^3dy=\frac{1}{20}.$$

五、计算下列曲线积分

(1) 设曲线积分$\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$与路径无关，$\varphi(x)$有连续的导数，$\varphi(0)=0$，试求$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy$；

解：由于积分与路径无关，得

$$y\varphi'(x)=2xy$$

因该等式在全平面上成立，即

$$\varphi'(x)=2x$$

故$\varphi(x)=x^2+C$，又$\varphi(0)=0$，故

$$\varphi(x)=x^2$$

容易发现，原函数可写为

$$F(x,y)=\frac{x^2y^2}{2}$$

故原积分为

$$I=F(1,1)-F(0,0)=\frac{1}{2}.$$

(2) 求$I=\iint_S(x^2+y^2+z^2)dS$, 其中S为球面$x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$.

解：首先化简积分形式

$$I=\iint_S 2azdS=2a\iint_S zdS$$

因为该球面关于$z=a$对称，故

$$I=2a\iint_S(z-a+a)dS=2a\iint_S adS=2a^2\cdot 4\pi a^2=8\pi a^4.$$

六、求曲线积分

$$\oint_L\frac{xdy-(y-1)dx}{x^2+9(y-1)^2}$$

其中L是以(0,0)为中心，$R(R>0,R\neq 1)$为半径的圆周，取逆时针方向。

解：容易发现

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{9(y-1)^2-x^2}{[x^2+9(y-1)^2]^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

故分类讨论，当$R<1$时，此时满足格林公式的条件，故

$$I = 0$$

当$R > 1$时，此时L所围区域内包含不可导点$(0,1)$，故以该点为中心，作椭圆

$$C: x^2 + 9(y-1)^2 = \epsilon^2$$

使椭圆完全包含于圆域内部，对两曲线所夹部分用格林公式，得

$$I = \oint_{L+C} - \oint_{C^-} = \oint_C \frac{1}{\epsilon^2}[xdy - (y-1)dx]$$

故此时在椭圆域上用格林公式

$$I = \frac{1}{\epsilon^2}\iint_D 2d\sigma = \frac{2\pi}{\epsilon^2}\cdot\frac{\epsilon^2}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

七、设Σ是曲面$z = \sqrt{1-3(x^2+y^2)}$的外侧，求

$$I = \iint_\Sigma x^3dydz + (y^3+3)dzdx + \frac{1}{2}zdxdy$$

解：容易发现该曲面是一椭球面的上半面，而

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3x^2 + 3y^2 + \frac{1}{2}$$

且没有偏导数不连续点。在所求区域内，补面用高斯公式，在xy面上补充平面

$$C: x^2 + y^2 \le \frac{1}{3}$$

取下侧，有

$$I = \oiint_{\Sigma+C} - \iint_{C^+} = \iiint_V \left(3x^2 + 3y^2 + \frac{1}{2}\right)dxdydz + 0$$

化为累次积分，得到

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} rdr \int_0^{\sqrt{1-3r^2}} \left(3r^2 + \frac{1}{2}\right)dz = \frac{\pi}{5}.$$

八、求球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$被平面$z = \frac{a}{3}, z = \frac{a}{2}$所夹部分的面积。

解：面积可写为

$$S = \iint_\Sigma dS$$

先求出Σ在xy面上的投影为

$$D: \frac{3a^2}{4} \le x^2 + y^2 \le \frac{8a^2}{9}$$

而

$$\begin{cases} z_x = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\ z_y = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \end{cases}$$

故

$$S=\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

化为累次积分

$$S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\sqrt{3}a}{2}}^{\frac{2\sqrt{2}a}{3}}\frac{a\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}d\rho=\frac{1}{3}\pi a^2$$