2015-2016 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、解答题

1、【解析】

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -12 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 8 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -12 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -14 \\ 0 & 5 & 8 & 8 & -32 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & 1 & 10 & -12 \\ 3 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 5 & 8 & -32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 10 & 12 \\ 3 & -2 & 1 & 14 \\ 0 & 5 & 8 & 32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 10 & 12 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 32 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 10 & 14 \\ 0 & 1 & 10 & 12 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 14 \\ 1 & 10 & 12 \\ 5 & 8 & 32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 10 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -84$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1——行列式的概念及其性质

2、【解析】

(1) $\begin{pmatrix} E_r & O \\ X & E_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ XA+C & XB+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & F_1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & Y \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AY+B \\ C & CY+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & F_2 \end{pmatrix}$

故$\begin{cases} XA+C=O \\ XB+D=F_1 \end{cases}$，$\begin{cases} AY+B=O \\ CY+D=F_2 \end{cases}$

因此$X=-CA^{-1}\quad Y=-A^{-1}B\quad F_1=D-CA^{-1}B\quad F_2=D-CA^{-1}B$

(2) 由于$\left|\begin{pmatrix} E_r & O \\ X & E_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} A & B \\ O & F_1 \end{pmatrix}\right|$，且

$$\left|\begin{pmatrix} E_r & O \\ X & E_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} E_r & O \\ X & E_{m-r} \end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right|$$

故$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & F_1 \end{vmatrix} = |A||F_1|$

可得$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 7——分块矩阵

3、【解析】（1）因为$(A-E)^2 = 2(A+E)^2 \Rightarrow A^2+6A+E=0 \Rightarrow A(-A-6E)=E$

因此矩阵A可逆，且$A^{-1} = -A-6E$

（2）因为$2A^2+3A-3E=0 \Rightarrow (A+2E)(2A-E)=E$,所以$A+2E$可逆

且$(A+2E)^{-1} = (2A-E)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9——矩阵的逆和矩阵等价

4、【解析】（1）证明：因为$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)M$

而矩阵M是可逆的，所以$\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$也是线性空间$V$的一组基

（2）$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) = (\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)M^{-1} = (\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & -1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$

由基$\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$到基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$的过渡矩阵是

$$N = M^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & -1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（3）设向量α在基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$下的坐标是$(x_1,x_2,...,x_n)^T$，由坐标变换公式知道

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$解得$x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$，所以在基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$和基　$\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$

下有相同坐标的向量是$k(1\ \ 0\ \dots\ 0)^T(k\in R)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15——向量空间

5、【解析】因为η是线性方程组$AX=b$的一个解，所以$1-a+c-1=0\Rightarrow a=c$

又因为$\bar{A}=\begin{pmatrix}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\1&a&c&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\0&a-\frac{1}{2}&c-\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$

（1）所以当$a=c=\frac{1}{2},r\left(\bar{A}\right)=r(A)=2$，

通解是$\eta+k_1(1,-3,1,0)^T+k_2(-1,-2,0,2)^T,k_1,k_2$是任意数

（2）当$a=c\neq\frac{1}{2}$，$r\left(\bar{A}\right)=r(A)=3$，

通解是$\eta+k(-2,1,-1,2)^T,k$是任意数

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17——非齐次线性方程组

6、【解析】$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&4&b\\-3&-3&5\end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量，且$\lambda=2$是$A$的二重特征值，

因为A有三个线性无关的特征向量，所以A可以对角化，又因为$\lambda=2$是A的二重特征根，所以属于$\lambda=2$的线性无关的特征向量是 2 个，故$r(2E-A)=1$

而$2E-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-a&-2&-b\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2+a&-a-b\\0&0&0\end{pmatrix}$

$-2+a=-a-b=0\Rightarrow a=2,b=-2$

特征多项式$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$

属于$\lambda=2$的线性无关的特征向量是$\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$

属于特征值$\lambda=6$的特征向量是$\alpha_3=(1,-2,3)^T$

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 20——矩阵相似对角化

7、【解析】存在正交矩阵Q使得正交线性替换$X=QY$化该二次型

$f=X^TAX=(QY)^TA(QY)=Y^T(Q^TAQ)Y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\dots\lambda_ny_n^2$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$是$A$的全部特征值，不妨设$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\dots\geqslant\lambda_n$

又有条件：$1=X^TX=(QY)^T(QY)=Y^T(Q^TQ)Y=Y^TY$

则$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\dots\lambda_ny_n^2\leqslant\lambda_1(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2)=\lambda_1$

而且$y_1=1,y_2=y_3=\dots=y_n=0$时$f=\lambda_1$，

故λ_1是在条件$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=1$下$f$的最大值

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22——二次型

8、【解析】使用初等列变换可能会导致向量序变，因此所得的向量组不一定是极大线性无关组

因此甲正确，乙不正确

【考点延伸】《考试宝典》知识点 12——极大线性无关组