计算机类本科生 2020—2021 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）参考答案

一 、每小题 2 分，共 16 分

1. × 2. √ 3.×

4. C 5. D 6. B 7. C 8. B

二 、行列式计算 （第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分，共 14 分）

1．解：（方法一）第 2，3，4 列都加到第一列，得

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c+d & b & c & d \\ x+a+b+c+d & x+b & c & d \\ x+a+b+c+d & b & x+c & d \\ x+a+b+c+d & b & c & x+d \end{vmatrix} \qquad (2\text{ 分})$$

$$=(x+a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & x+b & c & d \\ 1 & b & x+c & d \\ 1 & b & c & x+d \end{vmatrix} = (x+a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \qquad (2\text{ 分})$$

$$=x^3(x+a+b+c+d) \qquad (2\text{ 分})$$

（方法二）第 2，3，4 行都减去第一行, 再第 2，3，4 列加到第 1 列

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ -x & x & 0 & 0 \\ -x & 0 & x & 0 \\ -x & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c+d & b & c & d \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^3(x+a+b+c+d)$$

（3 分） （2 分） （1 分）

（方法三）加边法

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x+a & b & c & d \\ 1 & a & x+b & c & d \\ 1 & a & b & x+c & d \\ 1 & a & b & c & x+d \end{vmatrix} \qquad (2\text{ 分})$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -a & -b & -c & -d \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\frac{d}{x} & -a & -b & -c & -d \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \qquad (2\text{ 分})$$

$$=\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\frac{d}{x}\right)x^4 = x^3(x+a+b+c+d) \qquad (1\text{ 分})$$

此处要求 $x\neq 0$，但当 x=0 时，原行列式显然等于 0，与 $x^3(x+a+b+c+d)$ 结果一致。（1 分）

2. 解：（方法一）第 i 行减去第 i-1 行，$i=n,n-1,\dots,2$。

$$|D_n| = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x & x \\ 1 & 1 & x & \dots & x & x \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x & x \\ 0 & 1-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-x \end{vmatrix} = 1\cdot(1-x)^{n-1} = (1-x)^{n-1}$$

（6 分） （2 分）

解：（方法二）第一列的 $-x$ 倍加到第 2,3,…,n 列

$$|D_n|=\begin{vmatrix}1&x&x&\dots&x&x\\1&1&x&\dots&x&x\\1&1&1&\dots&x&x\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\dots&1&x\\1&1&1&\dots&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-x&0&0&\dots&0&0\\1-x&1-x&0&\dots&0&0\\1-x&1-x&1-x&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1-x&1-x&1-x&\dots&1-x&0\\1&1&1&\dots&1&1\end{vmatrix}=(1-x)^{n-1}\cdot 1=(1-x)^{n-1}$$

（6 分）　　　　　　　　　　　　（2 分）

三、已知 $A=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\1&1\\-1&0\end{bmatrix}$，求 A^{-1} 和 AB

解：令 $A=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{bmatrix}$,其中 $A_1=\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}1&-2\\1&1\end{bmatrix}$　（2 分）

则 $A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{bmatrix}$，　$A_1^{-1}=\dfrac{A_1^*}{|A_1|}=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&5\end{bmatrix},A_2^{-1}=\dfrac{A_2^*}{|A_2|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$　（3 分）

说明：求取 A 的逆矩阵，以及 A_1，A_2 的逆矩阵都可以用初等变换法。

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$　（1 分）

$$AB=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2\\2&-1\\3&1\\0&1\end{bmatrix}$$　（4 分）

四、**解：方程组的增广矩阵为** $B=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\-1&1&-3&2\\2&-1&\lambda&\mu\end{pmatrix}$　**（2 分）**

对 B 作初等行变换，化成阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\-1&1&-3&2\\2&-1&\lambda&\mu\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&1\\0&-1&\lambda-4&\mu+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&1\\0&0&\lambda-5&\mu+3\end{pmatrix}$$　（3 分）

因此：当 $\lambda\neq5$ 时，R(A)=R(B)=未知数个数 3，此时有唯一解；

当 $\lambda=5$ 且 $\mu=-3$ 时，R(A)=R(B)=2<未知数的个数，此时有无穷多组解；

当 $\lambda=5$ 且 $\mu\neq-3$ 时，2=R(A)≠R(B)=3，方程组无解。　（3 分）

当 $\lambda\neq5$ 时，继续对增广矩阵作初等行变换

$A\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&\frac{\mu+3}{\lambda-5}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1-2\frac{\mu+3}{\lambda-5}\\0&1&0&1+\frac{\mu+3}{\lambda-5}\\0&0&1&\frac{\mu+3}{\lambda-5}\end{pmatrix}$，方程组解为 $\begin{cases}x_1=-1-2\frac{\mu+3}{\lambda-5}\\x_2=1+\frac{\mu+3}{\lambda-5}\\x_3=\frac{\mu+3}{\lambda-5}\end{cases}$　（2 分）

当 $\lambda=5$ 且 $\mu=-3$ 时，方程组化为 $\begin{cases}x_1+2x_3=-1\\x_2-x_3=1\end{cases}$　（1 分）

取 x_3 为自由未知量， $x_3=\tilde{x}_3$，得 $\begin{cases} x_1=-1-2\tilde{x}_3 \\ x_2=1+\tilde{x}_3 \\ x_3=\tilde{x}_3 \end{cases}$ ，写成向量形式： $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\tilde{x}_3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **（2 分）**

其中 $\tilde{x}_3$ 取任意实数。（1 分）

说明：上面也可以利用导出组基础解系求解。

五、解：

（1）解法 1：

取基 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, (1 分)

则从基 $[e_1,e_2,e_3]$ 到 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 的过渡矩阵为 $T=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}$ (1 分)

从基 $[e_1,e_2,e_3]$ 到 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 的过渡矩阵为 $S=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ (1 分)

所以从基 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 到 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 的过渡矩阵为

$M=T^{-1}S=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\\1&2&2\\0&-1&-1\end{pmatrix}$ (3 分)

另解法 2：

也可直接由

$$\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+a_{31}\alpha_3$$
$$\beta_2=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+a_{32}\alpha_3$$
$$\beta_3=a_{13}\alpha_1+a_{23}\alpha_2+a_{33}\alpha_3$$

解出 a_{ij}，进而得到 $M=(a_{ij})$，最终结果同解法 1

（2）解法 1：因 β_1,β_2 在基 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 下的坐标列向量分别为矩阵 M 的前两列，故

$\alpha=\beta_1+\beta_2$ 在基 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 下的坐标为 M 的前两列之和，即为 $\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$ (3 分)

解法 2：

也可直接求 $\alpha=\beta_1+\beta_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 求出 $k_1=4,k_2=3,k_3=-1$,

从而 α 在基 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$ (3 分)

解法 3：

$\alpha=\beta_1+\beta_2$ 在基 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 的坐标为 $X=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，从而 α 在基 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 下的坐标为

$Y=MX=\begin{pmatrix}1&3&2\\1&2&2\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$ (3 分)

六、二次型矩阵 $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ （1 分）

求出特征根为 1（二重），4（一重） （2 分）

获得特征根 1 的特征向量 x_1=(-1,1,0), x_2=(-1,0,1)

特征根 4 的特征向量 x_3=(1,1,1) （2 分）

对特征根 1 的特征向量正交化 a_1=(-1,1,0), a_2=(-1/2,-1/2,1),

对特征根 4 的特征向量正交化, a_3= x_3（无需显式进行） （2 分）

对上述正交向量组单位化

$b_1=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$, $b_2=(-1/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},2/\sqrt{6})$, $b_3=(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ （2 分）

故正交矩阵为 $P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \end{pmatrix}$ （$X=PY$） （2 分）

所得标准形为 $f=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$ （系数与 P 的列需对应） （2 分）

该二次型为正定二次型。 （1 分）

七、证明：由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $AX=O$ 的基础解系，故 $AX=O$ 的解空间维数为 3，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。（1 分）

设有一组数 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

即：

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$$ （2 分）

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关得

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \Rightarrow k_1=k_2=k_3=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$ （2 分）

$\therefore \alpha_1+\alpha_2$、$\alpha_2+\alpha_3$、$\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关 （2 分）

$\because \alpha_1$，α_2，α_3为$AX=0$的解

$\therefore \alpha_1+\alpha_2$、$\alpha_2+\alpha_3$、$\alpha_3+\alpha_1$也为$AX=0$的解

（3 分）

即$\alpha_1+\alpha_2$、$\alpha_2+\alpha_3$、$\alpha_3+\alpha_1$为$AX=0$的解空间的极大线性无关组

$\therefore$ 它们为$AX=0$的基础解系

（1 分）

八、解：显然 $(A+C)^{-1}$ **和** D^{-1} **都存在，由于**

$$\begin{bmatrix} E & E \\ & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & -D \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & \\ -D^{-1}C & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+C & O \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & \\ -D^{-1}C & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+C & O \\ O & D \end{bmatrix}$$

(3 分)

对上式两端同取逆得

$$\begin{bmatrix} E & \\ -D^{-1}C & E \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A & -D \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} E & E \\ & E \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A+C & O \\ O & D \end{bmatrix}^{-1}$$

(2 分)

于是有

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} A & -D \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}&=\begin{bmatrix} E & \\ -D^{-1}C & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A+C & O \\ O & D \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} E & E \\ & E \end{bmatrix} \\ &=\begin{bmatrix} E & \\ -D^{-1}C & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (A+C)^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & E \\ & E \end{bmatrix} \\ &=\begin{bmatrix} (A+C)^{-1} & O \\ -D^{-1}C(A+C)^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & E \\ & E \end{bmatrix} \\ &=\begin{bmatrix} (A+C)^{-1} & (A+C)^{-1} \\ -D^{-1}C(A+C)^{-1} & D^{-1}-D^{-1}C(A+C)^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(4 分)

解 2：显然 $(A+C)^{-1}$ 和 D^{-1} 都存在，由于

$$\begin{bmatrix} A & -D & E & \\ C & D & & E \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} A+C & O & E & E \\ C & D & & E \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} E & O & (A+C)^{-1} & (A+C)^{-1} \\ C & D & & E \end{bmatrix}$$

(4 分)

$$\to\begin{bmatrix} E & O & (A+C)^{-1} & (A+C)^{-1} \\ O & D & -C(A+C)^{-1} & E-C(A+C)^{-1} \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} E & O & (A+C)^{-1} & (A+C)^{-1} \\ O & E & -D^{-1}C(A+C)^{-1} & D^{-1}-D^{-1}C(A+C)^{-1} \end{bmatrix}$$

(4 分)

从而 $\begin{bmatrix} A & -D \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} (A+C)^{-1} & (A+C)^{-1} \\ -D^{-1}C(A+C)^{-1} & D^{-1}-D^{-1}C(A+C)^{-1} \end{bmatrix}$

(1 分)

九、证明：

由 A 是 n 阶实反对称矩阵得 $A^T=-A$，从而 $E-A^2=E+A^TA$. (1 分)

考虑二次型 $X^T(E-A^2)X$，对于 $\forall X\neq 0$，有 $X^TX>0,(AX)^T(AX)\geq 0$, (2 分)

因此 $X^T(E-A^2)X=X^T(E+A^TA)X=X^TX+(AX)^T(AX)>0$, (1 分)

故 $X^T(E-A^2)X$ 是正定二次型，从而 $E-A^2$ 是正定矩阵. (1 分)