2016-2017 学年第一学期期末考试 A 卷

符号提示： 设n为正整数，A是n阶矩阵。1. $|A|$表示A的行列式；2. A^*表示A的伴随矩阵；3. $r(A)$表示A的秩；4. A^{-1}表示A的逆矩阵；5. A^T表示A的转置矩阵；6. trA表示A的迹；7. E表示单位矩阵

一、解答题

1、计算行列式$\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix}$

2、已知矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，而且$A^{-1}+E$可逆，如果矩阵$X$满足

$A^{-1}XA+XA+2E=0$，求矩阵X.

3、解线性方程组$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$

4、（1）设n阶矩阵A的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，求矩阵$C=\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$的特征值，

（2）已知$\sum_{k=1}^{n} a_k=0$，求n阶矩阵$A=\begin{pmatrix} {a_1}^2+1 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & {a_2}^2+1 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & {a_n}^2+1 \end{pmatrix}$的特征值

5、已知$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$为实可逆矩阵，其中$A_1, A_2$分别为$p\times n, (n-p)\times n$矩阵，

（1）求二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^T({A_1}^T A_1-{A_2}^T A_2)X$的正惯性指数和负惯性指数，

（2）求证矩阵${A_1}^T A_1-{A_2}^T A_2$可逆.

6、设$R[x]$是一个实系数多项式全体，定义其上的内积函数如下：

$$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)g(x)dx,\ \forall f(x),g(x)\in R[x].$$

（1）请将$1,x,x^2,x^3$改造为正交多项式组.

（2）请将多项式$4x^3+3x^2+2x+1$用上述正交多项式组线性表示.

二、证明题

7、设A是一个n阶实方阵，如果对于任意实n维向量x，都有$\|Ax\|=\|x\|$，则A是正交矩阵.

8、设E_r、E_s分别是r阶和s阶单位矩阵，a为非零常数，A、B分别为$r\times s$和$s\times r$矩阵.

（1）试求矩阵U,W,X,Y使得

$$\begin{pmatrix}E_r & O\\ X & E_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}aE_r & A\\ B & E_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aE_r & A\\ O & Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}E_r & W\\ O & E_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}aE_r & A\\ B & E_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U & O\\ B & E_s\end{pmatrix}.$$

（2）等式$a^s|aE_r-AB|=a^r|aE_s-BA|$是否成立？请尽量详细地说明理由.

2015-2016 学年第二学期期末考试 A 卷

符号提示： 设n为正整数，A是n阶矩阵。1. $|A|$表示A的行列式；2. A^*表示A的伴随矩阵；3. $r(A)$表示A的秩；4. A^{-1}表示A的逆矩阵；5. A^T表示A的转置矩阵；6. trA表示A的迹；7. E表示单位矩阵

一、解答题

1、计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

2、设A是r阶可逆矩阵，B,C,D为相关矩阵使得$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$为$m\times n$矩阵$E_r,E_{m-r},E_{n-r}$为单位矩阵

（1）试求$(m-r)\times r$矩阵X和$r\times(n-r)$矩阵Y使得下面两式成立：

$\begin{pmatrix} E_r & O \\ X & E_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ O & F_1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & Y \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ C & F_2 \end{pmatrix}$，并求出$F_1$和$F_2$

（2）当$m=n$时，化$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$为较低阶的行列式的积

3、（1）已知矩阵A满足$(A-E)^2=2(A+E)^2$，求证A可逆，并求出A^{-1}

（2）已知矩阵A满足$2A^2+3A-3E=0$,求证$(A+2E)$可逆，并且求出$(A+2E)^{-1}$

4、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$是$n$维线性空间$V$的一组基，向量组$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$有

$$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\dots,\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n.$$

（1）求证向量组$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$也是线性空间$V$的一组基；

（2）求基$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$到基$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$的过渡矩阵；

（3）在V中求在基$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$和基$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$下具有相同坐标的向量$\alpha$.

5、设$A=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\0&1&3&1\\1&a&c&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \eta=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，如果$\eta$是线性方程组$AX=b$的一个解，求线性方程组$AX=b$的通解.

6、设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&4&b\\-3&-3&5\end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量，且$\lambda=2$是$A$的二重特征值，求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵.

二、证明题与判断题

7、设实二次型$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$，证明：在条件$x_1^2+x_1^2+...+x_n^2=1$下，f的最大值恰是该二次型的矩阵A的最大特征值.

8、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为5个5元向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)_{5\times5}$，甲乙两人都对$A$实施了有限次初等变换如下：$A\xrightarrow{\text{有限次初等变换}}\begin{pmatrix}1&2&1&1&2&1\\0&2&0&0&4&8\\0&0&0&3&6&11\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，所不同的是：甲只使用了初等行变换，而乙既使用了初等行变换也使用了初等列变换.基于上述初等变换过程，甲乙都得出了$r(A)=3$且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{3,}\alpha_4,\alpha_5$的一组极大线性无关组.请判断甲乙两人是否都正确，请说明详细理由.

