第一章 整除

计算证明

1. 计算下面整数对的最大公因子和最小公倍数。

(1) $(202, 282)$ $2, 28482$

(2) $(666, 1414)$ $2, 470862$

(3) $(98, 105, 280)$ $7, 5880$

(4) $(8n^2+28n+12, 12n^2+30n+12)$ $2(2n+1), 12(2n+1)(n+2)(n+3)$

2. 求下面整数的标准分解式。

(1) 69 $69 = 3^1 * 23^1$

(2) 200 $200 = 2^3 * 5^2$

(3) 3288 $3288 = 2^3 * 3^1 * 137^1$

(4) 2154 $2154 = 2^1 * 3^1 * 359^1$

3. 若$a \in Z^+ \cup \{0\}$，$a^4 - 3a^2 + 9$是质数还是合数?

> 解：$a^4 - 3a^2 + 9 = [(a+1)(a+2)+1][(a-1)(a-2)+1]$
> 当$a = 0$时，$a^4 - 3a^2 + 9 = 9$，那么，$a^4 - 3a^2 + 9$是合数;
> 当$a = 1$或2时，$(a-1)(a-2)+1 = 1$，此时，$(a+1)(a+2)+1 = 7$或13，那么，$a^4 - 3a^2 + 9$是质数;
> 当$a > 2$时，$(a-1)(a-2)+1 > 1$，$(a+1)(a+2)+1 > 1$，那么，$a^4 - 3a^2 + 9$是合数。

4. 证明每个奇数的平方都具有$8k+1$的形式。

> 证明：设奇数为$2n+1$。有 $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1$，$n$ 和 $n+1$ 中一定有一个偶数，所以$8|4n(n+1)$，所以可以写成$8k+1$的形式。

5. 证明若$(m-p)|(mn+pq)$，则$(m-p)|(mq+np)$。

> 证明：易知 $(m-p)|(m-p)(n-q)$，又 $(m-p)|(mn+pq)$，而 $-(m-p)(n-q)+(mn+pq)=mq+np$，则 $(m-p)|(mn+pq)$，证毕。

6. 证明若 k 为正整数，那么 $3k+2$ 与 $5k+3$ 互素。

> 证明：$(3k+2,5k+3)=(3k+2,2k+1)=(2k+1,k+1)=(k,k+1)=1$
> 所以，$3k+2$ 与 $5k+3$ 互素。

7. 证明$12|n^4+2n^3+11n^2+10n, n\in Z$。

> 证明：$n^4+2n^3+11n^2+10n=(n-1)n(n+1)(n+2)+12n(n+1)$
> 连续四个整数中一定有两个偶数，也一定有至少一个3的倍数（严谨证明可以使用数学归纳法），故$12|n^4+2n^3+11n^2+10n, n\in Z$。

8. 证明在$1,2,3,...,2n$中任取$n+1$个数，其中至少有一个能被另一个整除。

> 证明：每个正整数都可以唯一地写成 2^k*a 的形式，k 为非负整数，a 为该正整数的最大奇约数。由于$S=\{1,2,...,2n\}$中奇数只有 n 个，所以从 S 中任选 $n+1$个数里面至少有两个的最大奇约数相同，则会令此二数为 $2^{k_1}*a$ 与 $2^{k_2}*a$，且 $k_1\neq k_2$ 。设 $k_1<k_2$ ，则 $2^{k_1}*a|2^{k_2}*a$。证毕。

9. 证明 n 的标准分解式中次数都是偶数当且仅当 n 是完全平方数。

> 证明：充分性：设 $n=m^2$，由算术基本定义有
>
> $$\begin{cases} n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}, p_i\text{是素数且}p_i<p_j(0<i<j\leq s)\\ m=q_1^{\beta_1}\cdots q_t^{\beta_t}, q_i\text{是素数且}q_i<q_j(0<i<j\leq t)\end{cases}$$
>
> 由算术分解的唯一性可得
>
> $$\begin{cases} s=t\\ p_i=q_i, 0<i\leq s\\ \alpha_i=2\beta_i, 0<i\leq s\end{cases}$$
>
> 必要性：设 $n=p_1^{2\alpha_1}\cdots p_s^{2\alpha_s}$，$p_i$ 是素数且 $p_i<p_j(0<i<j\leq s)$，取 $m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 即可满足 $n=m^2$ 。证毕。

10. 证明 $\sqrt{5}$ 是无理数。*并将其表示为简单连分数的形式。（*标注表示不作强制要求）

> 证明：反证法：反设 $\sqrt{5}=\frac{p}{q}$，其中 $p,q\in Z^+,(p,q)=1$。得 $p^2=5q^2$，则 $5|p$。可设 $p=5m$，代入得 $q^2=5m^2$，同理 $5|q$。则 $(p,q)=5\neq 1$ 矛盾，故反设不成立，证毕。

> $\sqrt{5} = [2; \overline{4}]$

11. *求证任意 n 个连续的正整数乘积都被 $n!$ 整除。（写出严谨的证明过程）

证明　数学归纳法.

记任意 n 个连续的正整数分别为 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$. 其中 $a_i = m + i \ (m \in \mathbb{N})$, 乘积记为 T_m.

当 $m = 1$ 时，$T_1 = n!$ ，$n! \mid T_1$ 成立 .

假设当 $m = k \ (k \in \mathbb{N})$ 时，$n! \mid T_k$ ，即 $n! \mid k(k+1)\cdots(k+n-1)$ 成立 .

那么当 $m = k+1$ 时，有 $T_{k+1} = \prod_{i=0}^{n-1} a_i = (k+1)(k+2)\cdots(k+n) = k(k+1)\cdots(k+n-1) + n(k+1)\cdots(k+n-1)$.

只需证 $n! \mid n(k+1)\cdots(k+n-1)$ ，即$(n-1)! \mid (k+1)\cdots(k+n-1)$.

取 n 为 $n-1$ ，m 为 k ，重复上述证明过程.

易知经过有限步后，$n = 1$ ，而 $\forall m \in \mathbb{N}, 1 \mid m$ ，假设成立，证毕.