

中级微观经济学

第二十二讲：成本曲线

贺思诚

南开大学金融学院

2024年4月21日

成本曲线

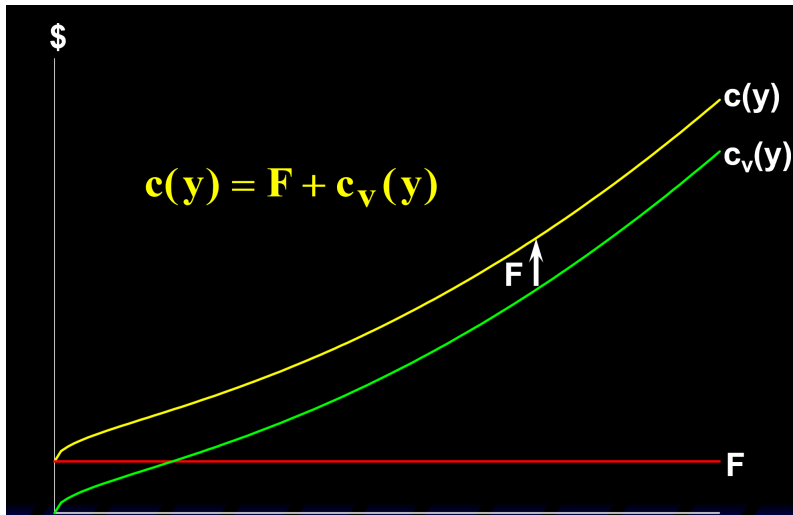
- 上一课中我们介绍了厂商的成本最小化问题。
- 然而，我们这门课所使用的数学工具有限，并且单靠数学工具去理解成本函数的相关性质有时也不够直观
- 在这一课，我们通过将各种成本函数与几何图形联系起来来研究成本函数的相关性质
- 在这一课中，我们可以看到各种不同的成本函数之间的关系（长期VS短期，总VSP平均VS边际，可变VS不变）
- 在本章的讨论中，我们一般假定要素价格不变，因此，所有成本函数就成了产量 y 的函数 $c(y)$

不变成本与可变成本

- 不变成本与不变要素：不变要素是指不论生产与否，不论生产的多少都必须支付的要素。用于支付这些要素的成本被称作不变成本。
- 例子：早已签下契约的长租厂房
- 注意，在长期没有不变成本。
- 与不变成本相对应的是可变要素和可变成本，可变要素的投入数量与产量是相关的。
- 我们将不变成本用 F 表示，可变成本 $c_v(y)$ ，因此，我们可以将总成本分解为可变成本与不变成本之和

$$c(y) = F + c_v(y)$$

总成本的分解



平均成本的分解

- 与总成本类似，我们也可以把平均成本分解成平均可变成本（ $AVC(y)$ ）和平均不变成本（ $AFC(y)$ ）

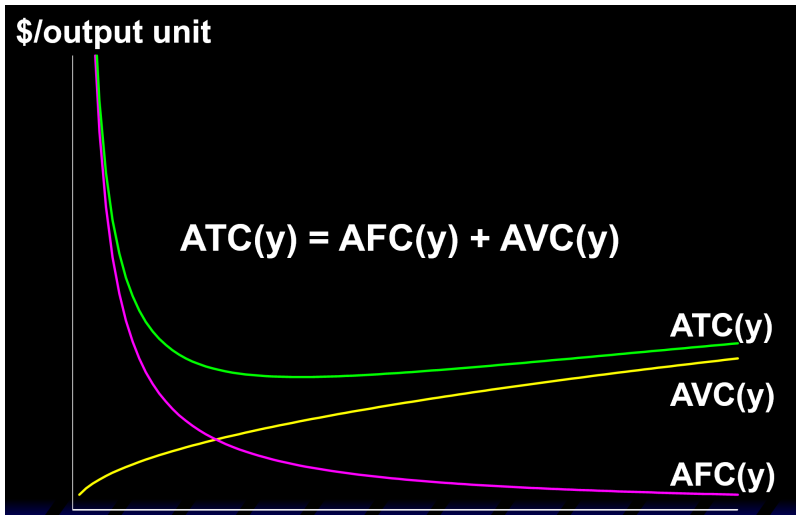
$$AC(y) = \frac{c(y)}{y} = \frac{F}{y} + \frac{c_v(y)}{y} = AFC(y) + AVC(y)$$

- 注意，尽管总的不变成本不受产量的影响，但平均不变成本（ $AFC(y)$ ）是产量的函数（反比例函数）。因为产量增加摊低了平均不变成本

$$AFC(y) = \frac{F}{y}$$

- 而在短期，总体来说，边际产品递减规律是存在的。为了简便起见，我们在这里先假定这一规律始终成立，可变平均成本必然上升（我们马上会通过边际成本来更严谨的分析这个内容，这里的结论并非精确）

平均成本的分解



边际成本

- 边际成本的表达式是

$$MC(y) = \frac{dc(y)}{dy} = \frac{d(F + c_v(y))}{dy} = \frac{dc_v(y)}{dy} = MVC(y)$$

- 用不严谨的说法就是：多生产1单位产量时成本的变动量
- 通过洛必达法则，可以算出

$$AVC(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{c_v(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} c'_v(y) = c'_v(0)$$

其中，第二个等式是用的洛必达法则

- 这个计算意味着，对于最开始的产出，平均可变成本等于边际成本

边际成本函数的特征

- 我们知道，总的来说，边际产品递减是存在的，这也意味着，总的来说，边际成本应该递增
- 然而，在可变要素非常少时，情况并不一定如此，反而可能是边际产品递增，边际成本递减
- 考虑现在有一艘巨大的邮轮，如果只有一个船员，可能手忙脚乱，什么都干不成。反而随着船员数增加，能干起来的事增加的也越来越快
- 当然，这一增加不会没有限制，最后边际产品递减一定会产生。一艘邮轮可能有1000个船员就运作的非常有效率，再增加2000个船员提升的好处就很有限了
- 因此，边际成本有时可以先减少后增加

边际成本函数与可变成本函数

- 注意到

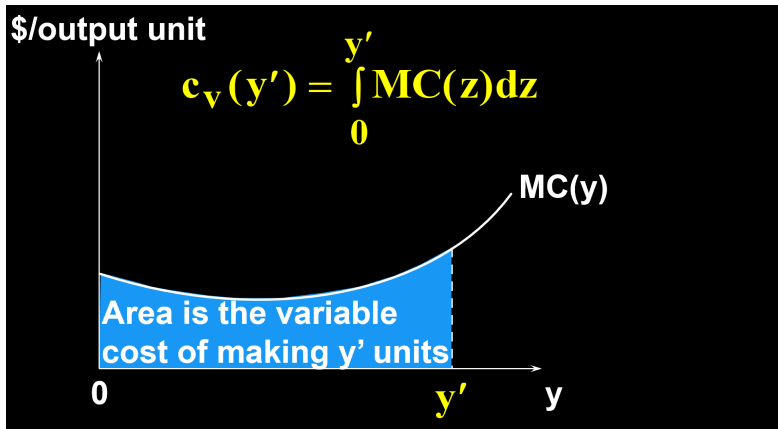
$$MC(y) = \frac{dc_v(y)}{dy}$$

- 通过定积分，我们可以通过边际成本函数求可变成本

$$c_v(y) = \int_0^y MC(z) dz$$

- 当然，也可以求总成本，方法完全一样，但注意初值的不同（总成本初值有不变成本）

边际成本曲线与可变成本曲线



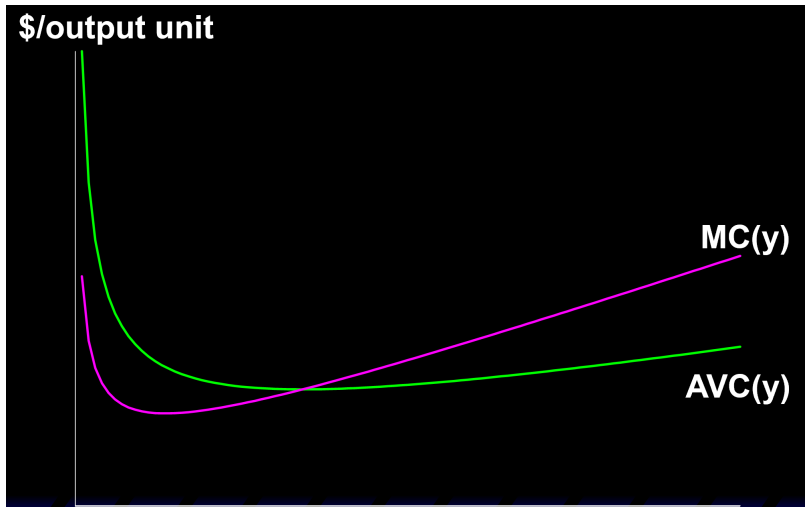
边际成本函数与平均可变成本函数

- 我们接着考察边际成本函数与平均（可变）成本函数的关系，无论是总的平均成本函数，还是平均可变成本函数，推导和结论极其类似
- 对可变平均成本函数求导

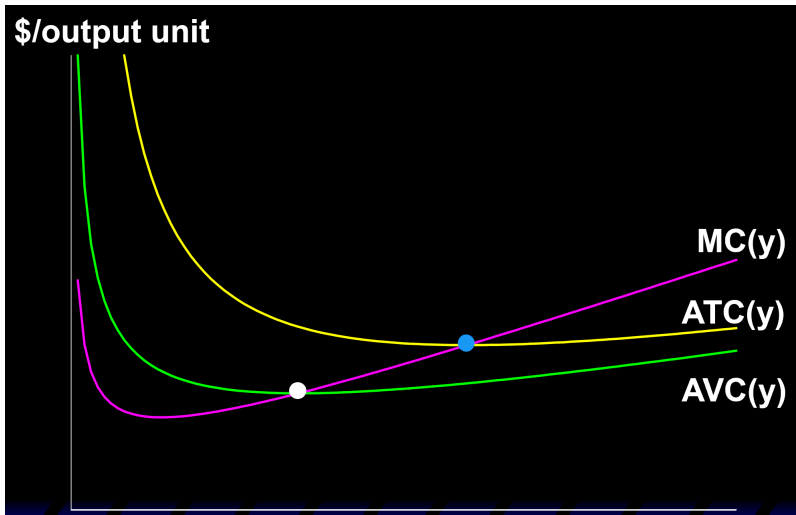
$$\frac{dAVC}{dy} = \frac{d\left(\frac{c_v}{y}\right)}{dy} = \frac{yMC - c_v}{y^2}$$

- 当 $yMC - c_v = 0$ 即 $MC = AVC$ 时， $\frac{dAVC}{dy} = 0$
- 当 $yMC - c_v > 0$ 即 $MC > AVC$ 时， $\frac{dAVC}{dy} > 0$
- 当 $yMC - c_v < 0$ 即 $MC < AVC$ 时， $\frac{dAVC}{dy} < 0$
- 因此，在平均可变成本最低点的左边，边际成本的曲线必定在平均可变成本之下；在平均可变成本最低点的右边，边际成本的曲线必定在平均可变成本之上。边际曲线与平均曲线交于最低点
- 此外，我们已经证明在产量为0时，两曲线高度相同

边际成本曲线与平均可变成本曲线



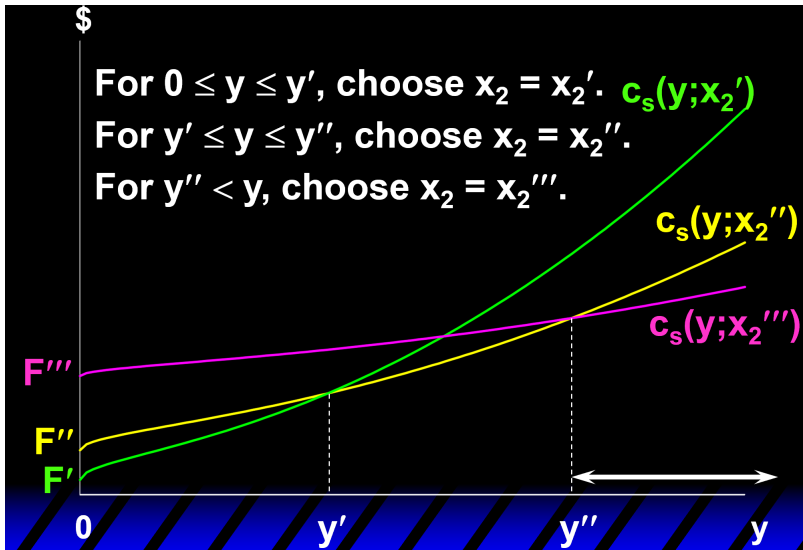
边际成本曲线与两条平均成本曲线的关系



一个简单的例子

- 在长期，当所有的要素都可以变动时，会发生什么？
- 我们先从一个最简单的例子开始
- 假定回到我们前面的邮轮的例子，邮轮公司可以买小邮轮(x_2')、中邮轮(x_2'')和大邮轮(x_2''')（第一种要素是雇佣船员）
- 显然，越大的邮轮越适合载较多的乘客而小邮轮适合较少的乘客
- 在短期，邮轮公司选定了一个邮轮一时就改变不了了，我们可以在同一个坐标系画出三个邮轮的成本函数

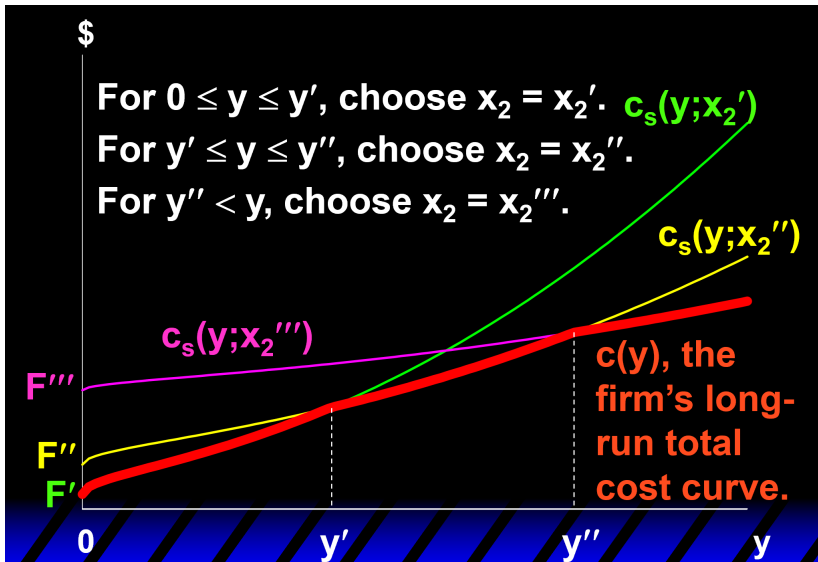
一个简单的例子



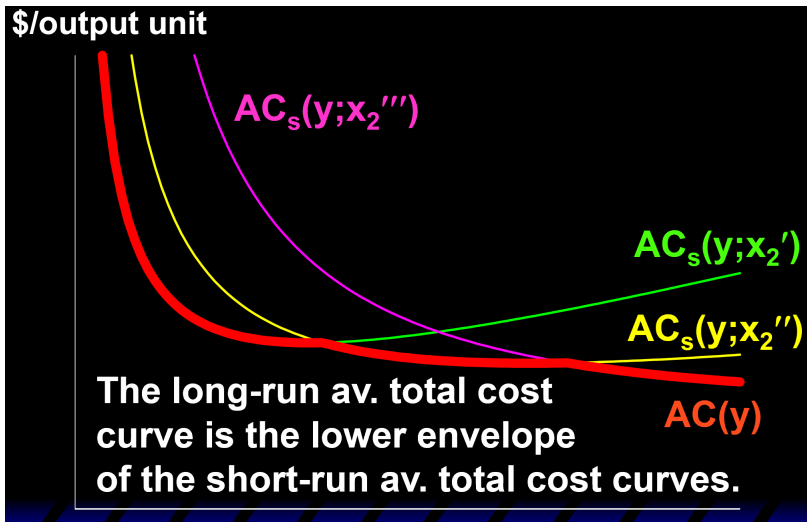
一个简单的例子

- 现在考虑长期，邮轮公司如果发现长期的游客数量发生了变化，显然不仅需要改变船员的数量，完全可以更换邮轮
- 因此，我们可以有下面的长期成本函数

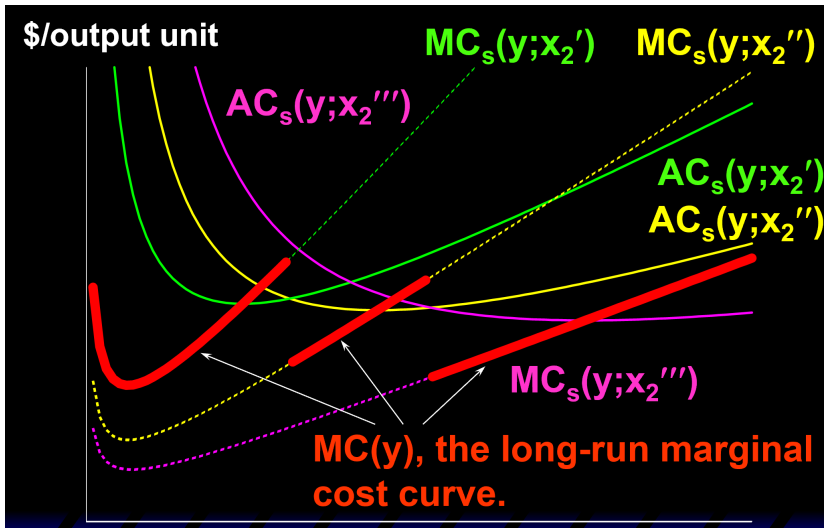
一个简单的例子



一个简单的例子



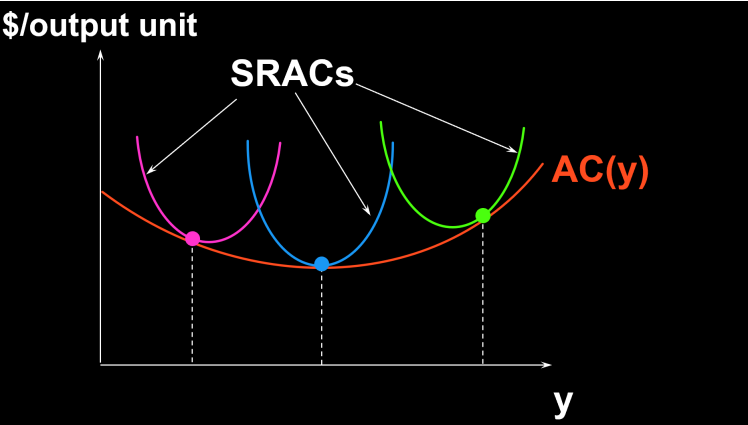
一个简单的例子



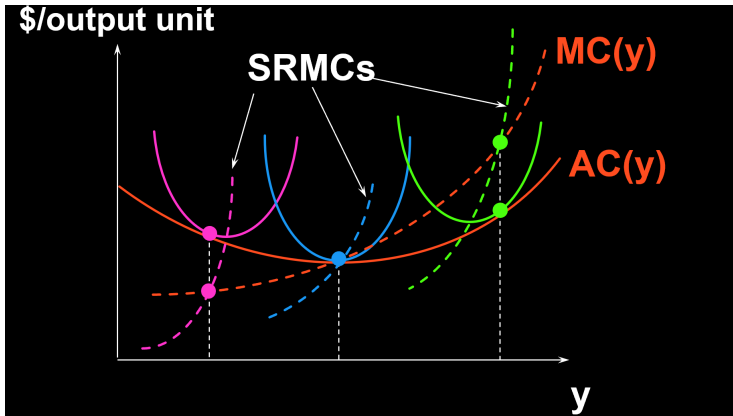
连续要素的长期成本曲线

- 刚才的例子不仅仅是个例子，也是实际离散的不变投入要素（短期）下长期成本曲线的样式
- 刚才所得到的结论在连续的固定投入要素下也是类似的：长期总成本和平均成本都是短期平均成本的包络线
- 对于边际成本，在每一点长期的边际成本等于短期在该点选择的技术的边际成本
- 不同的是：每个短期总（平均）成本曲线与长期总（平均）成本曲线有一个切点，该切点长期成本最小化问题找到的最优要素2与该短期曲线的不变要素数量相同。（但并不意味着此点短期成本最小）

连续要素平均成本



连续要素边际成本



证明长期边际成本等于短期边际成本

- 我们现在来证明长期边际成本等于短期边际成本
- 用 k 来表示不变要素，因此，不同的 k 决定不同的短期成本曲线，我们有 $c_s(y, k)$
- 对于任何一个特定的产出 y ，我们找到一个 k ，这条短期成本曲线在该点位置最低，成本最小，我们用 $k(y)$ 来表示此不变要素（也会受别的影响因素，我们这里不需考虑）
- 因此，长期成本一定等于最优的短期成本，我们有

$$c(y) = c_s(y, k(y))$$

证明长期边际成本等于短期边际成本

- 两边同时对 y 求导

$$\frac{dc(y)}{dy} = \frac{\partial c_s(y, k)}{\partial y} + \frac{\partial c_s(y, k)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial y}$$

- 既然这里找到的不变要素（我们用 k^* ）是对应产量（我们用 y^* 表示）最优的，必然有

$$\frac{\partial c_s(y^*, k^*)}{\partial k} = 0$$

- 因此，

$$\frac{dc(y^*)}{dy} = \frac{\partial c_s(y^*, k^*)}{\partial y}$$