经济学院本科生（数字经贸班）2021–2022学年第二学期《线性代数》期末试卷 A

草 稿 区

专业: **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

得 分

一、填空题 (本题共15分，每题3分)

1. 行列式$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 2 & a+2 & 2 \\ 3 & 3 & a+3 \end{vmatrix} =$__________

2. 设$\boldsymbol{A}$为3阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=3$，则$|2\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^*|=$__________

3. 设3阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 3维列向量$\boldsymbol{\alpha}=(x,1,1)^{\mathrm{T}}$,且 $\boldsymbol{A\alpha}$与$\boldsymbol{\alpha}$线性相关，则 $x=$__________

4. 设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$-2,-1,1$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为3阶单位矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$__________

5. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+6x_2x_3+5x_3^2$的矩阵 $\boldsymbol{A}=$__________

得 分

二、选择题 (本题共15分，每题3分)

6. 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，如有矩阵关系式$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，则必有 (　　)

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$　　(B) $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$时, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$

(C) $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$时, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$　　(D) $|\boldsymbol{A}|\neq 0$时, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是一组$n$维向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，则 (　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$中必有零向量　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$必线性相关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$必线性无关　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$必线性相关

8. 已知$\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_3$是齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系, 则此方程组的基础解系还可取为 (　　)

(A) $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3,\ \boldsymbol{\eta}_1+2\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3$　　(B) $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3,\ \boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1$

(C) 与$\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_3$等价的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$　　(D) 与$\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_3$等秩的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$

9. 设$\boldsymbol{A}$为3阶实对称矩阵且$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$, 若$\boldsymbol{A}$的秩为2，则下列矩阵与$\boldsymbol{A}$相似的是 (　　)

(A) $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

草 稿 区

10. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 则$\boldsymbol{A}$是 (　　)

(A) 正定矩阵　　(B) 负定矩阵　　(C) 不定矩阵　　(D) 以上皆不是

得 分

三、**解答题 (本题共70分，每题10分)**

11. 计算行列式: $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

草 稿 区

12. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, 且$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}$, 求矩阵$\boldsymbol{X}$.

13. 若向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关, 且$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{3}}=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$, 证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.

草 稿 区

14. 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(2,1,5,6)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_5=(1,-1,2,0)^T$的秩和一个极大无关组，并用该极大无关组表示其余向量.

15. 判断参数a为何值时, 下列非齐次线性方程组有解, 并用其导出组的基础解系表示其通解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = a. \end{cases}$$

草 稿 区

16. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{bmatrix}$相似于矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{bmatrix}$.

(1) 求a,b的值; (2) 求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$为对角矩阵.

17. 设3阶方阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$, $\boldsymbol{E}$为3阶单位矩阵，令矩阵$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})$, 证明$\boldsymbol{B}$为零矩阵，即$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.