南开大学金融学院本科大类基础课程

2023-2024学年度第二学期

金 融 学 概 论

Introduction to Finance

南开大学金融学院 张增伟

nkzhangzengwei@126.com

版权及免责声明

版权人张增伟联络方式

nkzhangzengwei@126.com

第05讲 债券估值

1 固定收益证券概论
2 债券估值简介
3 债券价格与货币的时间价值
4 债券报价、天数计算惯例

1 固定收益证券概论

1.1 固定收益证券的基础内涵*

- 除**现金**(cash)及**现金等价物**(Cash equivalents)这种流动性最强的基础金融资产外，金融市场上最常见的两大类金融资产包括：作为所有权凭证的**股票/权益**(stock/share/equities)，以及作为债权债务凭证的**固定收益证券**(fixed income securities)。
- 固定收益证券的发行人(issuer)，承诺在指定的未来日期支付指定的金额给该证券的购买者。发行人可能是国际组织、各级政府及其附属机构、金融机构或其他企业。

- 【延伸阅读】全球最早股份公司：荷兰东印度公司 (VOC)
- 【延伸阅读】全球最长寿的债券：荷兰莱克代克水务局永续债券
- 【延伸阅读】2023年债券市场发展报告（联合资信）

* Frank J. Fabozzi, ***Fixed Income Analysis***, John Wiley & Sons Inc., 2nd Edition (2007), P1.

【延伸阅读】我国《企业会计准则》对现金等价物 (Cash equivalents)的理解 *

- 根据我国《企业会计准则》，企业所持**现金等价物(Cash equivalents)**，是指企业持有的期限短、流动性强、易于转换为已知金额现金、价值变动风险很小的投资。其中，“期限短”一般是指从购买日起3个月内到期。例如可在证券市场上流通的3个月内到期的短期债券等。
- 现金等价物虽然不是现金，但其支付能力与现金的差别不大，可视为现金。例如，企业为保证支付能力，手持必要的现金，为了不使现金闲置，可以购买短期债券，在需要现金时，随时可以变现。
- 现金等价物的定义本身，包含了判断一项投资是否属于现金等价物的四个条件，即，①期限短；②流动性强；③易于转换为已知金额的现金；④价值变动风险很小。其中，期限短、流动性强，强调了变现能力，而易于转换为已知金额的现金、价值变动风险很小，则强调了支付能力的大小。现金等价物通常包括3个月内到期的短期债券投资。权益性投资变现的金额通常不确定，因而不属于现金等价物。
- 企业应当根据具体情况，确定现金等价物的范围，一经确定不得随意变更；如果发生变更，应当按照会计政策变更处理。

* https://www.casc.org.cn/2019/1231/202984.shtml（财政部会计准则委员会）

1.2 固定收益证券的类别*

- 固定收益证券分为两大类：**债务义务**(debt obligations)和**优先股**(preferred stock)。

1.2.1 债务义务

- 在债务义务的情况下，发行人被称为借款人(borrower)。购买此类固定收益证券的投资者被称为贷款人(lender)或债权人(creditor)。发行人同意在指定日期进行的承诺付款包括两个部分：利息(interest)和本金(principal, 本金代表借款的偿还)。
- 作为债务义务的固定收益证券包括债券(bonds)、抵押贷款支持证券(MBS, mortgage-backed securities)、资产支持证券(ABS, asset-backed securities)和银行贷款(bank loans)。

* Frank J. Fabozzi, ***Fixed Income Analysis***, John Wiley & Sons Inc., 2nd Edition (2007), P1.

1.2.2 优先股

- 与代表债务义务的固定收益证券不同，优先股代表公司的所有权权益(ownership interest)。股息支付给优先股股东，代表公司利润的分配。与拥有公司普通股的投资者不同，拥有优先股的投资者只能实现合同固定的股息支付。
- 必须支付给优先股股东的款项，优先于公司支付给普通股股东的付款。在公司破产的情况下，优先股股东比普通股股东享有优先权。
- 因此，优先股既是一种股权形式，其特征又与债券相似。

1.3 固定收益证券的风格演变*

- 在20世纪80年代之前，固定收益证券是简单的投资产品。除了发行人的违约，投资者知道将收到多长时间的利息以及何时偿还借款。此外，大多数投资者购买这些证券的目的是将其持有至到期日。
- 自20世纪80年代开始，固定收益世界发生了变化。首先，固定收益证券变得更加复杂。许多固定收益证券的特点使得很难确定何时偿还借款以及收取利息的期限。对于某些证券，很难确定将收到的利息金额。其次，持有至到期投资者已被积极交易固定收益证券的机构投资者所取代。

1.4 固定收益证券的称谓切换*

- 在金融投资语境下，“固定收益证券”和“债券”二词经常交替使用。有时也笼统地使用“债券”一词来统称抵押贷款支持证券、资产支持证券和银行贷款。*

* Frank J. Fabozzi, ***Fixed Income Analysis***, John Wiley & Sons Inc., 2nd Edition (2007), P2.

1.5 另类资产

- 除以上几大类资产外，其他类别的资产(投资标的)，如房地产(real estate)、私募股权(private equity)、对冲基金(hedge funds)和大宗商品(commodities)等，常被称为“另类资产”(alternative asset)。*

* Frank J. Fabozzi, ***Fixed Income Analysis***, John Wiley & Sons Inc., 2nd Edition (2007), P1.

- **自本页起，后续内容的主要参考资料：**
- James F. Adams, Donald J. Smith. **Introduction to Fixed-Income Valuation.** CFA institute. 2013.
- James F. Adams, PhD, CFA @ J.P. Morgan (USA)
- Donald J. Smith, PhD @ Boston University Questrom School of Business (USA).

CFA Institute

READING

53

Introduction to Fixed-Income Valuation

by James F. Adams, PhD, CFA, and Donald J. Smith, PhD

James F. Adams, PhD, CFA, is at J.P. Morgan (USA). Donald J. Smith, PhD, is at Boston University Questrom School of Business (USA).

LEARNING OUTCOMES

Mastery	*The candidate should be able to:*
☐	**a.** calculate a bond's price given a market discount rate;
☐	**b.** identify the relationships among a bond's price, coupon rate, maturity, and market discount rate (yield-to-maturity);
☐	**c.** define spot rates and calculate the price of a bond using spot rates;
☐	**d.** describe and calculate the flat price, accrued interest, and the full price of a bond;
☐	**e.** describe matrix pricing;

2 债券估值简介

2.1 债券估值的意义

- **债券估值**(Bond valuation)，也称**固定收益估值**(fixed-income evaluation)，是确定固定收益债券**理论公允价值**(theoretical fair value)的专业投资技术，包括计算债券未来付息的现值和债券到期价值。
- 和其它形式的资本投资一样，债券的理论公允价值是其**预期现金流**按一定**贴现率**贴现后的**现值**。
- 当某个债券的票面价值和利息支付方式确定后，债券估值可预判其潜在投资价值。

- 在全球范围内，固定收益市场(fixed-income market)是企业和政府融资的关键来源。事实上，公司债券和政府债券的总市值(total market value)明显大于权益证券(equity securities)。同样，固定收益市场也被称为债务市场(debt market)或债券市场(bond market)，对机构和个人来说都是一个重要的投资机会。
- 养老基金(Pension funds)、共同基金(mutual funds)、保险公司(insurance companies)和主权财富基金(sovereign wealth funds)等都是主要的固定收益投资者。想要相对稳定收益流(relatively stable income stream)的退休人员(Retirees)通常持有固定收益证券。
- 显然，了解如何为固定收益证券估值，对投资者、发行人(issuers)和金融分析师(financial analysts)都很重要。
- 本部分侧重于传统(无期权)(option-free)固定利率债券的估值，但也包括浮动利率票据(floating-rate notes)和货币市场工具(money market instruments)等其他债务证券。

2.2 债券的要素

- **(1) 息票率** (coupon rate)：也称**票面利率**(face interest rate)、**名义利率**(nominal rate)，是债券的**息票支付额**(coupon payment)与**债券面值**(face value)的比率，是发行人(issuer)承诺每年向债券持有人(bondholder)支付的利息金额，是投资者在债券到期前定期获得的固定收益率。当投资者购买债券时，他们实际上是借钱给债券发行人。作为回报，债券发行人同意在债券存续期间向投资者支付债券利息，并在债券到期时偿还债券面值。
- **(2) 到期日**(maturity)：所有债券都有到期日，有的是短期的，有的是长期的。债券到期时，债券发行人向投资者偿还债券的全部面值。

- (3) **面值/票面价值**(face value/par value)：债券发行时由发行人在票面所标明的价值金额。在美国，公司债券的面值通常为1000美元，政府债券的面值为10000美元。面值不一定是债券的投资本金或购买价格。
- (4) **当前价格**(Current price)：参照市场环境中的利率水平，投资者可以按面值、低于面值或高于面值购买债券。例如，如果利率上升，债券的价值将下降，因为息票率将低于经济中的利率。当这种情况发生时，债券将以低于面值的价格折价交易。而债券持有人在债券到期时将获得债券的全部面值，即使他起初以低于面值的价格购买。

2.3 债券的收益率(Bond Yield)

- 是投资者通过买卖债券，在一定时期内实现的**投资收益**(yield)与其**本金**(principal)的**比率**，以百分比或利率表示。
- 因为发行方式的差异，债券存在多种形态的收益率，蕴含不同的风险和收益组合。
- 债券收益率可以用不同的方式定义，最简单的定义是将债券收益率设定为息票率，更复杂的债券收益率计算将考虑货币的时间价值和复利支付。这些计算包括**到期收益率**(YTM, yield to maturity)、**债券等价收益率**(BEY, bond equivalent yield)和**有效年收益率**(EAY, effective annual yield)等。

3 债券价格与货币的时间价值

- 本节描述基本的债券估值，其中包括使用市场贴现率(market discount rate)对债券的未来现金流(future cash flows)进行定价，以及使用一系列即期利率(spot rates)对债券进行定价。采用即期利率的估值允许每个未来现金流择时(timing)贴现——这种未来现金流估值方法(valuation methodology)的应用范围远远超出固定收益市场。此外还分析债券的价格、票面利率(coupon rate)/名义利率(nominal rate)、到期日(maturity)和市场贴现率(market discount rate)/到期收益率(yield-to-maturity)。

- 债券定价(Bond pricing)是贴现现金流分析(discounted cash flow analysis)的一种应用。定价的复杂性取决于特定债券的特征和用于贴现的利率。本节对所有未来现金流(future cash flows)使用单一贴现因子(a single discount factor)，概括债券估值的最通用方法。债券估值的一般方法是使用一系列与未来现金流择时(timing)相应的即期利率。

3.1 采用市场贴现率的债券定价

- **市场贴现率**(market discount rate)/**要求收益率**(required yield)/**要求回报率**(required rate of return)：是投资者在考虑到债券投资风险的情况下所要求的回报率，反映投资者为支付债券的全部面值，每年需要获得的利息。
- 当市场贴现率改变时，固定利率债券的价格就会改变。
- 在传统的(无期权)**固定利率债券**(fixed-rate bond)上，承诺的未来现金流是一系列的**息票利息支付**(coupon interest payments)和**到期时的全额本金返还**(repayment of the full principal) 。息票支付通常在预定的日期(on regularly scheduled dates)进行，如美国的年付债券(annual payment bond)可能在每年6月15日支付利息，为期五年。最后的息票通常在到期日与全部本金一起支付。债券发行价是其承诺现金流(promised cash flows)的现值。在计算货币时间价值时，采用市场贴现率求得现值。

- **折价交易债券：交易价格低于面值**的债券为折价交易(trading at a discount)债券。
- 假设五年期债券(five-year bond)A的面值为100美元，息票率(coupon rate)为4%，每年支付一次。如果市场贴现率为6%，则其价格为91.575美元。

$$\frac{4}{(1.06)^1}+\frac{4}{(1.06)^2}+\frac{4}{(1.06)^3}+\frac{4}{(1.06)^4}+\frac{104}{(1.06)^5}$$
$$=3.774+3.560+3.358+3.168+77.715=91.575$$

- 上式中，104美元的最终现金流是本金赎回(redemption of principal)(100美元)加上当日的息票支付(coupon payment)(4美元)。**债券A的价格是五次现金流的现值之和**。每100美元面值的价格可以解释为面值的百分比。如果面值为100,000美元，则息票支付为每年4000美元，债券价格为91575美元(是面值的91.575%)。

- **溢价交易债券：交易价格高于面值**的债券为溢价交易(trading at a premium)债券。
- 假设五年期债券B的息票率为每年8%，如果市场贴现率也是6%，则其价格为108.425美元。

$$\frac{8}{(1.06)^1}+\frac{8}{(1.06)^2}+\frac{8}{(1.06)^3}+\frac{8}{(1.06)^4}+\frac{108}{(1.06)^5}$$
$$=7.547+7.120+6.717+6.337+80.704=108.425$$

- **平价交易债券：交易价格等于面值**的债券为平价交易(trading at par value)债券。
- 如五年期债券C的息票率为每年6%，市场贴现率也是6%，则该债券将按面值交易。

$$\frac{6}{(1.06)^1}+\frac{6}{(1.06)^2}+\frac{6}{(1.06)^3}+\frac{6}{(1.06)^4}+\frac{106}{(1.06)^5}$$
$$=5.660+5.340+5.038+4.753+79.209=100.000$$

- 由于采用相同的市场贴现率，所以这三种债券(A、B、C)理论上具有相同的风险。通过比较可见：
- (1) **折价交易的债券**A(息票率4%)对于投资者而言显然含金量不足(deficient)。低于面值的折扣金额(每年为面值的2%)，可被视作使用市场贴现率贴现前提下，不足部分的现值(–8.425美元)。因此其价格为91.575美元(=100–8.425)。

$$\frac{-2}{(1.06)^1}+\frac{-2}{(1.06)^2}+\frac{-2}{(1.06)^3}+\frac{-2}{(1.06)^4}+\frac{-2}{(1.06)^5}=-8.425$$

- (2) **溢价交易的债券**B(息票率8%)提供了超过市场(投资者)需要的(6%)超额票面利率，溢价金额是超额现金流(excess cash flows)的现值(+8.425)。其价格为108.425美元(=100+8.425)。

$$\frac{2}{(1.06)^1}+\frac{2}{(1.06)^2}+\frac{2}{(1.06)^3}+\frac{2}{(1.06)^4}+\frac{2}{(1.06)^5}=8.425$$

- 上述示例表明，**相对于面值，固定利率债券的价格取决于息票率**(coupon rate)**与市场贴现率**(market discount rate)**的关系**：
- (1) 当息票率**低于**市场贴现率时，债券的定价**低于**面值(below par value)。
- (2) 当息票率**大于**市场贴现率时，债券的定价**高于**面值(above par value)。
- (3) 当息票率**等于**市场贴现率时，债券按面值定价(at par value)。

- 假设债券按息票支付日(coupon payment date)定价。如果债券处在息票支付日之间，支付的价格将包括**应计利息**(即已赚取但尚未支付的利息)。
- **给定市场贴现率**情况下的常用**债券价格计算公式(方程1)**：

$$\boldsymbol{PV} = \frac{\boldsymbol{PMT}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\mathbf{1}}} + \frac{\boldsymbol{PMT}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\mathbf{2}}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{PMT}+\boldsymbol{FV}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\boldsymbol{N}}}$$

其中：

$\boldsymbol{PV}$： 现值(present value)/债券价格(bond price)

$\boldsymbol{PMT}$： 每期息票支付(coupon payment per period)

$\boldsymbol{FV}$： 到期支付的未来价值(future value paid at maturity)/债券面值(par value of the bond)

$\boldsymbol{r}$： 市场贴现率(market discount rate)/每个时期的要求回报率(required rate of return per period)

$\boldsymbol{N}$： 平均间隔的到期期数(number of evenly spaced periods to maturity)

- 就**支付惯例**而言，大多数欧洲债券(European bonds)为年度支付(annual payment)，亚洲和北美债券一般为半年支付(semiannual payments)，设定利率(stated rate)为年息票率(annual coupon rate)。
- 假设债券的息票率为8%，每年6月15日和12月15日支付两次(半年一次)。每100美元面值($\boldsymbol{PV=100}$)，每期息票支付为4美元($\boldsymbol{PMT=4}$)。如果还有三年到期，则有六个等距半年期(evenly spaced semiannual periods)($\boldsymbol{N=6}$)。如果市场贴现率为每半年3%($\boldsymbol{R=0.03}$)，债券价格为105.417美元(每100美元面值)。

$$\frac{4}{(1.03)^1}+\frac{4}{(1.03)^2}+\frac{4}{(1.03)^3}+\frac{4}{(1.03)^4}+\frac{4}{(1.03)^5}+\frac{104}{(1.03)^6}=105.417$$

- 由于每期息票率(4%)高于市场贴现率(3%)，该债券的交易价格将高于面值(即溢价交易)。通常，这些利率是年化的(annualized)，用一年中的周期数(the number of periods)乘以每周期的利率(rate per period)。因此，一个等价的说法是，债券的定价是溢价的，因为其年息票率(8%)大于年市场贴现率(6%)。
- 除非另有说明，利率通常以年利率报价(Interest rates, unless stated otherwise, are typically quoted as annual rates)。

3.2 到期收益率

- 如果债券的市场价格已知，**方程**1可以用来计算其到期收益率。
- **到期收益率**(Yield-to-Maturity)，也称**赎回收益率**(redemption yield/yield-to-redemption)，是现金流的**内部收益率**(IRR, internal rate of return)**，是未来现金流的现值之和等于债券价格时的贴现率**(换言之，是指净现值为零时的贴现率)。
- 到期收益率基于**三个关键假设**：
- (1) 投资者持有债券至到期。
- (2) 发行人于预定日期(scheduled dates)全额支付所有息票及本金(到期收益率是假设发行人不拖欠任何付款的承诺收益率)。
- (3) 投资者能以相同的收益率对息票付款进行再投资。这是内部收益率的特征之一。

- 假设一个面值100美元、4年期、年息票率为5%的债券的价格为105美元，则其到期收益率为以下方程中利率$\boldsymbol{r}$的解(solution)：

$$\mathbf{105}=\frac{\mathbf{5}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\mathbf{1}}}+\frac{\mathbf{5}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\mathbf{2}}}+\frac{\mathbf{5}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\mathbf{3}}}+\frac{\mathbf{105}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\mathbf{4}}}$$

- 通过试错搜索(trial-and-error search)或在金融计算器(financial calculator)上键入货币的时间价值(time-value-of-money)进行求解，可得$\boldsymbol{r}=\mathbf{0.03634}$。债券之所以被溢价交易，是因为其息票率(5%)高于投资者们所要求的收益率(3.634%)。

3.3 当期收益率(Current Yield)

- 是指以附息债券的**息票额**除以**债券价格**。
- Zvi Bodie版《金融经济学》*认为，对于附息债券而言：
- (1) 如果债券的价格**等于**其面值(即平价债券)，则其收益率**等于**债券的息票率。
- (2) 如果债券的价格**高于**其面值(即溢价债券)，则其到期收益率**小于**当期收益率，同时也**小于**息票率(到期收益率<当期收益率<息票率)。
- (3) 如果债券的价格**低于**其面值(即折价债券)，则其到期收益率**大于**当期收益率，同时也**大于**息票率(到期收益率>当期收益率>息票率)。

* Zvi Bodie, Robert C. Merton, David L. Cleeton，***Financial Economics***, Pearson College Div; 2nd edition (2009).

3.4 债券价格与债券特征的关系

- 一般而言，在**市场贴现率给定**的前提下，债券价格变化与之呈现四种关系(或称四大效应)：
- (1) **逆效应**(inverse effect)：债券价格与市场贴现率反向相关。
- (2) **凸性效应**(convexity effect)：息票率、到期时间相同时，市场贴现率下降时比上升时的价格变动百分比*更大。
- (3) **息票效应**(coupon effect)：市场贴现率、到期时间相同时，低息票债券(lower-coupon bond)比高息票债券(higher-coupon bond) 的价格变动百分比更大。
- (4) **到期效应**(maturity effect)：市场贴现率、息票率相同时，长期债券(longer-term bond)比短期债券(shorter-term bond)的价格变动百分比更大。

* 这里讨论的价格变动百分比(percentage price change)，只考虑其绝对值(absolute value)，不考虑变化的符号(下同)。

- **图**1用9种年息支付债券(annual coupon payment bonds)表明了这些关系。这些债券有不同的息票率和到期时间，但在其他方面风险相同。10年期、20年期和30年期债券的息票率为10%、20%和30%。**起初，这些债券都按20%的市场贴现率定价**(定价公式为**方程**1)。然后，市场贴现率降低了1个百分点(从20%降到19%)，随之从20%提高到21%。

Exhibit 1 Relationships between Bond Prices and Bond Characteristics

				Discount Rates Go Down		Discount Rates Go Up	
Bond	Coupon Rate	Maturity	Price at 20%	Price at 19%	% Change	Price at 21%	% Change
A	10.00%	10	58.075	60.950	4.95%	55.405	−4.60%
B	20.00%	10	100.000	104.339	4.34%	95.946	−4.05%
C	30.00%	10	141.925	147.728	4.09%	136.487	−3.83%
D	10.00%	20	51.304	54.092	5.43%	48.776	−4.93%
E	20.00%	20	100.000	105.101	5.10%	95.343	−4.66%
F	30.00%	20	148.696	156.109	4.99%	141.910	−4.56%
G	10.00%	30	50.211	52.888	5.33%	47.791	−4.82%
H	20.00%	30	100.000	105.235	5.23%	95.254	−4.75%
I	30.00%	30	149.789	157.581	5.20%	142.716	−4.72%

按面值定价

价格变动百分比减小方向

贴现率为20%时的债券价格

贴现率为19%时的债券价格及其涨幅

贴现率为21%时的债券价格及其跌幅

- **第一种关系**是**债券价格和市场贴现率的反向变动**。当利率从20%下降到19%时，表1中的所有债券价格都会上升(go up)；当利率从20%上升到21%时，所有债券价格都会下降(go down)。这是因为固定利率债券的固定现金流(fixed cash flows)。当分母(denominators)中的市场贴现率上升或下降时，**方程**1中的分子(numerators)不会改变。因此，价格($\boldsymbol{PV}$)与市场贴现率($\boldsymbol{r}$)反向变动。

- **第二种关系**反映了**凸性效应**。在**图**1中，价格变动百分比使用以下方程计算：

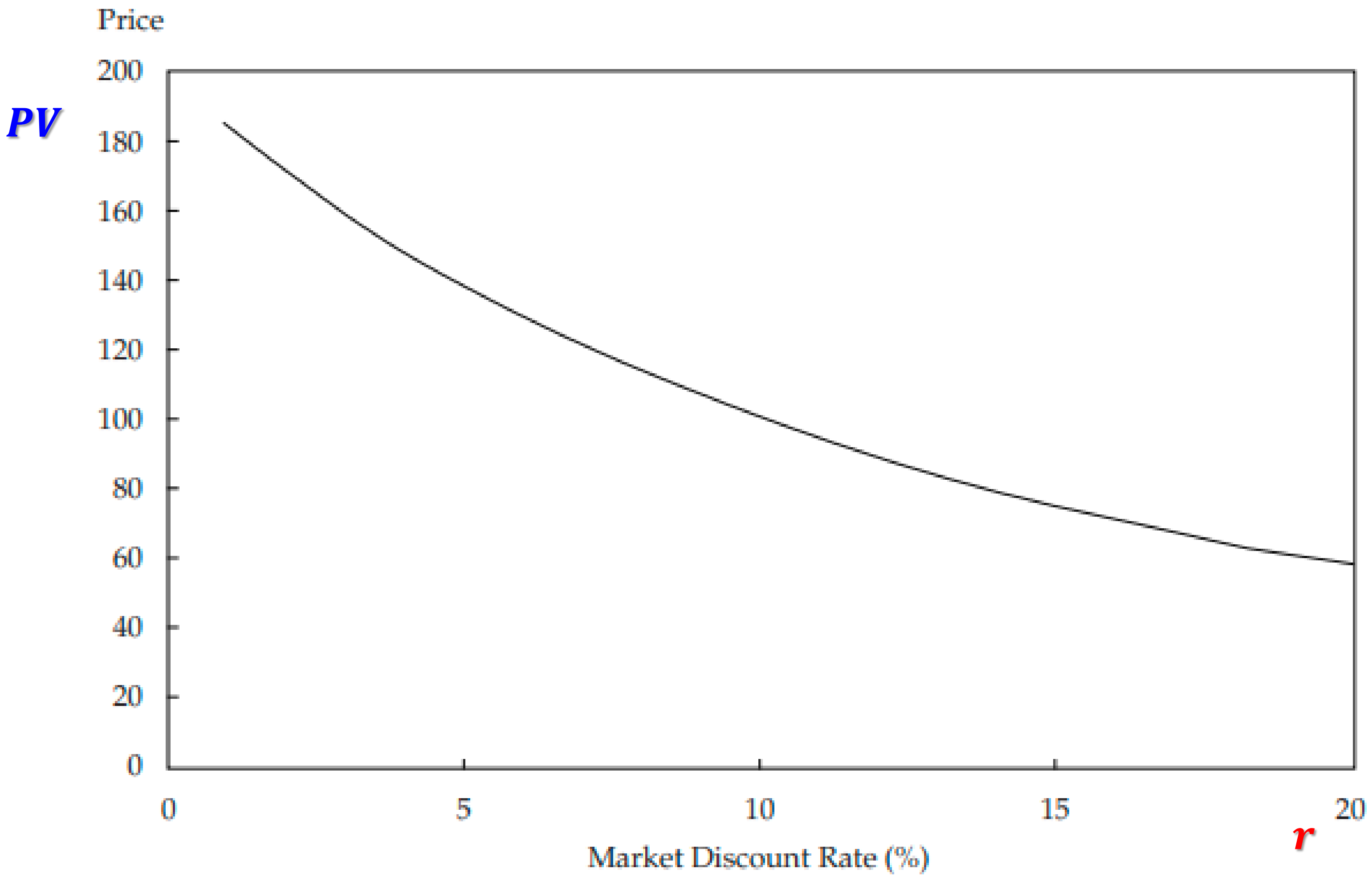
$$\%\mathbf{change} = \frac{\mathbf{New\ price - Old\ price}}{\mathbf{Old\ Price}}$$

- 比如，当债券A的市场贴现率下降时，价格从58.075美元上升到60.950美元。价格上涨的百分比是4.95%。

$$\%\mathbf{change} = \frac{\mathbf{60.950 - 58.075}}{\mathbf{58.075}} = \mathbf{0.0495}$$

- 对于每种债券，价格上涨百分比的**绝对值**大于价格下跌百分比。这意味着债券价格与市场贴现率之间的关系不是线性的(not linear)；相反，它是弯曲的(curved)，被描述为**凸的**(convex)。
- 息票率10%的10年期债券(即债券A)的凸性效应如**图**2所示。

Exhibit 2 The Convex Relationship between the Market Discount Rate and the Price of a 10-Year, 10% Annual Coupon Payment Bond



- 图2适用算式(方程1)(横坐标为市场贴现率r，纵坐标为债券价格PV)：

$$PV=\frac{PMT}{(1+r)^1}+\frac{PMT}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{PMT+FV}{(1+r)^N}$$

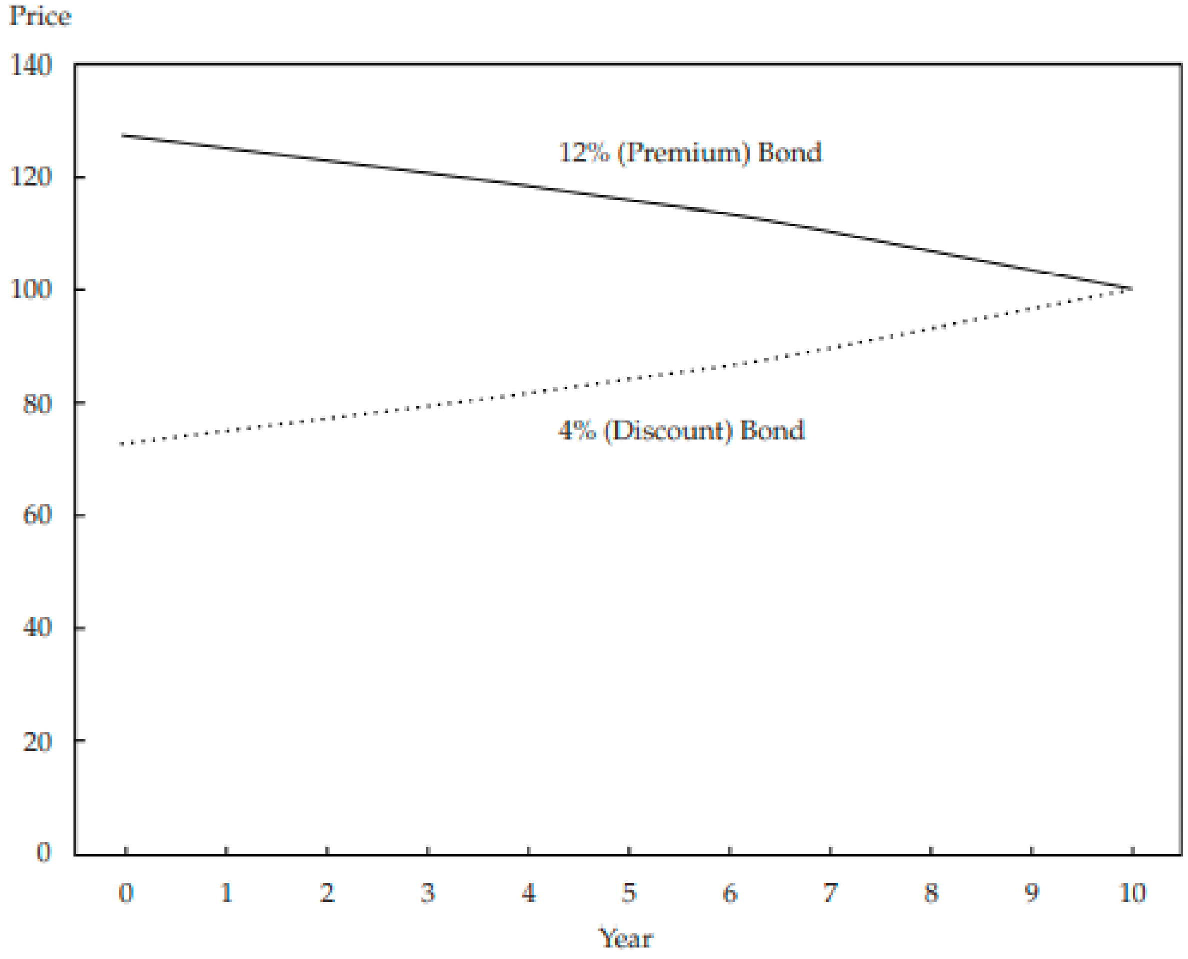
- 图2展示了假设到期时间不变对债券价格的影响，显示了市场贴现率的瞬时变化。
- 但债券价格随着时间推移而变化，即使市场贴现率保持不变。随着时间的推移，债券持有人越来越接近于在到期时获得面值。固定收益率价格轨迹(constant-yield price trajectory)说明了固定收益债券价格随时间的变化，显示了溢价或折价债券交易价格的“拉到面值”效应(*“pull to par” effect*)。如果发行人没有违约，债券的价格会随着到期时间接近于零而接近其面值。

- **第三个关系是息票效应**。以债券A、B和C为例，它们距离到期还有10年。无论到期收益率下降还是上升，债券A的价格变动百分比都大于债券B，债券B的价格变动百分比也大于债券C。20年期和30年期债券也是如此。因此，在其他条件相同的情况下(other things being equal)，**低息票债券比高息票债券的价格波动性更大**。

- **第四个关系是到期效应**。比较债券A和D、债券B和E以及债券C和F的结果。无论市场贴现率上升还是下降，20年期债券都比10年期债券的价格变动百分比更大。一般来说，在其他条件相同的情况下，**长期债券的价格波动性比短期债券更大**。

- 到期效应也有例外(exceptions)。比较**图**1中的债券D和G、债券E和H以及债券F和I的结果可见：
- (1) 对于溢价交易的高息票债券(债券F和I)，30年期债券比20年期债券的价格变动百分比更大。同样的模式适用于最初按面值定价的债券E和H。
- (2) 对于折价交易的低息票债券(债券D和G)，其结果是个例外(因其息票率低于市场贴现率，故按折价定价)。息票率10%的20年期债券比息票率10%的30年期债券的价格变动百分比更大。
- 到期效应的例外情况在实践中很少见，只出现在折价交易的低息票(但不是零息票)长期债券中。到期效应始终适用于**零息票债券**(zero-coupon bonds)，正如按面值定价或高于面值溢价的债券一样。
- 在**图**1中需要注意的最后一点是，债券B、E和H的息票率为20%，当市场贴现率为20%时，它们都按面值交易。息票率等于市场贴现率的债券，无论到期年数如何，均按息票支付日(coupon payment date)的面值定价。

Exhibit 3 Constant-Yield Price Trajectories for 4% and 12% Annual Coupon Payment, 10-Year Bonds at a Market Discount Rate of 8%



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Discount Bond	73.160	75.012	77.013	79.175	81.508	84.029	86.751	89.692	92.867	96.296	100.00
Premium Bond	126.84	124.98	122.98	120.82	118.49	115.97	113.24	110.30	107.13	103.70	100.00

- **假设：横坐标为年份，纵坐标为债券价格；两种债券的市场贴现率均为8%。**
- **图3显示了4%和12%年息票支付的10年期债券的固定收益率价格轨迹。年息票率4%债券的初始价格为73.160美元(每100美元面值)。随着到期日的临近，价格每年都在上涨并接近面值。年息票率12%债券的初始价格为126.840美元，并且每年都在下降，随着到期日的临近接近面值。两个价格都“拉到面值”。**

3.5 **即期利率债券定价**(Pricing Bonds with Spot Rates)

- 当使用市场贴现率对固定利率债券定价时，每个现金流使用相同的贴现率。计算债券价格的一个更基本的方法是使用与现金流日期相对应的一系列市场贴现率。这些市场贴现率称为即期利率。
- **即期利率**(spot rates)：是每个现金流到期日的零息票债券(zero-coupon bonds)的到期收益率(yields-to-maturity)。有时被称为**零利率**(zero rates)。**用即期利率确定的债券价格(或价值)**有时被称为**债券的无套利价值**(no-arbitrage value)。如果债券的价格与其无套利价值不同，则在没有交易成本(transaction costs)的情况下存在套利机会(arbitrage opportunity)。

- 假设一年期即期利率(one-year spot rate)为2%，两年期即期利率为3%，三年期即期利率为4%。那么，每年支付5%息票率的三年期债券的价格是102.960美元。

$$\frac{5}{(1.02)^1}+\frac{5}{(1.03)^2}+\frac{105}{(1.04)^3}=4.902+4.713+93.345=102.960$$

- 这种三年期债券的定价高于面值，因此其到期收益率必须低于5%。利用**方程**1计算，到期收益率为3.935%。

$$102.960=\frac{5}{(1+r)^1}+\frac{5}{(1+r)^2}+\frac{105}{(1+r)^3}, \qquad r=0.03935$$

- 当使用到期收益率(yield-to-maturity)对息票(coupon)和本金现金流(principal cash flows)进行贴现时，得到相同的价格。

$$\frac{5}{(1.03935)^1}+\frac{5}{(1.03935)^2}+\frac{105}{(1.03935)^3}=4.811+4.629+93.520=102.960$$

- 请注意，使用即期利率(spot rates)贴现的个别现金流(individual cash flows)的现值与使用到期收益率(yield-to-maturity)贴现的现金流的现值不同。当贴现率为2%时，首次息票支付的现值为4.902美元，但当贴现率为3.935%时，现值为4.811美元。包括本金赎回(redemption of principal)在内的最终现金流(final cash flow)的现值为93.345美元(4%时)和93.520美元(3.935%时)。然而，采用这两种方法的现值之和为102.960。

- **给定即期利率序列**前提下的常用**债券价格计算公式(方程2)**：

$$\boldsymbol{PV=\frac{PMT}{(1+Z_1)^1}+\frac{PMT}{(1+Z_2)^2}+\cdots+\frac{PMT+FV}{(1+Z_n)^N}}$$

- 上式中的$\boldsymbol{Z_N}$ $(\boldsymbol{N=1,2,\cdots n})$，表示第$\boldsymbol{N}$期(Period $\boldsymbol{N}$)的即期利率(spot rate)/零息票收益率(zero-coupon yield)，或零利率(zero rate)。

4 债券报价、天数计算惯例

- 与股票相比，债券的报价、支付方式较为复杂。
- 当**债券交易活跃时**，投资者可以**观察价格并计算各种收益率指标**(yield measures)。然而，这些收益率指标因债券类型而异。在实践中，固定利率债券、浮动利率票据(floating-rate notes)和货币市场工具(money market instruments)的收益率有不同的度量标准。
- 当**债券交易不活跃时**，**矩阵定价**(matrix pricing)通常适用基于可比证券(comparable securities)的估值。这类债券的价格是通过将其与活跃市场上期限、票面利率和信用评级相似的公司债券进行比较估算而来。这种相对估计过程对非上市公司的债务估值更为实用，因其通常缺乏类似上市公司那样充分的信息披露。

- **固定价格、应计利息和全价**
- 当债券处于息票支付日(coupon payment dates)之间时，其价格包含两部分：
- (1) **固定价格**(PV^{Flat}, flat price)：也称**报价**(quoted price)或**净价**(clean price)。
- (2) **应计利息**(AI, accrued interest)。
- 二者的总和即为**全价/全部价格**(PV^{Full}, full price)，也称发票价(invoice price)或**脏价**(dirty price)。
- 以上三者的关系可归纳如下(**方程**3)：

$$PV^{Full} = PV^{Flat} + AI$$

- **固定价格**(flat price)通常由债券交易商(bond dealers)报价。如果发生交易，则加入**应计利息**，卖方在**结算日**(settlement date)获得买方支付的**全部价格**。结算日为债券买方履行现金支付、卖方交付证券之日。
- 使用固定价格报价的原因，是为了在债券市场价格趋势信息上**避免误导投资者**。如果交易商报出全价，即使到期收益率不变，投资者也会看到价格日复一日地上涨。这是因为应计利息每天都在增加。而在息票支付后，报价会急剧下降(drop dramatically)。采用固定价格报价避免了这种误导。正是这个固定价格沿着**图**3所示的固定收益率价格轨迹(constant-yield price trajectory)被“拉到面值”(pulled to par)。

- **应计利息**是下一次息票支付的比例份额(proportional share)。假设息票期限(coupon period)在付款日之间有T天，并且自上次支付以来t天已经过去了，则可得**应计利息算式**(**方程**4)：

$$AI = \frac{t}{T} \times PMT$$

- 这里
- t：自上次息票支付到结算日的天数(number of days from the last coupon payment to the settlement date)
- T：息票期的天数(number of days in the coupon period)
- $\frac{t}{T}$：自上次支付以来已过去的息票期占比(fraction of the coupon period that has gone by since the last payment)
- PMT：每期息票支付(coupon payment per period)

- 不难发现，全价的应计利息部分并不取决于到期收益率。因此，受市场贴现率变化影响的是固定价格。
- 债券市场有不同的惯例来计算天数。最常见的两种日计数惯例(Day-count conventions)是实际/实际和30/360。
- (1) **实际/实际**(actual/actual)：对政府债券来说最为常见。这种方法使用实际天数，包括周末、节假日和闰日(leap days)。例如，半年期支付债券在每年的5月15日和11月15日支付利息。6月27日结算的应计利息为5月15日至6月27日的实际天数(t=43天)除以5月15日至11月15日的实际天数(t=184天)乘以息票付款。如果规定的息票率为4.375%，则应计利息为0.511209/100面值。

$$AI=\frac{43}{184}\times\frac{4.375}{2}=0.511209$$

- (2) 30/360：常用于公司债券。它假设每个月有30天，全年有360天。采用这种方法，则5月15日至6月27日之间有42天：5月15日至5月30日之间有15天，6月1日至6月27日之间有27天。假定5月15日至11月15日这六个月期间有180天。每半年支付4.375%的公司债券的应计利息为0.510417/100面值。

$$AI = \frac{42}{180} \times \frac{4.375}{2} = 0.510417$$

- 给定每期的市场贴现率，息票支付期间(between coupon payments)的固定利率债券的**全价**可通过下式(**方程**5)计算：

$$\boldsymbol{PV^{Full} = \frac{PMT}{(1+r)^{1-\frac{t}{T}}} + \frac{PMT}{(1+r)^{2-\frac{t}{T}}} + \cdots + \frac{PMT+FV}{(1+r)^{N-\frac{t}{T}}}}$$

- 这与**方程**1非常相似。不同之处在于，下次息票支付($\boldsymbol{PMT}$)在息票期的剩余时间内进行贴现，即$\boldsymbol{1-\frac{t}{T}}$。第二次息票支付的贴现是该部分加上另一个完整期，$\boldsymbol{2-\frac{t}{T}}$。

- 将分子和分母乘以表达式$(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\frac{t}{T}}$可简化**方程**5。所得结果为下式(**方程**6):

$$\boldsymbol{PV^{Full}} = \left[\frac{\boldsymbol{PMT}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\mathbf{1}}} + \frac{\boldsymbol{PMT}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\mathbf{2}}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{PMT}+\boldsymbol{FV}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\boldsymbol{N}}}\right] \times (\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\frac{t}{T}}$$
$$= \boldsymbol{PV} \times (\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\frac{t}{T}}$$

- **方程**6的一个优点是，括号中的表达式$\boldsymbol{PV}$很容易使用金融计算器上货币的时间价值键(time-value-of-money keys) 获得，因为有$\boldsymbol{N}$个等距的周期(evenly spaced periods)。这里的$\boldsymbol{PV}$与**方程**1相同，与$\boldsymbol{PV^{Full}}$不同。

【采用实际/实际法的应计利息算例】

- 假设一个2024年2月15日到期的5%半年期息票支付政府债券，每年2月15日和8月15日履行息票支付。债券将于2015年5月14日定价结算。这一日期是181天期限中的88天。实际上，从2月15日的上次息票到5月14日有88天，从2月15日到8月15日的下次息票有181天。年到期收益率设定为4.80%(相当于每半年2.40%的市场贴现率)。自2015年2月15日息票期开始，到期前将有18个等距半年期。
- 第一步：用**方程**1求解$\boldsymbol{PV}$，其中$\boldsymbol{PMT = 2.5}$，$\boldsymbol{N = 18}$，$\boldsymbol{FV = 100}$，$\boldsymbol{r = 0.0240}$。

$$\boldsymbol{PV = \frac{2.5}{(1.0240)^1} + \frac{2.5}{(1.0240)^2} + \cdots + \frac{102.5}{(1.0240)^{18}} = 101.447790}$$

- 如果在最后一个息票支付日债券的到期收益率为每期2.40%，则债券价格将为101.447790/100面值(这不是当天债券的实际价格，而是一个“假设”价格，使用与2015年5月14日结算日相应的要求收益率)。

- **方程**6可用来计算债券的全价：

$$PV^{Full}=101.447790\times(1.0240)^{\frac{88}{181}}=102.624323$$

- 全价为102.624323/100面值。应计利息为1.215470/100面值。

$$AI=\frac{88}{181}\times 2.5=1.215470$$

- 固定价格为101.408853/100面值。

$$PV^{Flat}=PV^{Full}-AI=102.624323-1.215470=101.408853$$

欢迎指正

谢谢