中级微观经济学

第五讲：选择

贺思诚

南开大学金融学院

2024年3月10日

回顾前两次课的内容

- 我们首先了解了商品空间，学习了消费束的概念，知道了在没有任何约束的情况下消费者都有哪些选择
- 我们接着学习了预算约束，学习了预算集，这界定了实际的选择范围
- 上次课我们了解了消费者的偏好，知道消费者如何对可能的选择（消费束）进行排序
- 我们还将这种排序用一种更便于处理的方式表现了出来（效用函数）
- 所以，我们已经预备好了研究消费者实际如何选择的工具

一个极简单的例子

- 假定一个商品空间只有五个可能的消费束A, B, C, D, E
- 消费者的偏好是$E \succ D \succ C \succ B \succ A$
- 一个效用函数$U(E) = 5, U(D) = 4, U(C) = 3, U(B) = 2, U(A) = 1$可以代表这个偏好关系
- 已知A, B, D是消费者的预算集，C, E在预算集之外
- 问消费者最终会选择哪个消费束?

消费者最优选择的定义

- 用通俗语言定义：消费者做出最优选择是在预算集内，找到一个最被偏好的（或者说使效用函数函数值最大的），这个消费束就是消费者的最优消费束

Definition

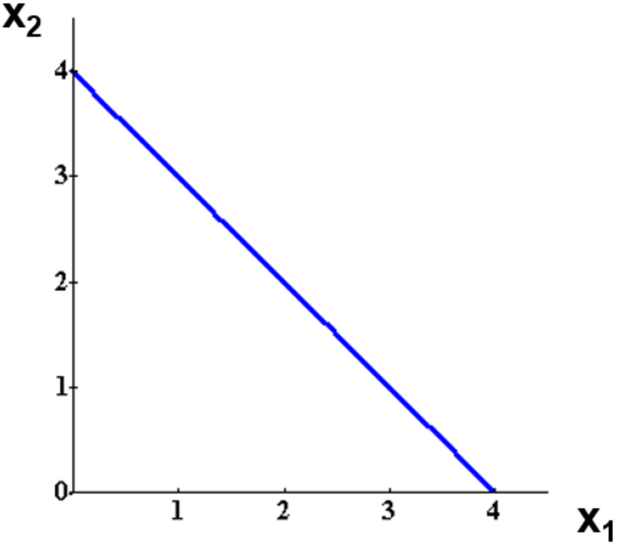
消费者的最优选择问题是：给定预算集B和消费者的偏好关系，找到一个消费束$X^* \in B$，使得对任意消费束$X \in B$，$X^* \succeq X$，则消费束X^*是消费者最优选择问题的一个解。

- 当我们用效用函数表示消费者的偏好，以上定义等价于

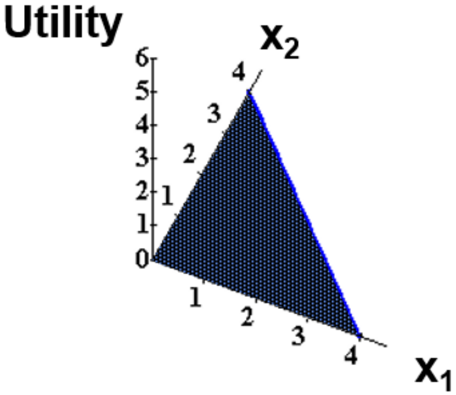
Definition

给定预算集B和消费者的效用函数$U(.)$，找到一个消费束$X^* \in B$，使得对任意消费束$X \in B$，$U(X^*) \geq U(X)$，则消费束X^*是消费者最优选择问题的一个解。因为在这种情况下，消费者最优选择问题等价于效用函数最大化问题，所以又被称为消费者效用最大化问题。也可简写为$\max_X U(X), s.t. X \in B$

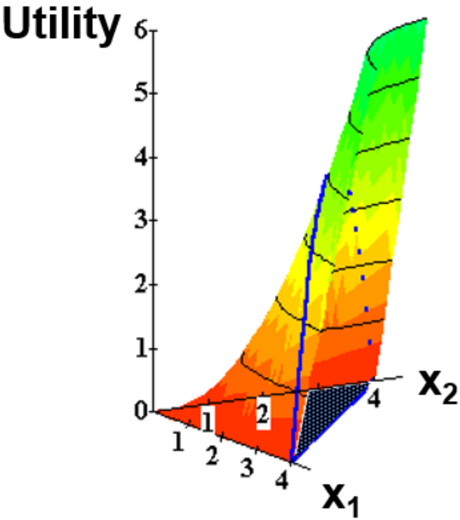
消费者最优选择的简单示例



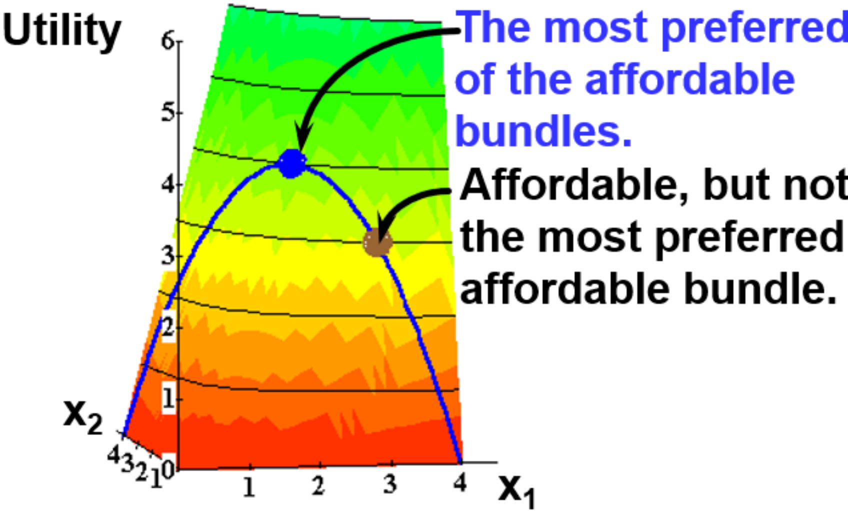
消费者最优选则的简单示例



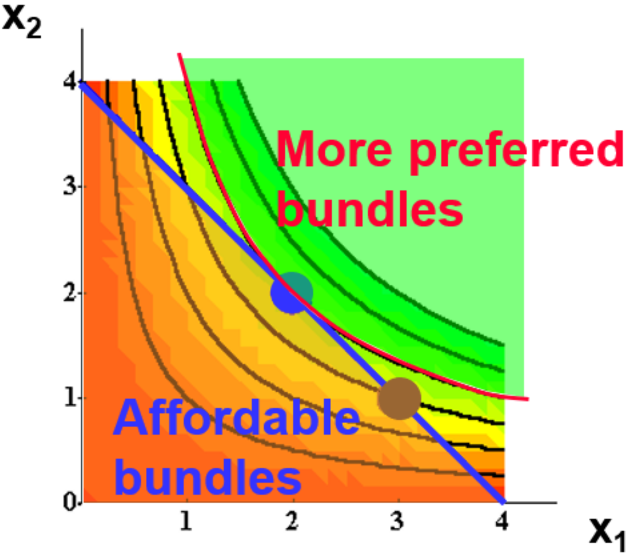
消费者最优选择的简单示例



消费者最优选则的简单示例



消费者最优选择的简单示例



由简单示例引发的思考

- 我们知道，如果偏好是单调的，消费者应该倾向于花完所有的预算，因此所选择的消费束应当位于预算线上
- 那么，具体应该是预算线上的哪个消费束呢？我们先将偏好局限于我们刚才看到的示例

1. 不能选择无差异曲线与预算线相交的点
2. 应该选择切点（切点的经济学意义是什么？）

- 切点的经济学意义：替代率等于边际替代率（通俗的说：市场上可以拿商品2替换商品1的比率和自己愿意的比率是一样的）
- 然而，是否这两条总是成立呢？

由简单示例引发的思考

- 我们知道，如果偏好是单调的，消费者应该倾向于花完所有的预算，因此所选择的消费束应当位于预算线上
- 那么，具体应该是预算线上的哪个消费束呢？我们先将偏好局限于我们刚才看到的示例

1. 不能选择无差异曲线与预算线相交的点
2. 应该选择切点（切点的经济学意义是什么？）

- 切点的经济学意义：替代率等于边际替代率（通俗的说：市场上可以拿商品2替换商品1的比率和自己愿意的比率是一样的）
- 然而，是否这两条总是成立呢？

由简单示例引发的思考

- 我们知道，如果偏好是单调的，消费者应该倾向于花完所有的预算，因此所选择的消费束应当位于预算线上
- 那么，具体应该是预算线上的哪个消费束呢？我们先将偏好局限于我们刚才看到的示例

1. 不能选择无差异曲线与预算线相交的点
2. 应该选择切点（切点的经济学意义是什么？）

- 切点的经济学意义：替代率等于边际替代率（通俗的说：市场上可以拿商品2替换商品1的比率和自己愿意的比率是一样的）
- 然而，是否这两条总是成立呢？

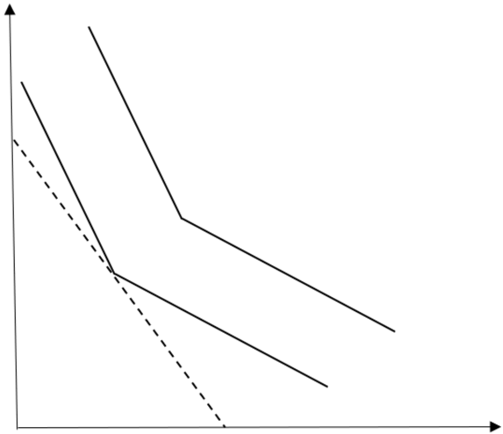
由简单示例引发的思考

- 我们知道，如果偏好是单调的，消费者应该倾向于花完所有的预算，因此所选择的消费束应当位于预算线上
- 那么，具体应该是预算线上的哪个消费束呢？我们先将偏好局限于我们刚才看到的示例

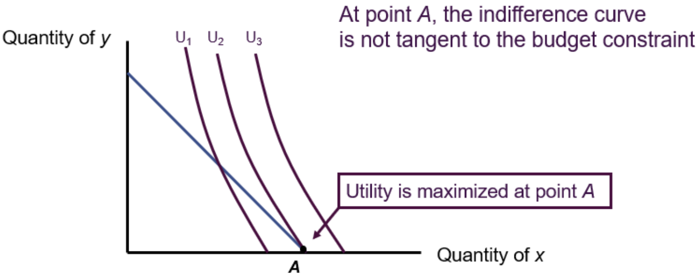
1. 不能选择无差异曲线与预算线相交的点
2. 应该选择切点（切点的经济学意义是什么？）

- 切点的经济学意义：替代率等于边际替代率（通俗的说：市场上可以拿商品2替换商品1的比率和自己愿意的比率是一样的）
- 然而，是否这两条总是成立呢？

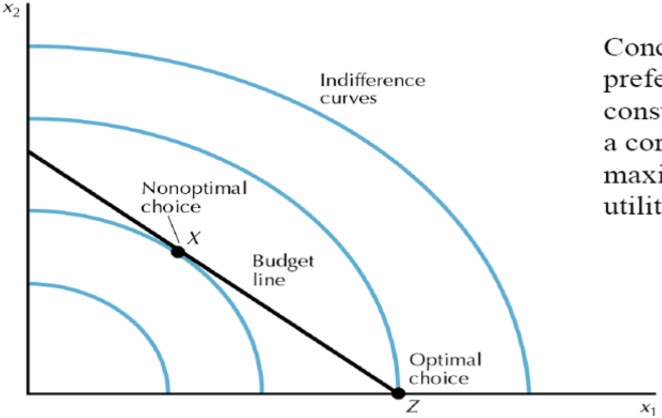
反例1：最优点没有一条明确的切线



反例2：最优点不相切（角点解corner solution）

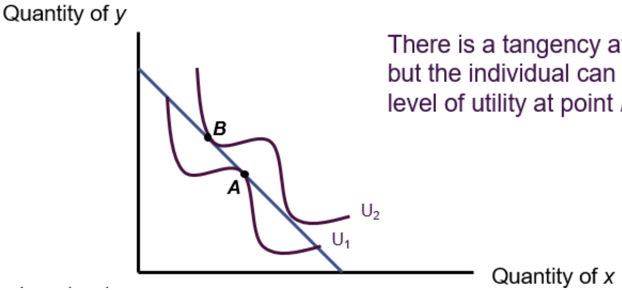


反例3：切点未必是最优



Concave preferences consume at a corner to maximise utility

反例4：切点有可能既包含最优解但又不都是最优解



There is a tangency at point *A*, but the individual can reach a higher level of utility at point *B*

切点是最优解的条件

- 如果偏好是凸偏好，且预算线和无差异曲线相切，则切点一定是最优解
- 如果偏好是严格凸偏好，则预算线和无差异曲线最多有一个切点。由上一条，如果预算线和无差异曲线相切，则存在唯一最优解
- 注意：反过来并不成立，偏好是凸偏好不能保证预算线一定与无差异曲线相切，因此最优选择不一定是切点
- 注意：凸偏好意味着效用函数拟凹的，严格凸偏好意味着效用函数是严格拟凹的（我们本门课程不讲，但实际用数学方法判断函数是拟凹的会更加容易）

简介

- 在数学上，有相对标准化的办法处理很多常见偏好和常见预算约束构成的消费者选择问题
- 但在本课程中，受限于课程难度，我们仅仅着重于一种特定的情况：偏好是严格凸的，且有内点解（也意味着是唯一内点解）
- 这种情况从数学上讲解法相对容易，经济学含义也比较直白
- 我们会介绍三种办法来解这个问题（都要掌握！！！）
- 鉴于柯布道格拉斯效用函数属于这种情况，我们也会以柯布道格拉斯效用函数作为例子

问题

- 假定消费者的偏好被效用函数

$$u\left(x_1, x_2\right)$$

表示，且满足预算约束

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

- 则消费者问题可写为

$$\max_{x_1, x_2} u\left(x_1, x_2\right)$$

$$s.t. p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

- 在具体的例子中，我们假定

$$u\left(x_1, x_2\right) = x_1^c x_2^d$$

第一种方法：切线法

- 我们已经讲到过，对这种情况，预算线与无差异曲线唯一的切点是消费者最优的选择
- 预算线的斜率是替代率

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2}$$

- 无差异曲线的切线斜率是边际替代率

$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}}$$

- 在切点处，无差异曲线的切线与预算线斜率一致，所以

$$MRS = -\frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}} = -\frac{p_1}{p_2} = \frac{dx_2}{dx_1}$$

- 与预算线联立，就是两个未知量两个方程的二元方程组，可解出x_1, x_2

切线法的例子

- 回顾效用函数是$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$
- 边际替代率

$$MRS = -\frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}} = -\frac{c x_1^{c-1} x_2^d}{d x_1^c x_2^{d-1}} = -\frac{c x_2}{d x_1}$$

- 由$MRS = \frac{dx_2}{dx_1}$，

$$-\frac{c x_2}{d x_1} = -\frac{p_1}{p_2}$$

- 和预算约束$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$联立，解出消费者的最优选择（需求）

$$x_1 = \frac{cm}{(c+d)\, p_1}, x_2 = \frac{dm}{(c+d)\, p_2}$$

切线法的经济学含义

- 切线法乃是要求边际替代率等于替代率（价格比率）
- 替代率（价格比率）是市场统一的交换比率，从均衡的角度说，也可以是达到均衡条件下公允的交换比率。
- 边际替代率则度量个人在给定消费束时愿意用多少商品2替换1单位商品1
- 切线法实际就是要求个人调整其消费束选择花完预算且个人的替换意愿等同于公允的交换比率

切线法的经济学含义

- 举例来说，如果市场替代率（价格比率）是1个苹果换2个桔子。如果你花完约束后边际替代率是愿意1个苹果换3个桔子。
- 那么，放弃2个桔子换一个苹果对你很划算，你应该减少桔子消费，增加苹果消费
- 而这会改变边际替代率，逐渐你就只愿意用1个苹果换2.5个桔子，直到你自己也只愿意1个苹果换2个桔子
- 此时，你就不愿意改变了，这就是边际替代率等于替代率
- 反之亦然

边际替代率等于替代率的另一个关系

- 由$MRS = -\frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}} = -\frac{p_1}{p_2} = \frac{dx_2}{dx_1}$
- $\frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2}$
- 这个式子为同一元钱消费在不同商品带来的边际效用应当相等。
- 注意在现代经济学中，边际效用的解释。因此，更根本的解释是：消费者最优选择应保证在最优点如果多花每一单位的钱，花在不同的商品上得到的消费束的偏好是无差异的。
- 无论是哪种效用论，这一含义都是最优消费束满足按照市场价格不能使情况变好
- 反过来，如果$\frac{MU_1}{p_1} > \frac{MU_2}{p_2}$,应当增加商品1减少商品2

柯布道格拉斯效用函数的一个性质

- 柯布道格拉斯效用函数具有很多有用的性质，我们这里研究其中一个
- 回想最优选择下两种商品的需求

$$x_1 = \frac{cm}{(c+d)\,p_1}, x_2 = \frac{dm}{(c+d)\,p_2}$$

- 分别乘以各自的价格

$$p_1 x_1 = \frac{cm}{(c+d)}, p_2 x_2 = \frac{dm}{(c+d)}$$

- 也就是说消费者花在商品1的钱占预算的份额是$\frac{c}{c+d}$,花在商品2的前占预算的份额是$\frac{d}{c+d}$

需求函数

- 回顾刚才的解法，我们可以发现总预算（总收入）和商品价格决定了消费束
- 当总预算和价格变化后，消费者的最优选择也会改变
- 将最优选择（需求量）与价格和收入联系起来的函数叫做需求函数
- 在两商品世界，商品1的需求函数是$x_1(p_1, p_2, m)$，商品2的需求函数是$x_2(p_1, p_2, m)$
- 对N种商品的世界，商品i的需求函数是$x_i(p_1, p_2, \cdots, p_N, m)$

需求函数：柯布道格拉斯

- 我们仍然回到柯布道格拉斯的例子，现在$x_1 = \frac{cm}{(c+d)p_1}$是需求函数，$x_1$是函数值，$p_1$和$m$是自变量，$c, d$是参数
- 需要指出的是，对于柯布道格拉斯效用函数，商品2的价格不影响商品1的需求量
- 这点在刚才我们分析柯布道格拉斯效用函数的性质时已经可以看出
- 关于需求函数，我们在接下来的课程会更多的介绍

第二种方法：代入法

- 我们再次回顾我们的问题

$$\max_{x_1,x_2} u\left(x_1, x_2\right)$$

$$s.t. p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

- 我们直接将预算约束改写为

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

- 带入，原问题化为

$$\max_{x_1} u\left(x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1\right)$$

- 这样就转换成了成了一个一元函数求最大化的问题

第二种方法：代入法

- 对上式求导，得到一阶条件

$$\frac{\partial u\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial u\left(x_1,x_2\left(x_1\right)\right)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}=0$$

- 然而，我们还需要得到$\frac{dx_2}{dx_1}$
- 考虑改写后的预算约束$x_2=\frac{m}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_1$

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{p_1}{p_2}$$

- 带入一阶条件得

$$\frac{\partial u\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_1}-\frac{\partial u\left(x_1,x_2\left(x_1\right)\right)}{\partial x_2}\frac{p_1}{p_2}=0$$

- 与切线法得到的$\frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}}=\frac{p_1}{p_2}$一致

第二种方法举例

- 对于柯布道格拉斯效用函数$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$
- 带入预算约束得

$$\max_{x_1} u\left(x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1\right) = \max_{x_1} x_1^c \left(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1\right)^d$$

- 一阶条件为

$$cx_1^{c-1}\left(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1\right)^d + dx_1^c\left(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1\right)^{d-1}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) = 0$$

- 可化简为

$$c\left(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1\right) + dx_1\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) = 0$$

- 整理得

$$x_1 = \frac{cm}{(c+d)\,p_1}$$

第三种方法：拉格朗日乘数法

- 拉格朗日乘数法是求约束条件下函数极值的常用方法，我们这里只提供一个傻瓜式操作指南
- 回顾问题为：

$$\max_{x_1,x_2} u(x_1,x_2)$$

$$s.t. p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

- 构造拉格朗日函数

$$L = u(x_1,x_2) + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

- 可以看到在这个问题中价格、收入不是消费者做最优选择所能决定的， 因此无需考虑m, p_1, p_2

第三种方法：拉格朗日乘数法

- 分别求三个变量的一阶条件

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial u\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

- 由前两式得

$$\frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

- 由第三个公式得到预算约束，两者联立，可求出最优选择

拉格朗日乘数法例子

- 对于柯布道格拉斯效用函数$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$
- 构造拉格朗日函数

$$L = x_1^c x_2^d + \lambda (m - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

- 三个一阶条件分别为

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = c x_1^{c-1} x_2^d - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = d x_1^c x_2^{d-1} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

拉格朗日乘数法例子

- 由前两式可得

$$\frac{cx_2}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

- 与第三个式子联立可得

$$x_1 = \frac{cm}{(c+d)\,p_1}, x_2 = \frac{dm}{(c+d)\,p_2}$$

拉格朗日乘子的经济学意义

- 拉格朗日乘子又被称作影子价格
- 在这里的环境下，它体现的是预算的边际效用，我们可以通过两个途径看出
$$\frac{\partial L}{\partial m} = \lambda$$
这种方法要涉及到包络定理。整体来说，就是当收入变动时约束条件下效用最大化，效用值增加λ。即收入的边际效用
- 第二种途径是通过$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0$，$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0$得
$$\lambda = \frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2}$$
- 也是最优条件下一单位预算带来的边际效用（当然，不要忘了边际效用背后是偏好关系）

推广到N种商品

- 若消费者在N种商品间做选择，代表偏好的效用函数为$u\left(x_1, x_2, \cdots, x_N\right)$
- 预算约束为

$$p_1 x_1 + \cdots + p_N x_N = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i = XP = m$$

- 构建拉格朗日函数(也可用另两种形式)

$$L = u\left(x_1, \cdots, x_N\right) + \lambda\left(m - p_1 x_1 - \cdots - p_N x_N\right)$$

- 一阶条件，对任意$i = 1, 2, \cdots, N$,有

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u\left(x_1, \cdots, x_N\right)}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0$$

- 此外还有预算约束共$N+1$个方程，有$x_1, \cdots, x_N$以及λ共$N+1$个变量，可以解出最优选择
- 可以选择一个商品，如商品1，把其它每个都用商品1的形式表现出来，带入预算约束

一个特殊的例子：拟线性偏好

- $u(x_1, x_2) = x_1^c + x_2$， $0 < c < 1, p_1x_1 + p_2x_2 = m$
- 用切线法

$$\frac{cx_1^{c-1}}{1} = \frac{p_1}{p_2}$$

- 则

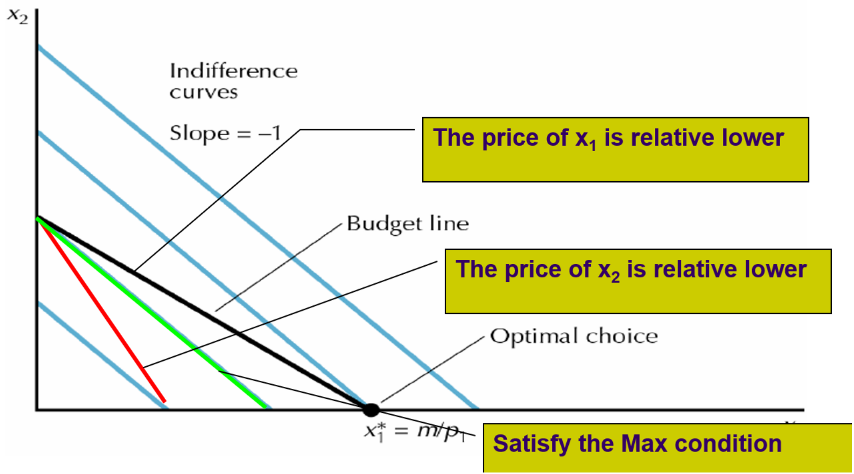
$$x_1 = \left(\frac{p_1}{cp_2}\right)^{\frac{1}{c-1}}$$

- 分情况讨论，

  若$p_1\left(\frac{p_1}{cp_2}\right)^{\frac{1}{c-1}} \leq m, x_1^* = \left(\frac{p_1}{cp_2}\right)^{\frac{1}{c-1}}, x_2^* = \frac{m - p_1\left(\frac{p_1}{cp_2}\right)^{\frac{1}{c-1}}}{p_2}$
- 若$p_1\left(\frac{p_1}{cp_2}\right)^{\frac{1}{c-1}} > m$,则$x_1^* = \frac{m}{p_1}, x_2^* = 0$
- 注意，当$c \geqslant 1$，不是性状良好的函数，不能这样做

完全替代

考虑完全替代偏好，假定可被效用函数$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$代表



完全替代

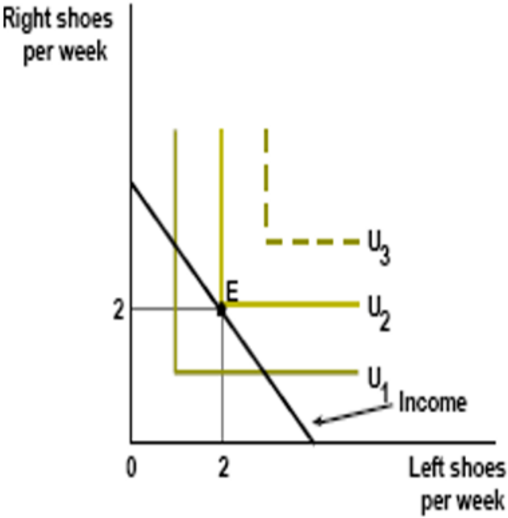
- 商品1的需求函数为

$$x_1 = \begin{cases} \frac{m}{p_1}, & p_1 < p_2 \\ \forall x_1 \in \left[0, \frac{m}{p_1}\right], & p_1 = p_2 \\ 0, & p_1 > p_2 \end{cases}$$

- 除了$p_1 = p_2$的情况，其它情况都是角点解
- 问题：如果是$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$所表示的偏好需求函数是怎样的呢?

完全互补

- 我们假定完全互补的偏好可被效用函数$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$



完全互补

- 我们看到，对于这种1：1型的完全互补，最优选择显然应满足

$$x_1 = x_2 = x$$

- 预算约束$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$可化为

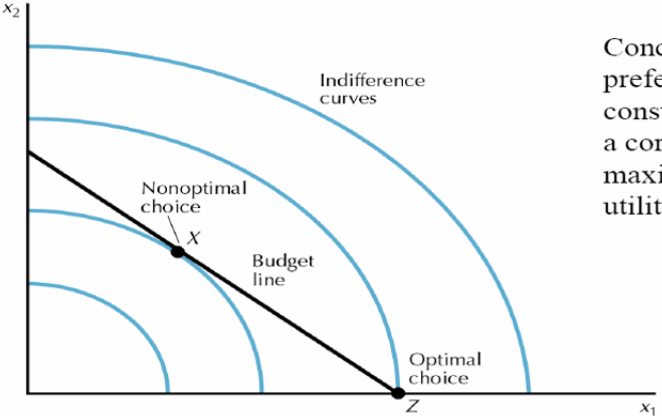
$$p_1 x + p_2 x = m$$

- 所以

$$x_1 = x_2 = x = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

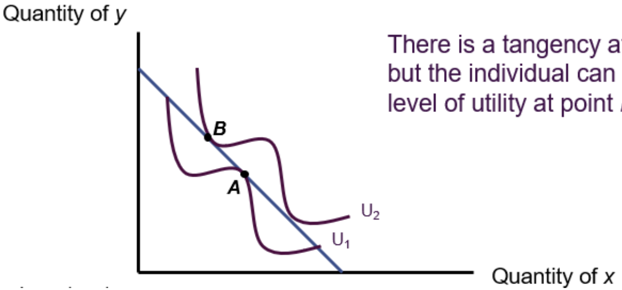
- 问题：如果是$u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$所表示的偏好需求函数是怎样的呢？

凹偏好



Concave preferences consume at a corner to maximise utility

不规则无差异曲线



There is a tangency at point *A*, but the individual can reach a higher level of utility at point *B*

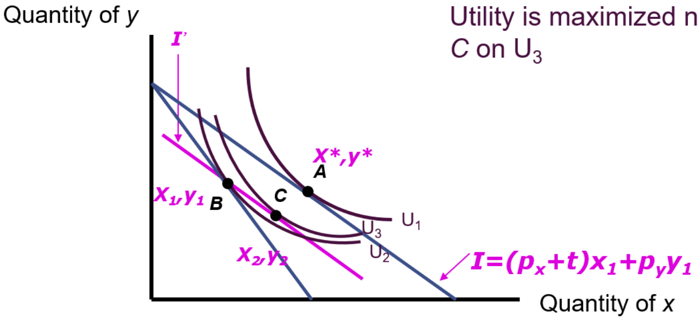
估计效用函数

简述，自学

税收类型的选择

- 初始预算约束为$p_x x + p_y y = m$，假设此时最优选择为$A = (x^*, y^*)$
- 假定按税率t对商品1征收从量税
- 新预算约束为$(p_x + t)x + p_y y = m$
- 假设此时的最优选择为$B = (x_1, y_1)$
- 所收税的总额为tx_1
- 现在假设改为收入税（income tax），每人收tx_1，新预算约束变为$p_x x + p_y y = m - tx_1$
- 设在这样的税收下最优选择为$C = (x_2, y_2)$

税收类型的选择



Utility is maximized now at point C on U_3

税收类型的选择

- 在这一简化模型下，收入税比从量税好，因为它没有扭曲价格
- 但只是很理想的情况

1. 仅适用单个消费者的情况
2. 假定收入税不影响人的其它选择，起码不影响总收入
3. 没有考虑供给对课税的反应