中级微观经济学

第二十一讲：成本最小化

贺思诚

南开大学金融学院

2024年4月21日

成本最小化

- 在上一章，我们研究的是利润最大化
- 利润最大化是厂商决策的最主要的方式
- 但有些时候，我们去了解怎样生产是最有效的，也可以帮助我们更好的分析厂商问题
- 什么是最有效的生产？给定生产目标，最有效的生产是成本最小化

成本最小化问题

- 假设存在两种要素x_1, x_2，价格分别为w_1, w_2，生产函数为$f(x_1, x_2)$。假定厂商打算生产y单位产品
- 成本最小化问题为

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$s.t. f(x_1, x_2) = y$$

成本最小化问题的数学解法(只考虑内点解)

- 我们首先尝试用相对严谨的数学方式解成本最小化问题（只考虑内点解）
- 使用拉格朗日法

$$L = w_1x_1 + w_2x_2 + \lambda\left(y - f\left(x_1, x_2\right)\right)$$

- 解得一阶条件

$$w_1 - \lambda f_1\left(x_1, x_2\right) = 0$$

$$w_2 - \lambda f_2\left(x_1, x_2\right) = 0$$

$$y - f\left(x_1, x_2\right) = 0$$

- 由前两个式子得

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{f_1\left(x_1, x_2\right)}{f_2\left(x_1, x_2\right)} = \frac{MP_1}{MP_2}$$

成本最小化问题的直观解法

- 给定成本C，得

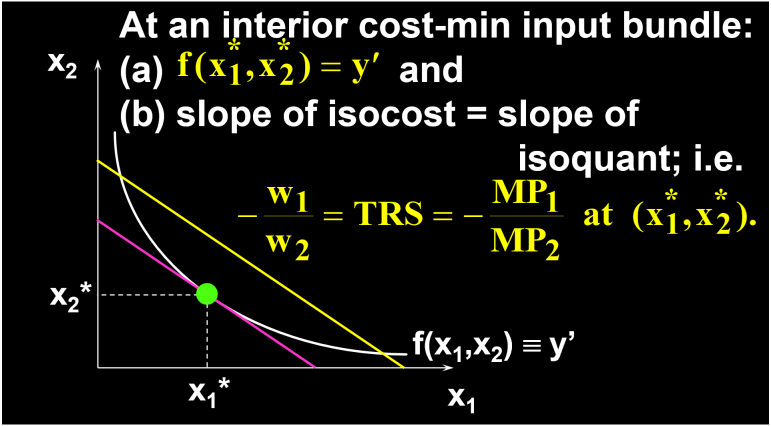
$$w_1x_1 + w_2x_2 = C$$

- 改写为

$$x_2 = -\frac{w_1}{w_2}x_1 + \frac{C}{w_2}$$

- 因此，每条等成本线是一条直线
- 将等成本线和等产量线画在坐标系中，我们有

成本最小化问题的直观解法



成本最小化问题的直观解法

- 如果是内点解，显然有

$$-\frac{w_1}{w_2} = TRS = -\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)} = -\frac{MP_1}{MP_2}$$

  与之前的结果一样
- 与消费者理论一样，我们可以将其写为

$$\frac{MP_1}{w_1} = \frac{MP_2}{w_2}$$

- 问题：这样写有什么经济学含义？
- 如果是角点解，意味着有一项为0。如果其它情况，例如有折点，其处理方法与消费者理论类似。

成本最小化问题的所得到的几个结果

- 当求解成本最小化问题时，我们首先要求出所使用的要素数量
- 要素需求与什么有关?
- 要素数量与w_1, w_2, y有关
- 因此，我们有要素需求函数$x_1(w_1, w_2, y)$,$x_2(w_1, w_2, y)$
- 之后，可用$c = w_1x_1 + w_2x_2$求出成本
- 因此，我们得到成本函数$c(w_1, w_2, y)$

成本最小化问题的所得到的几个结果

- 当求解成本最小化问题时，我们首先要求出所使用的要素数量
- 要素需求与什么有关?
- 要素数量与w_1, w_2, y有关
- 因此，我们有要素需求函数$x_1(w_1, w_2, y)$,$x_2(w_1, w_2, y)$
- 之后，可用$c = w_1x_1 + w_2x_2$求出成本
- 因此，我们得到成本函数$c(w_1, w_2, y)$

例子：柯布道格拉斯

- 考虑生产函数

$$y = f\left(x_1, x_2\right) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$$

- 此时

$$-\frac{w_1}{w_2} = -\frac{x_2}{2x_1}$$

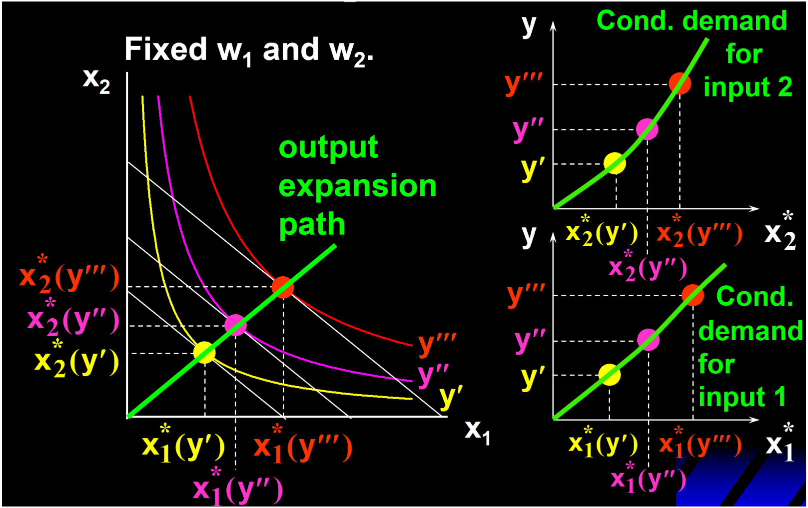
- 将其带入生产约束，可求得，

$$x_1 = \left(\frac{w_2}{2w_1}\right)^{\frac{2}{3}} y, x_2 = \left(\frac{2w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{3}} y$$

- 解得成本函数

$$c = w_1 x_1 + w_2 x_2 = 3\left(\frac{w_1 w_2^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}} y$$

例子：柯布道格拉斯


Fixed w1 and w2.
x2
output expansion path
x2*(y‴)
x2*(y″)
x2*(y′)
y‴
y″
y′
x1
x1*(y′)
x1*(y‴)
x1*(y″)
y
Cond. demand for input 2
y‴
y″
y′
x2*(y′)
x2*(y‴)
x2*
x2*(y″)
y
Cond. demand for input 1
y‴
y″
y′
x1*(y′)
x1*(y‴)
x1*
x1*(y″)

例子：固定比例

- 考虑生产函数$y=f\left(x_1,x_2\right)=\min\left\{4x_1,x_2\right\}$
- 很容易得到
$$x_1=\frac{y}{4},x_2=y$$
- 成本函数为
$$c\left(x_1,x_2,y\right)=w_1\frac{y}{4}+w_2y=\left(\frac{w_1}{4}+w_2\right)y$$

显示成本最小化

- 与上一章显示利润相似，我们也可以通过基本的假设和观察到的厂商的实际选择来做出研究
- 假定在相同的产量y时，我们观察到两组要素价格(w_1^t, w_2^t)和(w_1^s, w_2^s)，与此相应的厂商的选择分别为(x_1^t, x_2^t)和(x_1^s, x_2^s)，如果厂商确实都是按照成本最小化来生产，有

$$w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t \leq w_1^t x_1^s + w_2^t x_2^s$$

$$w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s \leq w_1^s x_1^t + w_2^s x_2^t$$

- 这些不等式称作成本最小化的弱公理（WACM）

基于显示成本最小化的比较静态分析

- 通过两个不等式，可以推出

$$\left(w_1^t - w_1^s\right)\left(x_1^t - x_1^s\right) + \left(w_2^t - w_2^s\right)\left(x_2^t - x_2^s\right) \leq 0$$

- 也可写为

$$\Delta w_1 \Delta x_1 + \Delta w_2 \Delta x_2 \leq 0$$

- 如果第一种要素的价格上涨，第二种要素的价格保持不变，则$\Delta w_2 = 0$，有

$$\Delta w_1 \Delta x_1 \leq 0$$

  所以，要素需求一定随价格的上升而下降
- 如果要素价格不变，产量增加，成本增加

成本函数与平均成本函数

- 回顾前面，我们已经有了成本函数$c(w_1, w_2, y)$
- 成本函数反映的是生产y单位产品的总成本
- 我们也可以去研究产品的平均成本

$$AC(w_1, w_2, y) = \frac{c(w_1, w_2, y)}{y}$$

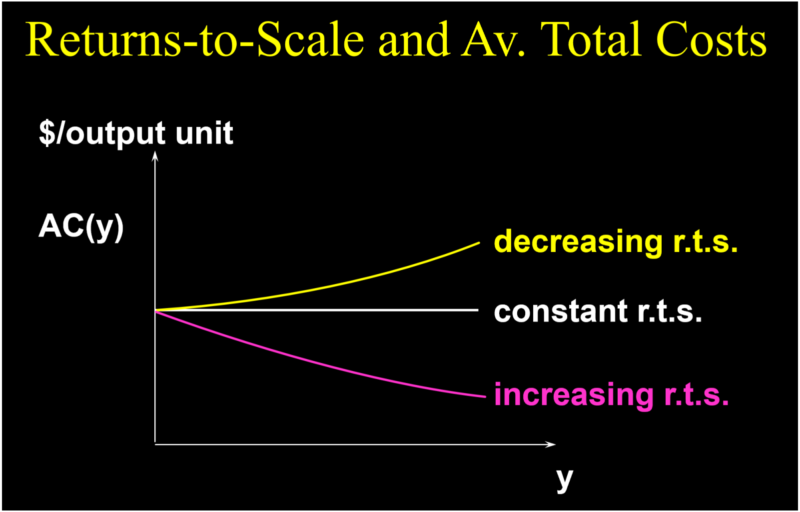
成本与规模报酬

- 假如要素价格不变，原来的产量为y，假如将产量提高为$2y$，总成本如何变化，平均成本又如何变化呢?
- 对于规模报酬不变，显然，将所有要素提升为原来的2倍即可。此时总成本变为原来的两倍，平均成本不改变。
- 问题：为何最优的选择是将要素提升为原来的2倍?
- 反证法：假定原来的最优投入是(x_1^*, x_2^*)。如果这样不是最优，可以找到一个投入束$\left(2x_1^{\#}, 2x_2^{\#}\right)$，使得$f\left(2x_1^{\#}, 2x_2^{\#}\right) = 2y$且$w_1\left(2x_1^{\#}\right) + w_2\left(2x_2^{\#}\right) \leq 2w_1x_1^* + 2w_2x_2^*$
- 根据规模报酬不变，可得$f\left(x_1^{\#}, x_2^{\#}\right) = y$，且$w_1x_1^{\#} + w_2x_2^{\#} \leq w_1x_1^* + w_2x_2^*$。因此$(x_1^*, x_2^*)$不是最优投入，与假设矛盾
- 此外，如果规模报酬递减平均成本增加，规模报酬递增平均成本减小

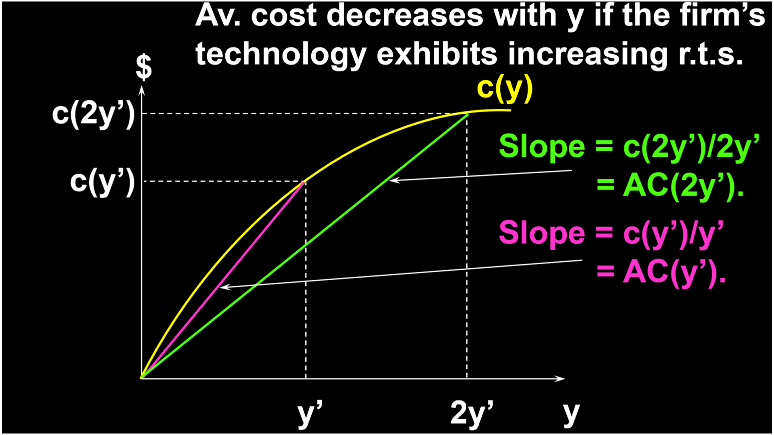
成本与规模报酬

- 假如要素价格不变，原来的产量为y，假如将产量提高为$2y$，总成本如何变化，平均成本又如何变化呢?
- 对于规模报酬不变，显然，将所有要素提升为原来的2倍即可。此时总成本变为原来的两倍，平均成本不改变。
- 问题：为何最优的选择是将要素提升为原来的2倍?
- 反证法：假定原来的最优投入是(x_1^*, x_2^*)。如果这样不是最优，可以找到一个投入束$\left(2x_1^{\#}, 2x_2^{\#}\right)$，使得$f\left(2x_1^{\#}, 2x_2^{\#}\right) = 2y$且$w_1\left(2x_1^{\#}\right) + w_2\left(2x_2^{\#}\right) \leq 2w_1x_1^* + 2w_2x_2^*$
- 根据规模报酬不变，可得$f\left(x_1^{\#}, x_2^{\#}\right) = y$，且$w_1x_1^{\#} + w_2x_2^{\#} \leq w_1x_1^* + w_2x_2^*$。因此$(x_1^*, x_2^*)$不是最优投入，与假设矛盾
- 此外，如果规模报酬递减平均成本增加，规模报酬递增平均成本减小

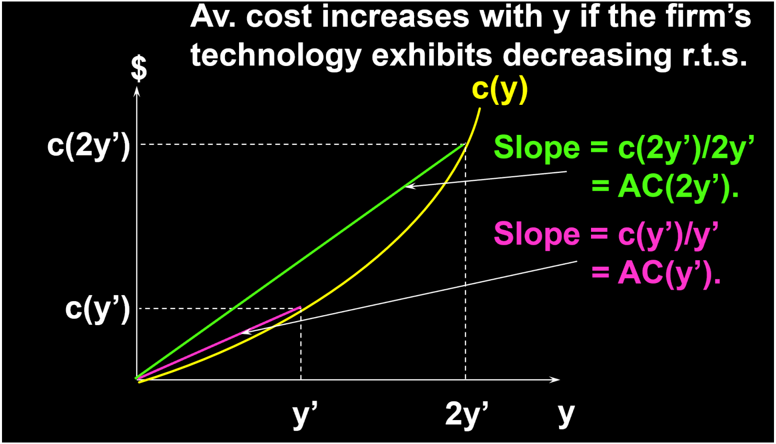
平均成本与规模报酬


Returns-to-Scale and Av. Total Costs
$/output unit
AC(y)
decreasing r.t.s.
constant r.t.s.
increasing r.t.s.
y

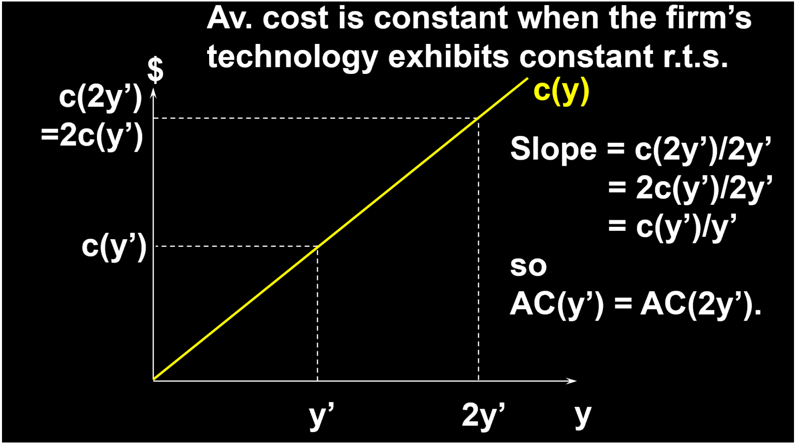
总成本与规模报酬递增


Av. cost decreases with y if the firm's technology exhibits increasing r.t.s.
$
c(2y')
c(y')
c(y)
Slope = c(2y')/2y'
= AC(2y').
Slope = c(y')/y'
= AC(y').
y'
2y'
y

总成本与规模报酬递减


Av. cost increases with y if the firm's technology exhibits decreasing r.t.s.
$
c(y)
c(2y')
c(y')
Slope = c(2y')/2y'
= AC(2y').
Slope = c(y')/y'
= AC(y').
y'
2y'
y

总成本与规模报酬不变


Av. cost is constant when the firm's technology exhibits constant r.t.s.
$
c(2y')
=2c(y')
c(y')
c(y)
Slope = c(2y')/2y'
= 2c(y')/2y'
= c(y')/y'
so
AC(y') = AC(2y').
y'
2y'
y

长期成本与短期成本的定义

- 回顾长期与短期的定义：长期，所有要素投入都可随意改变；短期，至少有一种要素的投入不能被改变
- 短期成本函数：只有可变生产要素可以调整的情况下，生产既定产量的最小成本
- 长期成本函数：在一切生产要素都可以自由调整的情况下，生产既定产量时的最小成本
- 不变成本：由不变要素产生的成本，不与产量直接相关
- 准不变成本：只要生产一定的数量，就有该成本且不随产量的变动而变动。

短期成本的计算

- 假定要素2的投入固定在$\bar{x}_2$上。短期成本最小化问题为

$$\min_{x_1} w_1 x_1 + w_2 \bar{x}_2$$

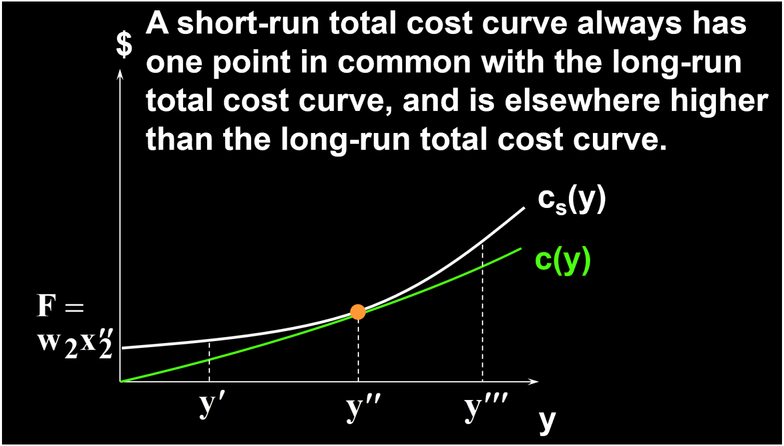
$$s.t. f(x_1, \bar{x}_2) = y$$

- 求解这个成本最小化问题，可得到短期要素投入需求$x_1^s(w_1, w_2, y, \bar{x}_2)$和短期成本函数$c_s(w_1, w_2, y, \bar{x}_2)$
- 注意，当长期成本最小化问题求得的$x_2 = \bar{x}_2$时，我们有

$$x_1^s(w_1, w_2, y, \bar{x}_2) = x_1(w_1, w_2, y), c_s(w_1, w_2, y, \bar{x}_2) = c(w_1, w_2, y)$$

- 除此之外，长期成本一般小于短期成本（特殊情况也可能等于，但不会大于）。为什么？

长期成本与短期成本


A short-run total cost curve always has one point in common with the long-run total cost curve, and is elsewhere higher than the long-run total cost curve.
$
$c_s(y)$
$c(y)$
$F = w_2x_2''$
y'
y''
y'''
y