

中级微观经济学

第四讲：效用

贺思诚

南开大学金融学院

2024年3月3日

为什么要引入效用

- 我们已经提到过，偏好是我们研究消费者选择的基础
- 我们也提到过，满足理性偏好（前三个公理）就足以确保消费者根据预算约束做出最优选择
- 然而，有最优选择不意味着我们能方便的找到这个最优选择
- 效用（utility）函数就是我们为了简化分析而通过数学手段反应偏好这样一个序关系的方法

效用论简史

- 基数效用论出现后，有一系列发展
- 边际革命与数学的结合
- 然而，基数效用论有巨大的缺点：现实中，认为这种快乐和痛苦可以很有效的计算是难以令人信服的
- 什么是一个苹果给我带来了两倍于一个桔子的快乐？
- 既没有合理的定义，很多时候也无法有可靠的观察手段

效用论简史

- 因此，现代经济学基本放弃了这种不可见、抽象的、有巨大争议的理论基础
- 现代经济学的理论大厦是基于偏好与显示偏好
- 因为有了偏好就可以做出选择从而推出需求函数等。反之，当你看到了消费者做出选择，就是显示偏好。
- 现代经济学需要的是利于计算的反映偏好关系的数学工具
- 而当把偏好关系用函数表现出来后，基数效用论的诸多数学工具和结论可以直接用在这一函数上
- 因此，这个函数也被称为效用函数，但其已失去基数效用论里效用的含义。
- 该函数反映偏好关系，仅通过比大小对消费束喜好排序，这就是序数效用论
- 不要混淆基数效用论和序数效用论！！！（常常被混淆，甚至一些教材都是如此）

效用函数

Definition

对商品空间 B ，函数 $u : B \rightarrow R$ 使得任意消费束 $X, Y \in B$ ，有 $X \succeq Y \Leftrightarrow u(X) \geq u(Y)$ 。则函数 $u(\cdot)$ 是一个代表了偏好的效用函数

Example

若一个商品空间只有三个消费束 $A = (3, 5), B = (5, 3), C = (2, 3)$ ，且满足 $A \succ B \succ C$ ，则 $u(A) = 3, u(B) = 2, u(C) = 1$ 是代表了这个偏好的效用函数。

问题：

1. $u(A) = 3, u(B) = 2, u(C) = 1.5$ 是代表这个偏好的效用函数吗？
2. $u(A) = 6, u(B) = 2, u(C) = 1.5$ 是代表这个偏好的效用函数吗？
3. $u(A) = 4, u(B) = 2, u(C) = 3$ 是代表这个偏好的效用函数吗？

效用函数的存在性

Theorem

如果一个连续偏好满足完备性公理、反身性公理、传递性公理和单调性公理，则存在连续效用函数代表了这个效用。

Theorem

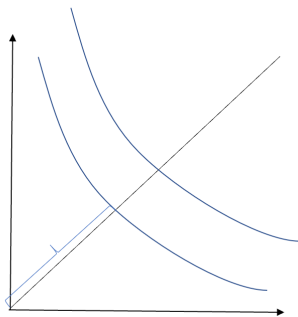
如果以上偏好还满足凸性，则代表它的连续效用函数是拟凹函数 (*quasiconcave function*)。

(拟凹函数本门课程不要求掌握，但在经济学或者其它涉及非线性规划的时候极为重要，我们的课程以后用以计算的很多效用函数都是拟凹的)

若 f 是定义在 \mathbb{R}^n 上凸集 U 上的函数，满足对任意 $x, y \in U$, $t \in [0, 1]$,

当 $f(x) \geq f(y)$ 时, $f(x + (1 - t)y) \geq f(y)$, 则函数 f 是拟凹的
注意到偏好是凸的与效用函数是拟凹的等价。

一个构造效用函数的例子



效用函数的重要性质

Theorem

效用函数的正单调变换不改变效用函数所代表的偏好关系

若对任意商品束 X, Y , $f(u(X)) \geq f(u(Y)) \Leftrightarrow u(X) \geq u(Y)$, 则称其为正单调变换。

Proof.

对任意 $X \succeq Y \Rightarrow u(X) \geq u(Y) \Rightarrow f(u(X)) \geq f(u(Y))$

当 $f(u(X)) \geq f(u(Y)) \Rightarrow u(X) \geq u(Y) \Rightarrow X \succeq Y$

所以, $G = f(u(\cdot))$ 是代表该偏好关系的一个效用函数



效用函数的重要性质（一个例子）

$$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

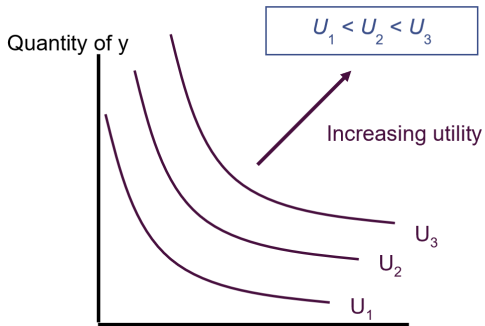
下面哪些效用函数代表的偏好关系与之相同？

1. $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2$
2. $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 5$
3. $u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$
4. $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$

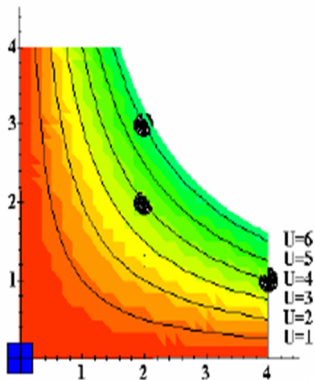
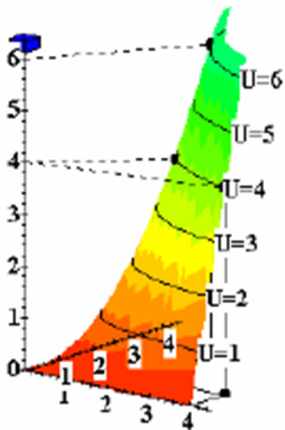
效用函数与无差异曲线

- 回顾无差异曲线的定义
- 对两个商品束无差异 \Leftrightarrow 效用相等
- 通过效用函数，我们可以得到无差异曲线
- 例子：若效用函数为 $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ ，画出消费束 $(1, 2)$ 所在的无差异曲线
- $u(1, 2) = 2 = x_1 x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{x_1}$

效用函数与无差异曲线

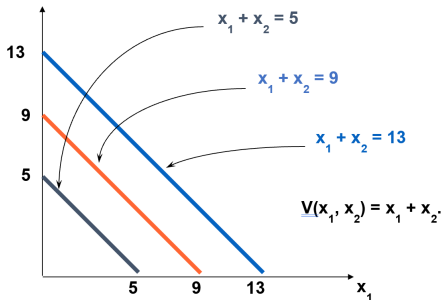


效用函数与无差异曲线



完全替代

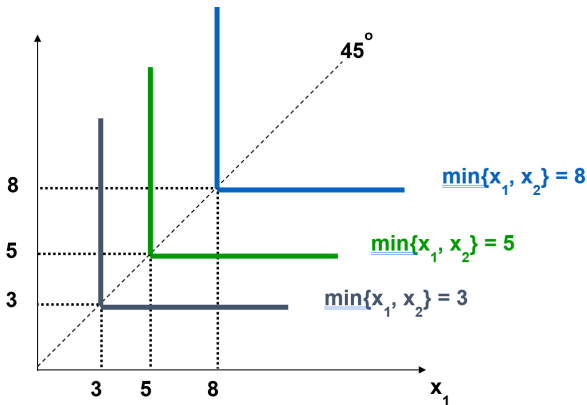
- $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$
- 无差异曲线斜率 $-\frac{a}{b}$
- 愿意用 $\frac{a}{b}$ 单位商品2去替换1单位商品1



- All are linear and parallel.

完全互补

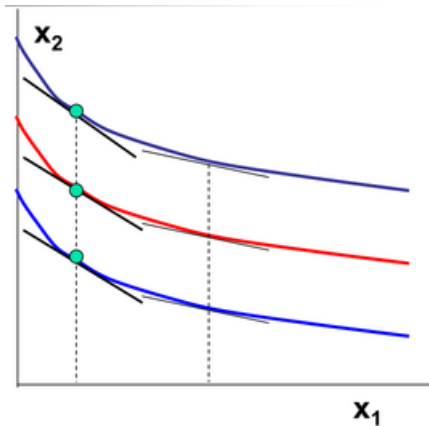
- $u(x_1, x_2) = \min(ax_1, bx_2)$



拟线性偏好 (quasilinear preference)

- $u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$
- 对商品2是线性的，对商品1不是线性的
- 这种偏好在很多情况下利于简化分析，例如一个家庭会消费许多种商品，我们现在关心其中的某种商品，把其它的统一归为商品2，用计价物来代表。

拟线性偏好



柯布-道格拉斯偏好 (Cobb-Douglas preference)

- $u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$, $c > 0, d > 0$
- 一种非常重要的偏好, 经济学意义明显, 使用简单, 在许多场合被使用
- 几种常见的单调变换形式
- $v(x_1, x_2) = c \ln x_1 + d \ln x_2$
- $w(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$, $\alpha = \frac{c}{c+d}$

边际效用

- 回顾边际的概念
- 对一个效用函数 $u(x_1, x_2)$ ，商品1的边际效用是

$$MU_1 = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

- 在基数效用论中，边际效用非常重要
- 它表示当商品1增加一个微小量时，当我们把这微小量扩大到1时总效用增加的量
- 然而，在现代经济学中，因为效用论事实上已经被放弃，效用函数不过是偏好的表达，边际效用几乎丧失了独立的经济学含义
- 边际效用在序数效用论中的解释。离开偏好关系去谈效用的绝对值是错误的
- 例如， $u(x_1, x_2) = x_1^{0.5} x_2^{0.5}$ 和 $u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ 表示的偏好是相同的，但对同一个消费束他们的边际效用并不一定相同
- 边际效用常常作为中间量参与计算，经济学家们也常常用到这个概念来代表背后的选择，我们会不断看到边际效用

边际效用和边际替代率

- 回顾边际替代率的概念：衡量消费者愿意用一种商品去替代另一种商品的比率。计算公式是无差异曲线上的斜率 $\frac{dx_2}{dx_1}$
- 无差异曲线的方程： $u(x_1, x_2) = U$, U 为表示效用的常数

$$du(x_1, x_2) = dU$$

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

$$MRS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = -\frac{MU_1}{MU_2}$$

单调变换不改变边际替代率

- 我们知道，对于任何偏好，给定消费束边际替代率是一定的，既然效用函数的单调变换不改变其代表的偏好，则也不会改变边际替代率。我们现在证明这一点。
- 令 $f(u(x_1, x_2))$ 为一单调变换

$$df(u(x_1, x_2)) = dU$$

$$\frac{\partial f(u(x_1, x_2))}{\partial u(x_1, x_2)} \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(u(x_1, x_2))}{\partial u(x_1, x_2)} \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

$$MRS = \frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}}$$

- 因此，边际替代率只与偏好有关，与代表偏好的效用函数形式无关

边际替代率递减

- 在本课程我们多数情况下都假设偏好（代表偏好的效用函数）符合边际替代率递减（如柯布道格拉斯偏好，但也有不符合的，如完全替代）
- 所谓边际替代率递减是指在同一条无差异曲线上， $x_1 \uparrow \Rightarrow$ 无差异曲线上 $|MRS| \downarrow$ ，即当一种商品（如商品1）的数量增加，消费者只愿意用更少另一种商品（商品2）去替代该商品（商品1）以保持商品束无差异。
- 通俗的说：当我拥有更多苹果，我就更珍视桔子，不愿意拿桔子换苹果。过去愿意用1个桔子换1个苹果，现在1个桔子我至少要求拿2个苹果来换。
- 这种假定符合我们多数时候观察到的现象。
- 从数学上来讲，边际替代率递减需要效用函数是拟凹的，也就是偏好是凸的。这就是我们上一讲中定义的良好偏好

边际效用递减？一个不适宜的概念

- 在基数效用论时代，曾经有一个概念：边际效用递减，即给定的商品数量不变，商品1所能带来的边际效用随着商品1数量的增加而减少（例：吃包子）。边际效用递减是基数效用论时代常做出的假设
- 正如我们前面所说，在现代经济学边际效用没有直接经济学意义（但有间接意义，反映对偏好的影响），因此，边际效用递减在现代经济学中也不复存在
- $u(x_1, x_2) = x_1^{0.5}x_2^{0.5}$, $u(x_1, x_2) = x_1x_2$, $u(x_1, x_2) = x_1^2x_2^2$ 所代表的偏好完全一致，大家可以自己验证，他们的边际效用分别递减，不变，递增。可见，对基于偏好的现代经济学来说，边际效用递减既没有经济学意义也不再适宜
- 遗憾的是，不仅仅是学生，甚至许多经济学者也常常忽视这一问题，于是他们一边说自己是序数效用论，一边又在提边际效用递减

边际替代率递减的原因不是边际效用递减

- 许多教科书或习题集有这样一个问题：为什么边际替代率递减？
- 他们给出的解释是 $MRS = -\frac{MU_1}{MU_2}$ ，因为边际效用递减，随着 x_1 增加， MU_1 减小， MU_2 变大，所以边际替代率递减。这一回答显然错误
- 第一，在现代经济学中根本不存在边际效用递减
- 第二，边际替代率递减并不需要边际效用递减。 $u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ 边际效用递增，然而依然符合边际替代率递减
- 再次强调：边际替代率递减的根本原因是偏好的凸性，通俗的说是消费者喜欢平衡的消费而非极端的消费。

提醒

- 所以，请大家牢记，现代经济学中效用只不过是一种数学工具，从本质上自身不具备根本的经济学意义，具备根本经济学意义的是偏好。
- 争执效用是否合理，效用是什么毫无意义。
- 现代经济学将效用函数称作“效用函数”只是因为历史的传承以及用效用来表述更方便（我们会常常使用基数效用论的术语）。但本质上，将效用函数称作“工具函数”也并无问题。
- 在大家以后的学习和研究中，也可能用到许多传承自基数效用论的术语，但大家一定要明白，我们并不是真的在说消费者的效用或边际效用如何变动，而只是更简洁的比较偏好关系。
- 如当我们说到多吃一个苹果效用增加，我们实际的意思是在说多吃一个苹果就是一个更被偏好的消费束。