中级微观经济学

第八讲：斯勒茨基方程

贺思诚

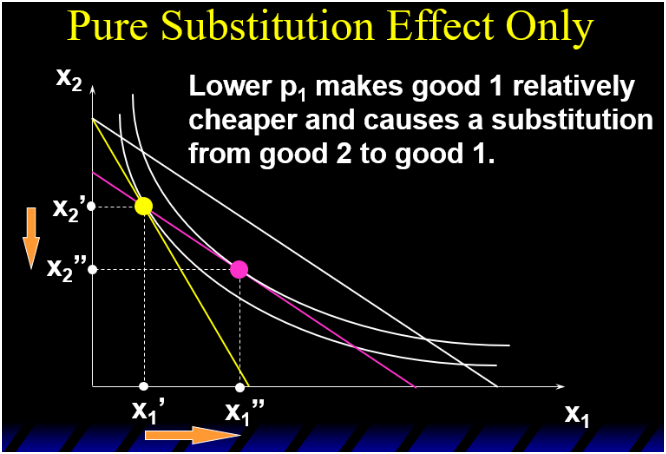
南开大学金融学院

2024年3月17日

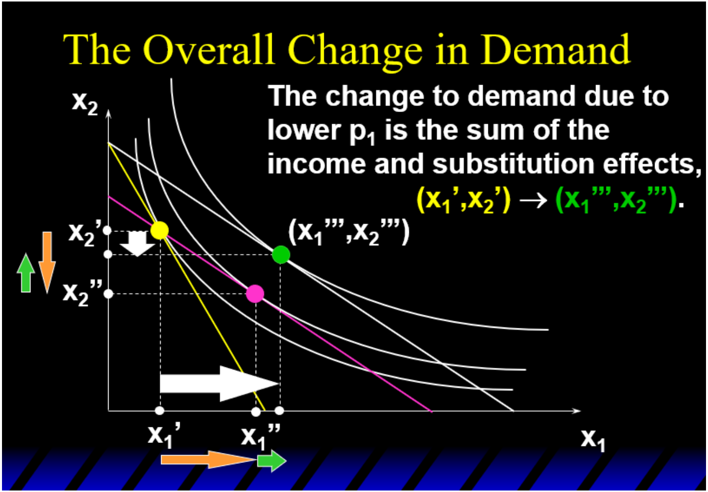
收入效应与替代效应

- 为什么一种商品价格下降反而有可能购买的更少？（吉芬商品）我们到现在为止并没有很好的解释
- 工资从每小时10美元到1000美元，一定会提升工作时间吗？增加到10000000美元呢？
- 显然，我们现有的思路还不足以分析这些问题
- 引入一组新的概念：收入效应与替代效应

斯勒茨基分解


Pure Substitution Effect Only
Lower p1 makes good 1 relatively cheaper and causes a substitution from good 2 to good 1.
x2
x2'
x2''
x1'
x1''
x1

斯勒茨基分解


The Overall Change in Demand
The change to demand due to lower p_1 is the sum of the income and substitution effects, $(x_1', x_2') \rightarrow (x_1''', x_2''')$.
x_2
x_2'
x_2''
(x_1''', x_2''')
x_1'
x_1''
x_1

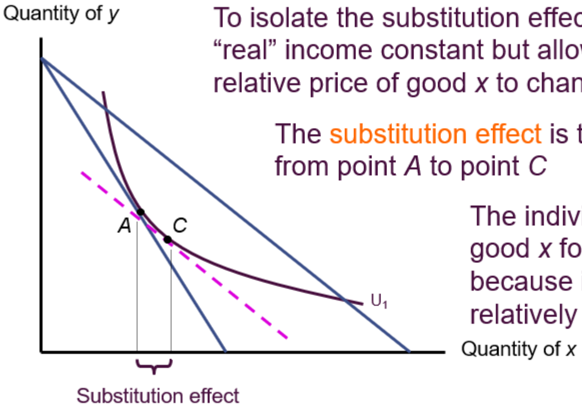
斯勒茨基分解

- 我们看到，刚才的分解一共分为两个步骤
- 第一步：相对价格发生变动，但要使初始的消费束依然刚好在预算线上
- 第二部：对购买力进行调整，保证价格不变
- 第一种效应：纯粹的价格变化引发的，所以被称作替代效应（substitution effect），注意，这种分解替代效应的方式是斯勒茨基倡导的，所以又叫斯勒茨基替代
- 第二种效应：由纯粹的购买力提升带来的，所以被称作收入效应（income effect）

希克斯分解

- 斯勒茨基分解的思路是第一步考虑价格变动，但要使初始的消费束依然刚好在调整后的预算线上
- 另一种思路非常相似，但第一步考虑要保证消费者刚好和过去一样好，也即调整后的预算线依然切在同一个无差异曲线上，这就是希克斯分解

希克斯分解

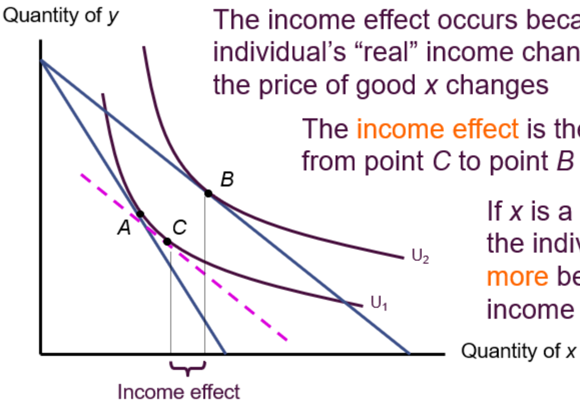


To isolate the substitution effect, we hold "real" income constant but allow the relative price of good *x* to change

The substitution effect is the movement from point *A* to point *C*

The individual substitutes good *x* for good *y* because it is now relatively cheaper

希克斯分解



The income effect occurs because the individual's "real" income changes when the price of good *x* changes

The income effect is the movement from point *C* to point *B*

If *x* is a normal good, the individual will buy more because "real" income increased

斯勒茨基替代效应的计算

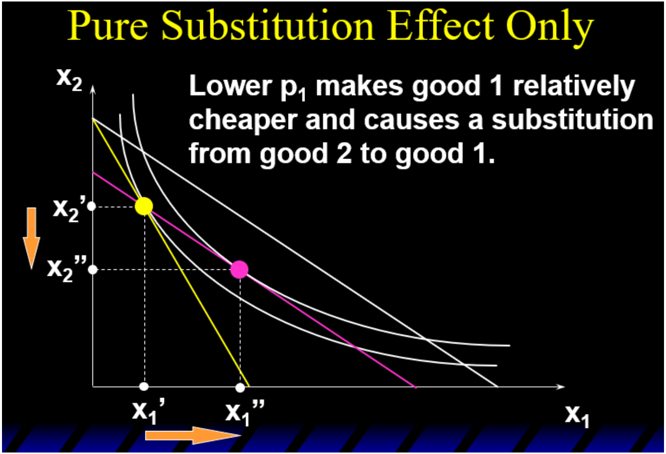
- 假定原来的价格为p_1, p_2，总预算为m，最优选择下的消费束为(x_1, x_2)
- 现在商品1的价格变为$p_1^{'}$
- 我们引入中间变量$m^{'}$表示斯勒茨基替代中替代效应这一步新的预算
- 因为仍过原来的点(x_1, x_2)，所以斯勒茨基替代的预算约束为

$$p_1^{'} x_1 + p_2 x_2 = m^{'}$$

- 与原预算相减，可得

$$\Delta m = x_1 \Delta p_1$$

斯勒茨基替代效应的计算



斯勒茨基替代效应的计算

- 考虑到这并不是结束，因为价格改变后，新的预算集内，原来的点未必是最优的，我们假定新的最优选择是$x_1\left(p_1^{'}, m^{'}\right)$
- 因此，$\Delta x_1^s = x_1\left(p_1^{'}, m^{'}\right) - x_1(p, m)$是商品1的替代效应（斯勒茨基）

斯勒茨基替代效应的计算

Example

假设消费者对牛奶的需求函数为$x_1 = 10 + \frac{m}{10p_1}$，他的收入为每周120美元，牛奶的价格是每夸脱3美元。所以，他对牛奶的需求是14夸脱/周，现在假设牛奶的价格下降到每夸脱2美元，计算替代效应

斯勒茨基替代效应的计算

- 第一步，求出替代效应产生的新预算约束，由

$$\Delta m = x_1 \Delta p_1 \Rightarrow \left(m^{'} - 120\right) = 14(2-3) \Rightarrow m^{'} = 106$$

- 第二步，求出$x_1\left(p_1^{'}, m^{'}\right)$，

$$x_1^{'} = 10 + \frac{106}{10 * 2} = 15.3$$

- 第三步，求出替代效应

$$\Delta x_1^s = x_1\left(p_1^{'}, m^{'}\right) - x_1\left(p, m\right) = 15.3 - 14 = 1.3$$

斯勒茨基收入效应的计算

- 收入效应（斯勒茨基）为

$$\Delta x_1^n = x_1\left(p_1^{'}, m\right) - x_1\left(p_1^{'}, m^{'}\right)$$

- 注意，这个式子与第六章我们学过的收入变动的效应完全相同，因此，正常商品和低档商品的定义这里依然使用。
- 回到前面的例子，现在演示如何计算收入效应。
- 第一步，求出$x_1\left(p_1^{'}, m\right)$，

$$x_1\left(p_1^{'}, m\right) = 10 + \frac{120}{10 * 2} = 16$$

- 第二部，求出收入效应

$$\Delta x_1^n = x_1\left(p_1^{'}, m\right) - x_1\left(p_1^{'}, m^{'}\right) = 16 - 15.3 = 0.7$$

斯勒茨基方程的第一种表达方式

- 总需求的变动

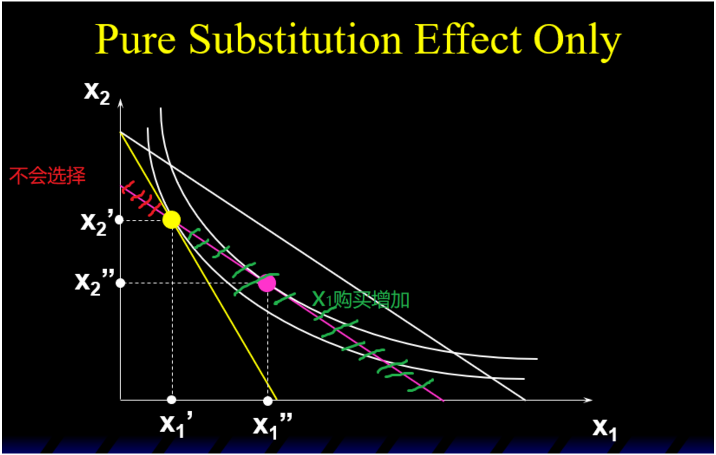
$$\Delta x_1 = x_1\left(p_1^{'}, m\right) - x_1\left(p, m\right) = \begin{array}{c} \left(x_1\left(p_1^{'}, m\right) - x_1\left(p_1^{'}, m^{'}\right)\right) \\ + \left(x_1\left(p_1^{'}, m^{'}\right) - x_1\left(p, m\right)\right) \end{array}$$

- 用刚才我们的表达方式，就是

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^s + \Delta x_1^n$$

- 即，自价格变动对自身的影响等于替代效应+收入效应
- 回顾刚才的例子，总的变动$\Delta x_1 = \Delta x_1^s + \Delta x_1^n = 1.3 + 0.7 = 2$
- 那么，从定性的角度说，斯勒茨基替代效应和收入效应的符号是什么呢？即，当价格变化时，是同向变化（+）还是反向变化（-）呢？

替代效应的符号



替代效应的符号

- 所以，斯勒茨基替代效应的符号显然为负（-），即自身的价格增加，需求量减少；自身的价格降低，需求量增加

收入效应的符号

- 我们前面已经讨论过，斯勒茨基收入效应与我们上一章所讲的收入变动的影响完全一致
- 价格增加则相当于总预算下降，价格下降则相当于总预算增加
- 考虑到商品分为正常商品和低档商品，正常商品随收入增加而增加，低档商品虽收入增加而减少
- 所以收入效应对于正常品为负（-），对于低档品为正（+）

自价格变动的总效应

- 根据斯勒茨基方程

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^s + \Delta x_1^n$$

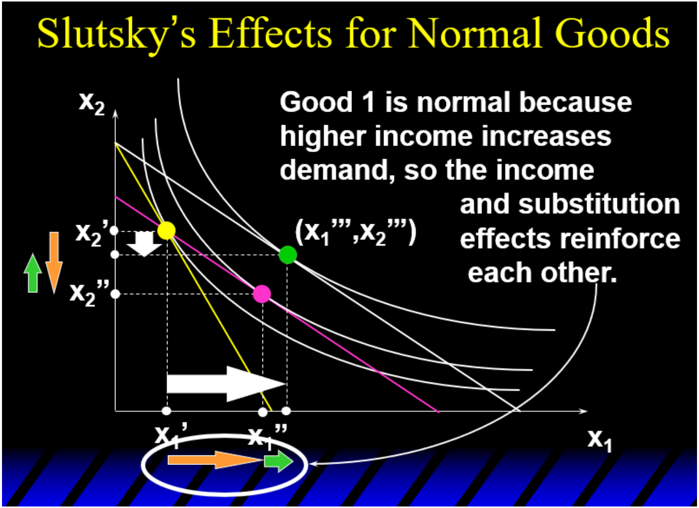
- 对于正常商品

$$\underset{(-)}{\Delta x_1} = \underset{(-)}{\Delta x_1^s} + \underset{(-)}{\Delta x_1^n}$$

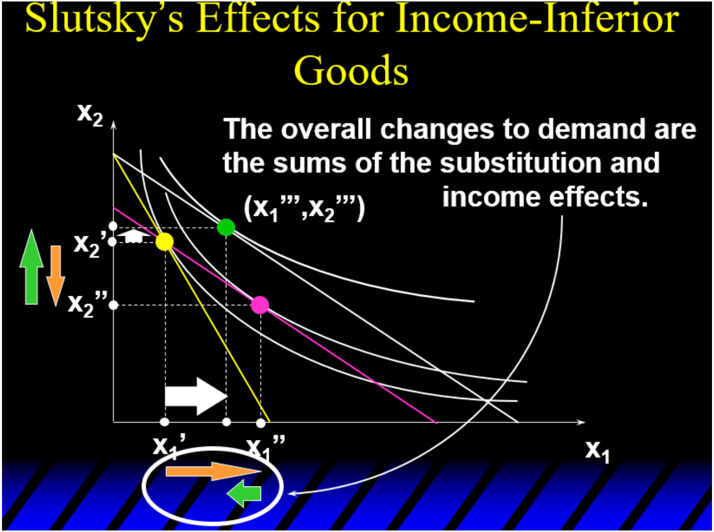
- 对于低档商品

$$\underset{(?)}{\Delta x_1} = \underset{(-)}{\Delta x_1^s} + \underset{(+)}{\Delta x_1^n}$$

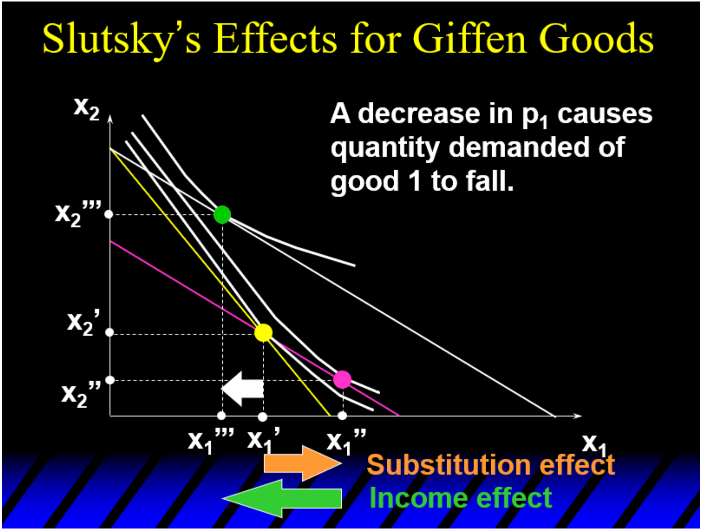
正常商品


Slutsky's Effects for Normal Goods
Good 1 is normal because higher income increases demand, so the income and substitution effects reinforce each other.
x_2
x_2'
x_2''
(x_1''', x_2''')
x_1'
x_1''
x_1

普通的低档商品


Slutsky's Effects for Income-Inferior Goods
x2
The overall changes to demand are the sums of the substitution and income effects.
(x1''',x2''')
x2'
x2''
x1'
x1''
x1

吉芬商品


Slutsky's Effects for Giffen Goods
A decrease in p1 causes quantity demanded of good 1 to fall.
x2
x2'''
x2'
x2''
x1'''
x1'
x1''
x1
Substitution effect
Income effect

总结

A Summary of income and substitution effects of a price change

Types of Goods	Change of the price	S.E.	I.E.	|SE| and |IE|	T.E.
Normal good	-	+	+		+
	+	-	-		-
Inferior good	-	+	-	|SE|>|IE|	+
	+	-	+		-
Giffen good	-	+	-	|SE|<|IE|	-
	+	-	+		+

斯勒茨基方程的第二种形式

- 刚才的形式虽然可以看到自价格变动后总需求量的变化，但我们日后更常用到的是另一种形式：即在这一个区间若将价格变化单位化，那么替代效应和收入效应会是多少，这样更便利于比较
- 令

$$\Delta x_1^m = x_1\left(p_1^{'}, m^{'}\right) - x_1\left(p_1^{'}, m\right) = -\Delta x_1^n$$

- 则原先的斯勒茨基方程$\Delta x_1 = \Delta x_1^s + \Delta x_1^n$转化为

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^s - \Delta x_1^m$$

- 两边同除以Δp_1,我们得到

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} - \frac{\Delta x_1^m}{\Delta p_1}$$

斯勒茨基方程的第二种形式

- 回顾$\Delta m = x_1 \Delta p_1$，带入最后一项，得到

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} - \frac{\Delta x_1^m}{\Delta m} x_1$$

  这就是斯勒茨基方程的第二种形式
- 我们分别将三项展开来看
- 第一项$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{x_1\left(p_1^{\prime},m\right)-x_1(p,m)}{\Delta p_1}$是收入不变，价格变动导致需求相应变动的比率
- 第二项$\frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} = \frac{x_1\left(p_1^{\prime},m^{\prime}\right)-x_1(p,m)}{\Delta p_1}$是当价格变动，收入调整到原来的最优消费束刚好在预算线上时，价格变动导致需求相应变动的比率，是替代效应
- 第三项$-\frac{\Delta x_1^m}{\Delta m}x_1 = -\frac{x_1\left(p_1^{\prime},m^{\prime}\right)-x_1\left(p_1^{\prime},m\right)}{m^{\prime}-m}x_1$,是收入效应。

斯勒茨基方程的第二种形式

- 为什么收入效应$\frac{\Delta x_1^m}{\Delta m} x_1 = \frac{x_1\left(p_1^{'}, m^{'}\right) - x_1\left(p_1^{'}, m\right)}{m^{'} - m} x_1$呈这么奇怪的形式?
- 我们要知道，即使收入效应本质上度量的依然是因价格变动产生的收入变动，进而引致的需求量的变动
- 完整的写应该是$\frac{\Delta x_1^m}{\Delta m} x_1 = \frac{\Delta x_1^m}{\Delta m} \frac{\Delta m}{\Delta p}$，如果忘了最后一项就忽略了收入变动多少是被价格变动所决定的，因此就失去了锚

斯勒茨基方程的更规范的表述形式

- 我们先来考虑斯勒茨基分解的状态。
- 假定按照初始价格，最优消费束是$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$，我们定义一个需求函数$x_1^s(p_1, p_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$，即当保证$\bar{x}_1, \bar{x}_2$始终处于刚好买的起的条件下的商品1的需求函数，我们把这种需求函数称作斯勒茨基需求。
- 当价格p_1, p_2刚好使常规的需求函数$x_1(p_1, p_2, m)$（马歇尔需求函数）也选择了这个最优消费束，也即$x_1(p_1, p_2, m) = x_1(p_1, p_2, p_1\bar{x}_1 + p_2\bar{x}_2)$时，

$$x_1(p_1, p_2, p_1\bar{x}_1 + p_2\bar{x}_2 = m) = x_1^s(p_1, p_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

- 同时对p_1求偏导，

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1^s(p_1, p_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial p_1}$$

斯勒茨基方程的更规范的表述形式

- 上式移项可得

$$\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial p_1}=\frac{\partial x_1^s(p_1,p_2,\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{\partial p_1}-\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_1}$$

- 注意$m=p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2$,代入上式最后一项，得

$$\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial p_1}=\frac{\partial x_1^s(p_1,p_2,\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{\partial p_1}-\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial m}\bar{x}_1$$

- 这正是我们刚才所看到的第二种形式的斯勒茨基方程

更常见的斯勒茨基方程

- 我们前面提到过希克斯分解，希克斯分解的替代效应要求价格变化后最优选择依然是原来的效用
- 因此希克斯需求函数的形式为$x_1^h(p_1, p_2, \bar{u})$
- 关于希克斯需求的推导，超出了我们这门课的数学要求，我们这里不详细论述
- （补充知识：马歇尔需求是通过预算作为限制条件效用最大化解出来的，希克斯需求是通过效用作为约束条件求支出最小化问题得来的，两者在数学上是对偶问题。）
- 同之前一样$x_1(p_1, p_2, p_1\bar{x}_1 + p_2\bar{x}_2 = m) = x_1^h(p_1, p_2, \bar{u})$

更常见的斯勒茨基方程

- 与之前类似的，我们有

$$\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial p_1}+\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_1}=\frac{\partial x_1^h(p_1,p_2,\bar{u})}{\partial p_1}$$

- 可以得到

$$\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial p_1}=\frac{\partial x_1^h(p_1,p_2,\bar{u})}{\partial p_1}-\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial m}\bar{x}_1$$

- 这种形式的斯勒茨基方程是实践中最常用到的形式

两种斯勒茨基方程比较

- 对比两个斯勒茨基方程

$$\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial p_1}=\frac{\partial x_1^s(p_1,p_2,\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{\partial p_1}-\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial m}\bar{x}_1$$

和

$$\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial p_1}=\frac{\partial x_1^h(p_1,p_2,\bar{u})}{\partial p_1}-\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial m}\bar{x}_1$$

- 此时，

$$\frac{\partial x_1^s(p_1,p_2,\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{\partial p_1}=\frac{\partial x_1^h(p_1,p_2,\bar{u})}{\partial p_1}$$

- 因此，在这种情况下，我们可以用斯勒茨基需求对自价格的偏导数来代替希克斯需求对自价格的偏导数。因此，本课程避开了更一般的工具：希克斯需求。

需求法则

- 根据斯勒茨基方程，替代效应显然与价格负向变化，那么意味着，只要收入效应也与价格是负向关系，则商品的总需求量一定满足随着价格的上升而下降。这就是需求法则

几个相关的例子

请自行阅读课本8.7节（99-102页）