中级微观经济学

第三十二讲：一般均衡：交换经济

贺思诚

南开大学金融学院

2024年6月2日，6月9日

局部均衡与一般均衡

- 迄今为止，我们所有的分析，都集中在单一商品的市场
- 在既往的分析中，我们假定该市场的供求双方视产业外的一切（生产要素、替代品、互补品的价格等）为给定的
- 这种分析方法被称作局部均衡分析
- 然而，在现实中，许多行业与别的行业关联密切（如房地产和水泥行业互相影响），我们将其它行业视作给定的在很多时候未必合理
- 再比如，一个经济体中工人的工资并不仅仅是影响到供给方的成本，也会影响到需求
- 因此，很多时候我们需要考虑多个行业中的供需互相影响，这就是一般均衡分析

一个简单的一般均衡模型

- 相较于局部均衡， 一般均衡中各经济变量间的影响错综复杂
- 因此，即使相对理想化的模型中其所使用的工具也比较复杂
- 我们在本节课将首先研究一个较为简单的经济环境：两行为人两商品完全竞争下的交换经济
- 交换经济（只有禀赋没有生产）
- 两行为人VS完全竞争?

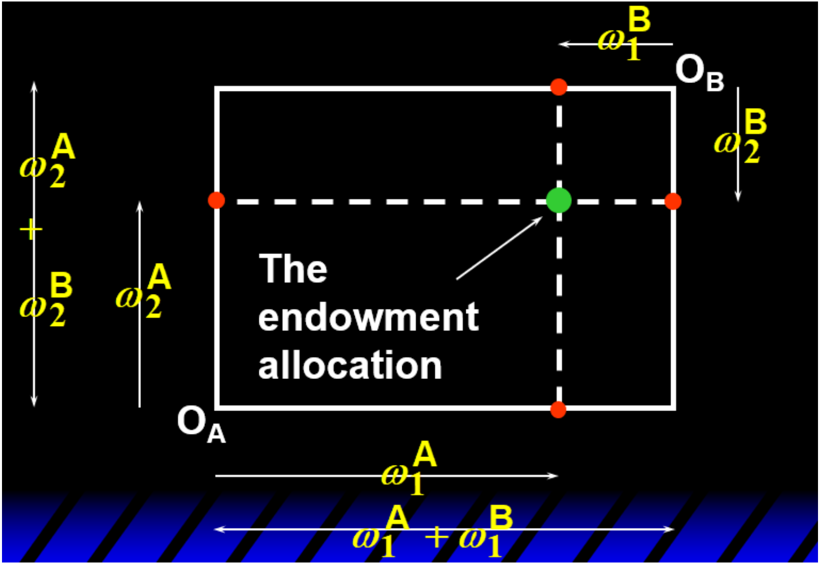
模型基本设定

- 我们假定有两个行为人A,B，他们的消费束分别为$x^A=\left(x_1^A,x_2^A\right)$，$x^B=\left(x_1^B,x_2^B\right)$
- 两个人的效用函数则为$u_A\left(x_1^A,x_2^A\right)$，$u_B\left(x_1^B,x_2^B\right)$，注意，两人的效用函数未必相同，我们假定效用函数是良态的。
- 两人分别有初始禀赋$\omega^A=\left(\omega_1^A,\omega_2^A\right)$，$\omega^B=\left(\omega_1^B,\omega_2^B\right)$
- 两者的目标是各自的效用最大化
- 两者可进行交易，用一种商品去和另一种商品交换
- 对于这个世界来说，可行配置为$x_1^A+x_1^B=\omega_1^A+\omega_1^B$，$x_2^A+x_2^B=\omega_2^A+\omega_2^B$

埃奇沃斯方框图

- 我们首先引入一个图形工具，来帮助我们进行示意性的分析
- 这个工具叫做埃奇沃斯方框图(Edgeworth Box)

埃奇沃斯方框图



ω_1^B
O_B
ω_2^B
$\omega_2^A + \omega_2^B$
ω_2^A
The endowment allocation
O_A
ω_1^A
$\omega_1^A + \omega_1^B$

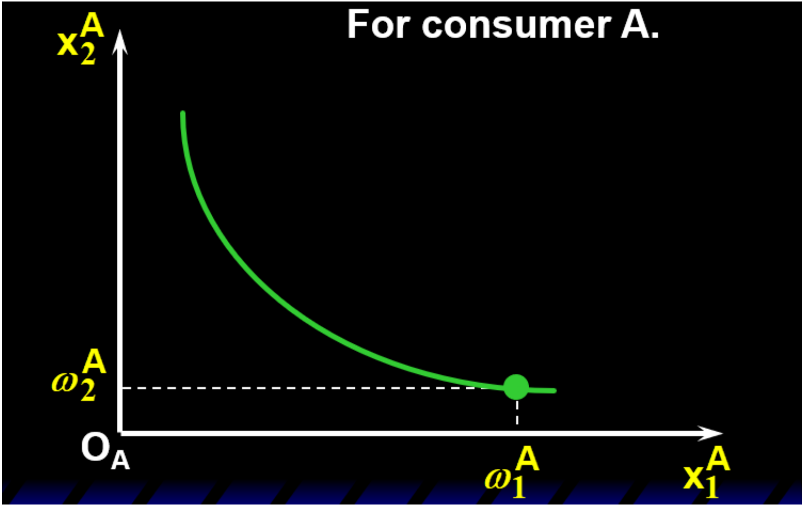
可行配置

- 如上图，哪些点代表的是可行配置?
- 方框里面的所有点（包括边界）

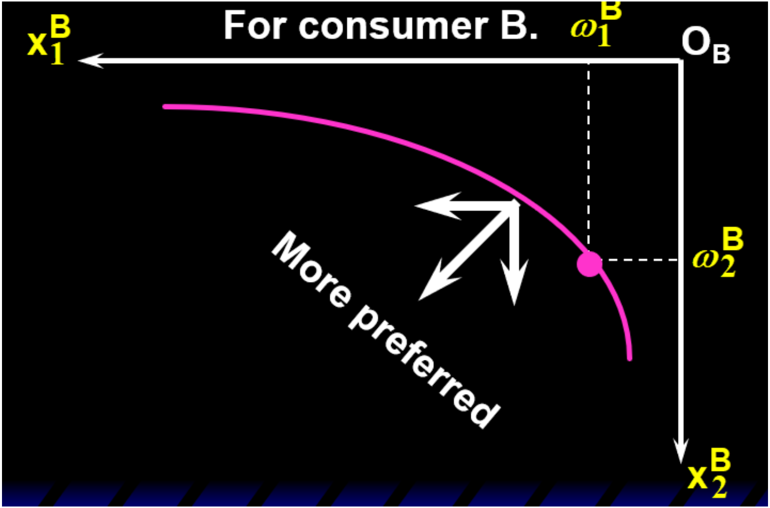
可行配置

- 如上图，哪些点代表的是可行配置?
- 方框里面的所有点（包括边界）

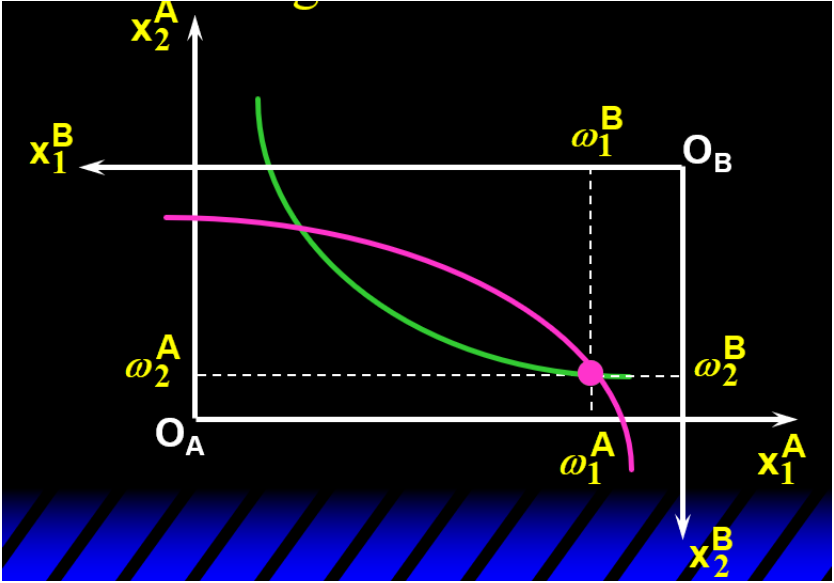
加入偏好（效用）关系



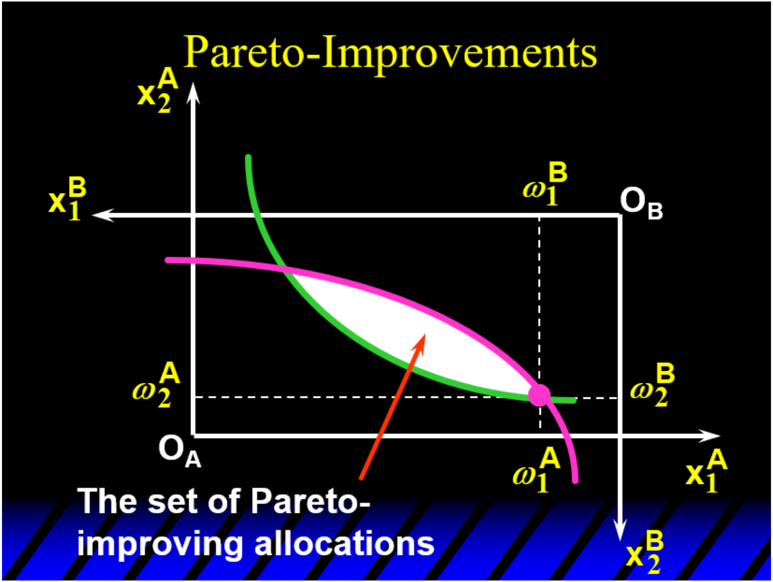
加入偏好（效用）关系



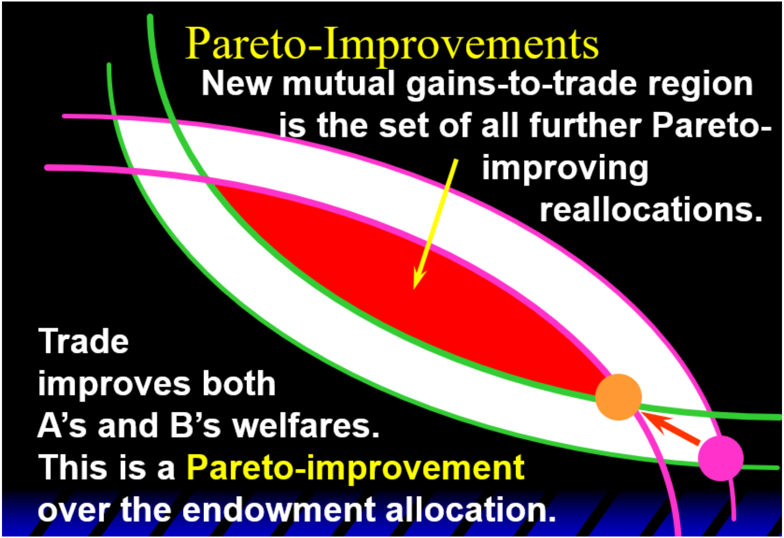
加入偏好（效用）关系



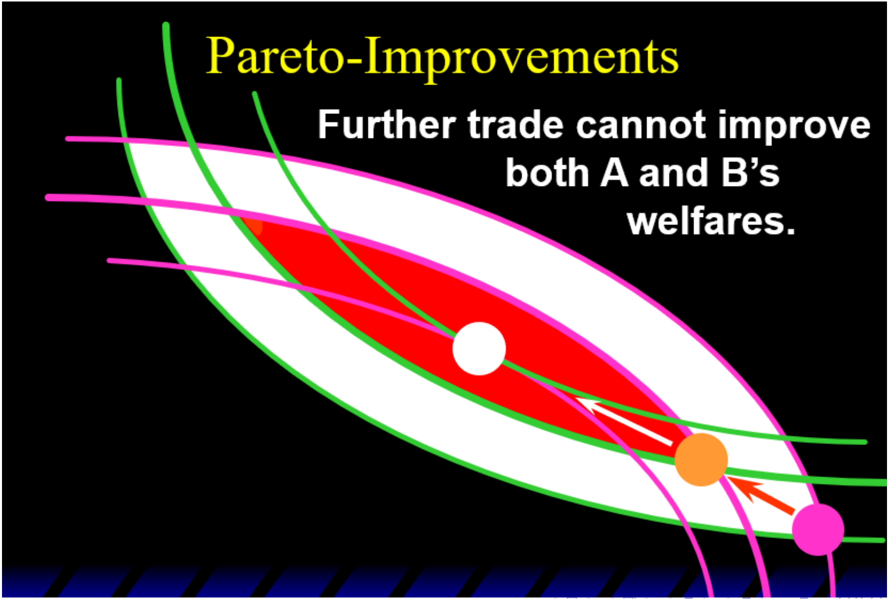
帕累托改进


Pareto-Improvements
x_2^A
x_1^B
ω_1^B
O_B
ω_2^A
ω_2^B
O_A
ω_1^A
x_1^A
x_2^B
The set of Pareto-improving allocations

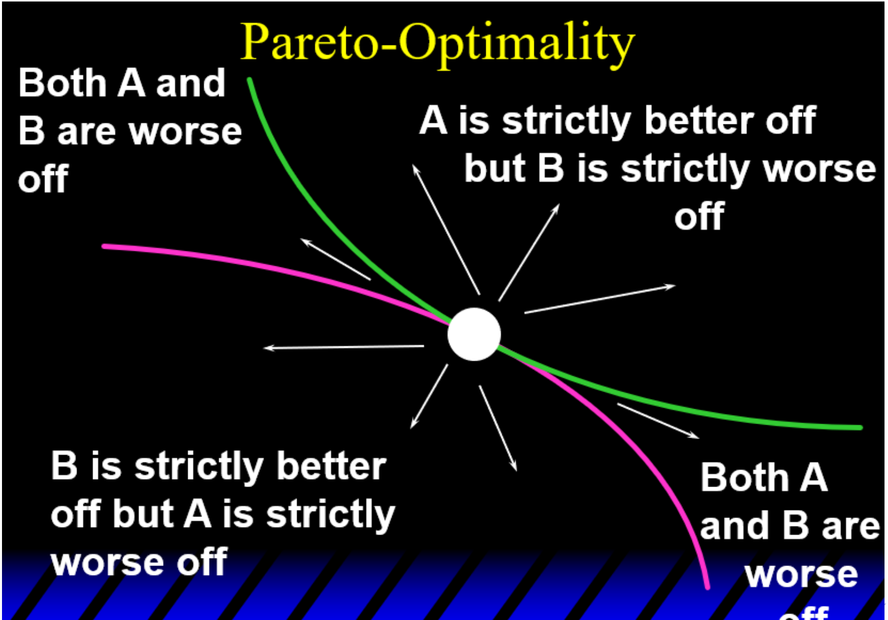
帕累托改进


Pareto-Improvements
New mutual gains-to-trade region is the set of all further Pareto-improving reallocations.
Trade improves both A's and B's welfares.
This is a Pareto-improvement over the endowment allocation.

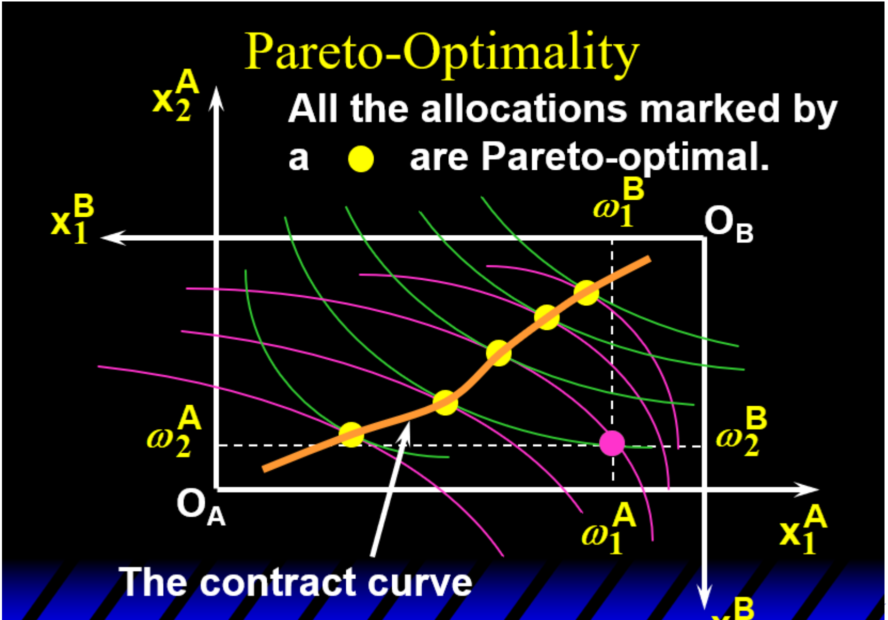
帕累托最优


Pareto-Improvements
Further trade cannot improve
both A and B's
welfares.

帕累托最优


Pareto-Optimality
Both A and B are worse off
A is strictly better off but B is strictly worse off
B is strictly better off but A is strictly worse off
Both A and B are worse

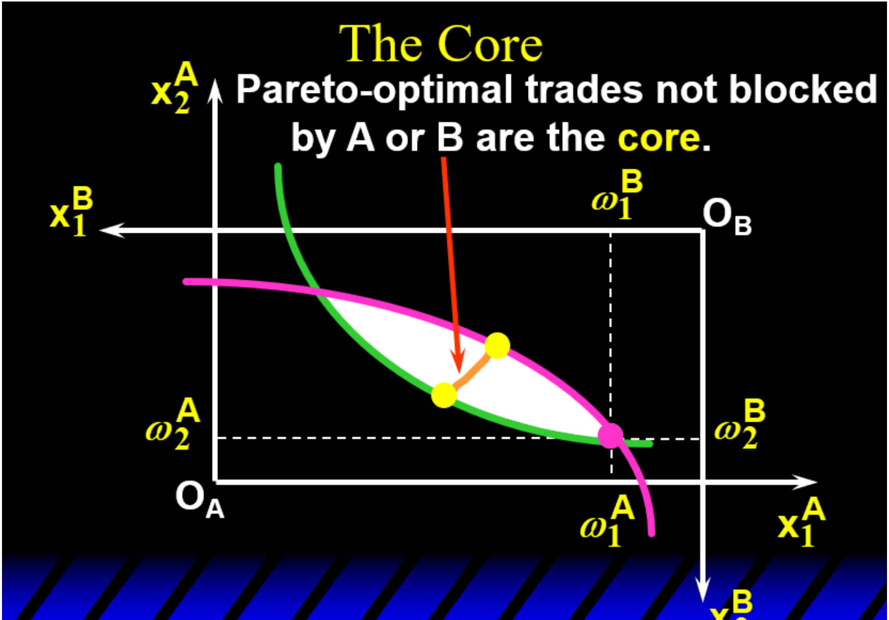
帕累托最优与契约曲线


Pareto-Optimality
All the allocations marked by a ● are Pareto-optimal.
x_2^A
x_1^B
ω_1^B
O_B
ω_2^A
ω_2^B
O_A
ω_1^A
x_1^A
x_2^B
The contract curve

帕累托最优与契约曲线

- 埃奇沃斯方框图内所有帕累托最优点的集合称为帕累托集
- 这些点又构成一条曲线，称为契约曲线
- 之所以称为契约曲线，是因为如果双方在该曲线以外交易，就有提升的空间，可以保证双方都获利，因此这样的交易一定不是最终结果。
- 那么，给定禀赋，真实的交易可能发生在契约曲线上的什么地方呢？我们首先引入核（core）的概念

核


The Core
Pareto-optimal trades not blocked by A or B are the core.
x_2^A
x_1^B
ω_1^B
O_B
ω_2^A
ω_2^B
O_A
ω_1^A
x_1^A
x_2^B

交易的方法：市场交易

- 既然在核里的点都是相对于禀赋点有帕累托改变的，实际双方达成交易之后的结果是在哪里呢？
- 我们已经提到这是完全竞争市场，因此，每个参与者都是价格接受者（注意我们前边关于两个参与者与完全竞争的讨论）
- 因此，假定价格为(p_1, p_2)
- 对单个参与者A,B，给定了一组价格，我们可以通过分别求解他们个人带有禀赋的效用最大化问题，求出他们的需求，如

$$x_1^A\left(p_1, p_2, \omega_1^A, \omega_2^A\right)$$

超额需求

- 对于任意给定的一组价格(p_1, p_2)，我们都可以通过效用最大化求出相应的$x^A = (x_1^A, x_2^A)$，$x^B = (x_1^B, x_2^B)$
- 然而，并非一组任何的价格都可以保证该配置是可行的
- 我们定义A对商品1的净需求为

$$e_1^A = x_1^A - \omega_1^A$$

  有时，又将这个称为A对商品1的超额需求
- 如果在给定价格下

$$e_1^A + e_1^B \neq 0$$

  即

$$x_1^A + x_1^B \neq \omega_1^A + \omega_1^B$$

- 则市场处于非均衡状态，没有出清

超额需求

- 我们定义商品1的总超额需求函数为

$$z_1(p_1, p_2) = e_1^A + e_1^B$$

同理，我们可以定义商品2的总超额需求函数为

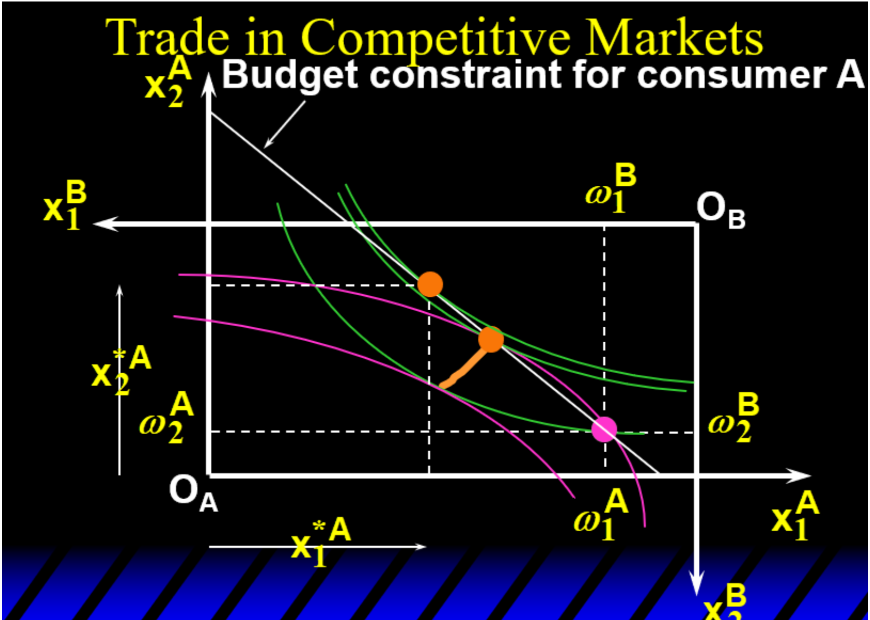
$$z_2(p_1, p_2) = e_2^A + e_2^B$$

- 我们可以定义一般均衡：一般均衡是一组价格(p_1, p_2)，该组价格使超额需求函数

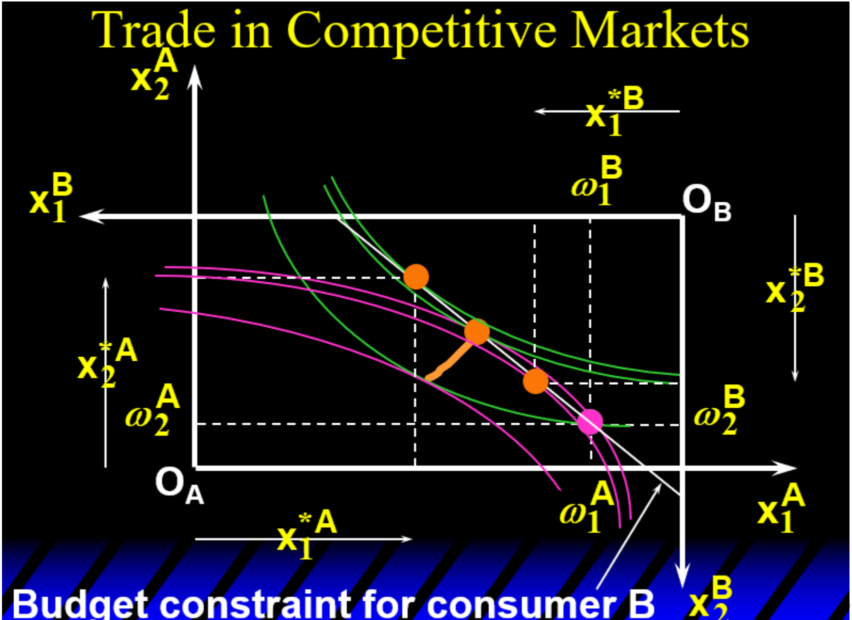
$$z_1(p_1, p_2) = 0$$

$$z_2(p_1, p_2) = 0$$

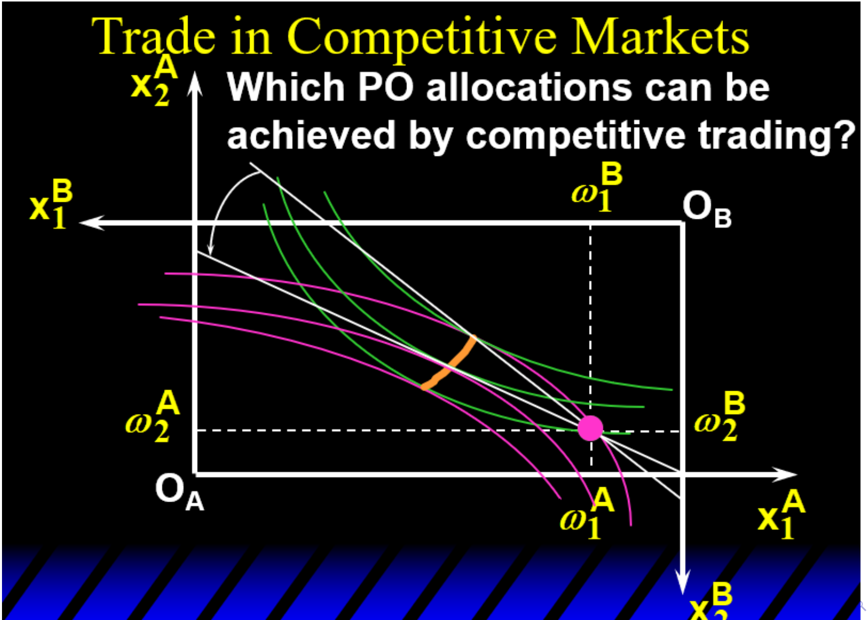
非均衡图示


Trade in Competitive Markets
Budget constraint for consumer A
x_2^A
x_1^B
ω_1^B
O_B
x_2^{*A}
ω_2^A
ω_2^B
O_A
ω_1^A
x_1^A
x_1^{*A}
x_2^B

非均衡图示


Trade in Competitive Markets
x_2^A
x_1^{*B}
x_1^B
ω_1^B
O_B
x_2^{*B}
x_2^{*A}
ω_2^A
ω_2^B
O_A
ω_1^A
x_1^A
x_1^{*A}
Budget constraint for consumer B
x_2^B

均衡图示


Trade in Competitive Markets
Which PO allocations can be achieved by competitive trading?
x_2^A
x_1^B
ω_1^B
O_B
ω_2^A
ω_2^B
O_A
ω_1^A
x_1^A
x_2^B

形成一般均衡过程

- 如上图所示，当某个价格体系导致经济处于非均衡状态，必然有商品处于超额需求，有商品则是超额供给
- 有超额需求就意味着该商品的价格（相对）过低，有超额供给就意味着该商品的价格（相对）过高
- 因此，前者就面对价格升高的压力，后者就面对着价格降低的动力
- 前者的价格升高会减小超额需求，后者的价格降低会减少超额供给

瓦尔拉斯法则

- 无论是否处于一般均衡，两个交易者的预算约束恒成立，对交易者A，这意味着

$$p_1 x_1^A + p_2 x_2^A \equiv p_1 \omega_1^A + p_2 \omega_2^A$$

- 整理，得

$$p_1 e_1^A + p_2 e_2^A \equiv 0$$

- 同理，对交易者B，有

$$p_1 e_1^B + p_2 e_2^B \equiv 0$$

- 两式相加

$$p_1 \left(e_1^A + e_1^B \right) + p_2 \left(e_2^A + e_2^B \right) \equiv 0$$

瓦尔拉斯法则

- 因此，我们有
$$p_1 z_1 + p_2 z_2 \equiv 0$$
- 注意，上面的推导与经济是否处于均衡无关，是恒成立的，这就是瓦尔拉斯法则。
- 如果价格体系使其中一个市场处于均衡
$$z_1(p_1, p_2) = 0$$
- 带入上式，可求出
$$z_2(p_1, p_2) = 0$$
市场处于一般均衡
- 对于有n个市场的经济，只要某个价格体系使其中$n-1$个市场处于均衡，则最后一个市场也会处于均衡，这是瓦尔拉斯法则帮助我们做出的简化分析。

相对价格

- 因为瓦尔拉斯法则的存在，意味着实际上一个有n个商品的经济，本质上只有$n-1$个方程
- 但既然有n个商品，就应实实在在有n个价格，这样未知量似乎比方程多一个
- 事实上，价格也只是相对的关系，如我们前面曾经学到过的，如果收入和价格提升同样的倍数，消费者的最优选择不会改变
- 因此，可设定其中一个价格为1，用其它价格与其比较（计价物的概念）

一个简单的例子

- 假定交易者A的效用函数为$u_A\left(x_1^A, x_2^A\right)=\left(x_1^A\right)^a\left(x_2^A\right)^{1-a}$，交易者B的效用函数为$u_B\left(x_1^B, x_2^B\right)=\left(x_1^B\right)^b\left(x_2^B\right)^{1-b}$
- 交易者A的禀赋为$\omega^A=\left(\omega_1^A, \omega_2^A\right)$，交易者B的禀赋为$\omega^B=\left(\omega_1^B, \omega_2^B\right)$
- 求一般均衡

一个简单的例子

- 我们首先给出一个路线图
- 第一步：假定价格(p_1, p_2)是给定的，求解两个交易者带有禀赋的效用最大化问题，解出对两商品的需求函数
- 第二步：通过需求函数，解出商品1的超额需求
- 第三步：令超额需求等于0，可解出商品1的价格（以商品2的价格来表示，当然，可以假定商品2的价格为1）
- 第四步：有了价格，带入就可求出两个交易者商品1、商品2各自的需求

一个简单的例子

- 解效用最大化问题，求出需求函数

$$x_1^A = \frac{a\left(p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A\right)}{p_1}, x_2^A = \frac{(1-a)\left(p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A\right)}{p_2}$$

$$x_1^B = \frac{b\left(p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B\right)}{p_1}, x_2^B = \frac{(1-b)\left(p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B\right)}{p_2}$$

- 商品1的超额需求函数为

$$z_1 = x_1^A + x_1^B - \omega_1^A - \omega_1^B$$

- 令$p_2 = 1$,

$$z_1 = \frac{a\left(p_1\omega_1^A + \omega_2^A\right)}{p_1} + \frac{b\left(p_1\omega_1^B + \omega_2^B\right)}{p_1} - \omega_1^A - \omega_1^B = 0$$

一个简单的例子

- 解得

$$p_1^* = \frac{a\omega_2^A + b\omega_2^B}{(1-a)\,\omega_1^A + (1-b)\,\omega_1^B}$$

- 将$(p_1^*，1)$带入需求函数可求得均衡时的需求量
- 这就是求解交换经济的一般均衡的基本方法

一般均衡解时的MRS

- 注意到，一般均衡时两交易者在价格体系(p_1, p_2)时同时满足效用最大化
- 因此，$MRS_A = -\frac{p_1}{p_2} = MRS_B$
- 这也是我们在图上看到的均衡时无差异曲线相切

一般均衡存在吗?

- 我们前面已经在假定一般均衡存在的基础上，尝试求解了一个特殊的一般均衡，也分析了交换经济一般均衡会具有哪些简单的性质
- 然而，我们甚至还没有解答一个问题：一般均衡究竟是否存在
- 如本章开头所述，一般均衡各商品之间的关系错综复杂，牵一发而动全身，真的一定能找到一组价格使得一般均衡能成立吗?
- 在这里，我们就介绍性的给大家证明在较为常见的情况下，交换经济的一般均衡时存在的
- 这里，我们需要假定，超额需求函数是连续的

一个错误的证明

- 在瓦尔拉斯分析一般均衡时，就讨论过一般均衡的存在性问题
- 他指出，令超额需求函数等于0所构成的方程组有$n-1$个方程和$n-1$个未知价格
- 因此，该方程组有唯一解
- 根据线性代数（甚至初中数学），这显然是错误的
- 瓦尔拉斯甚至找到了一种迭代算法去找均衡解（当超额需求函数不是那么简单时可能很难直接通过解方程组去求解）
- 瓦尔拉斯的证明是错误的，但他的结论是正确的

一个错误的证明

- 在瓦尔拉斯分析一般均衡时，就讨论过一般均衡的存在性问题
- 他指出，令超额需求函数等于0所构成的方程组有$n-1$个方程和$n-1$个未知价格
- 因此，该方程组有唯一解
- 根据线性代数（甚至初中数学），这显然是错误的
- 瓦尔拉斯甚至找到了一种迭代算法去找均衡解（当超额需求函数不是那么简单时可能很难直接通过解方程组去求解）
- 瓦尔拉斯的证明是错误的，但他的结论是正确的

正确的证明方法

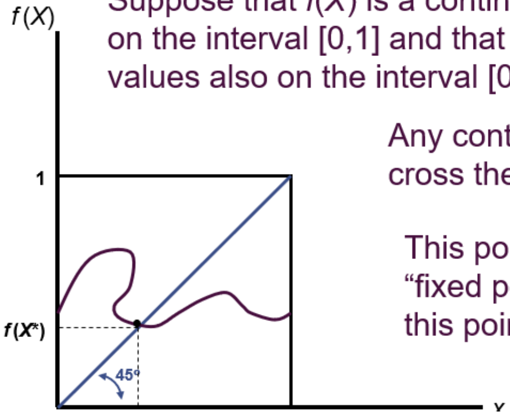
- 在瓦尔拉斯之后，很长一段时间，经济学家一直试图去证明一般均衡的存在性
- 然而，受当时数学发展的限制，这个问题以当时的数学技术实际是无解的
- 即使如我们本节课所学的最简单的一般均衡问题也根本无从解答
- 到20世纪以后，随着拓扑学的发展，几个不动点定理的提出，才使一般均衡存在性的证明成为可能

布劳威尔不动点定理

- 定理：设$f : B^n \to B^n$是n维球体$B^n = \{x \in R^n : \|x\| \leq r, r > 0\}$到自身的一个连续映射，则有$x \in B^n$使得$f(x) = x$，即$f$必有不动点
- 通俗来说，就是假如拿一个实心球（这是三维的概念，二维是圆盘，四位以上就需要抽象的想象了），找到一个对应，让球上的每个点都与球上的一个点对应，且对应的关系是连续的。则至少有一个点是对应到自身
- 实例（旋转杯子，地球自转的自转轴）
- 事实上，布劳威尔不动点定理可以拓展到很多形式，如扩展到一个有界闭凸集上。

布劳威尔不动点定理

Suppose that $f(X)$ is a continuous function defined on the interval [0,1] and that $f(X)$ takes on the values also on the interval [0,1]



Any continuous function must cross the 45° line

This point of crossing is a "fixed point" because f maps this point (X^*) into itself

一般均衡存在性证明

- 我们首先要将价格变为一个有界集，因为是相对价格，我们可以进行变换，令价格的加总值为1

$$p_i^{'} = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

- 这样，

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{'} = 1$$

- 我们假定所有可选价格的集合为S，S是由所有元素之和为1的n维非负向量组成的集合
- 可以证明，S是有界闭凸集
- 我们接下来需要在S上定义映射

一般均衡存在性证明

- 我们这里稍稍更改一下我们前面对可行配置的定义
- 事实上，可行配置并不一定要求所有市场一定正好是0超额需求
- 超额供给（负的超额需求）也不是完全不能接受的事
- 当然，这只能建立在某种商品的价格为0（比如人有魇足且商品可以免费处置的基础上）
- 这个假设只是为了证明方便，并不代表均衡时一定会出现这种0价格超额供给

一般均衡存在性证明

- 这样，我们的均衡条件稍稍改变，变成了

$$z_i(P) = 0, \text{当} p_i > 0$$

$$z_i(P) \leq 0, \text{当} p_i = 0$$

- 我们定义一个映射$F(P), P \in S$，满足

$$F^i(P) = \max\{p_i + z_i(P), 0\}$$

- 这个映射的含义很直白，给定一组价格，有超额需求（超额需求函数为正值）就提价，有超额供给（超额需求函数为负值）就降价。但要保证价格非负

一般均衡存在性证明

- 但并没有结束，刚才的映射没有保证映射之后的价格之和为1
- 当然，这样的单位化很简单，令

$$G^i(P) = \frac{F^i(P)}{\sum_{i=1}^{n} F^i(P)}$$

- 则$G(P)$就是从S到S的连续映射。因此，必然存在一组价格P^*满足$P^* = G(P^*)$

一般均衡存在性证明

- 根据我们刚才定义的映射。

$$p_i^* = p_i^* + z_i(P^*), \text{当} p_i^* > 0$$

$$p_i^* + z_i(P^*) \le 0, \text{当} p_i^* = 0$$

- 因此,

$$z_i(P^*) = 0, \text{当} p_i^* > 0$$

$$z_i(P^*) \le 0, \text{当} p_i^* = 0$$

- 所以，P^*使经济处于均衡，证明至少存在一组价格使一般均衡成立。

福利经济学第一定理（在本章所述交换经济下的表述）

- 福利经济学第一定理：当消费者的偏好性状良好，且市场处于完全竞争的环境下，一般均衡是帕累托最优的
- 这只是福利经济学第一定理在特定环境下的一种形式

福利经济学第一定理的证明

- 我们用反证法来证明这一定理
- 假定一般均衡解时价格为(p_1, p_2)，A和B的选择为(x_1^A, x_2^A)，(x_1^B, x_2^B)
- 如果不是帕累托最优，意味着可以找到以可行分配(y_1^A, y_2^A)，(y_1^B, y_2^B)，满足$y_1^A + y_1^B = \omega_1^A + \omega_1^B$，$y_2^A + y_2^B = \omega_2^A + \omega_2^B$，且

$$\left(y_1^A, y_2^A\right) \succ_A \left(x_1^A, x_2^A\right)$$

$$\left(y_1^B, y_2^B\right) \succ_B \left(x_1^B, x_2^B\right)$$

福利经济学第一定理的证明

- 在市场均衡时，A选择了(x_1^A, x_2^A)却没选择更偏好的(y_1^A, y_2^A)意味着

$$p_1 y_1^A + p_2 y_2^A > p_1 \omega_1^A + p_2 \omega_2^A$$

- 同理对B

$$p_1 y_1^B + p_2 y_2^B > p_1 \omega_1^B + p_2 \omega_2^B$$

- 两式相加可得

$$p_1 \left(y_1^A + y_1^B \right) + p_2 \left(y_2^A + y_2^B \right) > p_1 \left(\omega_1^A + \omega_1^B \right) + p_2 \left(\omega_2^A + \omega_2^B \right)$$

- 然而根据$y_1^A + y_1^B = \omega_1^A + \omega_1^B$，$y_2^A + y_2^B = \omega_2^A + \omega_2^B$，两者应当相等，矛盾。假设错误，所以一般均衡必然是帕累托最优

福利经济学第一定理的意义

- 福利经济学第一定理表示在一定的环境下，竞争性均衡形成的结果一定是有效率的
- 因此，从效率的角度说，如果是竞争性均衡，是不需要政府来干涉的
- 这就是对“看不见的手”的一种相对现代的解释
- 但要注意两点：第一，并不是所有市场的均衡都符合这一条件，有些市场完全可能是无效率的
- 第二，有效率的结果不一定是所有人都想要的，不一定公平。如一方非常富有，另一方很贫穷

福利经济学第二定理

- 针对刚才注意的第二点，我们很容易提出一个问题：是否所有的帕累托有效率的结果均可通过禀赋的再分配后通过一般均衡实现?
- 答案是肯定的，这就是福利经济学第二定理：当消费者的偏好性状良好，且市场处于完全竞争的环境下，每一个帕累托有效率配置都可以通过竞争性均衡实现。
- 然而福利经济学第二定理的证明比较复杂，超过了所有中级水平课程所能接受的程度，所以我们不在这里证明
- 总的来说，福利经济学第二定理表明在竞争性经济下，如果政府认为最终的结果不够公平，最有效的办法并非是在经济活动中间干预市场（可能导致效率损失），而是改变最初的条件（如禀赋），市场自然就会实现政府希望的结果并且保证结果是有效率的
- 当然，这种分配初始条件的办法是非常困难的

帕累托有效率配置的微积分分析

- 当交换经济处于帕累托有效率配置的情况下，显然一个必要条件是保证当前B的效用，A的效用要尽可能大
- 假定B的效用是$\overline{u}$，则A的最大化问题是（注意，我们只考虑交换，暂时未引入价格）

$$\max_{x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B} u_A\left(x_1^A, x_2^A\right)$$

满足

$$u_B\left(x_1^B, x_2^B\right) = \overline{u}$$

$$x_1^A + x_1^B = \omega_1^A + \omega_1^B$$

$$x_2^A + x_2^B = \omega_2^A + \omega_2^B$$

帕累托有效率配置的微积分分析

- 建立拉格朗日函数

$$L = u_A\left(x_1^A, x_2^A\right) + \lambda\left(\overline{u} - u_B\left(x_1^B, x_2^B\right)\right)$$

$$+\mu_1\left(\omega_1^A + \omega_1^B - x_1^A - x_1^B\right) + \mu_2\left(\omega_2^A + \omega_2^B - x_2^A - x_2^B\right)$$

- 通过求一阶条件并分析一阶条件，我们可以得到

$$MRS_A = MRS_B = -\frac{\mu_1}{\mu_2}$$

- 因此，同前面的分析结合

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

- 这再次说明为什么拉格朗日乘子又被称作影子价格
- 注意这种方法也可以帮助我们也找到了契约曲线的表达式，可以用更简单的方法$L =$ $u_A\left(x_1^A, x_2^A\right) + \lambda\left(\overline{u} - u_B\left(\omega_1^A + \omega_1^B - x_1^A, \omega_2^A + \omega_2^B - x_2^A\right)\right)$