第四章 随机变量的数字特征

【内容预览】

- 数学期望
  - 计算公式
    - 离散型
      - 一维
        - $EX=\sum_{i} x_i p_i$
        - $E\varphi(X)=\sum_{i}\varphi(x_i)p_i$
      - 二维：$E[\varphi(X,Y)]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(x_i,y_j)p_{ij}$
    - 连续型
      - 一维
        - $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$
        - $E\varphi(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx$
      - 二维：$E[\varphi(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)f(x,y)dxdy$
  - 性质
    - (1)常数的期望不变：$EC=C$，特别地：$E(EX)=EX$
    - (2)线性性质：如果EX和EY都存在，则$E(aX+bY)=aEX+bEY$
    - (3)如果EX存在，则$E(kX)=kEX$
    - (4)若X,Y相互独立，且期望都存在，则$E(XY)=EXEY$
- 方差
  - 计算公式：$DX=E(X-EX)^2=E(X^2)-(EX)^2$
  - 性质
    - (1)常数的方差为零：$DC=0$
    - (2)$DX\geq 0\Rightarrow E(X^2)\geq(EX)^2$
    - (3)$D(aX+b)=a^2DX$
    - (4)$D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2Cov(X,Y)$
    - (5)若X,Y相互独立，则$D(X\pm Y)=DX+DY$
    - (6)$DX=E(X-EX)^2\leq E(X-c)^2$
- 协方差
  - 计算公式：$Cov(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)=E(XY)-EXEY$
  - 其中$E(XY)=\begin{cases}\sum_{i}\sum_{j}x_iy_jP\{X=x_i,Y=y_j\} & \text{(离散型)}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy & \text{(连续型)}\end{cases}$
  - 性质
    - (1)$Cov(X,X)=DX$
    - (2)$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
    - (3)$Cov(X,C)=0$（C是常数）
    - (4)$Cov(aX+bY,Z)=aCov(X,Z)+bCov(Y,Z)$
- 相关系数
  - 计算公式：$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$，$|\rho_{XY}|\leq 1$
  - 性质
    - (1)$|\rho_{XY}|=1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1$
    - (2)$\rho_{XY}=0\Leftrightarrow X,Y$不相关$\Leftrightarrow$
      - (1)$Cov(X,Y)=0$
      - (2)$E(XY)=EXEY$
      - (3)$D(X\pm Y)=DX+DY$
    - (3)若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$X,Y$独立与$X,Y$不相关等价

【知识清单】

4.1、数学期望

1. 一维随机变量的数学期望

离散型：设$P\{X=x_i\}=p_i$，则$EX=\sum_i x_i p_i$；更一般地，若$Y=\varphi(X)$，则$EY=\sum_i \varphi(x_i)p_i$
连续型：设$X\sim f(x)$，则$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$；更一般地，若$Y=\varphi(X)$，则$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx$

2. 二维随机变量的数学期望

离散型：设$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，$Z=\varphi(X,Y)$，则$EZ=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(x_i,y_j)p_{ij}$
连续型：设$(X,Y)\sim f(x,y)$，令$Z=\varphi(X,Y)$，则$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)f(x,y)dxdy$

陷阱：不是所有的随机变量都存在期望，例如：柯西分布：$X\sim f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$

事实上，对于离散型随机变量，只有$\sum_i |x_i|p_i<+\infty$时，即序列$\{x_i p_i\}$绝对收敛时，其数学期望才存在；对于连续型随机变量，对于数学期望以及各阶矩，定义的前提是$\int_{-\infty}^{\infty}|x^k|f(x)dx<\infty$，其中$k$为距的阶数，也即绝对可积.

3. 数学期望的性质

（1）常数的期望不变: $E(C)=C$ （C是任意常数）

（2）如果X的期望存在，则$E(kX)=kEX$ （k是任意常数）

（3）线性性质:如果X和Y的期望都存在，则$E(aX+bY)=aEX+bEY$

（4）设随机变量X,Y相互独立，且期望都存在，则$EXY=EXEY$

技巧：1.由性质一可得：$E(EX)=EX$

2.由性质二和性质三可得：$E(k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_nX_n)=k_1EX_1+k_2EX_2+\cdots+k_nEX_n$

3.性质四的逆命题不正确，$EXY=EXEY$不能得出X和Y独立的结论

4.在计算期望时，如果区间是关于0对称的，一定要考虑奇偶性.

5.在计算正态分布的各阶中心距时利用Gamma函数能够降低计算量：

6.实数域上的Gamma函数定义为：$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$. 其有以下性质：

（1）$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.（2）$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.（3）$\Gamma(n)=(n-1)!$.

4.2、方差

方差是用来度量随机变量和其数学期望（即均值）之间的偏离程度，其定义为:

$$DX = Var(X) = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

从方差的定义可以看出，只有当随机变量的期望存在时，其方差才可能存在.（有些随机变量的期望存在，但是方差不存在），此外我们定义 $\sqrt{DX}$ 为 X 的标准差，并称随机变量 $X^* = \dfrac{X - EX}{\sqrt{DX}}$ 为 X 的标准化随机变量，在学完方差的性质后，很容易证明：$E(X^*) = 0$，$D(X^*) = 1$.

方差具有以下几个性质：

（1）常数的方差为零:$DC = 0$，因此 $D(EX) = 0$

（2）方差的非负性：$DX \geq 0$，因此根据方差的公式：$E(X^2) \geq (EX)^2$

（3）若 X,Y 相互独立，且方差均存在，则 $D(X \pm Y) = DX + DY$

（4）若 X 的方差存在，则 $D(aX + b) = a^2 DX$（a,b 为常数）

（5）若 X,Y 的方差均存在,则 $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2Cov(X,Y)$

（6）若 X,Y 相互独立，则 $D(X \pm Y) = DX + DY$，$D(XY) = DX \cdot DY + DX \cdot (EY)^2 + DY \cdot (EX)^2 \geq DX \cdot DY$

（7）对于任意的常数 c，均满足：$DX = E(X - EX)^2 \leq E(X - c)^2$

4.3、常见随机变量的数学期望及方差

分布	分布律（分布函数、密度函数）	数学期望	方差
$X \sim B(n,p)$ （二项分布）	$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0,1,2\cdots,n)$	np	$np(1-p)$
$X \sim P(\lambda)$ （泊松分布）	$P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $(k = 0,1,2,\cdots)$	λ	λ
$X \sim G(p)$ （几何分布）	$P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}$ $(k = 1,2,\cdots)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
$X \sim U(a,b)$ （均匀分布）	$f(x) \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a < x < b \\ 0,\text{其他} \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \leqslant x < b \\ 1, x \geqslant b \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
$X \sim E(\lambda)$ （指数分布）	$f(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \geqslant 0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ （正态分布）	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
$\chi^2(n)$ （卡方分布）	概率密度函数、分布函数不作要求	n	$2n$

4.4、协方差与相关系数

1.协方差

1.定义——X与Y之间的协方差$Cov(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)$；（注：协方差也可用小写字母表示$cov(X,Y)$）

2.计算公式: $Cov(X,Y)=EXY-EXEY$

$$\text{其中} E(XY)=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j x_i y_j P\{X=x_i,Y=y_j\} & (\text{离散型})\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dx\,dy & (\text{连续型})\end{cases}$$

3.协方差的性质

（1）$Cov(X,X)=DX$；（2）$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$；（3）$Cov(X,C)=0$（C是常数）

（4）$Cov(aX+bY,Z)=aCov(X,Z)+bCov(Y,Z)$；（5）$Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$；

（6）若X,Y的协方差为0，则$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY$.

2.相关系数

1.定义——X与Y之间的相关系数$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$，若$\rho_{XY}=0$，称$X,Y$不相关；若$\rho_{XY}>0$，称$X,Y$正相关；若$\rho_{XY}<0$，称$X,Y$负相关.

2.相关系数的性质

（1）$|\rho_{XY}|\leqslant 1$

（2）$\rho_{XY}=0$的充分必要条件是$EXY=EXEY$，即$Cov(X,Y)=0$

（3）$\rho_{XY}=1$的充分必要条件是$P\{Y=aX+b\}=1(a>0)$

（4）$\rho_{XY}=-1$的充分必要条件是$P\{Y=aX+b\}=1(a<0)$

（5）若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$X,Y$独立与$X,Y$不相关等价

☞技巧：协方差$Cov(X,Y)$是描述随机变量X与Y之间偏差的关联程度的，相关系数ρ_{XY}是描述随机变量X与Y之间的线性相依性，$|\rho_{XY}|$的大小是刻画X和Y之间线性相关程度的一种度量，$\rho_{XY}=0$只能说明X与Y之间不存在线性关系，但是它们之间可能还存在某些非线性关系.

假设相关系数ρ_{XY}存在，当X与Y相互独立时，可以得到X与Y不相关. 但当X与Y不相关时，X与Y却不一定相互独立. 这是因为“不相关”是就线性关系来说的，但是“相互独立”是就一般关系来讲的.

【重要题型】

题型 1：离散型随机变量的数字特征

例 4-1：设随机变量$X\sim B(2,0.1)$，则$E(2^X)=$________.

解：$E(2^X)=0.9^2\times 2^0+C_2^1\times 0.9\times 0.1\times 2^1+0.1^2\times 2^2=1.21$

例 4-2：设离散型随机变量X_1,X_2都只取 -1 和 1，且满足$P(X_1=-1)=0.5$，$P(X_2=-1|X_1=-1)=P(X_2=1|X_1=1)=\dfrac{1}{3}$.

（1）求(X_1,X_2)的联合概率函数；（2）求概率$P(X_1+X_2=0)$；（3）分别求X_1与X_2的协方差和相关系数$Cov(X_1,X_2),\rho(X_1,X_2)$.

解：（1）$P(X_2=-1|X_1=-1)=\dfrac{P(X_2=-1,X_1=-1)}{P(X_1=-1)}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow P(X_2=-1,X_1=-1)=\dfrac{1}{6}$

$P(X_2=1,X_1=-1)=P(X_1=-1)-P(X_2=-1,X_1=-1)=\dfrac{1}{3}$.

同理可得$P(X_2=1,X_1=1)=\dfrac{1}{6},P(X_2=-1,X_1=1)=\dfrac{1}{3}$.

X_1 \ X_2	-1	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

（2）$P(X_1+X_2=0)=P(X_1=-1,X_2=1)+P(X_1=1,X_2=-1)=\dfrac{2}{3}$

（3）$E(X_1)=0,E(X_2)=0$. $E(X_1X_2)=1\times\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}\right)-1\times\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$

$Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=-\dfrac{1}{3}$.

$D(X_1)=E(X_1{}^2)-[E(X_1)]^2=1\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{1}{2}=1$；同理，$D(X_2)=1$.

$$\rho_{X_1X_2}=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)D(X_2)}}=-\frac{1}{3}.$$

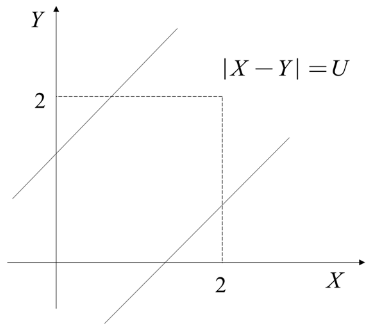
题型 2：连续型随机变量的数字特征

例 4-3：设随机变量(X,Y)服从区域$G=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$上的均匀分布，$U=|X-Y|$，求（1）$U$的概率密度$f_U(u)$；（2）$U$的期望$EU$和方差$DU$。

解：（1）$F_U(u)=P(U\le u)=P(|X-Y|\le u)$，当$u\le 0$时，$F_U(u)=0$，当$u\ge 2$时，$F_U(u)=1$；

当$0<u<2$时，由$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0\le x,y\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$，

$$F(u)=\iint_A \frac{1}{4}dxdy=S_A\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times 2\times\left(\frac{\sqrt{2}(2-u)+2\sqrt{2}}{2}\times\frac{u}{\sqrt{2}}\right)$$



$$=\frac{(4-u)u}{4}\qquad 所以 f(u)=F'(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-u), & 0<u<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

（2）$EU=\int_0^2 \frac{u(2-u)}{2}du=\frac{2}{3}$; $EU^2=\int_0^2\frac{u^2(2-u)}{2}du=\frac{2}{3}$,

$$DU=EU^2-[EU]^2=\frac{2}{9}.$$

例 4-4：设随机变量 X 的概率密度为$f(x)$，$x\in R, DX=2$，而随机变量Y 的概率密度为$f(-y)$，它们的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{4}$，记$Z=X+Y$，求EZ,DZ.

解：$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(-y)dy\overset{y=-x}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}-xf(x)dx=-EX\quad\therefore EZ=E(X+Y)=EX+EY=0$

$$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(-y)dy\overset{y=-x}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=E(X^2)$$

$$DY=E(Y^2)-(EY)^2=E(X^2)-(-EX)^2=DX$$

$$DZ=D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)=DX+DY+2\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=\frac{3}{2}DX=3$$

例 4-5：随机变量X,Y 相互独立，均服从参数为λ的指数分布，试求（1）$Z=X+Y$ 的概率密度函数 （2）EZ,DZ （3）ρ_{XZ}

解：（1）$F(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}\lambda^2(e^{-\lambda x}e^{-\lambda y})dy=1-(1+\lambda z)e^{-\lambda z}$

$$f_Z(z)=F'(z)=\begin{cases}\lambda^2 ze^{-\lambda z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

（2）$EZ=E(X+Y)=EX+EY=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}=\frac{2}{\lambda}$

$$DZ=D(X+Y)=DX+DY=\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}$$

（3）$Cov(X,Z)=Cov(X,X+Y)=Cov(X,X)+Cov(X,Y)=DX$，$\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

题型 3：利用随机变量的性质计算数字特征

例 4-6：设随机变量 X,Y 相互独立,且 X 服从区间[0,2]上的均匀分布，Y 服从参数为 3 的指数分布，则 $E(XY)=$__________.

解：X,Y 相互独立，有 $E(XY)=EX\times EY=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

例 4-7：设 X,Y 是随机变量，相关系数为 0.4，$EX=2,DX=25,EY=1,DY=16$. 则 $E(2X-3Y+4)^2=$__________.

解：$E(2X-3Y+4)^2=E(4X^2+9Y^2-12XY)+16+16EX-24EY$

$=4EX^2+9EY^2-12EXY+16+16EX-24EY$

$=4\times29+9\times17-12\times10+16+16\times2-24=173$

例 4-8：对于任意两个随机变量 X 和 Y，若 $E(XY)=EXEY$，则（　　）.

A. X,Y 相互独立；　　B. X,Y 不相互独立；

C. $D(XY)=DX\cdot DY$；　　D. $D(X+Y)=DX+DY$.

解：$D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)$, $Cov(x,y)=EXY-EXEY$,而 $E(XY)=EXEY$，所以 $Cov(X,Y)=0$, $D(X+Y)=DX+DY$.答案选 D

例 4-9：已知 $D(X)=4$，$D(Y)=1$，$D(X+Y)=4$，$D(X-Y)=$__________.

解：$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=4\Rightarrow 2Cov(X,Y)=-1$

$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)=6$

例 4-10：设随机变量 X 和 Y 的方差存在且不等于0，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ 是 X 与 Y（　　）.

A、不相关的充分不必要条件　　B、不相关的充分必要条件

C、独立的充分不必要条件　　D、独立的充分必要条件

解：充分性：$D(X+Y)=DX+DY+Cov(X,Y)\Rightarrow Cov(X,Y)=0\Rightarrow X$ 与 Y 不相关

必要性：X 与 Y 不相关 $\Rightarrow Cov(X,Y)=0\Rightarrow D(X+Y)=D(X)+D(Y)$，因此选择 B 选项

题型 4：协方差和相关系数

例 4-11：设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$ 是一个偶函数，令 $Y=X^2$.假定 EX,EY 都存在，求证明 $Cov(X,Y)=0$.

解：由于概率密度函数为偶函数，x^3，x 为奇函数，它们各自与概率密度函数的乘积为奇函数，无穷积分为 0，故 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)x^3\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)x^2\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}f(x)x\,\mathrm{d}x=0$

$$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=E(X^3)-EXE(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)x^3\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)x^2\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}f(x)x\mathrm{d}x=0$$

例 4-12：设θ服从$[-\pi,\pi]$上的均匀分布，又$X=\sin\theta$，$Y=\cos\theta$，则X与Y的相关系数$\rho_{XY}=$__________.

解：$EX=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\theta}{2\pi}=0$，$EXY=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\theta\cos\theta}{2\pi}d\theta=0$，故$\rho_{XY}=EXY-EXEY=0$.

例 4-13：将长度为 1m 的木棒随机地截成两端，则两端长度的相关系数为（　　）.

A、1　　B、$\frac{1}{2}$　　C、$-\frac{1}{2}$　　D、-1

解：设一段为X，另一段为Y, 则有$X+Y=1\Rightarrow Y=1-X$, 相关系数为-1

例 4-14：如果存在常数$a,b(a\neq0)$,使$P(Y=ax+b)=1$,且$0<DX<+\infty$，则$\rho_{XY}=$________.

解：由题意:$Y=aX+b$ 成线性关系，

$a>0$时，X,Y正相关，所以$\rho=1$. $a<0$时，X,Y负相关，所以$\rho=-1$. 则$\rho_{XY}=\begin{cases}1 & a>0\\-1 & a<0\end{cases}$

题型 5：正态分布的数字特征

例 4-15：设两个随机变量X,Y相互独立，且它们都服从于均值为 0，方差为 0.5 的正态分布，求$|X-Y|$的数学期望与方差.

解：由条件可知，$X-Y\sim N(0,1)$，则$E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$$E(|X-Y|^2)=D(X-Y)+[E(X-Y)]^2=1$$

$$D(|X-Y|)=E(|X-Y|^2)-[E|X-Y|]^2=1-\frac{2}{\pi}$$

例 4-16：已知随机变量$X\sim N(0,1),Y\sim N(1,4)$，且$X$与$Y$的相关系数为$-\frac{1}{3}$，设$Z=2X+3Y$，则$X$与$Z$的相关系数$\rho_{XZ}=$______________.

解：$$\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,2X+3Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Z)}}=\frac{2Cov(X,X)+3Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Z)}}=\frac{2\times1+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times1\times2}{\sqrt{D(X)\cdot D(Z)}}=0$$

例 4-17：设二维随机变量$(X,Y)\sim(1,3;\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2;0)$，则$E(XY)=$__________.

解：由$\rho=0$得$Cov(X,Y)=0$，即X与Y不相关，根据二维正态分布的性质由此能够推出X与Y相互独立，

则有$E(XY)=E(X)E(Y)=1\times3=3$

题型 6：判断独立性与相关性

例 4-18：已知随机变量X,Y独立同分布，记$U=X-Y,V=X+Y$, 则U,V必(　　).

A．不独立； B.独立； C．相关系数不为 0； D．相关系数为 0.

解：$EU=E(X-Y)=EX-EY=0, EV=E(X+Y)=2EX$,

$E(UV)=E(X-Y)(X+Y)=E(X^2)-E(Y^2)=0$

$\rho(U,V)=\dfrac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}$,$Cov(U,V)=EUV-EUEV=0$

因为题中并未指出具体的分布，所以无法判断是否独立，所以只能选择D

例 4-19：在区间$[0.5,1]$中任取一个值x，再在区间$[-x,x]$中任取一个值y，构成二维随机变量(X,Y).

（1）求(X,Y)的联合密度函数$f(x,y)$，关于 Y 的边缘密度函数$f_Y(y)$，并判断 X,Y 是否独立；

（2）求$Cov(X,Y)$，并据此判断X,Y是否相关.

解：（1）(X,Y)的取值区域：$0.5<x<1, -x<y<x$ ；

(X,Y)的联合密度函数：$f(x,y)=f(x)f(y|x)=\dfrac{1}{0.5}\times\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{x}$

关于 Y 的边缘密度函数：$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_y^1\frac{1}{x}dx=-\ln y & 0.5\leqslant y<1\\ \displaystyle\int_{0.5}^1\frac{1}{x}dx=\ln 2 & -0.5\leqslant y<0.5\\ \displaystyle\int_{-y}^1\frac{1}{x}dx=-\ln(-y) & -1\leqslant y<-0.5\end{cases}$ ，

$f_X(x)=\displaystyle\int_{-x}^{+x}\frac{1}{x}dy=2$ ， $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ 故 X 与 Y 不独立

（2）$EX=\displaystyle\int_{0.5}^1 2xdx=\frac{3}{4}$,$EY=\displaystyle\int_{-0.5}^{+0.5}y\ln 2dy-\int_{-1}^{-0.5}y\ln(-y)dy-\int_{0.5}^{+1}y\ln ydy$

$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=EXY=\displaystyle\int_{0.5}^1\int_{-x}^{+x}xy\times\frac{1}{x}dxdy=0$，所以 X，Y 不相关

题型 7：与期望方差有关的应用题

例 4-20：某商店销售某商品，知销售量在$(50,100)$上服从均匀分布，若每销售一单位获利 500 元，如果需求量大于进货量，可以从其他部门调剂，此时每单位获利 300 元，如果有积压，则每单位亏损200 元.问：进货量多少时，平均获利最大？最大为多少？

解：设需求量为 X，则$f(x)=\dfrac{1}{50}$,$x\in(50,100)$,进货量为 n,获利为 Y,则

$$Y=g(X)=\begin{cases}500n+300(X-n)=300X+200n & n\leqslant X\\ 500X-200(n-X)=700X-200n & n>X\end{cases}$$

$$EY=\int_{50}^{100}g(x)f(x)dx=\frac{1}{50}\left(\int_{50}^{n}(700x-200n)dx+\int_{n}^{100}(300x+200n)dx\right)$$

$$=\frac{1}{50}(-200n^2+30000n+625000)=-4n^2+600n+12500$$

$(EY)'=-8n+600=0\Rightarrow n=75, EY_{\max}=35000.$

【精选习题】

基础篇

1.设随机变量X在[-1,2]上服从均匀分布，随机变量$Y=\begin{cases}1 & X>0\\ 0 & X=0\\ -1 & X<0\end{cases}$，则$DY=$__________.

2.从长度为 3 的线段上任取两点，则两点间距离的期望是_______ ,方差是__________.

3.设 X 服从参数为λ的泊松分布，且$E[(X-1)(X-2)]=1$，则$EX^2=$__________.

4.掷硬币 2 次，正面出现的次数记为X，反面出现的次数记为 Y，则 X 与 Y 的相关系数等于__________.

5.二维随机变量(X,Y)~$N(1,1,4,9,-0.5)$,$Z=\frac{1}{2}X-\frac{1}{3}Y$,则$Z$ 的方差DZ=__________.

6.设随机变量X 和Y 的分布列分别为：

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且$P(X^2=Y^2)=1$，求

（1）二维随机变量(X,Y)的概率分布；（2）$Z=XY$的概率分布；（3）X 与Y 的相关系数ρ_{XY}.

7.设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-y}, & 0<x<y\\ 0, & 其他\end{cases}$，求：

（1）$Z=X+Y$ 的概率密度；（2）$N=\min(X,Y)$的概率密度；（3）EZ和EN.

8.设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数$f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0, & 其他\end{cases}$.求：

（1）X的边缘密度函数$f_X(x)$.（2）$P(X+Y<1)$.（3）$Cov(X,Y)$.

9.已知随机变量X,Y分别服从正态分布$N(1,3^2)$,$N(0,4^2)$，且X,Y的相关系数为$\rho=\frac{1}{2}$，设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，求

（1）Z的数学期望与方差.（2）X,Z的相关系数ρ_{XZ}.

10.假定国际市场每年对我国某种商品的需求量是一个随机变量X（单位：吨），它服从$[2000,4000]$上的均匀分布.已知每售出一吨该商品，就可以赚得外汇 3 万美元，但若销售不出，则每吨需仓储费1万美元.那么，外贸部门每年组织多少资源，才能使得期望收益达最大？

提高篇

11.随机变量X,Y均服从标准正态分布，则$E[\max(X,Y)+\min(X,Y)]=$（　　）.

A、0；　　B、1；　　C、$-\frac{1}{\sqrt{p}}$；　　D、$\frac{1}{\sqrt{p}}$.

12.设$X_1,X_2,\cdots,X_5$为总体$N(1,4)$的样本，则$P(X_{(5)}<3)=$__________；$Cov\left(X_1,\bar{X}\right)=$__________.其中$X_{(5)}=\max(X_1,X_2,\cdots,X_5)$。

13.设相互独立的随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$在区间$(0,\theta)$上服从均匀分布，试求：$M=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$和$N=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$的数学期望.

14.2013年的红牛CNBA联赛决赛在开封雄狮队和宁波南虎队之间进行，决赛采取五局三胜制（三局先胜后比赛终止），由以往的数据表示，两支队伍的胜率相同；第一局雄狮队胜.

（1）求南虎队取得冠军的概率.

（2）若一场比赛的收入为160万元，胜利的队可以分得120万，其余归失败的队，求南虎队收入的数学期望.

15. 在区间$[0,1]$上任取n个点$X_1,X_2,\cdots,X_n$，记$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，$X=X_{(n)}-X_{(1)}$.求$EX$.