《概率论与数理统计》期末考试试题（A）

专业、班级：________________ 姓名：__________ 学号：___________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	总成绩
得 分													

一、单项选择题(每题 3 分 共 18 分)

1．D 2．A 3．B 4．A 5．A 6．B

（1）若事件 A、B 适合 $P(AB)=0$，则以下说法正确的是 (　　).

(A) A 与 B 互斥 (互不相容);

(B) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$;

(C) A 与 B 同时出现是不可能事件;

(D) $P(A)>0$，则 $P(B|A)=0$.

（2）设随机变量 X 其概率分布为

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.1	0.4

则 $P\{X\le 1.5\}=$（　　）。

(A)0.6　　(B) 1　　(C) 0　　(D) $\frac{1}{2}$

（3）

设事件 A_1 与 A_2 同时发生必导致事件 A 发生，则下列结论正确的是（　　）

（A）$P(A)=P(A_1A_2)$　　（B）$P(A)\ge P(A_1)+P(A_2)-1$

（C）$P(A)=P(A_1\cup A_2)$　　（D）$P(A)\le P(A_1)+P(A_2)-1$

（4）

设随机变量 $X\sim N(-3,1)$，$Y\sim N(2,1)$，且 X 与 Y 相互独立，令 $Z=X-2Y+7$，则 $Z\sim$ (　　).

(A) $N(0,5)$;　(B) $N(0,3)$;　(C) $N(0,46)$;　(D) $N(0,54)$.

（**5**）设 $X_{1,}X_2,\cdots,X_n$ 为正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，其中 $\sigma=2,\mu$ 未知，则（　　）是一个统计量。

(A) $\sum_{i=1}^{n}X_i^2+\sigma^2$　　　　(B) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

(C) $\overline{X}-\mu$　　　　(D) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}$

（**6**）设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2),\sigma^2$ 未知。统计假设为 H_0：$\mu=\mu_0$（μ_0已知） H_1：$\mu\neq\mu_0$。 则所用统计量为（　　）

(A) $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$　　　　(B) $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

(C) $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$　　　　(D) $\chi^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

二、填空题

1. $P(B)$　2. $f(x)=\begin{cases}xe^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ ，　$3e^{-2}$　3. -1　4. $t(9)$

5.$(1-e^{-at})1/at,t>0$; $(1-e^{-a(t_1+t_2)})1/a(t_1+t_2)$，$t_1$ 与 $t_2>0$

（**1**）如果 $P(A)>0,P(B)>0,P(A|B)=P(A)$，则 $P(B|A)=$ __________ .

（**2**）设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-(1+x)e^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

则 X 的密度函数 $f(x)=$ ________________ ，$P(X>2)=$ _________ .

（**3**）

设 $\hat\theta_1,\hat\theta_2,\hat\theta_3$ 是总体分布中参数 θ 的无偏估计量,$\hat\theta=a\hat\theta_1-2\hat\theta_2+3\hat\theta_3$,当 $a=$ ________ 时，$\hat\theta$ 也 θ 是的无偏估计量.

（**4**）　设总体 X 和 Y 相互独立,且都服从 $N(0,1)$， $X_1,X_2,\cdots X_9$ 是来自总体 X 的

样本，$Y_1, Y_2, \cdots Y_9$ 是来自总体 Y 的样本，则统计量 $U = \dfrac{X_1 + \cdots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + \cdots + Y_9^2}}$

服从 ________ 分布（要求给出自由度）。

(5)设随机过程 $X(t)=e^{-At}$，$t>0$,其中 A 是在区间（0，a）上服从均匀分布的随机变量，X(t)的均值函数是 ，自相关函数是 。

三、(6 分) 设 A, B 相互独立，$P(A)=0.7$，$P(A\cup B)=0.88$，求 $P(A-B)$.

解： 0.88=$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$ (因为 A, B 相互独立)……..2 分

$=0.7+P(B)-0.7P(B)$ …………3 分

则 $P(B)=0.6$ …………4 分

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$

$=0.7-0.7\times 0.6=0.28$ …………6 分

四、（6 分）某宾馆大楼有 4 部电梯，通过调查，知道在某时刻 T，各电梯在运行的概率均为 0.7，求在此时刻至少有 1 台电梯在运行的概率。

解：用 X 表示时刻 T 运行的电梯数， 则 $X\sim b(4,\ 0.7)$ ………...2 分

所求概率 $P\{X\geq 1\}=1-P\{X=0\}$ …………4 分

$=1-C_4^0(0.7)^0(1-0.7)^4$=0.9919 …………6 分

五、（6 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，

求随机变量 Y=2X+1 的概率密度。

解：因为 $y=2x+1$ 是单调可导的，故可用公式法计算 …………1 分

当 $X\geq 0$ 时，$Y\geq 1$ …………2 分

由 $y=2x+1$， 得 $x=\dfrac{y-1}{2}$， $x'=\dfrac{1}{2}$ …………4 分

从而 Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases} f(\dfrac{y-1}{2})\cdot\dfrac{1}{2} & y\geq 1 \\ 0 & y<1 \end{cases}$ …………..5 分

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{y-1}{2}} & y\ge 1 \\ 0 & y<1 \end{cases}$$ …………..6 分

六、（8 分） 已知随机变量 X 和 Y 的概率分布为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而且 $P\{XY=0\}=1$.

(1) 求随机变量 X 和 Y 的联合分布;

(2)判断 X 与 Y 是否相互独立?

解：因为 $P\{XY=0\}=1$，所以 $P\{XY\neq 0\}=0$

(1)根据边缘概率与联合概率之间的关系得出

X \ Y	-1	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

………….4 分

(2) 因为 $P\{X=0,Y=0\}=0\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

所以 X 与 Y 不相互独立

…………8 分

七、（8 分）设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求：（**1**）$P(0\le X\le 1, 0\le Y\le 2)$；（**2**）求 X 的边缘密度。

解：（1） $P(0\le X\le 1, 0\le Y\le 2)=\int_0^1 dx\int_0^2 12e^{-(3x+4y)}dy$ …………..2 分

$$=\int_0^1 3e^{-3x}dx\cdot\int_0^2 4e^{-4y}dy=\left[-e^{-3x}\right]_0^1\left[-e^{-4y}\right]_0^2$$

$=[1-e^{-3}][1-e^{-8}]$ ………….4 分

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}12e^{-(3x+4y)}dy$ …………..6 分

$$=\begin{cases}3e^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$$ ……………..8 分

八、（6 分）一工厂生产的某种设备的寿命 X（以年计）服从参数为 $\frac{1}{4}$ 的指数分布。工厂规定，出售的设备在售出一年之内损坏可予以调换。若工厂售出一台设备盈利 100 元，调换一台设备厂方需花费 300 元，求工厂出售一台设备净盈利的期望。

解：因为 $X \sim e(\frac{1}{4})$　　得 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$　　…………2 分

用 Y 表示出售一台设备的净盈利

$$Y=\begin{cases}100 & X\ge 1\\ 100-300 & 0<X<1\end{cases}$$　　…………3 分

则　$P(Y=100)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx=e^{-\frac{1}{4}}$

$P(Y=-200)=\int_0^1\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx=1-e^{-\frac{1}{4}}$　　………..4 分

所以　$EY=100\times e^{-\frac{1}{4}}+(-200)\times(1-e^{-\frac{1}{4}})$

$=300e^{-\frac{1}{4}}-200\approx 33.64$（元）　　………..6 分

九、（8 分）设随机变量 X 与 Y 的数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 -0.5，求 $E(2X-Y)$, $D(2X-Y)$。

解：已知 $EX=-2,\quad EY=2,\quad DX=1,\quad DY=4,\quad \rho_{XY}=-0.5$

则　$E(2X-Y)=2EX-EY=2\times(-2)-2=-6$　　……….4 分

$D(2X-Y)=D(2X)+DY-2\operatorname{cov}(2X,Y)$　　……….5 分

$=2DX+DY-4\operatorname{cov}(X,Y)$　　……….6 分

$=2DX+DY-4\sqrt{DX}\sqrt{DY}\rho_{XY}$=12　　…………..8 分

十、（7 分）设供电站供应某地区 1 000 户居民用电，各户用电情况相互独立。已知每户每日用电量（单位：度）服从[0，20]上的均匀分布，利用中心极限定理求这 1 000 户居民每日用电量超过 10 100 度的概率。（所求概率用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 的值表示）.

解：用 X_i 表示第 i 户居民的用电量，则 $X_i \sim U[0,20]$

$$EX_i = \frac{0+20}{2} = 10 \qquad DX_i = \frac{(20-0)^2}{12} = \frac{100}{3} \qquad \text{………2 分}$$

则 1000 户居民的用电量为 $X = \sum_{i=1}^{1000} X_i$，由独立同分布中心极限定理

$$P\{X > 10100\} = 1 - P\{X \le 10100\} \qquad \text{………3 分}$$

$$=1 - P\left\{\frac{X - 1000\times10}{\sqrt{1000\times\frac{100}{3}}} \le \frac{10100 - 1000\times10}{\sqrt{1000\times\frac{100}{3}}}\right\} \qquad \text{………4 分}$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{10100 - 1000\times10}{\sqrt{1000\times\frac{100}{3}}}\right) \qquad \text{……….6 分}$$

$$=1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right) \qquad \text{………7 分}$$

十一、（7 分）设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是取自总体 X 的一组样本值，X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 未知，求 θ 的最大似然估计。

解:　最大似然函数为

$$L(x_1, \cdots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n (\theta+1)x_i^\theta \qquad \text{……….2 分}$$

$$=(\theta+1)^n (x_1, \cdots, x_n)^\theta \qquad \text{……… .3 分}$$

则

$$\ln L(x_1,\cdots,x_n,\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\ln(x_1,\cdots,x_n)$$

$$0<x_1,\cdots,x_n<1$$ ……….4 分

令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\ln(x_1,\cdots,x_n)=0$ ……….5 分

于是θ的最大似然估计：

$$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\ln\ln(x_1,\cdots,x_n)}。$$ ………7 分

十二、（5 分）设某工厂生产工件的直径服从正态分布，要求它们的均值$u=8,\sigma^2\le 0.25$，现检验了一组由 16 只工件，计算得样本均值、样本方差分别$\bar{x}=7.65, s^2=0.49$，试在显著水平$\alpha=0.05$下，对该厂生产的工件的均值和方差进行检验，看它们是否符合标准。

此题中，$t_{0.5}(15)=1.76, t_{0.025}(15)=2.13, \chi_{0.05}{}^2(15)=25, \chi_{0.025}{}^2(15)=27.5,$

解:（1）首先对工件的均值进行检验: H0: $u=8, H_1: u\ne 8$

取统计量为$t=\dfrac{\bar{X}-8}{s/\sqrt{16}}$，可得拒绝域为: $\{|t|=\left|\dfrac{\bar{X}-8}{s/\sqrt{16}}\right|\ge t_{0.025}(15)=2.13\}$ ，

经计算，$t=\dfrac{\bar{x}-8}{s/\sqrt{16}}=\dfrac{7.65-8}{0.7/4}=2<2.13$,不在拒绝域内,因此接受 H0.认为这批工件的均值符合标准。

其次首先对工件的方差进行检验: H0: $\sigma^2\le 0.5^2, H_1:\sigma^2>0.5^2$

取统计量为$\chi^2=\dfrac{(16-1)s^2}{0.5^2}$，可得拒绝域为: $\{\chi^2=\dfrac{15\times 0.49}{0.5^2}\ge\chi^2_{0.05}(15)=25\}$

经计算，$\chi^2=\dfrac{(16-1)s^2}{0.5^2}=29.4>25$,在拒绝域内,因此拒绝 H0.认为这批工件的方差不符合标准。