试　卷　(二)

一、选择题(每题2分,共20分)

1. 已知 $P(B)>0$, $A_1A_2=\varnothing$,则下列各式不正确的是　(　　)

(A) $P(A_1\cup A_2\mid B)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$;

(B) $P(A_1A_2\mid B)=0$;

(C) $P(\overline{A}_1\overline{A}_2\mid B)=1$;

(D) $P(\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\mid B)=1$.

2. 设 A,B,C 是三个相互独立的随机事件,且 $0<P(C)<1$,则下列四对事件中,不相互独立的是　(　　)

(A) $\overline{A\cup B}$ 与 C;　(B) $\overline{A}C$ 与 $\overline{C}$;

(C) $\overline{A-B}$ 与 $\overline{C}$;　(D) $\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$.

3. 设随机变量 X 服从参数为2的指数分布,则随机变量 $Y=1-e^{-2X}$　(　　)

(A) 服从(0, 1)上的均匀分布;(B) 仍服从指数分布;

(C) 服从正态分布;　(D) 服从参数为2的泊松分布.

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立,其分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,则随机变量 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 等于　(　　)

(A) $\max\{F_X(z),F_Y(z)\}$;

(B) $F_X(z)F_Y(z)$;

(C) $\frac{1}{2}[F_X(z)+F_Y(z)]$;

(D) $F_X(z)+F_Y(z)-F_X(z)F_Y(z)$.

5. 随机变量 X,Y 和 $X+Y$ 的方差满足 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ 是 X 与 Y　(　　)

(A) 不相关的充分条件,但不是必要条件;

(B) 不相关的必要条件,但不是充分条件;

(C) 独立的必要条件,但不是充分条件;

(D) 独立的充分必要条件.

6. 设存在常数 a, b $(a \neq 0)$,使得概率 $P(Y = aX + b) = 1$,则必有 ( )

(A) $\rho_{XY} = 1$; (B) $\rho_{XY} = -1$;

(C) $\rho_{XY} = \dfrac{a}{|a|}$; (D) $\rho_{XY} < 1$.

7. 设 X_1, X_2, $\cdots$, X_n, $\cdots$为随机变量序列,a 为常数,则$\{X_n\}$依概率收敛于 a 是指 ( )

(A) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - a| \geqslant \varepsilon) = 0$;

(B) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - a| \geqslant \varepsilon) = 1$;

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = a$;

(D) $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = a) = 1$.

8. 设 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 是取自正态总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$的简单随机样本,则 σ^2 的无偏估计量是 ( )

(A) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$; (B) $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$;

(C) $\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$; (D) $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$.

9. 在假设检验中,记 H_1 为备择假设,则犯第一类错误是指

( )

(A) H_1 为真,接受 H_1; (B) H_1 不真,接受 H_1;

(C) H_1 为真,拒绝 H_1; (D) H_1 不真,拒绝 H_1.

10. 设 $X \sim N(0, 16)$, $Y \sim N(0, 9)$,X, Y 相互独立,X_1, X_2, $\cdots$, X_9 和 Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_{16} 分别为总体 X 及 Y 的一个简单随机样本,则 $\dfrac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_9^2}{Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_{16}^2}$ 服从的分布为 ( )

(A) $F(9, 16)$; (B) $F(16, 9)$;

(C) $F(9, 9)$;　　　　　　　　(D) $F(16, 16)$.

二、填空题（每题 2 分,共 20 分）

1. 设 A,B 为随机事件,已知 $P(\overline{A}) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, $P(A-B) = 0.5$,则 $P(B \mid A \cup \overline{B}) =$ ________.

2. 一道单项选择题同时列出 5 个答案,一个考生可能真正理解而选对答案,也可能乱猜一个. 假设他知道正确答案的概率为$\frac{1}{3}$,乱猜选对答案的概率为$\frac{1}{5}$. 如果已知他选对了,则他确实知道正确答案的概率为________.

3. 设连续型随机变量 X 的密度函数

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 < x < 1), \\ A - x & (1 < x < 2), \\ 0 & (\text{其他}), \end{cases}$$

则 $A=$ ________.

4. 设测量的随机误差 $X \sim N(0, 100)$,则测量的误差的绝对值大于 19.6 的概率为________.

5. 设随机变量 X 的密度函数 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & (0 < x < 1), \\ 0 & (\text{其他}). \end{cases}$ 若随机变量 Y 表示对 X 的三次独立观察中事件$\left\{X \leqslant \frac{2}{3}\right\}$出现的次数,则 $P(Y = 0) =$ ________.

6. 在区间$(0, 1)$中随机地取两个数,则事件“两数之积大于$\frac{1}{4}$”的概率为________.

7. 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且都服从参数为 p $(0 < p < 1)$ 的(0－1) 分布. 令随机变量 $Z = \begin{cases} 1 & (X+Y\ \text{为偶数}), \\ 0 & (X+Y\ \text{为奇数}), \end{cases}$ 要使 X 和 Z 相互独立,则 $p =$ ________.

8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为正态总体 $X \sim N(1, 4)$ 的一个简单随机样本,则随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合密度函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$ ________.

9. 设随机变量 X 服从自由度为 (n, n) 的 F 分布,已知 $P(X > \alpha) = 0.05$,则 $P\left(X > \frac{1}{\alpha}\right) =$ ________.

10. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,σ^2 已知. 为使总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间的长度不大于 L,则样本容量至少应取________(只需给出表达式).

三、计算题(每题 8 分,共 56 分)

1. 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} Axy, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G, \end{cases}$$

其中 $G = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 < y \leqslant x^2\}$. 求:

(1) 系数 A;

(2) X 和 Y 的边缘密度函数;

(3) 条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x \mid y)$ 和 $f_{Y|X}(y \mid x)$.

2. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 3y & (0 < x < y, 0 < y < 1), \\ 0 & (\text{其他}), \end{cases}$$

随机变量 $Z = X - 2Y$,求 Z 的概率密度函数.

3. 设 (X, Y) 的联合分布律为

Y \ X	0	1
0	0.1	b
1	a	0.4

已知 $P(X=1 \mid Y=1)=\frac{2}{3}$. 试求：

(1) a, b 的值；

(2) $\operatorname{cov}(X, 2Y)$.

4. 设随机变量 $3X+Y$ 和 $2X-3Y$ 的方差、协方差分别是

$$D(3X+Y)=333,\ D(2X-3Y)=280,$$

$$\operatorname{cov}(3X+Y, 2X-3Y)=-42,$$

求随机变量 $X-2Y$ 和 $2X+3Y$ 的方差及协方差.

5. 某农贸市场的某种商品每日的价格为

$$Y_n=Y_{n-1}+X_n \quad (n \geqslant 1),$$

其中 Y_n 表示第 n 天该商品的价格，X_n 表示第 n 天较前一天商品价格的变化.

(1) 写出 Y_n 与 Y_0, X_1, X_2, $\cdots$, X_n 之间的关系.

(2) 已知 X_1, X_2, $\cdots$, X_n, $\cdots$相互独立，且 $E(X_n)=0$, $D(X_n)=2\ (n=1, 2, \cdots)$. 如果今天该商品的价格为 100 元，用中心极限定理估计 18 天后该商品的价格在 96 元与 104 元之间的概率.

6. 设总体 X 服从参数为 p 的几何分布，即

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1} p \quad (k=1, 2, \cdots),$$

且 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 是 X 的一个简单随机样本，求参数 p 的矩估计量和极大似然估计量.

7. 某厂在所生产的汽车蓄电池的说明书上写明：使用寿命的标准差不超过 0.9 年. 现随机地抽取了 10 个蓄电池，测得样本的标准差为 1.2 年. 假定使用寿命服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，取显著性水平 $\alpha=0.05$，试检验

$$H_0: \sigma^2 \geqslant 0.81,\ H_1: \sigma^2<0.81.$$

四、证明题（4 分）

设随机变量 X 和 Y 相互独立，且方差 $D(X)$, $D(Y)$, $D(XY)$存

在.证明：

$$D(XY) \geqslant D(X)D(Y).$$

试卷(二)考核内容分值表

概率论 72					数理统计 28		
随机事件	一维变量	二维变量	数字特征	极限定理	抽样分布	参数估计	假设检验
10	8	24	20	10	6	12	10