08--09 学年第 1 学期《概率论与数理统计》期末考试 A 卷答案

一、填空：

1. （1-P）（1-Q）
2. 1/3
3.

Y	0	1	4
P	0.1	0.7	0.2

4. 自相关函数 $R_X(t_1, t_2)=\exp\{(t_1+t_2)^2/2\}$
5. 1/12
6. 0, N(-1,5)
7. ③
8. ③
9. ①
10. ③

二、解答题（10 分）：

解：设机器调整得良好为 A 事件，产品合格为 B 事件。

由题意可得，P（A）=0.95，P（B|A）=0.98，P（B|$\bar{A}$）=0.55，（3 分）

则 P（A|B）= $\dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B|\bar{A})P(\bar{A})+P(B|A)P(A)}$ （5 分）

=0.97 （2 分）

三、解答题（11 分）：

解：$f_x(x)=\begin{cases}1/60, 0\le x\le 60\\ 0, 其它\end{cases}$ （2 分）

令 Y 为候车时间，则有 Y=g（X）= $\begin{cases}5-X, 0<X\le 5\\ 25-X, 5<X\le 25\\ 55-X, 25<X\le 55\\ 60-X+5, 55<X\le 60\end{cases}$ （4 分）

$\therefore E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ f_x(x)dx$ （2 分）

$=\frac{1}{60}\left[\int_0^5(5-x)dx+\int_5^{25}(25-x)dx+\int_{25}^{55}(55-x)dx+\int_{55}^{60}(65-x)dx\right]$ （2 分）

=1/60(12.5+200+450+37.5)= $\dfrac{35}{3}$ =11.67 （1 分）

四、解答题（15 分）：

解： (1) 当 $0<x<1$ 时 $f_X(x)=\int_x^1 6xdy=6x(1-x)$ 故

$$f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x)\text{，} & 0<x<1\\ 0 & \text{，其它}\end{cases}$$ （3 分）

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_0^y 6xdx=3y^2$ 故 $f_Y(y)=\begin{cases}3y^2\text{，} & 0<y<1\\ 0 & \text{，其它}\end{cases}$ （3 分）

(2) 当 $\frac{1}{3}<y<1$ 时，$f_Y(y\,|\,X=\frac{1}{3})=\dfrac{f(\frac{1}{3},y)}{f_X(\frac{1}{3})}=\frac{3}{2}$,

故 $$f_Y(y\,|\,X=\frac{1}{3})=\begin{cases}\frac{3}{2}\text{，} & \frac{1}{3}<y<1\\ 0\text{，} & \text{其它}\end{cases}.$$ （4 分）

(3) $P(X+Y\le 1)=\int_0^{1/2}6xdx\int_x^{1-x}dy$ （3 分）

$=\int_0^{1/2}6x(1-2x)dx$

$=\frac{1}{4}$ （2 分）

五、解答题（12 分）：

解：（1） $E(T_1)=\theta,E(T_2)=2\theta,E(T_3)=\theta$ （3 分）

所以，T_1,T_3 均为 θ 的无偏估计 量 （3 分）

（2） $D(T_1)=\frac{1}{9}.\frac{\theta^2}{2}+\frac{4}{9}.\frac{\theta^2}{2}=\frac{5\theta^2}{18}$

$D(T_3)=\frac{\theta^2}{4}$ （4 分）

$D(T_3)<D(T_1)$

所以，$D(T_3)$ 更有效。 （2 分）

六、解答题（14 分）：

解:

$$E(X)=\int_5^6 x(\theta+1)(x-5)^{\theta}dx=\int_5^6 xd(x-5)^{\theta+1}=6-\int_5^6(x-5)^{\theta+1}dx=6-\frac{1}{\theta+2}$$ （3 分）

故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{1}{6-\bar{X}}-2$ （3 分）

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}(x_i-5)^{\theta}$， （2 分）

故

$$\ln L(\theta)=n\ln(1+\theta)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-5)$$ （2 分）

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{1+\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-5)=0$$ （2 分）

θ的极大似然估计量为$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i-5)}-1$ （2 分）

七、解答题（8 分）：

解：由题意得，X~ $N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$,Y~ $N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$, σ_1^2,σ_2^2 为已知

$$\therefore \bar{X}\sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1}\right),2\bar{Y}\sim N\left(2\mu_2,\frac{4\sigma_2^2}{n_2}\right)$$ （2 分）

两样本独立，所以 $\bar{X}$与$2\bar{\mathrm{Y}}$ 独立。

$$\bar{X}-2\bar{\mathrm{Y}}\sim N\left(\mu_1-2\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{4\sigma_2^2}{n_2}\right),$$

即$\left[\left(\bar{X}-2\bar{\mathrm{Y}}\right)-\left(\mu_1-2\mu_2\right)\right]\Big/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{4\sigma_2^2}{n_2}}\sim N(0,1)$ （2 分）

若 H_0为真，即$\mu_1=2\mu_2$.则 $\left(\bar{X}-2\bar{Y}\right)\Big/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{4\sigma_2^2}{n_2}}\sim N(0,1)$

由 $P\left\{\text{拒}\mathrm{H}_0\,|\,H_0\text{为真}\right\}=\alpha$， 有 $P\left\{\left(\bar{X}-2\bar{Y}\right)\Big/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{4\sigma_2^2}{n_2}}\geq Z_{\alpha}\right\}=\alpha$

所以，拒绝域为 $Z=\left(\bar{X}-2\bar{Y}\right)\Big/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{4\sigma_2^2}{n_2}}\geq Z_{\alpha}$ 。 （4 分）