2019-2020 学年第一学期期末考试 A 卷（理工类）

一、填空与选择题(每小题 3 分，共 21 分)

1、在三次独立重复射击中，若至少有一次击中目标的概率为 $\frac{37}{64}$，则每次射击击中目标的概率为________.

2、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$，则 $P(X=Y)=$______.

3、设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, x<0, \\ kx^2, 0 \leq x \leq 1, \\ 1, x>1, \end{cases}$ 则 $k=$________.

4、设随机变量 $X \sim B(n,p)$, 且 $E(X)=2.4, D(X)=1.44$, 则 $n=$______，$p=$_____.

5、下列结论中，不是随机变量 X 与 Y 不相关的充要条件的是(　　)

(A) $E(XY)=E(X)E(Y)$　　(B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(C) $Cov(X,Y)=0$　　(D) X 与 Y 相互独立

6、设 $X_1, X_2, \cdots, X_{12}$ 来自正态总体 $N(0,1)$，$Y=\left(\sum_{i=1}^{4} X_i\right)^2+\left(\sum_{i=5}^{8} X_i\right)^2+\left(\sum_{i=9}^{12} X_i\right)^2$，当常数 $k=$__________. 时，kY 服从 χ^2 分布.

7、设两个独立样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$，其中 μ_1、μ_2 未知，σ_1^2、σ_2^2 已知，$\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i, \overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} Y_j$, 则 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为________.

二、(本题满分 10 分)

设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} x, 0 \leq x \leq 1, \\ A-x, 1<x<2, \\ 0, else. \end{cases}$（1）求常数 A;（2）求 $P(0.2<X<1.2)$;

（3）求 X 的分布函数。

三、（本题满分 9 分）

设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, x\geqslant 0, \\ 0, x<0. \end{cases}$求随机变量$Y=X^2$的概率密度函数$f_Y(y)$.

四、（本小题满分 14 分）设(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} A(x+y), 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2, \\ 0, \qquad else. \end{cases}$$其中A为常数，

（1）求A；（2）求$D(X+Y)$;（3）求$Z=X+Y$的概率密度函数.

五、（本题满分 14 分） 设随机变量 X 与 Y 满足：$D(X)=2, D(Y)=4, Cov(X,Y)=1$. 令 $U=2X-3Y, V=3X-2Y$. 求 U 与 V 的相关系数 ρ_{UV}.

六、试解下列各题（每小题 7 分，本题共 28 分）

(1)、若总体 $X \sim P(\lambda)$, 其分布律为 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots,\lambda>0$ 为未知参数，

$X_1, X_2, \cdots X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本。求参数 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_M$，并判断 $\hat{\lambda}_M$ 是否为 λ 的无偏估计。

(2)、设总体 X 的概率分布为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & \theta^2 & 1-2\theta \end{pmatrix}, 0<\theta<\frac{1}{2}$. 是未知参数，利用总体 X 的样本值为 3, 1, 3, 0, 3, 1, 3, 2, 求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_{MLE}$

(3)、随机的选取某种炮弹 9 发做实验，测得炮口速度的样本标准差 $s=11\,(m/s)$. 设炮口速度服从正态分布，求炮口速度的方差 σ^2 的置信度为 95%的置信区间.

(4)、设某种产品的某项指标服从正态分布，已知它的标准差为$\sigma=150$。现从一批产品中随机抽取 26 个，测得该项指标的平均值为 1637，问能否认为这批产品的该项指标值为 1600，$\alpha=0.05$

七、（本题满分 8 分）

设二维随机变量(X,Y)服从区域$D=\{(x,y)\,|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$上的均匀分布。令

$U=\begin{cases}0,X\leqslant Y\\1,X>Y\end{cases},V=\begin{cases}0,X\leqslant 2Y\\1,X>2Y\end{cases}$,问$U$与$V$是否独立？为什么？

2019-2020 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空与选择题(每小题 3 分，共 21 分)

1、【正解】$\frac{1}{4}$

【解析】$1-(1-p)^3=\frac{37}{64}\therefore p=\frac{1}{4}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 2.4：常见的一维随机变量的分布

2、【正解】0.5

【解析】$P(X=Y)=0.5*0.5+0.5*0.5=0.5$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 【重要题型】题型 1：集合关系与概率计算

3、【正解】1

【解析】$F(1+0)=F(1-0)=1=k$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 2.3 连续型随机变量及其分布

4、【正解】6;0.4

【解析】$2.4=np,np(1-p)=1.44,\therefore p=0.4,n=6$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 2.2 离散型随机变量及其分布

5、【正解】D

【解析】X,Y不相关$\Longleftrightarrow \rho_{XY}=0\Longleftrightarrow Cov(X,Y)=0\Longleftrightarrow E(X)E(Y)=E(XY)$

$\Longleftrightarrow D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

【考点延伸】《考试宝典》第四章 4.4 协方差与相关系数

6、【正解】$\frac{1}{4}$

【解析】$\frac{\sum_{i=1}^{4}X_i}{2}\sim N(0,1),\frac{\sum_{i=5}^{8}X_i}{2}\sim N(0,1),\frac{\sum_{i=9}^{12}X_i}{2}\sim N(0,1)\therefore k=\frac{1}{4},kY\sim\chi^2(3)$

【考点延伸】《考试宝典》第六章 6.2：三个重要的抽样分布

7、【正解】$\left[\overline{X}-\overline{Y}-\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}u_{1-\frac{\alpha}{2}},\overline{X}-\overline{Y}+\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$

【解析】

$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$\left[\overline{X}-\overline{Y}-\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}u_{1-\frac{\alpha}{2}},\overline{X}-\overline{Y}+\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$

【考点延伸】《考试宝典》第八章 8.2：置信区间

二、(本题满分 10 分)

【解析】(1):$1=\int_0^2 f(x)dx=0.5+A-1.5=A-1,A=2;$

(2):$P(0.2<X<1.2)=-\frac{0.2^2}{2}+1.2*2-1-\frac{1.2^2}{2}=0.66;$

$$(3):F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0,x<0,\\ \dfrac{x^2}{2},0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x-1-\dfrac{x^2}{2},1<x<2,\\ 1,x\geqslant 2,\end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 2.3 连续型随机变量及其分布

三、(本题满分 9 分)

【解析】$F_Y(y)=P(X^2\leqslant y),y\leqslant 0$时,$F_Y(y)=0,y>0$时,$F_Y(y)=P\left(0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\right)$

$$=\int_0^{\sqrt{y}}e^{-x}dx=1-e^{-\sqrt{y}},\therefore F_Y'(y)=f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}},y>0\\ 0,y\leqslant 0\end{cases}.$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 2.3 连续型随机变量及其分布

四、(本题满分 14 分)

【解析】$(1)1=\iint_{R^2}f(x,y)dxdy\Longrightarrow A=\dfrac{1}{8}.$

$$(2)EX=\int_0^2dx\int_0^2\frac{x}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6},EX^2=\int_0^2dx\int_0^2\frac{x^2}{8}(x+y)dy=\frac{5}{3},$$

同理 $E(Y)=\dfrac{7}{6},E(Y^2)=\dfrac{5}{3}.$

$$D(X)=EX^2-(EX)^2=\frac{11}{36},D(Y)=\frac{11}{36}\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{-1}{36}$$

$$\therefore D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)=\frac{5}{9}.$$

$$(3):f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy=\begin{cases}\displaystyle\int_0^z\frac{z}{8}dy=\frac{z^2}{8},0<z\leqslant 2,\\ \displaystyle\int_{z-2}^{2}\frac{z}{8}dy=\frac{(4-z)z}{8},2<z\leqslant 4,\\ 0,otherwise\end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》第三章 3.6:二维随机变量函数的分布

五、(本题满分 10 分)

【解析】$DU=4DX+9DY-12Cov(X,Y)=32,DV=9DX+4DY-12Cov(X,Y)=22.$

$$Cov(U,V)=6DX+6DY-13Cov(X,Y)=23,\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DUDV}}=\frac{23}{88}\sqrt{11}$$

【考点延伸】《考试宝典》第四章 4.4 协方差与相关系数

六、(本题满分 28 分,每小题 7 分)

【解析】$(1):EX=\overline{X},EX=\lambda,\therefore\hat{\lambda}_M=\overline{X},\because E\left(\hat{\lambda}_M\right)=E\left(\overline{X}\right)=EX=\lambda\therefore$无偏

【考点延伸】《考试宝典》第七章 7.1:点估计

【解析】$(2):L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4,\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}+\frac{-2}{1-\theta}+\frac{-8}{1-2\theta}=0,\because 0<\theta<0.5\therefore\hat{\theta}_{MLE}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}.$$

【考点延伸】《考试宝典》第七章 7.1:点估计

【解析】(3): σ^2的置信区间为$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]=[55.21,444.04]$

【考点延伸】《考试宝典》第八章 8.2：置信区间

七、【解析】(4): $H_0:\mu=1600\ vs\ H_1:\mu\neq1600,\sigma=150\ \therefore U=\frac{\bar{X}-1600}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=1.256,$

$$\therefore U\notin W=\left\{U:|U|>u_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.96\right\}\ \therefore \text{认为}\mu=1600.$$

【考点延伸】《考试宝典》第九章 9.3：常用的假设检验

八、（本题满分 8 分）

【解析】$f(x,y)=\begin{cases}0.5,(x,y)\in[0,2]\times[0,1]\\0,otherwise\end{cases},P(U=0,V=0)=\iint_{x\leq y}f(x,y)dxdy=0.25$

$P(U=0,V=1)=0,P(U=1,V=0)=\iint_{y<x\leq 2y}f(x,y)dxdy=0.25,P(U=1,V=1)=0.5$

所以 U,V 的联合分布律和边缘分布律为

U \ V	0	1	$p_{i\cdot}$
0	1/4	0	1/4
1	1/4	1/2	3/4
$p_{\cdot j}$	1/2	1/2	1

显然易知 U,V 不相互独立

【考点延伸】《考试宝典》第三章 3.6：二维随机变量函数的分布