试　卷　(六)

一、选择题(每题 3 分,共 24 分)

1. 将 3 个人以相同的概率分配到 4 个房间的每一间中,恰有 3 个房间中各有一人的概率为　　(　　)

(A) 0.75;　　(B) 0.375;

(C) 0.187 5;　　(D) 0.125.

2. 设两个随机变量 X 和 Y 相互独立且同分布:

$$P(X=-1)=P(Y=-1)=P(X=1)=P(Y=1)=\frac{1}{2},$$

则下列各式中成立的是　　(　　)

(A) $P(X=Y)=\frac{1}{2}$;　　(B) $P(X=Y)=1$;

(C) $P(X+Y=0)=\frac{1}{4}$;　　(D) $P(XY=1)=\frac{1}{4}$.

3. 设袋中有编号为 1, 2, …, n 的 n 张卡片,有放回地随机抽取 k 张卡片,记 X 表示 k 张卡片的号码之和,则 $E(X)$为　　(　　)

(A) $\frac{k(n+1)}{2}$;　　(B) $\frac{n+1}{2}$;

(C) $\frac{n(k+1)}{2}$;　　(D) $\frac{n(k-1)}{2}$.

4. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布,记 $U=X+Y$, $V=X-Y$,则随机变量 U 和 V 必然　　(　　)

(A) 不独立;　　(B) 相互独立;

(C) 不相关;　　(D) 无法判断.

5. 下列各函数中可以作为某个随机变量的分布函数的是　(　　)

(A) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x\in\mathbb{R})$;

(B) $F(x)=\sin x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$;

(C) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2} & (x<0),\\ 1 & (x\geqslant 0);\end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases}0 & (x<0),\\ 0.6 & (x=0),\\ 1 & (x>0).\end{cases}$

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值,记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\ S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$S_3=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\ S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是 ( )

(A) $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n}}$; (B) $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$;

(C) $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n-1}}$; (D) $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$.

7. 对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验,如果在显著水平 0.05 下接受 $H_0: \mu=\mu_0$,那么在显著水平 0.01 下,下列结论中正确的是 ( )

(A) 必接受 H_0; (B) 可能接受,也可能拒绝 H_0;

(C) 必拒绝 H_0; (D) 不接受,也不拒绝 H_0.

8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 相互独立,且 $E(X_i)=1, D(X_i)=1\ (i=1, 2, \cdots, 9)$,则对任意 $\varepsilon>0$,有 ( )

(A) $P\left(\left|\sum_{i=1}^{9}X_i-1\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\varepsilon^{-2}$;

(B) $P\left(\left|\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i-1\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\varepsilon^{-2}$；

(C) $P\left(\left|\sum_{i=1}^{9}X_i-9\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\varepsilon^{-2}$；

(D) $P\left(\left|\sum_{i=1}^{9}X_i-9\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-9\varepsilon^{-2}$.

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

1. 设 10 件产品中含有 4 件次品，今从中任取 2 件，发现其中一件是次品，则另一件是次品的概率为________.

2. 设 A，B 为两个随机事件，且 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.6$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(A\mid B)=$ ________.

3. 设随机变量 X 的概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{Ax}{(1+x)^4} & (x\geqslant 0),\\ 0 & (x<0),\end{cases}$$

则 $A=$________.

4. 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	0	1
0	0.12	p_1
1	p_2	0.42

要使(X,Y)相互独立，则 $p_1=$________，$p_2=$________.

5. 设随机变量服从参数为 λ 的泊松分布，已知 $E((X-1)(X-2))=1$，则 $\lambda=$ ________.

6. 设二维随机变量(X,Y)在区域 D 上服从均匀分布，其中 D 由曲线 $y=x^{-1}$ 及直线 $y=0$，$x=1$，$x=\mathrm{e}^2$ 所围成，则其边缘密度函数 $f_X(x)$ 在 $x=2$ 处的值为________；在已知 $x=0.5$ 条件下 Y 的条件概

率密度函数 $f_{Y|X}(y \mid x=0.5)=$ ________.

7. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，当 $c=$ ________ 时，统计量 $T=c(X_n-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布.

8. 设一批产品的某一指标 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，从中随机抽取容量为 25 的样本，测得样本方差的观察值 $s^2=100$，则总体方差 σ^2 的 95%的置信区间为________.

三、计算题（每题 8 分，共 48 分）

1. 设有两只箱子内装有某产品，已知甲箱中有 5 个正品，3 个次品；乙箱中有 4 个正品，3 个次品. 现从甲箱中任取 3 个产品放入乙箱，然后再从乙箱中任取 1 个产品. 求：

(1) 从乙箱中取出的这个产品是正品的概率；

(2) 若从乙箱中取出的是正品，求最先从甲箱中取出的 3 个产品都是正品的概率.

2. 已知 (X, Y) 的联合密度

$$f(x, y)=\begin{cases}3y & (0 \leqslant y<1,\ 0<x<y), \\ 0 & (\text{其他}),\end{cases}$$

且随机变量 $Z=X+Y$. 求 Z 的概率密度函数.

3. 某农贸市场的某种商品价格波动为随机变量. 设第 i 天（较前一天）的价格变化为 X_i，其中 $X_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 为独立同分布，$E(X_i)=0$，$D(X_i)=0.04$. 设第 n 天的价格为 Y_n，则 $Y_n=Y_0+\sum_{i=1}^{n} X_i$. 若现在的价格为 20 元/斤（即 $Y_0=20$），试求：

(1) 试利用切比雪夫不等式估计概率 $P(18 \leqslant Y_{30} \leqslant 22)$；

(2) 试利用中心极限定理估计概率 $P(18 \leqslant Y_{30} \leqslant 22)$.

4. 某箱装有 100 件产品，其中一等、二等和三等品分别为 80，10 和 10，现从中随机地抽取一件，记 $X_i=\begin{cases}1 & (\text{若抽到 } i \text{ 等品}), \\ 0 & (\text{其他}),\end{cases}$ 其中 $i=$

1，2，3. 试求：

(1) 随机变量 X_1 和 X_2 的联合分布；

(2) 随机变量 X_1 和 X_2 的相关系数 $\rho_{X_1X_2}$.

5. 设总体 X 的密度函数

$$f(x;\theta,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} & (x\geqslant\mu),\\ 0 & (x<\mu).\end{cases}$$

其中 $\theta>0$；μ，θ 是未知参数；X_1，X_2，…，X_n 为取自总体 X 的样本. 试求：μ，θ 的极大似然估计量.

6. 用包装机包装某种洗衣粉，在正常情况下，每袋重量为 1 000 g，标准差 σ 不能超过 15 g. 假设每袋洗衣粉的净重 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 某天为检验机器工作是否正常，从包装好的洗衣粉中随机抽取 10 袋，并测得其净重的样本均值 $\bar{x}=998$，样本方差 $s^2=30.23^2$. 问：这天机器工作是否正常?(取 $\alpha=0.05$.)

四、证明题（4 分）

设 X_1，X_2，…，X_n 为取自总体 X 的简单随机样本，已知 $E(X^k)=\alpha_k(k=1,2,3,4)$. 证明：当 n 充分大时，随机变量 $Z_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布 $N\left(\alpha_2,\dfrac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}\right)$.

试卷(六)考核内容分值表

概率论 69					数理统计 31		
随机事件	一维变量	二维变量	数字特征	极限定理	抽样分布	参数估计	假设检验
17	9	17	14	12	9	11	11