试卷(五)详解

一、是非题

1. 若事件 A 和 B 为对立事件，则 A 与 B 互斥，反之不真.（　　）

解　是.

由事件的对立定义，若 $A \cap B = \varnothing$，且 $A \cup B = \Omega$，则称事件 A 与事件 B 是对立的. 反之若 A 与 B 互斥，即 $A \cap B = \varnothing$，但 $A \cup B \subset \Omega$，则表示 A 与 B 不是对立事件.

2. 若概率 $P(X = 2\,002) = 1$，则 X 不可能是连续型随机变量.

（　　）

解　是.

若 X 的分布律为 $P(X = a) = 1$，其中 a 为任意常数，则称 X 服从退化分布，因此 X 为离散型随机变量.

3. $\Phi(x)$是正态随机变量的分布函数，则 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

（　　）

解　非.

由于本题中 $\Phi(x)$是一般的正态随机变量的分布函数，因此未必有 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. 仅当正态随机变量 X 的期望 $E(X) = 0$ 时，才有 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

4. 二维均匀分布的边缘分布不一定是均匀分布.　　（　　）

解　是.

例　若二维随机向量(X, Y)的联合密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & (0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1), \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$$

求得 X 的边缘密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\mathrm{d}y=\int_x^1 2\mathrm{d}y=2(1-x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

显然,X 的分布不是均匀分布.

5. 设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计,且有 $D(\hat{\theta})>0$,则 $\hat{\theta}^2=(\hat{\theta})^2$ 必是θ^2 的无偏估计. ( )

解 非.

由 $E(\hat{\theta}^2)=D(\hat{\theta})+E^2(\hat{\theta})=D(\hat{\theta})+\theta^2>\theta^2$,因此 $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计.

二、选择题

1. 设 $B\subset A$,则下面正确的等式是 ( )

(A) $P(\overline{AB})=1-P(A)$; (B) $P(\overline{B}-\overline{A})=P(\overline{B})-P(\overline{A})$;

(C) $P(B|A)=P(B)$; (D) $P(A|\overline{B})=P(A)$.

解 选 B.

由于 $B\subset A$,有$\overline{A}\subset\overline{B}$, $\overline{B}=\overline{A}\cup A\overline{B}$ 以及$\overline{A}\cap(A\overline{B})=\varnothing$. 利用概率的可加性可得

$$\begin{aligned}P(\overline{B})&=P(\overline{A}\cup A\overline{B})=P(\overline{A})+P(A\overline{B})\\&=P(\overline{A})+P(\overline{B}-\overline{A}),\end{aligned}$$

最后求得

$$P(\overline{B}-\overline{A})=P(\overline{B})-P(\overline{A}),$$

所以选 B.

2. 10 个球中有 3 个红球,7 个白球,随机地分给 10 个人,每人一球,则最后 3 个分到球的人中恰有 1 个得到红球的概率为 ( )

(A) $C_3^1\left(\frac{3}{10}\right)^3$; (B) $\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)^2$;

(C) $C_3^1\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)^2$; (D) $\frac{C_3^1C_7^2}{C_{10}^3}$.

解 选 C.

设 $A_i=\{$第 i 个人分到红球$\}$ $(i=1, 2, \cdots, 10)$,

$A=\{$第 8, 9, 10 个人分到红球$\}$,

先求 A_i 的概率.

方法 1 考虑取球的顺序,这相当于从 10 个球中任取 i 个的选排列,所以基本事件的总数为 P_{10}^i. 第 i 次分得红球可以是 3 个红球中的任一个,有 3 种取法,前面 $i-1$ 次分球可顺序地从 10－1 个球中任意取出,有 P_9^{i-1} 种取法. 所以得

$$P(A_i)=\frac{P_9^{i-1}\times 3}{P_{10}^i}=\frac{3}{10} \quad (i=1, \cdots, 10).$$

方法 2 不考虑取球的顺序,把取得的球依次排成一列. 若把 3 个红球的位置固定下来,则其他位置必然是放白球,而红球的位置可以有 C_{10}^3种放法. 由于第 i 次取得红球,这个位置上必然放红球,剩下的红球可以在 9 个位置上任取 2 个位置,有 C_9^2种放法,故所求的概率

$$P(A_i)=\frac{C_9^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10} \quad (i=1, \cdots, 10).$$

最后求得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_8\overline{A}_9\overline{A}_{10}\cup\overline{A}_8A_9\overline{A}_{10}\cup\overline{A}_8\overline{A}_9A_{10})\\&=C_3^1\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)^2,\end{aligned}$$

所以选 C.

3. 若方差 $D(X)$, $D(Y)$为非零数,且 $E(XY)=E(X)E(Y)$,则有 ( )

(A) X, Y 一定相互独立; (B) X, Y 一定不相关;

(C) $D(XY)=D(X)D(Y)$; (D) $D(X-Y)=D(X)-D(Y)$.

解 选 B.

由期望的性质可知,X 和 Y 相互独立,则 $E(XY)=E(X)E(Y)$,反之不一定成立. 又由 $E(XY)=E(X)E(Y)$,得 $\mathrm{cov}(X, Y)=E(XY)$

$-E(X)E(Y)=0$,即 X 与 Y 不相关,故应选 B.

4. 设 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 为独立随机变量序列,且 $X_i(i=1, 2, \cdots)$ 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布,则下列选项中$\left(其中\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$正确的是 ( )

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\dfrac{n}{\lambda}}{\dfrac{n}{\lambda^2}}\leqslant x\right)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t$;

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t$;

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\dfrac{1}{\lambda}}{\sqrt{\dfrac{1}{\lambda^2}}}\leqslant x\right)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t$;

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{n}\leqslant x\right)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t$.

解 选 B.

由于 X_i 服从参数为 λ 的指数分布,得 $E(X_i)=\frac{1}{\lambda}$, $D(X_i)=\frac{1}{\lambda^2}$. 设 $X=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 有 $E(X)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{\lambda}$, $D(X)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n\lambda^2}$.

标准化变换后,随机变量 $Y_n=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$. 根据中心极限定理则有

$$\lim_{n\to\infty}P(Y_n\leqslant x)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\leqslant x\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t \quad (\forall x\in\mathbb{R}).$$

又，$Y_n=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}=\dfrac{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\dfrac{1}{\lambda}}{\sqrt{\dfrac{1}{n\lambda^2}}}=\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}$，故应选 B.

5. 假设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，即 $X\sim f(x)$，且 $E(X)$，$D(X)$均存在. 另设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自 X 的一个样本以及$\overline{X}$是样本均值，则有 (　　)

(A) $\overline{X}\sim f(x)$；　(B) $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\overline{X}\sim f(x)$；

(C) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\overline{X}\sim f(x)$；　(D) $(X_1, X_2, \cdots, X_n)\sim\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$.

解　选 D.

本题中取得样本是指简单随机样本，即满足：

① 有代表性，X_i 与 X 有相同分布；

② 有独立性，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的.

根据上述两个性质，可得$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合密度

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)=f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i),$$

所以选 D.

三、填空题

1. 设 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\dfrac{1}{3}$，且三事件 A_1, A_2, A_3 相互独立，则三事件中至少发生一个的概率为________，三事件中恰好发生一个的概率为________.

解　$\dfrac{19}{27}, \dfrac{4}{9}$.

设 $A=\{$三事件中至少发生一个$\}$，$B=\{$三事件中恰好发生一个$\}$，得

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
&= \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - P(A_1)P(A_2) - P(A_2)P(A_3) \\
&\quad - P(A_1)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\
&= 1 - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{19}{27},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) \\
&= C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.
\end{aligned}
$$

2. 设随机变量 X 服从(0, 2)上的均匀分布，则随机变量 $Y = X^2$ 在(0, 4)内的概率密度函数为________.

解 $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{y}} & (y \in (0,\ 4)), \\ 0 & (y \notin (0,\ 4)). \end{cases}$

由已知条件，得

$$
X \sim f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (x \in (0,\ 2)), \\ 0 & (x \notin (0,\ 2)), \end{cases}
$$

先求 $F_Y(y)$.

当 $y \leqslant 0$ 时

$$
F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = 0;
$$

当 $0 < y < 4$ 时

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) \\
&= P(X \leqslant \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{y}}{2};
\end{aligned}
$$

当 $y \geqslant 4$ 时

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = \int_0^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = 1.$$

最后算得

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{y}} & (y \in (0,\ 4)), \\ 0 & (y \notin (0,\ 4)). \end{cases}$$

3. 设随机变量 X 服从 $B(n,\ p)$ 分布，已知 $E(X) = 1.6$，$D(X) = 1.28$，则参数 $n =$ ________，$p =$ ________.

解　8，0.2.

由于 $X \sim B(n,\ p)$，可得 $E(X) = np$，$D(X) = np(1-p)$. 因此求解线性方程组

$$\begin{cases} np = 1.6, \\ np(1-p) = 1.28, \end{cases}$$

解得 $p = 0.2$，$n = 8$.

4. 设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，用切比雪夫不等式估计 $P(|X-2| \geqslant 4) \leqslant$ ________.

解　$\frac{1}{8}$.

由于 X 服从参数为 2 的泊松分布，可得 $E(X) = D(X) = 2$. 再由切比雪夫不等式可求得

$$P(|X - E(X)| \geqslant 4) = P(|X-2| \geqslant 4)$$

$$\leqslant \frac{D(X)}{4^2} = \frac{2}{4^2} = \frac{1}{8}.$$

5. 设 $(X_1,\ \cdots,\ X_{16})$ 是来自正态分布 $N(0,\ 1)$ 的样本，

$$Y = \Big(\sum_{i=1}^{4} X_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i=5}^{8} X_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i=9}^{12} X_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i=13}^{16} X_i\Big)^2$$

当 $c=$ ________ 时，cY 服从 χ^2 分布，$E(cY)=$ ________.

解 $\dfrac{1}{4}$, 4.

由于$(X_1, \cdots, X_{16})$是简单随机样本，因此 $X_i \sim N(0, 1)$，且

$$\sum_{i=1}^{4} X_i \sim N(0, 4),\ \sum_{i=5}^{8} X_i \sim N(0, 4),$$

$$\sum_{i=9}^{12} X_i \sim N(0, 4),\ \sum_{i=13}^{16} X_i \sim N(0, 4),$$

标准化变换后可得

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} X_i}{2} \sim N(0, 1),\ \frac{\sum_{i=5}^{8} X_i}{2} \sim N(0, 1),$$

$$\frac{\sum_{i=9}^{12} X_i}{2} \sim N(0, 1),\ \frac{\sum_{i=13}^{16} X_i}{2} \sim N(0, 1).$$

由 χ^2 分布的定义，求得

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{4} X_i}{2}\right)^2 \sim \chi^2(1),\ \left(\frac{\sum_{i=5}^{8} X_i}{2}\right)^2 \sim \chi^2(1),$$

$$\left(\frac{\sum_{i=9}^{12} X_i}{2}\right)^2 \sim \chi^2(1),\ \left(\frac{\sum_{i=13}^{16} X_i}{2}\right)^2 \sim \chi^2(1).$$

再利用 χ^2 分布的可加性，有

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{4} X_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sum_{i=5}^{8} X_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sum_{i=9}^{12} X_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sum_{i=13}^{16} X_i}{2}\right)^2 \sim \chi^2(4),$$

求得当 $c=4$ 时，$4Y$ 服从自由度为 4 的 χ^2 分布.

另外再根据 $E(\chi^2(n))=n$，得 $E(4Y)=4$.

6. 在处理快艇的 6 次试验数据中，得到最大航速 v 的六个值(单位:m/s)：

$$27,\ 38,\ 30,\ 37,\ 35,\ 31,$$

则 v 的数学期望的无偏估计值是________；v 的方差的无偏估计值是________.

解 33，18.8^2.

由于样本观察值的均值计算公式为

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

并且可知 $\overline{x}$ 为 $E(v)$ 的无偏估计，得

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=33.$$

另外，$D(v)$ 的无偏估计值

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2,$$

因此可算得

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\Big)$$
$$=\frac{1}{5}\Big(\sum_{i=1}^{6}x_i^2-6\,534\Big)=18.8^2.$$

四、计算题

1. 飞机有三个不同部分遭到射击，在第 i 部分被击中 i 发子弹时，飞机才会被击落. 射击的命中率与每一部分的面积成正比，三个部分的面积之比为 1∶2∶7. 若飞机已被击中两弹，求飞机被击落的概率.

分析 若设 $C=\{$飞机被击落$\}$，C 的概率直接不太好求，因此常将它分解成若干个乘积事件之和，虽然繁琐，实质是化难为易. 如果各乘

积事件容易求出，那么 $P(C)$ 也能求出.

解 设 C={飞机被击落}，C_1={第1部分至少有一弹命中}以及 C_2={第2部分被命中二弹}，显然有 $C=C_1\cup C_2$，且 $C_1\cap C_2=\varnothing$. 再设 A_i={第一弹命中飞机的第 i 部分}，B_i={第二弹命中飞机的第 i 部分}$(i=1, 2)$. 由题意可知

$$P(A_1)=P(B_1)=0.1,\ P(A_2)=P(B_2)=0.2,$$

$$P(A_3)=P(B_3)=0.7,$$

且 A_i 与 B_i 之间是相互独立的，由此得

$$C_1=A_1B_1\cup(A_1B_2\cup A_2B_1)\cup(A_1B_3\cup A_3B_1),$$

$$C_2=A_2B_2,$$

$$\begin{aligned}P(C)&=P(C_1)+P(C_2)\\&=P(A_1)P(B_1)+P(A_1)P(B_2)+P(A_2)P(B_1)\\&\quad+P(A_1)P(B_3)+P(A_3)P(B_1)+P(A_2)P(B_2)\\&=0.1\times0.1+0.1\times0.2+0.2\times0.1+0.1\times0.7\\&\quad+0.7\times0.1+0.2\times0.2\\&=0.23.\end{aligned}$$

2. 设随机变量 $X\sim U(0, 1)$(均匀分布)，$Y\sim E(1)$(指数分布)，且它们相互独立. 试计算：

(1) $Z=X-Y$ 的概率密度函数；

(2) $P(X>Y)$.

分析 由于 X 和 Y 相互独立，可利用 $f(x, y)=f_X(x)f_Y(y)$ 求出 (X, Y) 的联合密度. 若求 $Z=X-Y$ 的 $f_Z(z)$ 可用卷积公式和利用分布函数法来求解.

解 首先求得

$$f(x, y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & (0<x<1,\ 0<y),\\ 0 & (其他).\end{cases}$$

(1) 先考虑确定 x 的取值范围. 由于 $z=x-y$,因此有 $y=x-z>0$, 即 $x-z>0$. 再利用 $0<x<1$ 可求得: 当 $0\leqslant z<1$ 时,$z<x<1$;当 $z<0$ 时,$x>0$;当 $z\geqslant 1$ 时,$x\leqslant 0$.

由卷积公式可求得:

当 $z<0$ 时

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(x-z)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{z-x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^z(1-\mathrm{e}^{-1}),$$

当 $0\leqslant z<1$ 时

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(x-z)\mathrm{d}x=\int_z^1\mathrm{e}^{z-x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{z-1},$$

当 $z\geqslant 1$ 时

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(x-z)\mathrm{d}x=0,$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^z(1-\mathrm{e}^{-1}) & (z<0),\\ 1-\mathrm{e}^{z-1} & (0\leqslant z<1),\\ 0 & (z\geqslant 1).\end{cases}$$

(2) $P(X>Y)=P(X-Y>0)=P(Z>0)$

$$=\int_0^{+\infty}f_Z(z)\mathrm{d}z=\int_0^1(1-\mathrm{e}^{z-1})\mathrm{d}z$$

$$=(z-\mathrm{e}^{z-1})\Big|_0^1=\mathrm{e}^{-1}\approx 0.368.$$

3. 设总体 $X\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & (0\leqslant x\leqslant 1,\ \theta>0),\\ 0 & (\text{其他}),\end{cases}$ $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的一个样本,求 θ 的矩估计和极大似然估计.

解 设 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 为样本均值,先求 X 的期望

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\ \theta)\mathrm{d}x=\int_0^1 \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1},$$

然后将 $\overline{X}=E(X)$ 代入上式,得$\overline{X}=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$,解出 $\theta=\left(\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$,最后得未知参数 θ 的矩估计量

$$\hat{\theta}=\left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2.$$

设$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$是相应样本$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$的观察值,则似然函数

$$L(\theta;\ x)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1},$$

取对数,有

$$\ln L(\theta;\ x)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

解对数似然方程

$$\frac{\mathrm{d}[\ln L(\theta;\ x)]}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

得

$$\theta=\frac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2},$$

从而求得未知参数 θ 的极大似然估计量

$$\hat{\theta}=\frac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^2}.$$

4. 从一批灯泡中随机抽取 10 个灯泡进行寿命测试,得样本均值

$\overline{x}=2\,900$ h，样本标准差 $s=225$ h. 设灯泡寿命服从正态分布，以 $\alpha=0.1$ 的水平作如下检验：

(1) 整批灯泡的平均使用寿命是否大于 3 000 h?

(2) 整批灯泡的使用寿命的标准差是否为 230 h?

解 (1) 由于样本均值 $\overline{x}=2\,900<\mu=3\,000$，因此本题为左侧假设检验问题. 先提出假设

$$H_0:\mu=3\,000;\ H_1:\mu<3\,000,$$

若 H_0 为真且方差未知，故检验统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$

当 $\alpha=0.1$ 时 $t_\alpha(n-1)=t_{0.1}(9)=1.383$，此时拒绝域

$$W=(-\infty,\ -t_\alpha(n-1)]=(-\infty,\ -1.383].$$

又 $\overline{x}=2\,900$，$s=225$，求得检验统计值

$$T_0=\frac{2\,900-3\,000}{225/\sqrt{10}}\approx-1.405\in W,$$

故拒绝 H_0，即可认为整批灯泡的平均使用寿命小于 3 000 h.

(2) 本小题是双侧假设检验问题.

提出假设

$$H_0:\sigma^2=230^2;\ H_1:\sigma^2\neq 230^2.$$

若 H_0 为真且 μ 未知，故检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1).$$

当 $\alpha=0.1$ 时

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.05}(9)=16.919,\ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$
$$=\chi^2_{0.95}(9)=3.325,$$

得拒绝域

$$W = [0,\ 3.325] \cup [16.919,\ +\infty).$$

又 $\sigma_0^2 = 230^2$, $s^2 = 225^2$, $n = 10$,算得检验统计值

$$\chi_0^2 = \frac{9 \times 225^2}{230^2} \approx 8.613 \notin W,$$

因此接受 H_0,可认为整批灯泡的使用寿命的标准差为 230 h.

五、证明题

设连续随机变量 X 的一切可能值在$(-9,\ 11)$内,其密度函数为 $f(x)$. 证明:$D(X) \leqslant 100$.

分析 证明本题时,要用到方差的一个性质,即

$$D(X) \leqslant E[(X-c)^2] \quad (c\text{ 为常数}),$$

也就是 c 为任意常数,当 $c = E(X)$ 时,$D(X) = E[(X - E(X))^2]$ 为最小.

证明 由于 $X = x$, $x \in (-9,\ 11)$,取 $c = \frac{1}{2}(11-9) = 1$,有

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-9}^{11}(x - E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant E[(X-1)^2] \\ &= \int_{-9}^{11}(x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-9}^{11}(11-1)^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= 100\int_{-9}^{11} f(x)\mathrm{d}x = 100. \end{aligned}$$

六、应用题

1. 某电脑公司出售某型号电脑,规定:出售的该型号电脑在一年内非人为损坏可予以调换,且只准调换一次. 该公司售出一台电脑可赢利 200 元,调换一台电脑,公司需付出 300 元. 问:该年度内,公司销售该型号电脑多少台,可使赢利的期望值达到 10 万元?(假设该型号电

脑的使用寿命服从参数为 0.25 的指数分布.)

分析 本题是很典型的关于数学期望应用题，经常出现在历年的试卷中. 解题的关键在于正确地建立利润与销售量的函数关系.

解 设 X 为电脑的使用寿命，则根据题意可知

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} & (x > 0), \\ 0 & (x \leqslant 0). \end{cases}$$

又 Y 为销售一台电脑所获的利润，有

$$Y = g(X) = \begin{cases} 200 & (X > 1), \\ -100 & (0 \leqslant X \leqslant 1), \end{cases}$$

算得

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (-100)\,\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} 200\,\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x$$

$$= 300e^{-\frac{1}{4}} - 100 \approx 133.64(\text{元}),$$

$$n = \frac{100\,000}{133.64} \approx 748.3(\text{台}),$$

即该公司要销售 749 台电脑，才可使赢利期望值达到 10 万元.

2. 某城关镇供电站供应本地区 1 万户居民用电，已知每户每天用电量(单位：度)在区间[0, 20]上服从均匀分布. 现要求以 99%的概率保证本镇居民的正常用电，问：供电站每天至少要向居民供应多少度电?

分析 解本题要利用中心极限定理，中心极限定理主要阐明有些即使原来并不服从正态分布的一些独立同分布的随机变量，但它们的总和的分布渐近地服从正态分布.

解 设 X_i 为第 i 户居民的用电量，有

$$X_i \sim f_{X_i}(x)=\begin{cases}\frac{1}{20}, & x\in[0,20],\\ 0, & x\notin[0,20]\end{cases}(i=1,2,\cdots,10\,000),$$

以及

$$E(X_i)=10,\ D(X_i)=\frac{100}{3}.$$

由中心极限定理可有

$$P\left(\sum_{i=1}^{10\,000}X_i\leqslant n\right)=P\left(\frac{\frac{1}{10\,000}\sum_{i=1}^{10\,000}X_i-10}{\sqrt{\frac{1}{10\,000}\frac{100}{3}}}\leqslant\frac{n-10\,000\times10}{\sqrt{10\,000}\sqrt{\frac{100}{3}}}\right)$$

$$\approx\Phi\left(\frac{n-10\,000\times10}{\sqrt{10\,000}\sqrt{\frac{100}{3}}}\right)=0.99,$$

查表并求得

$$n=100\,000+2.327\times1\,000\times\frac{1}{\sqrt{3}}\approx101\,343.5,$$

即供电站每天至少要向居民供应 101 344 度电.