

试 卷 (三)

一、选择题 (每题 2 分, 共 20 分)

1. 设 A, B 是两个互不相容的事件, $P(B) > 0$, 则下列各式中一定成立的是 ()

- (A) $P(A) = 1 - P(B)$; (B) $P(A | B) = 0$;
(C) $P(A | \bar{B}) = 1$; (D) $P(\overline{AB}) = 0$.

2. 若函数 $y = f(x)$ 是一随机变量 X 的概率密度函数, 则一定成立的是 ()

- (A) $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$;
(B) $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$;
(C) $f(x)$ 为非负;
(D) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

3. 设 (X, Y) 的联合分布律为

X \ Y	Y		
	0	1	2
-1	$\frac{1}{15}$	t	$\frac{1}{5}$
1	s	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

若 X 和 Y 相互独立, 则 (s, t) 取 ()

- (A) $(\frac{2}{10}, \frac{1}{15})$; (B) $(\frac{1}{15}, \frac{2}{10})$;
(C) $(\frac{1}{10}, \frac{2}{15})$; (D) $(\frac{2}{15}, \frac{1}{10})$.

4. 若随机变量 X 与 Y 不相关, 则与之等价的条件是 ()

- (A) $D(XY) = D(X)D(Y)$; (B) $D(X+Y) = D(X-Y)$;
 (C) $D(XY) \neq D(X)D(Y)$; (D) $D(X+Y) \neq D(X-Y)$.

5. 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$ ($x \in (-\infty, +\infty)$), 则服从 $N(0, 1)$ 的随机变量是 ()

- (A) $\frac{X+3}{2}$; (B) $\frac{X+3}{\sqrt{2}}$;
 (C) $\frac{X-3}{2}$; (D) $\frac{X-3}{\sqrt{2}}$.

6. 现有 10 张奖券, 其中 8 张为 2 元, 2 张为 5 元. 某人从中随机地无放回地抽取 3 张, 则此人所得奖金的数学期望为 ()

- (A) 6 元; (B) 12 元;
 (C) 7.8 元; (D) 9 元.

7. 设 X_1, X_2, \dots, X_8 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_{10} 为分别来自两个正态总体 $N(-1, 2^2)$ 及 $N(2, 5^2)$ 的样本, 且相互独立, S_1^2 和 S_2^2 分别为两个样本的样本方差, 则服从 $F(7, 9)$ 分布的统计量是 ()

- (A) $\frac{2S_1^2}{5S_2^2}$; (B) $\frac{5S_1^2}{2S_2^2}$;
 (C) $\frac{4S_2^2}{25S_1^2}$; (D) $\frac{25S_1^2}{4S_2^2}$.

8. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的一个样本, 则 μ 的置信度为 95% 的置信区间是 ()

- (A) $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}\right)$;
 (B) $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.025}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.025}\right)$;
 (C) $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.05}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.05}\right)$;
 (D) $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.05}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.05}\right)$.

9. 在假设检验中,显著性水平 α 是指 ()

(A) $P(\text{接受 } H_0 | H_0 \text{ 为假}) = \alpha$;

(B) $P(\text{接受 } H_1 | H_1 \text{ 为假}) = \alpha$;

(C) $P(\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 为真}) = \alpha$;

(D) $P(\text{拒绝 } H_1 | H_1 \text{ 为真}) = \alpha$.

10. 设 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$, 若 X, Y 相互独立, 则必有 ()

(A) $X = Y$;

(B) $P(X = Y) = 1$;

(C) $P(X = Y) = 0$;

(D) 以上 A, B, C 都不对.

二、填空题 (每题 2 分, 共 16 分)

1. 设 A, B, C 为三个随机事件, 用 A, B, C 的运算关系表示事件: A, B, C 中不多于一个发生 = _____.

2. 将红、黄、蓝 3 个球随机地放入 4 只盒子中, 若每只盒子容球数不限, 则有 3 只盒子各放一个球的概率是 _____.

3. 已知 $P(A \cup B) = 0.8$, $P(B) = 0.4$, 则 $P(A | \bar{B}) =$ _____.

4. 袋中有 1 个黑球、2 个白球, 从中任取 2 个, 则取得黑球数 X 的分布函数 $F(x) =$ _____.

5. 设 X 是区间 $[0, 1]$ 上的连续型随机变量, $P(X \leq 0.3) = 0.8$. 若 $Y = 1 - X$, 则当常数 $c =$ _____ 时, 有 $P(Y \leq c) = 0.2$.

6. 设 X 和 Y 相互独立且都服从 $N(0, 1)$, 则随机变量 $Z = 2X - 3Y + 1$ 的概率密度函数 $f(z) =$ _____.

7. 设 X 服从区间 $(-1, 1)$ 内的均匀分布, 则 X 和 $Y = |X|$ 的相关系数 $\rho_{XY} =$ _____.

8. 设假设检验中犯第一类错误的概率为 α , 犯第二类错误的概率为 β . 为了同时减少 α 和 β , 那么只有 _____.

三、计算题 (每题 8 分, 共 64 分)

1. 设有两台机床加工同样的零件, 第一台机床出废品的概率是 0.03, 第二台机床出废品的概率是 0.02. 加工出来的零件混放在一起, 并且已知第一台机床加工的零件比第二台机床多一倍.

(1) 求任意取出的一个零件是合格品的概率;

(2) 如果任意取出的一个零件经过检验后发现是废品, 求它是第二台机床加工的概率.

2. (1) 设随机变量 X 的概率密度函数

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & (0 < x < 1), \\ 0 & (\text{其他}), \end{cases}$$

且 $P\left(X < \frac{1}{3}\right) = P\left(X > \frac{1}{3}\right)$, 求常数 a 和 b .

(2) 设随机变量 X 服从 $(0, 1)$ 内的均匀分布, 求 $Y = -2\ln X$ 的概率密度函数.

3. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{-(3x+4y)} & (x > 0, y > 0), \\ 0 & (\text{其他}). \end{cases}$$

(1) 确定常数 c ;

(2) 讨论 X, Y 的独立性;

(3) 求 $P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 2)$.

4. (1) 证明: 在一次试验中, 事件 A 发生的次数 X 的方差 $D(X) \leq \frac{1}{4}$.

(2) 设 X 为具有二阶矩的随机变量, c 为任意常数. 问: c 为何值时, $E((X - c)^2)$ 取最小值.

5. 设某一复杂的系统由 n 个相互独立的部件组成, 每个部件的可靠性 (即部件正常工作的概率) 为 0.9, 并且必须至少有 80% 的部件工作, 才能使整个系统正常工作. 问: n 至少为多少时才能使系统的可靠

性不低于 0.95?

6. 已知随机变量 X 的概率密度

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & (0 < x < 1, \theta > 0), \\ 0 & (\text{其他}), \end{cases}$$

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个样本. 求: θ 的矩估计量和极大似然估计量.

7. 设随机变量 X 在区间 $(0, \theta)$ 上服从均匀分布, 其中 θ 未知. X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个样本, 则 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta} = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. 试确定 c , 使得 $c\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计.

8. (1) 从理论上分析得出结论: 压缩机的冷却用水的温度 $T \sim N(\mu, \sigma^2)$, 升高的平均值不多于 5°C . 现测量了 5 台压缩机的冷却用水的升高温度分别是

6.4, 4.3, 5.7, 4.9, 5.4

问: 在 $\alpha=0.05$ 时, 这组数据与理论上分析所得出的结论是否一致?

(2) 已知纤维的纤度 $X \sim N(1.405, 0.048^2)$. 现抽取了 5 根纤维, 测得纤度为

1.32, 1.55, 1.36, 1.40, 1.44

问: 纤度的总体方差是否正常(取 $\alpha=0.05$)?

附表 标准正态分布函数

Z	3	4	5
1.6	0.948 4	0.949 5	0.950 5
1.7	0.958 2	0.959 1	0.959 9

t 分布

n	$\alpha=0.25$	0.10	0.05	0.025	0.01
4	0.740 7	1.533 2	2.131 8	2.776 4	3.746 7
5	0.726 7	1.475 9	2.015 0	2.570 6	3.364 9

χ^2 分布

n	$\alpha=0.975$	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025
4	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143
5	0.831	1.145	1.610	9.236	11.071	12.833

试卷(三)考核内容分值表

概 率 论 68					数理统计 32		
随机事件	一维变量	二维变量	数字特征	极限定理	抽样分布	参数估计	假设检验
16	16	14	14	8	2	18	12