试 卷 (一)

一、是非题(每题 1 分,共 7 分)

1. 设 $P(A)=0$,则随机事件 A 和任何随机事件 B 一定相互独立. ( )

2. 连续随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ 与其分布函数 $F(x)$ 未必相互唯一确定. ( )

3. 若 X 和 Y 都是标准正态随机变量,则 $X+Y\sim N(0, 2)$. ( )

4. 设有分布律 $P\left(X=(-1)^{n+1}\dfrac{2^n}{n}\right)=\dfrac{1}{2^n}\ (n=1, 2, \cdots)$,则 X 的数学期望存在. ( )

5. 设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立,且均服从参数为 λ 的指数分布,则 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于 λ. ( )

6. 区间估计的置信度 $1-\alpha$ 的提高会降低区间估计的精确度. ( )

7. 在假设检验中,显著性水平 α 是指

$$P(\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为假})=1-\alpha. \quad (\quad)$$

二、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设连续随机变量 X 的密度函数满足 $f(x)=f(-x)$, $F(x)$ 是 X 的分布函数,则 $P(|X|>2\,005)$ 等于 ( )

(A) $2-F(2\,005)$;　　(B) $2F(2\,005)-1$;

(C) $1-2F(2\,005)$;　　(D) $2[1-F(2\,005)]$.

2. 设二维随机变量 (X, Y) 服从 G 上的均匀分布,G 的区域由曲线 $y=x^2$ 和 $y=x$ 所围,则 (X, Y) 的联合概率密度函数为 ( )

(A) $f(x, y)=\begin{cases}6, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他;}\end{cases}$

(B) $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他;}\end{cases}$

(C) $f(x, y)=\begin{cases}2, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他;}\end{cases}$

(D) $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

3. 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(0, 0.5; 0, 0.5; 0)$, $Z=X-Y$, 则方差 $D(|Z|)$等于 ( )

(A) 0; (B) 1;

(C) $1+\dfrac{2}{\pi}$; (D) $1-\dfrac{2}{\pi}$.

4. 设总体 $X \sim B(1, p)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的样本, $\overline{X}$ 为样本均值, 则 $P\left(\overline{X}=\dfrac{k}{n}\right)$等于 ( )

(A) p; (B) $p^k(1-p)^{n-k}$;

(C) $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$; (D) $C_n^k(1-p)^k p^{n-k}$.

5. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 为未知参数, 样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的方差为 S^2, 对假设检验 $H_0: \sigma \geqslant 2$, $H_1: \sigma<2$, 水平为 α 的拒绝域是 ( )

(A) $\chi^2 \leqslant \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$; (B) $\chi^2 \leqslant \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$;

(C) $\chi^2 \leqslant \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$; (D) $\chi^2 \leqslant \chi_{1-\alpha}^2(n)$.

三、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. 已知 $P(A)=0.7$, $P(B)=0.4$, $P(\overline{AB})=0.8$, 则 $P(A \mid A \cup \overline{B})=$ ________.

2. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且都服从[0, 1]上的均匀分布,

则 $Z = |X - Y|$ 的分布函数 $F_Z(z) =$ ________.

3. 设 $E(X) = 1$, $E(Y) = 2$, $D(X) = 1$, $D(Y) = 4$, $\rho_{XY} = 0.6$, $Z = (2X - Y + 1)^2$,则其数学期望 $E(Z) =$ ________.

4. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,由切比雪夫不等式可知,概率 $P(|X - \mu| \geqslant 2\sigma)$ 的取值区间为________与________之间.

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim \chi^2(n)$ 分布的样本,$\overline{X}$ 是样本均值,$E(\overline{X}) =$ ________, $D(\overline{X}) =$ ________.

四、计算题(前三题每题 9 分,后三题每题 10 分,共 57 分)

1. 一盒乒乓球有 6 个新球,4 个旧球. 不放回抽取,每次任取 1 个,共取两次.

(1) 求第二次才取到新球的概率;

(2) 发现其中之一是新球,求另一个也是新球的概率.

2. 某酒吧柜台前有吧凳 7 张,现有 2 个客人进来随机入座(之前无人就座).

(1) 求这 2 人就座相隔凳子数的分布律和数学期望;

(2) 若服务员预言这 2 人之间至少相隔 2 张凳子,求服务员预言为真的概率.

3. 设随机变量 X 在 $(0, \alpha)$ 上随机地取值,服从均匀分布,当观察到 $X = x\ (0 < x < \alpha)$ 时,Y 在区间 (x, α) 内任一子区间上取值的概率与子区间的长度成正比. 求:

(1) (X, Y) 的联合密度函数 $f(x, y)$;

(2) Y 的密度函数 $f_Y(y)$.

4. 某学校东区食堂为提高服务质量,决定对就餐率 p 进行调查. 某天中午随机地对用过餐的同学进行了抽样调查. 设调查了 n 个同学,其中在东区食堂用过餐的学生数为 X. 若要求以大于 95%的概率保证调查所得的就餐频率与 p 之间的误差上下在 10%以内,问: n 应取多大(用中心极限定理)?

5. 设总体 $X \sim f(x) = \dfrac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}$, $\theta > 0$, $-\infty < x < +\infty$ (θ未知),

且$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为来自 X 的一个样本.求：

(1) θ的矩估计量；

(2) θ的极大似然估计量.

6. 自动包装机加工袋装食盐，每袋盐的净重 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (μ, σ^2 未知)，按规定每袋盐的标准重量为 500 g，标准差不能超过 10 g. 某天为检查机器的工作情况，随机地抽取 6 袋，测得样本均值 $\bar{x} = 495.3$ g，样本均方差 $s = 13.74$ g.

问：通过检验期望μ和方差σ^2来判断包装机该天的工作是否正常($\alpha=0.05$)?

附：正态分布、t 分布、χ^2分布数值表：

$\Phi(1.285) = 0.9$，$\Phi(1.645) = 0.95$，$\Phi(1.96) = 0.975$，$\Phi(2.33) = 0.99$

$t_{0.025}(5) = 2.571$，$t_{0.025}(6) = 2.447$，$t_{0.05}(5) = 2.015$，$t_{0.05}(6) = 1.943$

$\chi^2_{0.05}(5) = 11.071$，$\chi^2_{0.05}(6) = 12.592$，$\chi^2_{0.025}(5) = 12.833$，$\chi^2_{0.025}(6) = 14.449$

五、证明题 (6 分)

设 A, B, C 是不能同时发生但两两相互独立的随机事件，且 $P(A) = P(B) = P(C) = \rho$. 证明：$\rho$可取的最大值为$\frac{1}{2}$.

试卷(一)考核内容分值表

概率论 69					数理统计 31		
随机事件	一维变量	二维变量	数字特征	极限定理	抽样分布	参数估计	假设检验
19	10	17	13	10	6	11	14