第六章 样本及抽样分布

【内容预览】

- 基本概念
  - 总体与个体
  - 样本
    - 代表性:与总体具有相同概率分布
    - 独立性:个体之间相互独立
- 统计量
  - 概念:不含其它未知参数的样本函数
  - 常见统计量:
    - 样本均值:$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$
    - 样本方差:$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$
    - 样本k阶原点矩:$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$
    - 样本k阶中心距:$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^k,k=2,3\cdots$
  - 常用统计量的数字特征
    - $E\overline{X}=EX,D\overline{X}=\frac{DX}{n}$
    - $E(S^2)=DX$
- 抽样分布
  - χ^2分布
    - 形式:n个独立标准正态分布的平方和,自由度为n
    - 性质:(1)独立可加性;(2)若$X\sim\chi^2(n)$,则$EX=n,DX=2n$
  - t分布
    - 形式:$Z=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$,其中X,Y独立且$X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$
    - 性质:若$Z\sim t(n)$,则$EZ=0,DZ=\frac{n}{n-2}$
  - F分布
    - 形式:$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$,其中$X,Y$独立且$X\sim\chi^2(n_1),Y\sim\chi^2(n_2)$
    - 性质:若$X\sim t(n)$,则$X^2\sim F(1,n)$
- 单个正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$下的抽样分布
  - $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\overline{X}$与$S^2$独立
  - $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n),\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
- 两个正态总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$的抽样分布

【知识清单】

6.1、基本概念

1.总体、个体、样本

总体——试验的全部可能观察值.

个体——每一可能的观察值.

样本——设X是具有分布函数F的随机变量，若$X_1,X_2,\cdots,X_n$是具有同一分布函数F的，相互独立的随机变量，则称$X_1,X_2,\cdots,X_n$为从分布函数F得到的容量为n的简单随机样本，简称样本，它们的观察值$x_1,x_2,\cdots,x_n$称为样本值，又称为X的n个独立的观察值.

2.统计量及常用的统计量

（1）统计量——设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的一个样本，$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是$X_1,X_2,\cdots,X_n$的函数，若g中不含未知参数，则称$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一统计量.

注：统计量是一个随机变量

（2）常见的统计量

1）样本均值——$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$;

2）样本方差——$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$；样本标准差——$S=\sqrt{S^2}$；

3）样本的k阶原点矩——$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,k=1,2,\cdots$;

4）样本的k阶中心距——$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^k,k=2,3\cdots$.

注：样本均值及样本方差依概率收敛于总体均值及总体方差（大数定律），即

1）$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}EX=\mu$;

2）$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\xrightarrow{P}DX=\sigma^2,S\xrightarrow{P}\sqrt{DX}=\sigma$;

3）$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\xrightarrow{P}EX^k$.

例 6-1：设(X_1,X_2,X_3)为取自总体$N(0,\sigma^2)$的样本，σ^2为未知参数，$T_1=X_1+X_2+X_3$，$T_2=\frac{X_3-X_1}{2}$，$T_3=\sum_{i=1}^{n}X_i/\sigma$和$T_4=\max\{X_1,X_2,X_3\}$中不是统计量的为（　）.

A、T_1　　B、T_2　　C、T_3　　D、T_4

解：由题意，σ^2未知，故σ未知，而$T_3=\sum_{i=1}^{n}X_i/\sigma$，即$T_3$中有未知的参数，故$T_3$不是统计量.

6.2、三个重要的抽样分布

1.χ^2分布——设$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且都服从标准正态分布$N(0,1)$，令$Z=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$,称$Z$服从的分布为$\chi^2(n)$分布，记为$Z\sim\chi^2(n)$.

（1）$E\chi^2(n)=n,D\chi^2(n)=2n$；

（2）（可加性）若$X\sim\chi^2(m),Y\sim\chi^2(n)$且$X,Y$相互独立，则$X+Y\sim\chi^2(m+n)$.

例 6-2：设X_1,X_2,X_3,X_4是来自正态总体$N(0,2^2)$的样本，令$Y=(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2$，则当$C=$ ________时，$CY\sim\chi^2(2)$.

解： $X_1+X_2\sim N(0,8),X_3-X_4\sim N(0,8)$，$\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{8}}\sim N(0,1),\dfrac{X_3-X_4}{\sqrt{8}}\sim N(0,1)$， 由 χ^2分布的定义，

$$\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{8}}\right)^2+\left(\frac{X_3-X_4}{\sqrt{8}}\right)^2\sim\chi^2(2)\Rightarrow C=\frac{1}{8}$$

2.t分布——若$X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$,且$X,Y$相互独立，令$Z=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$，称$Z$服从的分布为$t$分布，记为$Z\sim t(n)$.

（1）t分布近似服从标准正态分布；

（2）若$Z\sim t(n)$,则$EZ=0,DZ=\dfrac{n}{n-2}$；

（3）n越大，t分布越“瘦”，越“高”.

3.F分布——设$X\sim\chi^2(m),Y\sim\chi^2(n)$且$X,Y$独立，令$F=\dfrac{X/m}{Y/n}$，称$F$服从$F$分布，记为$F\sim F(m,n)$.

（1）若$F\sim F(m,n)$，则$\dfrac{1}{F}\sim F(n,m)$;

（2）自由度为n的t分布的平方：$t^2\sim F(1,n)$.

分布	条件	形式	期望	方差	可加性	对称性
$N(\mu,\sigma^2)$	/	$X\sim N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	是	是
$\chi^2(n)$	$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且同分布于$N(0,1)$	$(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)\sim\chi^2(n)$	n	$2n$	是	否
$t(n)$	$X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$,且$X,Y$相互独立	$\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$	0	$\dfrac{n}{n-2}$	否	是
$F(m,n)$	$X\sim\chi^2(m),Y\sim\chi^2(n)$且$X,Y$相互独立	$\dfrac{X/m}{Y/n}\sim F(m,n)$	/*	/*	否	否

注：“*”内容表示不要求掌握，但不代表其不存在

6.3、分布的分位点

☞注意：由于不同学校的教材对分位点的定义不同，因此本节中将对两种定义均做描述，并分别以分位点[1]与分位点[2]进行标识,请大家对应自己使用的教材中的分位点的定义，选择 1 或者 2 进行复习.

1.分位点[1]

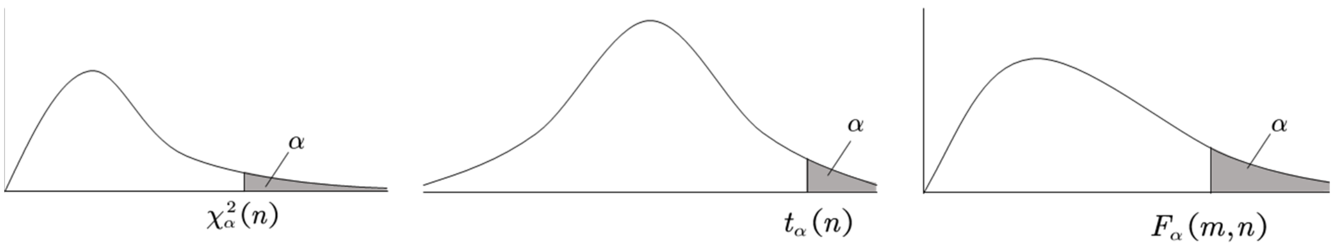
定义——设X是随机变量，$0<p<1$，若实数a_p满足$F(a_p)=P(X>a_p)=p$，则称a_p为X（或X所服从的分布）的p分位点.

则三个重要的抽样分布的α分布点为：

1. χ^2分布分位点——$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\alpha$；

2. t分布分位点——$P\{t>t_\alpha(n)\}=\alpha$；$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$

3. F分布分位点——$P\{F>F_\alpha(m,n)\}=\alpha$；$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)=\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n,m)}$



2.分位点[2]

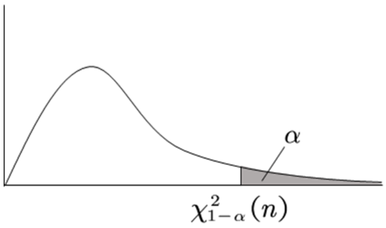
定义——设X是随机变量，$0<p<1$，若实数a_p满足$F(a_p)=P(X\le a_p)=p$，则称a_p为X（或X所服从的分布）的p分位点.

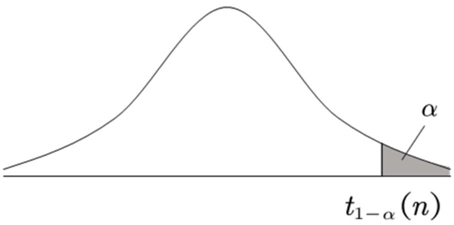
则三个重要的抽样分布的α分布点为：

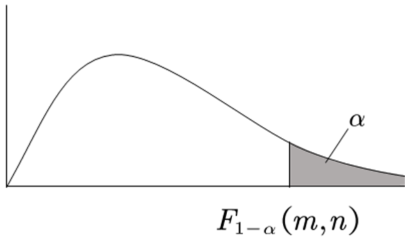
1. χ^2分布分位点——$P\{\chi^2\le\chi_\alpha^2(n)\}=\alpha$；

2. t分布分位点——$P\{t\le t_\alpha(n)\}=\alpha$；$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$

3. F分布分位点——$P\{F\le F_\alpha(m,n)\}=\alpha$；$F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)=\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n,m)}$







6.4、正态总体下常用的抽样分布

1.定理一：设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，则

$$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right),\quad \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1),\quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n).$$

2.定理二：设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，$\overline{X},S^2$分别是样本均值与方差，则有：

$a.\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$;

$b.\overline{X}$与S^2相互独立.

（注意：该定理的证明涉及到矩阵的知识，不需要掌握，但是该性质一定要牢记，考试常考）

☞技巧：因为$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，又因为自由度为$n-1$的卡方分布的期望为$n-1$,方差为$2(n-1)$，所以我们可以得到$S^2$的期望为$\sigma^2$,方差为$\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$

3.定理三：设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，$\overline{X},S^2$分别是样本均值与方差，则有：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1).$$

我们尝试结合定理一和定理二证明这个结论：

我们先对这个式子变形可得：$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\cdot\dfrac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\left(\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\Big/\sqrt{(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2}/(n-1)}$

因为$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，$\overline{X}$与$S^2$相互独立，所以$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$

4.定理四：设总体$X\sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2),Y\sim N(\mu_2,{\sigma_2}^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$是来自总体$X$的样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$是来自总体$Y$的样本，$\overline{X},{S_1}^2$分别是$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$的样本均值与方差，$\overline{Y},{S_2}^2$分别是$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$的样本均值方差，则有：

$a.\dfrac{{S_1}^2/{S_2}^2}{{\sigma_1}^2/{\sigma_2}^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$;

推导：由条件可得：$\frac{(n_1-1){S_1}^2}{{\sigma_1}^2}\sim\chi^2(n_1-1)$，$\frac{(n_2-1){S_2}^2}{{\sigma_2}^2}\sim\chi^2(n_2-1)$，

进一步的有：$\frac{\chi^2(n_1-1)/(n_1-1)}{\chi^2(n_2-1)/(n_2-1)}\sim F(n_1-1,n_2-1)$.

b.当${\sigma_1}^2={\sigma_2}^2=\sigma^2$时，$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，

其中${S_w}^2=\frac{(n_1-1){S_1}^2+(n_2-1){S_2}^2}{n_1+n_2-2}$, $S_w=\sqrt{{S_w}^2}$

推导：$\bar{X}\sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma^2}{n_1}\right)$，$\bar{Y}\sim N\left(\mu_2,\frac{\sigma^2}{n_2}\right)$，则：$\left[\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)\right]\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}\right)$

$(n_1-1){S_1}^2+(n_2-1){S_1}^2=\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_1-\bar{X}\right)^2+\sum_{i=1}^{n_1}\left(Y_1-\bar{Y}\right)^2$，

$\frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_1-\bar{X}\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1)$，$\frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(Y_1-\bar{Y}\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_2-1)$，

即：$\frac{(n_1-1){S_1}^2+(n_2-1){S_1}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$.

则 $\frac{\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}}{\sqrt{\frac{{S_w}^2}{\sigma^2}}}=\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

以上四个定理并不建议通过背诵记忆，而是通过理解推导过程来记忆.

【重要题型】

题型 1：统计量的定义

注意：统计量中绝对不会出现未知的变量，因此抓住这一点后问题就会迎刃而解.

例 6-3：设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ未知，σ^2已知，X_1,X_2,X_3是总体X的一个简单随机样本，则下列表达式中不是统计量的是(　　)

A、$X_1+X_2+X_3$　　B、$\min(X_1,X_2,X_3)$　　C、$\sum_{i=1}^{3}\frac{{X_i}^2}{\sigma^2}$　　D、$X+2\mu$

解：选项 D 中μ未知，所以 D 选项不是统计量

例 6-4：设(X_1,X_2,X_3)为取自总体$N(0,\sigma^2)$的样本，σ^2为未知参数，$T_1=X_1+X_2+X_3$，$T_2=\frac{X_3-X_1}{2}$，

$T_3=\sum_{i=1}^{n}X_i/\sigma$和$T_4=\max\{X_1,X_2,X_3\}$中不是统计量的为（　　）.

A、T_1　　B、T_2　　C、T_3　　D、T_4

解：选项 C 中σ未知，所以 C 选项不是统计量

题型 2：t 分布

题目中如果出现带有根号的分式，则多半是t分布，对于t分布的自由度一定要小心，有一部分题目察t分布是利用公式$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$的变形.

例 6-5： 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的一组简单随机样本，$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差，又设$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$，且与$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，则统计量$\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$服从____________分布(请注明自由度).

解： 因为$\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$，且与$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立

那么根据正态分布的可加性可得：$X_{n+1}-\overline{X}\sim N\left(0,\dfrac{n+1}{n}\sigma^2\right)\Rightarrow\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}\sigma^2}}\sim N(0,1)$

由于$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，则$\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}=\dfrac{\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}\sigma^2}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}}\sim t(n-1)$.

题型 3：卡方分布

如果统计量中出现了平方和的项，则多半考虑卡方分布，注意，卡方分布具有可加性，这是一个考点；另外题目也容易考察$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$这个性质；最后卡方分布的期望和方差也容易出题.

例 6-6： 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，其中$\overline{X}$为样本均值，则下列结论正确的是（　　）.

A、$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$　　B、$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$

C、$\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$　　D、$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\sim\chi^2(n)$

解： $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$，所以选择 A 选项

例 6-7： 设总体$X\sim N(1,4)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的一个样本，$\overline{X}$为样本均值，则$E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)=$（　　）.

A、$4n$　　B、$4(n-1)$　　C、$2n$　　D、$2(n-1)$

解：$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$

因为自由度为$n-1$的卡方分布的期望为$n-1$

那么$E\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)=n-1 \Rightarrow E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)=4(n-1)$

题型 4：F 分布

如果统计量中出现分式，且分子分母中都有平方项，则该统计量很有可能是 F 分布，需要注意的是 F 分布的分子分母还都除以的平方项的个数. F 分布的性质也是考试中常考的知识点.

例 6-8：设$X_1 \sim X_4$相互独立，均服从$N(0,1)$. $Z=c\times\frac{X_1^{\ 2}/1}{X_2^{\ 2}+X_3^{\ 2}+X_4^{\ 2}}$服从$F$分布，则常数$c=$（ ）.

A、3　　B、$\frac{1}{3}$　　C、$\frac{2}{3}$　　D、1

解：$X_1^{\ 2}\sim\chi^2(1), X_2^{\ 2}+X_3^{\ 2}+X_4^{\ 2}\sim\chi^2(3)$,则$Z=\frac{X_1^{\ 2}/1}{(X_2^{\ 2}+X_3^{\ 2}+X_4^{\ 2})/3}\sim F(1,3)$,故$c=3$.

例 6-9：设随机变量$T\sim t(15)$，则T^2服从的分布为__________.

解：自由度为n的t分布的平方：$t^2\sim F(1,n)$，那么T^2的分布为$F(1,15)$

题型 5：统计量的分位数

这类题目主要考察我们对分位数的理解，解题方法一般是画图分析，因此我们脑海中要记住正态分布、t分布、卡方分布和 F 分布的图形（前两者图形是关于 y 轴对称的）.请根据书本分位点的定义选择分位点 1 或者分位点 2。

1.分位点[1]

例 6-10：设总体$X\sim N(\mu,16)$, $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$是取自X的样本，S^2为样本方差，求常数$a=$（ ），使$P(S^2\geqslant a)=0.1$成立.

A、$\frac{16}{9}\chi_{0.1}{}^2(9)$　　B、$\frac{16}{9}\chi_{0.05}{}^2(10)$　　C、$\chi_{0.1}{}^2(10)$　　D、$\chi_{0.05}{}^2(9)$

解：$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\Rightarrow 9\frac{S^2}{16}\sim\chi^2(9)$，

$P(S^2\geqslant a)=P\left(\frac{9}{16}S^2\geqslant\frac{9}{16}a\right)=0.1\Rightarrow\frac{9}{16}a=\chi_{0.1}{}^2(9)\Rightarrow a=\frac{16}{9}\chi_{0.1}{}^2(9)$

例 6-11：设随机变量X服从自由度为 2 的χ^2分布，用$\chi_\alpha^2(2)$表示自由度为 2 的χ^2分布的α分位数，且$P(x<X<y)=0.95$，$P(X>y)=0.02$. 则__________（请用X所服从的分布的分位数表示x和y）.

解：根据分位数的定义可得$y=\chi^2_{0.02}(2)$,又因为$P(x<X<y)=0.95$,$P(X>y)=0.02$，

所以$P(X>x)=0.97$，那么$x=\chi^2_{0.97}(2)$.

2.分位点[2]

例 6-12：设随机变量x服从自由度为 24 的χ^2分布，用$\chi^2{}_\alpha(2)$表示自由度为 24 的χ^2分布的α分位数，已知$P\{\chi^2(24)<13.75\}=0.05$，$P\{13.75\leqslant\chi^2(24)\leqslant 36.25\}=0.90$，则$\chi^2{}_{0.05}(24)=$________.

解：$P\{\chi^2(24)>36.25\}=1-P\{\chi^2(24)<13.75\}-P\{13.75\leqslant\chi^2(24)\leqslant 36.25\}=0.05$

故$\chi^2{}_{0.05}(24)=36.25$

例 6-13：设随机变量X服从自由度为 2 的χ^2分布，用$\chi^2_\alpha(2)$表示自由度为 2 的χ^2分布的α分位数，且$P(x<X<y)=0.95$，$P(X>y)=0.02$. 则__________（请用X所服从的分布的分位数表示x和y）.

解：$P(X\leq y)=1-P(X>y)=0.98$，根据分位数的定义可得$y=\chi^2_{0.98}(2)$

又因为$P(x<X<y)=0.95$,$P(X>y)=0.02$

所以$P(X\leq x)=1-P(x<X<y)-P(X>y)=0.03$

那么$x=\chi^2_{0.03}(2)$

题型 6：抽样分布统计量的判断

这一类题目考察我们对四个定理的理解，题目多为选择题，选项中的统计量多为定理中结论或结论的简单变形，因此一定要牢记这四个定理中的结论.

☞技巧：1. 利用常用的抽样分布（宝典 6.3）来排除一些选项.

2. 利用定义来判断其形式是否正确，顺序为正态分布$\rightarrow\chi^2$分布$\rightarrow\begin{cases}t\text{分布}\\F\text{分布}\end{cases}$

例 6-14：设随机变量$X\sim N(0,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自X的样本，$\overline{X}$为样本均值,S^2为样本方差.则（ ）.

A. $\overline{X}\sim N(0,1)$；

B. $n\overline{X}\sim N(0,1)$；

C. $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i{}^2\sim\chi^2(n)$；

D. $\dfrac{\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$.

解：$A:E\overline{X}=\mu,D\overline{X}=D\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)=\dfrac{\sigma^2}{n}$，$\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)\Rightarrow\overline{X}\sim N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，$A$错误

B:$E\left(n\overline{X}\right)=n\mu, D\left(n\overline{X}\right)=D\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=n\sigma^2$，$n\overline{X}\sim N(n\mu,n\sigma^2)\Rightarrow n\overline{X}\sim N(0,n)$，$B$ 错误

C： 由卡方分布的定义即可得. D: 显然不符合 t 分布的定义；所以选择 C 选项

例 6-15:（哈工大 2013）设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X\sim N(0,1)$的简单随机样本，则下列统计量的分布不正确的是（ ）

A、$\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$

B、$\dfrac{\sqrt{n-1}\,X_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}X_i^2}}\sim t(n-1)$

C、$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(0,1)$

D、$\dfrac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\sum_{i=1}^{2}X_i^2}{\sum_{i=3}^{n}X_i^2}\sim F(2,n-2)$

解：选项 A：$\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$成立

选项 B：$X_n\sim N(0,1)$，$\sum_{i=1}^{n-1}X_i^2\sim\chi^2(n-1)\Rightarrow\dfrac{\sqrt{n-1}\,X_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}X_i^2}}=\dfrac{X_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}X_i^2/(n-1)}}\sim t(n-1)$正确

选项 C：$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$错误

选项 D：$S_1^2=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}X_i^2$，$S_2^2=\dfrac{1}{n-2}\sum_{i=3}^{n}X_i^2\Rightarrow\dfrac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}X_i^2}{\frac{1}{n-2}\sum_{i=3}^{n}X_i^2}=\dfrac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\sum_{i=1}^{2}X_i^2}{\sum_{i=3}^{n}X_i^2}\sim F(2,n-2)$

【精选习题】

基础篇

1.设(X_1,X_2,X_3)为取自总体的样本，σ^2已知，μ未知，则$T_1=X_1+X_2+X_3,T_2=(X_3\text{-}\mu)/2$，$T_3=\sum_{i=1}^{3}X_i$和$T_4=\max\{X_1,X_2,X_3\}$中不是统计量的是( ).

A、T_1； B、T_2； C、T_3； D、T_4.

2. 设 X_1,X_2 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$Y_1=X_1+X_2$，$Y_2=X_1-X_2$，则协方差 $Cov(Y_1,Y_2)=$__________，已知(Y_1,Y_2)服从二维正态分布，如果c为非零常数，则当$c=$_______时，$\dfrac{c(Y_1-2\mu)}{|Y_2|}$服从自由度为__________的__________分布.

3.设X_1,X_2,X_3,X_4是来自正态总体$N(0,2^2)$的样本，令$Y=(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2$，则当$C=$ __________时，$CY\sim\chi^2(2)$.

4.设$(X_1,X_2\cdots,X_{10})$是取自正态总体 $N(0,4)$的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，$\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$ 为样本方差，则 $c=$_________时，$c\left(\dfrac{\overline{X}}{S}\right)^2$ 服从F 分布.

5.设随机变量$X\sim t(n)$，对给定的实数$\alpha(0<\alpha<1)$，实数$t_\alpha(n)$满足$P\{X>t_\alpha(n)\}=\alpha$，若$P\{|X|>x\}=\alpha$，则$x$等于（ ）.（此题请学习分位点 1 的同学做）

A、$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$　　B、$t_{1-\alpha}(n)$　　C、$t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$　　D、$t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$

6.设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，$\overline{X}$与S^2分别为其样本均值和样本方差，则下列结论正确的是（　　）

A、$2X_2-X_1\sim N(\mu,\sigma^2)$　　B、$\dfrac{n\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$

C、$\dfrac{S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$　　D、$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1}\sim t(n-1)$

7．设$X_1,X_2,\cdots,X_8$是来自正态总体$N(0,4)$的简单随机样本，则常数$c=$________时，统计量

$Y=\dfrac{c(X_1-X_2)}{\sqrt{\sum\limits_{i=3}^{8}X_i^2}}\sim$________（注：确定分布），$P\left\{\left|\overline{X}\right|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}=$________.

8.设总体$X\sim N(1,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_6$是取自X的简单随机样本，$\overline{X},S$分别为样本均值与样本标准差，则$P\left(\overline{X}>1\right)=$________，$P\left(\overline{X}<1,S^2<1.8472\sigma^2\right)=$________.（$\chi^2_{0.1}(5)=9.236$）

9．设随机变量$X\sim t(n)$（$n>1$），则$Y=\dfrac{1}{X^2}$服从的分布为(　　).

A、$\chi^2(n)$　　B、$\chi^2(n-1)$　　C、$F(n,1)$　　D、$F(1,n)$

10.设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$N(0,1)$的简单随机样本，则$a=$______，

$a\sum\limits_{i=1}^{5}(X_i-X_{11-i})^2\sim$______，$\dfrac{2(X_1-X_2)}{\sqrt{\sum\limits_{i=3}^{10}X_i^2}}\sim$________.

提高篇

11.设$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{15})$分别是来自正态$N(0,1)$的总体X,Y的样本，

$Z=\sum\limits_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2+\sum\limits_{i=1}^{15}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$，则$EZ=$________.

12.设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自X的简单随机样本，记$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，

$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$，$T=\overline{X}^2-\dfrac{1}{n}S^2$.

（1）证明$E(T)=\mu^2$；（2）当$\mu=0,\sigma=1$时，求T的方差.

（部分习题讲解视频：关注公众号"**学解**"，回复"**概率论讲解**"获取）

学霸讲解视频
关注后回复"**概率论讲解**"