# 试　卷　(六)

**一、选择题**（每题 3 分，共 24 分）

1. 将 3 个人以相同的概率分配到 4 个房间的每一间中，恰有 3 个房间中各有一人的概率为　　(　　)

(A) 0.75；　　(B) 0.375；

(C) 0.187 5；　　(D) 0.125.

2. 设两个随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立且同分布：

$$P(X=-1)=P(Y=-1)=P(X=1)=P(Y=1)=\frac{1}{2},$$

则下列各式中成立的是　　(　　)

(A) $P(X=Y)=\frac{1}{2}$；　　(B) $P(X=Y)=1$；

(C) $P(X+Y=0)=\frac{1}{4}$；　　(D) $P(XY=1)=\frac{1}{4}$.

3. 设袋中有编号为 1, 2, …, $n$ 的 $n$ 张卡片，有放回地随机抽取 $k$ 张卡片，记 $X$ 表示 $k$ 张卡片的号码之和，则 $E(X)$ 为　　(　　)

(A) $\frac{k(n+1)}{2}$；　　(B) $\frac{n+1}{2}$；

(C) $\frac{n(k+1)}{2}$；　　(D) $\frac{n(k-1)}{2}$.

4. 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 独立同分布，记 $U=X+Y$, $V=X-Y$，则随机变量 $U$ 和 $V$ 必然　　(　　)

(A) 不独立；　　(B) 相互独立；

(C) 不相关；　　(D) 无法判断.

5. 下列各函数中可以作为某个随机变量的分布函数的是　(　　)

(A) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x\in\mathbb{R})$；

(B) $F(x)=\sin x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$；

(C) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2} & (x<0),\\ 1 & (x\geqslant 0);\end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases}0 & (x<0),\\ 0.6 & (x=0),\\ 1 & (x>0).\end{cases}$

6. 设 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\ S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$S_3=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\ S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 $t$ 分布的随机变量是 (　　)

(A) $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n}}$；　　(B) $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$；

(C) $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n-1}}$；　　(D) $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$.

7. 对正态总体的数学期望 $\mu$ 进行假设检验，如果在显著水平 0.05 下接受 $H_0$：$\mu=\mu_0$，那么在显著水平 0.01 下，下列结论中正确的是 (　　)

(A) 必接受 $H_0$；　　(B) 可能接受，也可能拒绝 $H_0$；

(C) 必拒绝 $H_0$；　　(D) 不接受，也不拒绝 $H_0$.

8. 设 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_9$ 相互独立，且 $E(X_i)=1,\ D(X_i)=1\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$，则对任意 $\varepsilon>0$，有 (　　)

(A) $P\left(\left|\sum_{i=1}^{9}X_i-1\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\varepsilon^{-2}$；

(B) $P\left(\left|\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i-1\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\varepsilon^{-2}$;

(C) $P\left(\left|\sum_{i=1}^{9}X_i-9\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\varepsilon^{-2}$;

(D) $P\left(\left|\sum_{i=1}^{9}X_i-9\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-9\varepsilon^{-2}$.

**二、填空题**（每题 3 分，共 24 分）

1. 设 10 件产品中含有 4 件次品，今从中任取 2 件，发现其中一件是次品，则另一件是次品的概率为________.

2. 设 $A$, $B$ 为两个随机事件，且 $P(A)=0.7$, $P(B)=0.6$, $P(A-B)=0.3$，则 $P(A\mid B)=$ ________.

3. 设随机变量 $X$ 的概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{Ax}{(1+x)^4} & (x\geqslant 0),\\ 0 & (x<0),\end{cases}$$

则 $A=$________.

4. 设二维随机变量$(X, Y)$的联合分布律为

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0.12 | $p_1$ |
| 1 | $p_2$ | 0.42 |

要使$(X, Y)$相互独立，则 $p_1=$________，$p_2=$________.

5. 设随机变量服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，已知 $E((X-1)(X-2))=1$，则 $\lambda=$ ________.

6. 设二维随机变量$(X, Y)$在区域 $D$ 上服从均匀分布，其中 $D$ 由曲线 $y=x^{-1}$ 及直线 $y=0$, $x=1$, $x=\mathrm{e}^2$ 所围成，则其边缘密度函数 $f_X(x)$ 在 $x=2$ 处的值为________；在已知 $x=0.5$ 条件下 $Y$ 的条件概

率密度函数 $f_{Y|X}(y \mid x=0.5)=$ ________.

7. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，当 $c=$ ________ 时，统计量 $T=c(X_n-\overline{X})^2$ 服从 $\chi^2$ 分布.

8. 设一批产品的某一指标 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，从中随机抽取容量为 25 的样本，测得样本方差的观察值 $s^2=100$，则总体方差 $\sigma^2$ 的 95% 的置信区间为________.

**三、计算题**（每题 8 分，共 48 分）

1. 设有两只箱子内装有某产品，已知甲箱中有 5 个正品，3 个次品；乙箱中有 4 个正品，3 个次品. 现从甲箱中任取 3 个产品放入乙箱，然后再从乙箱中任取 1 个产品. 求：

(1) 从乙箱中取出的这个产品是正品的概率；

(2) 若从乙箱中取出的是正品，求最先从甲箱中取出的 3 个产品都是正品的概率.

2. 已知 $(X, Y)$ 的联合密度

$$f(x, y)=\begin{cases}3y & (0 \leqslant y<1,\ 0<x<y), \\ 0 & (\text{其他}),\end{cases}$$

且随机变量 $Z=X+Y$. 求 $Z$ 的概率密度函数.

3. 某农贸市场的某种商品价格波动为随机变量. 设第 $i$ 天（较前一天）的价格变化为 $X_i$，其中 $X_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 为独立同分布，$E(X_i)=0$，$D(X_i)=0.04$. 设第 $n$ 天的价格为 $Y_n$，则 $Y_n=Y_0+\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. 若现在的价格为 20 元/斤（即 $Y_0=20$），试求：

(1) 试利用切比雪夫不等式估计概率 $P(18 \leqslant Y_{30} \leqslant 22)$；

(2) 试利用中心极限定理估计概率 $P(18 \leqslant Y_{30} \leqslant 22)$.

4. 某箱装有 100 件产品，其中一等、二等和三等品分别为 80，10 和 10，现从中随机地抽取一件，记 $X_i=\begin{cases}1 & (\text{若抽到 } i \text{ 等品}), \\ 0 & (\text{其他}),\end{cases}$ 其中 $i=$

1，2，3. 试求：

(1) 随机变量 $X_1$ 和 $X_2$ 的联合分布；

(2) 随机变量 $X_1$ 和 $X_2$ 的相关系数 $\rho_{X_1X_2}$.

5. 设总体 $X$ 的密度函数

$$f(x;\theta,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} & (x\geqslant\mu),\\ 0 & (x<\mu).\end{cases}$$

其中 $\theta>0$；$\mu$，$\theta$ 是未知参数；$X_1$，$X_2$，…，$X_n$ 为取自总体 $X$ 的样本. 试求：$\mu$，$\theta$ 的极大似然估计量.

6. 用包装机包装某种洗衣粉，在正常情况下，每袋重量为 1 000 g，标准差 $\sigma$ 不能超过 15 g. 假设每袋洗衣粉的净重 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 某天为检验机器工作是否正常，从包装好的洗衣粉中随机抽取 10 袋，并测得其净重的样本均值 $\bar{x}=998$，样本方差 $s^2=30.23^2$. 问：这天机器工作是否正常？（取 $\alpha=0.05$.）

**四、证明题**（4 分）

设 $X_1$，$X_2$，…，$X_n$ 为取自总体 $X$ 的简单随机样本，已知 $E(X^k)=\alpha_k(k=1,2,3,4)$. 证明：当 $n$ 充分大时，随机变量 $Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布 $N\left(\alpha_2,\frac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}\right)$.

**试卷(六)考核内容分值表**

| 概率论 69 | | | | | 数理统计 31 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 随机事件 | 一维变量 | 二维变量 | 数字特征 | 极限定理 | 抽样分布 | 参数估计 | 假设检验 |
| 17 | 9 | 17 | 14 | 12 | 9 | 11 | 11 |