概率论与数理统计

习题课1

第一章　　习题课

1、 甲、乙、丙三人各向目标射击一发子弹，以A、B、C分别表示甲、乙、丙命中目标，试用A、B、C的运算关系表示下列事件：

A_1："至少有一人命中目标"：　$A\cup B\cup C$

A_2："恰有一人命中目标"：　$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$

A_3："恰有两人命中目标"：　$AB\bar{C}\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C$

A_4："最多有一人命中目标"：　$\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}$

A_5："三人均命中目标"：　ABC

A_6："三人均未命中目标"：　$\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$

2、 将3个球随机的放入3个盒子中去，问:（1）每盒恰有一球的概率是多少？（2）空一盒的概率是多少？

解 设 A:每盒恰有一球,B:空一盒

$$N(S)=3^3 \qquad N(A)=3! \qquad P(A)=\frac{2}{9}$$

$$P(B)=1-P\{空两合\}-P\{全有球\}$$

$$=1-\frac{3}{3^3}-\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$$

3、 某市有甲,乙,丙三种报纸,订每种报纸的人数分别占全体市民人数的30%,其中有10%的人同时定甲,乙两种报纸.没有人同时订甲丙或乙丙报纸.求从该市任选一人,他**至少**订有一种报纸的概率.

解 设A , B , C分别表示选到的人订了甲 , 乙 , 丙报

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=30\%\times 3-10\%-0-0+0=80\%$$

4、 市场上有甲、乙、丙三家工厂生产的同一品牌产品，已知三家工厂的市场占有率分别为1/4、1/4、1/2，且三家工厂的次品率分别为 2%、1%、3%，试求市场上该品牌产品的次品率。

设：B：买到一件次品

A_1：买到一件甲厂的产品

A_2：买到一件乙厂的产品

A_3：买到一件丙厂的产品

$$P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + P(BA_3)$$

$$= P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + P(B \mid A_3)P(A_3)$$

$$= 0.02 \times \frac{1}{4} + 0.01 \times \frac{1}{4} + 0.03 \times \frac{1}{2} \approx 0.0225$$

5、商店论箱出售玻璃杯,每箱20只,其中每箱含0，1，2只次品的概率分别为0.8, 0.1, 0.1，某顾客选中一箱，从中任选4只检查，结果都是好的，便买下了这一箱.问这一箱含有一个次品的概率是多少？

解 设A:从一箱中任取4只检查,结果都是好的.

B_0, B_1, B_2分别表示事件每箱含0，1，2只次品

已知:$P(B_0)=0.8$, $P(B_1)=0.1$, $P(B_2)=0.1$

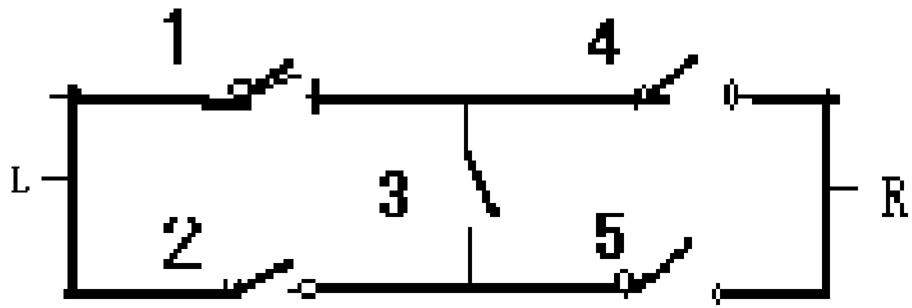
$$P(A|B_0)=1 \quad P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5} \quad P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

由*Bayes* 公式:

$$P(B_1 \mid A)=\frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

$$=\frac{0.1\times{}^{4}\!/_{5}}{0.8\times1+0.1\times{}^{4}\!/_{5}+0.1\times{}^{12}\!/_{19}}\approx0.0848$$

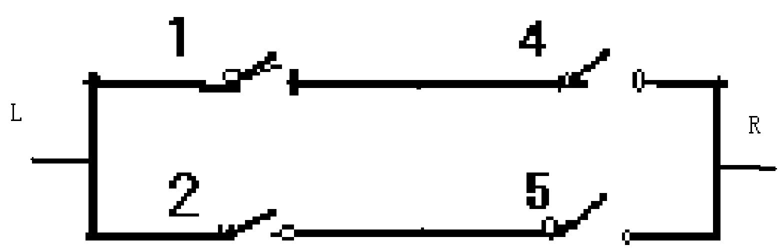
6、如图，1、2、3、4、5表示继电器触点,假设每个触点闭合的概率为 p ,且各继电器触点闭合与否相互独立，求 L 至 R 是通路的概率.



解：设 A 表示“L 至 R 为通路”，

A_i 表示“第 i 个继电器通”, i =1,2,…5.

$$P(A|\overline{A}_3) = P(A_1A_4 \cup A_2A_5) = 2p^2 - p^4$$



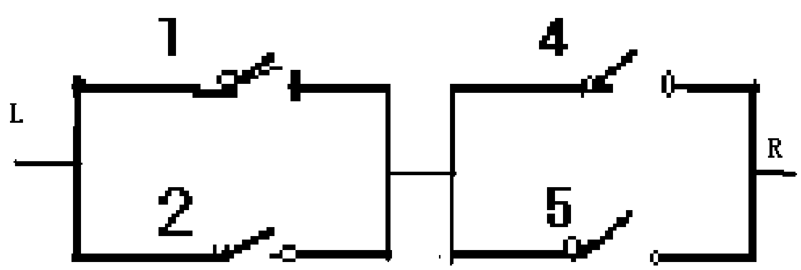
$$P(A|A_3)=P\{(A_1\cup A_2)(A_4\cup A_5)\}$$

$$P(A|A_3)=P(A_1\cup A_2)P(A_4\cup A_5)=(2p-p^2)^2$$

由全概率公式

$$P(A)=P(A|\overline{A}_3)P(\overline{A}_3)+P(A|A_3)P(A_3)$$

$$=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5$$



第二章　　习题课

1、设离散型随机变量X分布律为

$$P\{X=k\}=5A(1/2)^k \quad (k=1,2,\cdots)$$

则$A=$______________

解：　由$\sum_{k=1}^{\infty} p_k=1$即　$\sum_{k=1}^{\infty}\left[5A(1/2)^k\right]=1$

得　$A=\dfrac{1}{5}$

2、已知随机变量 X 的密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$，且 $P\{X>0.5\}=5/8$，则

$a=$____________　　$b=$____________

解：由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，得 $\int_0^1 (ax+b)dx=\frac{a}{2}+b=1$

又 $P\{X>0.5\}=\int_{0.5}^1 (ax+b)dx=\frac{3a}{8}+\frac{b}{2}=\frac{5}{8}$，解得：$a=1$，$b=\frac{1}{2}$

3、设 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则

$P\{X<0\}=$____________

解：由对称性得 $P\{X<2\}=0.5$，　$P\{0<X<2\}=0.3$，

所以 $P\{X<0\}=P\{X<2\}-P\{0<X<2\}=0.2$

4、设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，那么当 σ 增大时，$P\{|X-\mu|<\sigma\}=$__________

A）增大；　　B）减少；

C）不变；　　D）增减不定。

解：由 $P\{|X-\mu|<\sigma\} = P\{\frac{|X-\mu|}{\sigma}<1\}$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)$$

$$=2\Phi(1)-1$$

5、设 X 的密度函数为 $f(x)$,分布函数为 $F(x)$,且 $f(x)=f(-x)$,那么对任意给定的 a 都有＿

A) $f(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$;

B) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$;

C) $F(a)=F(-a)$;　　**D)** $F(-a)=2F(a)-1$

解：由对称性得 $F(0)=P\{X\le 0\}=0.5$,

$$\therefore\ F(-a)=P\{X\le -a\}=\int_{-\infty}^{-a} f(x)dx$$

$$=\int_a^{+\infty} f(x)dx=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$$

6、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=Ae^{-|x|}$ $(-\infty<x<+\infty)$，求（1）系数 A；(2) $P\{0\le X\le 1\}$；(3) 分布函数 $F(x)$.

解：(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}dx=2\int_{0}^{+\infty} Ae^{-x}dx$

$$=2A=1$$ 得：$A=\frac{1}{2}$

(2) $P\{0\le X\le 1\}=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x}dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

(3) $F(x)=P\{X\le x\}$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{t}dt, & x<0\\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{t}dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{-t}dt, & x\ge 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{x}, & x\ge 0\end{cases}$$

7、对球的直径作测量，设其值均匀地分布在$[a,b]$内。求体积的概率密度。

解：直径X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}$

体积$Y=\dfrac{\pi}{6}X^3$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\left\{\frac{\pi}{6}X^3\le y\right\}=P\left\{X\le\sqrt[3]{\frac{6y}{\pi}}\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{6y/\pi}} f(x)dx$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<\frac{\pi}{6}a^3\\ \int_a^{\sqrt[3]{6y/\pi}}\frac{1}{b-a}dx, & \frac{\pi}{6}a^3\le y<\frac{\pi}{6}b^3\\ 1, & y\ge\frac{\pi}{6}b^3\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\left(\sqrt[3]{6y/\pi}\right)'\frac{1}{b-a}, & \frac{\pi}{6}a^3<y<\frac{\pi}{6}b^3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{\pi(b-a)}\left(\frac{6y}{\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}, & \frac{\pi}{6}a^3<y<\frac{\pi}{6}b^3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

8、设在独立重复实验中，每次实验成功概率为0.5，问需要进行多少次实验，才能使至少成功一次的概率不小于0.9

解：设需要N次，由 $X \sim b(N, 0.5)$

至少成功一次概率：

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X < 1\} = 1 - P\{X = 0\}$$

$$= 1 - 0.5^N \geq 0.9$$

得 $N \geq 4$