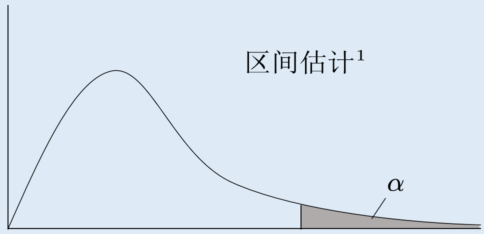
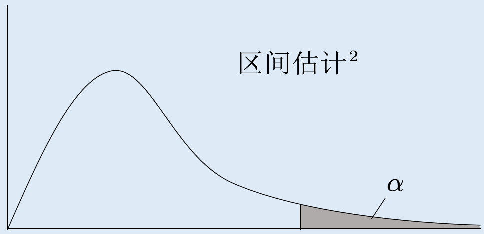
第八章 区间估计

注意：在第六章中我们已经提到不同教材中对于分位点的定义不同，因此区间估计的表示方式也有差异. 下面内容根据两种定义分为两个部分，分别是区间估计[1]（P78）与区间估计[2]（P82），分别对应分位点[1]与分位点[2]. 分位点[1]定义表示如图一所示，分位点[2]定义表示如图二所示，请大家对照自己使用的教材复习。



图一 $\chi^2_\alpha(n)$



图二 $\chi^2_{1-\alpha}(n)$

区间估计[1]

【内容预览】

- 单个正态总体区间估计 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，置信水平为 $1-\alpha$
  - 总体均值
    - σ^2 已知，$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
    - σ^2 未知，$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$
  - 总体方差
    - μ 已知，$\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$
    - μ 未知，$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$
- 两个正态总体区间估计 $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，置信水平为 $1-\alpha$
  - 总体均值差 $(\mu_1-\mu_2)$
    - σ_1^2,σ_2^2 已知，$\left(\left(\overline{X_1}-\overline{X_2}\right)\mp z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)\right)$
    - $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2,\sigma^2$ 未知，$\left(\left(\overline{X_1}-\overline{X_2}\right)\mp t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$
  - 总体方差比 $\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)$
    - μ_1,μ_2 已知，$\left(\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum\limits_{j=1}^{n_2}(X_j-\mu_2)^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)},\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum\limits_{j=1}^{n_2}(X_j-\mu_2)^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)}\right)$
    - μ_1,μ_2 未知，$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

【知识清单】

8.1、区间估计

对于未知参数θ，除了求出它的点估计外，我们还希望给它一个范围，并希望知道这个范围包含参数θ真值的可信程度，这样的范围通常以区间的形式的给出，同时还给出此区间包含参数θ真值的可信程度，这种形式我们称为区间估计.

8.2、置信区间

1.双侧置信区间

对于给定值$\alpha(0<\alpha<1)$，若由样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$确定的两个统计量$\underline{\theta},\overline{\theta}\left(\underline{\theta}<\overline{\theta}\right)$，对于任意的$\theta\in\Theta$满足：

$$P\left\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\right\}\geq 1-\alpha$$

若X为连续型随机变量，我们总是要求$P\left\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\right\}=1-\alpha$求出置信区间，若$X$为离散型随机变量则使$P\left\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\right\}$尽可能的接近$1-\alpha$.称$\left(\underline{\theta},\overline{\theta}\right)$为参数$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间. 其中$\underline{\theta}$和$\overline{\theta}$分别为置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间的置信下限和置信上限，$1-\alpha$称为置信水平.

2.单侧置信区间

对于给定值$\alpha(0<\alpha<1)$，若由样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$确定的两个统计量$\underline{\theta}$，对于任意的$\theta\in\Theta$满足：

$$P\left\{\underline{\theta}<\theta\right\}\geq 1-\alpha$$

同上面的处理，若X为连续型随机变量，我们要求$P\left\{\underline{\theta}<\theta\right\}=1-\alpha$，若$X$为离散型随机变量则使$P\left\{\underline{\theta}<\theta\right\}$尽可能的接近$1-\alpha$.称$\left(\underline{\theta},+\infty\right)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间. 其中$\underline{\theta}$称为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限.

若由样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$确定的两个统计量$\overline{\theta}$，对于任意的$\theta\in\Theta$满足：

$$P\left\{\theta<\overline{\theta}\right\}\geq 1-\alpha$$

同上面的处理，若X为连续型随机变量，我们要求$P\left\{\theta<\overline{\theta}\right\}=1-\alpha$，若$X$为离散型随机变量则使$P\left\{\theta<\overline{\theta}\right\}$尽可能的接近$1-\alpha$.称$\left(-\infty,\overline{\theta}\right)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间. 其中$\overline{\theta}$称为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信上限.

8.3、基本原理（以正态分布为例）

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2为已知，μ未知，设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的样本，求μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.首先寻找一个枢轴量$W=W(X_1,X_2,\cdots,X_n;\mu)$，该枢轴量的要求是其分布不依赖于$\mu$.

选择枢轴量为$W=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，可知分布$N(0,1)$不依赖于未知参数$\mu$.

那么根据定义：$P\{a<W<b\}=P\left\{a<\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<b\right\}=1-\alpha$，进一步的按照正态分布上$\alpha$分位点的定义，

有：$P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$，进一步的可以解得$P\left\{\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}<\mu<\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$，得到最终的置信区间为$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

8.4.常见的置信区间（置信度为1 − α）

注：下表给出了常考的置信区间的公式，但并不建议通过背诵的方式去记忆，而是根据上文提到的原理，先找到合适的枢轴量，然后根据置信区间与分位数的定义，推导出正确的置信区间.

条件	统计量分布	置信区间
σ^2 已知，μ 的置信区间	正态分布	$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
σ^2 未知，μ 的置信区间	t 分布	$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$;
μ 未知，σ^2 的置信区间	χ^2 分布	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$
μ 已知，σ^2 的置信区间	χ^2 分布	$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$
σ_1^2,σ_2^2 已知， $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间	正态分布	$\left((\overline{X_1}-\overline{X_2})\mp z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)\right)$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2,\sigma^2$ 未知， $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间	t 分布	$\left((\overline{X_1}-\overline{X_2})\mp t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$
μ_1,μ_2 已知， $\frac{\sigma_1{}^2}{\sigma_2{}^2}$ 的置信区间	F 分布	$\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(X_j-\mu_2)^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)},\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(X_j-\mu_2)^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)}\right)$
μ_1,μ_2 未知， $\frac{\sigma_1{}^2}{\sigma_2{}^2}$ 的置信区间	F 分布	$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

【重要题型】

题型 1：置信区间

例 8-1：若用机器装罐头，已知罐头重量 $X\sim N(\mu,0.02^2)$，则随机抽取 25 个进行测量，得样本均值 $\overline{x}=1.05kg$，则总体期望 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为__________. S

$(\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95)$

解：由题意，σ 已知，故枢轴变量选取 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，则：置信区间的公式为：$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}\right)$

$$\left(1.05-\frac{0.02}{\sqrt{25}}\times1.96,1.05+\frac{0.02}{\sqrt{25}}\times1.96\right)\Rightarrow(1.042,1.058)$$

例 8-2：设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中σ^2未知，由来自总体 X 的一个容量为 9 的样本计算的样本均值$\overline{x}=6$，样本标准差$S=0.5$，则参数μ的置信度（水平）为 0.95 的置信区间为________.($t_{0.025}(8)=2.306$)

解：由题意，σ未知，故枢轴变量选取$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，则：

$$\left|\frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right| \leq t_{0.025}(8)=2.306 \Rightarrow \left|\frac{6-\mu}{0.5/3}\right| \leq 2.306 \Rightarrow (5.616,6.384)$$

例 8-3：设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取容量为 16 的一个样本，样本方差$S^2=0.07$，试求总体方差的置信度为 0.95 的置信区间________.(精确到小数点后第三位)
$\chi^2_{0.025}(15)=27.488,\chi^2_{0.975}(15)=6.262,\chi^2_{0.025}(16)=28.845,\chi^2_{0.975}(16)=6.908$

解：置信区间的公式为：$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

$$\left(\frac{(16-1)\times 0.07}{27.488},\frac{(16-1)\times 0.07}{6.262}\right) \Rightarrow (0.038,0.168)$$

【精选习题】

基础篇

1.对于正态总体$N(\mu,\sigma^2)$,σ^2未知，记 L 是μ的置信度为 0.95 的置信区间的长度，那么当样本容量 n______时，$L \leqslant \sigma$.(参考如下)$U_{0.05}=1.645,U_{0.025}=1.96,t_{0.05}(15)=1.753,t_{0.025}(16)=2.12$

2.生产一个零件所需时间$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，观察 25 个零件的生产时间得$\overline{X}=5.5$秒，样本标准差为$S=1.73$秒，则μ的置信度为 0.95 的置信区间为________.

注：$t_{0.05}(24)=1.7109,t_{0.025}(24)=2.0639,t_{0.025}(25)=2.0595,\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95$.

3. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是取自 X 的样本观测值，样本方差 S^2 为 2. 已知 $\chi^2_{0.975}(9)=2.70$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$,则σ^2的置信水平为 0.95 的置信区间为 ________.

4.设有来自总体$X \sim N(\mu,0.9^2)$的容量为 9 的简单随机样本，样本均值为$\overline{X}$=6,则未知参数μ的置信区间为 0.95 的单侧置信区间的下限为________.($\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.64)=0.95$)

5.对于给定值$\alpha(0<\alpha<1)$，由样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$确定的统计量$\underline{\theta}$，如果对θ的一切可取值，有__________，则称随机区间$(\underline{\theta},+\infty)$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间，$\underline{\theta}$称为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限.

提高篇

6.以相同的仰角发射了 9 枚同型号的炮弹，测得其射程 $X_1,X_2,\cdots,X_9$，并由此计算出 $\sum\limits_{i=1}^{9} X_i=198$，$\sum\limits_{i=1}^{9} X_i^2=4372$.假设炮弹的射程$X$服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$. 分别求$\mu$和$\sigma$的置信水平为 0.95 的双侧置信区间.(结果保留四位小数） $\Phi(1.005)=0.8426,t_{0.025}(8)=2.306,\chi^2_{0.975}(8)=2.180,\chi^2_{0.025}(8)=17.535$

区间估计[2]

【内容预览】

$$
\left\{\begin{array}{l}
\begin{array}{l}\text{单个正态}\\ \text{总体区间估计}\\ X\sim N(\mu,\sigma^2),\\ \text{置信水平为}1-\alpha\end{array}
\left\{\begin{array}{l}
\text{总体均值}\begin{cases}
\sigma^2\text{已知},\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\\
\sigma^2\text{未知},\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)
\end{cases}\\
\text{总体方差}\begin{cases}
\mu\text{已知},\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)},\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)\\
\mu\text{未知},\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)
\end{cases}
\end{array}\right.\\
\begin{array}{l}\text{两个正态}\\ \text{总体区间估计}\\ X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\\ X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2),\\ \text{置信水平为}1-\alpha\end{array}
\left\{\begin{array}{l}
\begin{array}{l}\text{总体}\\ \text{均值差}(\mu_1-\mu_2)\end{array}\begin{cases}
\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{已知},\left(\left(\overline{X_1}-\overline{X_2}\right)\mp z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)\\
\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2,\sigma^2\text{未知},\left(\left(\overline{X_1}-\overline{X_2}\right)\mp t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)
\end{cases}\\
\begin{array}{l}\text{总体}\\ \text{方差比}\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)\end{array}\begin{cases}
\mu_1,\mu_2\text{已知},\\
\left(\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum\limits_{j=1}^{n_2}(X_j-\mu_2)^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)},\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum\limits_{j=1}^{n_2}(X_j-\mu_2)^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)}\right)\\
\mu_1,\mu_2\text{未知},\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)
\end{cases}
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

【知识清单】

8.1、区间估计

对于未知参数θ，除了求出它的点估计外，我们还希望给它一个范围，并希望知道这个范围包含参数θ真值的可信程度，这样的范围通常以区间的形式的给出，同时还给出此区间包含参数θ真值的可信程度，这种形式我们称为区间估计.

8.2、置信区间

1.双侧置信区间

对于给定值$\alpha(0<\alpha<1)$，若由样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$确定的两个统计量$\underline{\theta},\overline{\theta}\left(\underline{\theta}<\overline{\theta}\right)$，对于任意的$\theta\in\Theta$满足：

$$P\left\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\right\}\geq 1-\alpha$$

若X为连续型随机变量，我们总是要求$P\left\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\right\}=1-\alpha$求出置信区间，若$X$为离散型随机变量则使$P\left\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\right\}$尽可能的接近$1-\alpha$. 称$\left(\underline{\theta},\overline{\theta}\right)$为参数$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间. 其中$\underline{\theta}$和$\overline{\theta}$分别为置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间的置信下限和置信上限，$1-\alpha$称为置信水平.

2.单侧置信区间

对于给定值$\alpha(0<\alpha<1)$，若由样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$确定的两个统计量$\underline{\theta}$，对于任意的$\theta\in\Theta$满足：

$$P\{\underline{\theta}<\theta\}\geq 1-\alpha$$

同上面的处理，若X为连续型随机变量，我们要求$P\{\underline{\theta}<\theta\}=1-\alpha$，若$X$为离散型随机变量则使$P\{\underline{\theta}<\theta\}$尽可能的接近$1-\alpha$.称$\left(\underline{\theta},+\infty\right)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间. 其中$\underline{\theta}$称为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限.

若由样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$确定的两个统计量$\overline{\theta}$，对于任意的$\theta\in\Theta$满足：

$$P\left\{\theta<\overline{\theta}\right\}\geq 1-\alpha$$

同上面的处理，若X为连续型随机变量，我们要求$P\left\{\theta<\overline{\theta}\right\}=1-\alpha$，若$X$为离散型随机变量则使$P\left\{\theta<\overline{\theta}\right\}$尽可能的接近$1-\alpha$.称$\left(-\infty,\overline{\theta}\right)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间. 其中$\overline{\theta}$称为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信上限.

8.3、基本原理（以正态分布为例）

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2为已知，μ未知，设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的样本，求μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间. 首先寻找一个枢轴量$W=W(X_1,X_2,\cdots,X_n;\mu)$，该枢轴量的要求是其分布不依赖于$\mu$.

那么该枢轴量为$W=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，可知分布$N(0,1)$不依赖于未知参数$\mu$.

那么根据定义：$P\{a<W<b\}=P\left\{a<\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<b\right\}=1-\alpha$，进一步的按照正态分布上$\alpha$分位点的定义，有：$P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$，进一步的可以解得$P\left\{\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}<\mu<\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$，得到最终的置信区间为$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$.

8.4、常见的置信区间（置信度为$1-\alpha$）

注：下表给出了常考的置信区间的公式，但并不建议通过背诵的方式去记忆，而是根据上文提到的原理，先找到合适的枢轴量，然后根据置信区间与分位数的定义，推导出正确的置信区间.

条件	统计量分布	置信区间
σ^2已知，μ的置信区间	正态分布	$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$
σ^2未知，μ的置信区间	t分布	$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$;
μ未知，σ^2的置信区间	χ^2分布	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$
μ已知，σ^2的置信区间	χ^2分布	$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$
σ_1^2,σ_2^2已知， $\mu_1-\mu_2$的置信区间	正态分布	$\left(\left(\overline{X_1}-\overline{X_2}\right)\mp z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2,\sigma^2$未知， $\mu_1-\mu_2$的置信区间	t分布	$\left(\left(\overline{X_1}-\overline{X_2}\right)\mp t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$
μ_1,μ_2已知， $\frac{\sigma_1{}^2}{\sigma_2{}^2}$的置信区间	F分布	$\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(X_j-\mu_2)^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)},\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(X_j-\mu_2)^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)}\right)$
μ_1,μ_2未知， $\frac{\sigma_1{}^2}{\sigma_2{}^2}$的置信区间	F分布	$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

【重要题型】

题型 1：置信区间

例 8-1：若用机器装罐头，已知罐头重量$X\sim N(\mu,0.02^2)$，则随机抽取 25 个进行测量，得样本均值$\overline{x}=1.05kg$，则总体期望μ的置信水平为 0.95 的置信区间为__________.

$(\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95)$

解：由题意，σ已知，故枢轴变量选取$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，则：

置信区间的公式为：$\left(\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.975},\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.975}\right)$

$$\left(1.05-\frac{0.02}{\sqrt{25}}\times 1.96,1.05+\frac{0.02}{\sqrt{25}}\times 1.96\right)\Rightarrow(1.042,1.058)$$

例 8-2：设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中σ^2未知，由来自总体X的一个容量为 9 的样本计算的样本均值$\bar{x}=6$，样本标准差$s=0.5$，则参数μ的置信度（水平）为 0.95 的置信区间为______________.$(t_{0.975}(8)=2.306)$

解：由题意，σ未知，故枢轴变量选取$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，则：

$$\left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right|\le t_{0.975}(8)=2.306\Rightarrow\left|\frac{6-\mu}{0.5/3}\right|\le 2.306\Rightarrow(5.616,6.384)$$

例 8-3：设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取容量为 16 的一个样本，样本方差$S^2=0.07$，试求总体方差的置信度为 0.95 的置信区间____________.(精确到小数点后第三位)

$\chi^2_{0.975}(15)=27.488,\chi^2_{0.025}(15)=6.262,\chi^2_{0.975}(16)=28.845,\chi^2_{0.025}(16)=6.908$

解：置信区间的公式为：$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

$$\left(\frac{(16-1)\times 0.07}{27.488},\frac{(16-1)\times 0.07}{6.262}\right)\Rightarrow(0.038,0.168)$$

【精选习题】

基础篇

1.对于正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,σ^2未知，记L是μ的置信度为 0.95 的置信区间的长度，那么当样本容量n______时，$L\le\sigma$.(参考如下)$U_{0.95}=1.645$，$U_{0.975}=1.96$，$t_{0.95}(15)=1.753$，$t_{0.975}(16)=2.12$

2.生产一个零件所需时间$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，观察 25 个零件的生产时间得$\bar{X}=5.5$秒，样本标准差为$S=1.73$秒，则μ的置信度为 0.95 的置信区间为__________.

注：$t_{0.95}(24)=1.7109,t_{0.975}(24)=2.0639,t_{0.975}(25)=2.0595,\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95.$

3.设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$是取自X的样本观测值，样本方差S^2为 2. 已知$\chi^2_{0.025}(9)=2.70$，$\chi^2_{0.975}(9)=19.023$,则σ^2的置信水平为 0.95 的置信区间为__________.

4.设有来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的容量为 9 的简单随机样本，样本均值为$\bar{X}$=6,则未知参数μ的置信区间为 0.95 的单侧置信区间的下限为________.$(\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.64)=0.95)$

5.对于给定值$\alpha(0<\alpha<1)$,由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$确定的统计量$\underline{\theta}$,如果对θ的一切可取值,有_____________，则称随机区间$(\underline{\theta},+\infty)$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间，$\underline{\theta}$称为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限.

提高篇

6.以相同的仰角发射了 9 枚同型号的炮弹,测得其射程$X_1,X_2,\cdots,X_9$,并由此计算出$\sum\limits_{i=1}^{9}X_i=198$，$\sum\limits_{i=1}^{9}X_i^2=4372$. 假设炮弹的射程$X$服从正态分布$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.分别求$\mu$和$\sigma$的置信水平为 0.95 的双侧置信区间.（结果保留四位小数） $\Phi(1.005)=0.8426,t_{0.975}(8)=2.306,\chi^2_{0.025}(8)=2.180,\chi^2_{0.975}(8)=17.535$