概率论与数理统计

复习总结

事件间的关系与事件的运算

1. 事件间的关系

① 包含关系：事件**A**发生必然导致**B**发生，记为$A \subset B$

② 相等关系：$A \subset B$且$B \subset A$，记为**A=B**。

③ 积事件：事件**A**与**B**同时发生，记为**AB**。

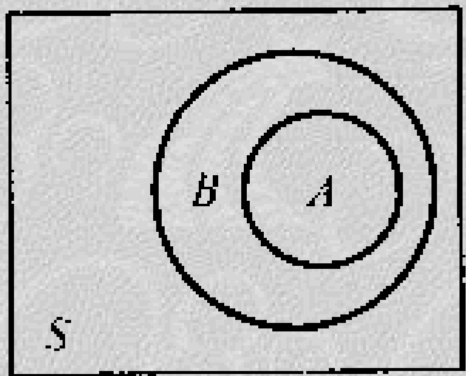
④ 和事件：事件**A**或**B**至少有一个发生，记为$A \cup B$

⑤ 差事件：事件**A**发生而**B**不发生，记为**A−B**。

⑥ 互斥事件：事件**A**、**B**不能同时发生，即 $AB = \phi$ ，又称**A**、**B**为互不相容事件。

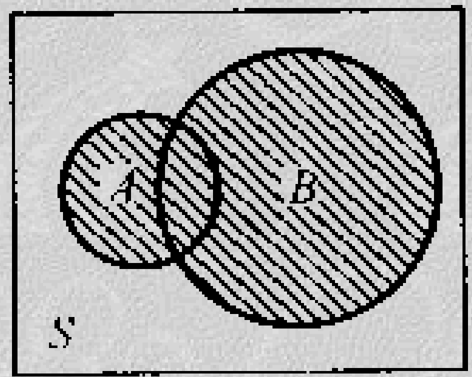
⑦ 逆事件："**A**不发生"这一事件称为**A**的逆事件，记为$\overline{A}$，**A**与$\overline{A}$又称为对立事件。

$$A\overline{A} = \phi, A \cup \overline{A} = S \Rightarrow \overline{A} = S - A$$



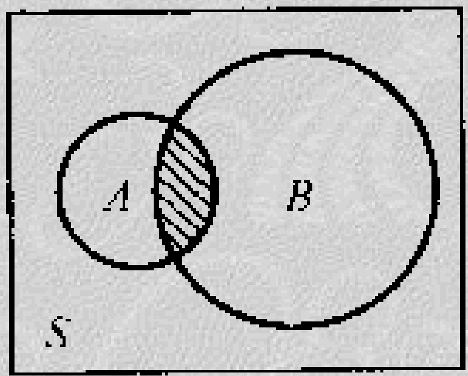
$A \subset B$

图 1-1



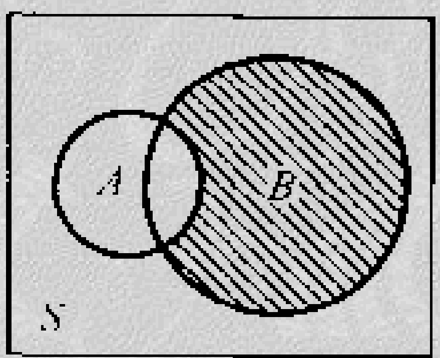
$A \cup B$

图 1-2



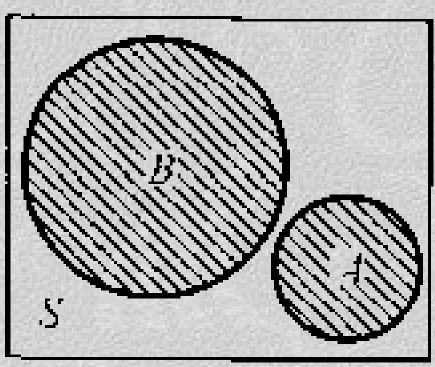
$A \cap B$

图 1-3



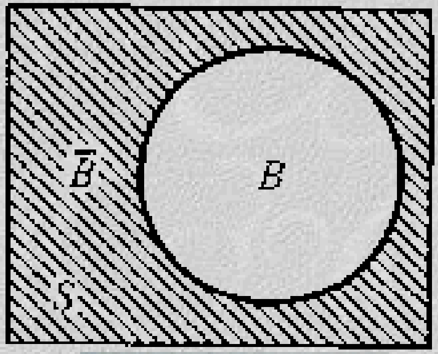
$B - A$

图 1-4



$A \cap B = \varnothing$

图 1-5



$B \cup \overline{B} = S, B \cap \overline{B} = \varnothing$

图 1-6

2. 事件的运算律

① 交换律： $A\cup B=B\cup A;\ AB=BA$

② 结合律： $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);$

$(AB)C=A(BC)$

③ 分配律： $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC);$

$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$

④ 对偶律（**De Morgan**德摩根律）：

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B};\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B};$

⑤ 减法： $A-B=A\overline{B}$

概率：做*n*次重复试验，事件*A*发生的次数记为n_A，当*n*很大时，若频率 n_A/n稳定在常数*P*附近，则称*P*为随机事件*A*发生的概率，记作*P*(*A*)=*P*。

$$f_n(A) \to P(A)(n \to \infty)$$

- **概率的公理化定义**：设*E*是随机试验，*S*是样本空间，对*E*的每个随机事件*A*，赋予一个实数*P*(*A*)，若它满足：

① 非负性：$0 \le P(A) \le 1$

② 规范性：$P(S)=1$，*S*为样本空间（必然事件）

③ 可列可加性：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中 $A_iA_j = \phi, i \neq j$

则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$

则称*P*(*A*)为事件*A*的发生**概率**。

概率的性质

1. 有限可加性：有限个两两互斥的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$
   则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$
2. $\overline{A}$ 是**A**的对立事件，则 $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
3. $A \subset B$ 则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$，当**A**，**B**互斥即 $AB = \phi$
   时 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
5. $P(\phi) = 0,\ P(S) = 1$
6. $P(A) \leq 1$

- 推广：$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$$-P(AB) - P(AC) - P(BC)$$

$$+P(ABC)$$

等可能概型（古典概型）

预备知识：排列、组合

1. **分类计数原理(加法原理)**：设完成一件事有k类方法，每类分别有 $m_1, m_2, \cdots, m_k$种方法，则完成这件事情共有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ 种方法.
2. **分步计数原理(乘法原理)**：设完成一件事有k个步骤，第一步有 m_1种方法，…, 第k步有 m_k种方法，则完成这件事情共有 $m_1 m_2 \cdots m_k$种方法.
3. **排列**：从n个不同元素中取出m个元素，按一定次序排成一列.

   排列数：从n个不同元素中取出m个元素的所有排列的个数记为A_n^m，$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

- 注：$A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$，$0! = 1$

4. **组合：** 从n个不同元素中取出m个元素并成一组(与顺序无关).

组合数：从n个不同元素中取出m个元素的所有组合的个数，记为 C_n^m,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

等可能概型（古典概型）

1. 定义：具有以下性质的随机试验称为等可能概型

   ① 试验的样本空间的元素只有有限个

   ② 试验中每个基本事件发生的可能性相同

2. 等可能概型中事件概率的计算公式：

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

n为随机试验的总的结果数，即样本点的总数，k为事件A包含的结果数。

条件概率

1. **定义：** 事件A已发生的条件下事件B发生的概率，称为**条件概率**，记为$P(B|A)$。

例 将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正面的情况，设A={至少有一次为正面H}，B={两次掷出同一面}，求$P(B|A)$

解：样本空间$S=\{HH, HT, TH, TT\}$，$A=\{HH, HT, TH\}$，$B=\{HH, TT\}$。则可得：

$$P(B|A)=1/3$$

条件概率的计算公式：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{AB\text{中包含的基本事件}}{A\text{中包含的基本事件}}$$

乘法定理：设$P(A)>0$，则有$P(AB)=P(B|A)P(A)$

推广：$P(AB)>0$，则有$P(ABC)=P(C|AB)P(AB)$

$$= P(C|AB)\,P(B|A)P(A)$$

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为n个事件$(n \geq 2)$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$= P(A_n \mid A_1, A_2, \cdots A_{n-1})P(A_{n-1} \mid A_1, A_2, \cdots A_{n-2})\cdots P(A_2 \mid A_1)P(A_1)$$

全概率公式

- **划分**：设S为试验E的样本空间，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为E的一组事件，若

  ① $B_iB_j = \phi, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$

  ② $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$

  则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间S的一个划分.

- 例 E：掷骰子观察点数

  $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

  $B_1 = \{1,2,3\}$，$B_2 = \{4,5\}$，$B_3 = \{6\}$ 是S的一个划分

  $C_1 = \{1,2,3\}$，$C_2 = \{3,4\}$，$C_3 = \{5,6\}$ 不是S的一个划分

全概率公式

- **定理**：设随机试验E的样本空间为S，A为E的事件. $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为S的一个划分，且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 则 $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$ ，称之为**全概率公式**。

- **注**：全概率公式给出我们一个用来计算在众多原因 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 的作用下事件A发生概率的方法.（由因得果）

贝叶斯公式

- 设E的样本空间为S，A为E的事件. $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为S的一个划分，且 $P(A)>0, P(B_i)>0. (i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)}$$

为**贝叶斯（Bayes）公式**.

- 称 $P(B_i)$ 为**先验概率**;
- 称 $P(B_i|A)$ 为**后验概率**.

条件概率小结

独立性

- 独立事件：两事件A、B，A发生对B发生没有影响，B发生也对A没有影响，则称两事件相互独立. 即 $P(A|B)=P(A)$ 且$P(B|A)=P(B)$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$
- 例 抛甲，乙两枚硬币，$A=\{$甲出现正面$H\}$，$B=\{$乙出现正面$H\}$，问A，B同时发生的概率.
- 定理 四对事件 A,B; $\bar{A},B$; $A,\bar{B}$; $\bar{A},\bar{B}$; 中有一对相互独立，则另外三对也相互独立.
- 独立与互斥的区别：

  A，B相互独立：$P(AB)=P(A)P(B)$；

  A，B互斥：$P(AB)=0$。

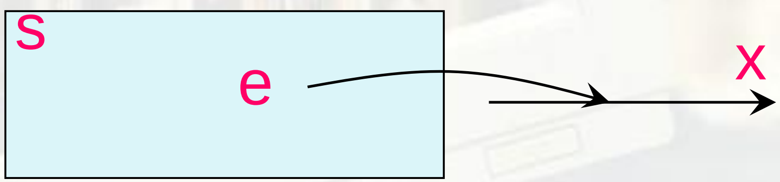
多个事件的独立

定义：设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个随机事件，若对$2 \le k \le n$,

均有：$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\right) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{i_j}\right)$

则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立

- 定义 随机试验的结果可以用一个实值变量表示，这个变量的取值是随机的，但又服从一定的统计规律性，这种变量称为随机变量，通常用***X***，***Y***，***Z***表示。
- **中心问题**：将试验结果数量化



X=f(e)—为S上的单值函数，X为实数

- 随机变量分为离散型和连续型：
  1. **离散型**：***X***的取值是有限个或可列无限个。
  2. **连续型**：***X***的取值是连续的。

分布律

$P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\cdots)$ 称为离散型随机变量X的**分布律**，分布律可用列表的方式直观的表示出来

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

分布律（概率分布）

1、写出可能取值——即写出了样本点

2、写出相应的概率——即写出了每一个样本点出现的概率

三种重要的离散型随机变量

1. 两点分布，又称为(0−1)分布

- (0−1)分布的分布律为

X	0	1
p_k	$1-p$	p

- 也可以写为 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1$
- 对随机实验，若样本空间只包括两个元素，即 $S=\{e_1,e_2\}$，则一定能在**S**上定义一个服从(0−1)分布的随机变量，令

$$X=\begin{cases}0 & e=e_1\\1 & e=e_2\end{cases}$$

- 例 抛硬币一次，定义随机变量**X**为出现正面的次数，则

$$X=\begin{cases}0 & 反面\\1 & 正面\end{cases}$$

X	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2. 二项分布

- 随机试验E只有两个可能结果：A和$\overline{A}$，则称E为伯努利试验。设$P(A)=p\ (0<p<1)$，则$P(\overline{A})=1-p$
- 将伯努利试验独立地重复进行n次，称为n重伯努利试验。
- X表示n重伯努利试验中事件A发生的次数，X所有可能取值$k=0, 1, 2, \cdots, n$。求$P\{X=k\}$
- $P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$
- 记$q=1-p$，$\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=(q+p)^n=1$
- 随机变量X服从参数为n, p的二项分布，记为$X\sim b(n, p)$
- 当$n=1$时，即为(0-1)分布。

3. 泊松分布(Poisson分布)

若随机变量X的概率分布律为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots, \lambda>0$$

称X服从参数为λ的泊松分布，记 $X\sim\pi(\lambda)$

Poisson定理

设$\lambda>0$是一个常数，n是任意正整数，设 $np_n=\lambda$，则对于任一固定的非负整数k，有

$$\lim_{n\to\infty}C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

二项分布与泊松分布有以下近似公式：

当$n \geq 20, p \leq 0.05$时，

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ 其中 } \lambda = np$$

当 $n \geq 100$，$np \leq 10$ 时近似公式近似效果更佳。

分布函数

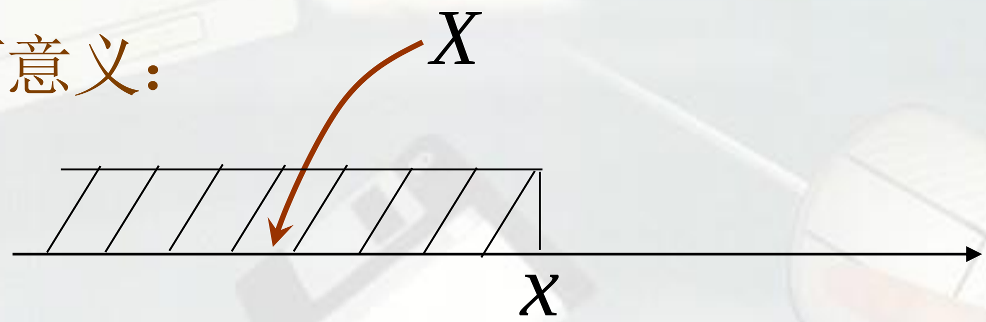
定义：设X为一个随机变量，x是任意实数，函数

$F(x) = P\{X \le x\}$ 称为随机变量X的概率分布函数，简称**分布函数**。

由分布函数的定义，有

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$$

$F(x)$的几何意义：



注: 分布函数$F(x)$在x处的函数值表示x落在区间

$(-\infty, x]$上的概率。

分布函数

$F(x)$的性质：

(1) $0 \le F(x) \le 1, F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

(2)$F(x)$是一个不减函数

$\because \quad 0 \le P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

(3)对于离散型随机变量，若分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k$

则其分布函数 $F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k \le x} P\{X = x_k\}$

概率密度

定义：对于随机变量X的分布函数 $F(x)$，若存在非负的函数 $f(x)$，使对于任意实数 x，有：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

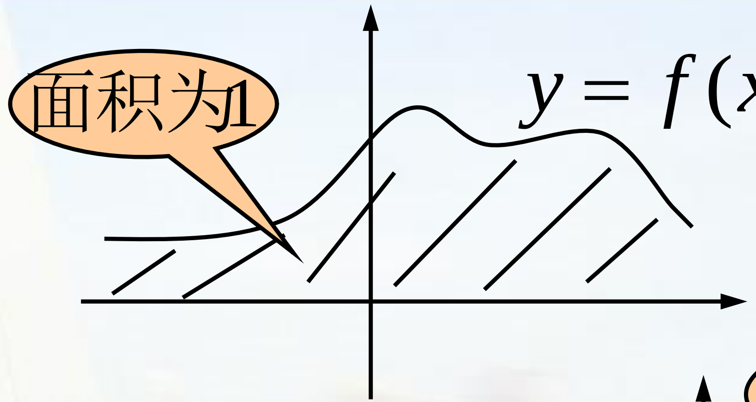
则称X为连续型随机变量，

其中$f(x)$ 称为X的概率密度函数，简称**概率密度**。

$f(x)$的性质：

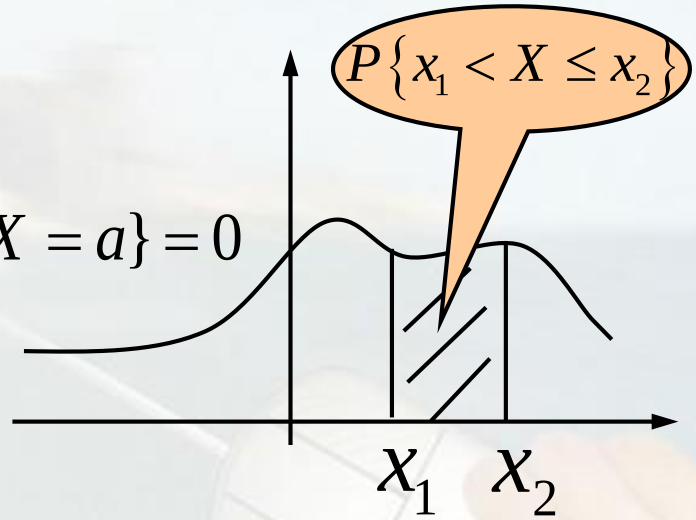
1) $f(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$



3) 对于任意的实数x_1，$x_2(x_2 > x_1)$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \Rightarrow P\{X = a\} = 0$$



4) 在$f(x)$连续点x, $F'(x) = f(x)$

即在$f(x)$的连续点

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

1. 均匀分布

- **定义：** 设连续型随机变量X具有概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则称X在区间(a, b)上服从**均匀分布**。记为$X\sim U(a,b)$

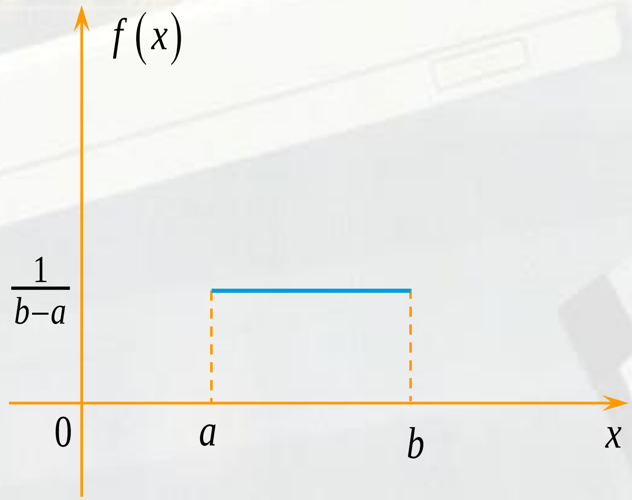
- **注：** X落在(a, b)上任一子区间内的概率只依赖于子区间的长度，而与位置无关。

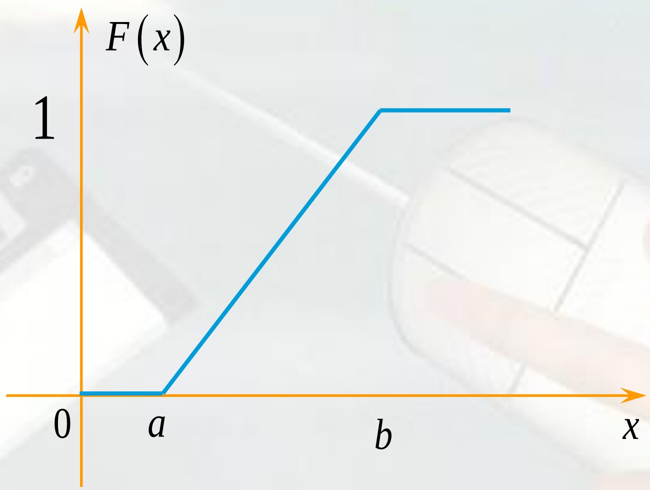
设 $a\le c<c+l\le b$

$$\Rightarrow P\{c<X<c+l\}=\int_c^{c+l}\frac{1}{b-a}dt=\frac{l}{b-a}\quad ----\text{与}c\text{无关}$$

均匀分布的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a<x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$





2. 指数分布

- 定义：连续型随机变量*X*的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad(\theta>0)$$

称*X*服从参数为θ 的指数分布，记为$X\sim EP(\theta)$

- 指数分布的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\end{cases}\qquad(\theta>0)$$

3. 正态分布

1. 定义：设连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

其中 $\mu,\sigma(\sigma>0)$为常数，则称X服从参数为μ,σ的正态分布（也称为Gauss分布），记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

2. $f(x)$图形的性质：

① 关于 $x=\mu$ 对称

结论：$\forall h>0, P\{\mu-h<x\le\mu\}=P\{\mu<x\le\mu+h\}$

② 当 $x=\mu$ 时，取得最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

③ σ 固定，改变 μ ，$f(x)$的图形不变，沿x轴平移

μ 固定，改变 σ ，由最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 知，σ 越小，图形越尖，X落在 μ 附近的概率越大。

④ $x\to\pm\infty$时，$f(x)\to 0$，即曲线以X轴为渐近线。

3. 分布函数$F(x)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

4. 标准正态分布

$\mu=0,\sigma=1$ 时，称**X**服从标准正态分布，$X\sim N(0,1)$

概率密度函数 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

分布函数 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

结论：$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

$\Phi(x)$的函数值见第382页标准正态分布表

例 $X\sim N(0,1)$，求 $P\{-2.01<X\leq 3.25\}$

5. 正态分布转变为标准正态分布

引理 若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

结论：

I. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则它的分布函数，可写成：

$$F(x)=P\{X \le x\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

II. $P\{x_1 < X \le x_2\}=P\{\frac{x_1-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\}$

$$=\Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma})$$

III. 正态分布的问题都可以通过线性变换转化为标准正态分布，然后查书中第382页标准正态分布表得解

- 例 $X \sim N(1,4)$，求 $P\{0 < X \le 1.6\}$

随机变量的函数的分布

问题提出：已知随机变量X的概率分布，且已知Y=g(X)，求Y的概率分布。

1. 离散型

离散型随机变量的函数分布律的求法：

1. 找出Y=g(X)的所有可能取值
2. 找出每个值对应的X取值，将对应概率相加

例 设随机变量X具有分布律

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

求 $Y = X^2$ 的分布律。

关键是找出Y的等价事件。

2. 连续型

连续型随机变量的函数分布的求法：

1. 求Y=g(X)的取值范围
2. 分段讨论
   ① 在取值范围外的y，$f_Y(y)=0$
   ② 在取值范围内的y，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=P\{X\le g^{-1}(y)\}=F_X(g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y)=\left(F_Y(y)\right)'=\left(F_X(g^{-1}(y))\right)'=f_X(g^{-1}(y))\cdot(g^{-1}(y))'$$

定理：设$X \sim f_X(x), -\infty < x < +\infty$，$g'(x) > 0$ (或$g'(x) < 0$)。
$Y = g(X)$, 则Y具有概率密度为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot \left|h'(y)\right|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中$\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$，$\beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$，
$h(y) = x \Leftrightarrow y = g(x)$

随机变量的数字特征

1. 期望的定义、定理、性质及求解
2. 方差的定义、性质及求解
3. 六个重要分布的数学期望和方差
4. 切比雪夫不等式

数学期望

定义: 设离散型随机变量X的分布律为：$P(X=x_k)=p_k \quad k=1,2,\cdots$

若级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$绝对收敛，则称级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$的和为随机变量$X$

的数学期望，记为$E(X)$,即 $\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k}$

定义: 设连续型随机变量X的概率概率为$f(x)$,若积分

$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 绝对收敛 （即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx<\infty$）

则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 的值为随机变量X的数学期望，记为$E(X)$

即 $\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx}$

<u>数学期望简称期望，又称均值。</u>

定理

定理：设Y是随机变量X的函数：$Y=g(X)$（g是连续函数），

- X是离散型随机变量，它的分布律为：

  $P(X=x_k)=p_k$，$k=1,2,\cdots$

  若$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$绝对收敛，则有$\boxed{E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k}$

- X是连续型随机变量，它的概率密度为$f(x)$

  若$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛

  则有$\boxed{E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx}$

定理的重要意义在于我们求$E(Y)$时，不必算出Y的分布律或概率密度，而只要利用X的分布律或概率密度就可以了。

$E(X)$的性质

1. 设C是常数，则有$E(C)=C$

2. 设X是一个随机变量，C是常数，则有$E(CX)=CE(X)$

3. 设X,Y是两个随机变量，则有$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

将上面三项合起来就是：$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$

4. 设X,Y是相互独立的随机变量，则有$E(XY)=E(X)E(Y)$

方差

定义：

设X是一个随机变量，若$E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$存在，则称其为$X$的方差，

记为$D(X)$或$Var(X)$，即$\boxed{D(X)=Var(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}}$

将$\sqrt{D(X)}$记为$\sigma(X)$,称为X的标准差或均方差，
它是与随机变量X具有相同量纲的量。

方差$D(X)$刻画了X取值的分散程度，它是衡量X取值分散程度的一个尺度。若X取值比较集中，则$D(X)$较小，反之，若X取值比较分散，则$D(X)$较大。

对于**离散型**随机变量X，其分布律为：$P(X=x_k)=p_k \quad k=1,2,\cdots$

$$\boxed{D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k}$$

对于**连续型**随机变量X，其概率密度为$f(x)$，

$$\boxed{D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx}$$

此外，利用数学期望的性质，可得方差得**计算公式：**

$$\boxed{D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2}$$

事实上，$D(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}=E\left\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\right\}$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

方差的性质

1. 设C是常数，则$D(C)=0$

2. 设X是随机变量，C是常数，则有$D(CX)=C^2D(X)$

3. 设X,Y是两个随机变量，

则有$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

特别，若X,Y相互独立，则有$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

综合上述三项，设X,Y相互独立，a,b,c是常数，

则$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y)$

4. $D(X)=0 \Leftrightarrow P(X=C)=1$ 且$C=E(X)$

$\Leftrightarrow X$以概率1取常数$C=E(X)$

独立的n个正态变量的线性组合仍服从正态分布：

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $i = 1, 2, \cdots n$ 且它们相互独立

则它们的线性组合：

$$C_0 + C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$
$$\sim N(C_0 + C_1\mu_1 + \cdots + C_n\mu_n, C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \cdots + C_n^2\sigma_n^2)$$

$C_1, C_2 \cdots C_n$是不全为0的常数

如: $X \sim N(1,3)$, $Y \sim N(2,4)$且X, Y相互独立,

则$Z = 2X - 3Y \sim N(-4, 48)$

一般若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b \Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

常见分布的期望与方差

分布	分布律或密度函数	数学期望	方差
0—1分布	$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布$b(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots,n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $\pi(\lambda)$	$P(X=k)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ $k=0,1,\ldots,$	λ	λ
均匀分布$U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $EP(\theta)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	θ	θ^2
正态分布$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2

定理 (切比雪夫不等式)

设X是随机变量，若$D(X)$存在，则对任何 $\varepsilon>0$，有

$$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

切比雪夫不等式的等价形式

$$P(|X-E(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

注:

1. 切比雪夫不等式可用来估计不是服从正态分布的随机变量落在$E(X)$附近的概率。

2. 切比雪夫不等式的主要作用是进行概率论的理论研究。

样本及抽样分布

1. 样本的定义（独立同分布）

2. 统计量的定义和判别

3. 统计学三大分布的定义和图形轮廓

4. 三大分布的分位点定义

样本

- 总体：试验中全部可能的观察值（研究对象的全体，如一批灯泡），一个总体对应于一个随机变量X。
- 个体：每个可能观察值称为个体（组成总体的每个元素，如某个灯泡）
- 抽样：从总体X中抽取有限个个体对总体进行观察的取值过程。
- 随机样本：随机抽取的n个个体的集合$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$，n为样本容量。
- 简单随机样本：满足以下两个条件的随机样本$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$
  1. 每个X_i与X同分布
  2. $X_1,X_2,\ldots,X_n$是相互独立的随机变量

[说明]：后面提到的样本均指简单随机样本。

统计量

- **统计量：** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 X 的样本，则函数 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 如果不包含任何未知参数则称为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个统计量。

简言之，样本的不含任何未知参数的函数。

思考题：

设在总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取样本 (X_1, X_2, X_3)，其中 μ 已知，σ^2 未知

指出在 (1) $X_1 + X_2 + X_3$　(2) $X_2 + 2\mu$　(3) $\max(X_1, X_2, X_3)$

(4) $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{3} X_i^2$　(5) $|X_3 - X_1|$

哪些是统计量，哪些不是统计量，为什么？

答：只有 (4) 不是统计量。

常用的统计量

1. 样本平均值：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$
2. 样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$
3. 样本均方差：$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$
4. 样本**k**阶(原点)矩：$A_k=\overline{X^k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k, k=1,2,\cdots$
5. 样本**k**阶中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^k, k=2,3,\cdots$

统计学三大分布

定义： 设随机变量$X_1, X_2, \cdots X_n$相互独立，$X_i \sim N(0,1)$ $(i=1,2,\cdots,n)$

则称 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$　　　(1)

服从自由度为n的χ^2分布，记为$\chi^2 \sim \chi^2(n)$

自由度指(1)式右端包含的独立变量的个数

定义： 设$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$,并且$X,Y$相互独立，

则称随机变量$t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为$n$的$t$分布，记为$t \sim t(n)$

定义： 设$U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$，且$U,V$独立，

则称随机变量$F = \dfrac{U/n_1}{V/n_2}$服从自由度(n_1,n_2)的F分布，记为$F \sim F(n_1,n_2)$

其中n_1称为第一自由度，n_2称为第二自由度

χ^2分布的一些重要性质：

1. 设$\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则有$E(\chi^2)=n, D(\chi^2)=2n$

2. 设$Y_1 \sim \chi^2(n_1), Y_2 \sim \chi^2(n_2)$，且$Y_1, Y_2$相互独立，则有$Y_1+Y_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$

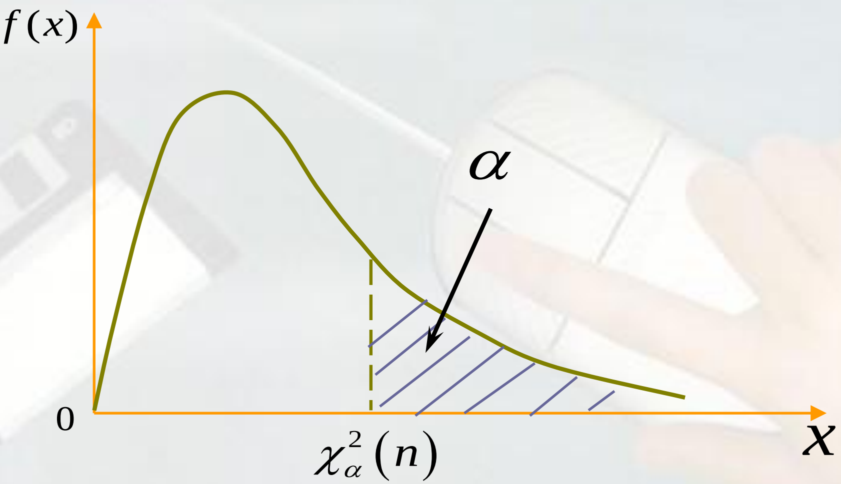
性质2称为χ^2分布的可加性，可推广到有限个的情形：

设$Y_i \sim \chi^2(n_i)$，且$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$相互独立，则$\sum_{i=1}^{m} Y_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)$

对给定的概率$\alpha, 0<\alpha<1$，

称满足条件$\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{\infty} f(y)dy=\alpha$

的点$\chi_\alpha^2(n)$为$\chi^2(n)$分布的上α分位点，上α分位点$\chi_\alpha^2(n)$的值可查χ^2分布表.



χ^2分布的分位点

例：$\alpha=0.1, n=25 \quad \chi_{0.1}^{2}(25)=34.381$

t分布

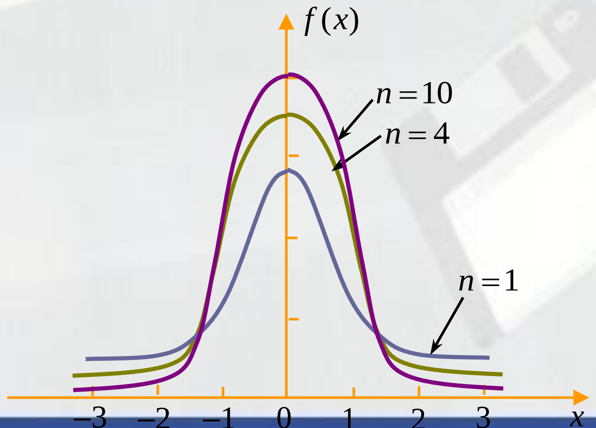
定义： 设$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，并且$X, Y$相互独立，

则称随机变量$t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为$n$的$t$分布，记为$t \sim t(n)$

$t(n)$分布的概率密度为：$h(t) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, -\infty < t < +\infty$

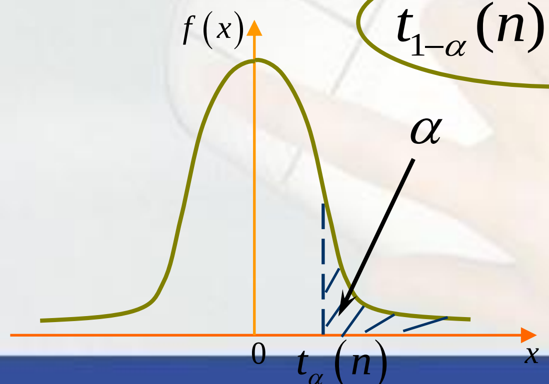
对给定的α，$0<\alpha<1$，称满足条件$\int_{t_\alpha(n)}^{\infty} h(t)\,dt = \alpha$的点$t_\alpha(n)$

为$t(n)$分布的上α分位点。t分布的上α分位点可查t分布表



t分布的密度函数

$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$



t分布的分位点

F分布

定义： 设$U\sim\chi^2(n_1), V\sim\chi^2(n_2)$，且$X,Y$独立，

则称随机变量$F=\dfrac{U/n_1}{V/n_2}$服从自由度(n_1,n_2)的F分布，记为$F\sim F(n_1,n_2)$

其中n_1称为第一自由度，n_2称为第二自由度

性质：$F\sim F(n_1,n_2)$，则$F^{-1}\sim F(n_2,n_1)$

$F(n_1,n_2)$分布的概率密度为：

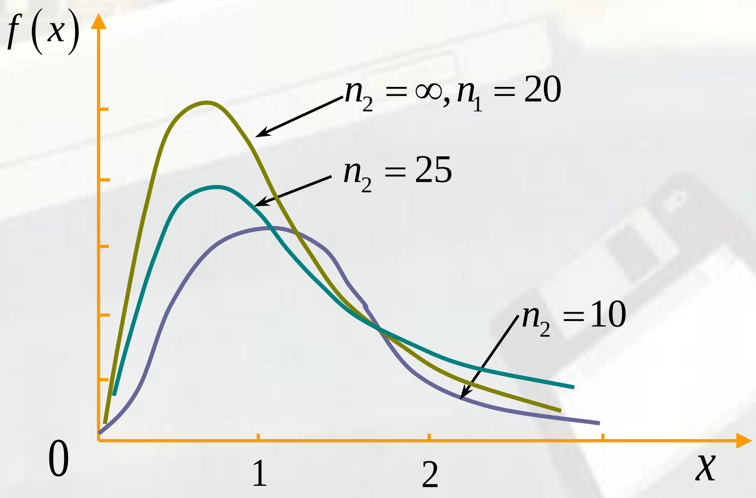
$$\psi(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left[(n_1+n_2)/2\right](n_1/n_2)^{n_1/2}y^{(n_1/2)-1}}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)\left[1+(n_1y/n_2)\right]^{(n_1+n_2)/2}}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对于给定的α，$0<\alpha<1$，称满足条件$\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{\infty} f(x;n_1,n_2)dx=\alpha$的点$F_\alpha(n_1,n_2)$为$F(n_1,n_2)$分布的上$\alpha$分位点。$F_\alpha(n_1,n_2)$的值可查$F$分布表

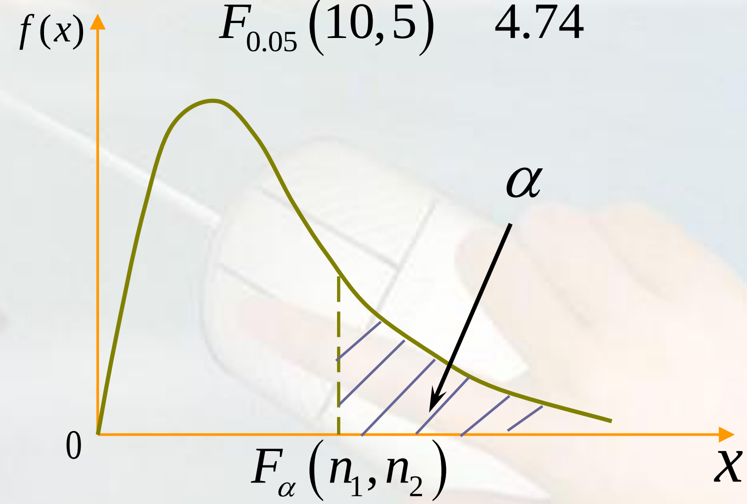
$$\boxed{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=[F_\alpha(n_2,n_1)]^{-1}}$$

例如： $F_{0.95}(5,10)$

$$=\frac{1}{F_{0.05}(10,5)}=\frac{1}{4.74}=0.211.$$



F分布的密度函数

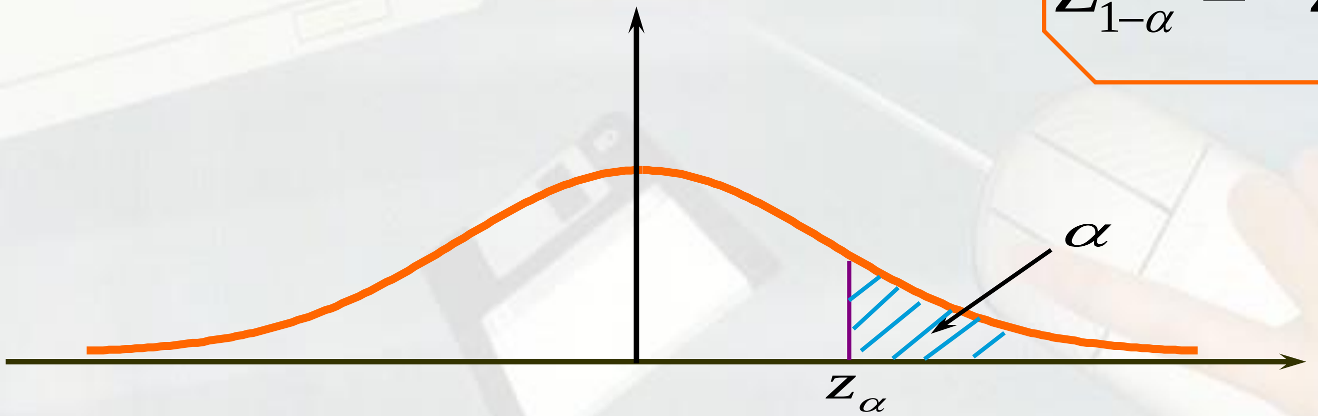


F分布的分位点

此外，设$X \sim N(0,1)$，若Z_α满足条件$P\{X > Z_\alpha\} = \alpha, 0 < \alpha < 1$

则称点Z_α为标准正态分布的上α分位点。

$$Z_{1-\alpha} = -Z_\alpha$$



参数估计

1. 矩估计法（三步法）

2. 最大似然估计法（三步法）

3. 估计量三大评选标准的定义及证明

（无偏性、有效性、相合性）

4. 单个正态总体均值和方差的区间估计

矩估计法

设总体X的分布函数为$F\left(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$,$\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$是待估计的未知参数，假定总体$X$的$k$阶原点矩$E\left(X^k\right)$存在，

则有：$E\left(X^v\right)=\mu_v\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)\quad v=1,2,\cdots,k$,对于样本$X=\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$,

其v阶样本矩是：$A_v=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^v\quad v=1,2,\cdots,k$

用样本矩作为总体矩的估计，即令：

$$\begin{cases}\mu_1\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=A_1\\ \mu_2\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=A_2\\ \vdots\\ \mu_k\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=A_k\end{cases}$$

解此方程即得$\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$的一个矩估计量$\left(\widehat{\theta_1,\theta_2,}\cdots,\hat{\theta}_k\right)$

最大似然估计的求法

1. 单参数

① 写出似然函数 $L(\theta)$

② 求 $\hat{\theta}$，使得$L(\hat{\theta})$为$L(\theta)$的最大值，求法如下：

求使得方程 $L'(\theta)=0$的θ

又 $L(\theta)$与$\ln L(\theta)$在同一θ 处取得极值，因此，θ 的最大似然估计值可从方程$(\ln L(\theta))'=0$ 中求得

称 $(\ln L(\theta))'=0$ 为似然方程

最大似然估计法

2. 双参数

- 似然函数

$$L(\theta_1,\theta_2)=p\left(x_1;\theta_1,\theta_2\right)\cdot p\left(x_2;\theta_1,\theta_2\right)\cdots\cdots p\left(x_n;\theta_1,\theta_2\right)$$

- 似然方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}=0\\[2ex]\dfrac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}=0\end{cases}$$

估计量的评选标准

对总体的未知参数可用不同方法求得不同的估计量，如何评价好坏？

通常用三条标准检验：<u>无偏性</u>，<u>有效性</u>，<u>相合性</u>

- 无偏性

定义：若参数θ的估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$，满足$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$，则称$\hat{\theta}$是$\theta$的一个无偏估计量。

若$E\left(\hat{\theta}\right)\neq\theta$，那么$\left|E\left(\theta\right)-\theta\right|$称为估计量$\hat{\theta}$的偏差

若$\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\theta\right)=\theta$，则称$\hat{\theta}$是$\theta$的渐近无偏估计量

有效性

定义：设$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$是$\theta$的两个无偏估计，

如果$D\left(\hat{\theta}_1\right) \le D\left(\hat{\theta}_2\right)$，对一切$\theta \in \Theta$成立，

且至少对某一个$\theta \in \Theta$上式中的不等式成立，

则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。

相合性

定义： 设$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，

若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to+\infty$时，$\hat{\theta}$依概率收敛于θ，

即$\forall\varepsilon>0$，有：$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|\geq\varepsilon\right\}=0$成立，

则称$\hat{\theta}$为θ的相合估计量或一致估计量

正态总体均值与方差的区间估计

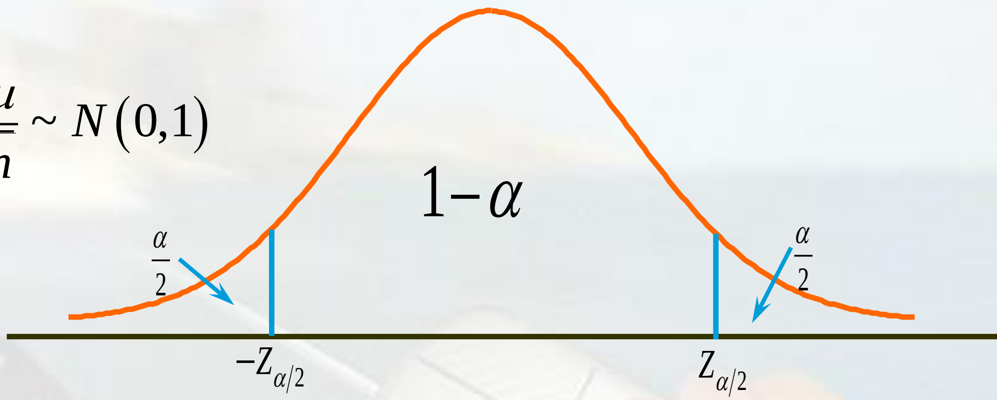
单个正态总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的情形

$X_1,X_2,\cdots,X_n$来自$N\left(\mu,\sigma^2\right)$, $\bar{X}$和S^2分别为样本均值和方差,置信度为$1-\alpha$

1. 均值μ的置信区间

(1) σ^2已知时

$\bar{X}$是μ的无偏估计，由 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$



有$P\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < Z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$

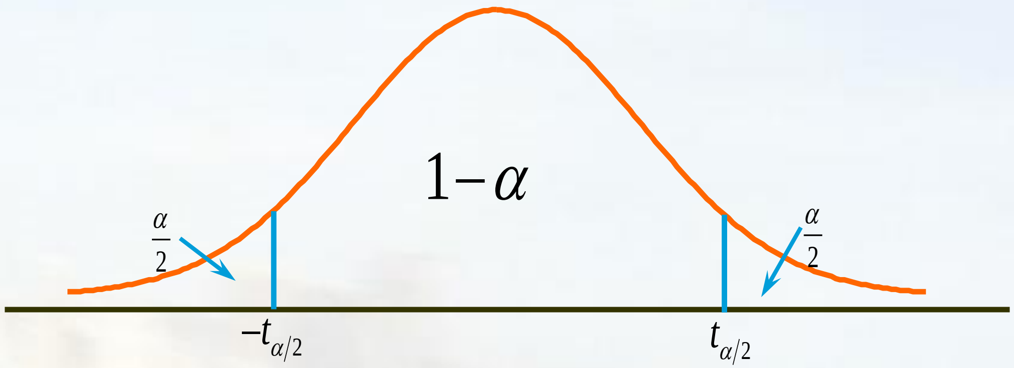
即$P\left\{\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$

置信区间为: $\boxed{\left(\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2},\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)}$

(2) σ^2未知时

由第143页定理三有：

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



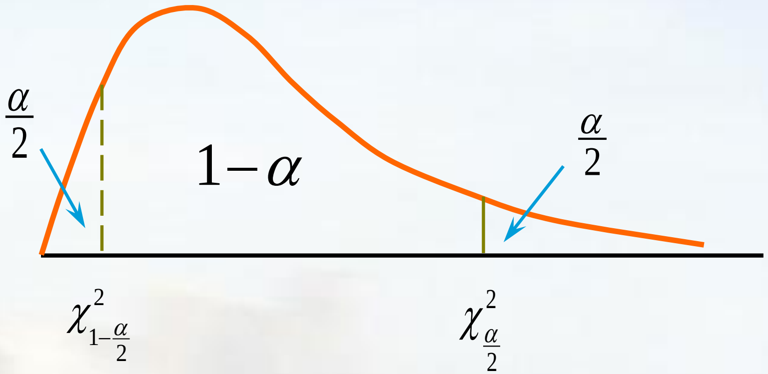
有$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

即$P\left\{\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

置信区间为：$\boxed{\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)}$

2. 方差σ^2的置信区间

设μ未知



由第143页定理二有：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$有P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

$$即P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

思考题：

均方差σ的置信度为1-α的置信区间是什么?

置信区间为：

$$\boxed{\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)}$$

正态总体均值、方差的置信区间与单侧置信限 (置信度$1-\alpha$)

	待估参数	其他参数	W 的 分 布	置信区间	单侧置信限
一个正态总体	μ	σ^2已知	$Z=\dfrac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar X\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)$	$\bar\mu=\bar X+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_\alpha$ $\underline{\mu}=\bar X-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_\alpha$
	μ	σ^2未知	$t=\dfrac{\bar X-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\bar X\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\bar\mu=\bar X+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$ $\underline{\mu}=\bar X-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$
	σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\overline{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$ $\underline{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$Z=\dfrac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar X-\bar Y\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\bar X-\bar Y+Z_\alpha\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2}=\bar X-\bar Y-Z_\alpha\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知	$t=\dfrac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\left(\bar X-\bar Y\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\bar X-\bar Y+t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2}=\bar X-\bar Y-t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$
	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2未知	$F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$	$\overline{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$ $\underline{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$

假设检验

1. 假设检验的定义

2. 假设检验的三步法

3. 单个正态总体均值和方差的假设检验统计量和拒绝域

问题：设$X\sim N(\mu, \sigma^2)$，σ已知，μ未知。给定 μ_0，问 $\mu=\mu_0$?

假设 H_0: $\mu=\mu_0$, H_1: $\mu\neq\mu_0$.

H_0 称为原假设(零假设)，H_1 称为备择假设(对立假设)。

通过某种方式确定常数k。若 $|\bar{x}-\mu_0|<k$，则接受H_0，若 $|\bar{x}-\mu_0|\geq k$，则拒绝 H_0 (接受 H_1)。

犯两类错误的概率：

若 H_0 为真而被拒绝，我们称为犯第一类错误(又称犯“弃真”错误，其概率记为α。一般，$\alpha\leq 0.1$.

若 H_0 为假而被接受，我们称为犯第二类错误(又称犯“取伪”错误，其概率记为β。

记 $P(\text{拒绝}H_0 | H_0\text{为真}) = \alpha = P_{\mu_0}(\text{拒绝}H_0)$.

取检验统计量为 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

$$\alpha = P(|\bar{X} - \mu_0| \geq k) = P\left(|Z| \geq \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 2P\left(Z \geq \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

即 $$P\left(Z \geq \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

我们称拒绝H_0的区域W为拒绝域，将接受H_0的区域称为接受域。

H_0的拒绝域为W={ $|Z| \geq z_{\alpha/2}$ }，

H_0的接受域为$\overline{W}$={ $|Z| < z_{\alpha/2}$ }。

Z检验法 (σ^2 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\lvert Z \rvert \geq z_{\alpha/2}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$Z \leq -z_{\alpha}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$Z \geq z_{\alpha}$

t 检验法 (σ^2 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$	$\lvert t\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$t\leq -t_\alpha$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$t\geq t_\alpha$

关于σ^2的检验（χ^2检验法）

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$ （μ 未知）	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\le\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$

函数的和、差、积、商的求导法则

设函数$u=u(x)$及$v=v(x)$在点x可导，则$u\pm v$，

$u\cdot v$，$\dfrac{u}{v}(v\neq 0)$在点x处也可导，且

1. $\boxed{(u\pm v)'=u'\pm v'}$ 可以推广到有限个

2. $\boxed{(uv)'=u'v+uv'}$

特别地，$(Cu)'=Cu'$. C为常数.

3. $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}}$

随机过程及其统计描述

随机过程：概率论的“动力学”部分。

研究对象：随时间演变的随机现象

随机过程的数字特征

随机变量的数字特征通常是确定值；随机过程的数字特征通常是确定性函数。

对随机过程的数字特征的计算方法，是先把时间t固定，然后用随机变量的分析方法来计算。

数 学 期 望

$$E[X]=\begin{cases}\sum_{x} xP(x) & \text{离散随机变量}\\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx & \text{连续随机变量}\end{cases}$$

随机变量Y=g (X)

$$E[Y]=\begin{cases}\sum_{y} yP(y) & \text{离散随机变量}\\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx & \text{连续随机变量}\end{cases}$$

注：数学期望(续)

$Y=aX_1+bX_2$ $E[Y]=aE[X_1]+bE[X_2]$

$Y=X_1X_2$ X_1和X_2相互独立时 $E[Y]=E[X_1]E[X_2]$

X和Y相互独立时，下列结果均成立。

1，$\rho_{XY}=0$ 2，$Cov(X,Y)=0$

相互独立 $\longrightarrow$ 不相关

不相关 $\not\longrightarrow$ 相互独立

3，$E(XY)=E(X)E(Y)$ 4，$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

各阶矩（中心矩、原点矩）

原点矩

$$E\left[X^k\right]=\begin{cases}\sum\limits_x x^k P(x)\\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx\end{cases}$$

中心矩

$$E\left[\left(X-E[X]\right)^k\right]$$

$$\Big\downarrow \textbf{\textit{k=2}}$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$$

方差

$$E\left[\left(X-E[X]\right)^2\right]$$

- 1. 均值

对于任意时刻 t，随机过程 **X(t)** 为一随机变量。故,

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;t)\,dx$$

考虑与r. v. 的均值的不同

$$\mu_X(t)=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x;t)dx$$

显然，$\mu_X(t)$ 是某一个平均函数，随机过程的诸样本在它的附近起伏变化，如图所示：

2. 均方值和方差

随机过程 $X(t)$ 在任一时刻t的取值是一个随机变量 $X(t)$ 。我们把 $X(t)$ 二阶原点矩称为随机过程的均方值，把二阶中心矩记作随机过程的方差。即：

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x;t)dx$$

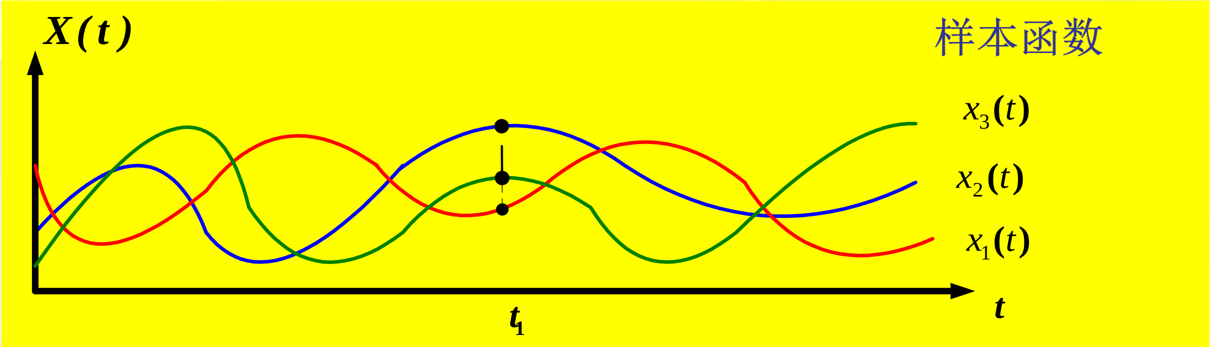
$$\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = E[(X(t) - m_X(t))^2]$$

且 $\sigma_X^2(t) = E[X^2(t)] - \mu_X(t)^2$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

标准差或均方差： $\sqrt{D[X(t)]} = \sigma_X(t)$

- 刻画随机过程自身在两个不同时刻的状态之间统计依赖关系的数字特征
- 自相关函数
- 自协方差函数



3. 自相关函数：

同一随机过程不同时刻的随机变量之间的关联性。

设随机过程 **X(t)**，则定义**X(t)**的

自相关函数：

$$R_{XX}(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

- ***$t_1=t_2$ 时的自相关函数：***

$$R_{xx}(t_1,t_1)=E[X^2(t_1)]=\psi^2(t_1)$$

4 自协方差函数

$$C_{XX}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][X(t_2)-\mu_X(t_2)]\}$$

$$=E\left(X(t_1)X(t_2)\right)-\mu_X(t_1)E\left(X(t_2)\right)-\boxed{\mu_X(t_2)E\left(X(t_1)\right)+\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)}$$

$$\boxed{=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)}$$

$t_1=t_2$ 时的自协方差是 X(t) 的方差, 即:

$$C_{XX}(t_1,t_1)=D[X(t_1)]=E\left\{\left[X-E(X(t_1))\right]^2\right\}$$

$$R_x(t_1,t_1)=E[X^2(t_1)]=\psi^2(t_1)$$

基本求导公式

1. $c' = 0$

2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

3. $(a^x)' = a^x \ln a$

4. $(e^x)' = e^x$

5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\tan x)' = \sec^2 x$

10. $(\cot x)' = -\csc^2 x$

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$

13. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

15. $(\sec x)' = \sec x \tan x$

16. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

基本初等函数导数公式表1

函数y=f(x)	导函数 $y'=f'(x)$
y=c	$y'=0$
$y=x^{\alpha}$ ($\alpha\in R$)	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$
$y=a^x$ ($a>0, a\neq 0$)	$y'=a^x\ln a$
$y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1, x>0$	$y'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$
y=lnx	$y'=\frac{1}{x}$

基本初等函数导数公式表2

函数y=f(x)	导函数 $y'=f'(x)$
y=sinx	$y'=\cos x$
y=cosx	$y'=-\sin x$
y=tanx	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
y=cotx	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$