**一．判断题**（10 分，每题 2 分）

1．在古典概型的随机试验中，$P(A)=0$ 当且仅当 $A$ 是不可能事件（ ）

2．连续型随机变量的密度函数 $f(x)$ 与其分布函数 $F(x)$ 相互唯一确定（ ）

3．若随机变量 $X$ 与 $Y$ 独立，且都服从 $p=0.1$ 的（0，1）分布，则 $X=Y$ （ ）

4．设 $X$ 为离散型随机变量，且存在正数 $k$ 使得 $P(|X|>k)=0$，则 $X$ 的数学期望 $E(X)$ 未必存在（ ）

5．在一个确定的假设检验中，当样本容量确定时，犯第一类错误的概率与犯第二类错误的概率不能同时减少（ ）

**二．选择题**（15 分，每题 3 分）

1．设每次试验成功的概率为 $p\,(0<p<1)$，重复进行试验直到第 $n$ 次才取得 $r\,(1\le r\le n)$ 次成功的概率为________.

（a） $C_{n-1}^{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$；　　（b） $C_n^r p^r(1-p)^{n-r}$；

（c） $C_{n-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r+1}$；　　（d） $p^r(1-p)^{n-r}$.

2．离散型随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)$，则 $P(X=x_k)=$________.

（a） $P(x_{k-1}\le X\le x_k)$；　　（b） $F(x_{k+1})-F(x_{k-1})$；

（c） $P(x_{k-1}<X<x_{k+1})$；　　（d） $F(x_k)-F(x_{k-1})$.

3．设随机变量 $X$ 服从指数分布，则随机变量 $Y=\max(X,2003)$ 的分布函数________.

（a）是连续函数；　　（b）恰好有一个间断点；

（c）是阶梯函数；　　（d）至少有两个间断点.

4．设随机变量 $(X,Y)$ 的方差 $D(X)=4, D(Y)=1,$ 相关系数 $\rho_{XY}=0.6,$ 则方差 $D(3X-2Y)=$________.

（a）40；　（b）34；　（c）25.6；　（d）17.6

5. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为总体$N(1, 2^2)$的一个样本，$\overline{X}$为样本均值，则下列结论中正确的是________.

（a）$\dfrac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}} \sim t(n)$；　（b）$\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 \sim F(n,1)$；

（c）$\dfrac{\overline{X}-1}{\sqrt{2}/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$；　（d）$\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 \sim \chi^2(n)$.

## 二. **填空题**（28 分，每题 4 分）

1. 一批电子元件共有 100 个，次品率为 0.05. 连续两次不放回地从中任取一个，则第二次才取到正品的概率为____________

2. 设连续随机变量的密度函数为$f(x)$，则随机变量$Y=3e^X$的概率密度函数为$f_Y(y)=$______________________

3. 设$\overline{X}$为总体$X \sim N(3,4)$中抽取的样本（$X_1, X_2, X_3, X_4$）的均值，则$P(-1<\overline{X}<5)=$___________.

4. 设二维随机变量$(X,Y)$的联合密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1; \\ 0, & \text{其 他}\end{cases}$$

则条件密度函数为, 当______时，$f_{Y|X}(y|x)=$ _____________

5. 设$X \sim t(m)$, 则随机变量$Y=X^2$服从的分布为________（ 需写出自由度 ）

6. 设某种保险丝熔化时间$X \sim N(\mu, \sigma^2)$（单位：秒），取$n=16$的样本，得样本均值和方差分别为$\overline{X}=15, S^2=0.36$，则$\mu$的置信度为 95%的单侧置信区间上限为______________

7. 设$X$的分布律为

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\theta^2$ | $2\theta(1-\theta)$ | $(1-\theta)^2$ |

已知一个样本值$(x_1, x_2, x_3)=(1, 2, 1)$，则参数的极大似然估计值为___________

**三．计算题**（40 分，每题 8 分）

1．已知一批产品中 96 %是合格品．检查产品时，一合格品被误认为是次品的概率是 0.02；一次品被误认为是合格品的概率是 0.05．求在被检查后认为是合格品的产品确实是合格品的概率

2．设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，$X$，$Y$ 分别服从参数为 $\lambda,\mu(\lambda\neq\mu)$ 的指数分布，试求 $Z=3X+2Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$．

3．某商店出售某种贵重商品．根据经验，该商品每周销售量服从参数为 $\lambda=1$ 的泊松分布．假定各周的销售量是相互独立的．用中心极限定理计算该商店一年内（52 周）售出该商品件数在 50 件到 70 件之间的概率.

4．总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 $X$ 的一个样本.

求常数 $k$，使 $k\sum\limits_{i=1}^{n}\left|X_i-\overline{X}\right|$ 为 $\sigma$ 的无偏估计量.

5．（1） 根据长期的经验，某工厂生产的特种金属丝的折断力 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（单位：kg）． 已知 $\sigma=8$ kg， 现从该厂生产的一大批特种金属丝中随机抽取 10 个样品，测得样本均值 $\bar{x}=575.2$ kg. 问这批特种金属丝的平均折断力可否认为是 570 kg ？ （ $\alpha=5\%$ ）

（2） 已知维尼纶纤度在正常条件下服从正态分布 $N(\mu,0.048^2)$．某日抽取 5 个样品，测得其纤度为: 1.31， 1.55， 1.34， 1.40， 1.45 .

问 这天的纤度的总体方差是否正常？试用 $\alpha=10\%$ 作假设检验.

**四．证明题**（7 分）

设随机变量 $X,Y,Z$ 相互独立且服从同一贝努利分布 $B(1,p)$． 试证明随机变量 $X+Y$ 与 $Z$ 相互独立.

附表： 标准正态分布数值表 $\chi^2$ 分布数值表 t 分布数值表

| | | |
|---|---|---|
| $\Phi(0.28)=0.6103$ | $\chi^2_{0.05}(4)=9.488$ | $t_{0.025}(15)=2.1315$ |
| $\Phi(1.96)=0.975$ | $\chi^2_{0.95}(4)=0.711$ | $t_{0.05}(15)=1.7531$ |
| $\Phi(2.0)=0.9772$ | $\chi^2_{0.05}(5)=11.071$ | $t_{0.025}(16)=2.1199$ |
| $\Phi(2.5)=0.9938$ | $\chi^2_{0.95}(5)=1.145$ | $t_{0.05}(16)=1.7459$ |

## 概 率 统 计 试 卷 参 考 答 案

一. **判断题**（10 分，每题 2 分）　是　非　非　非　是 .

二. **选择题**（15 分，每题 3 分）　（ a ）（ d ）（ b ）（ c ）（ d ）.

三. **填空题**（28 分，每题 4 分）

1. 1/22 ；　2. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}f[\ln(y/3)]) & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$ ；　3.0.9772 ；

4. 当$0<x<1$时 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}1/(2x) & -x<y<x\\ 0 & 其\quad 他\end{cases}$；

5. $F(1,m)$　6. 上限为 15.263 .　7. $5/6$ .

四. **计算题**（40 分，每题 8 分）

**1.** $A$ —— 被查后认为是合格品的事件，$B$ —— 抽查的产品为合格品的事件.　(2 分)

$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=0.96\times0.98+0.04\times0.05=0.9428$，　(4 分)

$P(B|A)=P(B)P(A|B)/P(A)=0.9408/0.9428=0.998.$　(2 分)

**2.** $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}\mu e^{-\mu y} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$　(1 分)

$z\le 0$时，$F_Z(z)=0$，从而　$f_Z(z)=0$；　(1 分)

$z\le 0$时，　$f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y[(z-3x)/2]dx$　(2 分)

$$=\frac{1}{2}\int_0^{z/3}\lambda\mu\, e^{-\lambda x-\mu[(z-x)/2]}dx=\frac{\lambda\mu}{3\mu-2\lambda}(e^{-\lambda z/3}-e^{-\mu z/2})$$　(2 分)

所以

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda\mu}{3\mu-2\lambda}(e^{-\lambda z/3}-e^{-\mu z/2}), & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$\left[\quad f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda\mu}{2\mu-3\lambda}(e^{-\lambda z/2}-e^{-\mu z/3}), & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}\quad\right] \qquad (2\text{ 分})$$

**3.** 设 $X_i$ 为第 $i$ 周的销售量, $i=1,2,\cdots,52$ $X_i\sim P(1)$ (1 分)

则一年的销售量为 $Y=\sum\limits_{i=1}^{52}X_i$， $E(Y)=52$, $D(Y)=52$. (2 分)

由独立同分布的中心极限定理，所求概率为

$$P(50<Y<70)=P\left(\frac{-2}{\sqrt{52}}<\frac{Y-52}{\sqrt{52}}<\frac{18}{\sqrt{52}}\right)\approx\Phi\left(\frac{18}{\sqrt{52}}\right)+\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{52}}\right)-1 \qquad (4\text{ 分})$$

$$=\Phi(2.50)+\Phi(0.28)-1=0.9938+0.6103-1=0.6041. \qquad (1\text{ 分})$$

**4.** 注意到

$$X_i-\overline{X}=\frac{1}{n}\left(-X_1-X_2\cdots+(n-1)X_i-\cdots-X_n\right)$$

$$E(X_i-\overline{X})=0,\quad D(X_i-\overline{X})=\frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad (2分)$$

$$X_i-\overline{X}\sim N\left(0,\frac{n-1}{n}\sigma^2\right) \qquad (1分)$$

$$E(|X_i-\overline{X}|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\frac{n-1}{n}\sigma^2}}dz$$

$$=2\int_0^{+\infty}z\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\frac{n-1}{n}\sigma^2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma \qquad (3分)$$

$$E\left(k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|\right)=k\left(\sum_{i=1}^{n}E|X_i-\overline{X}|\right)=kn\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma\overset{令}{=}\sigma$$

$$k=\sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}} \qquad （2分）$$

**反转的公式应为：** $=kn\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}\sigma$

**5.** (1) 要检验的假设为 $H_0:\mu=570$, $H_1:\mu\neq 570$ (1 分)

检验用的统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

拒绝域为 $|U|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=z_{0.025}=1.96$. (2 分)

$$|U_0|=\frac{575.2-570}{8/\sqrt{10}}=0.65\sqrt{10}=2.06>1.96$$，落在拒绝域内，

故拒绝原假设 $H_0$，即不能认为平均折断力为 570 kg .

[ $|U_0|=\dfrac{571-569.2}{9/\sqrt{10}}=0.2\sqrt{10}=0.632<1.96$，落在拒绝域外，

故接受原假设 $H_0$，即可以认为平均折断力为 571 kg . ] (1 分)

(2) 要检验的假设为 $H_0:\sigma^2=0.048^2$，$H_1:\sigma^2\neq 0.048^2$ (1 分)

[ $H_0:\sigma^2=0.79^2$，$H_1:\sigma^2\neq 0.79^2$ ]

检验用的统计量 $\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$，

拒绝域为 $\chi^2>\chi^2_{\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.05}(4)=9.488$ 或

$\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.95}(4)=0.711$ (2 分)

$\bar{x}=1.41$ [ $\bar{x}=1.49$ ]

$\chi_0^2=0.0362/0.0023=15.739>9.488$， 落在拒绝域内，

[ $\chi_0^2=0.0538/0.6241=0.086<0.711$，落在拒绝域内， ]

故拒绝原假设 $H_0$，即认为该天的纤度的总体方差不正常 . (1 分)

五、**证明题** (7 分) 由题设知

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | $q$ | $p$ |

| $X+Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $q^2$ | $2pq$ | $p^2$ |

(2 分)

$P(X+Y=0,Z=0)=q^3=P(X+Y=0)P(Z=0)$；

$P(X+Y=0,Z=1)=pq^2=P(X+Y=0)P(Z=1)$；

$P(X+Y=1,Z=0)=2pq^2=P(X+Y=1)P(Z=0)$；

$P(X+Y=1,Z=1)=2pq^2=P(X+Y=1)P(Z=1)$；

$$P(X+Y=2, Z=0)=pq^2=P(X+Y=2)P(Z=0);$$

$$P(X+Y=2, Z=1)=p^3=P(X+Y=2)P(Z=1).$$

所以 $X+Y$ 与 $Z$ 相互独立. (5 分)

## 一　是非题（请填写是或非。共 6 分，每题 1 分）

1. 若随机事件 $A$ 与 $B$ 独立，$A$ 与 $C$ 独立，则 $A$ 与 $BC$ 必独立。（　　）

2. 若概率 $P(X=2008)=0.109$，则 $X$ 不可能是连续型随机变量。（　　）

3. 等边三角形域上的二维均匀分布的边缘分布不是均匀分布。（　　）

4. 若 $P(X \geq a)=1$，则随机变量 $X$ 的数学期望 $E(X)$ 一定不小于数 $a$。（　　）

5．总体均值 $\mu$ 的置信区间上限比样本观测值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中的任一 $x_i$ 都要大。

（　　）

6. 假设检验中犯第二类错误的概率是指 $\beta=P(\text{接受}H_1 | H_1\text{为伪})$。（　　）

## 二　填空题（共 15 分，每题 3 分）

7．设随机变量 $X$ 服从（1，3）上的均匀分布，则随机因变量 $Y=\ln X$ 的概率密度函数为 $f_Y(y)=$

____________________。

8．设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，且都服从参数 $p=0.3$ 的 $(0-1)$ 分布，则函数 $Z=\max\{X, Y\}$ 的分布律为

____________________________________。

9．对某一目标连续射击直至命中 3 次为止。设每次射击的命中率为 $0.6$，消耗的子弹数为 $X$，

则 $E(X)=$ ______，$D(X)=$ ______。

10．设 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，由切比雪夫不等式知，$P(|X-\mu| \geq 10\sigma)$ 的取值区间为________与________之间。

11．设（$X_1, \cdots, X_9$）是来自正态分布 $N(0,1)$ 的简单随机样本，

$$Y=(\sum_{i=1}^{3} X_i)^2+(\sum_{i=4}^{6} X_i)^2+(\sum_{i=7}^{9} X_i)^2。$$

当 $k=$ _____ 时，$kY$ 服从 $\chi^2$ 分布，$E(Y)=$ ____，$D(Y)=$ _____。

## 三　选择题（共 15 分，每题 3 分）

12．设随机事件 $A,B$ 满足 $P(B)=P(B\,\big|\,A).$，则下面结论正确的是________。

（a） $P(\overline{AB})=P(\bar{A})P(\bar{B})$；　　（b） $P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})$；

（c） $P(B\,|\,A)=P(A)$；　　（d） $P(A\,|\,\bar{B})=P(\bar{A})$。

13．设 $X\sim N(a,b)$，分布函数为 $F(x)$，则对任意实数 $c$，有_________。

（a） $F(a+c)-F(a-c)=0$；　　（b） $F(c+a)-F(c-a)=0$；

（c） $F(a+c)+F(a-c)=1$；　　（d） $F(c+a)+F(c-a)=1$。

14．设随机变量 $X$ 与 $Y$ 的二阶矩都存在且独立同分布，记 $\xi=X-Y$，$\eta=X+Y,$ 则 $\xi$ 与 $\eta$ _______。

（a）相互不独立；　　（b）相互独立；

（c）相关系数不为零；　　（d）相关系数为零。

15．设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立随机变量序列，$X_i\ (i=1,2,\cdots)$ 的密度函数是 $f_{X_i}(x)=\mu e^{-\mu x},$

$x>0;\ f_{X_i}(x)=0, x\le 0\ (\mu>0)$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则下列选项中正确的是_______。

（a） $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\dfrac{\mu\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\}=\Phi(x)$；（b） $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n/\mu}{n/\mu^2}\le x\}=\Phi(x)$；

（c） $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-1/\mu}{1/\mu^2}\le x\}=\Phi(x)$；（d） $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\dfrac{\mu\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{n}\le x\}=\Phi(x)$。

16．设总体 $X\sim E(\lambda)$，即密度函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，参数 $\lambda>0$ 且已知，

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 $X$ 的样本，则统计量 $2n\lambda\overline{X}$ 服从的分布是________。

（a） $\chi^2(n)$；　　（b） $\chi^2(2n)$；　　（c） $t(n)$；　　（d） $t(2n)$。

## 四　计算题（共 56 分，每题 8 分）

17．已知某油田钻井队打的井出油的概率为 0.08，而出油的井恰位于有储油地质结构位置上的概率为 0.85，

而不出油的井位于有储油地质结构位置上的概率为 0.45。求钻井队

1)在有储油地质结构位置上打井的概率;2)在有储油地质结构位置上打的井出油的概率。

18．已知随机变量（$X,Y$）的联合分布律，

1）求 $Z=X+Y$ 的分布律;

2）在 $Z\le 2$ 的条件下求 $X$ 的条件分布律。

| $Y \backslash X$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 0 | 1/10 | 1/2 |
| 1 | 1/5 | 1/5 |

19. 设随机变量 $X,Y$ 为区间 $[0,1]$ 上任意取的两个数，求 $Z=X-Y$ 的分布函数与密度函数。

20．国家宏观调控政策后，沧源路上某房地产中介公司每周卖出的住房套数服从参数为 $\lambda=0.5$ 的 Poisson

分布，试用中心极限定理估计该房产中介一年（52 周）能卖出 20 到 30 套住房的概率。

21．设总体 $X$ 的密度函数为 $f(x;\delta)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-\delta)}, & x\ge\delta\\ 0, & x<\delta\end{cases}$，其中 $\delta,\lambda>0$ 为未知参数，

$X_1,\cdots,X_n$ 为取之总体 $X$ 的一个样本。求参数 $\delta,\lambda$ 的矩估计量与极大似然估计量。

22．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，设 $X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}$ 为其容量为 $n+1$ 的样本，引入统计量

$$U=c\sum_{i=1}^{n}\left(X_{n+1}-X_i\right)^2,$$

试确定常数 $c$ 使得 $U$ 为 $\sigma^2$ 的无偏估计量。

23．据历史记载，上海 1 月份的平均最低气温为 $0.3\,^{\circ}C$，最近几年的上海 1 月份的平均最低气温如下：

| 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3．8 | 4．0 | 0．7 | 2．2 | 1．0 | 3．5 | 3．1 |

(单位: $C^o$；数据来源: 天气在线 www.t7online.com)，试据此数据检验上海气候有无变暖？($\alpha=0.05$)

**五．证明题 (本题 8 分)**

24．设 $X\sim t(n)$，$t_\alpha(n)$ 为 $t$ 分布的上 $\alpha$ 分位点，$F_\alpha(n,m)$ 为 $F$ 分布的上 $\alpha$ 分位点。

试证明：（1）$Y=X^2\sim F(1,n)$；（2）$[t_{1-\alpha/2}(n)]^2=F_\alpha(1,n)$.

附表：

| 标准正态分布数值表 | $\chi^2$ 分布数值表 | t 分布数值表 |
|---|---|---|
| $\Phi(0.78)=0.7823$ | $\chi^2_{0.05}(6)=12.5$ | $t_{0.05}(6)=1.9432$ |
| $\Phi(0.87)=0.8078$ | $\chi^2_{0.95}(6)=1.6$ | $t_{0.05}(7)=1.89$ |
| $\Phi(1.18)=0.8810$ | $\chi^2_{0.05}(7)=14.0$ | $t_{0.025}(6)=2.44$ |
| $\Phi(1.20)=0.8849$ | $\chi^2_{0.95}(7)=2.1$ | $t_{0.025}(7)=2.3646$ |

**一 是非题（6 分，每题 1 分）** 非 是 是 是 非 非

**二 填空题（15 分，每题 3 分）** 7. $f_Y(y)=\begin{cases} e^y/2, & 0<y<\ln 3 \\ 0, & 其他 \end{cases}$； 8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.49 & 0.51 \end{pmatrix}$；

9. 5，10/3 ； 10. 0与0.01之间； 11. 1/3，9，54.

**三 选择题（15 分，每题 3 分）** b c d a b

**四. 计算题（56 分，每题 8 分）**

17. 设事件 $A=\{$打的井位于有储油地质结构位置上$\}$，$B=\{$打的井出油$\}$.

则 $P(B)=0.08$，$P(A|B)=0.85$，$P(A|\bar{B})=0.45$. （2 分）

1）由全概率公式

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

$$=0.08\times 0.85+0.92\times 0.45=0.482.$$ （3 分）

2) 由贝叶斯公式得所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{68}{482}\approx 0.141.$$ （3 分）

18. 1）$Z=X+Y\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/10 & 7/10 & 1/5 \end{pmatrix}$； （3 分）

2) $P(X=k|Z\le 2)=\dfrac{P(X=k,Z\le 2)}{P(Z\le 2)}=\dfrac{5}{4}P(X=k,Z\le 2)$，$k=1,2$. （2 分）

$$P(X=1,Z\le 2)=P(X=1,X+Y\le 2)=P(X=1,Y\le 1)$$

$$=P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=P(X=1,Y\le 1)=3/10$$

条件分布律为

$$P(X=1|Z\le 2)=\frac{5}{4}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{8},\qquad P(X=2|Z\le 2)=\frac{5}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$$ （3 分）

19. $(X,Y)$ 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & x\in[0,1], y\in[0,1];\\ 0, & 其他\end{cases}$，（1 分）

$Z$ 上的分界点为 $-1, 0, 1$. 分布函数为 $F_Z(z)=P(X-Y\le z)=\iint\limits_{x-y\le z} f(x,y)dxdy$

$z<-1$ 时 $F_Z(z)=0$； $z\ge 1$ 时 $F_Z(z)=1$； （1 分）

$-1\le z<0$ 时， $F_Z(z)=\int_0^{1+z}dx\int_{x-z}^1 dy=\frac{1}{2}(1+z)^2$； （2 分）

$0\le z<1$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^1 dy+\int_z^1 dx\int_{x-z}^1 dy=\frac{1}{2}+z-\frac{z^2}{2}$. （2 分）

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-1;\\ \frac{1}{2}(1+z)^2, & -1\le z<0;\\ 1-\frac{1}{2}(1-z)^2, & 0\le z<1;\\ 1, & z\ge 1\end{cases} \Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases}1+z, & -1\le z<0;\\ 1-z, & 0\le z<1;\\ 0, & 其他\end{cases}$$ （2 分）

20. 令 $X_i$ =“第i周卖出的房子数”， i=1, . . . , 52，易知 $X_1,\ldots,X_{52}$ 独立同分布。

由中心极限定理，该房产中介一年卖出的房子总数 $X=\sum_{i=1}^{52}X_i \overset{近似}{\sim} N(26,26)$ （4 分）

从而

$$\begin{aligned}P(20\le X\le 30)&=P\left(\frac{20-26}{\sqrt{26}}\le\frac{X-26}{\sqrt{26}}\le\frac{30-26}{\sqrt{26}}\right)\\&=\Phi(0.78)-\Phi(-1.18)=0.7823+0.8810-1=0.6633\end{aligned}$$ （4 分）

21.（1）矩法估计(4 分)：易知 $Y=X-\delta$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，从而

$$\left.\begin{aligned}E(X-\delta)=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow EX=\frac{1}{\lambda}+\delta\approx\bar{X}\\ D(X-\delta)=\frac{1}{\lambda^2}\Rightarrow EX^2=\frac{1}{\lambda^2}+(\frac{1}{\lambda}+\delta)^2\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}}\\ \hat{\delta}=\bar{X}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\end{cases}$$

（2）极大似然估计(4 分)：设样本观测值为 $x_1,\ldots,x_n$，则似然函数为

$$L(\lambda,\delta)=\prod_{i=1}^n\lambda e^{-\lambda(x_i-\delta)},\ x_i\ge\delta$$

$$\ln L(\lambda,\delta)=\sum_{i=1}^{n}\{\ln\lambda-\lambda(x_i-\delta)\}=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}(x_i-\delta)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L(\lambda,\delta)}{\partial\lambda}=\dfrac{n}{\lambda}-\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\delta)=0\\[2ex]\dfrac{\partial\ln L(\lambda,\delta)}{\partial\delta}=n\lambda>0\end{cases}$$

易知$L(\lambda,\delta)$关于$\delta$的单增函数，要使$L(\lambda,\delta)$极大，$\delta$要尽可能地大，故

$\hat{\delta}=\min\{X_1,\dots,X_n\}:=X_{(1)}$，$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)})}$为所求极大似然估计量.

22．$EU=c\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_{n+1}-X_i)^2=c\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_{n+1}-X_i)=2n\sigma^2c=\sigma^2$ （6 分）

$\Rightarrow c=\dfrac{1}{2n}$ （2 分）

23．$\bar{x}=2.61,\ s^2=1.80\Rightarrow s=1.34$ （2 分）

假设：　$H_0:\mu=0.3,\quad H_1:\mu>0.3$（或$H_0:\mu\le 0.3,\quad H_1:\mu>0.3$） （2 分）

则取统计量　$t=\dfrac{\bar{X}-0.3}{S/\sqrt{7}}$，在$H_0$为真条件下，$t\sim t(6)$，

拒绝域　$D=\{t>t_{0.05}(6)\}=\{t>1.9$

代入数据计算得　$\hat{t}=\dfrac{2.61-0.3}{1.34/\sqrt{7}}=4.56>1.9432$

从而拒绝$H_0$，即认为上海气候明显变暖。 （4 分）

**五．证明题（8 分）**

24．设$X\sim t(n)$，则　$X=\dfrac{Z}{\sqrt{\chi^2(n)/n}}$，其中　$Z\sim N(0,1)$，

令　$Y=X^2=\dfrac{Z^2}{\chi^2(n)/n}=\dfrac{Z^2/1}{\chi^2(n)/n}$，　则　$Y\sim F(1,n)$. （4 分）

由$t$分布定义　$P(|X|>|t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)|)=P(|X|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n))=\alpha$ （2 分）

$$=P(X^2>t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n))=P(Y>t_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n))=P(Y>F_\alpha(1,n))$$

$$[t_{1-\alpha/2}(n)]^2=F_\alpha(1,n).$$ （2 分）