期末考试复习提纲

《概率论》2021 年 06 月 11 日

第一章：概率论的基本概念

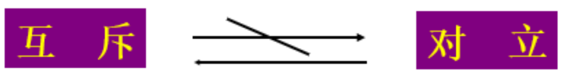
1. 随机现象、确定现象的定义；

2. 随机试验、样本空间、随机事件的定义；

说明：（1）试验不同，对应的样本空间也不同。（2）同一试验，若试验目的不同，则对应的样本空间也不同。（3）建立样本空间，事实上就是建立随机现象的数学模型。因此，一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题。

3. 随机事件间的关系：包含、相等、和事件、积事件、差事件、互斥事件、对立事件。

*互斥和对立之间的关系：



4. 随机事件间的计算：德.摩根率 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

5. 概率的定义和性质：

2)（有限可加性）若 $A_1, A_2, \ldots A_n$ 是两两互不相容的事件则有，

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_1)+\cdots+P(A_n).$$

3) 设 A, B 为两个事件且 $A\subset B$，则

$$P(A)\le P(B),\ P(B-A)=P(B)-P(A).$$

5) **（逆事件概率）**对于任意一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

6) **（加法公式）**对于任意两事件 A，B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

推广：三个事件和的情况

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)$$

$-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3).$

例题：概率论的基本概念（1）Slide 38-39 （例 2）

6. 等可能概型

例题：概率论的基本概念（2）Slide 11-14 （例 2、3）

7. 几何概型

***当古典概型的试验结果为连续无穷多个时,就归结为几何概型。**

例题：概率论的基本概念（2）Slide 16-18 （例 1）

8. 条件概率、乘法定理、全概率公式与贝叶斯公式

A. 条件概率定义：当设 A, B 是两个事件且 $P(A)>0$, 称

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

B. 性质：

3) 加法公式：$P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$;

4) 逆事件概率：$P(A|B)=1-P(\overline{A}|B)$;

5) 可列可加性：设 B_1, B_2, $\cdots$ 是两两不相容的事件，则有

$$P(\cup_{i=1}^{\infty}B_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$$

B. 乘法定理定义：

设 $P(A)>0$, 则有 $P(AB)=P(B|A)P(A)$.

例题：概率论的基本概念（2）Slide 30-31 （例 2）

C. 全概率公式与贝叶斯公式：

(1) 全概率公式：设试验 E 的样本空间为 S, A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(B_i)>0\ (i=1,\ 2,\cdots,n)$, 则

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$$

说明: 全概率公式的主要用处在于它可以将一个复杂事件的概率计算问题,分解为若干个简单事件的概率计算问题,最后应用概率的可加性求出最终结果。

例题:概率论的基本概念(2)Slide 35-36 (例 3)

(2)贝叶斯定理:

贝叶斯公式可以理解为:**后验概率(A 发生后 B_i 的概率) = 先验概率(B_i 的概率)*可能性函数**(调整因子,新信息 A 带来的调整,使先验概率更接近真实概率)

$$P(B_i|A)=P(B_i)\frac{P(A|B_i)}{P(A)}$$

例题:概率论的基本概念(2)Slide 41-47 (例 4、5)

9.事件的相互独立性、两个定理

--定义: 设 A, B 是两事件,如果满足等式 $P(AB)=P(A)P(B)$ 则称事件 A, B 相互独立,简称 A, B 独立。

$$n\text{个事件相互独立} \underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow} n\text{个事件两两相互独立}$$

例题:概率论的基本概念(3)Slide 9-10 (例 1)

--定理一: 设 A, B 是两事件,且 $P(A)>0$. 若 A, B 相互独立,则 $P(B|A)=P(B)$. 反之亦然。

--定理二: 若 A, B 相互独立,则下列各对事件,$\overline{A}$ 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

例题:概率论的基本概念(3)Slide 16-18 (例 2)

第二章:随机变量及其分布

1. 随机变量的概念：

2. 离散型随机变量的分布律

$X\sim\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$ 或者

X	x_1	x_2	$\cdots$	$x_n\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	$p_n\cdots$

例题：随机变量及其分布（1）Slide 16-18 （例 2）

3. 常见离散型随机变量的概率分布：（记住其分布律；给定分布律会计算相应的分布函数）

a) （0 －1）分布

b) 二项分布：$X\sim b(n,p)$

注：（0 －1）分布为 n= 1 的二项分布。

例题：随机变量及其分布（1）Slide 30 （例 4）

c) 泊松分布：$X\sim\pi(\lambda)$.

--泊松定理（注意泊松定理成立的条件）：设$\lambda>0$ 是一个常数，n 是任意整数，设 $np_n=\lambda$, 则对于任一固定的非负整数k, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\ {p_n}^k\ (1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

例题：随机变量及其分布（1）Slide 38-40 （例 6）

d) 几何分布

注：几何分布可作为描述某个试验“首次成功”的概率模型。

3. 随机变量的分布函数

--分布函数的定义与性质：

****定义：**设 X 是一个随机变量, x 是任意实数, 函数

$$F(x) = P\{X\leqslant x\}$$

称为 X 的分布函数。

****两个重要公式（随机变量及其分布（2）Slide 11）：**

1) $P\{a<X\leq b\}=F(b)-F(a)$,

2) $P\{X > a\} = 1 - F(a)$.

例题：随机变量及其分布（2）Slide 12-14 （例 1）

4. 连续型随机变量及其概率密度

--定义： 如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在非负函数，使对于任意实数 x 有 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$，则称 X 为连续型随机变量，其中 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度。

--性质：

3) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$;

3.1）$P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

3.2）$P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

例题：随机变量及其分布（2）Slide 24-26 （例 3）

5. 常见连续型随机变量的分布：（记住其概率密度；给定概率密度会计算相应的分布函数）

a. 均匀分布： $X \sim U(a, b)$.

例题：随机变量及其分布（2）Slide 31-32 （例 4）

b. 指数分布（无记忆性）：$X \sim E(\theta)$

例题：随机变量及其分布（2）Slide 35-36 （例 5）

c. 正态分布：（会标准化、查表计算概率）：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$。

--标准正态分布定义：

当正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 中的 $\mu = 0$，$\sigma = 1$ 时，这样的正态分布称为标准正态分布，记为 $N(0, 1)$。

***标准正态分布的概率密度表示为：** $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$,

***引理：** 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

例题：随机变量及其分布（2）Slide 49-51 （例 8、9）

6. 离散型随机变量的函数的分布

例题：随机变量及其分布（3）Slide 8-9 （例 2）

7. 连续型随机变量的函数的分布：

--定理（随机变量及其分布（3）Slide 18）： 设随机变量 X 的具有概率密度 $f_X(x)$，其中 $-\infty < x < +\infty$，又设函数 $g(x)$ 处处可导，且恒有 $g'(x) > 0$（或恒有 $g'(x) < 0$），则称 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$，$\beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$，$h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数。

例题：随机变量及其分布（3）Slide 19-20 （例 5）、Slide 37-39（例 7）

第三章：多维随机变量及其分布

1. 二维随机变量及其分布函数

2. 二维离散型随机变量

例题：多维随机变量及其分布（1）Slide 16-20 （例 1、2）

3. 二维连续型随机变量

--定义： 对于二维随机变量 (X, Y) 的分布函数 F(x, y)，如果存在非负函数 $f(x, y)$ 使对于任意 x, y 有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u, v)\, du\, dv,$$

则称 (X, Y) 是连续型的二维随机变量，函数 $f(x, y)$ 称为二维随机变量 (X, Y) 的

概率密度，或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度。

--性质：

(3) 设 G 是 xoy 平面上的一个区域，点 (X,Y) 落在 G 内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

(4)若 $\mathrm{f(x,y)}$在$\mathrm{(x,y)}$连续，则有 $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F(x,y)}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}}=\mathrm{f(x,y)}$.

例题：多维随机变量及其分布（1）Slide 31-33 （例 4）

4.两个常见的分布

A. 二维均匀分布：

定义：设 D 是平面上的有界区域，其面积为 S，若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度则称 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布.

例题：多维随机变量及其分布（1）Slide 35-38（例 5）

B. 二维正态分布：（不要求记住二维正态分布的 pdf）

5.离散型随机变量边缘分布律

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},\ i=1,2,\cdots;$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},\ j=1,2,\cdots.$$

例题：多维随机变量及其分布（2）Slide 11-12（例 2）

6. 连续型随机变量边缘分布

定义： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ 为随机变量 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度。

例题：多维随机变量及其分布（2）Slide 15-18（例 3）

7. 条件分布

--离散型随机变量的条件分布定义：

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},\text{为在 Y}$$

$=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律。

例题：多维随机变量及其分布（2）Slide 26-28（例 5）

--连续型随机变量的条件分布定义：

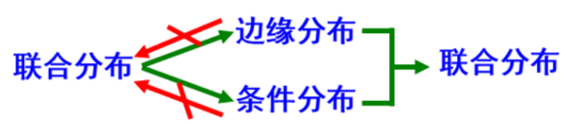
定义： 称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$ 为在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件分布函数, 记为 $P\{X\le x|Y=y\}$ 或 $F_{X|Y}(x|y)$, 即

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx.$$

例题：多维随机变量及其分布（2）Slide 40-41（例 8）

8. 联合分布、边缘分布、条件分布之间的关系：

说明： 联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下



9. 相互独立的随机变量：

--定义： 设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X,Y) 的分布函数及边缘分布函数，若对于所有 x,y 有

$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}\ P\{Y \le y\}$，即 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

则称随机变量 X, Y 是相互独立的。

(1) 若离散型随机变量（X, Y）的联合分布律为

$$P\{X = i, Y = j\} = p_{ij}, i, j = 1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$,

$$即\ \ p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}.$$

例题：多维随机变量及其分布（2）Slide 46-48（例 9）

(2) 连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度为 f(x, y), 边缘概率密度分为

$f_X(x)$，$f_Y(y)$, 则有 X 和 Y 相互独立

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$$

例题：多维随机变量及其分布（2）Slide 52-53（例 12）

(3) X 和 Y 相互独立, 则 f(X) 和 g(Y) 也相互独立.

10. 离散型随机变量函数的分布

--定义：随机变量函数 $Z = g(X,Y)$ 的分布律为

$P\{Z = z_k\} = P\{g(X,Y) = z_k\} = \sum_{z_k = g(x_i y_j)} p_{ij}$，$k = 1,2,\cdots.$

例题：多维随机变量及其分布（3）Slide 5-8（例 1）；Slide 12-14（例 3）

11. 连续型随机变量函数的分布

A. $Z = X + Y$

由此可得 (X, Y) 由此可得概率密度函数为 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y)\, dy.$

***卷积公式：**当 X 与 Y 相互独立时，$f_Z(z)$ 也可表示为

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y) f_Y(y)\, dy$，或 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\, dx.$

记为 $f_X * f_Y$，即

$f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y) f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\, dx.$

例题：多维随机变量及其分布（3）Slide 18-20（例 4）；Slide 21-24（例 5）.

B. $\mathbf{Z=X/Y}$

$$f_{X/Y}(z)=\int_0^{+\infty} yf(yz,y)\,\mathrm{d}\,y-\int_{-\infty}^{0} yf(yz,y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(yz,y)\,\mathrm{d}\,y.$$

当 X, Y 独立时,

$$f_{X/Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,f_X(yz)f_Y(y)\,\mathrm{d}\,y.$$

例题：多维随机变量及其分布（3）Slide 34-36（例 7）.

C. $\boldsymbol{M=\max(X,Y)}$及$\boldsymbol{N=\min(X,Y)}$的分布

定义：设 X,Y 是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

$F_{\max}(Z)=F_X(z)F_Y(z)$； $F_{\min}(Z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$.

例题：多维随机变量及其分布（3）Slide 39-45（例 8）.

第四章：随机变量的数字特征

1. 离散型随机变量的数学期望：

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k.$$

例题：随机变量的数字特征（1）Slide 14-16（实例 4）.

2. 连续型随机变量的数学期望

$$\mathrm{E(X)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{xf(x)\,d\,x}.$$

例题：随机变量的数字特征（1）Slide 18-19（实例 5）

--性质：

4）设 X，Y 是相互独立的随机变量，则有 $E(XY) = E(X)E(Y)$.

例题：随机变量的数字特征（1）Slide 21-22（实例 6）

3.随机变量函数的数学期望

设$Y = g(X)$ (g 是连续函数).

a) 如果 X 是离散型随机变量，$E(Y) = E\big(g(X)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$.

b) 如果 X 是连续型随机变量，它的概率密度为 $f(x)$,

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例题：随机变量的数字特征（1）Slide 30-32（实例 8）

c) 二维随机变量函数的数学期望：

A. 设 X, Y 为离散型随机变量，g(x, y) 为二元函数，则

$$E[g(X,Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}.$$

例题：随机变量的数字特征（1）Slide 27-29（实例 7）

B. 设 X，Y 为连续型随机变量，g(x, y) 为二元函数，则

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

其中 (X, Y) 的联合概率密度为 f(x, y).

4.随机变量方差的概念及性质

--概念：

a） 离散型随机变量的方差：

$$D(X) = \sum_{k=1}^{+\infty}[x_k - E(X)]^2\,p_k,$$

b） 连续型随机变量的方差：

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}[x - E(X)]^2\,f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 f(x) 为 X 的概率密度。

c）利用公式计算：$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

--性质：

（2）设 X 是一个随机变量，C 是常数，则有：$D(CX) = C^2 D(X)$.

（3）设 X，Y 相互独立，D(X)，D(Y) 存在，则有：$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

5.重要概率分布的方差：

分　布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0<p<1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n \geq 1$, $0<p<1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda>0$	λ	λ
均匀分布	$a<b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\theta>0$	θ	θ^2
正态分布	$\mu,\sigma>0$	μ	σ^2

例题：随机变量的数字特征（2）Slide 37-38（例 2）

6.切比雪夫（Chebyshev）不等式

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X) = \mu$, 方差 $D(X) = \sigma^2$，则对于任意正数 ε，不等式 $P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$;

$$P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow P\{|X-\mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

例题：随机变量的数字特征（2）Slide 43（例 4）

7. 协方差定义和性质

--定义：$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$.

而 $\rho_{XY} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}$，称为随机变量 X 与 Y 的相关系数。

--计算公式：

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$;

(2) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.

--性质：

(2) $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$， a，b 为常数;

(3) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.

例题：随机变量的数字特征（3）Slide 13-15（例 2）

> **结论：**
>
> (1) 二维正态分布密度函数中，参数 ρ 代表了 X 与 Y 的相关系数;
>
> (2) 二维正态随机变量 X 与 Y 相关系数为零等价于 X 与 Y 相互独立。

8. 相关系数的定义和性质：

（1） $|\rho_{XY}|\le 1$.

（2） $|\rho_{XY}|=1$ 的充要条件是：存在常数 a，b 使 $P\{Y=a+bX\}=1$.

> **解读：**
>
> 当 $|\rho_{XY}|$ 较大时 e 较小，表明 X,Y 的线性联系较紧密。
>
> 当 $|\rho_{XY}|$ 较小时，X,Y 线性相关的程度较差.

（3） 相互独立 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 不相关

例题：随机变量的数字特征（3）Slide 51-54(例 4)

9. 矩的定义（了解）： k 阶原点矩、k 阶中心矩、$k+l$ 阶混合矩、$k+l$ 阶混合中心矩.

第五章：大数定律及中心极限定理

1. 大数定律（三个版本）：

--定理一（契比雪夫定理的特殊情况）

--定理二（伯努利大数 定理） 设 n_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数

, p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对于任意正数 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1 \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0.$$

--定理三（辛钦定理）

设随机变量 $X_1, X_2,\cdots, X_n,\cdots$ 相互独立,服从同一分布，且具有数学期望 $E(X_k)=\mu\ (k=1,2,\cdots)$,则对于任意正数$\varepsilon$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

2. 中心极限定理（三个版本）:

--定理四（独立同分布的中心极限定理）设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立,服从同一分布，且具有数学期望和方差：$E(X_k)=\mu$，$D(X_k)=\sigma^2>0\ (k=1,2,\cdots)$，则随机变量之和的标准化变量

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\leq x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x).$$

例题：大数定律及中心极限定理 Slide 27-28(例 3)

--定理五(李雅普诺夫定理)

定理五表明:无论各个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 服从什么分布,只要满足定理的条件，那么它们的和 $\sum_{k=1}^{n} X_k$ 当 n 很大时,近似地服从正态分布。

--定理六(德莫佛一拉普拉斯定理)设随机变量 $\eta_n\ (n=1,2,\cdots)$ 服从参数为

$n,p\ (0<p<1)$的二项分布，则对于任意 x，恒有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

例题：大数定律及中心极限定理 Slide 35-38(例 6)