试 卷 （十）

一、选择题（每题 2 分，共 18 分）

1. 设 A, B 为任意两个概率不为零的互不相容事件，则下列结论中肯定正确的是 （　　）

(A) $P(AB)=P(A)P(B)$；　　(B) $P(A-B)=P(A)$；

(C) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容；　　(D) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容.

2. 设 $0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$, $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$，则 （　　）

(A) 事件 A, B 不相容；　　(B) 事件 A, B 为对立事件；

(C) 事件 A, B 相互独立；　　(D) 事件 A, B 不相互独立.

3. 设随机变量 X, Y 相互独立且同分布，$P(X=1)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$, $P(X=-1)=P(Y=-1)=\frac{1}{2}$，则有 （　　）

(A) $P(X=Y)=1$；　　(B) $P(X=Y)=\frac{1}{2}$；

(C) $P(X+Y=0)=\frac{1}{4}$；　　(D) $P(XY=1)=\frac{1}{4}$.

4. X 为随机变量，$E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$ $(\sigma>0)$，则对任意常数 k，必有 （　　）

(A) $E(X-k)^2=E(X^2)-k^2$；

(B) $E(X-k)^2\geqslant E(X-\mu)^2$；

(C) $E(X-k)^2<E(X-\mu)^2$；

(D) $E(X-k)^2=E(X-\mu)^2$.

5. 设每次试验中事件 A 发生的概率为 p $(0<p<1)$，进行独立重复试验，直至第 n 次时，事件 A 才发生 k 次 $(1\leqslant k\leqslant n)$ 的概率为

（　　）

(A) $C_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$;　　(B) $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$;

(C) $p^k(1-p)^{n-k}$;　　(D) $C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-(k-1)}$.

6. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，则随着 σ 的增大，概率 $P(|X-\mu|<\sigma)$　　(　　)

(A) 单调减少；　　(B) 单调增加；

(C) 保持不变；　　(D) 增减不定.

7. 设 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2未知，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X-\overline{X})^2$，则 μ 的置信度为 95% 的置信区间为　　(　　)

(A) $\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1),\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)\right)$;

(B) $\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1),\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)\right)$;

(C) $\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)\right)$;

(D) $\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)\right)$.

8. 样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 取自总体 X，记 $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$，则可作为 σ^2 的无偏估计量的是　　(　　)

(A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ (其中 μ 已知)；

(B) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ (其中 μ 已知)；

(C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ (其中 μ 未知)；

(D) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ (其中 μ 未知).

9. 已知 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 分别是随机变量 X, Y 的分布函数，若函数 $F(x)=kF_1(x)-lF_2(x)$ 是随机变量 Z 的分布函数，则　　(　　)

(A) $k=\frac{2}{3}$, $l=\frac{1}{3}$;　　(B) $k=\frac{3}{5}$, $l=-\frac{2}{5}$;

(C) $k=-\frac{1}{2}$, $l=\frac{3}{2}$;　　　　(D) $k=\frac{1}{2}$, $l=-\frac{3}{2}$.

二、填空题（每题 2 分，共 18 分）

1. 已知 $P(AB)=0.6$，则 $1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B})=$ ________.

2. 已知离散型随机变量 X 的分布律 $P(X=k)=b\lambda^{k}$ $(b>0$, $k=1, 2, \cdots)$，则 $\lambda=$ ________.

3. 把红、黄、白 3 个小球随机地放入两个杯子中，若设 X 为有小球的杯子数，则 $D(X)=$ ________.

4. 设随机变量 X_{ij} 独立同分布，$E(X_{ij})=3$ $(i, j=1, 2)$，则行列式 $Y=\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix}$ 的数学期望 $E(Y)=$ ________.

5. 设随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$，则 $E(\mathrm{e}^{2X})=$ ________.

6. 设总体 $X\sim N(\mu, 0.9^2)$，当样本容量为 9 时，测得样本均值 $\overline{x}=5$，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为________.

7. 已知二维随机变量 $(X, Y)\sim N(1, 2; 2, 4; 0)$，若设随机变量 $Z=2X+Y-3$，则 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)=$ ________.

8. 设连续型随机变量 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 0 & (x<-1), \\ 3a+2b\arcsin x & (|x|\leqslant 1), \\ 1 & (x>1), \end{cases}$$

则 $a=$ ________, $b=$ ________.

9. 已知随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

Y \ X	0	1
0	0.2	0.1
1	0.4	0.3

则协方差 $\mathrm{cov}(X, Y) =$ ________.

三、计算题（每题 8 分，共 56 分）

1. 在电源的电压不超过 200 V，200 ～ 240 V 及超过 240 V 三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001 和 0.2. 设电压为随机变量 $X \sim N(220, 25^2)$. 试求：

(1) 元件损坏的概率；

(2) 设在某仪器上装有 3 个该种元件，若元件工作相互独立且至少有 2 个未损坏时，仪器才能正常工作，求仪器正常工作的概率.

附表：$\Phi(x)$为标准正态分布函数

x	0.60	0.80	1.00	1.645	1.85	1.96	2.00
$\Phi(x)$	0.726	0.788	0.841	0.950	0.967	0.975	0.977

2. 口袋里有 2 个白球，3 个黑球. 现不放回地依次摸出 2 球，并设随机变量

$$X = \begin{cases} 1 & (\text{第一次摸出白球}), \\ 0 & (\text{第一次摸出黑球}), \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1 & (\text{第二次摸出白球}), \\ 0 & (\text{第二次摸出黑球}). \end{cases}$$

试求：

(1) (X, Y)的联合分布律；

(2) 在 $X = 1$ 的条件下，Y 的条件分布律；

(3) 随机变量 X, Y 是否相互独立？

3. 在某一分钟的任何时刻，信号进入接收器是等可能的，若收到两个独立信号的时间间隔小于 0.1 s，则信号相互干扰，求信号相互干扰的概率.

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{11}$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的随机样本，随机变量 $Y = c\sum_{k=1}^{10}(X_{k+1} - X_k)^2$. 试求常数 c，使 Y 为σ^2的无偏估计.

5. 设总体 X 的概率密度函数

$$f(x, \alpha)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad(\alpha>-1),$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为取自总体 X 的样本. 试求：

(1) α 的矩估计量 $\hat{\alpha}_1$；

(2) α 的极大似然估计量 $\hat{\alpha}_2$.

6. (1) 某产品的一项质量指标 $X\sim N(1\,600, 150^2)$，现从一批产品中随机地抽取 26 件，测得该指标的均值 $\bar{x}=1\,673$. 问：可否认为该批产品的质量指标是合格的 $(\alpha=0.05)$？

(2) 某产品的一项质量指标 $X\sim N(\mu, 0.048^2)$，现从一批产品中随机地抽取 5 件，测得样本方差 $s^2=0.007\,78$. 问：该批产品的方差是否正常 $(\alpha=0.05)$？

附表

α	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025
$\chi_{\alpha}^2(4)$	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143
$\chi_{\alpha}^2(5)$	0.831	1.145	1.610	9.236	11.071	12.833

7. 某商店经销某种商品，每周进货量 X 与顾客的需求量 Y 相互独立，且都服从[10, 20]上的均匀分布. 每售出一件可获利 20 元，若脱销则可从其他商店调剂，这时每售出一件可获利 5 元. 求该商店经销这种商品的周利润的期望值.

四、证明题 (8 分，两题中任选一题)

1. 设 $f(x, y)$，$f_X(x)$，$f_{X|Y}(x \mid y)$ 分别表示二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数、边缘密度函数及条件密度函数. 求证：X, Y 相互独立的充分必要条件是

$$f_{X|Y}(x \mid y)=f_X(x).$$

2. 设 X 为连续型随机变量，若 X 的密度函数 $f(x)$ 在 $x<0$ 时恒为

零,且数学期望 $E(X)$ 存在. 试证：对任意常数 a $(a>0)$,有

$$P(X>a)\leqslant\frac{E(X)}{a}.$$

试卷(十)考核内容分值表

概率论 70				数理统计 30	
随机事件	一维变量	二维变量	数字特征	参数估计	假设检验
6	18	22	24	22	8