《概率论与数理统计》复习资料

一、 考试说明

考试形式和试卷结构

考试形式：当堂开卷

试卷内容比例：概率论部分约占 **72%** 数理统计部分约占 **28**%

题型比例：选择题约占 **24%**，填空题约占 **24**%，解答题约占 **52%**

说明 **:** 在下列的复习题中，包括试题中题目分数约为 **70** 分，包括了所有试题题型，由于考试形式为开卷，所以请同学们认真做一下下面的复习题，这样至少保证通过考试，在确保通过考试的基础上，请同学们认真复习，取得满意的成绩。

二、 复习题

(一) 单项选择题

1、A、B、C 表示事件，下列三个有关事件的关系式中，正确的有（ ）.

（1）$A+BC=(A+B)(A+C)$ （2）$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$ （3）$A+B=AB$

A、0 个； B、1 个； C、2 个； D、3 个

知识点	答案
等可能概型	c

2、掷 2 颗骰子，设点数之和为 3 的事件的概率为 p，则 $p=$（ ）

（A）$\frac{1}{2}$； (B) $\frac{1}{4}$；

(C) $\frac{1}{18}$； (D) $\frac{1}{36}$.

知识点	答案
等可能概型	c

3、一部文集，按顺序排放在书架的同层上，则各卷自左到右或自右到左卷号恰好为 1、2、 3、4 顺序的概率等于（ ）

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{16}$ (D) $\frac{1}{24}$

知识点	答案
等可能概型	b

4、某次国际会议共有 1000 人参加，其中有 400 人来自天津， 350 人来自北京， 250 人来自国外。已知有 100 人将在会议发言，则恰好有 40 个发言者是天津人的概率为（ ）.

A、$\frac{C_{400}^{40}C_{600}^{60}}{C_{1000}^{400}C_{1000}^{350}C_{1000}^{250}}$ B、$\frac{C_{400}^{40}C_{600}^{60}}{C_{1000}^{100}}$ C、$\frac{C_{400}^{40}C_{350}^{35}C_{250}^{25}}{C_{1000}^{400}C_{1000}^{350}C_{1000}^{250}}$ D、$\frac{C_{400}^{40}C_{350}^{35}C_{250}^{25}}{C_{1000}^{100}}$

知识点	答案
超几何概型	b

5、已知 A,B 两事件满足 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$，若 $P(A)=p$，则 $P(B)=$（ ）

A. $1-p$ B. p C. $p(1-p)$ D. p^2

知识点	答案
随机事件概率	a

6、已知甲乙两人射击的命中率分别为 0.8 和 0.9，现让他们各自独立地对同一目标各射一次，求目标被命中的

概率为（　　　　）。

A、0.72； B、0.84； C、0.93； D、0.98

知识点	答案
条件概率	d

7、袋中有三张彩票，其中只有一张是可以中奖的。甲、乙、丙三个人一次从袋中取出一张彩票，则（　　　　）.

A、甲中奖的概率最大　　B．乙中奖的概率最大

C、丙中奖的概率最大　　D、三个人中奖的概率相同

知识点	答案
条件概率与全概率公式	D

8、设某批产品中甲、乙、丙三个厂家的产量分别占 45%，35%，20%，各厂产品中次品率分别为 4%、2%和 5%. 现从中任取一件，取到的恰好是次品的概率为（　　　）.

A. 0.035　　B. 0.038

C. 0.076　　D. 0.045

知识点	答案
全概公式	a

9、设事件 A，B 相互独立，且 $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{5}$，则 $P(A\mid\overline{B})=$（　　）

A. $\frac{1}{15}$　　B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{4}{15}$　　D. $\frac{1}{3}$

知识点	答案
随机事件的独立性	d

10、设随机变量 $X\sim B(2,p)$，$Y\sim B(3,p)$，若 $P\{X\geq 1\}=\frac{5}{9}$，则 $P\{Y\geq 1\}=$（　）.

A. $\frac{31}{41}$　　B. $\frac{19}{27}$　　C. $\frac{2}{15}$　　D. $\frac{2}{13}$

知识点	答案
二项分布	b

11、设随机变量 X~N(1,4)，已知 $\Phi(-1.96)=0.025$，则 $P\left(\left|(X-1)/2\right|<1.96\right)=$（　　）.

A、0.025　　B. 0.050　　C、0.950　　D、0.975

知识点	答案
正态分布	d

12、设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，若 μ 不变，当 σ 增大时概率 $P\{|X-\mu|<1\}$（　　）.

A、增大　　B．减小　　C、不变　　D、增减不定

知识点	答案
正态分布	b

13、设 X 的概率密度为 $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，则 $Y=2X$ 的概率密度 $f_Y(y)=$（　　）.

(A) $\frac{2}{\pi(4+y^2)}$;　　(B) $\frac{1}{\pi(1+4y^2)}$;

(C) $\frac{1}{\pi(1+y^2)}$； (D) $\frac{1}{\pi}\text{arctg}y$.

知识点	答案
随机变量函数的分布	a

14、设 X 和 Y 是相互独立的两个随机变量， X 服从 [0,1] 上的均匀分布，即 $X \sim U(0,2)$，Y 服从参数为 2 的指数分布，即 $Y \sim e(2)$，则 $E(XY) =$（ ）

A. 1 B.2 C.3 D.4

知识点	答案
期望和方差	b

15、对两个随机变量 X 和 Y，若 E[X+Y]=E[X]+E[Y] ，则（ ）.

A、D(X+Y)=D(X)+D(Y); B、 E[XY]=E[X]E[Y];

C、D(XY)=D(X)D(Y); D、上述结论都不一定成立.

知识点	答案
数学期望的性质	d

16、随机变量 $X \sim b(n, p)$，且已知 $E(X) = 2.4$， $D(X) = 1.44$，则此二项分布中参数 n 和 $p =$（ ）.

（A） $n = 6, p = 0.4$； (B) $n = 4, p = 0.6$；

(C) $n = 6, p = 0.6$ ； (D) $n = 4, p = 0.4$.

知识点	答案
数学期望	a

17、设随机变量 X 服从正态分布 N(0,1)，Y=3X+4 ，则 D(Y)= （ ）.

A、3 B、4 C、9 D、16

知识点	答案
期望和方差	c

18、设随机变量 X 和 Y 都服从区间 [0， 1]上的均匀分布，则 E[X+Y]= （ ）.

A、1/6； B、1/2； C、1； D、2

知识点	答案
期望和方差	c

19、两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 N(1,4) 和 N(0,9)，则 D(2X+3Y)= （ ）.

A、72 B、 84 C、97 101

知识点	答案
数学期望与方差	C

20、对两个随机变量 X 和 Y，若 $E(XY) = E(X)E(Y)$，则（ ）成立。

（A） $D(XY) = D(X)D(Y)$； (B) $D(X+Y) = D(X)+D(Y)$；

(C) X 和 Y 相互独立 ； (D) X 和 Y 不相互独立 .

知识点	答案
期望和方差	b

21、设随机变量 X 和 Y 的方差 D(X)， D(Y) 都不为零，则 D(X+Y)=D(X)+D(Y) 是 X 与 Y （ ）.

A、不相关的充分必要条件 ； B、独立的充分条件，但不是必要条件 ；

C、独立的充分必要条件 ； D、不相关的充分条件，但不是必要条件.

知识点	答案
方差的性质	a

22、设 $D(X)=2$，则根据切比雪夫不等式 $P\{|X-E(X)|\geq 3\}\leq$（ ）

.（A） $\frac{2}{9}$； (B) $\frac{1}{4}$；

(C) $\frac{3}{4}$； (D) $\frac{1}{3}$.

知识点	答案
切比雪夫不等式	a

23、设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ未知，σ^2已知 X_1，X_2，X_3是取自总体 X 的一个样本，则以下不能作为统计量的是（ ）.

A、$X_1+\mu$ B、$X_1+X_2/4$ C、$2X_1+3X_2+4X_3$ D、$(X_1+X_2+X_3)/\sigma^2$

知识点	答案
统计量	a

24、设 $X_1,X_2,,X_n$是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的样本，则样本均值 $\bar{X}$ 的方差 $D(\bar{X})=$（ ）.

A、σ^2 B、$n\sigma^2$ C、σ^2/n D、σ^2/n^2

知识点	答案
统计量	C

25、随机变量 X 服从 (0-1) 分布，参数 p 未知，有容量为 n 的样本观察值 x_1, x_2,, ，x_n,则参数 p 的最大似然估计为（ ）.

A、$x_1, x_2,, , x_n$中的最大值 $\max\{x_1, x_2,, , x_n\}$ B、$x_1, x_2,, , x_n$中的最小值 $\min\{x_1, x_2,, , x_n\}$

C、$x_1, x_2,, , x_n$的中间值 $x_{n/2}$ D、$x_1, x_2,, , x_n$的平均值 $(x_1+x_2+, +x_n)/n$

知识点	答案
最大似然估计	D

26、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知而 μ 为未知参数，$X_1, X_2,\cdots X_n$ 是从总体 X 中抽取的样本，记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，又 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数，已知 Φ（1.96）=0.975，$\Phi(1.28)$=0.90 ，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是（ ）。

A、$(\bar{X}-0.975\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+0.975\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$，

B、$(X-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},X+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$，

C、$(\bar{X}-1.28\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+1.28\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$，

D、$(\bar{X}-0.90\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+0.90\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

知识点	答案
区间估计	b

27、设总体 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均为未知参数，$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$ 是取自总体 ξ 的样本，记

$\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$，则 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为（　　）。

A、$(\xi-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{S_n}{\sqrt{n}},\xi+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n}})$

B、$(\bar{\xi}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{S_n}{\sqrt{n-1}},\bar{\xi}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n-1}})$

C、$(\bar{\xi}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{\xi}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

D、$(\bar{\xi}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}},\bar{\xi}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}})$

知识点	答案
区间估计	b

28、设总体 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 未知而 σ^2 已知，$(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)$ 为取自总体 ξ 的样本，记

$\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，则 $(\bar{\xi}-Z_{0.05}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{\xi}+Z_{0.05}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 作为 μ 的置信区间，其置信度为（　　）。

A、0.95　B、0.05　C、0.975　D、0.90

知识点	答案
区间估计	d

29、在假设检验中，原假设 H_0，备择假设 H_1，则称（　　）为犯第二类错误。

A、H_0 为真，接受 H_1　B、H_0 不真，接受 H_0

C、H_0 为真，拒绝 H_1　D、H_0 不真，拒绝 H_0

知识点	答案
假设检验	a

30、在假设检验中，显著性水平 α 表示（　　）。

A、P{接受 $H_0|H_0$ 为假}　B、置信度为 α

C、P{拒绝 $H_0|H_0$ 为真}　D、无具体意义

知识点	答案
假设检验	c

31、在假设检验中，下列结论正确的是（　　）。

A、只犯第一类错误　B、只犯第二类错误

C、既可能犯第一类也可能犯第二类错误　D、不犯第一类也不犯第二类错误

知识点	答案
假设检验	c

（二）填空题

1、 从一个装有 10 个黑球和 4 个白球的袋中，抽出 5 个球、其中 2 个是黑球、 3 个是白球的抽取方法共有 种.

（答案： 180）

知识点
等可能概型

2、有 5 只球，随机地放入 5 个盒子中，则每个盒子中恰好有 1 只球的概率为 ______.

（答案： $4!/5^4=24/625$ ）

知识点
等可能概型

3、由 50 人组成的人群中至少有两个人在同一天过生日的概率为 ________ .

（答案： 0.97 ）

知识点
等可能概型

4、设 P(A)=P(B)=1/2, P(AB)=1/3, 则 A 与 B 都不发生的概率为 ______

（答案： 1/3 ）

知识点
随机事件的概率

5、设 A、 B是两随机事件，且 P(A)=0．6，P(B)=0．7，$A\subset B$，则 P(A|B)= ________.

（答案： 6/7 ）

知识点
条件概率

6、若 P(A)=1/2,P(B)=1/3,P(B|A)=1/3, 则 P(A|B)= ________.

（答案： 1/2 ）

知识点
独立性

7、一项任务同时拍甲、乙二人分别单独去完成。甲能完成任务的概率为 0.9，乙能完成任务的概率为 0.8，则该项任务将被完成的概率为 ________.

（答案： 0.98 ）

知识点
独立性

8、同时掷 3 枚均匀的硬币，则至多有一枚硬币字面朝上的概率为 ________ .

（答案： 7/8）

知识点
伯努利概型

9、离散型随机变量 X 的分布律为 P{X=k}=k/ a, k=1, 2, 3，则常数 a 为 ________.

（答案： 6）

知识点
离散型随机变量的分布律

10、一电话总机每分钟收到呼唤的次数服从参数为 4 的泊松分布，则某一分钟呼唤次数大于 2 的概率是

__________ _.

（答案： $1-13e^{-4}$）

知识点
泊松分布

11、 设三次独立试验中， 事件 A 出现的概率相等， 若已知 A 至少出现一次的概率等于 19/27，则事件 A 在一次试验中出现的概率为 ______.

（答案： 1/3）

知识点
二项分布

12、设随机变量 X 的概率密度函数如下，则常数 a 为 ______________.

$$f(x)=\begin{cases} a\cos x & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

（答案： 1/2）

知识点
概率密度

13、设 X 在 $(0,a)$ 服从均匀分布，已知方程 $4x^2+4Xx+X+2=0$ 有实根的概率为 0.8，则 $a=$ _______________.

（答案： 10）

知识点
均匀分布

14、设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases} Ax & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$，则 A=_________.

（答案： 2）

知识点
连续型随机变量的分布

15、设随机变量 X 服从二项分布 B(5,p)、Y 服从二项分布 B(5,p)，且它们相互独立，则 Z=X+Y 服从二项分布 B(n,p)，其中 n=_______.

（答案： 10）

知识点
随机变量函数的分布

16、在句子“ the girl put on her little red hat ”中随机的取一单词，以 X 表示取到的单词所包含的字母个数，则 $E(X)=$ __________.

（答案： 27/8）

知识点
数学期望

17、设随机变量 X 的分布律为 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.5 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/12 & 1/4 \end{bmatrix}$，则 EX= ______.

（答案： 1／2）

知识点
数学期望

18、 设 $X\sim N(1,4)$， $Y\sim N(-1,9)$ ， 且 X 与 Y 相互独立，则 $D(-3X-4Y)=$ ______.

（答案： 180）

知识点
方差

19、设 $D(X)=1$， $D(Y)=2$，且 X 与 Y 相互独立，则 $D(X-2Y)=$ ________________.

（答案： 9）

知识点
方差的性质

20、设 $X\sim P(\lambda)$，若 $E[(X-1)(X-2)]=1$ ，则 $\lambda=$ ____.

（答案： 1）

知识点
数学期望

21、设随机变量 X 服从指数分布， X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，则 X 的方差 $DX=$ _______.

（答案： 100）

知识点
数学期望与方差

22、设 $E[X]=E[Y]=2,\mathrm{cov}(X,Y)=-1/6$，则 $E[XY]=$ ________________.

（答案： 23/6）

知识点
协方差与相关系数

23、设 $E(X)=0$， $D(X)=1$，则根据切比雪夫不等式 $P\{-2<X<2\}\geq$ _______.

（答案： 3/4）

知识点
切比雪夫不等式

24、设总体 $X\sim\chi^2(n)$， $X_1,X_2,\cdots X_{10}$ 是来自 X 的样本，则

$D(\overline{X})=$ __________ （其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ ）.

（答案： n/5 ）

知识点
χ^2 分布

25、已知 $X\sim t(n)$，则 $X^2\sim$ ____________.

（答案： $F(1,n)$ ）

知识点
F 分布

26、数理统计中的一类基本问题是依据样本所提供的信息，对总体分布的未知参数作出估计，称之

为 ______________，这是数理统计的基本问题之一。

（答案：参数估计）

知识点
参数估计

27、采用的估计方法不同，同一未知参数有不同的估计量，这就要求建立衡量一个估计量优劣的标准，一般来说，其评价标准有三种：______，______和相合性。

（答案：无偏性；有效性）

知识点
估计量的评选标准

28、设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，且 σ^2 已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的容量为 n 的样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是 $(\overline{X}-\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$，则 $\lambda=$ ______ .

（答案：$Z_{\frac{\alpha}{2}}$）

知识点
区间估计

29、设 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，若 σ^2 已知，要检验 $H_0:\mu=\mu_0$（μ_0 为已知常数），$H_0:\mu\neq\mu_0$，应用 ______检验法；检验的统计量是 ______；当 H_0 成立时，该统计量服从 ____________分布。

（答案：U；$U=\frac{\xi-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$；标准正态）

知识点
假设检验

30、设 E 总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1，X_2，，，X_n 为其样本，其中 σ^2 未知。则对假设检验问题 H_0: $\mu=\mu_0$，H_1: $\mu\neq\mu_0$ 在显著水平 α 下，应取拒绝域 _______。

（答案：$\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$）

知识点
假设检验

31、设总体 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，如果使用 χ^2 检验法，且在给定的显著性水平 α，其拒绝域为 $(\chi^2_{\alpha}(n-1),+\infty)$，则相应的假设检验 H_0：______；若拒绝域为 $(0,\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)]\cup[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty)$，则相应的假设检验 H_0：______。

（答案：$H_0:\sigma^2\leq\sigma_0^2$；$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$）

知识点
假设检验

（三）计算和证明题

1、有两台钻机钻孔，第一台钻孔数量是第二台的两倍，第一台钻孔不合格率为 0.05，第二台钻孔不合格率为 0.08，现发现一钻孔不合格，求是第一台钻孔的概率 .

（答案： 5/9 ）

从结果反推原因的问题 ,用贝叶斯公式：

令事件 A= 该孔是第一台钻机钻的； B= 该孔不合格

P(B)=(2/3)*(1/20)+(1/3)*0.08=1/30+2/75

P(AB)=(2/3)*(1/20)=1/30

P(A|B)=P(AB)/P(B)=(1/30)/(1/30+2/75)=5/9

知识点
贝叶斯公式

2、某种型号的电器的寿命 X （以小时记）具有以下的概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2} & x>1000\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

现有一大批此种器件，设各器件损坏与否相互独立，任取 5 只，问其中至少有 2 只寿命大于 2000 小时的概率是多少？

（答案： $\frac{13}{16}$ ）

先求出他的函数分布 F(x)=-1000*x^-1 P(X>2000)=1-(F(2000)-F(1000))=1-(-1/2-(-1))=1/2

然后记取出器件寿命大于 2000 小时的个数为 y 用二项分布求出 P(y=1),P(y=0) 的概率再 1-P(y=1)-P(y=0) 就可以算出 P(y>=2) 的概率了

最后结果是 P=0.90625 $=\frac{13}{16}$

知识点
二项分布

3、根据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为 120 小时的指数分布，现随机地取 100 个，设他们的寿命是相互独立的，求这 100 个元件的寿命的总和大于 12960 个小时的概率 .

标准正态分布数值表：

x	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
Φ x)	0.7580	0.7734	0.7881	0.8023	0.8159	0.8289

（答案： 0.2119 ）

单个元件均值 E（X）=120 ，概率密度 f(x)=1/120e^(-x/120)

方差 D（X）=120*120=14400

100 个元件寿命 S=X1+X2+...+X120

E（S）=120*100=12000

D（S）=14400*100=1440000

所以【（ S-12000 ） /1200 】服从标准正太分布 ………… 中心极限定理。

P（S>12960 ）=P【（ S-12000 ） /1200> （12960-12000 ） /1200) 】=P【（ S-12000 ） /1200>0.8 】=1-0.8 的正太分布 =1-0.7881=0.2119

知识点
正态分布

4、 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8} & 0<x<4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$，求随机变量 $Y=2X+8$ 的概率密度。

知识点
随机变量函数的分布

$F(y)=P(Y\le y)=P(2X+8\le y)$

$=P(X\le \frac{1}{2}y-4)$

当 $\frac{1}{2}y-4\le 0$ 即 $y\le 8$ 时，

$F(y)=0.$

当 $0<\frac{1}{2}y-4<4$，即 $8<y<16$ 时.

$F(y)=P(X\le \frac{1}{2}y-4)$

$=\int_0^{\frac{1}{2}y-4}\frac{x}{8}dx=\frac{1}{16}x^2\Big|_0^{(\frac{1}{2}y-4)}$

$=\frac{1}{16}(\frac{1}{2}y-4)^2.$

当 $\frac{1}{2}y-4\ge 4$ 即 $y\ge 16$ 时，

$F(y)=P(X\le \frac{1}{2}y-4)=1$

$\therefore f(y)=F'(y)=\begin{cases}\frac{1}{16}(\frac{1}{2}y-4), & 8<y<16\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

答案： $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{32}y-\dfrac{1}{4} & 8<y<16\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

5、一枚均匀的硬币抛掷 3 次，设 X 为 3 次抛掷中正面出现的次数， Y 为反面出现的次数，求并列出 (X,Y) 的联合分布律。

（答案：

(X,Y)=(0,3) 表示三次抛硬币三次全部是反面　　P(X=0,Y=3)=(1/2)^3=1/8

(X,Y)=(1,1) 表示三次抛硬币一次正两次反面　　P(X=1,Y=1)=C(1,3)(1/2)^3=3/8

(X,Y)=(2,1) 表示三次抛硬币两次正一次反面　　P(X=2,Y=1)=C(2,3)(1/2)^3=3/8

(X,Y)=(3,3) 表示三次抛硬币三次全部是正面　　P(X=3,Y=3)=(1/2)^3=1/8

X\Y	0	1	2	3
0	0	0	0	1/8
1	0	0	3/8	0
2	0	3/8	0	0
3	1/8	0	0	0

)

知识点
联合分布

6、有两个相互独立工作的电子装置，它们的寿命 X_k (k=1,2)（小时）服从同一指数分布 e(250)，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{250}e^{-\frac{x}{250}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

，若将这两个电子装置串联组成整机，求整机寿命 Y 的均值。

因两个电子装置为串联，

因而N的概率密度为

$$f_{\min}(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta}e^{-2x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

于是N的数学期望为

$$E(N)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{\min}(x)\,dx=\int_{0}^{\infty}\frac{2x}{\theta}e^{-2x/\theta}\,dx=\frac{\theta}{2}.$$

（答案： 125）

知识点
多维随机变量

7、设随机变量 (X ,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}c, & |y|<x, 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，其中 c 为常数.

（1）求常数 c；

（2）求边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，并说明 X 和 Y 是否相互独立.

（答案：（1） $c=1$；（2） $f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$； $f_Y(y)=\begin{cases}1+y & -1<y<0\\ 1-y & 0\le y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$； X 和 Y 不相互独立）

知识点
多维随机变量

8、设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\\ 0, & 其它\end{cases}$$ ，求边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

知识点
多维随机变量

9、设 (X， Y)的联合分布律为

Y\X	1	0	3
-1	0. 2	0. 1	0
1	0. 1	0	0. 3
2	0. 1	0. 1	0. 1

求：（1） E[X] ；（2） E[Y] ；（3） E[XY]

知识点
多维随机变量

解：P{X=1}=0.4 ， P{X=0}=0.2 ， P{X=3}=0.4 ， E[X] =1*0.4+0*0.2+3*0.4=1.6

P{Y=1}=0.4 ， P{Y=-1}=0.3 ， P{Y=2}=0.3 ， E[Y] =1*0.4+-1*0.3+2*0.3=0.7

E[XY]= 1.6

10、甲、乙两船均为 7 点到 8 点到达某码头，且两船到达时间是随机的，每只船卸货需要 20 分钟，码头同一时间只能允许一只船卸货，求两只船使用码头发生冲突的概率。

解：X、Y 均服从（ 0, 60）上的均匀分布， P｛｜ X－Y ｜≤ 20｝ ＝1-40×40/60/60=5/9

知识点
独立的随机变量

11、设 X,Y 相互独立，它们分布律分别为

X	1	3
p	3 0.3	0.7

Y	2	4

p 6	0.6	0.4	

试求随机变量 Z=X+Y的分布律。

答案：

Z	3	5	7
p 3	0.18	0.54	0.28

知识点
多维随机变量函数的分布

12、设连续型随机变量 $\xi \sim f(x)=\begin{cases} x & 0<x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，求 $E\xi$。

知识点
数学期望

答案： 1

13、 随机变量 X 的分布律如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

求 $E(X),\ E(\frac{1}{1+X}),\ E(X^2)$.

知识点
数学期望

答案： 15/8

14、假定每个人生日在各个月份的概率相同，求三个人中生日在第一季度的人数的期望。

（答案： $\frac{3}{4}$）

设三个随机变量 ξ i,(i=1,2,3)， 如果 3 个人中的第 i 个人在第一季度出生 , 则 ξ i=1，否则 ξ i=0，则 ξ i 服从 0-1 分布 , 且有

P(ξ i=1)=1/4， 因此 Eξ i=1/4,(i=1,2,3)

设 ξ 为 3 个人在第一季度出生的人数 , 则 ξ =ξ 1+ ξ 2+ ξ 3,

因此 E ξ =E(ξ 1+ ξ 2+ ξ 3)=3E ξ i=3/4=0.75

知识点
数学期望

15、 掷 20 个骰子，求这 20 个骰子出现的点数之和的数学期望 .

知识点
数学期望

答案： 70=((1+2+3+4+5+6)*1/6)*20=(21*1/6)*20=70

16、设发行体育彩票 1000 万张，其中一等奖 1 张，奖金 500 万元，二等奖 9 张，奖金 1 万元，三等奖 90 张，奖金 100 元，四等奖 900 张，奖金 10 元，问一张奖券获得奖金的期望值为多少？

（答案： 0.5108 ）

（1*500+9*1+90*0.01+900*0.001 ）/1000=0.5108

知识点
数学期望

17、设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} kx^{a} & 0<x<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$，k,a>0, 且已知 EX= 3/4，求 k,a 的值 .

（答案： a=2,k=3 ）

知识点
数学期望

18、随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{x}{4} & -2\le x<0 \\ \frac{1}{2}-\frac{x}{4} & 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，求 D(X)。

（答案： 2/3 ）

知识点
方差

19、 设连续型随机变量 （X, Y）的概率密度为

$f(x, y)=\begin{cases} 12y^{2} & 0\le y\le x\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，求 ρ_{XY}。

知识点
相关系数

解 $f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy=\begin{cases} \int_0^x 12y^2dy=4x^3 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$E(x)=\int_0^1 x\cdot 4x^3dx=\frac{4}{5}$

$f_y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx=\begin{cases} \int_y^1 12y^2dx=12y^2(1-y) & 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$E(y)=\int_0^1 12y^2(1-y)ydy=\frac{3}{5}$

$$E(xy)=\int_0^1 dx\int_0^x xy\cdot 12y^2dy=\int_0^1 3x^5dx=\frac{1}{2}$$

$$Cov(XY)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{50}$$

又 $E(x^2)=\int_0^1 x^2\cdot 4x^3dx=\frac{2}{3}$

所以 $D(x)=E(x^2)-E^2(x)=\frac{2}{3}-(\frac{4}{5})^2=\frac{2}{75}$

$$E(y^2)=\int_0^1 12y^2(1-y)y^2dy=12\int_0^1(y^4-y^5)dy=\frac{2}{5}$$

$$D(y)=E(y^2)-E^2(y)=\frac{2}{5}-(\frac{3}{5})^2=\frac{1}{25}$$

20、设对目标独立发射 400 发炮弹，单发命中率等于 0.1，试用中心极限定理近似计算命中数超过 50 发的概率。

标准正态分布数值表：

x	1.65	1.67	1.70
$\Phi(x)$	0.9505	0.9525	0.9554

（答案： 0.0475 ）

单发 $EX_i=0.1$. 方差 $D(X_i)=0.1\times0.9=0.09$

400发 $S=\sum_{i=1}^{400}X_i$

$ES=40$ $D(S)=400\times0.09=36$

所以 $\left(\frac{S-40}{6}\right)\sim N(0,1)$

$P(S>50)=1-P(S\le50)=1-\Phi\left(\frac{50-40}{6}\right)$

$=1-\Phi(1.67)=0.0475$

知识点
中心极限定理

21、一食品店出售价格分别为 1 元、1.5 元、2 元的 3 种蛋糕，顾客购买哪一种蛋糕是随机的，购买 3 种蛋糕的概率分别为 0.3、0.5、0.2，某天共售出 200 块蛋糕，求这天的收入不低于 300 元的概率。

标准正态分布数值表：

x	2．00	2．01	2．02	2．03	2．04	2．05

Φ(x)	0. 9772	0. 9778	0. 9783	0. 9788	0. 9793	0. 9798

（答案： 0.0217 ）

设售出的第 i 只蛋糕的价格为 X(i), 则 E(x(i))=0.3+0.75+0.4=1.45, E(x(i)^2)=1*1*0.3+1.5*1.5*0.5+2*2*0.2=2.225,

D(X(i))= E(x(i)^2)- (E(x(i)))^2=2.225-1.45^2= 0.1225

根据独立同分布的中心极限定理 ,Y=X(1)+...+X(300) 近似服从正态分布 N(387,14.67), 所以收入至少 400 元的概率为 P(Y>=400) = 1-F((400-387)/3.83)=1-F(3.394)=1

知识点
中心极限定理

22、设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，其中未知参数 $\theta>0$. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的样本.

（1） 求 θ 的最大似然估计量；

(2) 说明该估计量是否为无偏估计量 .

（答案：（1） $\hat{\theta}=\overline{X}$ ；(2) 是无偏估计量）

知识点
点估计

23、设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$， $(\theta>-1)$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本, 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量 .

（答案：矩估计量 $\hat{\theta}=\frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$ ；最大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{n}{-\ln X_1-\ln X_2-\cdots-\ln X_n}-1$）

知识点
点估计

24、一公交车起点站候车人数服从泊松分布 P(λ,) 观察 40 趟车的候车人数如下：

车的趟数	1	3	5	5	6	7	3	3	4	3
候车人数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

求 λ的矩估计值.

答案： λ的矩估计值 5.625

知识点
矩估计

25、设总体 X 的均值和方差分别为 $E(X)=\mu$ 和 $D(X)=\sigma^2$， $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的容量为 n 的样本,

试证明 $\hat{\mu}_1=\overline{X}$ 和 $\hat{\mu}_2=X_1$ 都是 μ 的无偏估计量，且 $\hat{\mu}_1$ 较 $\hat{\mu}_2$ 有效。

知识点
估计量的评选标准