试 卷 （四）

一、选择题（每题 2 分，共 10 分）

1. 设 A, B, C 为随机事件，若 $P(C)>0$，且

$$P(A\cup B\mid C)=P(A\mid C)+P(B\mid C),$$

则下列结论正确的是 （ ）

(A) $P(A\cup B\mid \overline{C})=P(A\mid \overline{C})+P(B\mid \overline{C})$；

(B) $P(A\cup B)=P(A\mid C)+P(B\mid C)$；

(C) $P(C)=P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)$；

(D) $P(C(A\cup B))=P(AC)+P(BC)$.

2. 若函数 $f(x)$ 是某个随机变量的概率密度，则一定成立的是 （ ）

(A) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$；

(B) $f(x)$ 的值域为 $(0,1)$；

(C) $f(x)$ 为非负函数；

(D) $f(x)$ 为连续函数.

3. 设某连续型随机变量的密度函数 $f(x)$ 为偶函数，$F(x)$ 为其分布函数，则对任意实数 a，有 （ ）

(A) $F(-a)=1-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$； (B) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$；

(C) $F(-a)=F(a)$； (D) $F(-a)=2F(a)-1$.

4. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的简单随机样本，$E(X)=\mu$，μ 未知，$D(X)=\sigma^2$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 σ^2 的无偏估计量是 （ ）

(A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$； (B) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$；

(C) $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$;　　　(D) $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

5. 设总体 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 及 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是从总体 X 中抽取的简单随机样本;$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$是从总体 Y 中抽取的简单随机样本,其中 μ_1, σ_1^2; μ_2, σ_2^2均未知, S_1^2, S_2^2 分别是两个样本的方差,则$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的 $1-\alpha$ 置信区间为　　(　　)

(A) $\left(\dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_\alpha(n, m)}, \dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha}(n, m)}\right)$;

(B) $\left(\dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_\alpha(n-1, m-1)}, \dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha}(n-1, m-1)}\right)$;

(C) $\left(\dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n, m)}, \dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n, m)}\right)$;

(D) $\left(\dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)}, \dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)}\right)$.

二、填空题(每题 2 分,共 10 分)

1. 设 A, B 为随机事件,已知 $P(A)=0.7$, $P(B)=0.5$, $P(A-B)=0.3$,则 $P(AB)=$ ________, $P(B-A)=$ ________.

2. 每天某种商品的销售量(件)服从参数为 λ 的泊松分布,随机选取 4 天,其中恰有一天的销售量为 5 件的概率是________.

3. 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有相同的分布,且 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0.2 & 0.2 & 0.6\end{pmatrix}$,则 $Z=\max(X^2, Y^2)\sim($________$)$.

4. 设二维随机变量$(X, Y)\sim N\left(1, 4; 1, 4; \dfrac{1}{2}\right)$, $Z=X-Y$,则 $\operatorname{cov}(X, Z)=$________.

5. 设(X_1, X_2, X_3, X_4)是来自正态总体 $N(0, 2^2)$的简单随机样本,$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$,则当 $a=$________, $b=$________时,统计量 X 服从 χ^2 分布.

三、计算题（前 8 题每题 9 分，第 9 题 8 分，共 80 分）

1. 在某通信渠道中，传送的字符为 AAAA，BBBB，CCCC 三者之一. 假定传送这三组字符的概率分别为 0.3，0.4，0.3. 由于通道噪声的干扰，每个字母被正确接收的概率为 0.8，而错被接收为其他两个字母的概率均为 0.1. 假定前后字母是否被歪曲互不影响. 若接收到的字母为 ABBC，求被传送的字符为 BBBB 的概率.

2. 设随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.125	0.25	0
2	0.125	0.25	0.25

求：(1) $Z = XY$ 的分布律；

(2) 条件分布律 $P(X = i \mid Y = 2)$ $(i = 0, 1, 2)$.

3. 设随机变量 (X, Y) 的联合密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (x + y > 2, x \leqslant 2, y \leqslant 2), \\ 0 & (\text{其他}). \end{cases}$$

求：$Z = X + Y$ 的分布密度函数.

4. 设随机变量 (X, Y) 的联合密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy^2 & (y^2 < x < 1), \\ 0 & (\text{其他}). \end{cases}$$

求：

(1) 常数 c；

(2) 问 X 和 Y 是否相互独立？说明理由.

5. 设随机变量 X 的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0).\end{cases}$$

独立重复作 n 次试验，随机变量 Y 表示 n 次试验中事件 $\left(X>\frac{1}{2}\right)$ 出现的次数. 求 $E(Y)$, $D(Y)$.

6. 独立地多次测量一个物理量，每次测量产生的随机误差都服从 $(-1, 1)$ 内的均匀分布. 若把 n 次测量的算术平均 $\overline{X}$ 作为测量结果，分别用切比雪夫不等式和中心极限定理估计 $\overline{X}$ 与真值的差小于 ϵ 的概率 (用 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 表示).

7. 设 X 服从 $(0, \theta)$ 上的均匀分布，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是从总体 X 中抽取的简单随机样本. 求：θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$.

8. 机器自动包装某食品，设每袋食品的净重量服从正态分布，规定每袋食品的标准重量为 500 g. 某天开工后，为了检查机器是否正常工作，从包装好的食品中随机抽查 9 袋，测得净重为

$$497, 507, 510, 475, 488, 524, 491, 515, 512$$

问：在下面两种情形下能否认为每袋重量符合标准($\alpha=0.05$)?

(1) 已知 $\sigma^2=16$;

(2) σ^2 未知.

附：分布数值

$\Phi(1.28)=0.9$ $\Phi(1.64)=0.95$ $\Phi(1.96)=0.975$

$\Phi(2.33)=0.99$

$t_{0.05}(8)=1.8331$ $t_{0.05}(9)=1.8125$

$t_{0.025}(8)=2.2622$ $t_{0.025}(9)=2.2281$

9. 设随机变量 (X, Y) 在区域 $\{(x, y)\mid 0<x<2, 0<y<1\}$ 服从均匀分布. 令

$$U=\begin{cases}0 & (X<Y),\\ 1 & (X\geqslant Y),\end{cases}\quad V=\begin{cases}0 & (X<2Y),\\ 1 & (X\geqslant 2Y).\end{cases}$$

求：

(1) (U, V)的联合分布律：

(2) U, V 的相关系数 ρ_{UV}.

试卷(四)考核内容分值表

概率论 76					数理统计 24		
随机事件	一维变量	二维变量	数字特征	极限定理	抽样分布	参数估计	假设检验
13	6	33	15	9	2	13	9