

第3章 多维随机变量及其分布

Chpt. 3 Multi-Dimensional Random Variables and Their Distributions



3.1 多维随机变量

3.1.1 多维随机变量的定义

(1)很多随机现象中涉及多个变量，试验结果要用多个随机变量来表示。

- 发射一枚炮弹，需要同时研究弹着点的几个坐标
- 考察一个人的健康时，需要检测身高、体重、血压、血糖等多种因素，且这些因素本身还存在着关联

(2)另外，当我们研究统计问题时也涉及到多个变量，比如，类似均值 $\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ ，均方 $\frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)$



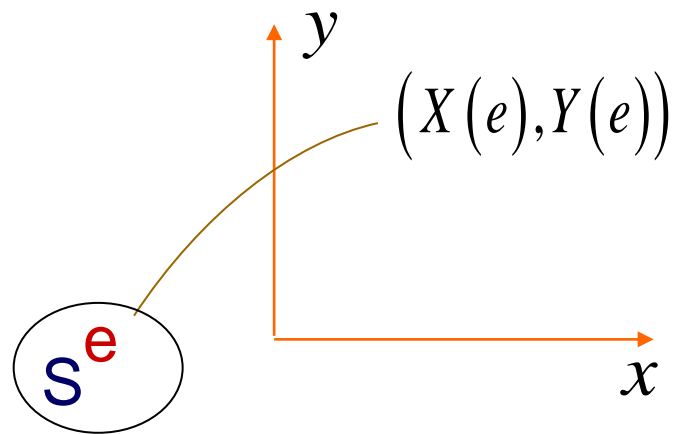
3.1 多维随机变量

[定义] 若随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 定义在**同一样本空间 S 上**，就称这 n 个随机变量的整体 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 **n 维随机向量**或 **n 维随机变量**(n -dimensional random variable).

对 n 维随机向量的研究从两个方面着手：

- 研究整体特性；（联合分布）
- 研究个体之间、个体与整体之间的关联与相互关系。
（边缘分布与条件分布）

着重研究二维情形



3.1 多维随机变量

3.1.2 多维随机变量的联合分布

多维随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n ，对于任意 n 个实数 x_1, x_2, \dots, x_n 或实向量 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ，称 n 元函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$$

为随机向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的(联合)分布函数.

注意：记

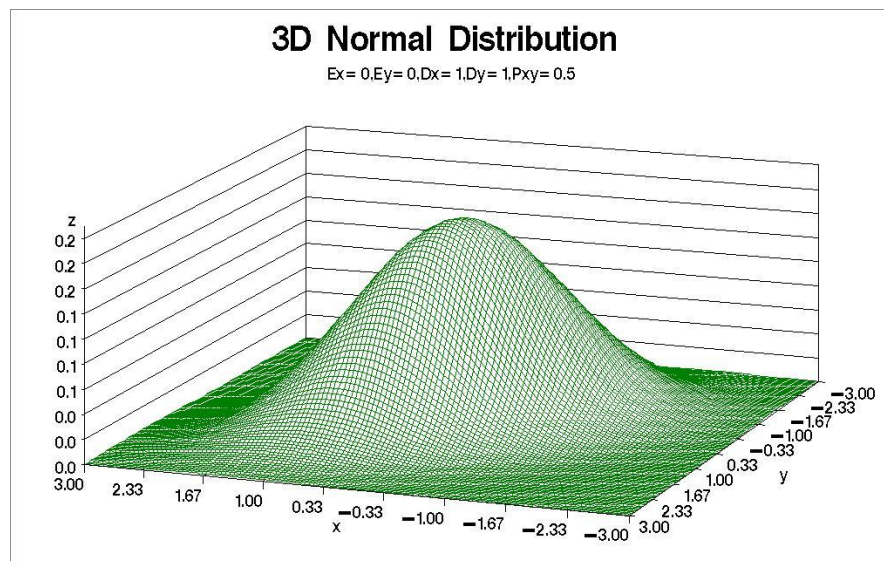
$$\begin{aligned} P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\} \\ \triangleq \\ = P\{(X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap \dots \cap (X_n \leq x_n)\} \end{aligned}$$

Remark: 注意到多维随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 是针对同一试验而言的，是在同一个样本空间 S 上定义的随机变量。

3.1.2 多维随机变量的联合分布

联合分布的性质

- $0 \leq F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1$
- $F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, -\infty, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$
- $F(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1$
- $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 x_1, x_2, \dots, x_n 的不减函数, 即对任意的两个向量 (x_1, x_2, \dots, x_n) 和 $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, 只要 $x'_i \geq x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$, 总有
$$F(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \geq F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$



3.1.2 多维随机变量的联合分布

注意到联合分布的定义, 以及

$$\begin{aligned} & \left\{ (X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap \cdots \cap (X_n \leq x_n) \right\} \\ & \subseteq \left\{ (X_1 \leq x'_1) \cap (X_2 \leq x'_2) \cap \cdots \cap (X_n \leq x'_n) \right\} \\ & P\{(X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap \cdots \cap (X_n \leq x_n)\} \\ & \leq P\{(X_1 \leq x'_1) \cap (X_2 \leq x'_2) \cap \cdots \cap (X_n \leq x'_n)\} \end{aligned}$$

即

$$F(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \geq F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

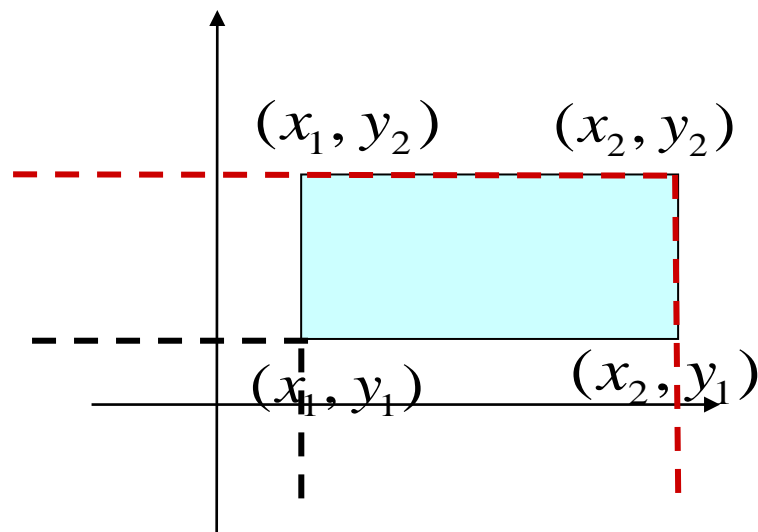


3.1.2 多维随机变量的联合分布

对二维随机向量 (X, Y) ，分布函数 $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$ ，其中 $(x, y) \in \mathbf{R}$ 表示随机向量 (X, Y) 落在 (x, y) 为顶点的位于该点左下方的无穷矩形内的概率。

依照上述解释， (X, Y) 落在 $[x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2]$ 的概率为

$$\begin{aligned} & P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) \\ & \quad + F(x_1, y_1) \end{aligned}$$



3.1.3 离散多维随机变量的联合分布

随机向量只取有限组或可列组值，就称为离散型随机向量.
列出所有各组可能值及取这些值的概率，就可得其概率分布.

Example 3.1 口袋中有2白球3黑球, 连取两次, 每次任取一球. 设 X 为第一次取白球的个数, Y 为第二次取白球的个数. 对

(1) 有放回

(2) 无放回

求：两种情况 (X, Y) 的联合分布.

解 (1) X 与 Y 可能取的值都是0 (黑球) 与1 (白球), 各种情况搭配及相应概率如下 (注意直观看待独立与否) :

$\{X=0, Y=0\}$ 表示第一次取黑球且第二次也取黑球，因为有放回，两次取球相互独立的，其概率都是 $3/5$ ，故

$$P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 0\}P\{Y = 0\} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$$

同理 $P(X = 0, Y = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$

$$P(X = 1, Y = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \quad P(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$$

表1：有放回时的(X,Y)联合分布

X \ Y	Y	
	0	1
0	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$
1	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}$	$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$



(2) X与Y可能取的值与(1)相同, 但因为无放回, 两次结果是不独立的, 利用第一章乘积事件概率公式, 得

$$P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 0\}P\{Y = 0 | X = 0\} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$$

同理 $P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$

$$P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$$

表2: 无放回时的(X,Y)联合分布

X \ Y	Y	
	0	1
0	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$
1	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$



3.1.3 离散多维随机变量的联合分布

一般，离散型的二维联合分布列为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad (i, j=1, 2, \dots)$$

或写成表格的形式如下表

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\dots	y_j	\dots
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1j}	\dots
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2j}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_i	p_{i1}	p_{i2}	\dots	p_{ij}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots



3.1.3 离散多维随机变量的联合分布

他们必须满足

$$p_{ij} \geq 0$$

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \quad (i, j=1, 2, \dots)$$

n维离散型随机向量的联合分布是

$$P\{X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \dots, X_n = x_{i_n}\} = p_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

$$i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, \dots$$



Example 3.2 从数1, 2, 3, 4中任取一个数, 记为X, 再从1, ..., X中任取一个数, 记为Y, 计算 $P(Y=2)$ 。

$$P(Y=2)$$

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

(X,Y) 所在的样本空间是什么?



Example 3.3 一批产品共有100件，其中一等品60件、二等品30件，三等品10件。从这批产品中有放回地任取3件，以X和Y分别表示取出的3件产品中一等品和二等品的件数，求二维分布 (X, Y) 的联合概率分布列。

解： X和Y可能的取值都是0,1,2,3

记 p_{ij} 表示一等品为 i 件，二等品为 j 件

1) 当 $i + j > 3$ 时， $p_{ij} = 0$

2) 当 $i + j \leq 3$ 时， $\{X=i, Y=j\}$ 表示取出的3件产品中，一等品有 i 件，二等品有 j 件，三等品有 $3-i-j$ 件，所以有放回抽取时，

$$p_{ij} = C_3^i C_{3-i}^j C_{3-i-j}^{3-i-j} (0.6)^i (0.3)^j (0.1)^{3-i-j}$$

$$p_{ij} = \frac{3!}{i! j! k!} (0.6)^i (0.3)^j (0.1)^k, i + j + k = 3$$



多项分布 (Multinomial Distribution)

进行 n 次独立重复试验，如果

- 1) 每次试验有 r 个互不相容的结果 (A_1, A_2, \dots, A_r) 之一发生
- 2) 每次试验中 A_i 发生的概率为 $p_i = P(A_i), i = 1, 2, \dots, r$, 且 $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ 。

记 X_i 为 n 次独立重复试验中 A_i 出现的次数, $i = 1, 2, \dots, r$ 。则 (X_1, X_2, \dots, X_r) 取值为 (n_1, n_2, \dots, n_r) 的概率为:

$$P(X_1 = n_1, \dots, X_r = n_r) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$$

其中 $\sum_{i=1}^r n_i = n$ 。

这个联合分布称为**多项分布** (r 项分布), 记为 $M(n; p_1, \dots, p_r)$

这个概率是多项式 $(p_1 + \dots + p_r)^n$ 展开式中的一项, 故其和为1。

当 $r=2$ 时, 即为二项分布。



3.1.4 N维连续型随机变量的分布函数

[定义] 对n维随机变量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 若存在n元可积的**非负**函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 对于任意的 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \cdots dy_n$$

则 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是n维的连续随机变量, F 称为它的连续型分布, 称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 **(联合)密度函数**.



3.1.4 N维连续型随机变量的分布函数

[1] 显然，密度函数满足如下条件：

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \cdots dy_n = 1$$

[2] 对连续型随机向量，分布函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 对每一变量都是连续的，且在密度函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的连续点，有偏导数

$$\frac{\partial^n F}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

[3] G 是 R^n 中的任意一个区域， (X_1, X_2, \dots, X_n) 落入区域 G 内的概率为

$$P\{X \in G\} = \int \cdots \int_G f(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \cdots dy_n$$

Example 3.4 设二维随机向量(X,Y)的密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} Ae^{-2(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & elsewhere \end{cases}$$

- 1) 确定常数A;
- 2) 求分布函数;
- 3) 计算 $P\{X < 1, Y < 2\}$;
- 4) 计算概率 $P\{X + Y < 1\}$ 。

解 1) 由联合密度的性质, 应有

$$1 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} Ae^{-2(x+y)} dx dy = A/4 \quad \Rightarrow \quad A=4$$



2) 分布函数 $F(x, y) = \int_0^x \int_0^y A e^{-2(u+v)} du dv$, 我们来分块计算它.

当 $x \leq 0$ 或 $y \leq 0$ 时, $f(x, y) = 0$, 故 $F(x, y) = 0$

当 $x > 0$ 且 $y > 0$ 时

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y 4e^{-2(u+v)} du dv + \iint_{\text{elsewhere}} 0 du dv$$

$$= (1 - e^{-2x})(1 - e^{-2y})$$

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-2y}) & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$



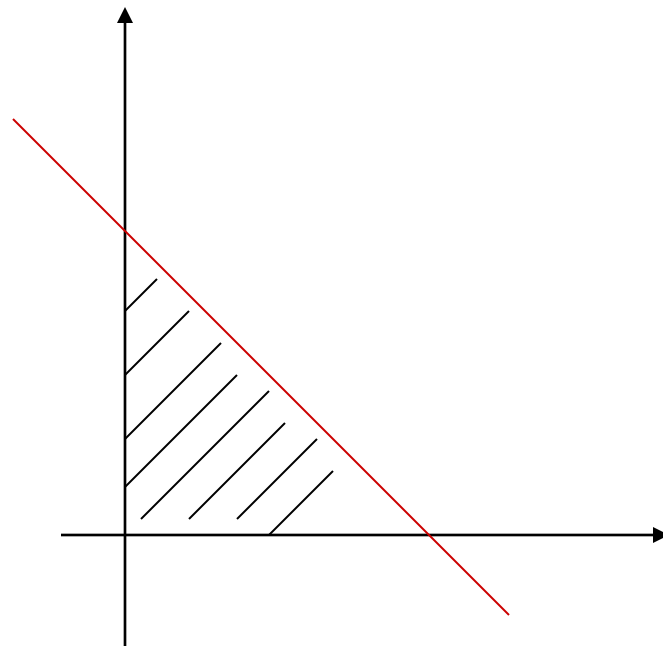
$$3) P\{X < 1, Y < 2\} = F(1, 2) = (1 - e^{-2})(1 - e^{-4})$$

$$4) P\{X + Y < 1\} = \iint_{x+y < 1} A e^{-2(x+y)} dx dy$$

$$= \iint_{\substack{x+y < 1 \\ x > 0, y > 0}} 4e^{-2(x+y)} dx dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} 4e^{-2(x+y)} dy \right] dx$$

$$= 1 - 3e^{-2}$$



3.2 边缘（边缘）分布

3.2.1 边缘分布的定义

n 维随机变量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，具有联合分布 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，每一个随机变量 X_i 又有其自身的分布函数 $F_{X_i}(x_i)$ ，称之为边缘分布函数。

边缘分布与联合分布的关系

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x_i) &= P\{X_i \leq x_i\} \\ &= P\{\{X_1 \leq \infty\} \cap \{X_2 \leq \infty\} \cap \dots \cap \{X_{i-1} \leq \infty\} \cap \{X_i \leq x_i\} \cap \{X_{i+1} \leq \infty\} \dots \{X_n \leq \infty\}\} \\ &= P\{X_1 \leq \infty, X_2 \leq \infty, \dots, X_{i-1} \leq \infty, X_i \leq x_i, X_{i+1} \leq \infty, \dots, X_n \leq \infty\} \\ &= F(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty) \end{aligned}$$

因此， $F_{X_i}(x_i)$ 的求取方法按随机变量类型分为两种。

3.2.2 离散随机变量的边缘分布

以二维随机变量 (X,Y) 为例

$$F_x(x) = F(x, \infty) = \sum_{\substack{x_i \leq x \\ y_j < \infty}} p_{ij} = \sum_{x_i \leq x} \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \right)$$

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \stackrel{\Delta}{=} p_{i\bullet} \quad \text{--称为}(X,Y)\text{关于}X\text{的边缘分布}$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \stackrel{\Delta}{=} p_{\bullet j} \quad \text{--称为}(X,Y)\text{关于}Y\text{的边缘分布}$$

Remark 1: 这里 $p_{i\bullet}$ 表示对第二个下标 j 求和, $p_{\bullet j}$ 表示对第一个下标 i 求和.

Remark 2: 上两式分别表示 X 与 Y 的分布列, 它们恰好为二维随机变量分布表按行相加与按列相加的结果, 把它们分别写在表1中两表的右边和下边, 称为边缘分布(marginal distribution).

3.2.2 离散随机变量的边缘分布

Example 3.5 求**Example 3.1**的边缘分布.

$P\{X = 0\} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$ 类似得其它各概率, 如下面两表.

(1)

Y \ X	0	1	$P_{.j}$
0	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$P_{i.}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

(2)

Y \ X	0	1	$P_{.j}$
0	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
$P_{i.}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

Remark (1)与(2)的联合分布不同, 但边缘分布相同, 这说明如果边缘分布给定, 联合分布却不能惟一确定, 还要考虑随机变量间的相互关系.

3.2.2 离散随机变量的边缘分布

Example 3.6 求三项分布的边缘分布.

解： 设二维随机变量 $(X, Y) \sim M(n, p_1, p_2, p_3)$ ，其联合分布为

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_1^i p_2^j (1-p_1-p_2)^{n-i-j} \\ p_{i\cdot} &= \sum_{j=0}^{n-i} p_{ij} \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!} p_1^i (1-p_1)^{n-i} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^j \left(1 - \frac{p_2}{1-p_1}\right)^{n-i-j} \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!} p_1^i (1-p_1)^{n-i} \end{aligned}$$

故 $X \sim B(n, p_1)$ ，同理可证 $Y \sim B(n, p_2)$

用类似的方法可以证明，**多项分布的边缘分布为二项分布**

3.2.3 连续型随机变量的边缘分布

以二维连续型随机变量 (X, Y) 为例, 设其密度函数为 $f(x, y)$, 分布函数为 $F(x, y)$, 则 X 的边缘分布函数

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] dx \end{aligned}$$

$$F_X(x) = F(x, +\infty)$$

同理, Y 的边缘分布函数为

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right] dy = F(+\infty, y)$$

$$\text{记 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

根据连续型随机变量的定义，由式可见， X 是连续型随机变量，它的密度函数就是 $f_X(x)$ 。同理 Y 是连续型随机变量，其密度函数为 $f_Y(y)$ 。 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 称为 (X, Y) (或 $f(x, y)$)的**边缘密度**。由此，也可以看出边缘密度的两种求法：

[1] 由联合分布函数 $F(x, y)$

计算 $F(x, +\infty)$ 得 $F_X(x)$ ， 计算 $F(+\infty, y)$ 得 $F_Y(y)$ ，而后微分得到

$$f_X(x) = F'_X(x), \quad f_Y(y) = F'_Y(y)$$

[2] 由联合分布密度 $f(x, y)$

对 y 积分得到 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$

对 x 积分得到

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

3.2.3 连续型随机变量的边缘分布

Example 3.7 设二维随机向量 (X, Y) 的密度函数如下, 求边缘密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 4e^{-2(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

[解] 由前知道

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-2y}) & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

可先求得边缘分布函数, 再计算边缘密度。 X 的边缘分布和密度函数为

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

同理 Y 的边缘分布函数和边缘密度函数分别为

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \begin{cases} 1 - e^{-2y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \quad f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

3.2.3 连续型随机变量的边缘分布

练习：已知如下2个概率密度函数，求边缘概率密度函数

a. $f_1(x, y) = x + y, 0 < x, y < 1$

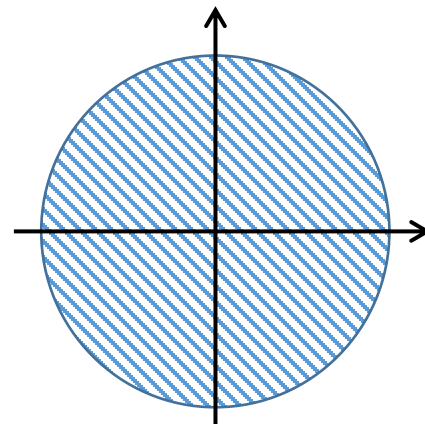
b. $f_2(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right), 0 < x, y < 1$



3.2.3 连续型随机变量的边缘分布

Example 3.8 (二维均匀分布) (X,Y) 在圆形区域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上服从均匀分布, 求边缘密度。

解 联合密度为
$$f(x, y) = \begin{cases} 1/\pi & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$



因为 $|x| > 1$ 时, $f(x, y) = 0$, 此时 $f_x(x) = 0$;

$|x| \leq 1$ 时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{1}{\pi} dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2} & |y| \leq 1 \\ 0 & |y| > 1 \end{cases}$$

注意, 这里虽然 (X,Y) 的联合分布是均匀分布, 但边缘分布却不是均匀分布.

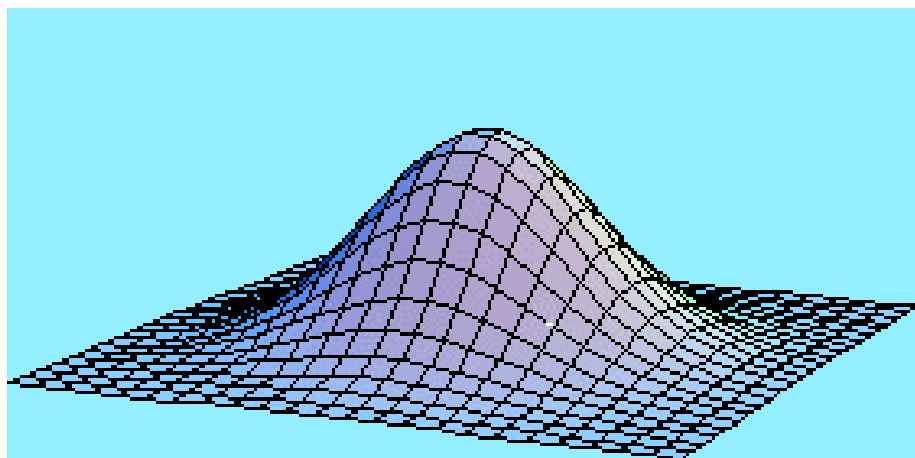


Example 3.9 (二维正态分布) 二维随机变量 (X, Y) 的分布概率密度是

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

称 (X, Y) 为服从参数 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二元正态分布，记作 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 。

求其边缘概率密度。



解：在上式的指数上对y配方，

$$\begin{aligned}& \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \\&= \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \rho^2 \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \rho^2 \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \\&= \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \left(\frac{y - \mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - \rho^2 \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \\&= (1 - \rho^2) \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \left(\frac{y - \mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\} \\
&= \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
f_x(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] dy
\end{aligned}$$



$$\Downarrow \quad t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right), \text{ 则 } dy = \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1} \exp \left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right]$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\}$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(y - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

上述结论是说，二元正态分布的边缘分布仍是正态分布，并且与 ρ 无关.

但反过来不正确，即若 (X, Y) 的边缘分布都是正态分布，其联合分布却未必是二元正态分布.



Example 3.10 (X,Y)的联合密度为 $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1 + \sin x \sin y)$
 $-\infty < x, y < +\infty$ 求边缘分布.

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin y e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

因此X,Y都服从标准正态分布
 $N(0,1)$, 但联合分布不是正态的.



3.3 相互独立的随机变量

边缘分布不能反映联合分布，也就是说边缘分布少了点什么。那么，什么时候边缘分布足以描述联合分布呢？

(以下可以仅仅从事件的角度而非随机变量的角度看)

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= P\{\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq x_2\}\} \\ &= P\{X_2 \leq x_2 \mid X_1 \leq x_1\} P\{X_1 \leq x_1\} \\ &= P\{X_2 \leq x_2 \mid X_1 \leq x_1\} F_{x_1}(x_1) \end{aligned}$$

当 $\{X_1 \leq x_1\}$ 独立于 $\{X_2 \leq x_2\}$

$$F(x_1, x_1) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$$

此时，边缘分布函数完全界定了联合分布函数。

3.3 相互独立的随机变量

[定义] 随机变量 X_1, X_2 , $F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$, $F_{X_1}(x_1)$, $F_{X_2}(x_2)$ 分别是分布函数和边缘分布函数, 如果对于任意的 (x_1, x_2) 满足

$$F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$

则称随机变量 X_1, X_2 是相互独立的。

当 (X_1, X_2) 是连续型随机向量时, X_1, X_2 联合概率密度为 $f(x_1, x_2)$, 边缘概率密度分别是 $f_{X_1}(x_1), f_{X_2}(x_2)$, 则 X_1, X_2 独立的条件等价于

$$f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$$

3.3 相互独立的随机变量

Proof: $F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$

$$\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(u) du \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_2}(v) dv = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1}(u) f_{X_2}(v) du dv$$

由 x_1, x_2 的任意性知道, 必须有 $f(u, v) = f_{X_1}(u) f_{X_2}(v)$

反之, 很容易证明成立。

例如二维正态随机分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ 的边缘分布概率密度是 $f_X(x), f_Y(y)$, 如果要使得 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, 必有 $\rho = 0$ 即二维正态随机变量 (X, Y) 中 X, Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho = 0$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$



3.3 相互独立的随机变量

关于多维随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 其联合分布 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 边缘分布为 $F_{X_i}(x_i) (i=1, 2, \dots, n)$, 如果对所有的 x_1, x_2, \dots, x_n 成立

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

则 X_1, X_2, \dots, X_n 是**相互独立的**。

假设 X_1, X_2, \dots, X_m 有联合分布 $F_X(x_1, x_2, \dots, x_m)$

Y_1, Y_2, \dots, Y_n 有联合分布 $F_Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$

$X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 的联合分布为 $F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$

如果 $F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \equiv F_X(x_1, x_2, \dots, x_m) F_Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$

则称 X_1, X_2, \dots, X_m 与 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 是**独立的**。

Example 3.11 一负责人到办公室的时间是8~12点，服从均匀分布 $X \sim U(8, 12)$ ，其秘书到达办公室的时间是7~9点，服从均匀分布 $Y \sim U(7, 9)$ ，二人到达的时间 X, Y 独立。

求：他们达到办公室时间相差不超过5分钟的概率。

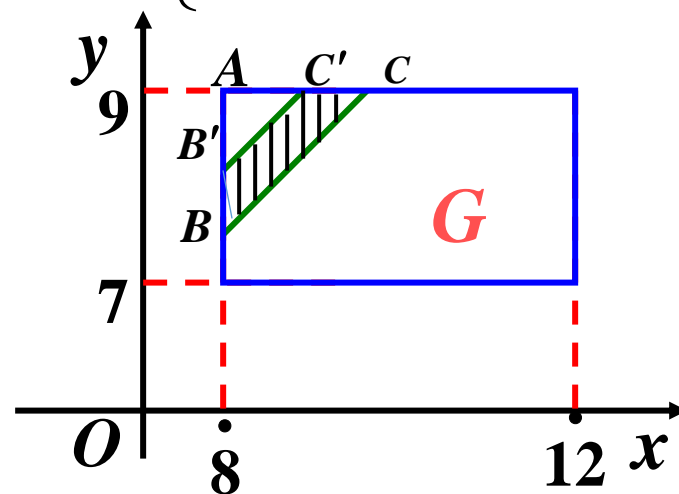
$$G = \{(x, y) \mid 8 < x < 12, 7 < y < 9\}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} 1/4 & 8 < x < 12 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} 1/2 & 7 < y < 9 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$f(x, y) = f_x(x)f_y(y)$$

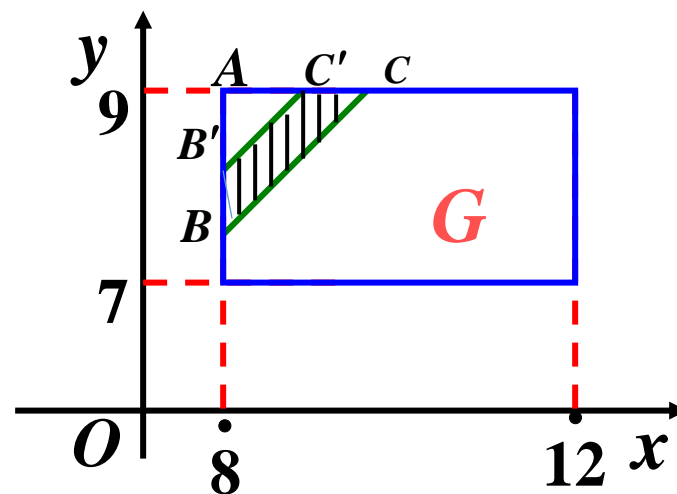
$$= \begin{cases} 1/8 & (x, y) \in G \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$



$$P\{|X - Y| < \frac{1}{12}\} = \iint_{\substack{|x-y| < \frac{1}{12} \\ (x,y) \in G}} f(x,y) dx dy$$

$$= \frac{1}{8} \{ |x - y| \leq \frac{1}{12} \text{ 的面积}, (x, y) \in G \}$$

$$= 1/48$$



3.3 相互独立的随机变量

定理3.1:

如果随机变量 X_1, \dots, X_n 相互独立, 则对任何 $a_i < b_i (i = 1, \dots, n)$, 记事件 $A_i = \{a_i \leq X_i \leq b_i\}$, 则 A_1, \dots, A_n 也相互独立。

反之, 如果对任何 $a_i < b_i (i = 1, \dots, n)$, A_1, \dots, A_n 相互独立, 则 X_1, \dots, X_n 相互独立。

这说明**如果 X_1, \dots, X_n 相互独立, 则各个变量取值的概率不受其他变量的影响**, 这与随机变量相互独立的定义是等价的。

3.3 相互独立的随机变量

定理3.2:

若多维连续型随机变量 (X_1, \dots, X_n) 的概率密度函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 可以表示为 n 个函数 g_1, \dots, g_n 的积, 其中 g_i 只依赖于 x_i , 即

$$f(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1) \cdots g_n(x_n)$$

则 X_1, \dots, X_n 相互独立, 且 X_i 的边缘密度函数 $f_i(x_i)$ 和 $g_i(x_i)$ 只相差一个常数因子。

证明: X_1 的密度函数为

$$f_1(x_1) = \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n$$



3.3 相互独立的随机变量

定理3.2:

$$\begin{aligned} &= g_1(x_1) \int g_2(x_2) dx_2 \cdots \int g_n(x_n) dx_n \\ &= C_1 g_1(x_1) \qquad C_1 \text{为常数} \end{aligned}$$

同理可证 $f_i(x_i) = C_i g_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \text{故 } f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) &= C_1 C_2 \cdots C_n g_1(x_1) \cdots g_n(x_n) \\ &= C_1 C_2 \cdots C_n f(x_1, \dots, x_n) \\ &= f(x_1, \dots, x_n) \qquad \text{因为 } C_1 C_2 \cdots C_n = 1 \end{aligned}$$



3.3 相互独立的随机变量

[定理] 设 X_1, X_2, \dots, X_m 与 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 相互独立, 则:

(1) $X_i (i=1, 2, \dots, m)$ 与 $Y_j (j=1, 2, \dots, n)$ 相互独立;

(2) 如果 h, g 是连续函数, 则 $H = h(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 与 $G = g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 独立。

$$\begin{aligned} (1) \quad F_{ij}(x_i, y_j) &= F(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty, \infty, \dots, \infty, y_j, \infty, \dots, \infty) \\ &= F_x(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty) F_y(\infty, \dots, \infty, y_j, \infty, \dots, \infty) \\ &= F_{x_i}(x_i) F_{y_j}(y_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad F(h, g) &= P\{H \leq h, G \leq g\} \\ &= P\{h(X_1, X_2, \dots, X_m) \leq h, g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \leq g\} \\ &= P\{h(X_1, X_2, \dots, X_m) \leq h\} P\{g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \leq g\} \\ &= F_H(h) F_G(g) \end{aligned}$$



3.4 条件分布(Conditional Distribution)

当多个随机变量不满足独立性，他们之间存在着关联性，一个变量的存在影响到另一个变量的存在。可类似条件概率定义条件分布。

3.4.1 离散随机变量的条件分布

设二维离散随机变量 (X, Y) 的联合分布列为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

设

$$p_{i\bullet} > 0, \quad p_{\bullet j} > 0$$

考虑在事件 $\{Y = y_j\}$ 发生的条件下 $\{X = x_i\}$ 发生的概率，即事件 $\{X = x_i | Y = y_j\}$ 的概率。

3.4.1 离散随机变量的条件分布

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

容易知道上述满足：

$$P(X = x_i | Y = y_j) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i | Y = y_j) = 1$$



3.4.1 离散随机变量的条件分布

[定义] 对于固定的 j , $P(Y = y_j) > 0$, 则称

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

为在 $Y = y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律。

$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ 与前面Chpt.1中的条件概率是一致的;

把所有的这样的条件概率写出就得到了条件分布律。



Example 3.12 一射击手单发击中目标的概率为 p ($p>0$), 假设击中两次目标为止, 设 X 为首次射中目标所进行的射击次数, Y 为总的射击次数, 求 (X,Y) 的联合分布与条件分布。

解: $P(X = m, Y = n) = p^2(1-p)^{n-2}$

$$n = 2, 3, \dots; \quad m = 1, 2, \dots, n-1$$

$$P(X = m) = \sum_{n>m} P(X = m, Y = n)$$

$$= p^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} (1-p)^{n-2}$$

$$= p^2(1-p)^{m-1} \frac{1}{1-(1-p)}$$

$$= p(1-p)^{m-1}$$

注意:

我们事实上可以很简单地计算得到 $P\{X=m\}$



$$\begin{aligned}
 P(Y = n) &= \sum_{m < n} P(X = m, Y = n) \\
 &= \sum_{m=1}^{n-1} p^2 (1-p)^{n-2} = (n-1)p^2 (1-p)^{n-2} \quad (n \geq 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X = m | Y = n) &= \frac{P(X = m, Y = n)}{P(Y = n)} \\
 &= \frac{p^2 (1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2 (1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(Y = n | X = m) &= \frac{P(X = m, Y = n)}{P(X = m)} \\
 &= \frac{p^2 (1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}} = p(1-p)^{n-m-1}
 \end{aligned}$$



3.4.1 离散随机变量的条件分布

以上二式都可以进行直接的解释：

□ 第一式 $P(X = m | Y = n) = \frac{1}{n-1}$

在知道第n次为射中的话，前n-1次里射中一次，每次射中的概率是相等的，第m次射中的概率为 $1/(n-1)$ ；

□ 第二式 $P(Y = n | X = m) = p(1-p)^{n-m-1}$

在第m次射击时为第一次中，随后到第n次射击才射中的概率为 $p(1-p)^{n-m-1}$ (m+1, m+2, ..., n-1为不中，n为中)

3.4 条件分布(Conditional Distribution)

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

在连续型的情况，因为对任何 y ， $P(Y=y)=0$ ，故只能借助于密度函数定义条件密度。 $Y=y$ 时 X 的条件分布函数，可采取极限方式定义：

$$P(X \leq x | Y = y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} P(X \leq x | y - \varepsilon \leq Y \leq y + \varepsilon)$$

记为 $F_{X|Y}(x | y)$

假设 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$ ，概率密度为 $f(x, y)$ ，那么

$$F_{X|Y}(x | y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} P(X \leq x | y - \varepsilon \leq Y \leq y + \varepsilon)$$

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

$$\begin{aligned}F_{X|Y}(x|y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} P(X \leq x | y - \varepsilon \leq Y \leq y + \varepsilon) \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{P(X \leq x, y - \varepsilon \leq Y \leq y + \varepsilon)}{P(y - \varepsilon \leq Y \leq y + \varepsilon)} \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{F(x, y + \varepsilon) - F(x, y - \varepsilon)}{F_Y(y + \varepsilon) - F_Y(y - \varepsilon)} \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\frac{F(x, y + \varepsilon) - F(x, y - \varepsilon)}{2\varepsilon}}{\frac{F_Y(y + \varepsilon) - F_Y(y - \varepsilon)}{2\varepsilon}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \\&= \frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}{\frac{dF_Y(y)}{dy}} \\&= \frac{\int_{-\infty}^x f(x, y) dx}{f_Y(y)} \\&= \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx\end{aligned}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

Example 3.13 设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 求条件密度

$$f_{Y|X}(y|x).$$

解 $F_X(x)$ 为正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2} \sigma_2} \\
&\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] + \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2} \sigma_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2(1-\rho^2)(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2} \sigma_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{\rho^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2} \sigma_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} - \frac{\rho(x-\mu_1)}{\sigma_1} \right]^2 \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2} \sigma_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2) \sigma_2^2} \left[y - \left(\mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho(x-\mu_1) \right) \right]^2 \right\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{1-\rho^2} \sigma_2 \\
\mu &= \mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho(x-\mu_1)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



3.4.2 连续型随机变量的条件分布

前面求得条件密度

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2} \sigma_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2} \left[y - \left(\mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho(x - \mu_1) \right) \right]^2 \right\}$$

它表明:

已知 $X=x$ 条件下, 二维正态分布的对于 Y 的条件分布是正态分布

$$N \left(\mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho(x - \mu_1), \left(\sqrt{1-\rho^2} \sigma_2 \right)^2 \right)$$

其中第一参数 $\mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho(x - \mu_1)$ 是 x 的线性函数, 第二参数与 x 无关.

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

已知 $X = x$ 条件下，二维正态分布的对于 Y 的条件分布是正态分布

$$N\left(\mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho(x - \mu_1), \left(\sqrt{1 - \rho^2} \sigma_2\right)^2\right)$$

- 当 $\rho > 0$ 时，随着 x 增加， Y 的条件分布的中心点也增加，这意味着 x 增加时， y 取更大的值的可能性增加（如体重和身高的关系），此时称 X 和 Y “正相关”。
- 当 $\rho < 0$ 时，随着 x 增加， Y 的条件分布的中心点减少，即 Y 随着 X 的增长而下降，此时称 X 和 Y “负相关”。

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

练习：随机向量 (X, Y) 在圆形区域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上服从均匀分布，求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 。



Example 3.14 从 $[0,1]$ 中随机选取一个数 X ，然后再 $[0,X]$ 中随机选择一个数 Y ，求 Y 的分布。

解: 根据题意可以得到 X 的分布为 $X \sim U(0,1)$

$$f_X(x) = I_{x \in (0,1)}$$

X 确定的条件下， Y 的分布为 $Y|X = x \sim U(0, x)$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x} I_{y \in (0,x)}$$

因此， (X,Y) 的联合分布密度函数为

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = I_{x \in (0,1)} \cdot \frac{1}{x} I_{y \in (0,x)}$$

Y 的密度函数为

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_y^1 f(x, y) dx = \int_y^1 f_X(x) f_{Y|X}(y|x) dx \\ &= -\ln y, y \in [0,1] \end{aligned}$$

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

练习:

1. 设 X, Y, Z 服从 $U(0,1)$, 且相互独立, 求 $P(X \geq YZ)$
2. 随机向量 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $P\{X > 1 | Y = y\}$





3.4.2 连续型随机变量的条件分布

练习：

3. 考虑 $n + m$ 次重复实验，每次成功的概率相同。然后，假定此概率不是固定的值，而是一个随机变量，服从 $U(0,1)$ 。已知 $n + m$ 次试验有 n 次成功的条件下每次成功的概率的条件分布是什么？





条件分布函数与条件密度函数的关系

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) \, dx = \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \, dx$$

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(y|x) \, dy = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \, dy$$

联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下



3.5 多维随机变量的函数的分布

3.5.1 基本概念

n 维随机变量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的联合分布函数 $F_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$

定义随机变量 $Y_i = g_i(X_1, X_2, \dots, X_n) (i = 1, 2, \dots, m)$ 。

记随机向量 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ 的分布函数 $F_Y(y_1, y_2, \dots, y_m)$

$$C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq y_i, i = 1, 2, \dots, m\}$$

则

$$\begin{aligned} F_Y(y_1, y_2, \dots, y_m) &= P(Y \leq y_1, \dots, Y \leq y_m) \\ &= P(g_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq y_1, \dots, g_m(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq y_m) \\ &= P((X_1, \dots, X_n) \in C) \end{aligned}$$

3.5 多维随机变量的函数的分布

3.5.2 多维离散型随机变量函数的分布

设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 为 n 维离散随机变量, 则某一函数 $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 当 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的取值较少时, 可将 Y 的取值一一列出, 然后再合并整理得到 Y 的分布。

Example 3.15 设二维随机变量 (X, Y) 的分布列如下所示:

$X \backslash Y$	-1	1	2
-1	5/20	2/20	6/20
2	3/20	3/10	1/20

求: 1) $Z_1 = X + Y$; 2) $Z_2 = X - Y$; 3) $Z_3 = \max\{X, Y\}$

3.5 多维随机变量的函数的分布

解： 将 (X, Y) 和 Z_1, Z_2, Z_3 的取值对应列在同一个表中

P	5/20	2/20	6/20	3/20	3/20	1/20
(X, Y)	$(-1, -1)$	$(-1, 1)$	$(-1, 2)$	$(2, -1)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$



3.5 多维随机变量的函数的分布

解： 经过合并整理后可得最后结果

Z_1	-2	0	1	3	4
P	5/20	2/20	9/20	3/20	1/20

Z_2	0	-2	-3	3	1
P	6/20	2/20	6/20	3/20	3/20

Z_3	-1	1	2
P	5/20	2/20	13/20



2.5.1 离散型随机变量的函数

Example 2.23 设 $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, X 、 Y 相互独立,

求: $Z = X + Y$ 的分布。

解: X, Y 各可取值 $0, 1, \dots, n_1$ 和 $0, 1, \dots, n_2$, 则 Z 可取值 $0, 1, \dots, n_1 + n_2$, 得

$$P\{Z = s\} = \sum_{k=0}^s P\{X = k, Y = s - k\}$$

离散场合下的卷积公式

$$= \sum_{k=0}^s P\{X = k\} P\{Y = s - k\}$$

$$= \sum_{k=0}^s C_{n_1}^k p^k (1-p)^{n_1-k} C_{n_2}^{s-k} p^{s-k} (1-p)^{n_2-(s-k)}$$

$$= p^s (1-p)^{n_1+n_2-s} \sum_{k=0}^s C_{n_1}^k C_{n_2}^{s-k}$$

$$= C_{n_1+n_2}^s p^s (1-p)^{n_1+n_2-s}$$

$$X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$$



2.5.1 离散型随机变量的函数

Remark1: 上面公式的推导用到了组合数的性质。

$$\sum_{k=0}^s C_{n_1}^k C_{n_2}^{s-k} = C_{n_1+n_2}^s$$

Remark2: $X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$ 这个事实显示了二项分布一个很重要的性质：两个独立的二项分布，当它们的第二参数相同时，其和也服从二项分布，它的第一参数恰为这两个二项分布第一参数的和。

- 这性质称为二项分布的再生性(或可加性(additive property))
- 从 X, Y 的概率意义来看，这结果是非常明显的： X 和 Y 分别是 n_1 和 n_2 重贝努里试验中成功的次数，两组试验合起来， $Z=X+Y$ 应该就是 n_1+n_2 重贝努里试验中成功的次数。

3.5 多维随机变量的函数的分布

Example 3.16 (泊松分布的可加性) 设随机变量 $X \sim \pi(\lambda_1)$, $Y \sim \pi(\lambda_2)$, 且 X 与 Y 独立, 试证明 $Z = X + Y \sim \pi(\lambda_1 + \lambda_2)$

解: 由题意知泊松分布的分布列为

$$P(X = i) = \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1}, \quad P(Y = j) = \frac{\lambda_2^j}{j!} e^{-\lambda_2}$$

$Z = X + Y$ 可取 $0, 1, 2, \dots$ 所有非负整数, 事件 $\{Z = k\}$ 是如下互不相容事件的并集:

$$\{X = i, Y = k - i\}, i = 0, 1, \dots, k$$

由于 X 和 Y 独立, 故 $P\{Z = k\} = \sum_{i=0}^k P\{X = i\}P\{Y = k - i\}$

3.5 多维随机变量的函数的分布

$$\begin{aligned} P\{Z = k\} &= \sum_{i=0}^k \left(\frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \right) \left(\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} \right) \\ &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i! (k-i)!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{k-i} \\ &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \\ &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}, k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$



3.5 多维随机变量的函数的分布

这表明 $Z = X + Y \sim \pi(\lambda_1 + \lambda_2)$ ，结论得证。

Remark 1: 泊松分布具有可加性（服从同一类分布的独立随机变量的和的分布仍属于此类分布）

泊松分布的这个性质可以描述为：泊松分布的卷积仍是泊松分布，记为 $\pi(\lambda_1) * \pi(\lambda_2) = \pi(\lambda_1 + \lambda_2)$ 。这里的卷积*是指“寻求两个独立随机变量和的分布的运算”

Remark 2: 这个性质可以推广到有限个独立泊松变量之和的分布计算，即 $\pi(\lambda_1) * \pi(\lambda_2) * \cdots * \pi(\lambda_n) = \pi(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$ 。特别地，当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ 时，有 $\pi(\lambda_1) * \pi(\lambda_2) * \cdots * \pi(\lambda_n) = \pi(n\lambda)$

Remark 3: $X - Y$ 不服从泊松分布

3.5 多维随机变量的函数的分布

练习：设 $(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim M(N; p_1, p_2, \dots, p_n), n \geq 3$ 。试求 $Y = X_1 + X_2$ 的分布



3.5 多维随机变量函数的分布

3.5.3 多维连续型随机变量函数的分布

如果 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 有联合概率密度 $f_X(x_1, \dots, x_n)$, 则

$$F_Y(y_1, y_2, \dots, y_m) = \int \cdots \int_C f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

这就归结为一个求解 n 重积分的问题。

下面就一些具体的函数形式求解。

[一] $Z = X + Y$

[二] $Z = X/Y$

[三] $Z = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

[一] $Z=X+Y$

设 (X,Y) 的联合分布概率密度为 $f(x,y)$, Z 的分布函数为 $F_z(z)$, 概率密度为 $f_z(z)$

$$F_z(z) = P(Z \leq z)$$

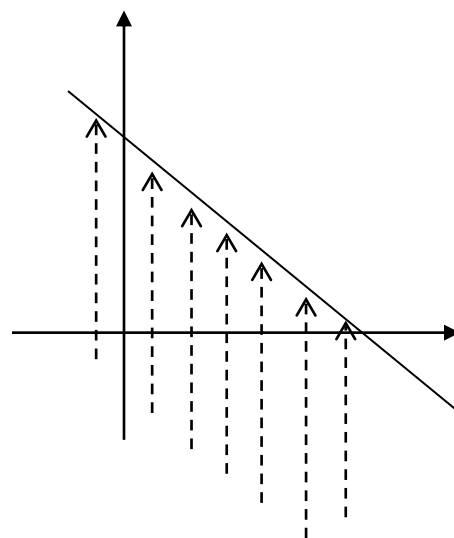
$$= \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{z-x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy$$



$$t = y + x$$

$$= \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t-x) dx \right] dt$$



[一] $Z=X+Y$ 的分布函数

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy$$

当 (X,Y) 相互独立时, $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

这两个公式称为卷积公式(convolution)

$$Z = X + Y \quad f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy$$

$$Z = X - Y \quad f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y, y)dy$$




Example 3.17 X, Y 独立同分布，都服从 $N(0,1)$ ，求 $Z = X + Y$ 的分布密度。

解： 用卷积公式，对任意 $z \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) \cdot f_y(z-x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2 + 2x^2 - 2xz}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2/2 + 2(x-z/2)^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-z/2)^2} dx \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx$$


 $t = x - \frac{z}{2}$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2 \cdot (\sqrt{2})^2}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{2 \cdot (\sqrt{2})^2}}$$

这说明 $Z=X+Y \sim N(0, 2)$.

1) 更一般地, 若 X, Y 相互独立, 且都服从正态分布 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 则 $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ 。本例是其特殊情况, 可知正态分布对两个参数都有可加性。



2) 反之, 若 Z 服从正态分布, 且可以表示成两个独立随机变量之和, 如 $Z=X+Y$, 则 X 和 Y 必然都服从正态分布, 这是正态分布的再生性。

3) 即使 X 和 Y 不独立, 若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则 $Z=X+Y$ 依然服从正态分布, $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)$ 。

4) 可加性可以推广到 n 个独立的正态随机变量上。即: 若 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 且 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, 则

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim N\left(\sum \mu_i, \sum \sigma_i^2\right)。$$



[二] $Z=X/Y$

$$F_z(z) = P\left(\frac{X}{Y} \leq z\right)$$

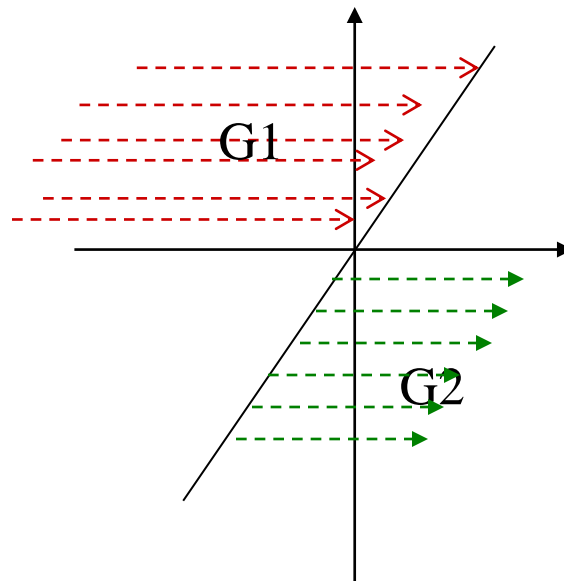
$$= \iint_{\frac{x}{y} \leq z} f(x, y) dx dy$$

$$= \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x, y) dx + \int_{-\infty}^0 dy \int_{zy}^{+\infty} f(x, y) dx$$




$$x = yu$$



[二] $Z=X/Y$

$$\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x, y) dx + \int_{-\infty}^0 dy \int_{zy}^{+\infty} f(x, y) dx$$


 $x = yu$

$$= \int_{-\infty}^z du \int_0^{+\infty} y f(yu, y) dy + \int_{-\infty}^z du \int_{-\infty}^0 y f(yu, y) dy$$

第二部分 $y < 0$

$$= \int_{-\infty}^z du \int_0^{+\infty} y f(yu, y) dy - \int_{-\infty}^z du \int_{-\infty}^0 y f(yu, y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^z du \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yu, y) dy$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy$$

注意：密度函数不为负



[二] $Z=X/Y$

对于随机变量 $Z = \frac{X}{Y}$,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy$$

类似地, 我们可以推导出, 对于随机变量 $Z = XY$,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f\left(\frac{z}{y}, y\right) dy$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx$$

变量换元法

设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y)$, 如果函数

$$u = g_1(x, y), v = g_2(x, y)$$

有连续偏导数, 且存在唯一的反函数 $x = h_1(u, v), y = h_2(u, v)$

其变换的雅各比行列式不为0, 即

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

则 $U = g_1(X, Y), V = g_2(X, Y)$ 的联合密度函数为

$$f_{UV}(u, v) = f(h_1(u, v), h_2(u, v))|J|$$



$Z = X/Y$ 和 $Z = XY$

1) 记 $U = X/Y, V = Y$, 则 $u = x/y, v = y$

求反函数 $x = uv, y = v$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$$

故 $f_{UV}(u, v) = f(uv, v)|v|$

再对上式关于 v 积分即可得到 $Z=X/Y$ 的分布密度函数

2) 记 $U = XY, V = Y$, 则 $u = xy, v = y$

求反函数 $x = u/v, y = v$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1/v$$

故 $f_{UV}(u, v) = f(u/v, v) \frac{1}{|v|}$

再对上式关于 v 积分即可得到 $Z=X/Y$ 的分布密度函数

Example 3.18 X, Y 独立同分布，都服从 $N(\mu, \sigma^2)$ ，记 $U = X + Y$, $V = X - Y$,

1) 试求 U, V 的联合概率密度, 2) U 和 V 是否独立?

解: 根据题意，随机变量的函数为 $u = x + y, v = x - y$

故其反函数为 $x = \frac{1}{2}(u + v), y = \frac{1}{2}(u - v)$

则

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

所以得到 U, V 的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f_{UV}(u, v) &= f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \left| -\frac{1}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} f_X\left(\frac{u+v}{2}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{UV}(u, v) &= \frac{1}{2} f_X\left(\frac{u+v}{2}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{u+v}{2}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{u-v}{2}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
 &= \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(u-2\mu)^2+v^2}{4\sigma^2}\right\}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

这是二维正态分布 $N(2\mu, 0, 2\sigma^2, 2\sigma^2, 0)$ 的密度函数，可知 $\rho = 0$ ，说明 U, V 相互独立。



练习：设 (X, Y) 表示平面上一个点，并假设其直角坐标 X 和 Y 是相互独立的标准正态变量，即 $X, Y \sim N(0, 1)$ ，求 (X, Y) 的极坐标表示 (R, Θ) 的联合分布



[三] 次序量的分布 (极值分布)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 联合分布函数 $F(x_1, \dots, x_n)$.
把 X_1, X_2, \dots, X_n 每取一组值 x_1, x_2, \dots, x_n 都按大小次序排列, 所得随机变量 $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ 称为次序统计量 (order statistic), 它们满足

$$X_1^* \leq X_2^* \leq \dots \leq X_n^*$$

因此

$$X_1^* = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

$$X_n^* = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$



$$Z = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

$$\begin{aligned} F_z(z) &= P(\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leq z) \\ &= P(X_1 \leq z, X_2 \leq z, \cdots, X_n \leq z) \\ &= F(z, z, \cdots, z) \end{aligned}$$

如 X_1, X_2, \cdots, X_n 独立, 则有

$$F_z(z) = F_{x_1}(z) \cdots F_{x_n}(z)$$

如果 X_1, X_2, \cdots, X_n 独立同分布, 分布函数为 $F_x(x)$

$$F_z(z) = [F_x(z)]^n$$



$$Z = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$\begin{aligned} F_z(z) &= P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq z) \\ &= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) \geq z) \\ &= 1 - P(X_1 \geq z, \dots, X_n \geq z) \end{aligned}$$

如果 X_1, \dots, X_n 独立, 则有

$$\begin{aligned} F_z(z) &= 1 - P(X_1 \geq z)P(X_2 \geq z) \cdots P(X_n \geq z) \\ &= 1 - [1 - P(X_1 \leq z)] \cdots [1 - P(X_n \leq z)] \\ &= 1 - [1 - F_{X_1}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)] \end{aligned}$$

对于多个随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 如有独立同分布 $F_X(x)$, 则

$$F_z(z) = 1 - [1 - F_X(z)]^n$$



Example 3.19

设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 连接而成, 连接的方式分别为 (1) 串联; (2) 并联; (3) 备用 (当系统之一损坏时, 另一个开始工作)。设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y , 已知他们的概率密度分别服从指数分布

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$ 。

求: 三种情况下, 系统 L 寿命 Z 的概率分布。

解:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$



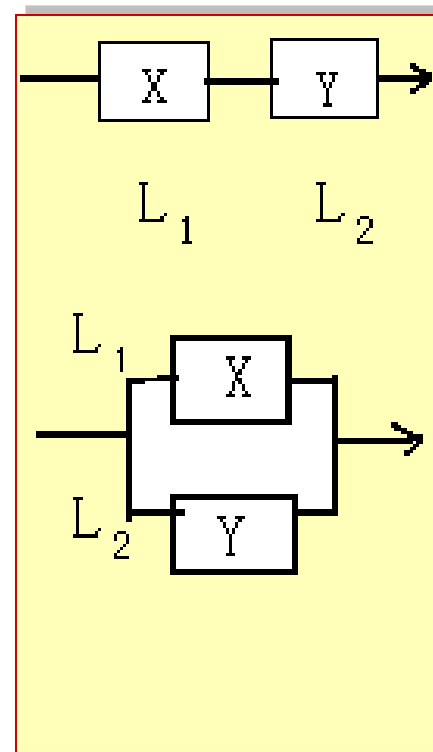
[1] 串联情况

$$Z = \min(X, Y)$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_x(z)][1 - F_y(z)]$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

$$f_{\min}(z) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$



[2] 并联情况

$$Z = \max(X, Y)$$

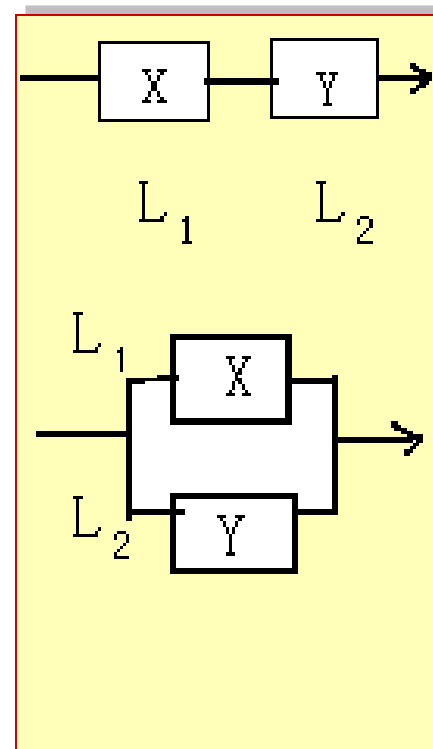
$$F_{\max}(z) = P(Z \leq z) = P(\max(X, Y) \leq z)$$

$$= P(X \leq z, Y \leq z)$$

$$= F_x(z)F_y(z)$$

$$= \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}) & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha + \beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$



[3] 备用情况

$$Z = X + Y$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y)f_y(y)dy \\ &= \int_0^z f_x(z-y)f_y(y)dy \\ &= \int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)} \beta e^{-\beta y} dy \\ &= \alpha \beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y} dy = \frac{\alpha \beta}{\beta - \alpha} \left[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} \right] \\ f(z) &= \begin{cases} \frac{\alpha \beta}{\beta - \alpha} \left[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} \right] & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



3.5.4 数理统计中几个重要分布

1. Γ 分布

对于($\alpha > 0, \beta > 0$), 如果随机变量 X 的概率密度满足下式, 则称 X 服从参数为 α, β 的伽玛分布, 记作 $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

其中
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

[定理] (Γ 分布的可加性) Γ 分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 对第一个参数具有可加性:

若 X_1, X_2 相互独立, $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta), X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$, 则

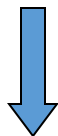
$$X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$$



证 由卷积公式求 $Z = X + Y$ 的密度: 当 $z < 0$ 时, $f_z(z) = 0$; 当 $z > 0$ 时,

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x) dx$$
$$= \int_0^z \frac{1}{\beta^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-x/\beta} \frac{1}{\beta^{\alpha_2} \Gamma(\alpha_2)} (z-x)^{\alpha_2-1} e^{-(z-x)/\beta} dx$$

$$= \frac{e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^z x^{\alpha_1-1} (z-x)^{\alpha_2-1} dx$$



$$x = zt$$

$$= \frac{e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 z^{\alpha_1-1} t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} z^{\alpha_2-1} z dt$$

$$= \frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} dt$$



$$\frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} dt$$

记成为

$$\equiv \equiv \equiv A z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta}$$

其中 $A = \frac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} dt$


现在求A，或者证明 $A = \frac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$

注意到

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(z) dz = A \int_{-\infty}^{+\infty} z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta} dz$$



$$1 = A\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta} d\left(\frac{z}{\beta}\right)$$

 $u = z/\beta$

$$= A\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-u} du$$

$$= A\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$A = \frac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$f_z(z) = \frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

所以 $X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$



Remark 1: 此处，我们事实上应该说 $X_1 + X_2$ 还是连续随

机变量，而后才能利用 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(z) dz = A \int_{-\infty}^{+\infty} z^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} e^{-z/\beta} dz$

去推导 A 。

Remark 2: 我们说 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ 是密

度函数，需要证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



几种特殊情况

[1] 当 $\alpha=1$ 时, $\Gamma(1, \beta)$ 为指数分布.

$$\text{此时 } \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{1-1} e^{-u} du = 1$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

[2] 另一特殊情况是 $\Gamma\left(\frac{n}{2}, 2\right)$

称 $\Gamma\left(\frac{n}{2}, 2\right)$ 为参数为 n 的 χ^2 分布, 记为 $X \sim \chi^2(n)$



2. χ^2 分布

称 $\Gamma\left(\frac{n}{2}, 2\right)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布, 其中称 n 为它的自由度(DOF, degree of freedom). 它的密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

[定理] χ^2 分布具有可加性, 也就是说, 设 $X_1 \sim \chi^2(n_1)$, $X_2 \sim \chi^2(n_2)$, 且 X_1 和 X_2 独立, 则 $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$;

χ^2 分布是特殊的 Γ 分布, 第二个参数相同 (都为2), 由 Γ 分布对第一参数的可加性即得 χ^2 分布的可加性.

[定理] 若 X_1, \dots, X_n 相互独立, 都服从 $N(0,1)$, 则

$$Y = X_1^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

证 记 $Y_i = X_i^2 (i = 1, 2, \dots, n)$, 由 $\{X_i\}$ 相互独立, 可知 $\{Y_i\}$ 相互独立. 直接算得 Y_i 的密度,

$$f_{Y_i}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} u^{-1/2} e^{-u} du \xrightarrow{t=\sqrt{2u}} \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\pi}$$



$$f_{Y_i}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2^{1/2} \Gamma(1/2)} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

故 $Y_i \sim \Gamma(\frac{1}{2}, 2) \sim \chi^2(1)$

再由 χ^2 分布的可加性质, 知道 $X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$

上述定理显示了 χ^2 分布的本质属性, χ^2 分布中的自由度 n 即是 $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ 中独立正态变量 X_i 的个数.



谢谢！

