2020-2021 学年第二学期期末考试 A 卷

一．单项选择题（每题 3 分，满分 15 分）

1、设随机事件 A,B 满足 P(A|B)+P($\bar{A}$|$\bar{B}$)=1,0<P(A),P(B)<1,则（ ）。

（A）A,B 互不相容　　　　　　（B）A,B 相互对立

（C）A,B 相互独立　　　　　　（D）A,B 不相互独立

2、设随机变量 X,Y 相互独立，且 X~N(0,1),Y~N(1,1),则（ ），

（A）P{X+Y$\leq 0\} = \frac{1}{2}$；　　　　（B）P{X+Y$\leq 1\} = \frac{1}{2}$；

（C）P{X-Y$\leq 0\} = \frac{1}{2}$；　　　　（D）P{X-Y$\leq 1\} = \frac{1}{2}$；

3、设（$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_8$）为来自总体 N（-1,4）的样本，（$Y_1, Y_2, \ldots.., Y_{10}$）为来自总体 N（2,25）的样本，且它们相互独立。S_1^2, S_2^2分别为两个样本的方差，则服从 F（7,9）分布的统计量是（ ）。

（A）$\frac{2S_1^2}{5S_2^2}$　　（B）$\frac{5S_1^2}{2S_2^2}$　　（C）$\frac{4S_1^2}{25S_2^2}$　　（D）$\frac{25S_1^2}{4S_2^2}$

4、设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\bar{X}$为样本（X_1, X_2）的均值，则下列 μ 的无偏估计中最有效的是（ ）。

（A）$\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$　　（B）$\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$　　（C）$\frac{1}{2}\bar{X} + \frac{1}{2}X_2$　　（D）$\frac{1}{3}\bar{X} + \frac{2}{3}X_2$

5、设（$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_9$）为来自总体 N（μ，σ^2）的样本，μ，σ^{2}均未知，则 μ 的置信度为99%的置信区间是（ ）。

（A）$\left[\bar{X} - \frac{S}{3}t_{0.025}(8), \bar{X} + \frac{S}{3}t_{0.025}(8)\right]$　　（B）$\left[\bar{X} - \frac{S}{3}t_{0.025}(9), \bar{X} + \frac{S}{3}t_{0.025}(9)\right]$

（C）$\left[\bar{X} - \frac{S}{3}t_{0.01}(9), \bar{X} + \frac{S}{3}t_{0.01}(9)\right]$　　（D）$\left[\bar{X} - \frac{S}{3}t_{0.005}(8), \bar{X} + \frac{S}{3}t_{0.005}(8)\right]$

二、填空题（每题 3 分，满分 15 分）

1、将红，黄，蓝三个球随机的放入四个盒子，若每个盒子容纳球数不限，则有三个盒子各放一个球的概率为____________。

2、设$X \sim U(0,1)$,则 Y=e^x在（1，e）内的概率密度函数为____________。

3、在区间（0,1）中随机的取两个数，则两数之和小于$\frac{5}{6}$的概率为__________。

4、设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布用切比雪夫不等式估计概率 P{|X-2|$\geq 4\} \leq$____________。

5、设（$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_9$）为来自总体 N（0，1）的样本

Y=$\left(\sum_{i=1}^{3} X_i\right)^2$+$\left(\sum_{i=4}^{6} X_i\right)^2$+$\left(\sum_{i=7}^{9} X_i\right)^2$ 则当 k=____时，kY 服从χ^2分布。

三、（满分 10 分）

设有两台机床加工同样的零件，第一台机床出废品的概率是 0.03，第二台机床出废品的概率是 0.02，加工出来的零件混放在一起。已知第一台机床加工的零件比第二台加工的零件多一倍。

（1）求任意取出一个零件是合格品的概率；

（2）如果任意取出一个零件经检查后发现是废品，求他是第二台机床加工的概率。

四、（满分 16 分）

设二维随机变量（X, Y）的密度函数 f（x, y）=$\begin{cases} 1 & ,|y|<x,0<x<1, \\ 0 & ,其他 \end{cases}$求：

（1）X 和 Y 的边缘密度；

（2）Z=X+Y 的密度$f_Z(z)$.

五、（满分 14 分）

设总体 X 的概率密度为f(x)=$\begin{cases} \frac{\theta}{x^{\theta+1}} & ,x>1, \\ 0 & , \quad x\le 1, \end{cases}$其中 θ >1，未知，设（$X_1,X_2,\ldots\ldots,X_n$）为来自总体的样本，求：

（1） θ 的矩估计量；

（2） θ 的极大似然估计量。

六、（满分 8 分）

食品检查机构对某食品厂待出售的火腿肠中亚硝酸钠的含量进行抽查。已知随机抽查了 36 份，经计算，样本均值$\bar{x}$=16.23，样本方差s^2=3.52.假设亚硝酸钠在火腿肠中的含量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.试判断，能否认为其方差 $\sigma^2=3$？ （检验水平 $\alpha = 0.05$，$\chi^2_{0.975}(35)=20.569$，$\chi^2_{0.025}=53.203$）

七、（满分 8 分）

设随机变量 X,Y,Z 两两不相关，且方差存在。证明：D(X+Y+Z)=D(X)+D(Y)+D(Z).

2020-2021 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、选择题

1、【正解】C

【解析】由条件概率的性质可得：$P(A|B)=1-P(\bar{A}|\bar{B})=P(A|\bar{B})$，即 B 发生与否对 A 没有影响，故 A 与 B 相互独立，选择 C 项。

【考点延伸】《考试宝典》第一章 随机事件与概率

2、【正解】B

【解析】根据正态分布的性质，易知: $X+Y$，

$X-Y$ 均服从正态分布，

根据数学期望与方差的性质:

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=1,$

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=2,$

$E(X-Y)=E(X)-E(Y)=-1,$

$D(X-Y)=D(X)+D(Y)=2,$

故:$X+Y\sim N(1,2),\ X-Y\sim N(-1,2)$

所以,$P\{X+Y\leqslant 1\}=\phi\left(\dfrac{1-1}{\sqrt{2}}\right)=\phi(0)=\dfrac{1}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》第三章 3.3 二维连续型随机变量及分布

3、【正解】D

【解析】$\frac{X+1}{\sqrt{4}}\sim N(0,1)$ $\frac{Y-2}{\sqrt{25}}\sim N(0,1)$

S_1^2,S_2^2分别为两个样本的方差，所以$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2}$服从 $\chi^2(n-1)$，即$\frac{7S_1^2}{4}$服从$\chi^2(7)$

同理可得 $\frac{9S_2^2}{25}$服从$\chi^2(9)$

所以 $F(7,9)=\dfrac{\frac{\chi^2(7)}{7}}{\frac{\chi^2(9)}{9}}=\dfrac{\frac{S_1^2}{4}}{\frac{S_2^2}{25}}=\dfrac{25S_1^2}{4S_2^2}$

【考点延伸】《考试宝典》第六章 样本及抽样分布 题型四 F 分布

4、【正解】A

【解析】 $D(X)=\sigma^2$ $D(X_1)=D(X_2)=\sigma^2$

$D(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2)=\frac{1}{2}\sigma^2$ $D(\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2)=\frac{5}{9}\sigma^2$

$D(\frac{1}{2}\bar{X}+\frac{1}{2}X_2)=D(\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2)=\frac{5}{8}\sigma^2$ $D(\frac{1}{3}\bar{X}+\frac{2}{3}X_2)=D(\frac{1}{6}X_1+\frac{5}{6}X_2)=\frac{13}{18}\sigma^2$

因为无偏估计方差越小越有效，比较可得$\frac{1}{2}\sigma^2$最小

所以选择 A 选项

【考点延伸】《考试宝典》第七章 点估计 7.2 估计量的评选标准

5、【正解】D

σ未知时μ的置信区间

这时可用 t 统计量

因为$t=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s}\sim t(n-1)$

因此 t 可以用来作为枢轴量

可得到μ的$1-\alpha$置信区间为$\bar{x}\pm t_{1-\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n}$

此处$s^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$是$\sigma^2$的无偏估计

【考点延伸】《考试宝典》第八章 区间估计 8.2 置信区间

二、填空题

1、【正解】$\dfrac{3}{8}$

【解析】 分析可知 $P=\dfrac{A_4^2}{4^3}=\dfrac{3}{8}$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 随机事件与概率

2、【正解】$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & ,1<y<e, \\ 0 & ,其他\end{cases}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 一维随机变量及分布 2.3 连续型随机变量

3、【正解】$\frac{25}{72}$

【解析】利用图像法，作（0,0）（0,1）（1,0）（1,1）为顶点的正方形，直线 X+Y= $\frac{5}{6}$左下方为满足条件的区域

所以 P=$\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$ = $\frac{25}{72}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 二维随机变量及分布

4、【正解】$\dfrac{1}{8}$

【解析】$P\{|x-2|\geqslant 4\}\leqslant\dfrac{2}{4^2}=\dfrac{1}{8}$

【考点延伸】《考试宝典》第五章 大数定律与中心极限定理 5.1 切比雪夫不等式

5、【正解】$\dfrac{1}{3}$

$$(X_1+X_2+X_3)\sim N(0,3)$$
$$(X_4+X_5+X_6)\sim N(0,3)$$
$$(X_7+X_8+X_9)\sim N(0,3)$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(X_1+X_2+X_3)\sim N(0,1)$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}(X_4+X_5+X_6)\sim N(0,1)$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}(X_7+X_8+X_9)\sim N(0,1)$$

可得:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sum_{i=1}^{3}X_i\right)\right]^2+\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sum_{i=4}^{6}X_i\right)\right]^2+\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sum_{i=7}^{9}X_i\right)\right]^2\sim\chi^2(3)$$

【解析】由题可知， 所以， $C=\dfrac{1}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》第六章 样本及抽样分布 题型三 卡方分布

三、【解析】设A_i表示“第 i 台机床加工的零件”；B 表示“出现废品”；C 表 示“出现合格品”

（1）P(C)=P$(A_1C\cup A_2C)$=P(A_1C)+P(A_2C)=P(A_1)P(C|A_1)+P(A_2)P(C|A_2)

$=\frac{2}{3}(1-0.03)+\frac{1}{3}(1-0.02)\approx 0.973$

（2）P$(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\frac{\frac{1}{3}\times 0.02}{\frac{2}{3}\times 0.03+\frac{1}{3}\times 0.02}=0.25$

【考点延伸】《考试宝典》第一章随机事件与概率 1.5 条件概率

四、【解析】

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy=2x & ,0<x<1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}1+y & ,-1<y<0\\ 1-y & ,0<y<1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

当$z>0$时，$0<x<1$，$z-x>|x|$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_{\frac{z}{2}}^{1}1dx=1-\frac{z}{2}\quad,\quad 0<z<2$$

【考点延伸】《考试宝典》第三章二维随机变量及分布 3.6 二维随机变量函数的分布

五、【解析】(1) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{1}^{+\infty}\theta x^{-\theta}dx=\frac{\theta}{1-\theta}$，令$E(X)=\bar{X}$，则$\theta$的矩估计量

$\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{1+\bar{X}}$.

(2) 似然函数$L=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{-(\theta+1)}=\theta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\theta+1)}$，$x_i>1$，$i=1$，2，…，$n$

$$\ln L=n\ln\theta-(\theta+1)\prod_{i=1}^{n}x_i,\quad \frac{d}{d\theta}\ln L=\frac{n}{\theta}-\prod_{i=1}^{n}x_i$$

令$\frac{d}{d\theta}\ln L=0$，得到θ的极大似然估计量$\hat{\theta}=\frac{n}{\prod_{i=1}^{n}x_i}$.

【考点延伸】《考试宝典》第七章 点估计 7.1、点估计 7.2、估计量的评选标准

六、【解析】

H_0： $\sigma^2=3$

H_1： $\sigma^2\neq 3$

选取统计量$\chi^2=\dfrac{(n-1)\ s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,

由$\alpha=0.05$

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\ (n-1)\ =\chi^2_{0.025}(35)=20.569$

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(35)=53.203$

则拒绝域为$\chi^2\geqslant 53.203$或$\chi^2\leqslant 20.569$

又有$\chi^2=\dfrac{(n-1)\ s^2}{\sigma^2}=\dfrac{35\times 3.52}{3}=41.0667$

故接受H_0

即认为其方差$\sigma^2=3$

【考点延伸】《考试宝典》第六章 样本及抽样分布 6.2、三个重要的抽样分布

七、【解析】证明：

因为 D(X+Y+Z)=D(X+Y)+D(Z)+2cov(X+Y,Z)=......

=D(X)+D(Y)+D(Z)+2[cov(X,Y)+cov(X,Z)+cov(Y,Z)]

又因为 X,Y,Z 两两不相关，所以 cov(X,Y)+cov(X,Z)+cov(Y,Z)=0

即可证明 D(X+Y+Z)=D(X)+D(Y)+D(Z).

【考点延伸】《考试宝典》第四章 随机变量的数字特征