磁介质

课前热身

- 与真空相比，电场中如果存在介质，电场会有什么变化？
- 电场中有介质时，我们采用了什么物理模型进行解释？
- 电场中有介质时，我们引入了什么新的物理量，这个物理量与什么有关？

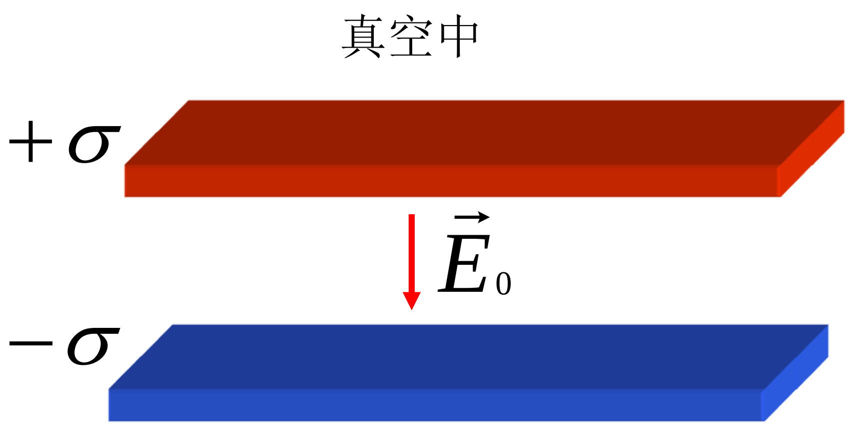
通过本次课的学习，您将：

- 认识磁介质的分类；
- 理解磁化的机理；
- 掌握有磁介质存在时的环路定理和高斯定理；
- 会求解磁介质存在时的相关问题。

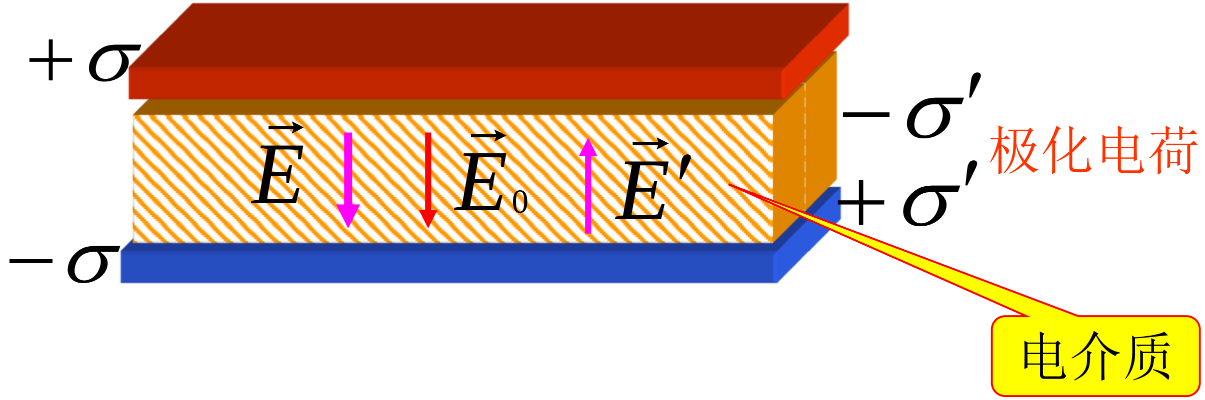
模块1　磁介质分子电流理论和有磁介质时的磁场定理

1 磁介质分类

电介质



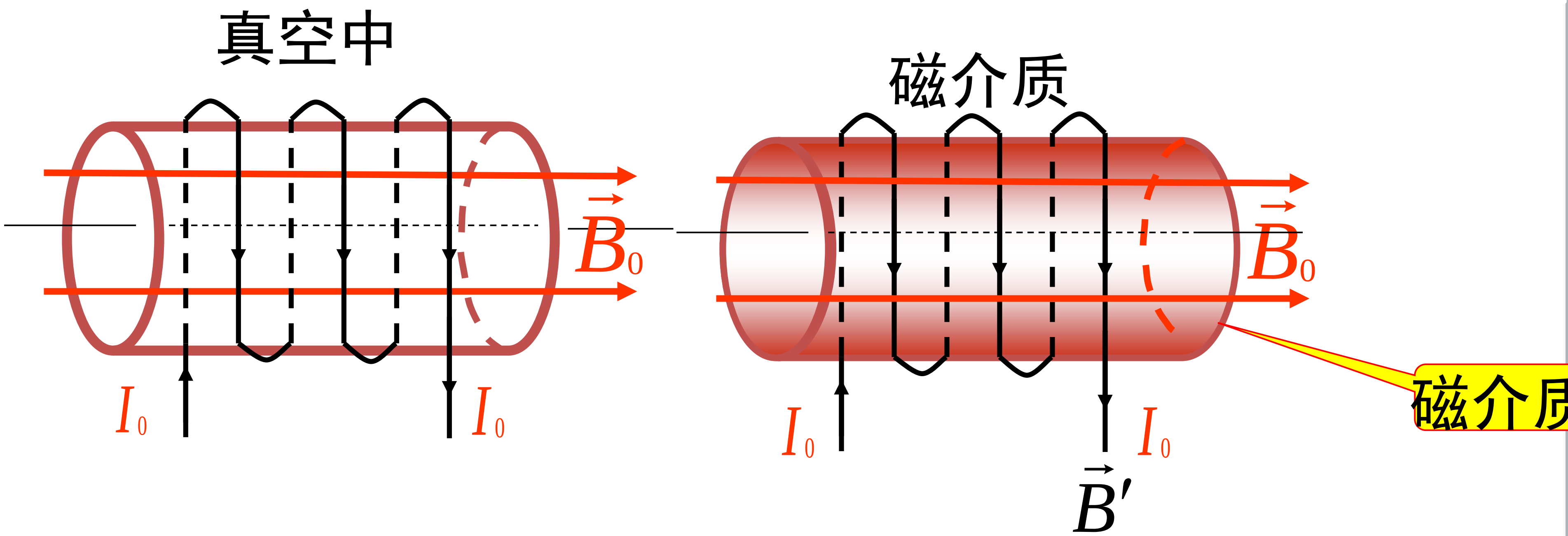
电介质中



介质中场

$$\vec{E}=\vec{E}'+\vec{E}_0$$

磁介质



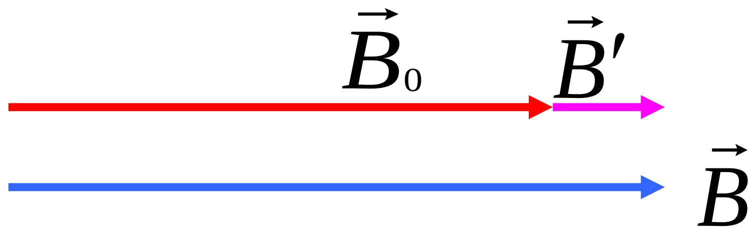
类似电介质，因磁化产生一附加磁场。

介质中的场 $\boxed{\vec{B}=\vec{B}'+\vec{B}_0}$

磁场中有介质的话，磁场的大小会怎样变化？

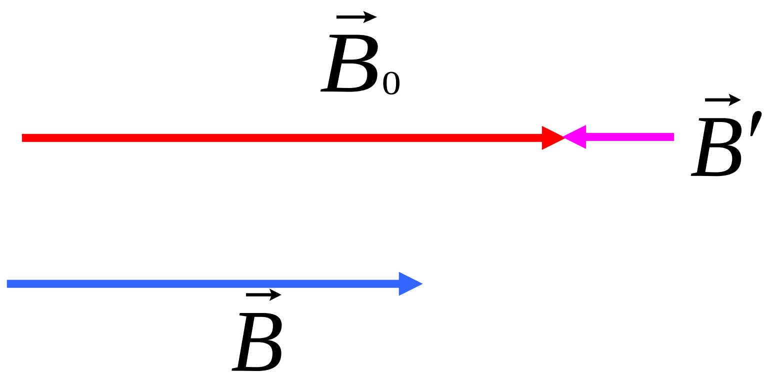
根据$\vec{B}'$的大小和方向，磁介质分为三种：

1 顺磁质



$\vec{B} \geq \vec{B}_0$ 如锰等

2 抗磁质



如铜等

$\vec{B} \leq \vec{B}_0$

3 铁磁质

$\vec{B}_0$

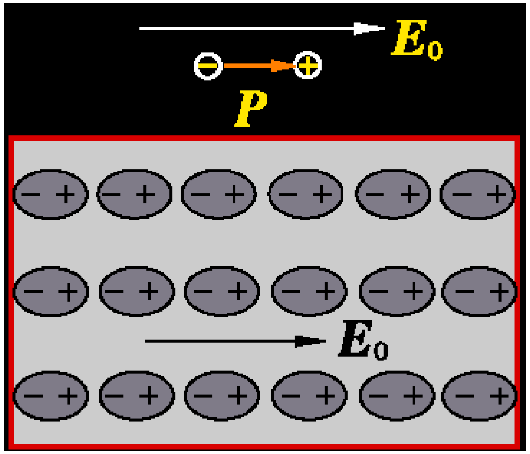
$\vec{B}'$

如铁，钴，镍及其合金等

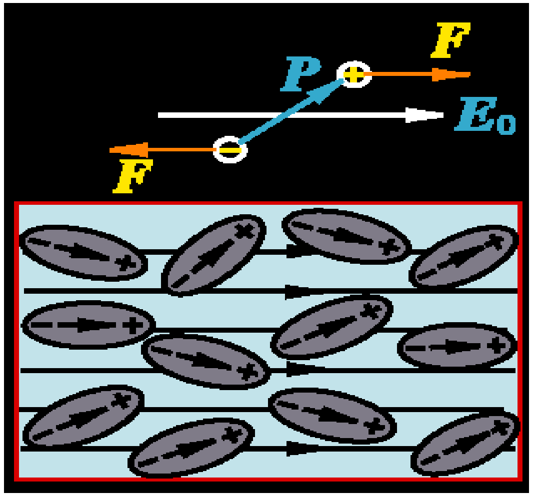
$\vec{B} >> \vec{B}_0$

2　磁介质的物理模型

- 电介质在电场中的行为采用的是什么物理模型？
- 根据物理模型怎么进行解释的？



非极性分子电介质



极性分子电介质

物质磁性的解释

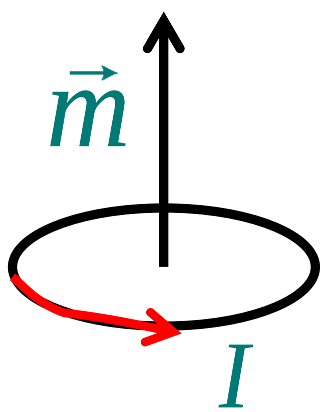
- 1822年，安培提出：分子环流假说——分子电流理论。它可以从物质的微观结构来解释磁介质的磁化过程。

- 介质分子中电子参与两种运动：自旋及绕核的轨道运动，都可以等效为环状电流，就像一个微小的载流线圈，存在磁矩矢量（轨道磁矩和自旋磁矩）。

安德烈·玛丽·安培 法国
1775年— 1836年

顺磁介质：每个分子具有固有磁矩

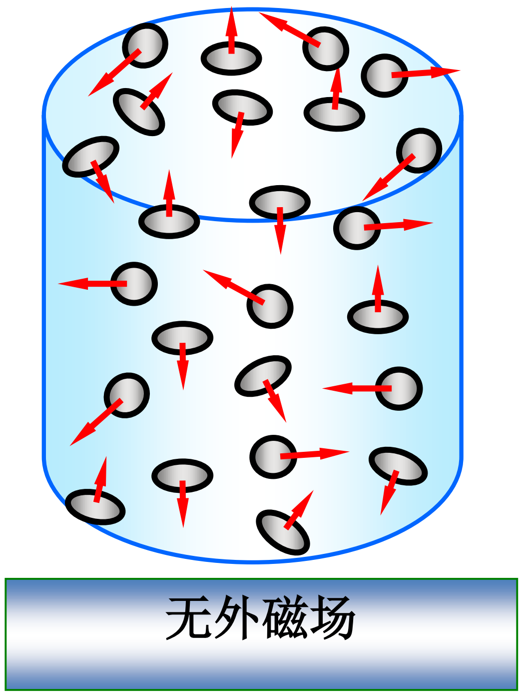
一个分子中各个电子的轨道磁矩和自旋磁矩的矢量和构成了分子磁矩矢量 $\vec{m} = IS\vec{n}_0$

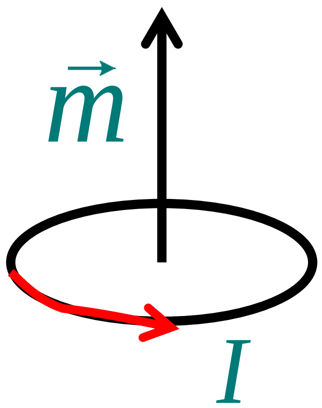


(I) 顺磁质磁化机理

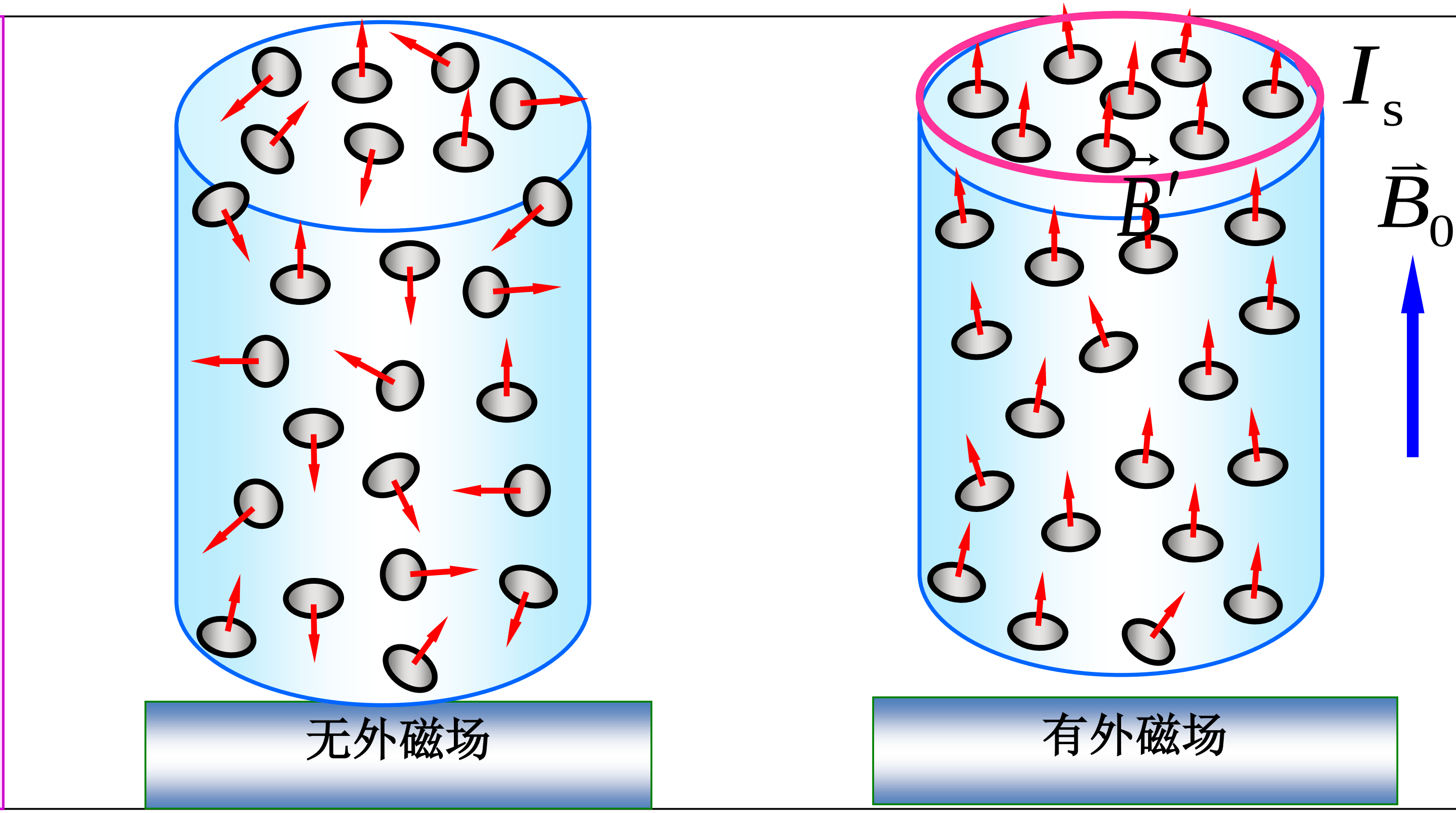
顺磁质：每个分子的固有磁矩不为零，$\vec{m} \neq 0$

无外磁场作用时，由于分子的热运动，分子磁矩取向各不相同，整个介质不显磁性。



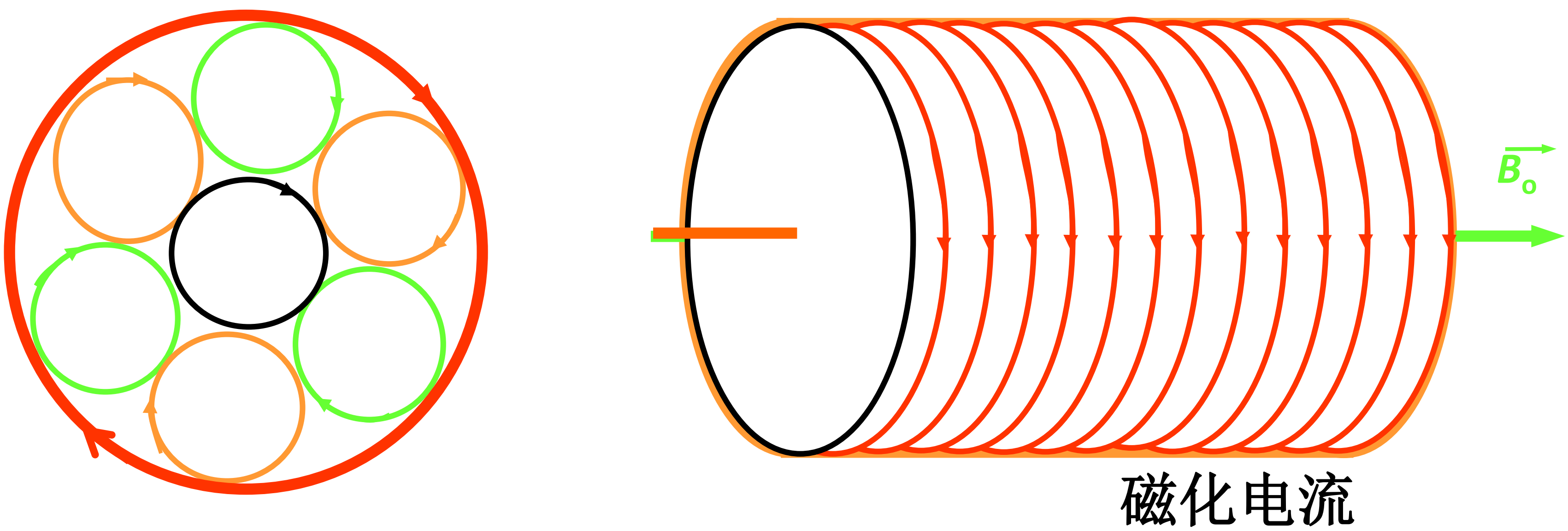


顺磁质的磁化



在外磁场中，转向磁化效应，产生附加磁场 B’，结果使介质内部磁场增强。 $B=B_o+B'>B_o$

（2）磁化电流的形成(以顺磁质为例)。



考虑和这些磁矩相对应的分子电流,可以发现：在均匀磁介质内部，各处电流的方向总是有相反的,结果相互抵消。

只有在横截面边缘处，分子电流未被抵消,形成与横截面边缘重合的一层圆电流。这种电流叫做磁化电流。

关于磁化电流：

（1）分子有序排列的宏观效果，没有带电粒子的宏观定向运动；

（2）对于各向同性的均匀磁介质，磁化电流只分布在磁介质的表面上；

（3）磁化电流可用面电流密度矢量$\vec{j}'$表示：其大小为在磁化电流垂直方向上单位长度的磁化电流，其方向为该点磁化电流方向：

$$\mathrm{j}' = \lim_{\Delta L\to 0}\frac{\Delta I'}{\Delta L}$$

3　磁化强度矢量

为了描述磁介质磁化的程度，引入磁化矢量$\vec{M}$。它的定义为：磁介质中，单位体积内分子磁矩$\vec{m}$的矢量和，即：

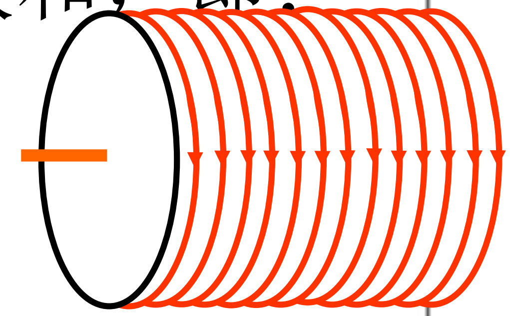
$$\vec{M}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V}$$

磁化强度的大小与材料的性能有关

可以证明：

（1）磁化强度矢量$\vec{M}$沿闭合环路的线积分等于穿过该回路的磁化电流代数和，即：

$$\oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l} = \sum I'$$



（2）磁化电流面密度矢量$\vec{j'}$与磁化强度矢量$\vec{M}$的关系为：

$$\vec{j'} = \vec{M}\times\hat{n}$$

$\hat{n}$为介质表面外法线方向单位矢量。

磁场中有磁介质时，会有磁化电流，磁化电流激发磁场，从而影响原来的外加磁场，那么有磁介质时的磁场怎么表示？

4 、介质存在时的环路定理及“高斯定理”

（1）环路定理：

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o \sum I$$

$\vec{B} = \vec{B}_0 + B'$ 表示外磁场与附加磁场矢量和；

$I = I_o + I'$ 表示传导电流与磁化电流代数和。

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o \sum (I_o + I')$$ （不便使用）

$$\frac{1}{\mu_o}\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \sum I_o + \sum I'$$

$$\because \oint \vec{M}\cdot d\vec{l} = \sum I'$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\mu_o}\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \sum I_0 + \oint \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$\therefore \quad \oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}\right)\cdot d\vec{l} = \sum I_o$$

磁场强度矢量： $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$ $\qquad$ $\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M})$

有磁介质时的安培环路定理

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_o$$

$\vec{H}$的单位：SI中，A/m；Gauss单位制，奥斯特Oe

$$1Oe = \frac{10^3}{4\pi} A/m$$

材料的磁化强度

各向同性磁介质 $$\vec{M}=\chi_{\mathrm{m}}\vec{H}$$

χ_{m} ——磁介质的磁化率，无量纲，对于弱磁质，χ_{m}只与介质有关。

$$\vec{B}=\mu_{\mathrm{o}}(\vec{H}+\vec{M})$$

$$\vec{B}=\mu_{\mathrm{o}}(1+\chi_{m})\vec{H}$$

令 $\mu_r = 1 + \chi_m$ ——磁介质的相对磁导率

$$\vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H}$$

令 $\mu = \mu_o \mu_r$ ——磁介质的绝对磁导率，简称磁导率。

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

对于真空：

$$\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{M} = 0$$

$$\therefore \quad \vec{B} = \mu_o \vec{H}$$

$\therefore \quad \mu_o$叫真空磁导率，相当于真空的$\mu_r = 1$

（2）高斯定理：

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

$\vec{B}$是总磁感应强度矢量，包括外磁场与附加磁场。

电介质和磁介质相关性能总结

电介质	磁介质
电偶极子	分子电流
极化电荷	磁化电流
极化强度 P	磁化强度M

电介质	磁介质
$\sigma' = \vec{P} \cdot \hat{n}$	$\vec{j}_m = \vec{M} \times \hat{n}$
$\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\sum_S q'$	$\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum I_m$
$\vec{P} = \chi_e \vec{E}$	$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$
$\varepsilon_r = (1 + \chi_e)$	$\mu_r = (1 + \chi_m)$

电介质

$$\vec{D} \overset{def}{\equiv} \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

磁介质

$$\vec{H} \overset{def}{\equiv} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_c$$

有介质时磁场的求解

有介质时的环路定理

求得 $\vec{H}$

求得 $\vec{B}$ ： $\vec{B}=\mu_0\mu_r\vec{H}$

5、应用举例

例1、一螺线管环，管半径为r，环半径为R(R>>r)。载流后，内部磁感矢量为$\vec{B}_0$。管内充满磁介质后，磁化矢量为$\vec{M}$，求内部磁感矢量$\vec{B}$。

解：选管中心线为安培环络，则有：

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

设螺线管内电流为I_0，共有N匝，有

$$2\pi R \cdot H = NI_0$$

$$H = \frac{NI_0}{2\pi R} = nI_0$$

因为 $B_0 = \mu_0 n I_0$

所以 $H = \frac{B_0}{\mu_0}$

有 $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M}$

磁场增大的量， 与μ_0有关

方法2：

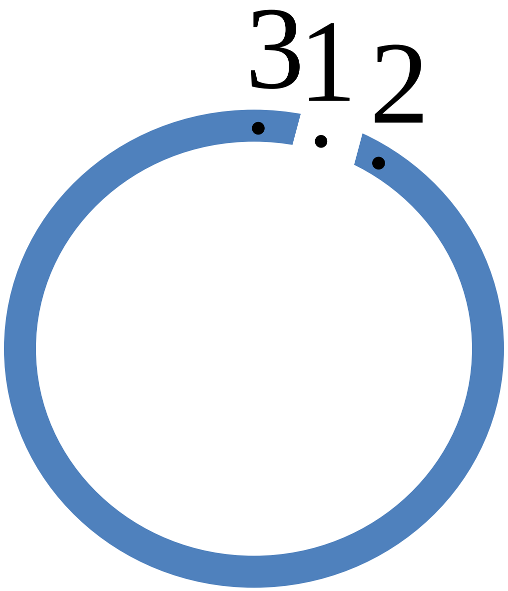
设磁化电流为I

$$nI = j'$$

$$B' = \mu_o nI = \mu_o j' = \mu_o M$$

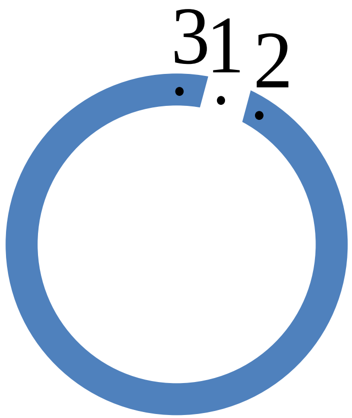
$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_o + \mu_o \vec{M}$$

例2、一带有很窄缝隙的永久磁环，均匀磁化，磁化强度矢量为$\vec{M}$，求图中所标各点的$\vec{B}$和$\vec{H}$。



解：因缝隙很窄，故可看作$nI = j'$的螺绕环。

$\therefore B_1 = B_2 = B_3 = \mu_0 j'$，方向同$\vec{M}$。



由$\vec{j'} = \vec{M} \times \hat{n}$得：$j' = M$

$\therefore \vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \vec{B}_3 = \mu_0 \vec{M}$，由$\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$得：

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} = \vec{M} \qquad \vec{H}_2 = \vec{H}_3 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - M = 0$$

例3、同一螺线管环的管内填满磁介质，前后的自感系数分别为L_0，L。磁介质相对磁导率为μ_r，求比值L/L_0

解：设通过螺线管的电流为I_0

填充磁介质后自感系数之比为：

$$\frac{L}{L_0}=\frac{\psi}{\psi_0}=\frac{BSN}{B_0SN}=\frac{B}{B_0}$$

无介质时：$B_0=\mu_0 nI_0$

有介质时：$H=nI_0 \Longrightarrow B=\mu H=\mu_0\mu_r nI_0$

$$\frac{L}{L_0}=\frac{B}{B_0}=\mu_r$$

在螺线管中填充磁介质后，自感系数增加到原来的μ_r倍。

课本 P 419 例 9.18

- 作业：P436　T9.36　T9.37

本模块的学习目标，您掌握了吗？

- 磁介质有哪些分类？
- 分子电流的概念是什么？
- 有磁介质存在时的环路定理和高斯定理你知道吗？
- 你能够求解磁介质存在时的相关问题吗？

模块2　磁介质特性分析

通过本模块的学习，您将：

- 掌握抗磁质和铁磁质的微观机理；
- 了解铁磁质的特性。

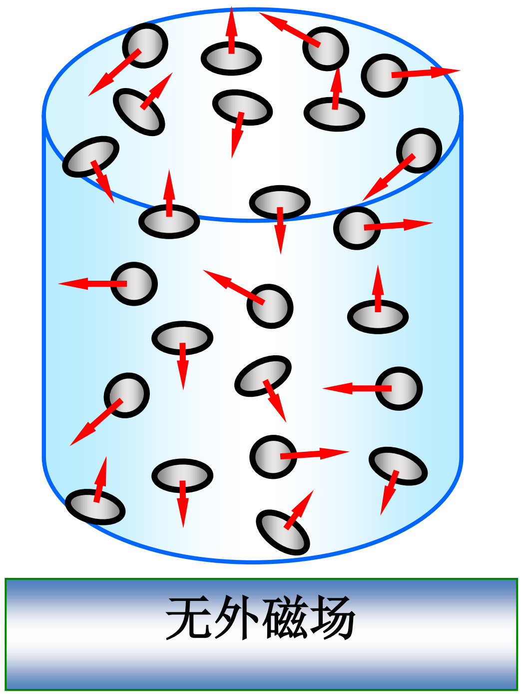
一、一般特性

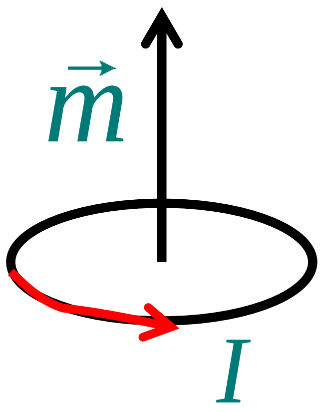
	顺磁质	抗磁质	铁磁质
磁化率χ_{m}	$>\approx 0$	$<\approx 0$	$10^2 \sim 10^6$
相对磁导率μ_{r}	$>\approx 1$	$<\approx 1$	$\gg 1$
$\vec{M}$与$\vec{H}$方向关系	相同	相反	相同
χ_m与$\vec{H}$关系	无关	无关	有关
χ_m与温度的关系	$T\uparrow \chi_m \downarrow$	无关	$T\uparrow \chi_m \downarrow$

1 顺磁质磁化机理

顺磁质：每个分子的固有磁矩不为零，

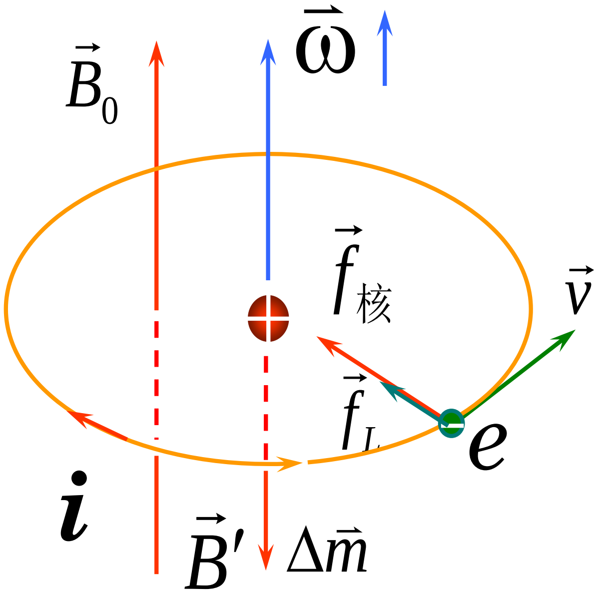
无外磁场作用时，由于分子的热运动，分子磁矩取向各不相同，整个介质不显磁性。





2、抗磁质的磁化

对抗磁介质来说，无外磁场时，各分子的固有磁矩矢量为零，分子不显磁性。



- 加外磁场$\vec{B}_0$后，一个分子中各电子运动情况发生变化。
- 以轨道运动为例，无外磁场时电子的角速度为$\vec{\omega}$，则：$f_{电} = mr\omega^2$
- 外磁场$\vec{B}_0$与$\vec{\omega}$同向：

$$\vec{f}_{心} = \vec{f}_{电} + \vec{f}_L \longrightarrow \vec{\omega}\uparrow \longrightarrow i\uparrow$$

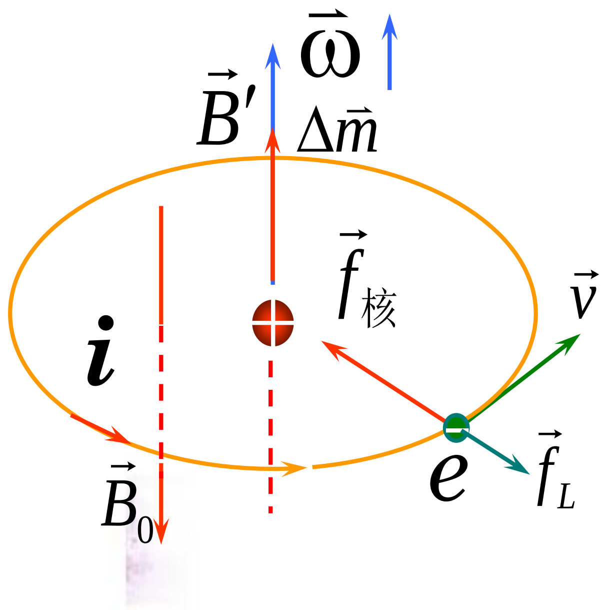
$\longrightarrow$ 产生反向电子附加磁矩$\Delta\vec{m}$ $\longrightarrow$ $\vec{B}'$与$\vec{B}_0$反向

- 外磁场$\vec{B}_o$与$\vec{\omega}$反向：

$\vec{f}_{心} = \vec{f}_{电} + \vec{f}_L$ ➡ $\vec{\omega}$ ↓ ➡ i ↓

➡ 产生反向电子附加磁矩 $\Delta\vec{m}$

➡ $\vec{B}'$与$\vec{B}_0$反向



- 不论外磁场方向如何，附加磁场总与外场反向。实际上$\vec{B}_o$与$\vec{\omega}$成任意角，都是$\Delta\vec{m}$与$\vec{B}_o$反向所以附加磁场$\vec{B}'$与$\vec{B}_o$反向，表现为抗磁性；

- 由于分子固有磁矩为零，附加磁矩方向总是与外磁场反向，因此磁化性质与温度无关。这是对抗磁质磁化性质的定性解释。

3、铁磁质的特性

- 铁磁质：是磁性很强的磁介质。除了铁以外，还有钴、镍、稀土合金等物质。但应用最多的是铁与其他金属或非金属组成的合金，还有一些含铁的氧化物（铁氧体）。
- 特性：

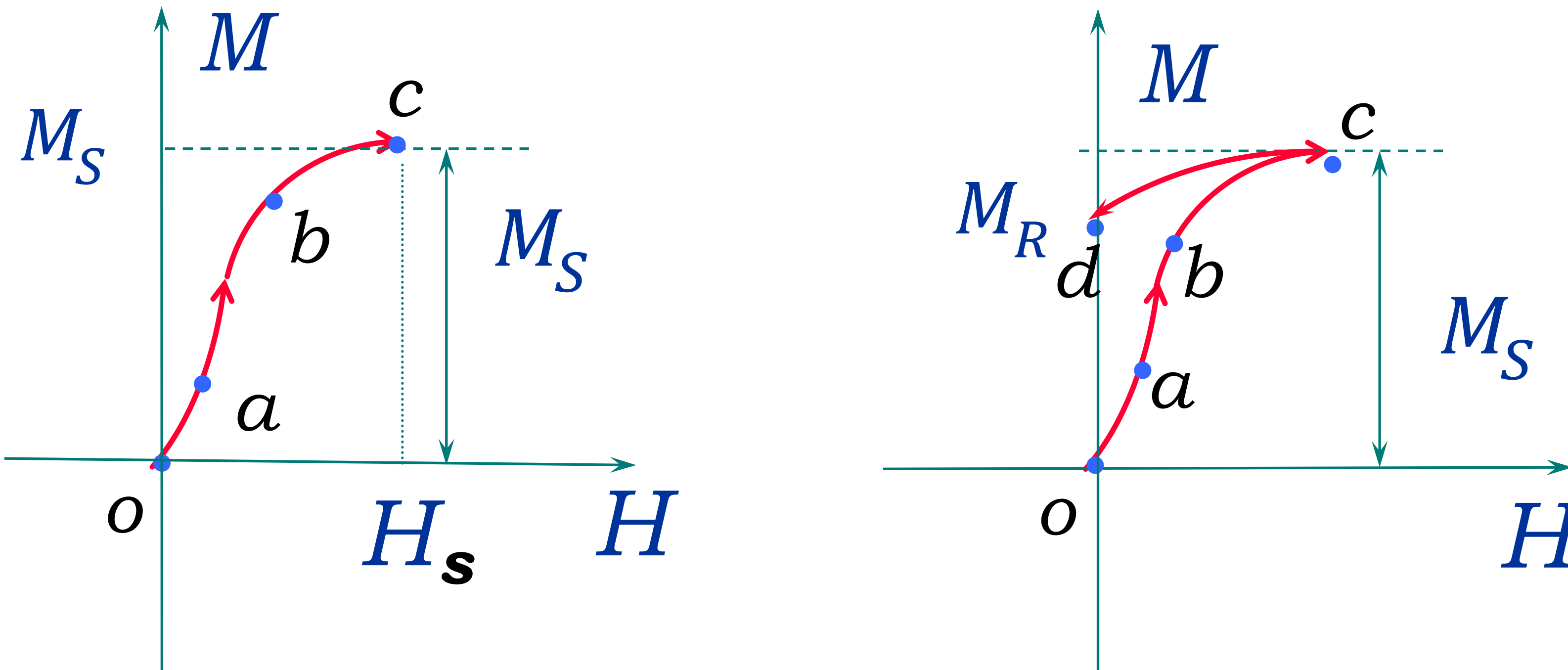
■ 磁化率χ_m、相对磁导率u_r很大，但不是常数，与$\vec{H}$（磁场强度）有关。

■ $\vec{B}'$与$\vec{B}_o$同向，即具有顺磁性。

■ 具有磁滞现象，撤掉外场后，保留一定磁性。

■ 存在居里温度，铁为770℃。在其上变为顺磁质

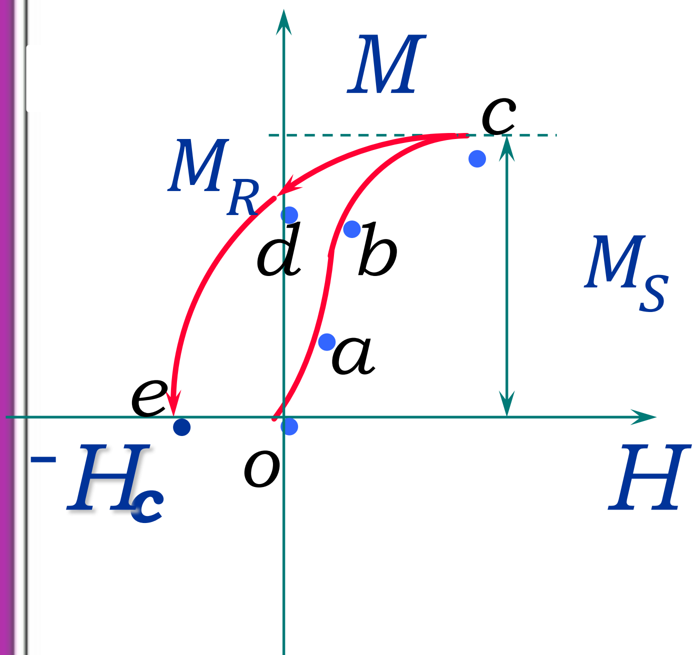
■ 对于顺磁质、抗磁质来说$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$, χ_m为常数。但对铁磁质来说，$\vec{M}$与$\vec{H}$的关系比较复杂。

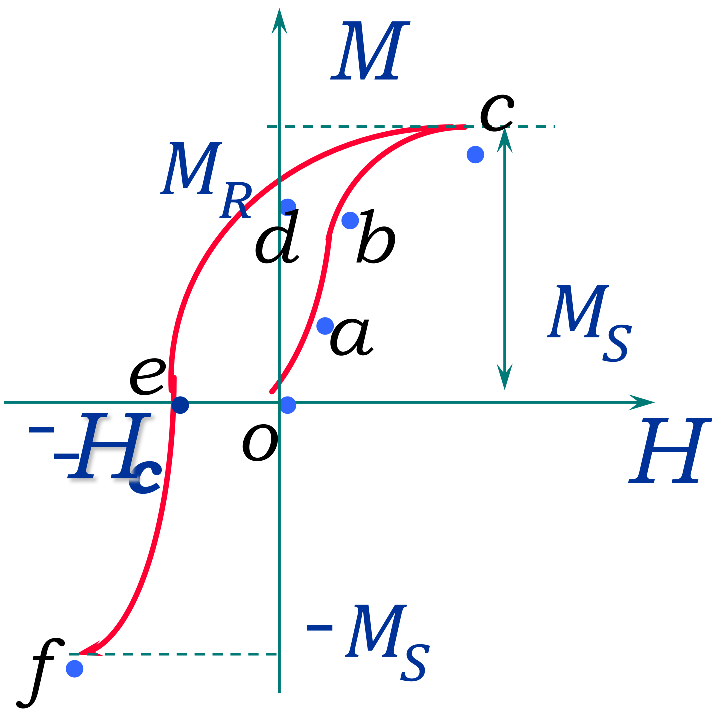


M_S—饱和磁化强度，M_R—剩余磁化强度，

$oabc$—叫起始磁化曲线。

因为M的变化落后H，所以叫磁滞现象。

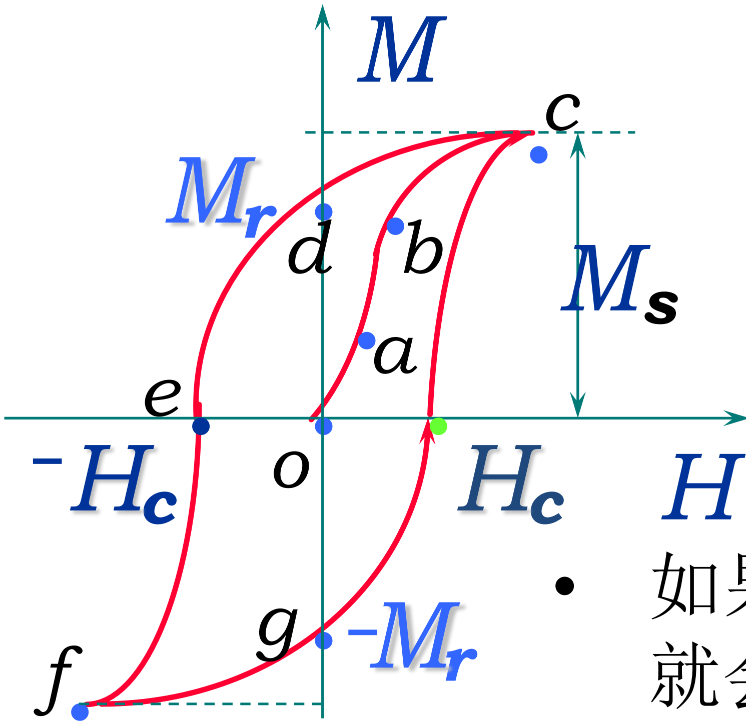


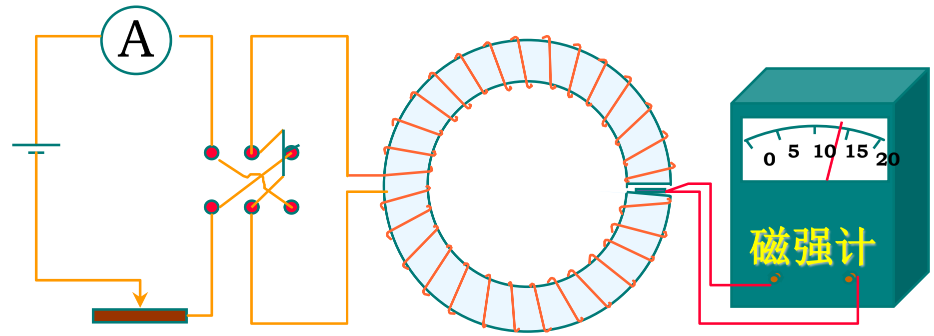


H_C— 矫顽力。

ce ？ 退磁曲线。

M_S—反向饱和磁化强度。



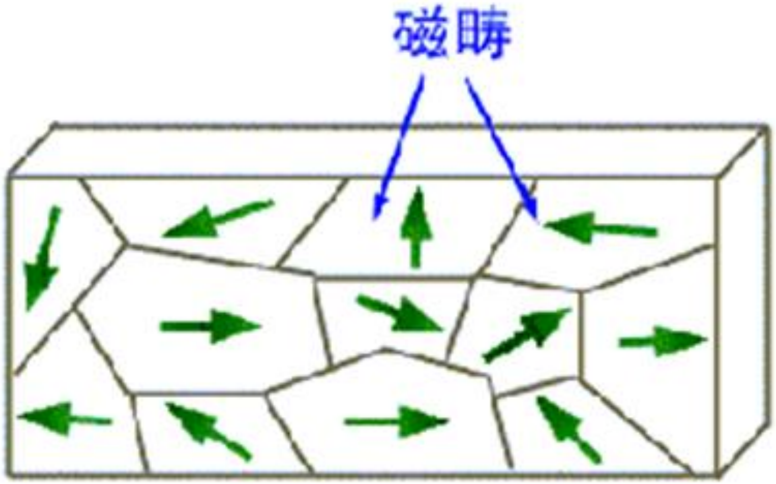


cefgc—饱和磁滞回线。

- 如果M未达到饱和，就使H减小，就会形成另一条磁滞回线，这样的磁滞回线有很多，将顶点连接而成的曲线叫标准磁化曲线。
- 由此可见，M与H的关系不是线性的，而且也不是单值的。即磁化率与H有关，与磁化历史有关。

铁磁介质的微观解释

- 铁原子最外层两个电子自旋相互作用，使得许多铁原子的电子自旋磁矩在许多小的区域内整齐地排列起来，形成一个个微小的自发磁化区，称为磁畴(磁畴的体积约为 10^{-12} m^3)，相邻的不同区域之间原子磁矩排列的方向不同。



在无外磁场时，各磁畴的排列是不规则的，各磁畴的磁化方向不同，产生的磁效应相互抵消，整个铁磁质不呈现磁性。

- 当铁磁质处于外磁场中时，那些自发磁化方向和外磁场方向成小角度的磁畴其体积随着外加磁场的增大而扩大并使磁畴的磁化方向进一步转向外磁场方向。另一些自发磁化方向和外磁场方向成大角度的磁畴其体积则逐渐缩小。这就使得与外磁场方向接近一致的总磁矩得到增加，对外表现出磁化。

- 取消外场时，各磁畴边界未能完全恢复，故保留一定磁性，即有剩余磁化强度存在。

- 当铁磁质的温度升高到某一温度时，分子热运动使磁畴消失，由铁磁质变为顺磁质，该温度叫做**居里点**。当温度低于居里点时，又出现磁畴，由顺磁质转变为铁磁质。

铁磁材料分类和应用

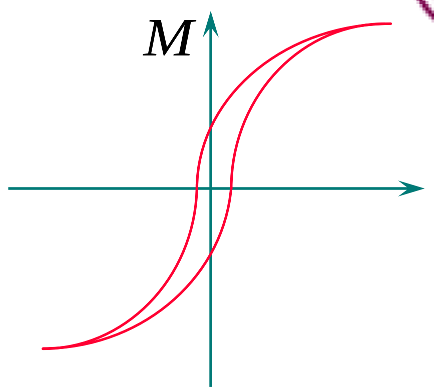
(1) 软磁材料

特点：矫顽力小，磁滞回线窄。

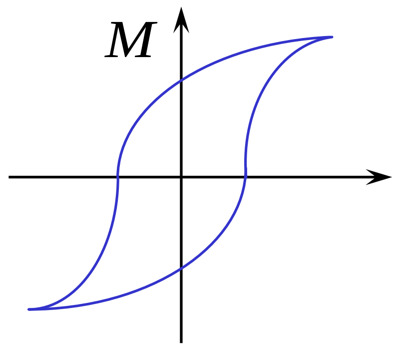
应用：变压器的铁芯。

高频：铁氧体（复合材料，是一种非金属属复合材料）。中频变压器、天线。

低频：硅钢片、纯铁。



(2) 硬磁材料



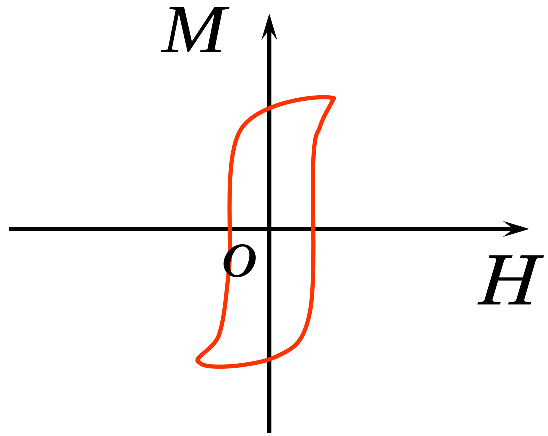
特点：矫顽力大，磁滞回线宽。

应用：作永久磁铁，永磁喇叭；电动机定子。

硬磁性材料如钕铁硼合金、碳钢、铝镍钴合金和铝钢等。

(3)矩磁材料

特点：剩余磁化强度大，接近饱和磁化强度，矫顽力小，磁滞回线接近于矩形。



应用：磁性存储器。

- 铁磁质反复磁化，分子运动加剧，温度升高，因此放出热量，损失能量，叫**磁滞损耗**——与磁滞回线围成的面积成正比。

本模块的学习目标，您掌握了吗？

- 你知道顺磁质、抗磁质和铁磁质的微观机理吗？
- 铁磁质有什么特性？

模块三　磁场边界条件与磁能

通过本模块的学习，您将：

- 掌握磁场和电场的边界条件；
- 掌握磁场的折射定律，了解磁屏蔽；
- 掌握磁场能量的求解。

在两种磁介质的分界面上，不论磁感矢量还是磁场矢量穿过分界面时要发生变化，它们要满足确定的关系式，这些关系式称为磁场的边界条件。

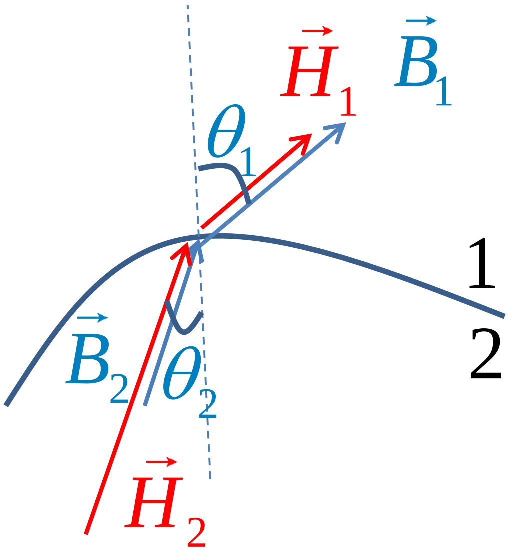
磁场和电场的边界条件

磁场的边界条件

（1）磁感应强度矢量的法向分量连续。

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$



（2）如边界上不存在传导电流，则磁场强度的切向分量连续。

$$H_{1t} = H_{2t}$$

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{n} = 0$$

- 设两种不同的磁介质μ_1、μ_2，其分界面的法线方向为n。在分界面上作一小圆柱形表面，两底面分别位于介质两侧，底面积为 ΔS ，h为无穷小量。

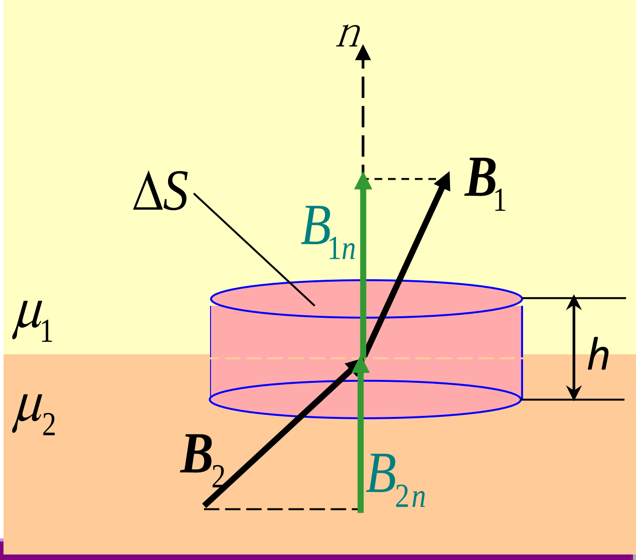
Gauss定理： $\oiint \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$

因为高度无限小，只考虑上下两面的积分。

$$\oiint \vec{B}\cdot dS=\oiint \vec{B}_1\cdot d\vec{S}+\oiint \vec{B}_2\cdot d\vec{S}=0$$

$$\therefore \vec{B}_1\cdot\hat{n}\Delta S+\vec{B}_2\cdot(-\hat{n})\Delta S=0$$

即：$\vec{B}_1\cdot\hat{n}=\vec{B}_2\cdot\hat{n},\quad$ 或 $B_{1\mathrm{n}}=B_{2n}$



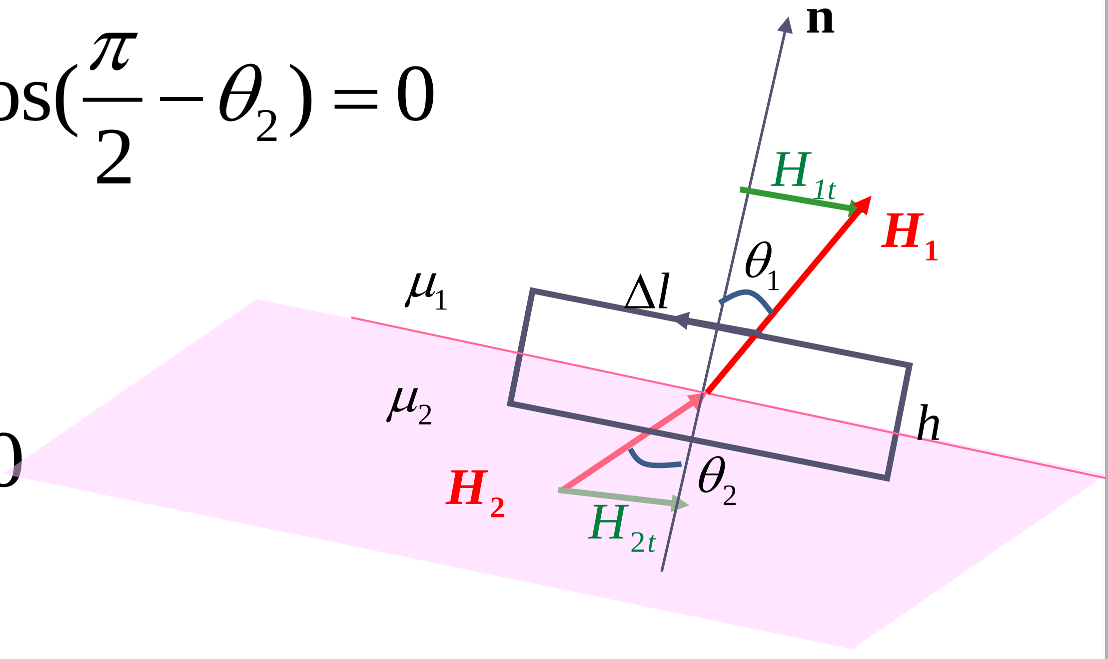
- 在分界面上作一小的矩形回路，逆时针，其两边Δl分居于分界面两侧，而高$h \to 0$，根据安培环路定理： $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$

$$H_1 \cos(\frac{\pi}{2} + \theta_1) + H_2 \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_2) = 0$$

即：

$$H_1 \sin\theta_1 - H_2 \sin\theta_2 = 0$$

$$\boxed{H_{1t} = H_{2t}}$$



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_o$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M})$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

$$\vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H}$$

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{n} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

电场的边界条件

（1）如果两种电介质的分界面上没有自由电荷，则电位移矢量的法向分量连续。即：

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

（2）如果两种电介质的分界面处没有变化的磁场，则电场强度矢量的切向分量连续。即：

$$E_{1t} = E_{2t}$$

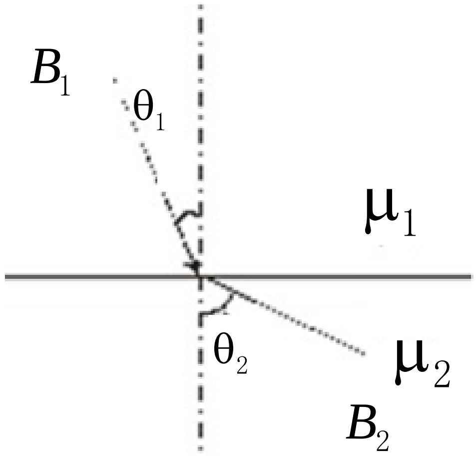
$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n} = 0$$

二、磁场折射定律

磁场的边界条件：

$$B_1\cos\theta_1 = B_2\cos\theta_2 \qquad H_1\sin\theta_1 = H_2\sin\theta_2$$

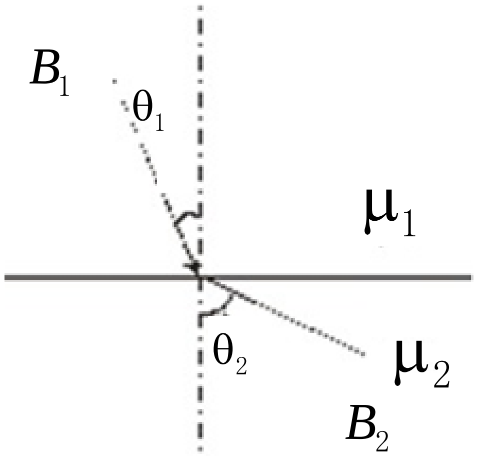
$$\frac{H_1}{B_1}tg\theta_1 = \frac{H_2}{B_2}tg\theta_2 \qquad \frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{H_2}{B_2}\frac{B_1}{H_1}$$



由 $B=\mu H$ 得：$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

折射定律：在两种磁介质的分界面上，磁场与分界面法线夹角的正切之比，等于分界面两侧磁介质的磁导率之比。

若介质1为铁磁质（μ_1很大）。介质2为空气（μ_2很小），则由$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$知，$\theta_1\to\frac{\pi}{2}$，$\theta_2\to 0$。



- 铁磁质与空气的分界面处铁磁质一侧，磁感矢量几乎与分界面平行。
- 磁感矢量几乎集中在高磁导率的铁磁质内，很难穿过分界进入空气。
- 高磁导率的磁介质具有把磁力线集中在自己内部的能力。（导体对电场也有类似结论）
- 铁磁质做的变压器漏磁很小。

三、磁屏蔽

若用铁磁质（例如熟铁）围成一个封闭的空腔，由于铁磁质的磁导率很高，因此具有汇聚磁力线的作用。

- 因此空腔外面的磁力线难于穿过腔壁进入腔内，使腔内免受腔外磁场的影响；
- 若空腔内存在磁场，那么磁力线也不易穿出腔壁，因而腔外空间免受腔内磁场的影响，这就是磁屏蔽。

三、磁场能量

已知线圈的自感系数L，电流稳定后通过线圈的电流为I，线圈的电感储能：

$$\boxed{W=\frac{1}{2}LI^2}$$

线圈通有电流后产生磁场，而磁场是具有能量的。也就是说，能量是分布在磁场中的。

电场的能量怎么表示?

$$W = \omega V = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}V$$

目标： 将W用描述磁场的量B，H来表示

已知：以细螺绕环为例：内部介质的磁导率为μ，环半径为R，电流为I，截面积为S，匝数为N。螺绕环内的磁感应强度为B，磁场强度为H。

解：

全磁通为：$\psi = NBS = 2\pi RnBS = nBV$

V为螺绕环的体积，也就是磁场的体积。

$$\psi = LI$$

$$\therefore \quad LI = BnV$$

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}BnVI$$

管内磁场强度为：$H = nI$

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}BnVI = \frac{1}{2}BHV$$

由于细螺绕环的磁场全部集中在管内，而且管内磁场强度、磁感应强度的大小是均匀的，所以单位体积磁场的能量为：

$$\omega_m = \frac{1}{2}BH$$ ——**磁场能量密度**

这一结论由特例得到，但适合于任意磁场。

磁场能量密度：

$$\omega_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

磁场能量：

$$W_m = \iiint\limits_V \omega_m dV = \iiint\limits_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}dV$$

从磁场储能的角度理解两个载流线圈储存的磁场能量：

设线圈1产生的磁场为 $\vec{B}_1$、$\vec{H}_1$ ，线圈2产生的磁场为 $\vec{B}_2$、$\vec{H}_2$ ，则：

$$W_m = \iiint_V \omega_m dV = \iiint_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}dV$$

$$= \iiint_V \frac{1}{2}(\vec{B}_1+\vec{B}_2)\cdot(\vec{H}_1+\vec{H}_2)\ dV$$

$$= \iiint_V \frac{1}{2}\vec{B}_1\cdot\vec{H}_1 dV + \iiint_V \frac{1}{2}\vec{B}_2\cdot\vec{H}_2 dV \rightarrow \text{自感储能}$$

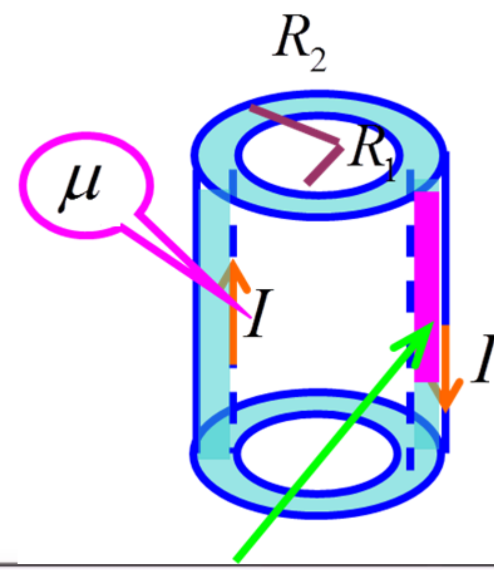
$$+ \iiint_V \frac{1}{2}\vec{B}_1\cdot\vec{H}_2 dV + \iiint_V \frac{1}{2}\vec{B}_2\cdot\vec{H}_1 dV \rightarrow \text{互感储能}$$

NANKAI UNIVERSITY 1919

例：无限长同轴线，内导体半径为R_1，外导体内半径为R_2，已知$R_1 < R_2$，导体之间有磁导率为μ的磁介质,请在下列条件下，分别求单位长度同轴线的自感系数。

（1）内外导体都为薄圆柱面；

（2）内导体为实心圆柱，外导体为薄圆柱面。导体的磁导率为μ'



解：作为同轴电缆，其电流流向一定是，内、外导体一出一入。

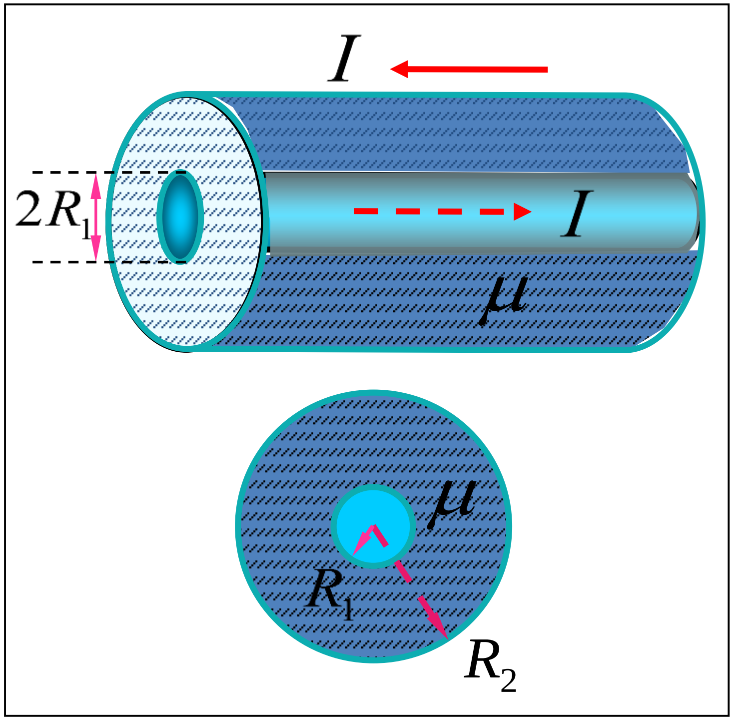
方法一：可由自感系数定义求解：$\psi = LI$

方法二：由磁场分布，求W_m，由$W_m = \frac{1}{2}LI^2$，求L。

我们采用方法二。

（1）由安培环路定律可求 H

$$\begin{cases} r < R_1, & H = 0 \\ R_1 < r < R_2, & H = \dfrac{I}{2\pi r} \\ r > R_2, & H = 0 \end{cases}$$



则 $R_1 < r < R_2$

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2$$

$$= \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

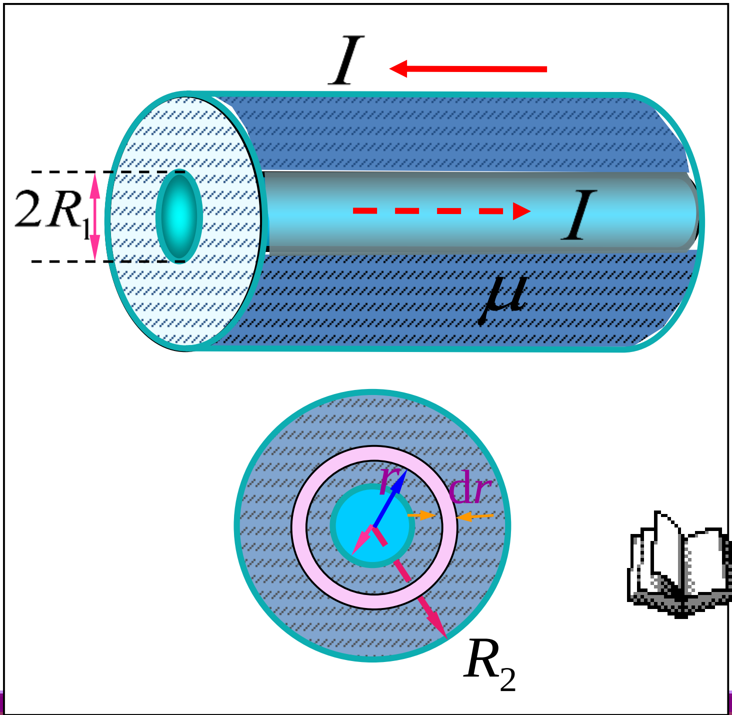
单位长度壳层体积 $dV = 2\pi r dr \cdot 1$

$$W_m = \int \omega_m dV$$

$$\therefore W_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\mu\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu}{4\pi} I^2 \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} L I^2}$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$



（2）当内导体为实心圆柱

除导体间存在相同的磁场，具有相同能量外，内导体内部也有磁场分布，磁场能量应加上这一部分。

$$r < R_1$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{\pi R_1^2} \cdot \pi r^2 = \frac{r^2}{R_1^2} I$$

$$\because \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H \quad \therefore \quad H = \frac{r}{2\pi R_1^2} I$$

$$\Delta W_m = \int_0^{R_1} \frac{1}{2} BH dV = \int_0^{R_1} \frac{1}{2} \mu' H^2 dV$$

$$=\int_0^{R_1}\frac{1}{2}\mu'\left(\frac{r}{2\pi R_1^2}\right)^2\cdot 2\pi r dr=\frac{\mu'}{16\pi}I^2\text{(单位长度)}$$

$$W_m=\frac{\mu}{4\pi}I^2\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{\mu'}{16\pi}I^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{\mu'}{8\pi}\right)I^2$$

又 $W_m=\dfrac{1}{2}LI^2$

单位长度自感： $L_0=\dfrac{\mu}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}+\dfrac{\mu'}{8\pi}$

本模块的学习目标，您掌握了吗？

- 磁场和电场的边界条件是什么？
- 你知道磁场的折射定律及解磁屏蔽吗？
- 你掌握了磁场能量的求解吗？

麦克斯韦方程组

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_o$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

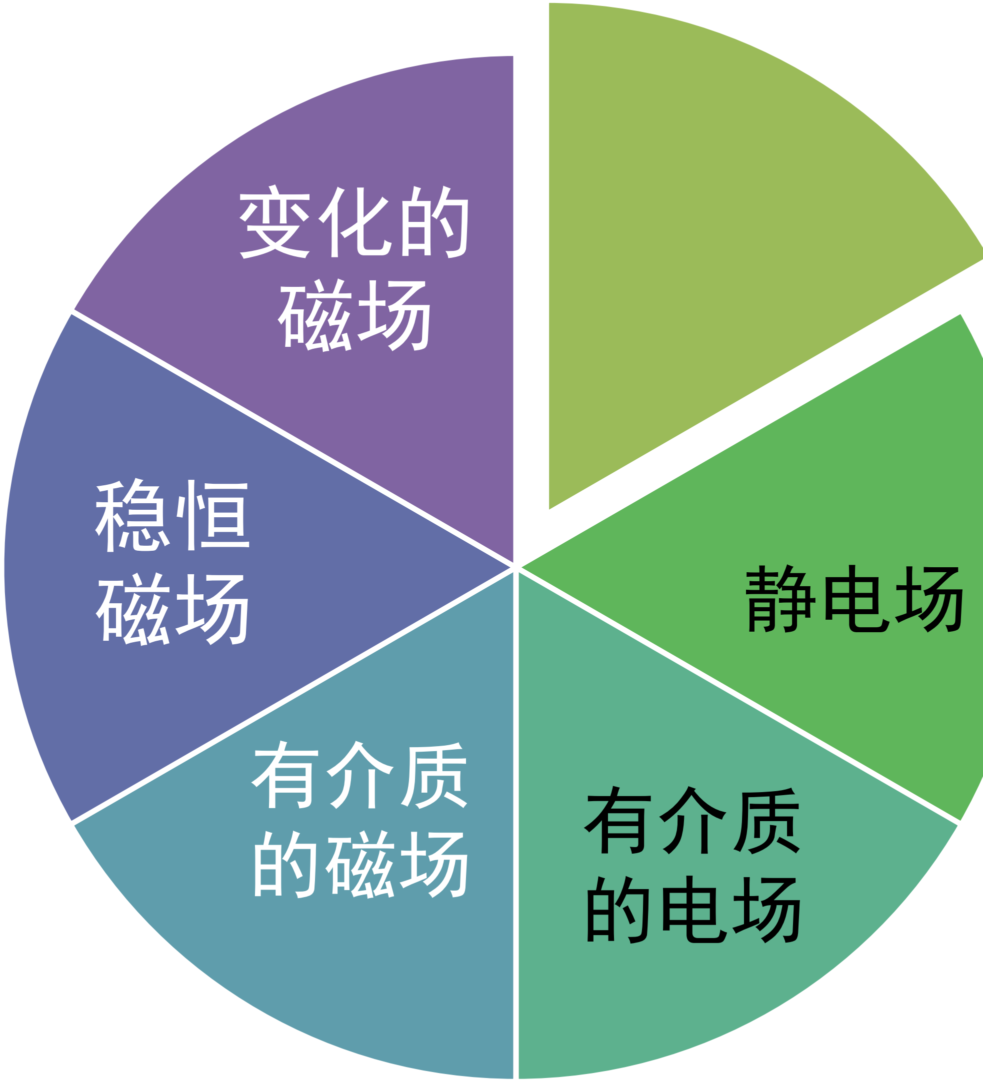
边界条件

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{n} = 0$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n} = 0$$


变化的
磁场
稳恒
磁场
有介质
的磁场
有介质
的电场
静电场