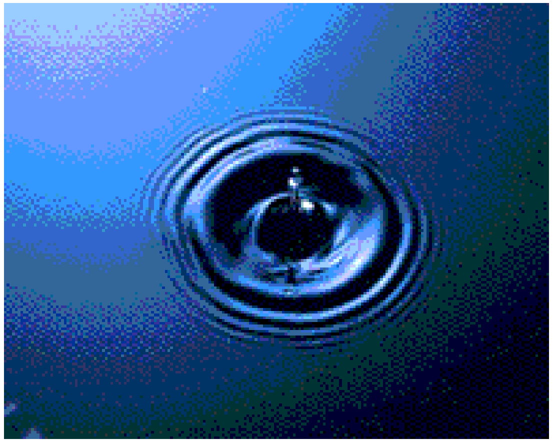
第七章

振　　动

南開大學

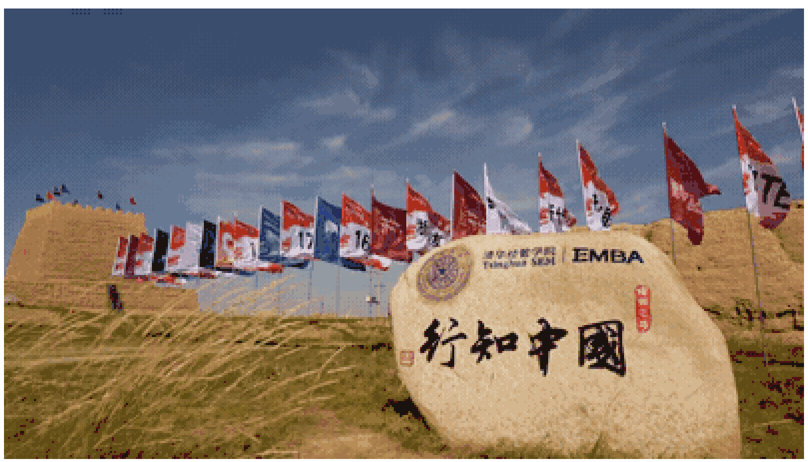
此次课，您将学习：

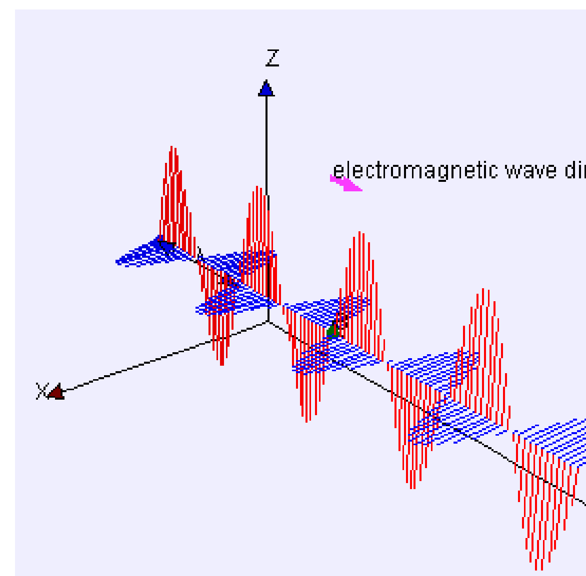
- 简谐振动的运动学方程
- 简谐振动的位相
- 简谐振动的合成



□振动：某一物理量按照一定规律在某一定值附近重复变化的现象。

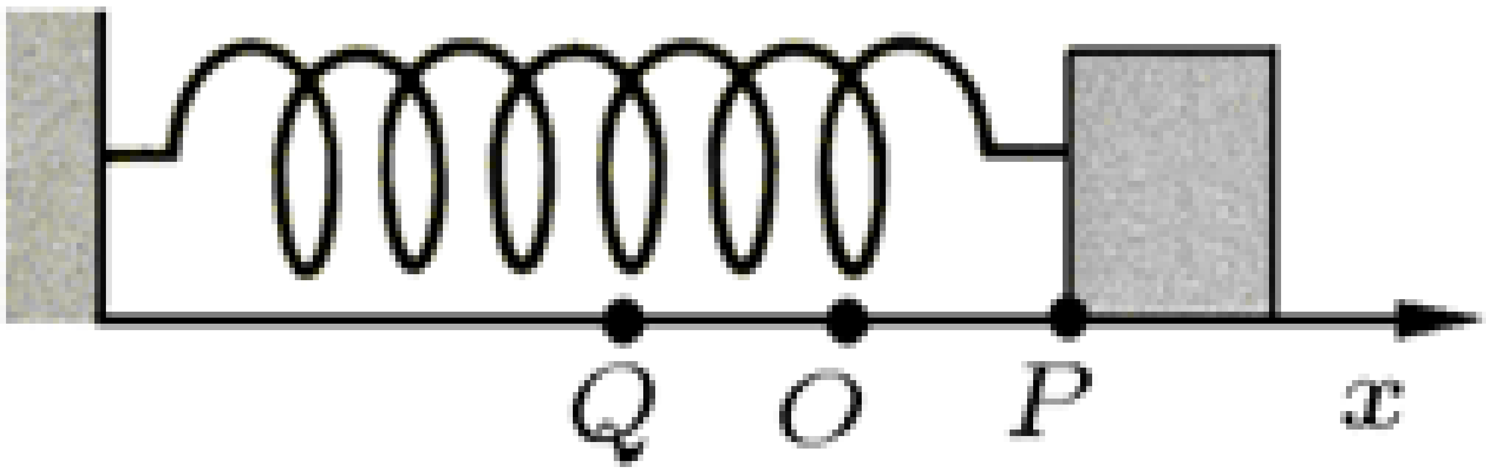
□机械振动：物体沿同一路径在一定位置附近做重复的往返运动。





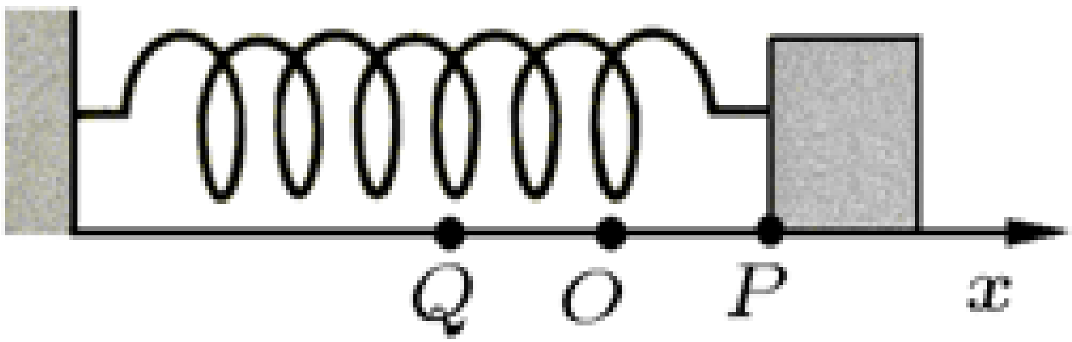
南开大学

物理模型 IV


Q
O
P
x

弹簧振子

- 没有摩擦力
- 弹簧的质量忽略不计
- 在弹簧的弹性范围内



如果有一个外力，将物体拉伸至P点，松开后弹簧振子将如何运动？

周期性运动----简谐振动

描述振动所需的物理量

振幅A：　偏离平衡位置的最大距离

振动的周期T：　完成一个振动所需的时间
（物体在同一位置、速度的方向和大小都相同）

振动的频率：单位时间内完成的振动的次数，
为周期的倒数

多选题 1分

设置

为了使一个物体发生振动，以下哪些选项是必须的？

A 一个稳定的平衡点

B 极少或者没有摩擦

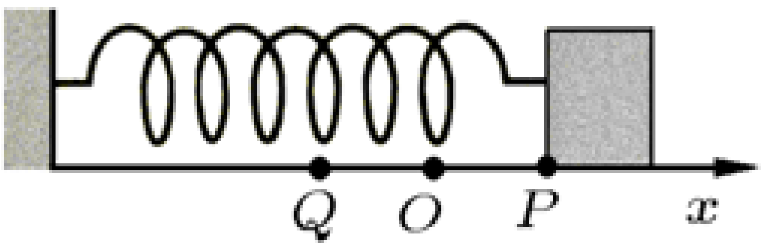
C 一个扰动

提交

什么是运动学方程？

§1.弹簧振子与简谐振动

一、简谐运动的运动学方程



选择平衡位置为坐标原点。

恢复力： $F = -kx$

目标： 求弹簧上物体的运动学方程

牛二定律：

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

令 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ $(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}})$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

求运动方程：x=x(t)

$$\text{令}\, x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$x = A\sin(\omega t + \varphi')$$

如$\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = A\sin(\omega t + \varphi')$$

同一运动

简谐振动的运动学方程：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

◆ 凡是以时间的正或余弦函数表示位移的运动；

◆ 凡是加速度（或角加速度）与位移（角位移）成正比而符号相反的运动；

简谐振动的微分方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

对于不同的振动系统，ω 代表的物理量不同

对于弹簧振子： $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

二、简谐运动的状态参量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

1、周期及频率

$$x = A\cos(\omega t + \varphi + 2\pi)$$

$$x = A\cos[\omega(t + \tfrac{2\pi}{\omega}) + \varphi]$$

振动的周期：

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

振动的周期：

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

振动的频率：

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

角频率（圆频率）：

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}}$$

南开大学

对于弹簧振子

振动的周期：

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

振动的频率：

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

角频率（圆频率）：

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

由振动系统本身性质决定的，故常称为**固有角频率**、**固有频率**、**固有周期**。

例如，心脏的跳动80次/分

周期为

$$T=\frac{1}{80}(\min)=\frac{60}{80}(\mathrm{s})=0.75\,\mathrm{s}$$

频率为

$$\nu=1/T=1.33\mathrm{Hz}$$

动物的心跳频率(参考值,单位:Hz)

大象	0.4~0.5	马	0.7~0.8
猪	1~1.3	兔	1.7
松鼠	6.3	鲸	0.13

昆虫翅膀振动的频率（Hz）

雌性蚊子	355~415
雄性蚊子	455~600
苍　　蝇	330
黄　　蜂	220

§2. 单摆和复摆

单选题 1分

设置

一个人在荡秋千。当这个人在秋千上不动时，秋千以固有频率前后摆动。另外一种情况，当两个人坐在秋千上时，秋千的固有频率（ ）

A 更大

B 相同

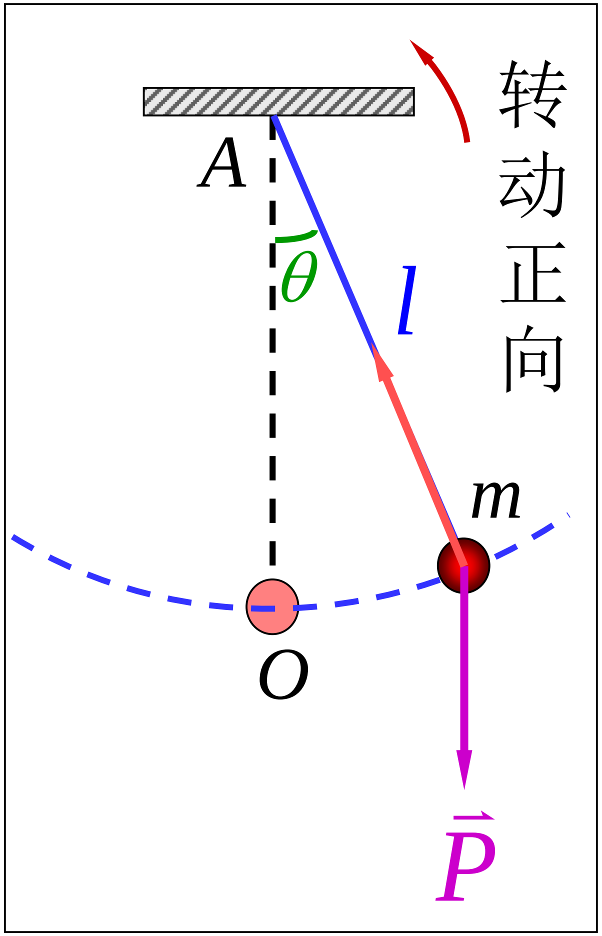
C 更小

D 无法判断

提交

一、单摆

$\theta < 5^{\circ}$ 轻线不可伸长，小球可看成质点，忽略空气阻力。



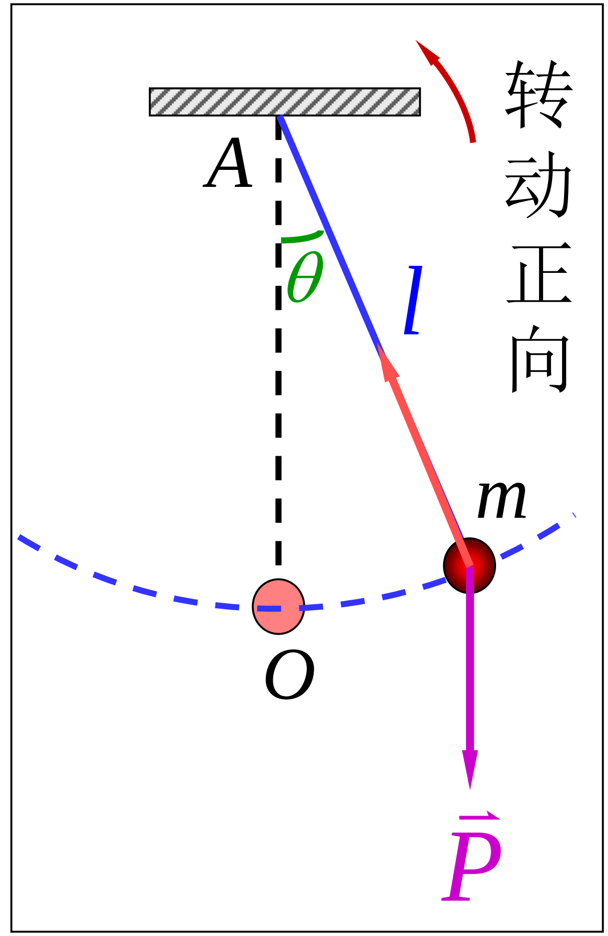
动力学分析：

$$\theta < 5^\circ \text{ 时}, \sin\theta \approx \theta$$

$$M = -mgl\sin\theta \approx -mgl\theta$$

$$\frac{\mathrm{dp}}{dt} = \frac{d(lmv)}{dt} = \frac{d(lm\omega l)}{dt} = ml^2\frac{d\omega}{dt} = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-mgl\theta = ml^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$



$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

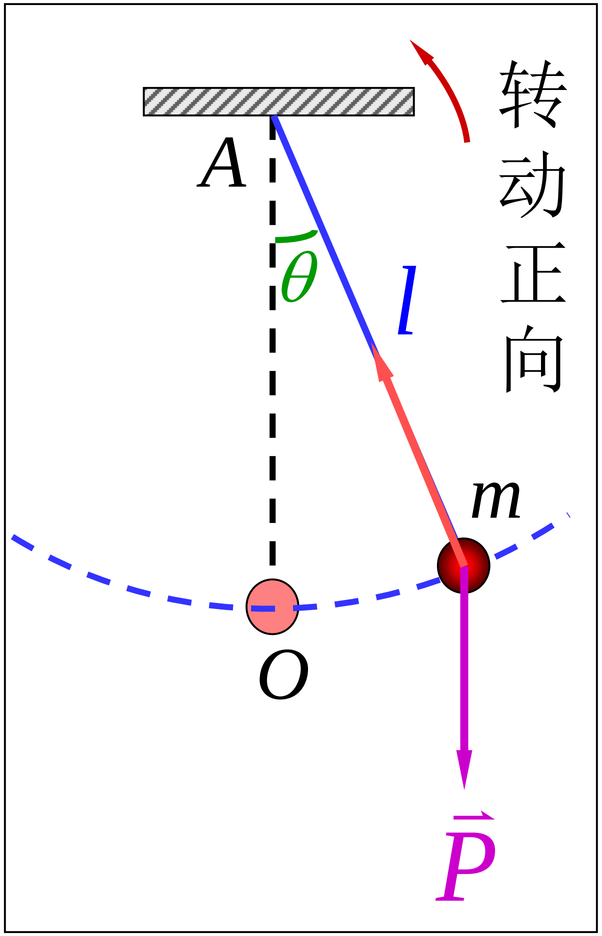
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

令 $\omega^2 = \dfrac{g}{l}$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta$$

$$\theta = \theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



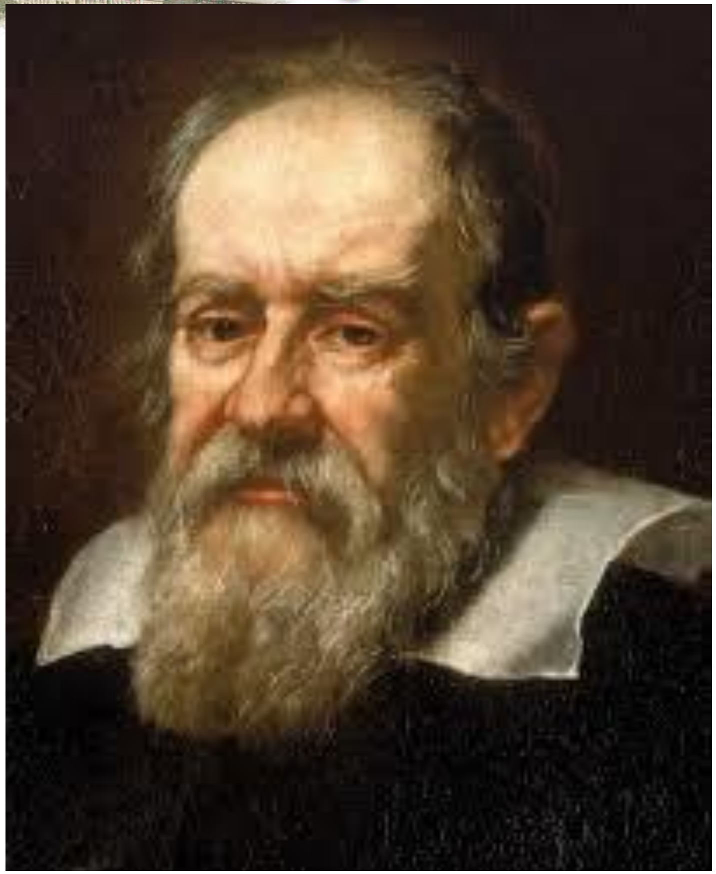
单摆的角频率：

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

单摆的周期：

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

单摆的周期只与绳长有关！



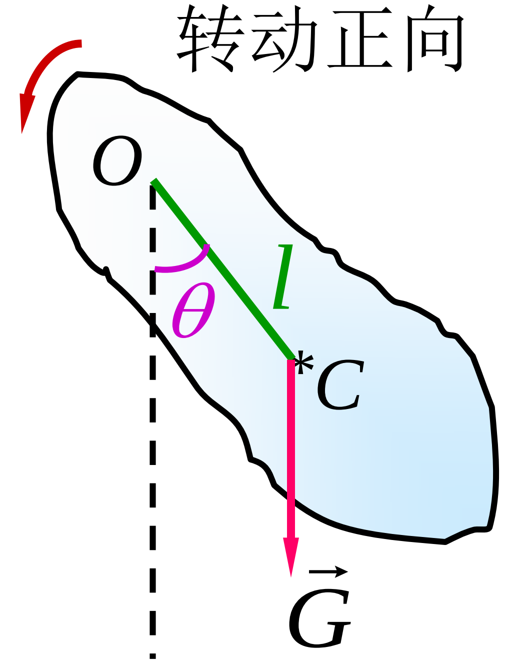
伽利略 意大利
（1564–1642）

惠更斯 荷兰
（1629–1695）

获得了摆钟的专利权

二、复摆

一转动惯量为I的刚体可绕一固定的水平轴（不通过质心）在重力作用下，作微小自由摆动，这样的系统——复摆。



（C点为质心）

θ 很小 （$\theta < 5^\circ$）

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{G}$$

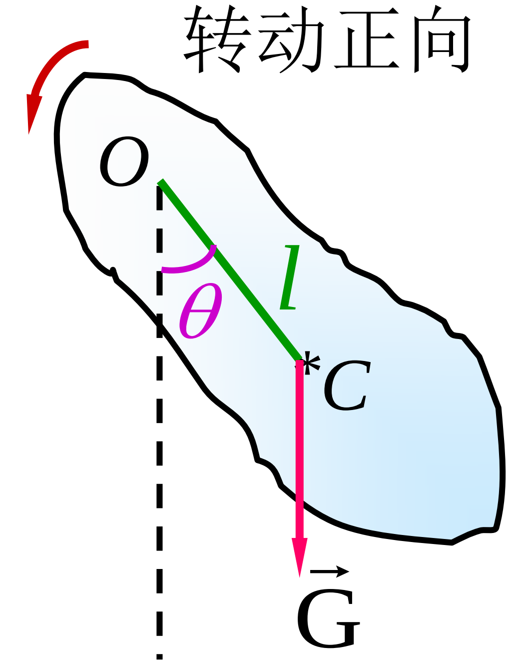
$$M = -mgl\sin\theta \approx -mgl\theta$$

$$M = I\beta = I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$-mgl\theta = I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

令 $\omega^2 = \dfrac{mgl}{I}$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta$$



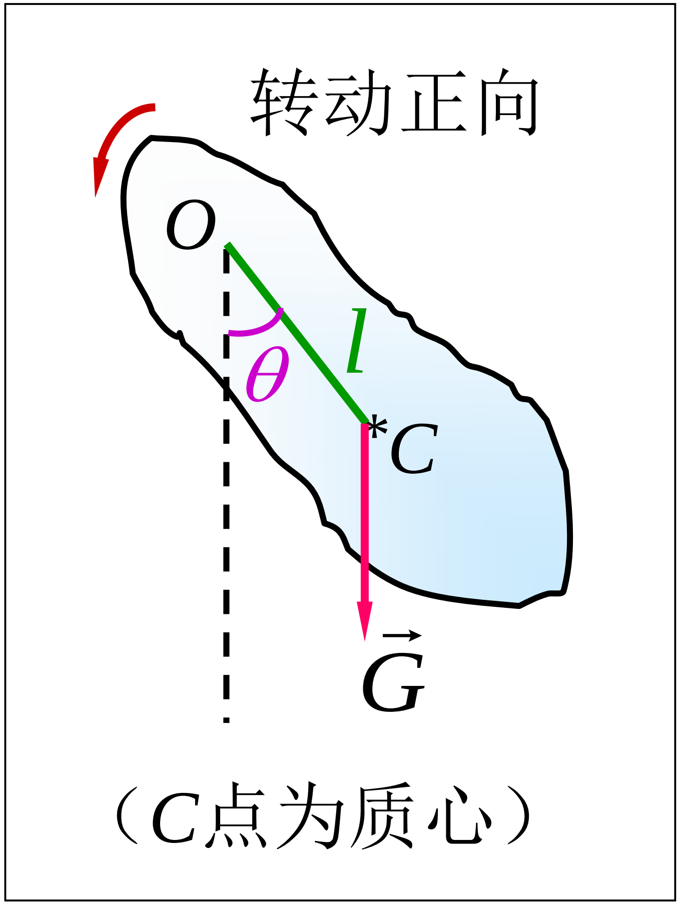
（C点为质心）

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$



$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

角谐振动

复摆的角频率：

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}}$$

复摆的周期：

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

$$\therefore I = \frac{1}{4\pi^2} T^2 mgl$$

这就提供了一种测量不规则物体的转动惯量的方法。

§3. 简谐振动的描述

1、运动学方程

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

2. 周期特点

固有频率： ω

振动的周期： $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega}}$

振动的频率： $\boxed{\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}}$

角频率（圆频率）： $\boxed{\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}}$

3. 运动学方程中，A和 φ 的确定

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A、φ 由振动的初始条件确定

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = \dfrac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

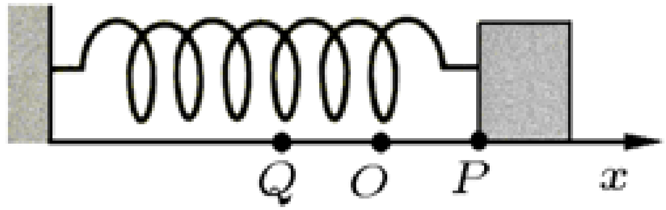
设初始条件： $t=0$时， $x=x_0, v=v_0$

则：
$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^{\ 2} + \dfrac{v_0^{\ 2}}{\omega^2}} \\ tg\varphi = -\dfrac{v_0}{\omega x_0} \end{cases} \qquad (2)$$

- 振幅取正值, φ 一般在$(-\pi,\pi)$之间选取，但在此区间内，有两个值的正切值相同，但只有一个是正确的，需同时满足（1）中两式。

例：



若物体从最大拉伸位置释放，那么初始条件为

t=0时， $x_0 = A_0, v_0 = 0$

解： $$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\cos(\omega t + \phi)\right] = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

由初始条件得：

$$A_0 = A\cos\phi \qquad ①$$

$$0 = -\omega A\sin\phi \qquad ②$$

$$\phi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$$

ϕ一般取为$[-\pi, \pi]$之间

$$\therefore \phi=0$$

物体从最大拉伸位置释放时，运动学方程为：

$$x=A_0 \cos(\omega t)$$

4. 振幅、相位及初相位

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

振幅：运动质点离开平衡位置最大位移的绝对值。

A 振幅

$\omega t + \varphi$ 位相（相位、相位角）

φ t=0时刻的相位——初相位。

对于简谐振动，一个周期内，哪个参数能够体现振动的状态？

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

简谐振动的**状态参量**　A、T(ω、ν)、φ

周期（频率）T：振动的快慢

振幅 A：　　振动的强度

相位 φ　：　振动的状态

单选题 1分

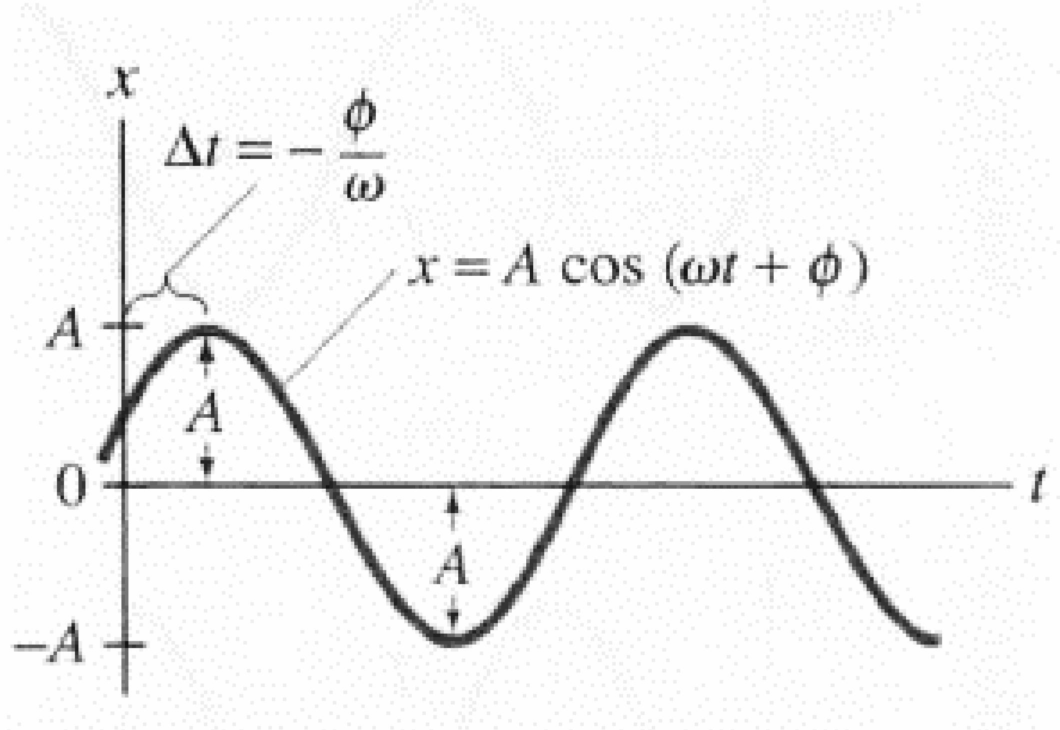
设置

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 的振动曲线，如图所示

请问初位相是正还是负？

A 初位相为正

B 初位相为负



提交

5. 两同频率振动的相位比较

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

两振动相位差：

$$(\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi$$

如$\Delta\varphi > 0$,则振动1超前振动2 $\Delta\varphi$

如$\Delta\varphi < 0$,则振动1落后振动2 $\Delta\varphi$

如$\Delta\varphi$=0,则振动1与振动2同步（或同相）

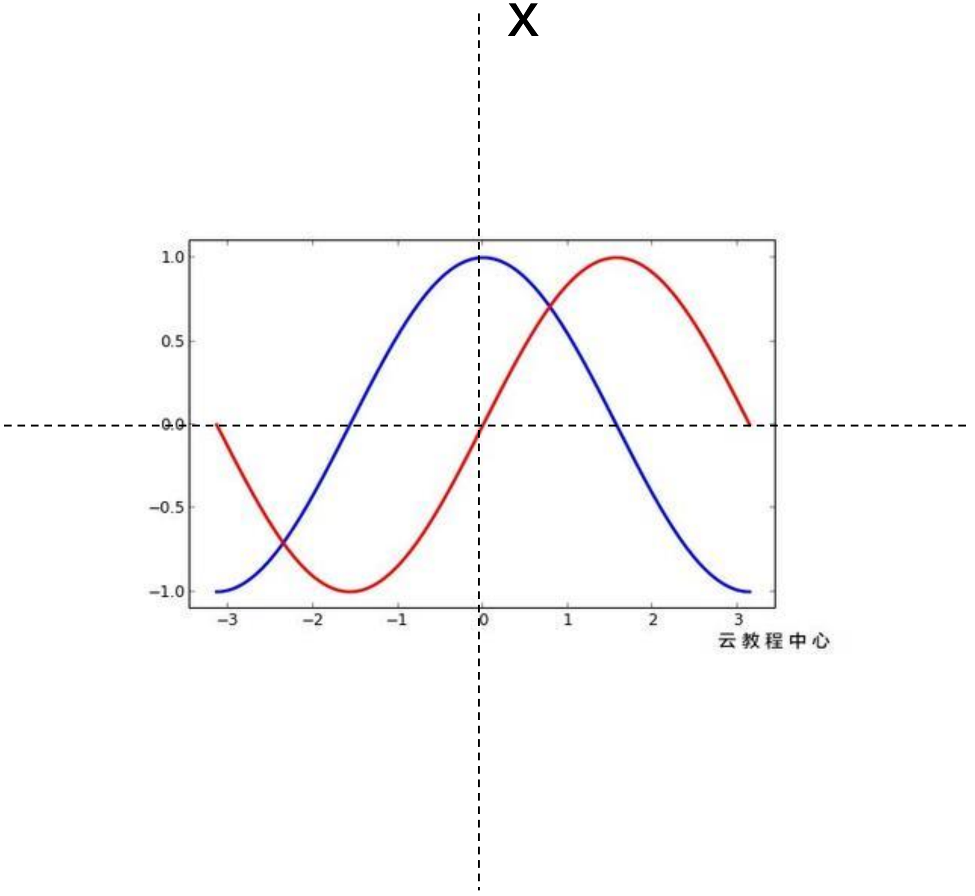
单选题 1分

设置

红线的振动和蓝线的振动，哪个超前？

A 蓝线的振动超前

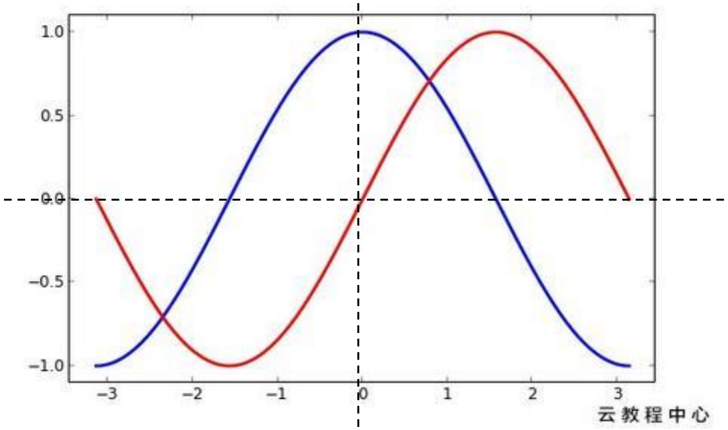
B 红线的振动超前



提交

$$x_b = A\cos(\omega t + \varphi_b)$$

$$x_r = A\cos(\omega t + \varphi_r)$$



$$t = 0, x_b = 1, \qquad \varphi_b = 0$$

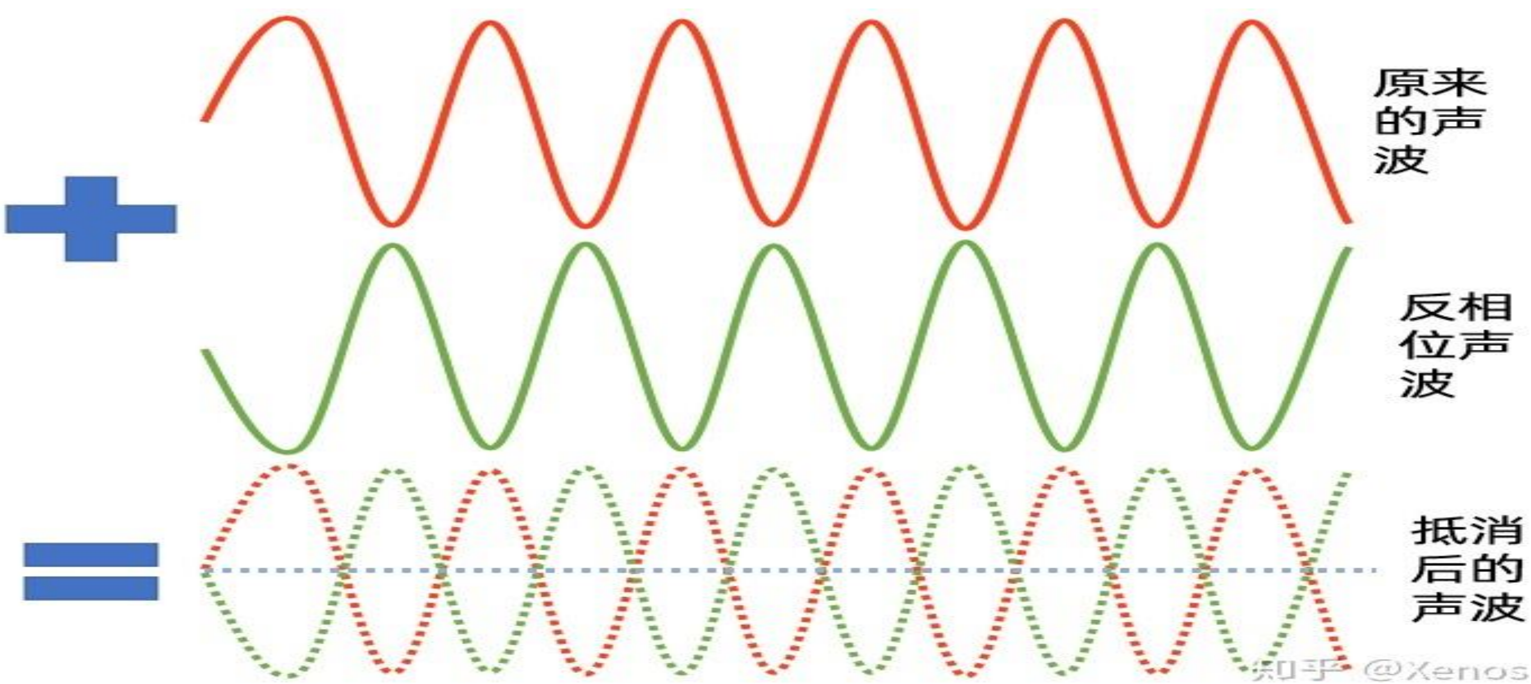
$$t = 0, x_r = 0, \qquad \varphi_r = \pm\frac{\pi}{2}$$

下一时刻， $x_r > 0, \cos(\omega\Delta t + \varphi_r) > 0 \qquad \varphi_r = -\frac{\pi}{2}$

$$\varphi_b - \varphi_r = \frac{\pi}{2} > 0$$

蓝线的振动超前

相位相反（反相）：位相差为 π



必读：

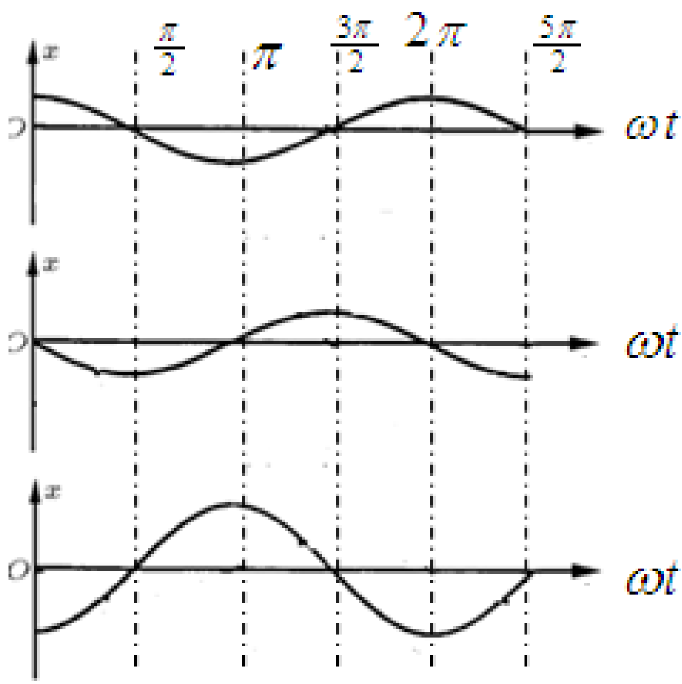
课本　P 236-239：　例 7.1- 7.3

§2.简谐振动的速度和加速度

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$



$$x = A\cos\omega t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin\omega t$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos\omega t$$

§3.简谐振动的能量

在t时刻，弹簧振子的势能：

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

在某一时刻，势能可达最大值 $\frac{1}{2}kA^2$

在某一时刻，势能可达最小值 0

在t时刻，弹簧振子的动能：

$$E_K = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\therefore E_K = \tfrac{1}{2} k^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

在某一时刻，动能可达最大值 $\tfrac{1}{2} k A^2$

在某一时刻，动能可达最小值 0

南開大學

在t时刻，弹簧振子的机械能：

$$E = E_k + E_P$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2$$

- 在任意时刻，弹簧振子的机械能都是 $\frac{1}{2}kA^2$
- 在平衡位置，势能为0，动能达到最值 $\frac{1}{2}kA^2$
- 在最大位移处，动能为0，势能达到最大值 $\frac{1}{2}kA^2$
- 在其他位置，动能和势能都不0，但二者之和是 $\frac{1}{2}kA^2$

单选题 1分

设置

一个无摩擦的弹簧振子的总能量（ ）

A 是个常量

B 取决于振动的振幅

C 以上两个都正确

D 需要更多的条件才能做出判断

提交

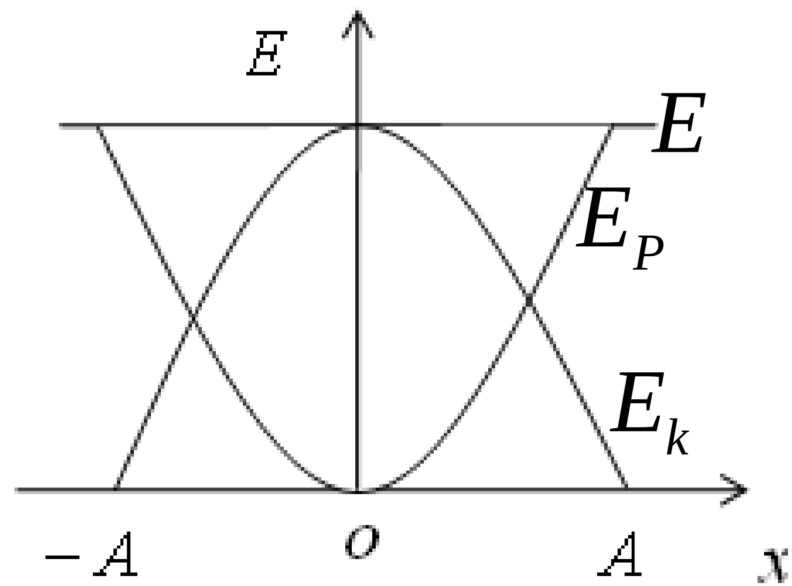
知识运用

已知弹簧振子的弹性系数k，和简谐振动的振幅A，如何知道某一位置x处的速率大小？

$$\because \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\therefore v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2)$$

$$\therefore v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$



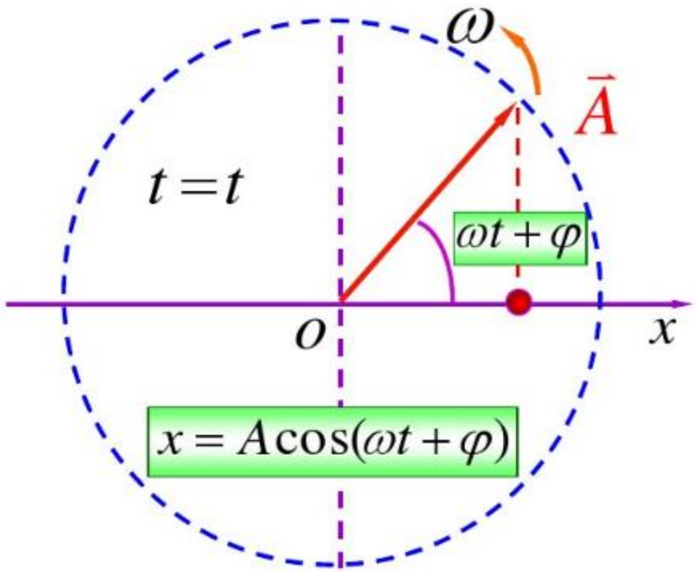
由此式可计算任一位置处速度的大小，实际上就是机械能守恒定律；但速度的方向要根据具体情况确定。

§4.简谐振动的矢量表示法

- 简谐振动的表达式：

  $$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- 振幅矢量 $\vec{A}$ 自t=0开始，以 ω 为角速度，沿逆时针方向匀速转动，在t时刻,与 x 轴成的角为 $(\omega t + \varphi)$ 。



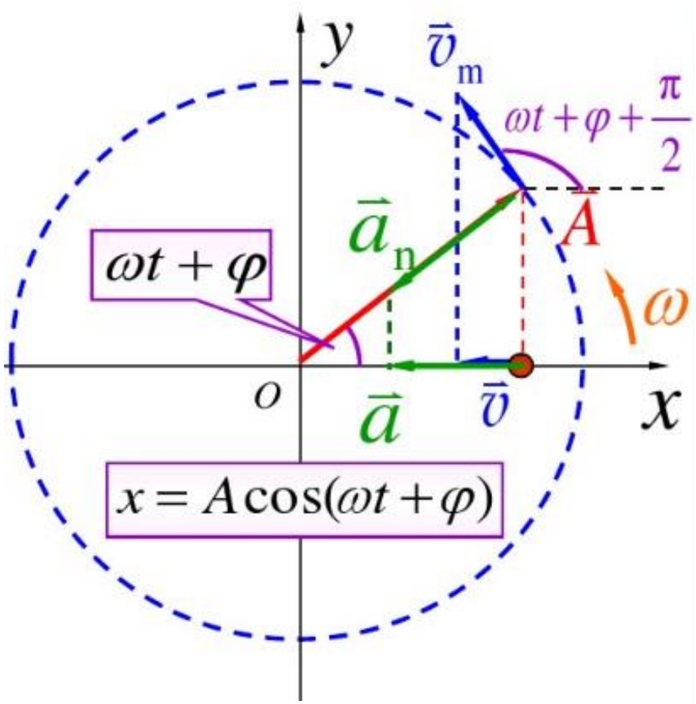
由此可见，其在x轴上的投影为：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

正好是简谐振动的运动方程。

——简谐振动的**矢量表示法**或**几何表示法**。

- $\vec{A}$ 的端点——参考点，参考点的运动轨迹为参考圆，$\vec{A}$叫振幅矢量，参考点在x轴上的投影位置即为质点位置，投影点的运动即为简谐振动。



$$v_\tau = A\omega$$

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a_n = A\omega^2$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

- 简谐振动矢量表示在讨论振动合成时非常有用。

必读

课本 P247　例 7.9

§6.简谐振动的合成

- 两个同方向同频率简谐振动合成规律；
- 了解拍的现象；
- 两个互相垂直的、频率相同或为整数比的简谐振动规律；

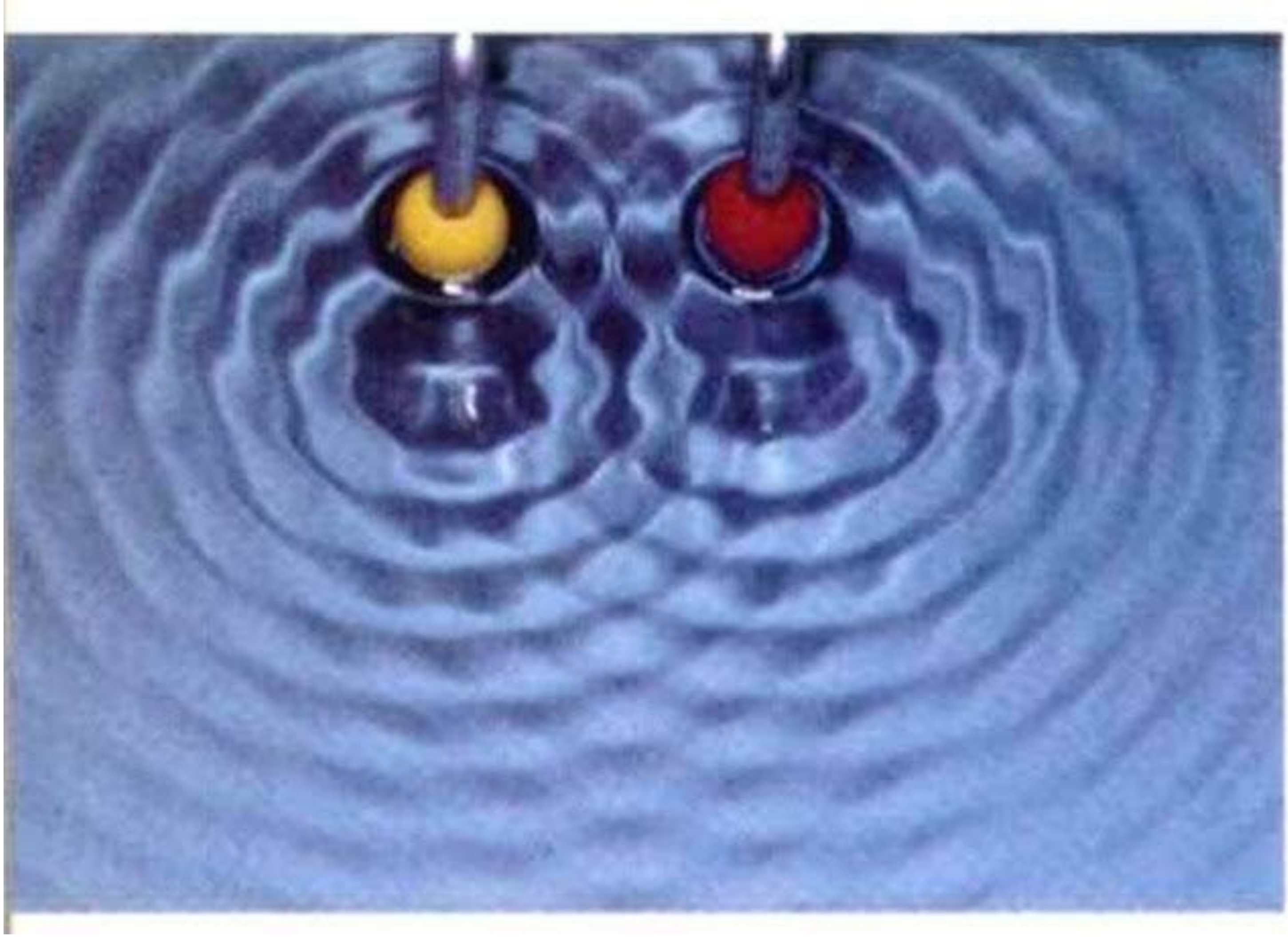
振动满足叠加原理

研究对象：　空间中的一个质点

质点的特点：　质点参与两个简谐振动

分析目标：

质点参与两个振动后，其运动学方程或者运动的轨迹方程



一、同方向同频率的简谐振动的合成

∵两振动在同一直线上，

∴合成位移应为二者的代数和

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$= A_1\cos\omega t\cos\varphi_1 - A_1\sin\omega t\sin\varphi_1$$

$$+A_2\cos\omega t\cos\varphi_2 - A_2\sin\omega t\sin\varphi_2$$

$$= (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t$$

$$-(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t$$

$$令 A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 = A\cos\varphi \cdots (1)$$

$$A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 = A\sin\varphi \cdots (2)$$

$$\therefore x = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t$$

运动学方程： 即 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

由(1)(2)得

$$A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

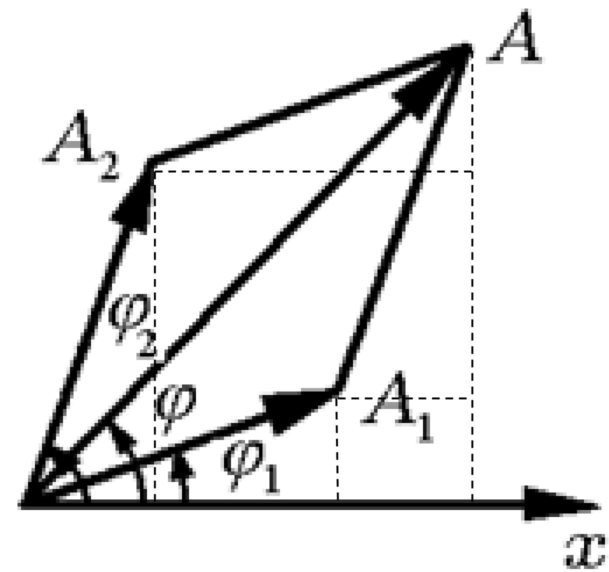
$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

□其实用矢量表示更为简单：

(1) $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi,$

$k=0,1,2\cdots$

$A=A_1+A_2$



(2) $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi,$

$k=0,1,2\cdots$

$A=|A_1-A_2|$

(3) $\phi_2-\phi_1$为其它值，

$|A_1-A_2|<A<A_1+A_2$

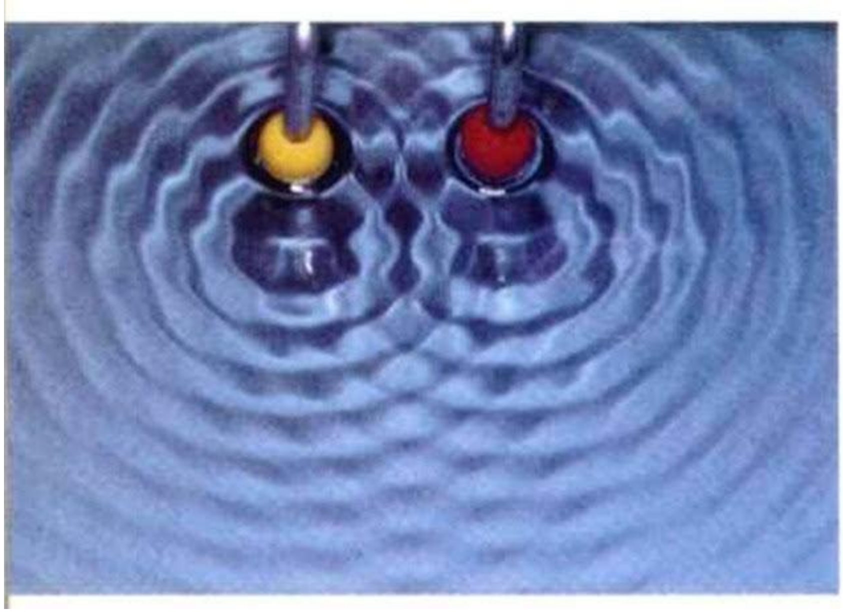
运动学方程： $$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

结论：

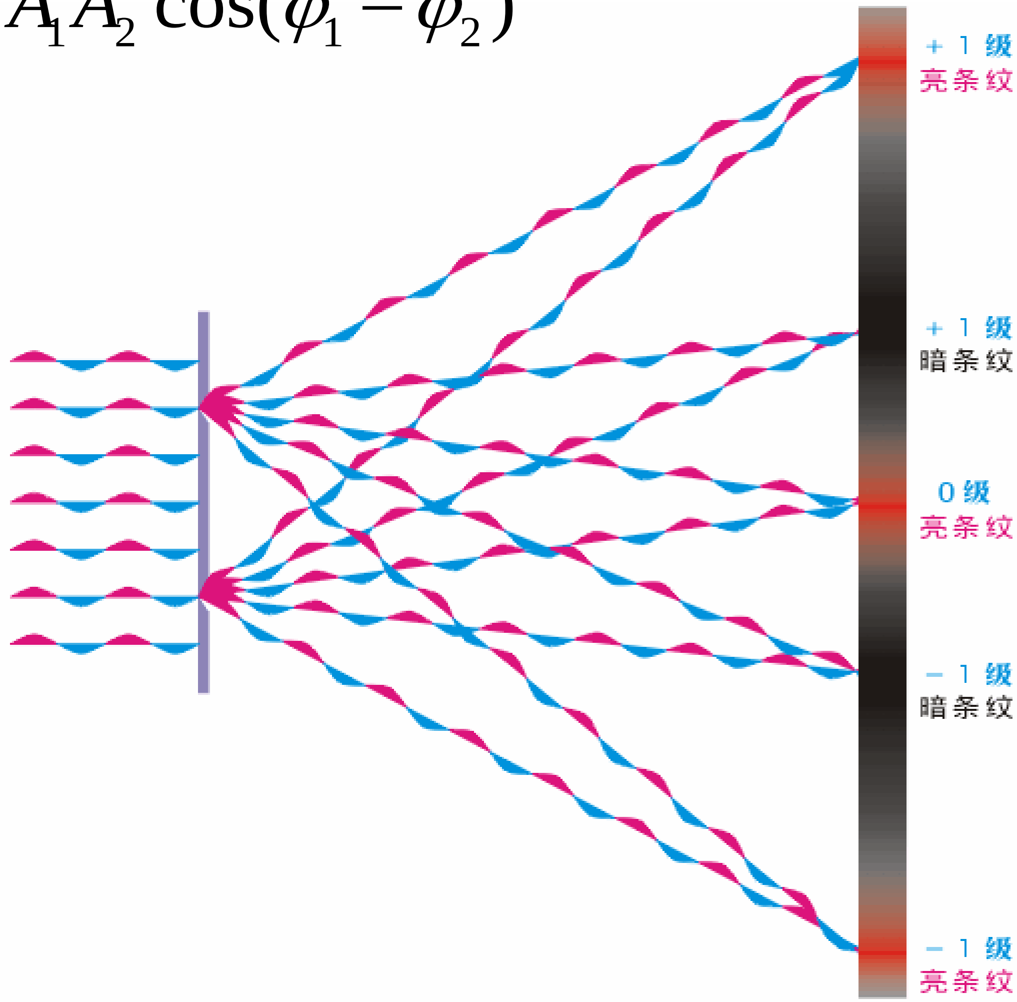
1. **同方向同频率的两个简谐振动合成后，仍是一个简谐振动，且振动方向不变，频率不变。**

2. **振幅的大小取决于两列波的相位差。**



$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$



二、同方向不同频率的简谐振动的合成

请用矢量法判断一下，其是合成的振动是否为简谐振动？

- 为简单，设两振动的振幅相同，初相位相同：

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi) \\ x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi) \end{cases}$$

∵同向：

$$x = x_1 + x_2 = A[\cos(\omega_1 t + \varphi) + \cos(\omega_2 t + \varphi)]$$

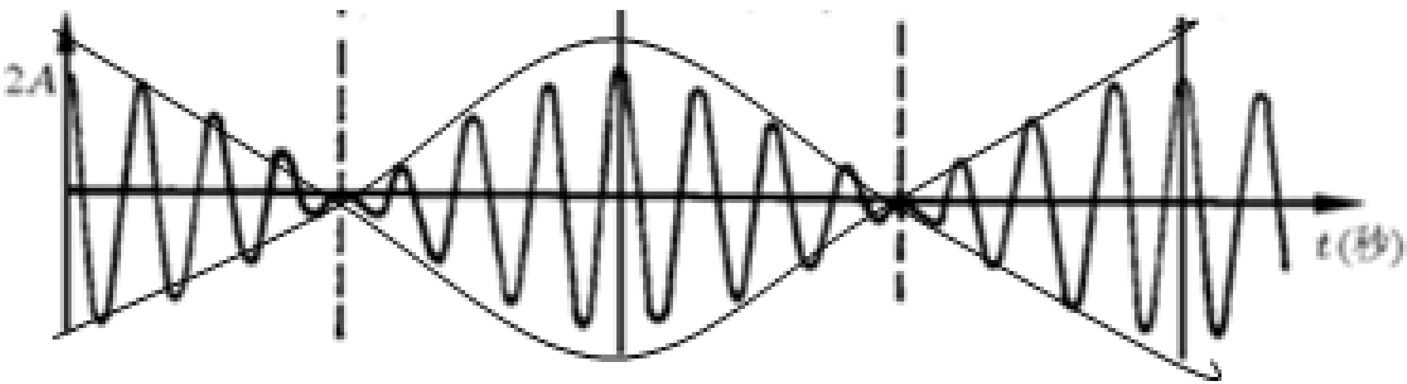
运动学方程：

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right)$$

一般情况下，不易感觉到振幅的周期性变化。

$$x=2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\varphi\right)$$

- 当 ω_1，ω_2 较大，而 $\omega_1-\omega_2$ 很小时，振幅的周期性变化非常明显。



两频率都较大，但频率差很小的同方向的振动合成所产生的合振幅作周期性加强和减弱的振动现象——拍。

- 振幅最大值为2A，最小值为0

- 下面讨论振幅的周期和频率：

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\varphi\right)$$

对余弦函数的绝对值来说，角度变化π，对应一个周期，故：

$$\mathrm{T}' = \frac{\pi}{\left|\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right|} = \frac{2\pi}{|\omega_2-\omega_1|}$$ ——拍的周期

$$\nu' = \frac{1}{T'} = \left|\frac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}\right| = |\nu_2-\nu_1|$$ ——拍频

- 合振动的角频率：$\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$
- 合振动的频率：

$$\nu=\frac{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}{2\pi}=\frac{\nu_1+\nu_2}{2}$$

□拍的应用：

用音叉校准钢琴；

[拍现象_哔哩哔哩_bilibili]

Setting

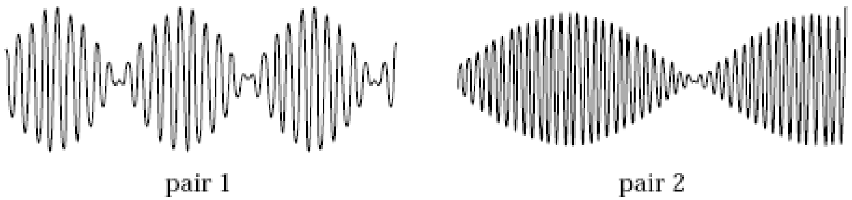
下面的包络线显示了两组不同的有两列振动叠加做成的拍，请问哪一组中两列波的频率差大?

A 第一组

B 第二组

C 两组一样

D 无法确定

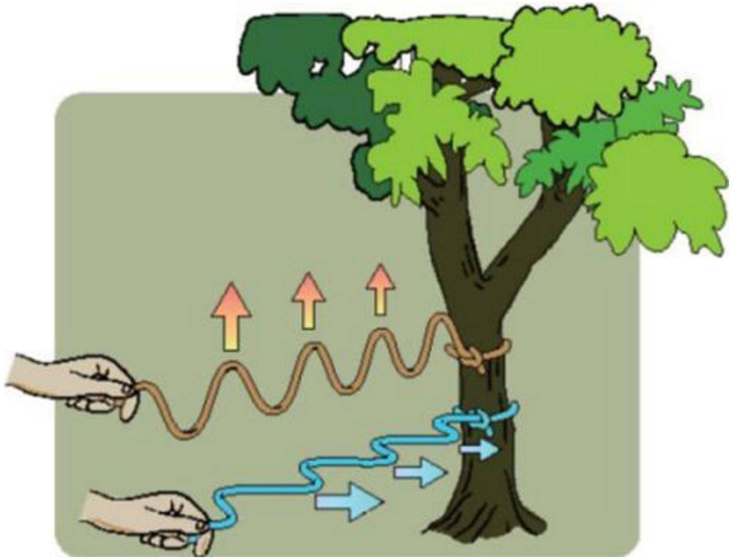


Submit

三、两个互相垂直的同频率的简谐振动的合成

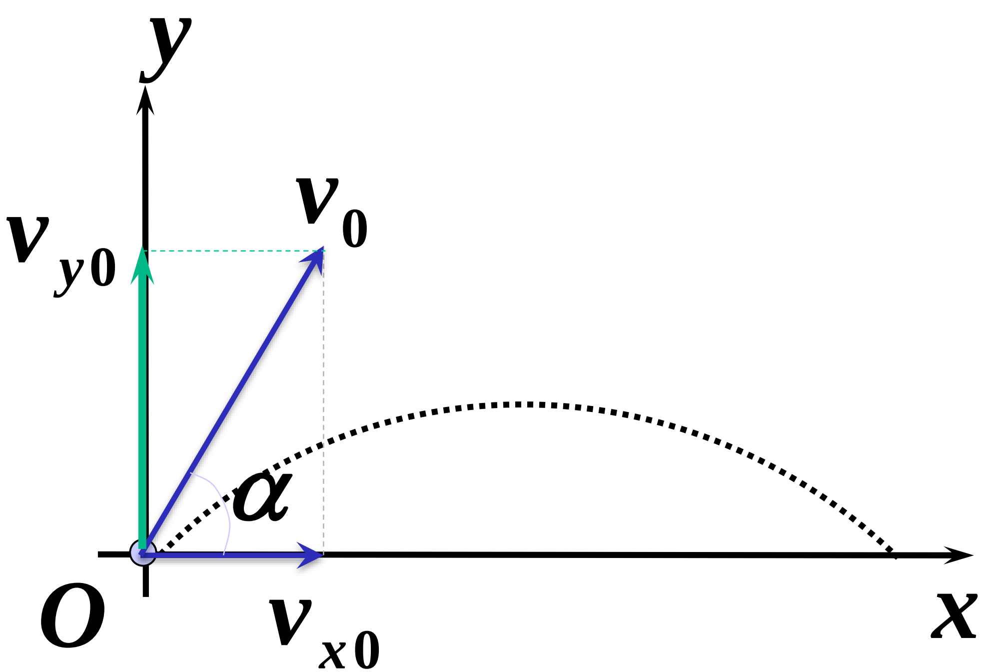
同一质点参与这样的两个振动，质点一般不会在一条直线上运动，而是做平面运动。

$$
\begin{cases}
x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\
y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)
\end{cases}
$$



$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

抛物线



$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{A_1} = \cos\omega t\cos\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_1 \cdots(1) \\ \dfrac{y}{A_2} = \cos\omega t\cos\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_2 \cdots(2) \end{cases}$$

设法消去t，可得质点的轨迹：

$$(1)\cos\varphi_2 - (2)\cos\varphi_1:$$

$$\frac{x}{A_1}\cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_1 = \sin\omega t\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\cdots(3)$$

$$(1)\sin\varphi_2 - (2)\sin\varphi_1:$$

$$\frac{x}{A_1}\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\sin\varphi_1 = \cos\omega t\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\cdots(4)$$

$$(3)^2 + (4)^2:$$

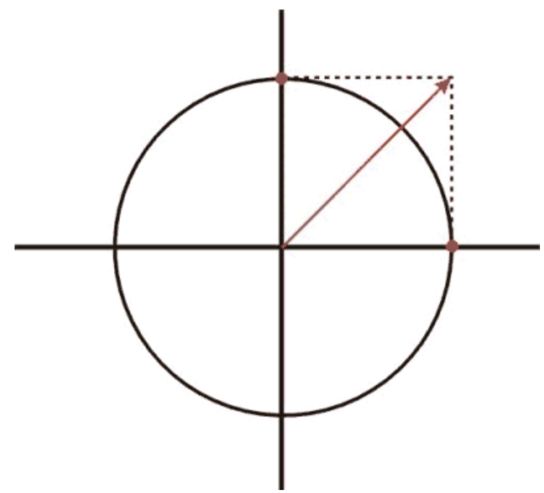
$$\frac{x^2}{A_1^{\,2}} + \frac{y^2}{A_2^{\,2}} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

- 讨论：

1）两振动相位相同，$\phi_2 - \phi_1 = 0$，则 $y = \frac{A_2}{A_1} x$

此为一过原点的直线，斜率为：$tg\theta = \frac{A_2}{A_1}$

质点到原点的距离：$(\varphi = \varphi_2 = \varphi_1)$



$$S = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{A_1{}^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + A_2{}^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}$$

即 $S = \sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2} \cos(\omega t + \varphi)$

合振动仍是一个简谐振动，

角频率仍为 ω，振幅为 $\sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2}$，轨迹为：$y = \frac{A_2}{A_1} x$

2）两振动相位相差π， $\phi_2-\phi_1=\pi$

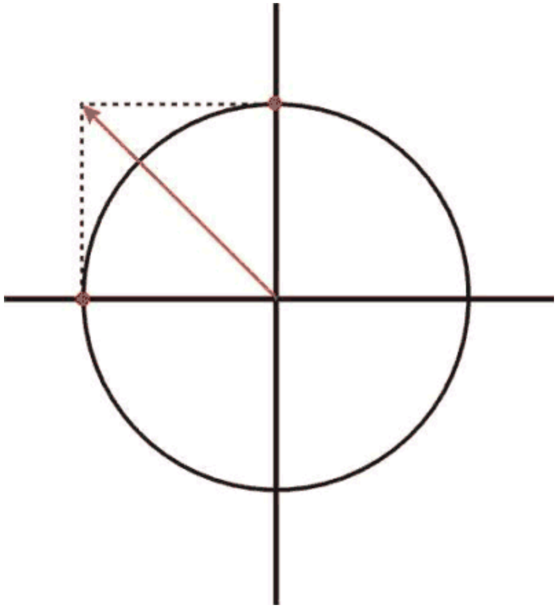
$y=-\frac{A_2}{A_1}x$ 为一过原点的直线，斜率为 $tg\theta=-\frac{A_2}{A_1}$

同样得到：

$$S=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}}\cos(\omega t+\phi)$$

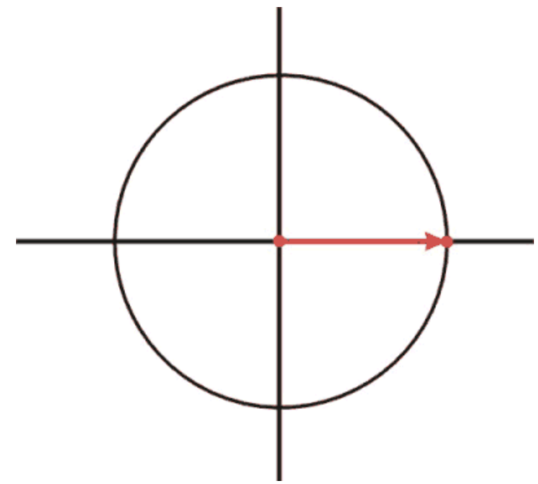
其中：

$$\phi=\phi_1+\pi=\phi_2$$



3）两振动相位差为$\frac{\pi}{2}$，$\phi_2 - \phi_1 = \frac{\pi}{2}$

轨迹方程：$\frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{A_2} = 1$



运动方向讨论：

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

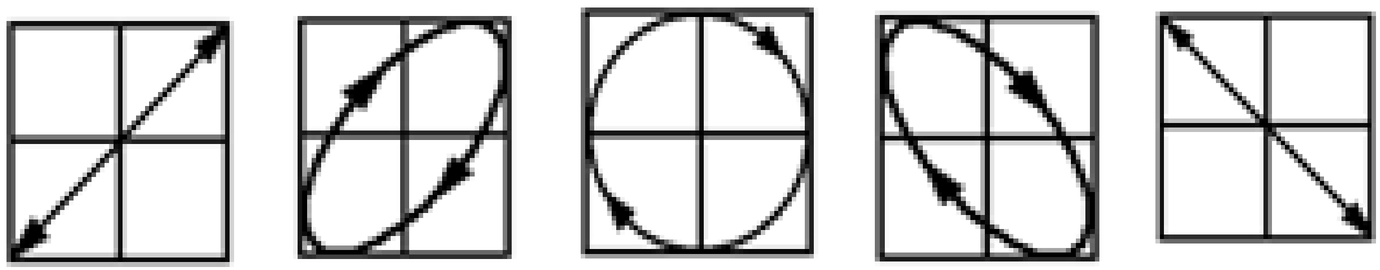
当 $\omega t + \phi_1 = 0$ 时，$x = A_1$，$y = 0$

t增加一小量，x为正，y为负，

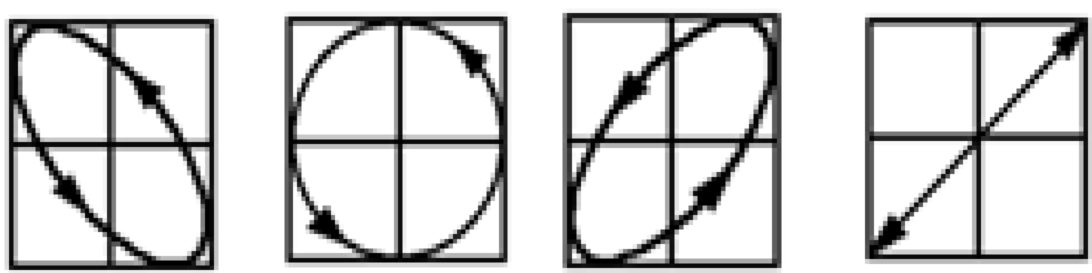
即到II象限，故为顺时针方向。

4）相位差为$\frac{3\pi}{2}$， $\phi_2-\phi_1=\frac{3\pi}{2}$ 圆，逆时针，

5）其它情况下，为其它方向的椭圆：

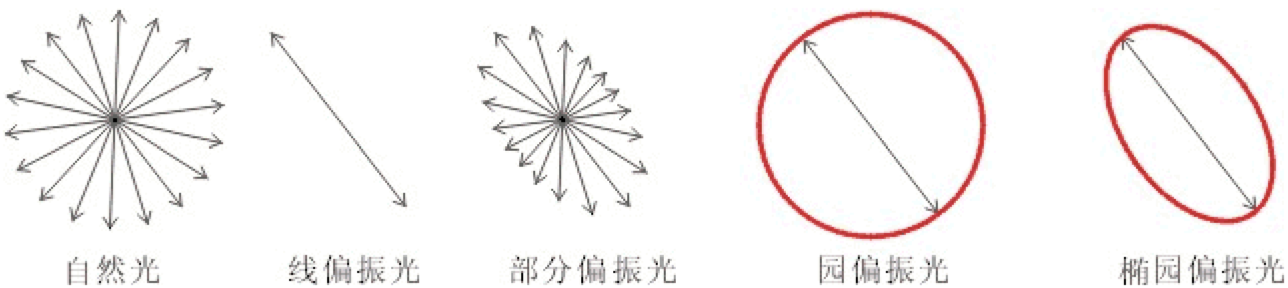


$$\varphi_2-\varphi_1= \quad 0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \pi$$



$$\varphi_2-\varphi_1= \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{2} \quad \frac{7\pi}{4} \quad 2\pi$$

光的偏振现象

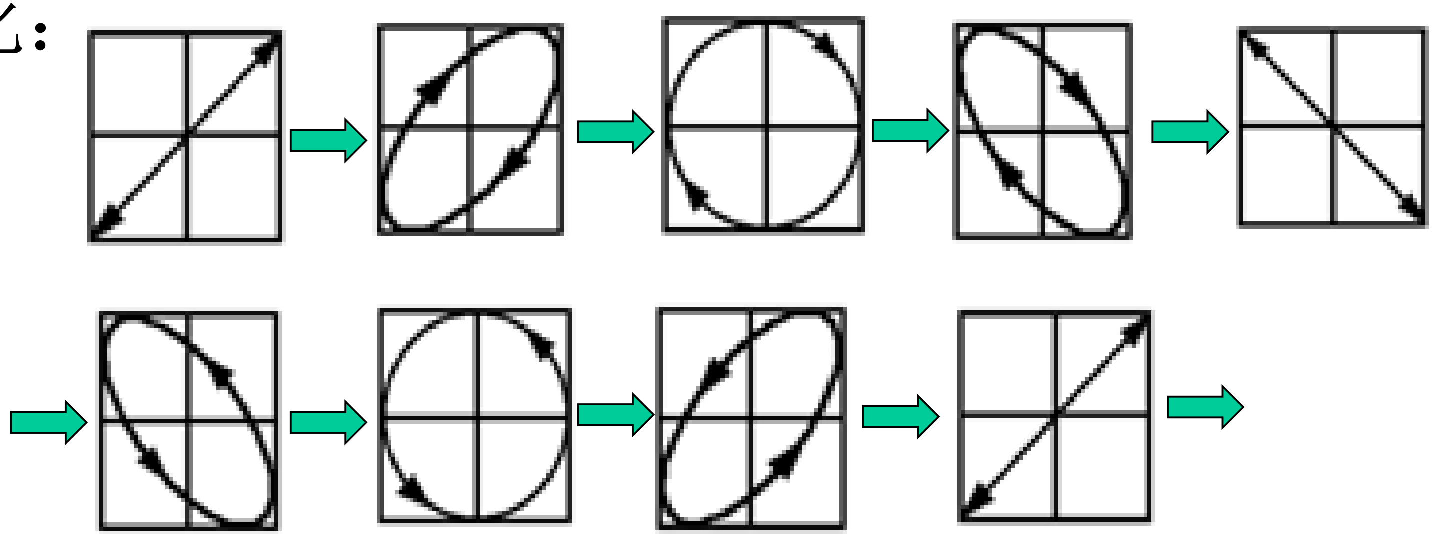


四、两个互相垂直的不同频率的简谐振动的合成

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

1）频率相差很小，即$|\omega_1 - \omega_2|$很小

可看作是同频率的两个振动，但相位差缓慢变化，因此其轨迹按照“三”的情形连续循环变化：



2）二振动频率成简单倍数：$\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$

轨迹为稳定的封闭曲线（P259）——利萨如图形（Lissajous）。

共同特点：即如作一水平直线和一垂直直线，位置的选择要使直线与图形交点最多。

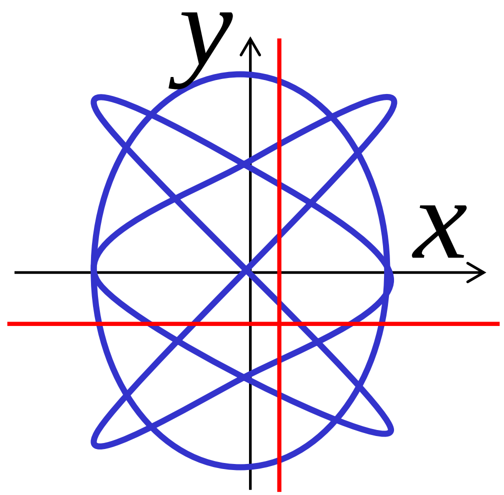
分别计算各直线与圆形的交点数，则有：

$$\boxed{\frac{T_x}{T_y}=\frac{n_x}{n_y}}$$

n_x——水平直线与图形的交点

n_y——垂直直线与图形的交点

例如：



$$n_y = 8$$

$$n_x = 6$$

$$\frac{T_x}{T_y} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

频率：$$\frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{4}{3}$$

✓ 应用：在电学中，经常利用利萨如图从一已知信号的频率，求另一个未知信号的频率。具体使用示波器。

本次的学习目标，您达到了吗？

- 简谐振动的运动学方程
- 简谐振动的相位
- 简谐振动的合成