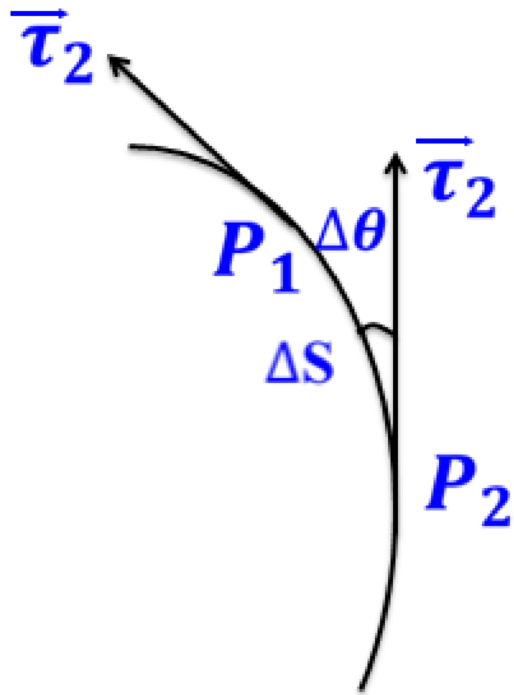
通过本次课的学习，您将学会：

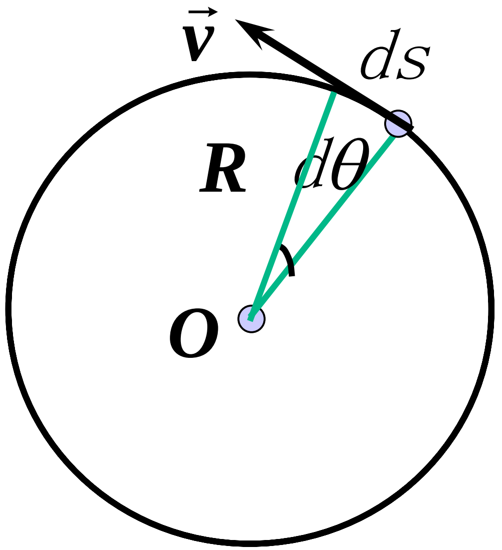
- 自然坐标系，自然坐标系下的速度，加速度；
- 圆周运动的角量表述；
- 相对运动的矢量表示

§2. 曲线（圆周）运动

平均曲率: $\bar{k} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ 叫做 P_1和P_2间曲线平均曲率。

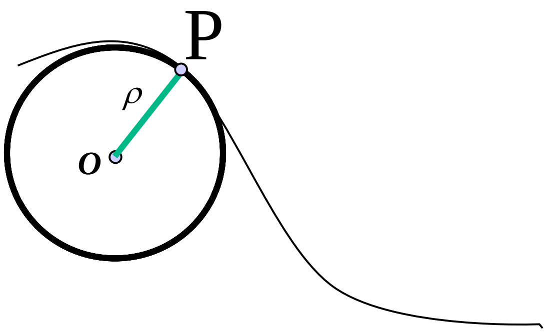


P1点的曲率: $k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$



■ 圆周的曲率：

$$ds = Rd\theta, \quad k = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$$



■ 曲线上任意一点的曲率：

$$k = \frac{1}{\rho}$$

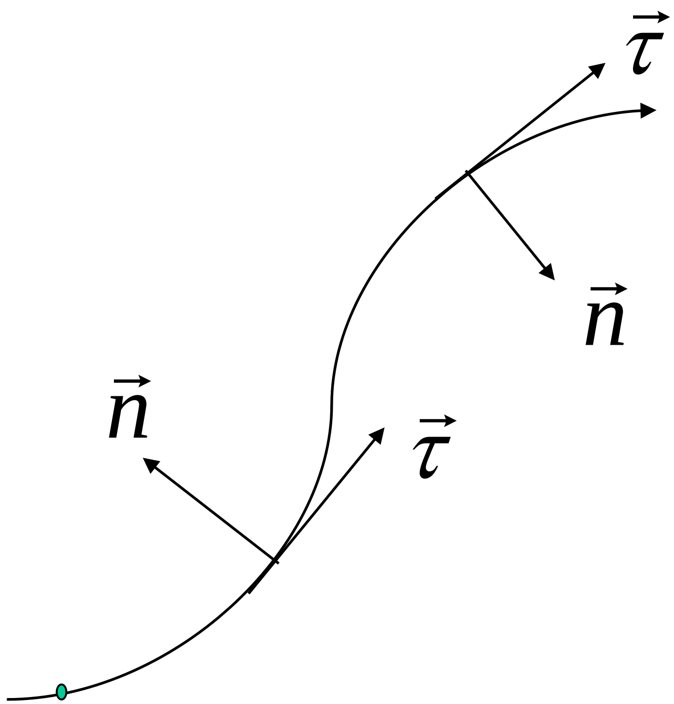
匀速率圆周运动我们通常怎么描述？

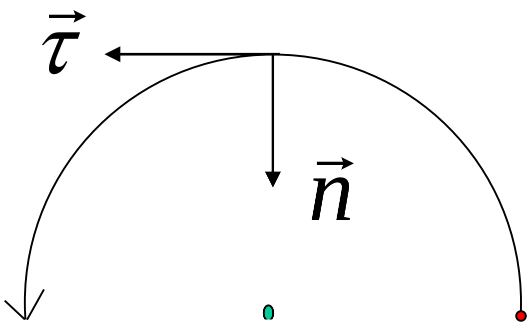
曲线运动的表征

自然坐标系、速度、
切向加速度、法向加速度

描述曲线运动所用的坐标系：自然坐标系。

在质点运动轨道上取任一点作为坐标原点o，在运动质点上沿轨道的切线和法线方向建立两个互相垂直的坐标轴。切向坐标轴的方向指向质点前进的方向，法线坐标轴的方向指向曲线的凹侧。

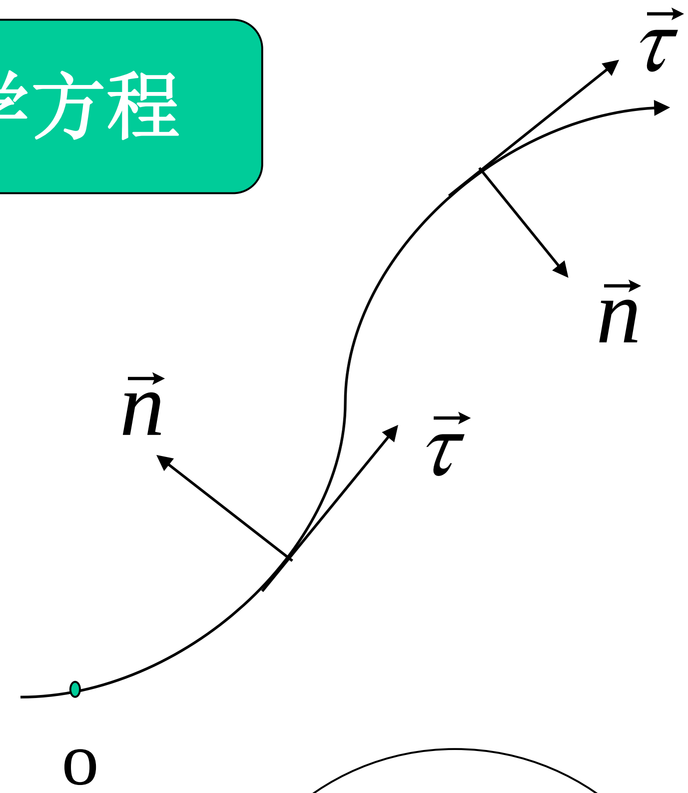




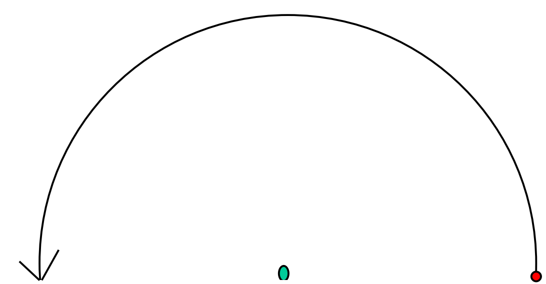
运动轨迹为圆时的自然坐标系

在自然坐标系下质点的运动学方程

$$s = f(t)$$

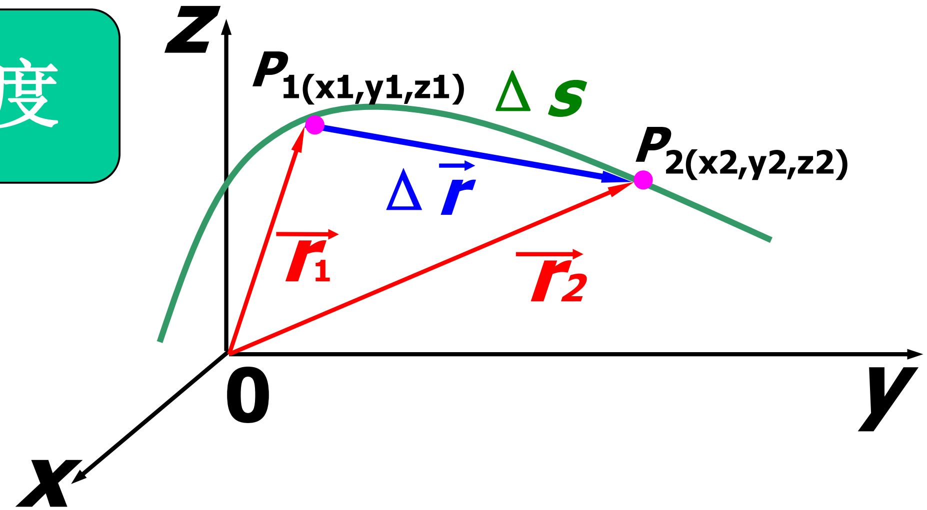


$$s = f(t)$$



运动轨迹为圆时
的自然坐标系

在自然坐标系下的质点的速度



$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

大小：$$|\vec{v}|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}$$

方向：　曲线的切线，指向质点的运动方向。

$$\vec{v}=v\vec{\tau}=\frac{ds}{dt}\vec{\tau}$$

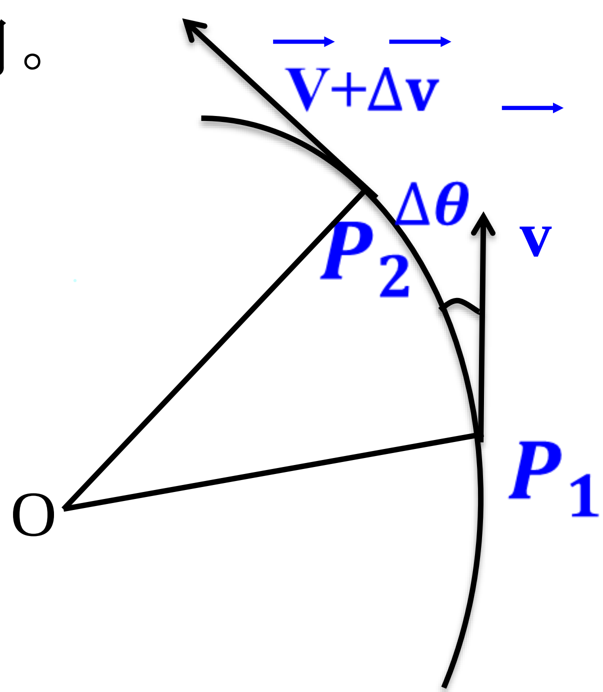
在自然坐标系下的质点的加速度

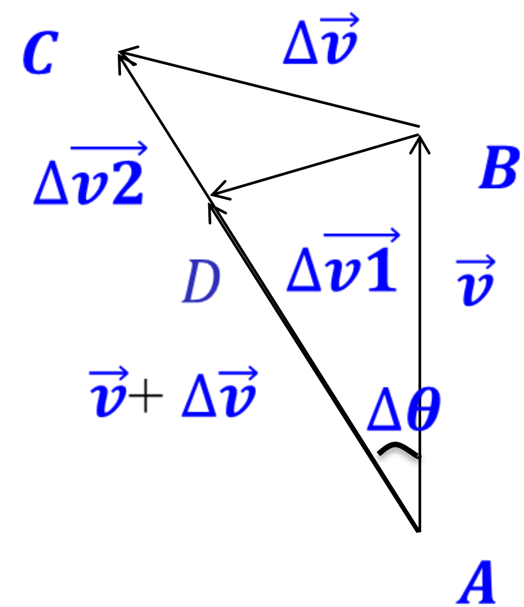
如图： $AB = AD,\quad \Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_2$

$\Delta\vec{v}_1$ 反映了速度方向的改变，$\Delta\vec{v}_2$反映了速度数值的改变。

当$\Delta t \to 0$时，$\Delta\theta \to 0, \angle ABD \to \dfrac{\pi}{2}$ 在极限情况下，$\Delta\vec{v}_1 \perp \vec{v}$

即$\Delta\vec{v}_1$沿P_1点的法线方向，指向曲率中心。$\Delta\vec{v}_2$沿P_1点的切线方向。

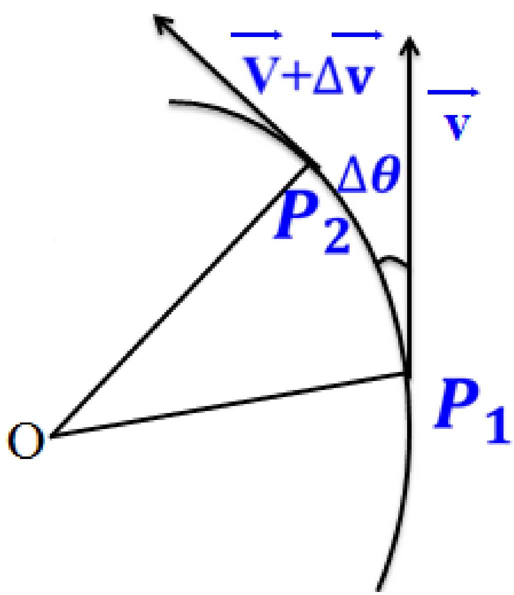


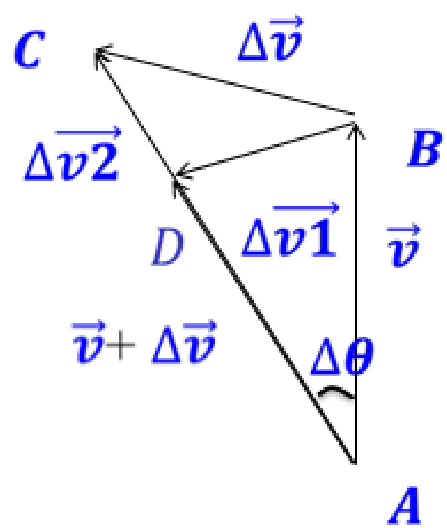


$\therefore$加速度：　　$\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t}+\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t}$

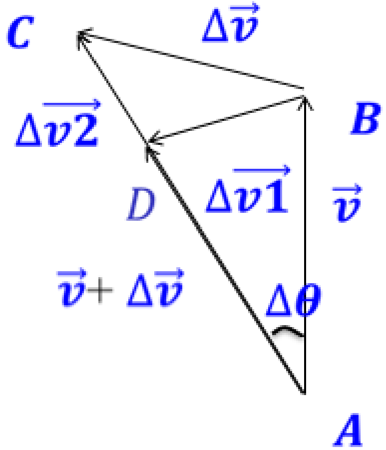
$\Delta t\to 0$:　　$\Delta\vec{\mathrm{v}}_1=v\Delta\theta\vec{n},\quad \Delta\vec{\mathrm{v}}_2=\Delta v\vec{\tau}$

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}v\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{n}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\vec{\tau}=v\frac{d\theta}{dt}\vec{n}+\frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$





$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} v\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{n} + \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\vec{\tau} = v\frac{d\theta}{dt}\vec{n} + \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$



$$v\frac{d\theta}{dt} = v\cdot\frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\cdot\frac{1}{\rho}\cdot v = \frac{v^2}{\rho}$$

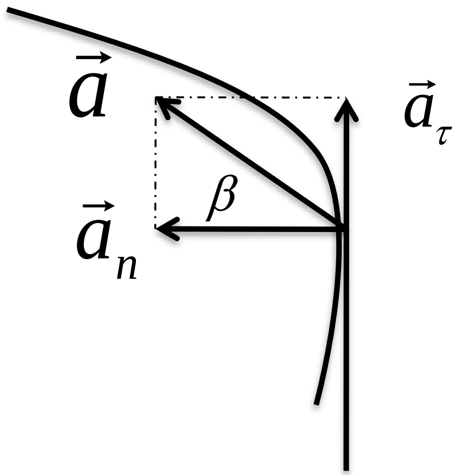
$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$ ——速率变化

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$ ——方向变化

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}}$$

加速度的数值为： $a=\sqrt{(\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}})^2+(\frac{\mathrm{v}^2}{\rho})^2}$

方向： $tg\beta=\frac{a_\tau}{a_n}$



a_τ $\begin{cases} \text{正}, \vec{a}_\tau \text{ 与} \vec{v} \text{ 同向，速率增大} \\ \text{负}, \vec{a}_\tau \text{ 与} \vec{v} \text{ 反向，速率减小} \\ 0, \text{ 匀速曲线运动} \end{cases}$

a_n $\begin{cases} \text{正，方向指向曲率中心} \\ 0, \rho\to\infty, \text{ 即直线运动}, \vec{a}=\vec{a}_\tau \end{cases}$

$\vec{a}_\tau$ 与$\vec{a}_n$ 这两个分量与固定坐标系无关，常常叫做自然坐标系的分量。

例： 一个质点在oxy平面运动的运动学方程为：

$$x = 6t, y = 4t^2 - 8$$

则t=1s时，质点的切向加速度和法向加速分别为多少？

例： 一个质点在oxy平面运动的运动学方程为：

$$x = 6t, y = 4t^2 - 8$$

则t=1s时，质点的切向加速度和法向加速分别为多少？

解：

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6, v_y = \frac{dy}{dt} = 8t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{36 + 64t^2}$$

切向加速度

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}(36 + 64t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 128 \cdot t \Big|_{t=1} = 6.4m/s^2$$

法切向加速度

$$y = 4\left(\frac{x}{6}\right)^2 - 8 = \frac{x^2}{9} - 8$$

$$y' = \frac{2x}{9} = \frac{2(6t)}{9} = \frac{4t}{3}$$

$$y'' = \frac{2}{9}$$

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = kv^2\Big|_{t=1} = 4.8m/s^2$$

方法二

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6, v_y = \frac{dy}{dt} = 8t$$

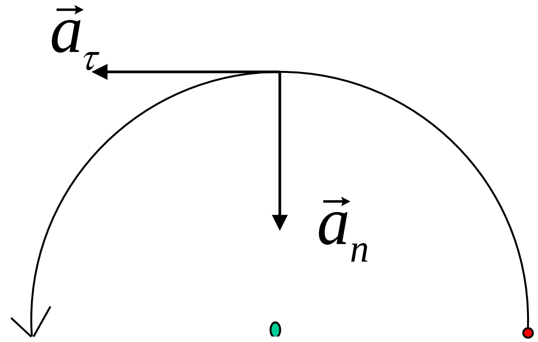
$$a_x = 0, a_y = 8$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 8$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{8^2 - 6.4^2} = 4.8m/s^2$$

2、圆周运动的加速度

圆周运动：轨迹为圆周的运动叫圆周运动。



- 切向加速度：$a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ ，方向总是切线方向。
- 法向加速度：$a_n = \dfrac{v^2}{R}$ ，方向总是指向圆心——向心加速度。

$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau}_0 + a_n \vec{n}_0$ ，方向偏向圆心。

对于匀速（率）圆周运动

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$$

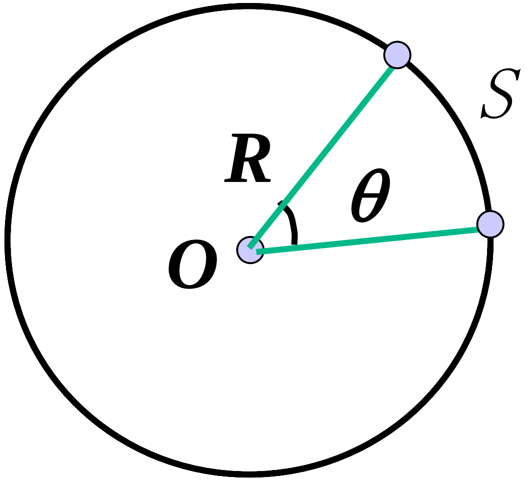
$$a = a_n = \frac{v^2}{R}$$

只有向心加速度。

3、圆周运动的角量表示：

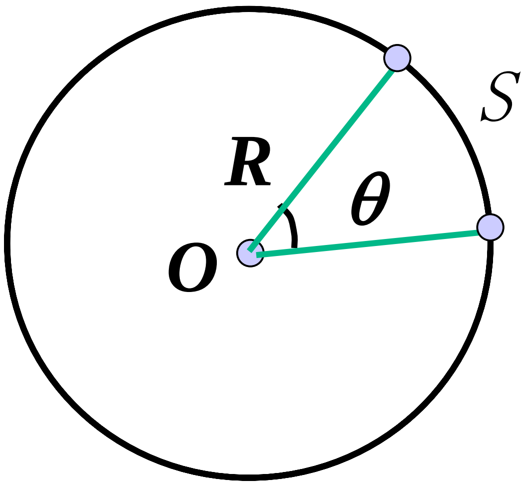
圆周运动线量表示：

$$s, \vec{v}, \vec{a}(\vec{a}_n, \vec{a}_\tau)$$



圆周运动角量表示：

θ, ω, α



θ 角位移

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$ 角速度

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$ 角加速度

角量和线量的关系

$$S = R\theta$$

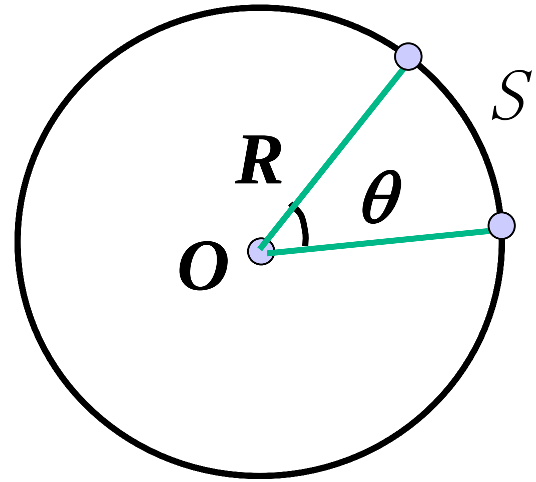
$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$v = R\omega$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$a_\tau = R\alpha, a_n = R\omega^2$$



对于匀速（率）圆周运动

$$t=0,\theta_0=0 \qquad \theta=\omega t$$

$$a_\tau=0,a_n=R\omega^2$$

匀变速率圆周运动：$\alpha=C$

$$\omega=\omega_0+\alpha t$$

$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

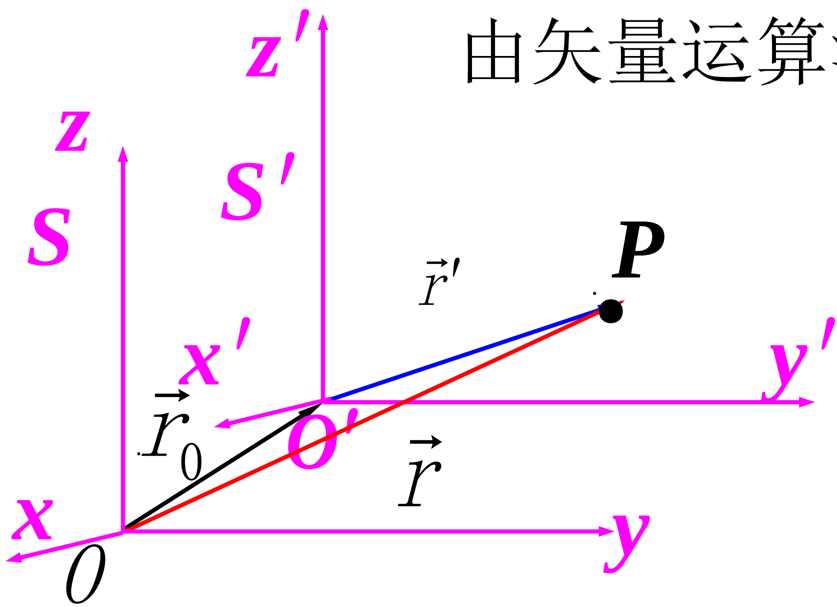
$$\omega^2-\omega_0{}^2=2\alpha\left(\theta-\theta_0\right)$$

注意：ω、θ、α也可看做矢量，遵从右手定则。

南開大學

§3. 不同参照系中速度加速度的变换

设两个参考系有相对运动，即S'相对于S 以速度 $\vec{v}_0$ 平动的情形，考察质点P的运动。



由矢量运算法则有： $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'}$

$\vec{r}_0$是S'相对于S的位矢。

两边对时间微商：

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}'}$$

$\vec{v}$ ——绝对速度，是P相对于静止参照系S的速度

$\vec{v}_0$ ——牵连速度，是 S’ 相对于S的速度

$\vec{v}'$ ——相对速度，是P相对于运动参照系 S’ 的速度

两边再对时间微商：

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'}$$

$\vec{a}$ ——绝对加速度

$\vec{a}_0$ ——牵连加速度

$\vec{a}'$ ——相对加速度

单选题 1分

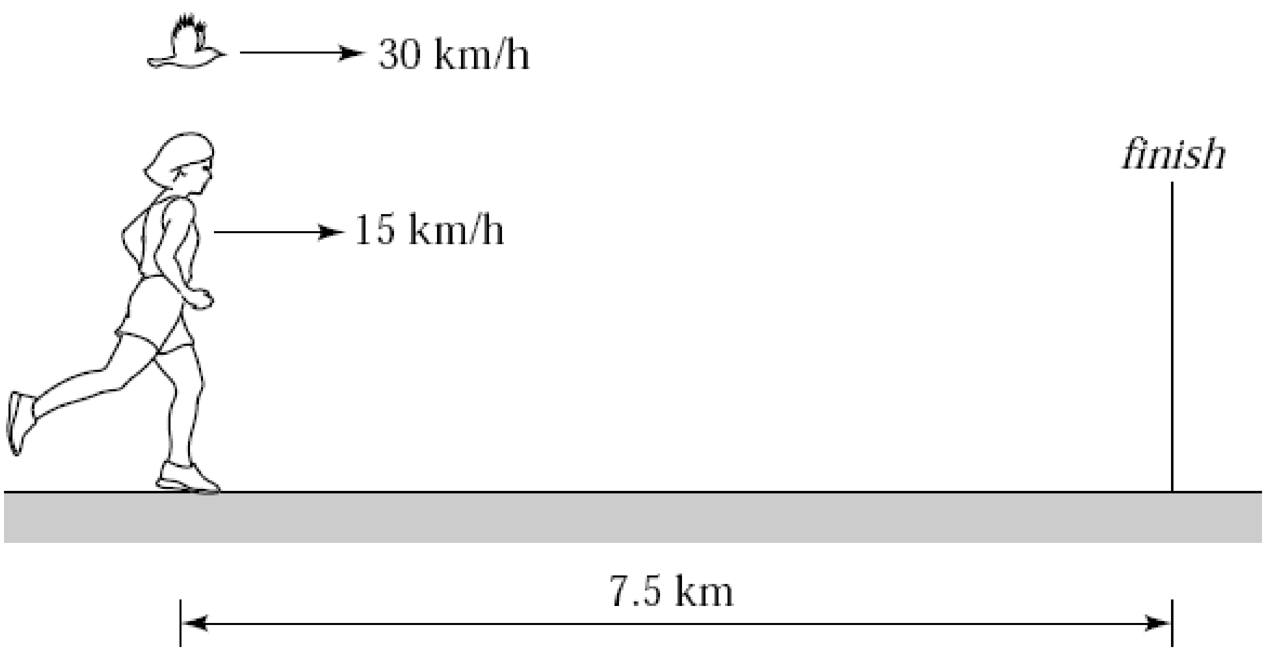
一个马拉松选手以15km/hr的速度前进。当选手距离终点7.5 km时，一个小鸟从选手位置以30km/hr的速度飞向终点。当小鸟达到终点后，又飞回选手处，然后又飞回终点，如此往复，直到选手到达终点。在这个过程中，小鸟飞行了多少距离？

A 10 km

B 15 km

C 20km

D 30km



提交

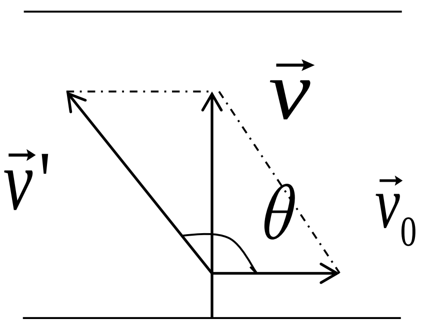
例：

在河水流速2m/s的地方有一小船渡河。如果希望小船以4m/s的速度垂直于河岸横渡，问小船上的指示速率应为多大，船头应指向何方？

解：

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$$



$$v' = \sqrt{v^2 + v_0^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4.47m/s$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + arctg\frac{v_0}{2} = \frac{\pi}{2} + arctg\frac{2}{4} = 116.6^\circ$$

作业

P49 T1.5 T1.9 T1.19 T1.27

此节的学习目标，您掌握了吗？

- 自然坐标系，自然坐标系下的速度和加速度；
- 相对运动中的关系