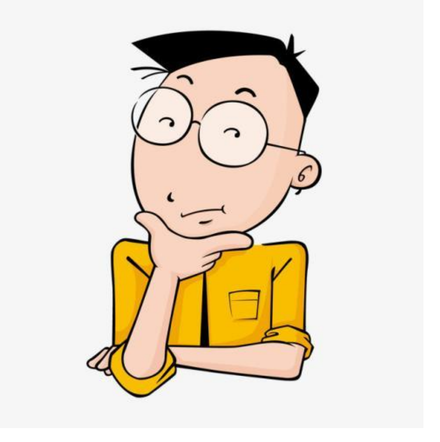
南開大學

您将学习：

- 阻尼振动
- 受迫振动

§7.阻尼振动
（Damped oscillation）

如果弹簧振子在振动过程中存在阻力，会发生什么现象？



- 振幅（或机械能）随时间而减小的振动叫阻尼振动。它不是简谐振动。

以振动系统受介质粘滞阻力的振动为例：

当质点速度不太大时，粘滞阻力与速度的大小成正比：

即：

$$f = -\gamma v$$

γ ——**阻力系数**

由牛二定律知：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-\gamma\frac{dx}{dt},\qquad 或\ \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

$$令\ \frac{k}{m}=\omega_0{}^2,\frac{\gamma}{m}=2\beta,$$

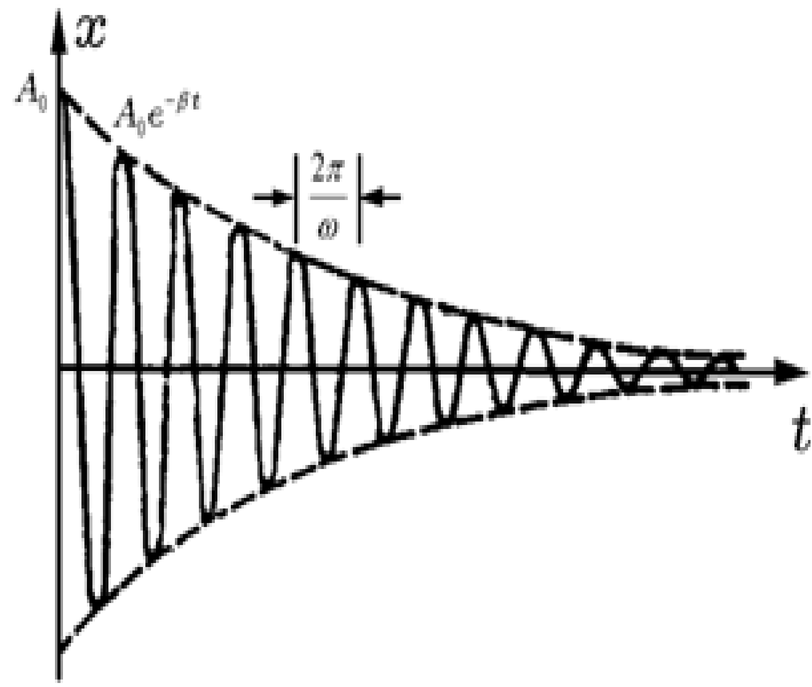
$$则有\ \frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0{}^2x=0$$

β ——**阻尼因数**， ω_0 ——**固有频率**

1）阻力较小，弱阻尼： $\beta^2 < \omega_0{}^2$

解为：

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi)$$



$$\omega=\sqrt{\omega_0{}^2-\beta^2}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$ ——阻尼振动的周期

$\because \quad \omega < \omega_0$

阻尼振动周期： $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

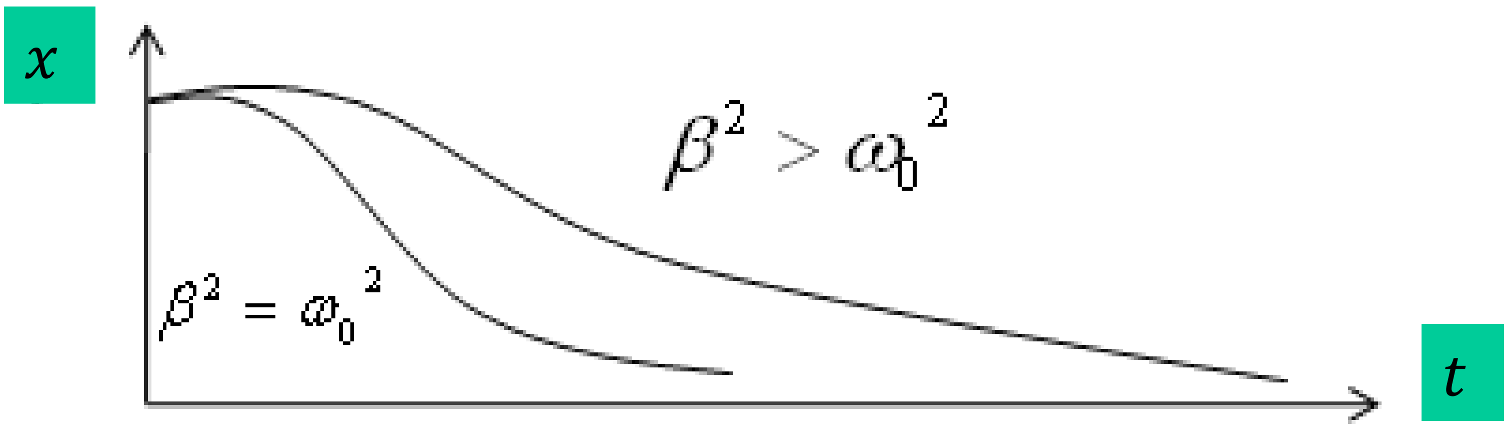
无阻尼振动简谐振动的周期： $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

阻尼振动周期大于无阻尼振动简谐振动的周期

2）阻力较大，过阻尼 $\beta^2 > {\omega_0}^2$

解为：

$$x = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}\,)t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}\,)t}$$



不振动，逐渐停止在平衡位置。

3）临界阻尼 $\beta^2 = {\omega_0}^2$

解为：$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\beta t}$

即刚好不能振动，很快回到平衡位置。

■ 阻尼的应用：

① 精密天平

② 灵敏电流计

加大阻尼，最好加到临界阻尼的程度，此时回到平衡位置最快。

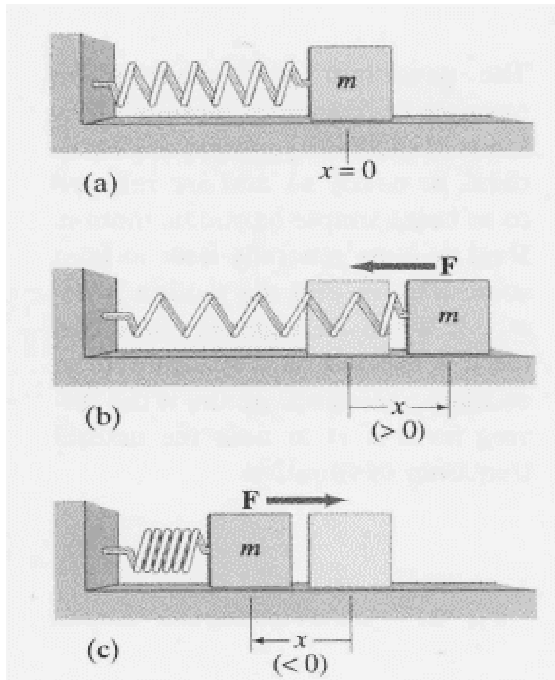

欠阻尼
臨界阻尼
過阻尼

§8.　受迫振动
（Forced harmonic motion）

https://www.bilibili.com/video/av78921535/

1、 受迫振动的运动学方程

大胆猜一猜：



如果一个周期性的外力F作用于m，
稳定后m的振动频率会是怎样的？

●不受外力作用下的振动叫**自由振动**。

●振动系统在外界周期性强迫力作用下的振动，叫做**受迫振动**。

设周期性外力：

$f = H\cos(pt)$　　f——强迫力，

H——强迫力的振幅，

p——强迫力的角频率。周期是：$T = \dfrac{2\pi}{p}$

1、动力学方程及其解

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + H\cos pt$$

$$\text{令}\ \frac{k}{m} = {\omega_0}^2, \qquad \frac{\gamma}{m} = 2\beta, \qquad h = \frac{H}{m}$$

$$\text{则}\ \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = h\cos pt$$

此为非齐次二阶微分方程

该方程的解（两个特解的线性叠加）为：

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi') + A\cos(pt - \varphi)$$

当 $t \to \infty$ 只剩第二项：

受迫振动的运动学方程：　$x = A\cos(pt - \varphi)$

稳定后的受迫振动：等幅振动，频率与强迫力相同，但与强迫力存在一相位差。

将此特解代入原微分方程得到：

$$A=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-p^2)^2+4\beta^2\ p^2}}$$

$$\varphi=tg^{-1}\ \frac{-2\beta p}{\omega_0^2-p^2}$$

稳定后的受迫振动，其振幅和位相与初始条件无关，与系统的固有频率，阻力和周期性外力的频率决定。

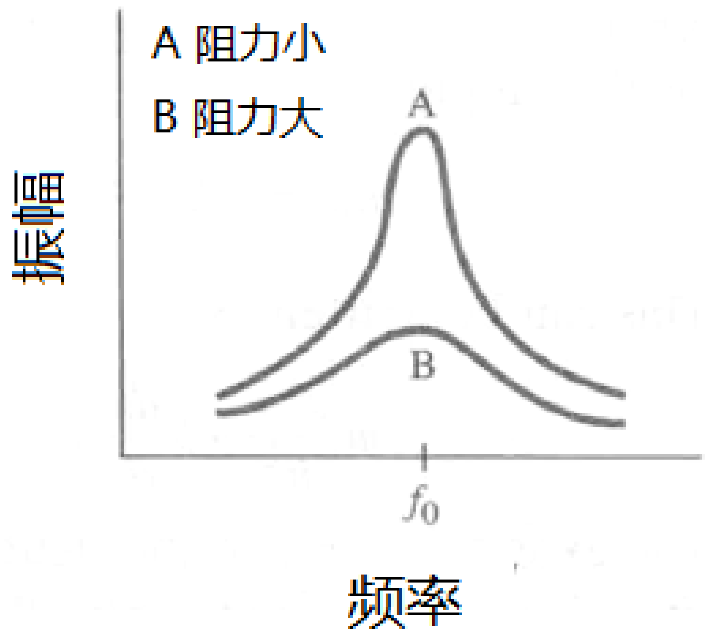
稳定后的受迫振动的运动学方程

$$x = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 \ p^2}} \cos(pt - \varphi)$$

$$\varphi = tg^{-1} \ \frac{2\beta p}{\omega_0^2 - p^2}$$

2、共振 （Resonance）

[什么是共振现象？将2个音叉放在同一平面上，有趣的现象发生了_好看视频 (baidu.com)]



受迫振动中，外界向系统传递能量。能量的传递的效率与系统的固有频率，周期性外力的频率和阻力都有关系。当周期性外力的频率与系统的频率接近时，振幅最大。

——共振现象

理论论证

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$$

求极大值问题：p为何值时，A取最大值？

求 $\Delta=(\omega_0^2-p^2)^2+4\beta^2 p^2$ 的最小值

令A对p的一阶导数等于零

$$\Delta'=2(\omega_0^2-p^2)(-2p)+8\beta^2 p=0$$

即 $$-p(\omega_0^2-p^2-2\beta^2)=0$$

可证明 $p=0$或$p^2=\omega_0^2-2\beta^2$ 时，A取极值

$p^2=\omega_0^2-2\beta^2$ $\Delta''>0$，故Δ取最小值，

当周期性外力的频率为 p_r 时振幅最大：

共振角频率 $$p_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \cdots\cdots(1)$$

共振的振幅 $$A_r = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - p_r^2)^2 + 4\beta^2 p_r^2}}$$

$$= \frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

受迫振动的相位：

$$\varphi_r = tg^{-1}\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta} \quad \cdots(3)$$

共振角频率、共振振幅、共振时受迫振动的相位差都与系统的固有频率、阻力有关。

阻力在共振中的作用

$$p_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$A_r = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - p_r^2)^2 + 4\beta^2 p_r^2}} = \frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

β 越小，P_r 接近 ω_0， A_r 越大

尖锐共振： $\beta = 0$，$P_r = \omega_0$，$A_r \to \infty$

$$\varphi_r = tg^{-1}\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}$$

尖锐共振时的位相： $\varphi_r = tg^{-1}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

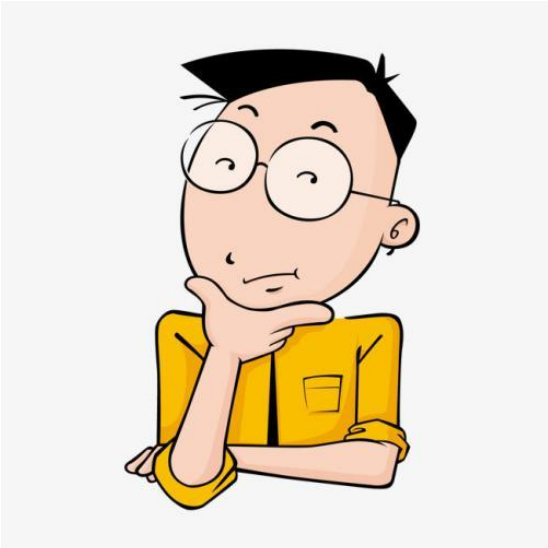
周期性外力： $f = H\cos(p_r t)$

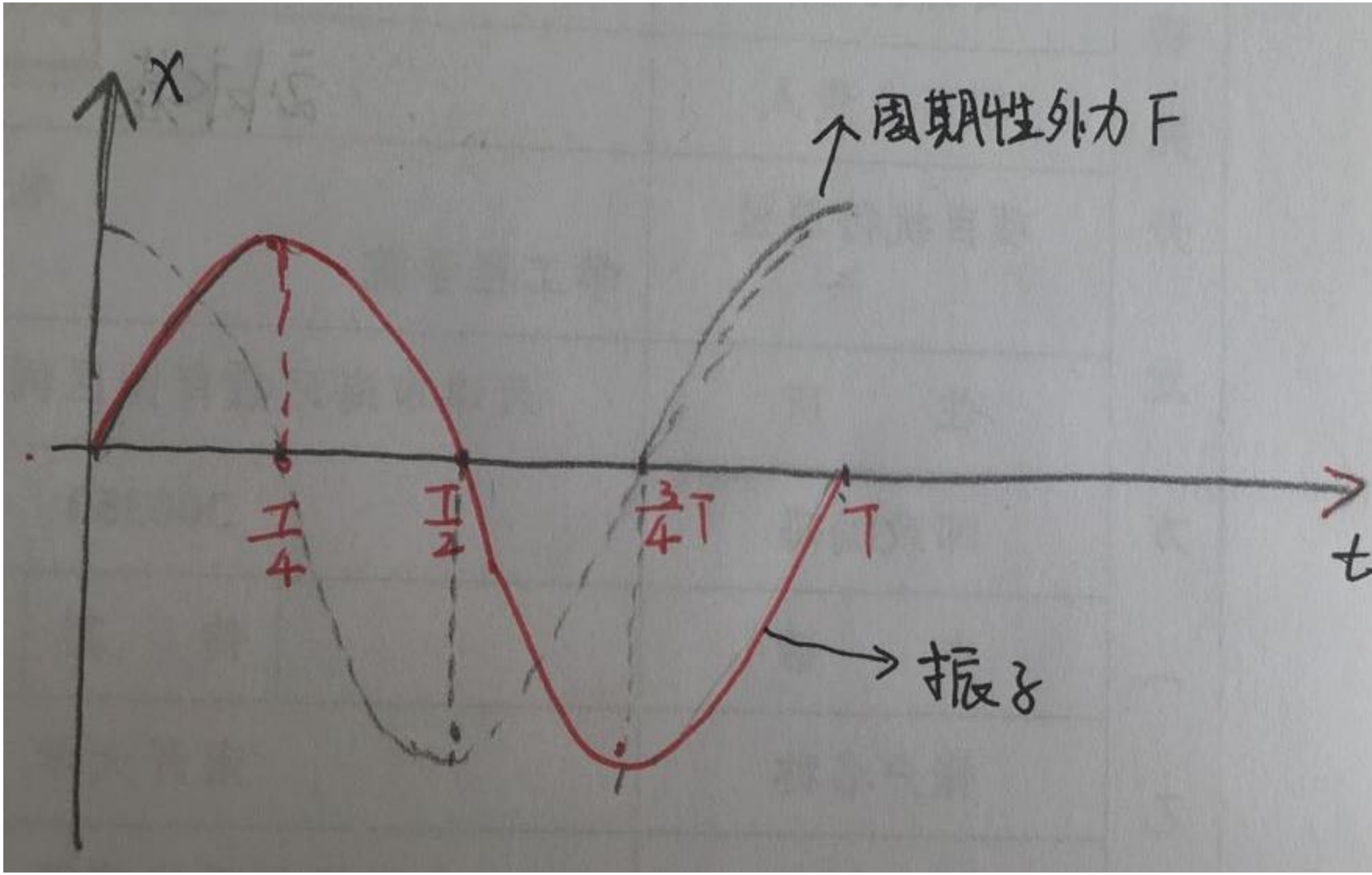
运动学方程： $x_r = A_r\cos(p_r t - \frac{\pi}{2})$

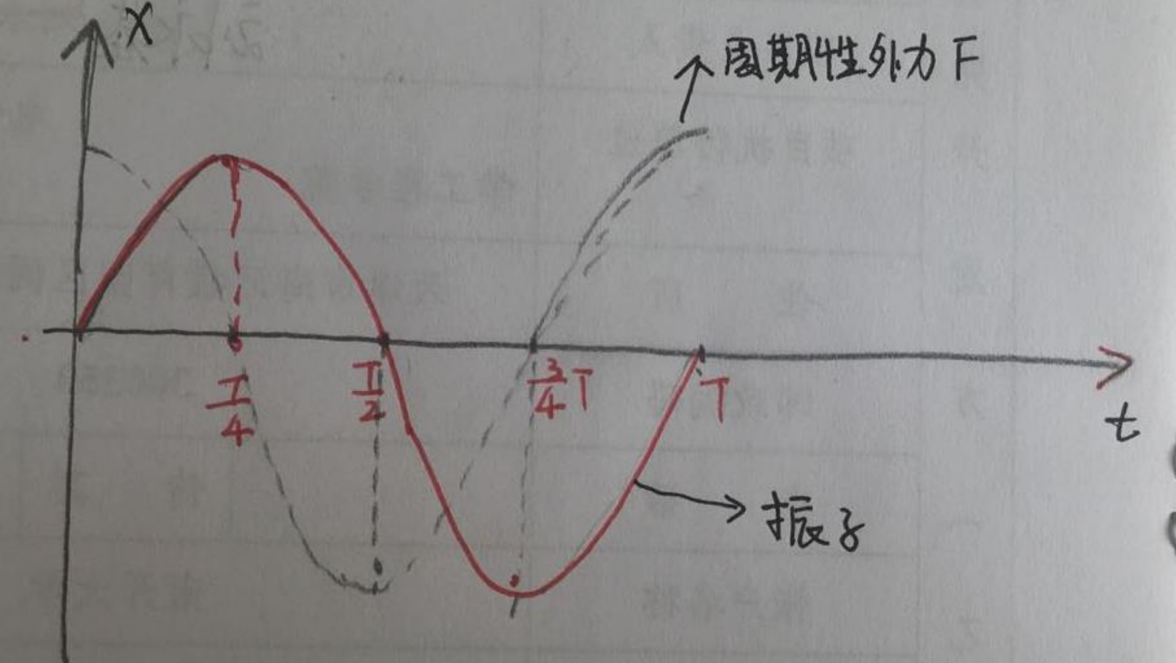
此时受迫振动落后于强迫力 $\frac{\pi}{2}$ （四分之一周期)。

此时受迫振动落后于强迫力 $\frac{\pi}{2}$（四分之一周期）。

这意味着什么？




x
周期性外力 F
T/4
T/2
3/4 T
T
t
振子



在$\frac{T}{4}$周期：振子向x正向运动. F的方向为正，使振动加速

在[$\frac{T}{4}$, $\frac{T}{2}$]周期. 振子向x负向运动：F的方向为负，......

在[$\frac{T}{2}$, $\frac{3}{4}T$] ....

在[$\frac{3}{4}T$, T] ...振子向x正向运动，F的方向为正，使振动加速

从能量角度分析受迫振动（根据相位分析）

周期性外力： $f = H\cos(pt)$

受迫振动： $x = A\cos(pt-\varphi)$

$$\therefore v = \tfrac{dx}{dt} = -Ap\sin(pt-\varphi)$$

$$= Ap\cos(pt-\varphi+\tfrac{\pi}{2})$$

强迫力与速度的相位差： $\varphi-\dfrac{\pi}{2}$

尖锐共振时：

$$\varphi = \varphi_r = \frac{\pi}{2}$$

强迫力与速度的相位差：

$$\varphi - \frac{\pi}{2} = \varphi_r - \frac{\pi}{2} = 0$$

速度与强迫力相位相同

强迫力只做正功, 故振幅不断增加，此为尖锐共振。

更为一般的稳定受迫振动形成的原因

强迫力与速度方向相同时，做正功，相反时，做负功。

如正功>负功，v增大，由于 $f_{阻}=-\gamma v$ ，
则阻力增大，阻力做负功增加，当正功=负功+阻力做负功时，振幅稳定。这就会稳定受迫振动。

共振的应用：

1）利用共振：使强迫力的频率接近共振频率，减少阻尼因数：利用超声波清洗金属器件等。

2）避免共振：使强迫力的频率与共振频率相差很大，增大阻尼因数：加厚机器底座；火车过桥要慢；排队过桥避免齐步走。

此外，共振在物理学中非常有用：如声学、光学、电磁学、原子物理等，常用共振研究物质的微观结构；还有医学上的核磁共振等。

Wibbly Wobbly Bridge

https://www.acfun.cn/v/ac19301053

更为复杂的振动怎么处理呢？

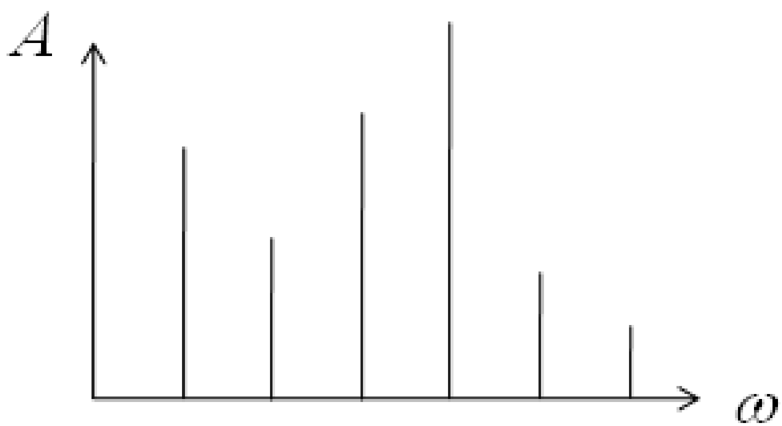
将复杂的振动进行傅里叶展开

- 此级数叫Fourier级数。

这就是说，如果一个振动的表达式可表示为周期函数，在这个振动就可分解为一系列的简谐振动的叠加。

- 其中最小的频率叫基频。

✓ 各频率下的简谐振动的振幅可用振幅谱表示：



振幅谱

作业1：P272　T7.5，T7.7，T7.21，T7.25

本次的学习目标，您达到了吗？

- 阻尼振动的三种阻尼形式是什么？
- 共振现象您能做定性和定量分析吗？

- **本章小结：**

① 简谐振动：

系统模型→动力学方程→振动表达式；

各状态参量及其之间的关系；

振幅与初相位的确定；

矢量（几何）表示。

② 简谐振动的合成：同方向同频率，分析方法

③ 阻尼振动：了解三种阻尼形式及特点。

④ 受迫振动：分析方法，结论，共振。

⑤ 振动的分解：一般了解。