



请说一下您对电场的理解



通过本次课的学习，您将学会：

- 高斯定理
- 利用高斯定理求解电场

§ 2 高斯定理

高斯定理反映：

静电场是有源场



高斯 德国
1777-1855

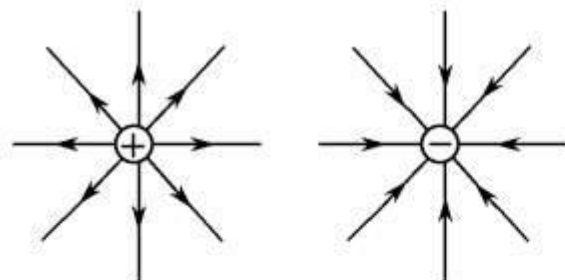


高等数学 --- 通量的概念

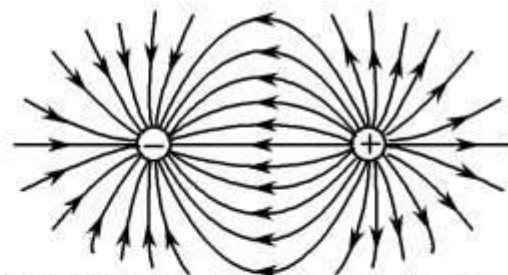
二 电场线 电通量

1. 电场线:

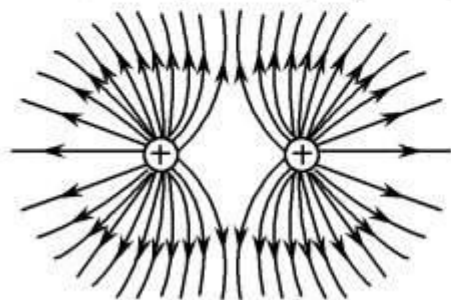
- (1) 线上每一点的切线方向与该点电场强度方向一致。
- (2) 电场线的密度反映了电场强度的大小。



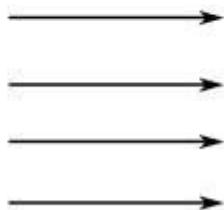
孤立点电荷的电场



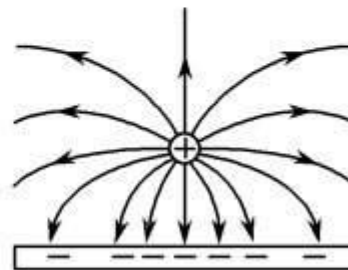
等量异种点电荷的电场



等量同种点电荷的电场



匀强电场



点电荷与金属板间的电场



静电场的电场线性质：

- ◆ 电场线始于正电荷（或 ∞ ），终于负电荷（或 ∞ ）
电场线不会在无电荷的地方中断。
- ◆ 静电场的电场线不能形成**单一绕向的闭合**线。
- ◆ 同一电场的任何两条电场线不会相交。



规定： 取垂直于某点 P 场强方向的面积元 ds_{\perp} ,

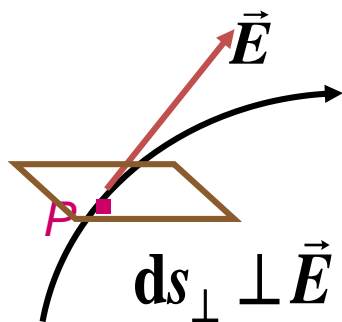
若该点场强大小为 E ,

则通过此面积元的电场线数目为：

$$dN = E ds_{\perp}$$

即： 电场强度 E 的大小

$$E = \frac{dN}{ds_{\perp}} \quad (\text{电场线密度})$$



物理意义： 单位垂直面上的电场线数目。



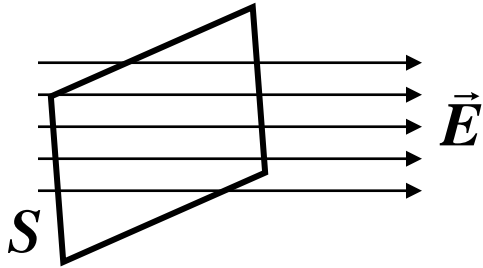


2、电通量：

指通过电场中任意给定面的电场线总数。

2.1 匀强电场、过平面的电通量：

1. 给定平面 $S \perp E$ 的情况：



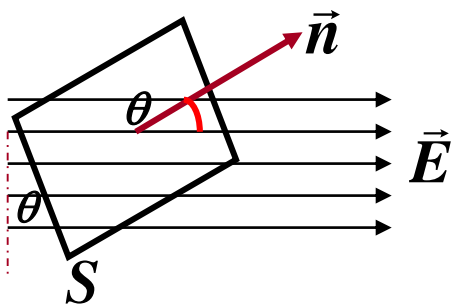
通过S 平面的电场线总数目：

$$\Phi_e = E S = \vec{E} \cdot \vec{S}$$



2. 给定平面 S 与场强有夹角 ($\neq 90^\circ$) 情况:

通过 S 平面的电场线总数目, 即电通量为:

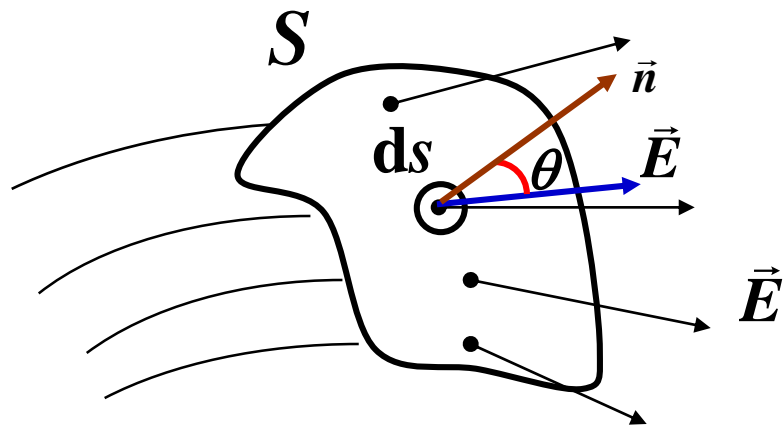


$$\Phi_e = E S_{\perp} = ES \cos \theta$$

定义: 面积矢量 $\vec{S} = S \vec{n}$

$$\Rightarrow \Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

2.2 任意电场、任意面的电通量：



则通过面元 ds 的电通量为：

$$\begin{aligned} d\Phi_e &= \vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds \cos \theta \\ &= ds \vec{n} \end{aligned} \quad \text{面元矢量}$$

则通过整个曲面 S 的电通量为： $\Phi_e = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$

当 S 为闭合曲面时： $\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$



说明:

1. 对于闭合曲面的计算规定:

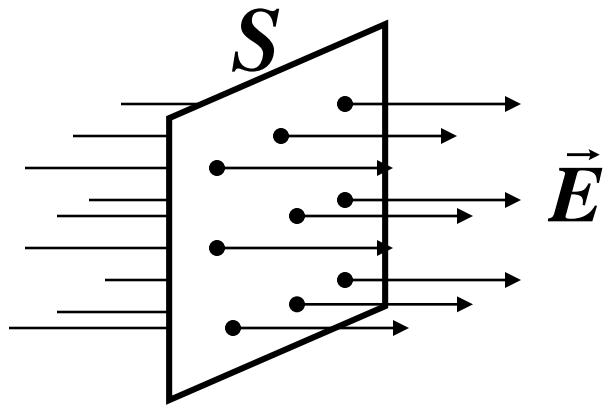
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{电场线穿出曲面时: } \theta < \pi/2 & \Rightarrow \Phi_e > 0 \\ \text{电场线穿入曲面时: } \theta > \pi/2 & \Rightarrow \Phi_e < 0 \end{array} \right.$$

2. 在解决电通量问题时, 必须明确场强分布、面元法向。

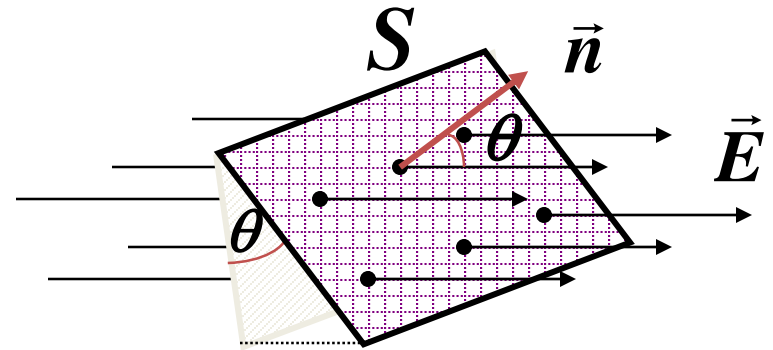
3. 矢量 \vec{A} 的通即为: $\Phi_A = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$



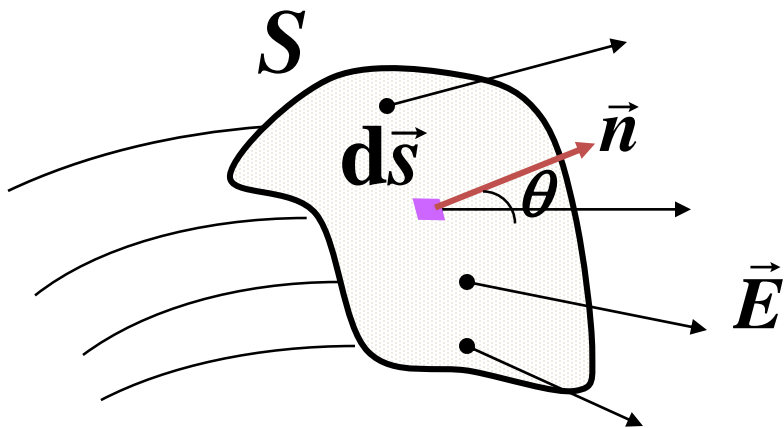
综上有：电通量的计算



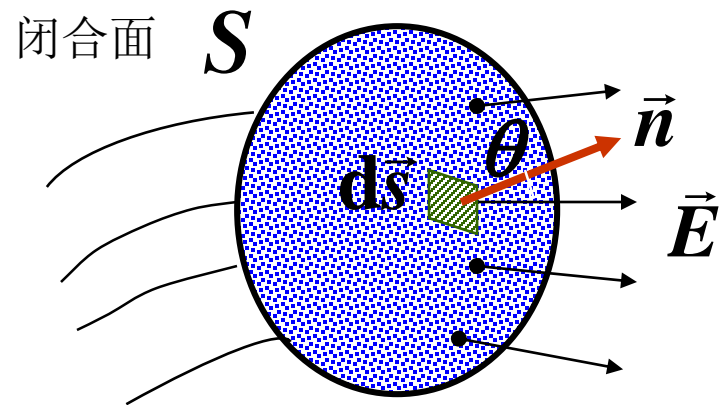
$$\Phi_e = ES$$



$$\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES \cos \theta$$



$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S E ds \cos \theta$$

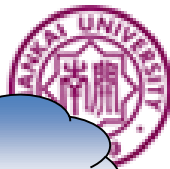


$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_S E \cos \theta ds$$



说明：

- 电通量有两种方法理解：通过某一曲面电力线根数；电场强度矢量的面积分，即电场强度矢量的大小与垂直于场强的截面面积的乘积。
- 电通量是标量，但有符号，可正可负。
- 宏观曲面的电通量需要面积分，积分范围是整个曲面，面元矢量取**外法线方向**。



高斯面

三 高斯定理

1 定理内容

在真空中静电场，穿过任一**闭合曲面**的电场强度通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以 ε_0 。

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i^{\text{in}}$$

2 定理的证明

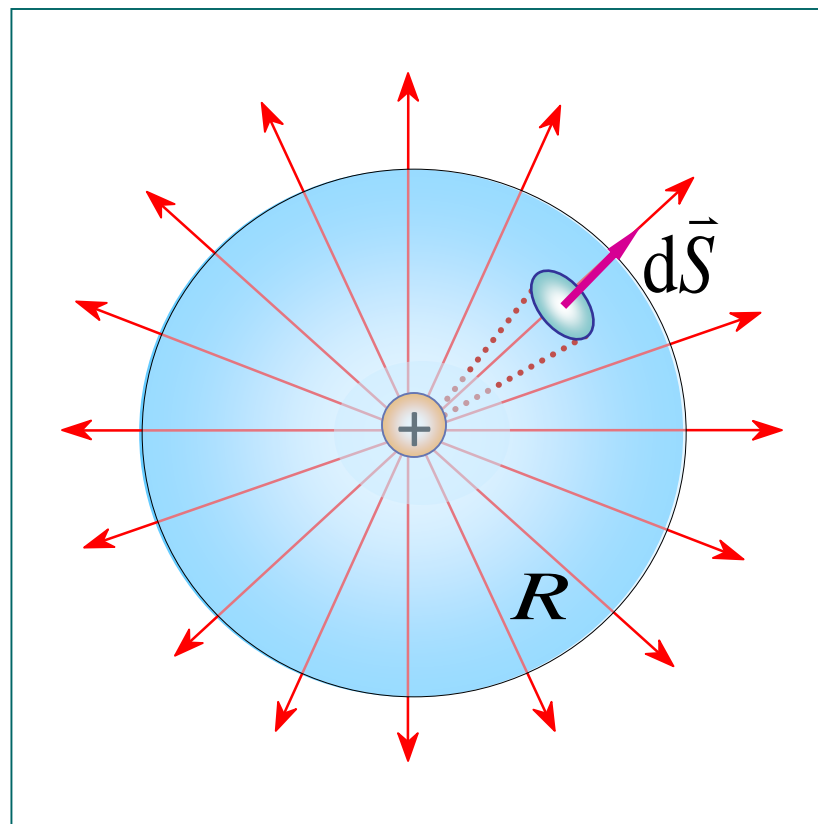
◆ 点电荷位于球面中心

$$E = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 R^2}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 R^2} \oint_S dS$$

$$= \frac{q}{\epsilon_0}$$



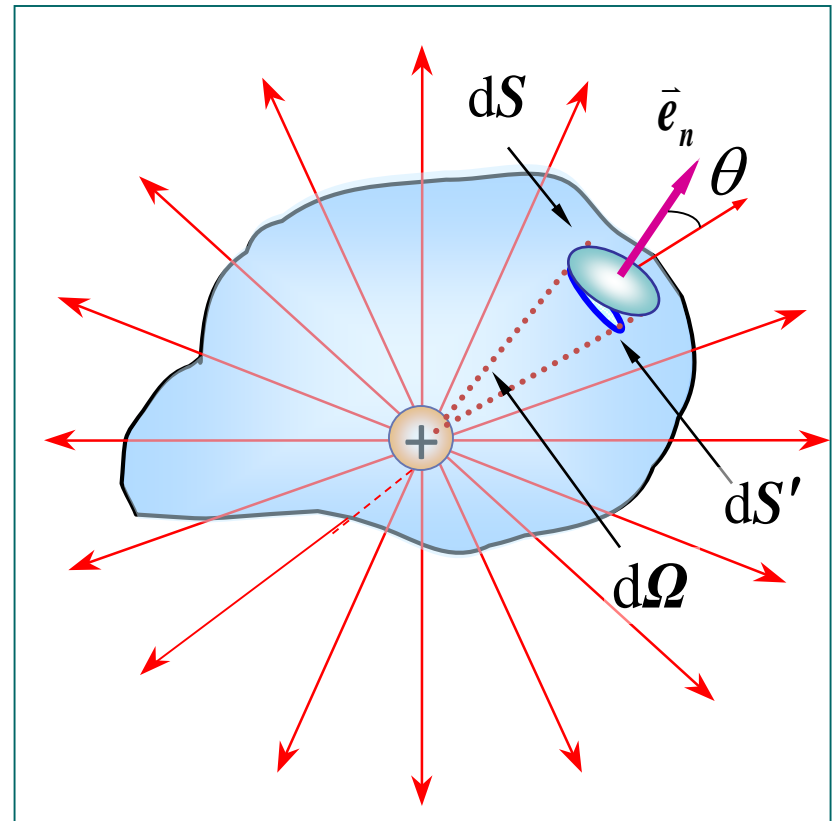
◆ 点电荷在闭合曲面内

$$d\Phi_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \cos \theta$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS'}{r^2}$$

$$\frac{dS'}{r^2} = d\Omega$$

$$\Phi_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$



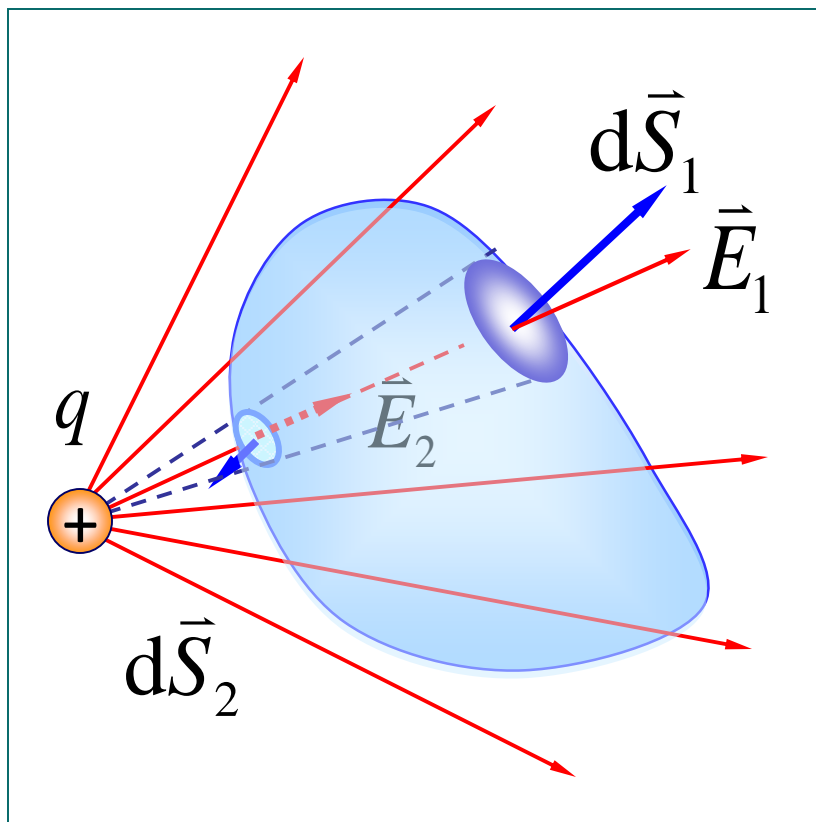
◆ 点电荷在闭合曲面外

$$d\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 > 0$$

$$d\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 < 0$$

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0$$

$$\therefore \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$





高斯定理的说明：

- (1) 高斯定理中的封闭曲面称为“高斯面”。
- (2) 定理中的场强是空间**所有电荷**共同产生的。
- (3) 电通量只与高斯面内包含的电荷代数和有关，
但应注意：封闭面内电荷的分布会影响场强分布。
- (4) 物理含义：高斯定理说明**静电场是有源场**。



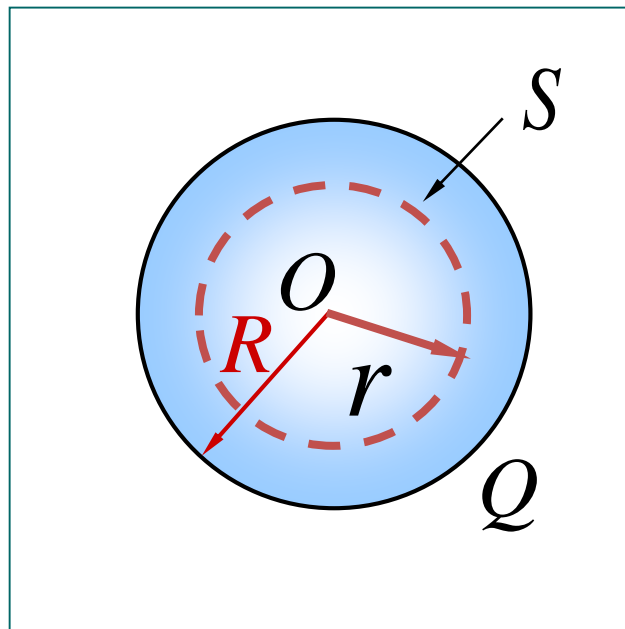
3 高斯定理的应用

用高斯定理求电场强度的一般步骤为：

- ◆ 对称性分析；
- ◆ 根据对称性选择合适的高斯面；
 - 1) 高斯面必须通过待求电场的场点；
 - 2) 高斯面的每部分法线与电场矢量的夹角已知（ $0, \frac{\pi}{2}$, 或已知确定角度）；
 - 3) 高斯面的全部或部分电场值不变；
- ◆ 应用高斯定理计算.



例1 设有一半径为 R ，均匀带电 Q 的球面。
求球面内外任意点的电场强度。



第一步：分析电场分布特点

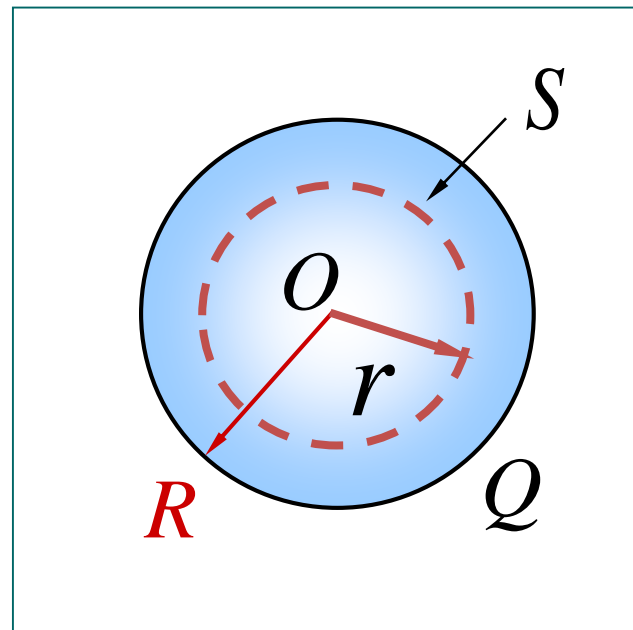
场强大小相同各点的集合是同心球面。

方向：沿径向向外。

第二步：选取合适的高斯面

取同心球面为高斯面。

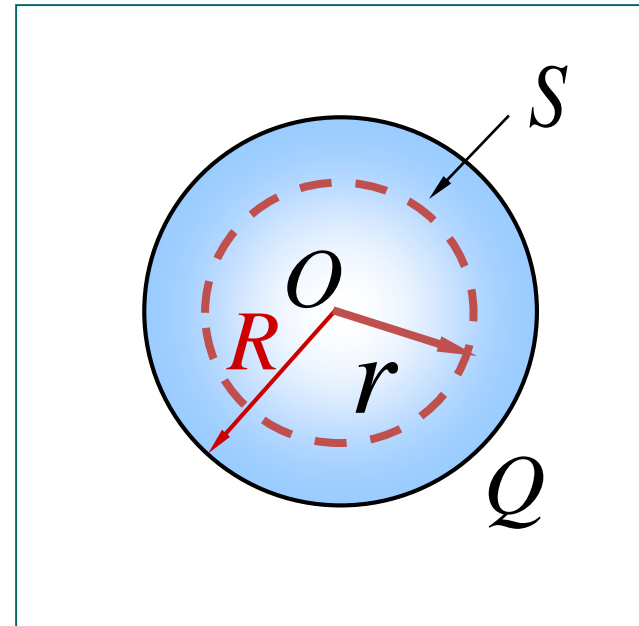
第三步：利用高斯定理计算



$$(1) \quad 0 < r < R$$

$$\therefore \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

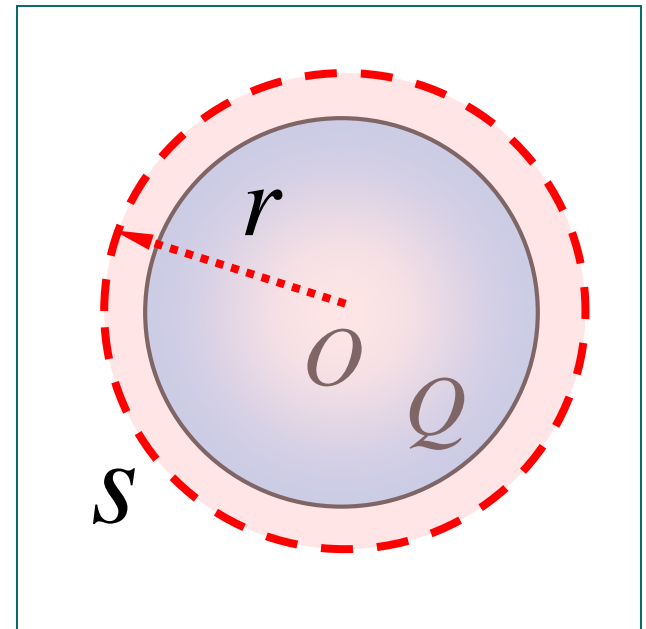
$$\therefore \vec{E} = 0$$



(2) $r > R$

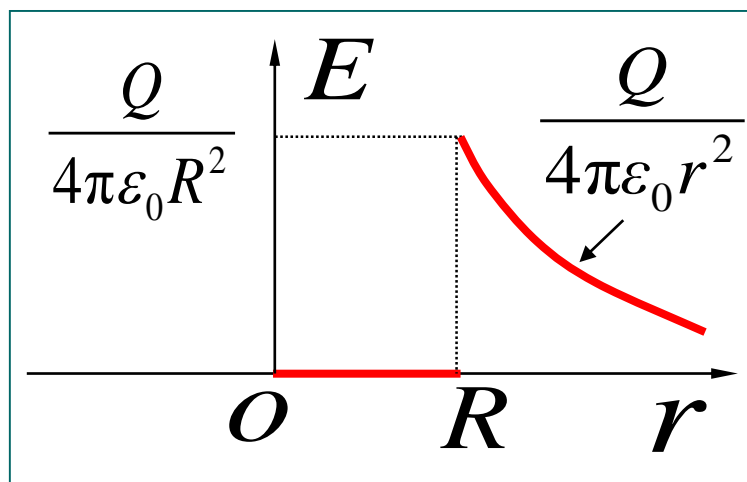
$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



结论

- (1) 均匀带电球面的场强在球表面不连续。
- (2) 均匀带电球面在其外部产生的场强，相当于把电荷全部集中于球心时点电荷的场强。

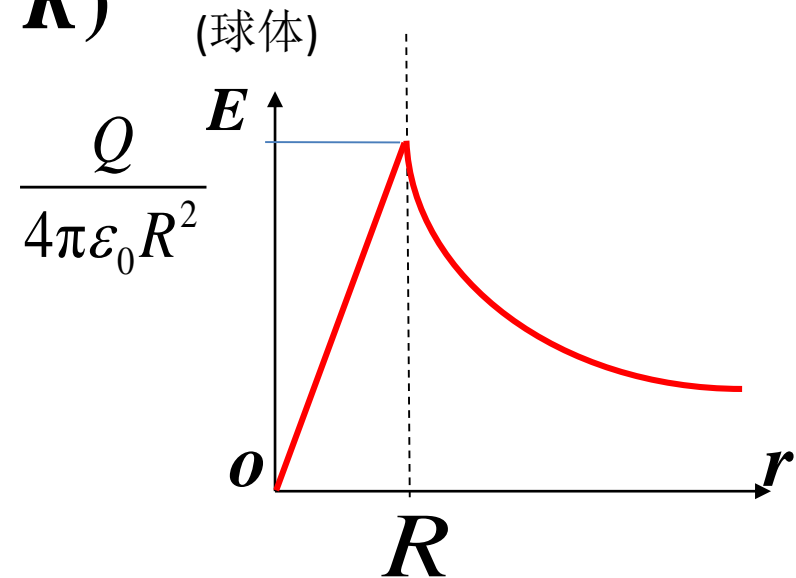




均匀带电球体的场强分布

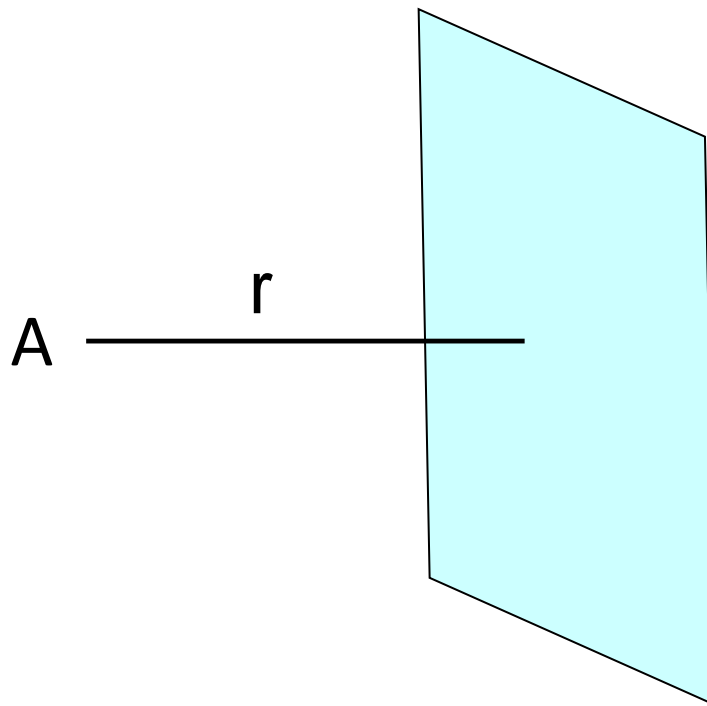
课本P303, 例 8.10

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}^0, & (r > R) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3} \vec{r}^0, & (r \leq R) \end{cases}$$





例2 设有一无限大均匀带正电平面，电荷面密度为 σ ，求距平面为 r 处某点的电场强度。



第一步：分析电场分布特点

场强方向：垂直平面且指向外。

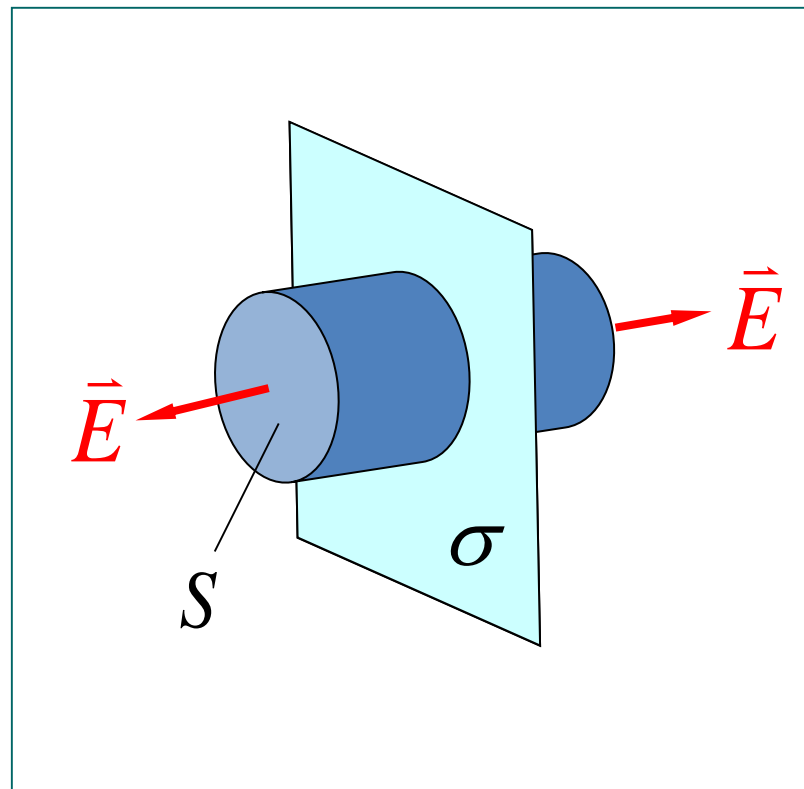
场强大小相同点的集合：

距平面等距的点。

第二步：选取合适的高斯面

取两底面与该平面平行且对称于该平面的封闭柱面为高斯面。

第三步利用高斯定理计算





通过此高斯面的电通量为：

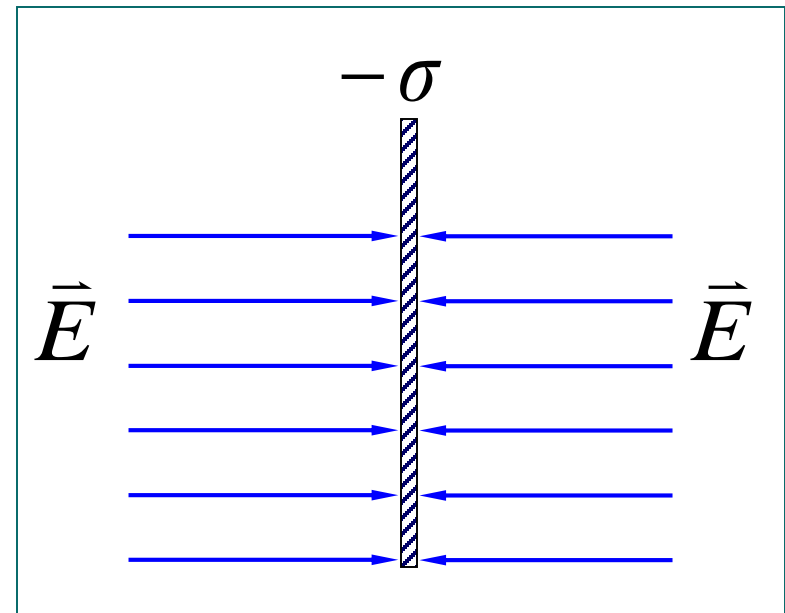
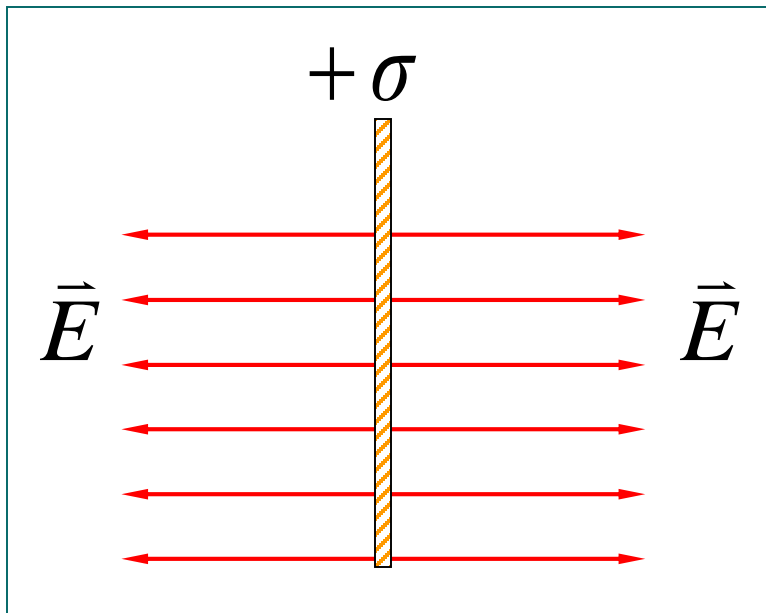
$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_{\text{侧面}} \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{=0} + \underbrace{\int_{\text{左底}} \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{=ES_0} + \underbrace{\int_{\text{右底}} \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{=ES_0}$$
$$= 2ES_0$$

高斯面内有：

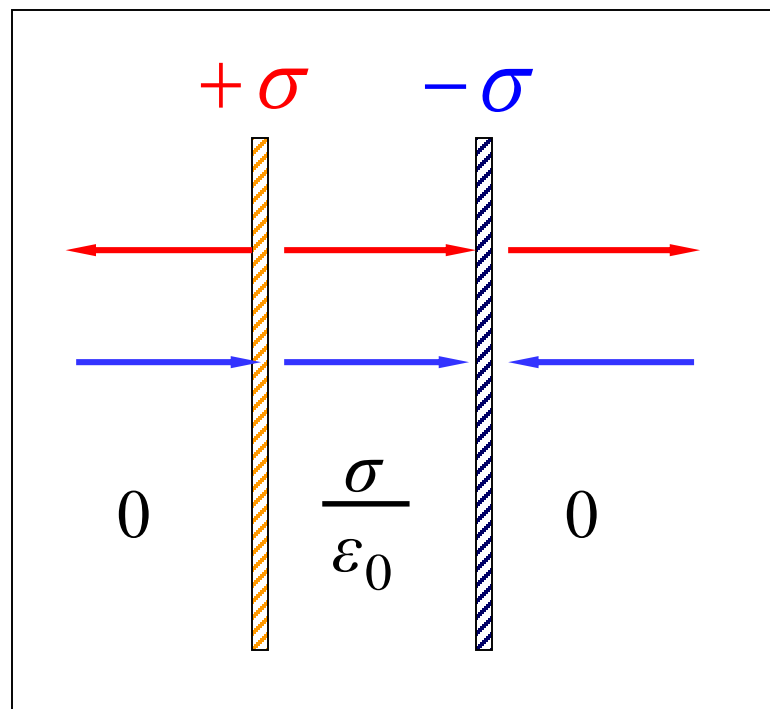
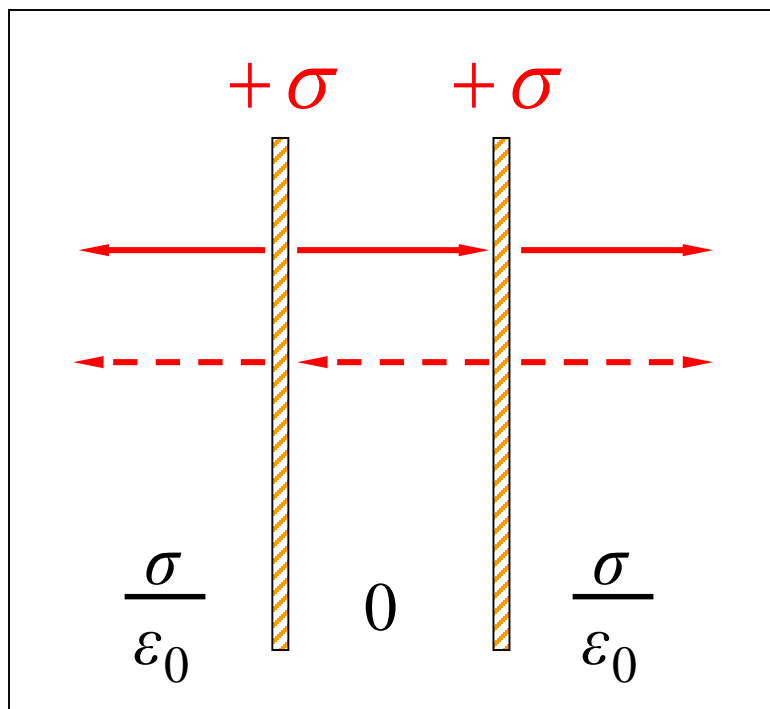
$$\frac{\sum q_{i\text{内}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S_0}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



无限大带电平面的电场叠加问题



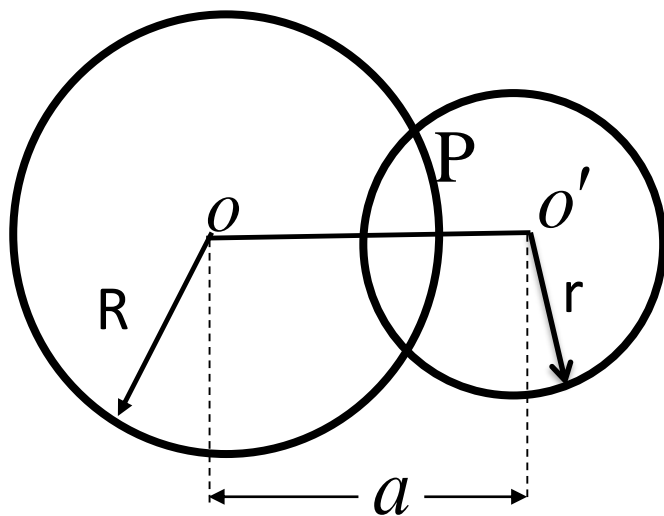


无限长均匀带电直线的电场分布

课本 P301 例8.8



例4. 半径分别为 R , r 的两球均匀带电。且相交，体电荷密度分别为 ρ 和 $-\rho$ 。两球相距为 a , $a < R+r$, 求两球面相交处 P 的电场矢量。（两球相交部分的电荷体密度为0）

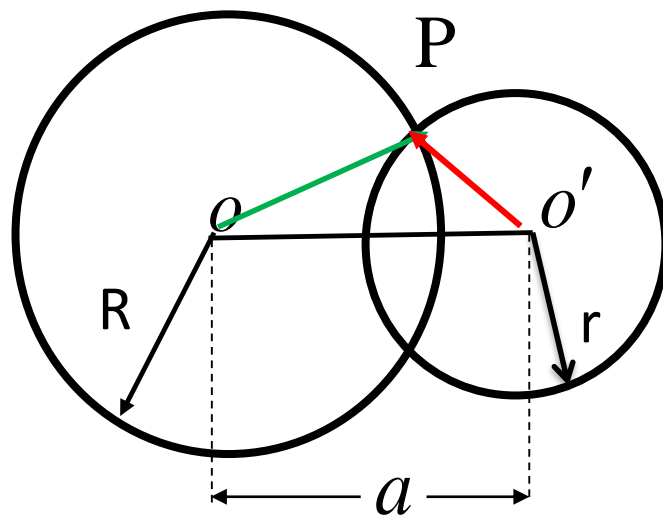


解：

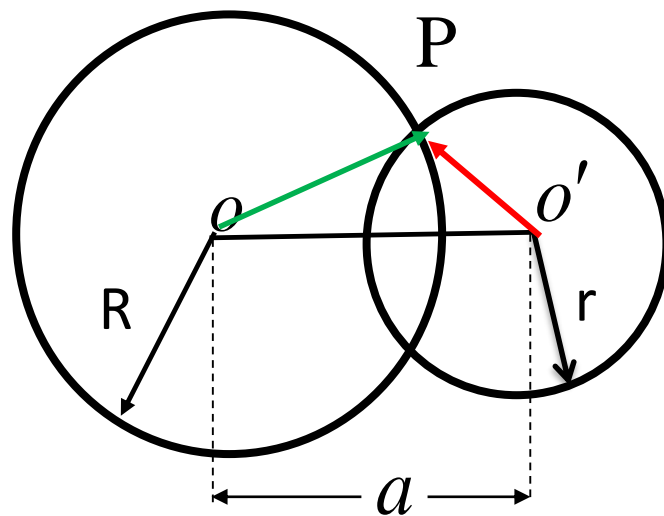
(1) 对称性不好，可以利用高斯定理及电场叠加原理求得。

(2) 先求单个球在P点产生的场强，然后叠加。可利用已知结果。

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3} \vec{r}^0 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3} \vec{r}^0 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$



$$\vec{E}_R = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OP}, \quad \vec{E}_r = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O'P} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{PO'}$$

$$\vec{E}_p = \vec{E}_R + \vec{E}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PO'}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OO'} = \frac{\rho a}{3\epsilon_0} \hat{O}\hat{O}'$$



作业

- P351 T8.10 T8.14 T8.16 T8.20;



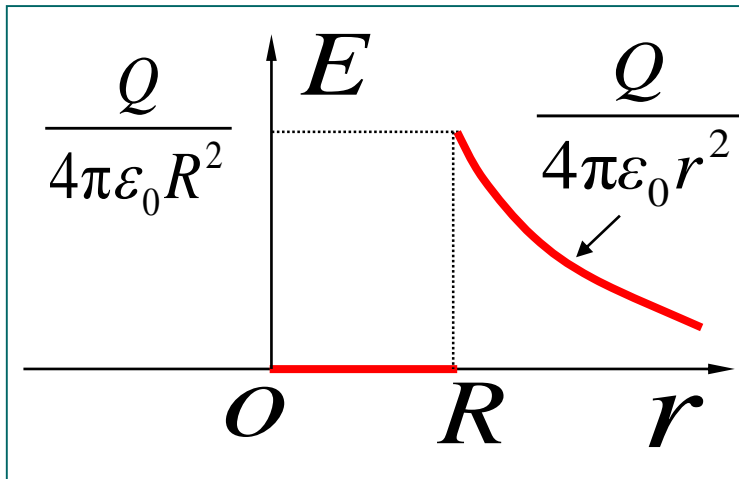
本次课的学习目标，您掌握了吗？

- 高斯定理
- 求解电场强度的方法

典型结论

均匀带电球面 (薄球壳)

$$E = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$$



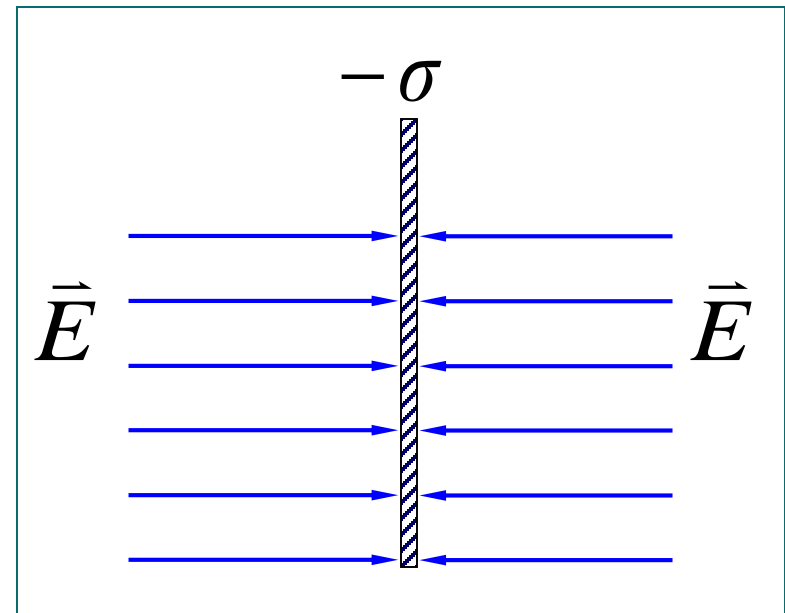
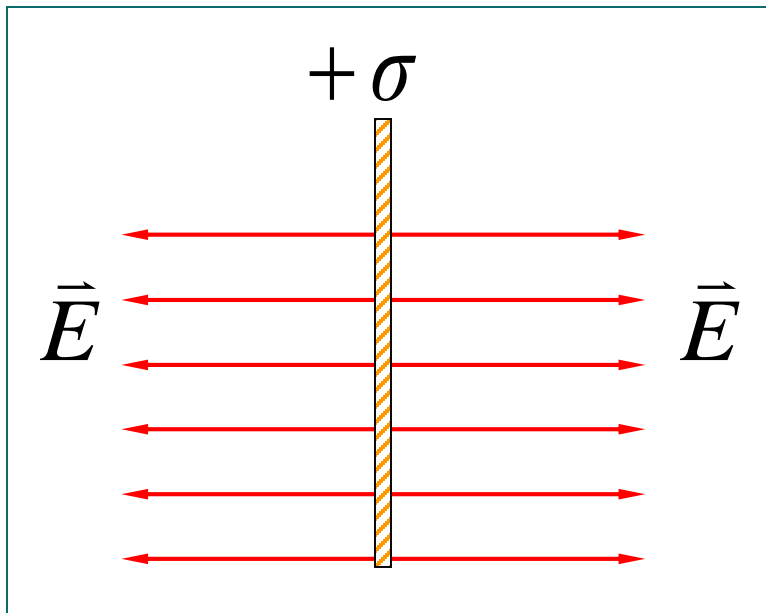
无限长均匀带电直线（及圆柱面）



$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{0} & r < R \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

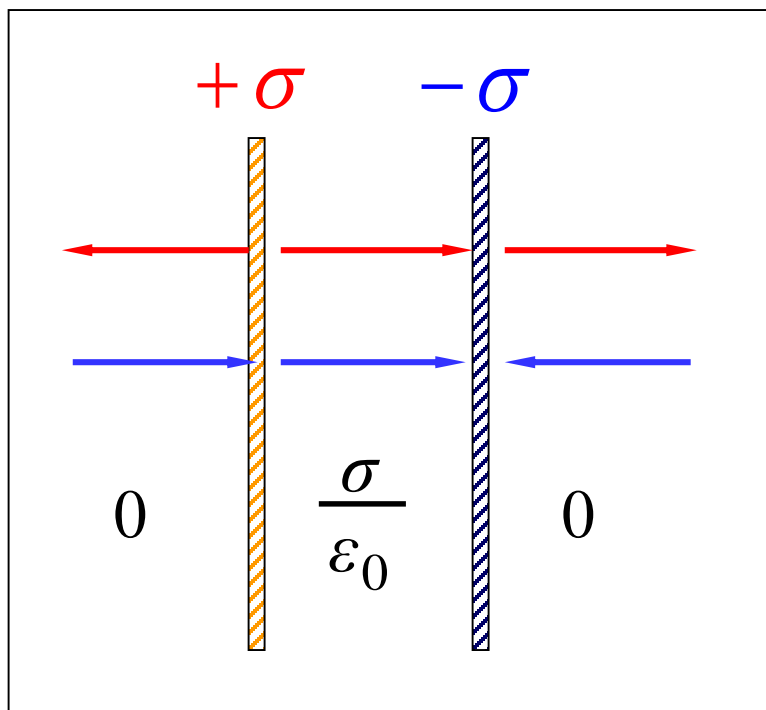
无限大均匀带电平面

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



无限大等量异号平行的均匀带电平面

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



关于利用高斯定理计算电场的说明：

(1) 能够运用高斯定理的几种情况：

- 1) 球对称分布：点电荷、均匀带电球体、均匀带电球面、均匀带电球壳等；
- 2) 轴对称分布：无限长带电细直线、无限长带电圆柱体、无限长带电圆柱面等；
- 3) 面对称分布：无限大带电平面、无限大带电平板等；
- 4) 以上三种对称分布带电体的组合。

