静电场的两个基本特性是什么？

通过本次课的学习，您将学会：

- 电势差和电势的计算
- 等势面
- 等势面和电场线的关系
- 如何由电势求解电场强度

五、电势的计算：

（一） 电势叠加原理:

$$\left.\begin{aligned} U_a &= \int_a^* \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \\ \vec{E} &= \sum \vec{E}_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow U_a = \int_a^* \sum \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_a^* \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_a^* \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cdots$$

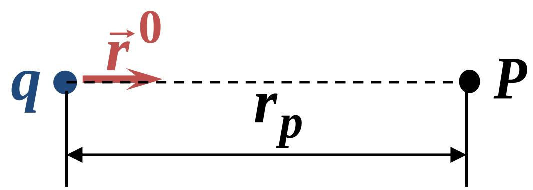
$$= U_{1_a} + U_{2_a} + \cdots$$

$$= \sum U_{ia}$$

（二） 电势的计算：

1. 点电荷电场中的电势：

取无穷远点电势为零，则P点的电势为：



$$U_p = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_p^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}^{\,0} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{r_p}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathrm{d}r \quad = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_p}$$

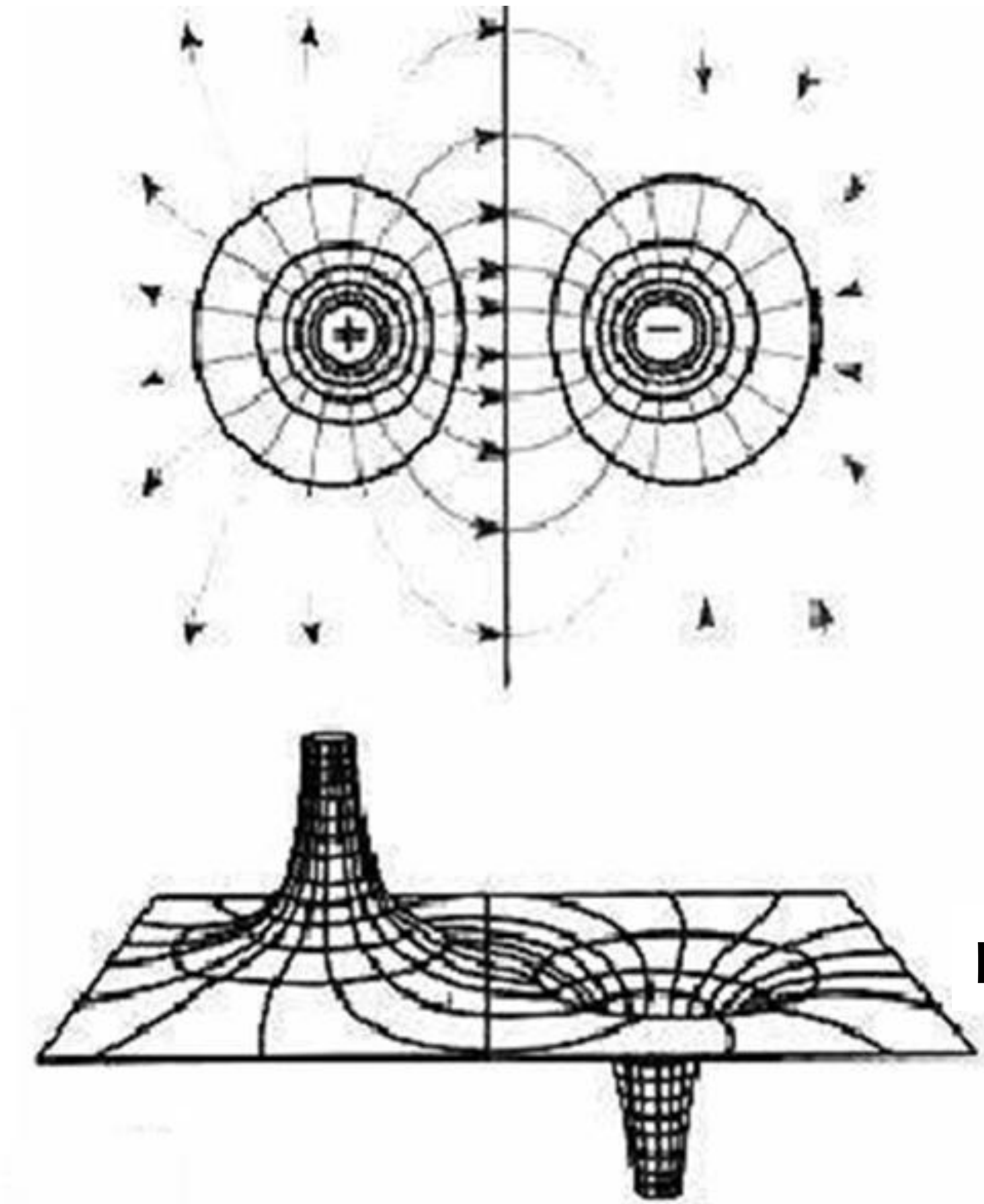
点电荷的电势

$$U_p = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_p}$$

$q > 0, \quad U_p > 0,$ 距源电荷越远电势越低

$q < 0, \quad U_p < 0,$ 距源电荷越远电势越高

以场源电荷q 为球心的同一球面上的各点电势相等

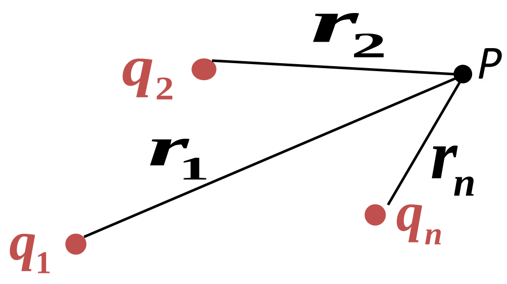


电势能0点

1. 点电荷电场中的电势：

$$U_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_P}$$

2. 点电荷系电场中的电势：

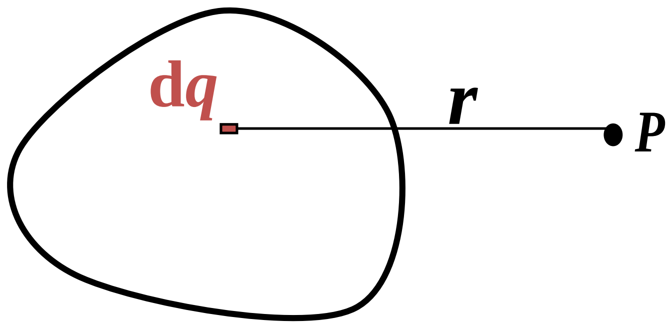


由电势叠加原理可得：

$$U_p = \sum U_{p_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{q_i}{r_i}$$

3. 连续分布带电体电场中的电势：

$$\mathrm{d}U_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r}$$



由电势叠加原理可得：

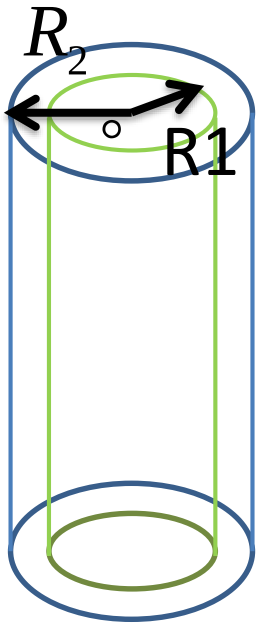
$$U_p = \int \mathrm{d}U_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_p^{*}\frac{\mathrm{d}q}{r}$$

电势计算的方法

$$U_P = \int_P^{*} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\boldsymbol{U_p = \int \mathrm{d}U_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_p^{*} \frac{\mathrm{d}q}{r}}$$

例1、两个无限长同轴圆柱薄直筒面，半径分别为R1和R2 ，两圆筒面都均匀带电，在外筒的内表面和内筒的外表面上，沿轴线方向单位长度的电量分别为 λ_1 和 λ_2 ，试求：



（1）离轴线r处的电势，已知 $r > R_2$

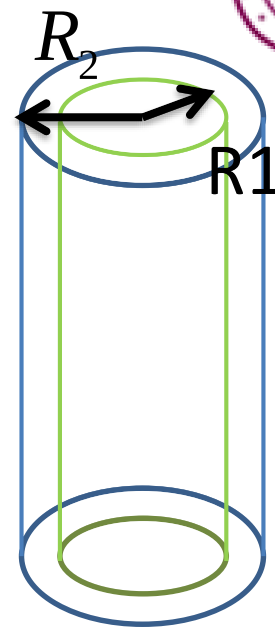
（2）两圆筒面之间的电势差。

解：利用高斯定理，很容易求出

$$E_1 = 0 (r < R_1)$$

$$E_2 = 2k\frac{\lambda_1}{r} (R_1 < r < R_2)$$

$$E_3 = 2k\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{r} (R_2 < r)$$



计算电势时，不能以 $r = \infty$，或 $r = 0$ 作为电势参考点。
本题选外圆筒面为电势零点。

离轴线r处的电势为：

$$U_e = \int_r^{R_2} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} = 2k(\lambda_1 + \lambda_2)\int_r^{R_2} \frac{dr}{r} = 2k(\lambda_1 + \lambda_2)\ln\frac{R_2}{r}$$

因此内筒与外圆筒的电势差：

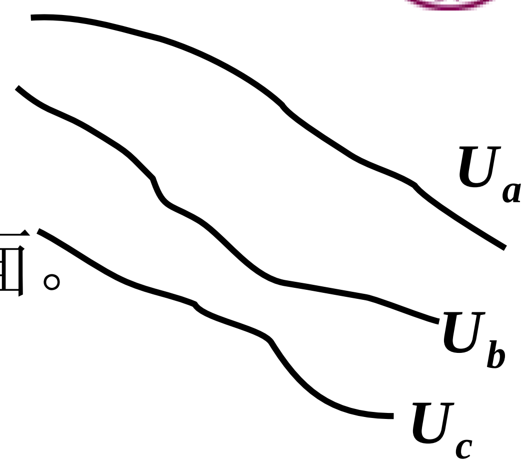
$$U_1 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = 2k\lambda_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = 2k\lambda_1 \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\Delta U = U_1 - 0 = U_1$$

必看：

课本： 例 8.15–8.23

七 等势面 、场强与电势的关系



(一) 等势面：

1. 定义：电场中电势相等的点构成的面。

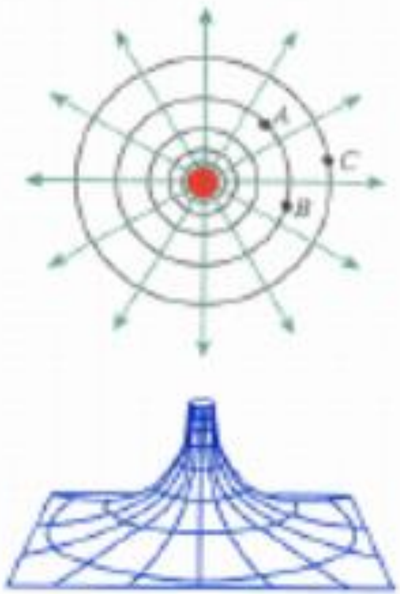
2. 作图规定：

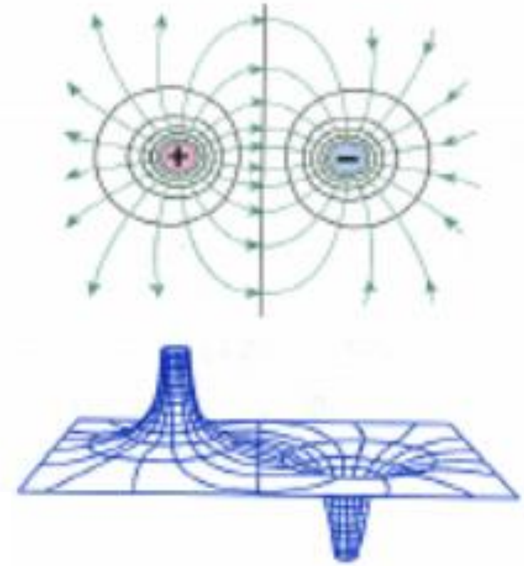
任意相邻等势面间的电势差相等。

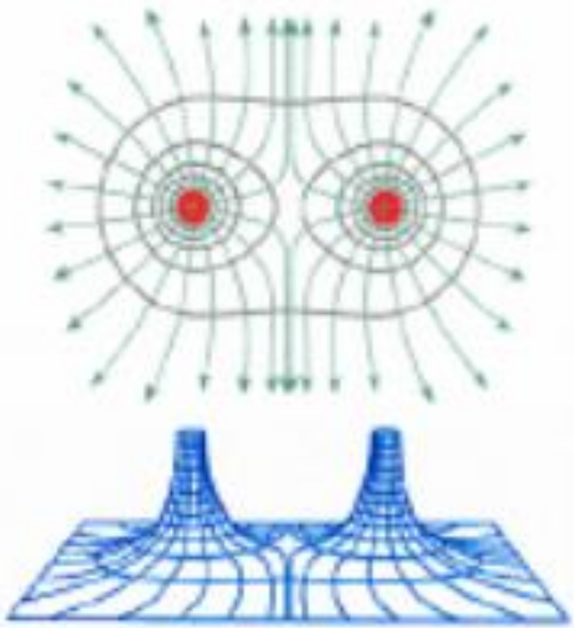
$$U_a - U_b = U_b - U_c$$

点电荷电场的等势面：

$$U_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_p} \Rightarrow \begin{cases} \text{一组同心球面。} \\ \text{内密外疏。} \end{cases}$$


A
C
B

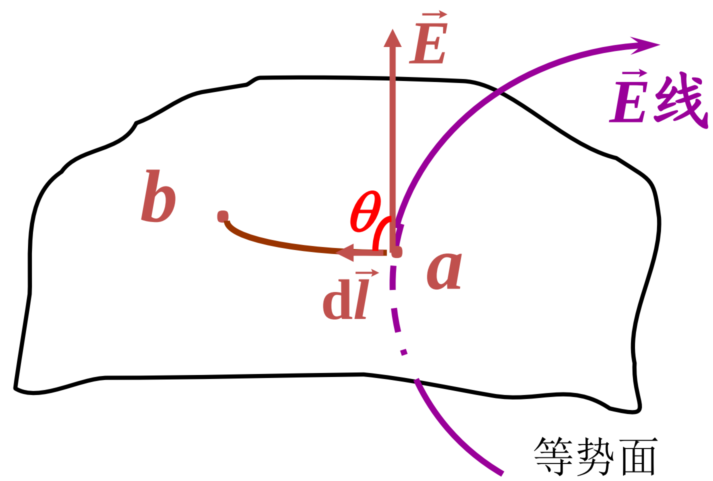

+
−



（二） 等势面与电场线的关系：

1. 等势面与电场线处处正交。

电荷q_0在等势面上自a至b的过程中电场力的功为：



$$A = q_0 U_{ab} = 0$$

$$A = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= q_0 \int_a^b E\,\mathrm{d}l \cos\theta$$

$$q_0 \neq 0 ; E \neq 0 ; \mathrm{d}l \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = 0$$

即： $\theta = \pi/2$

2.　等势面的疏密反映了电场的强弱。

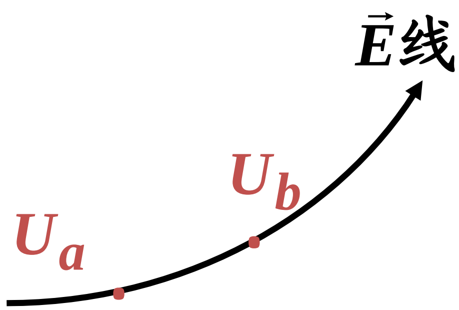
等势面较密集的地方场强大，较稀疏的地方场强小。

3.　电场线方向指向电势降落（减小）方向。

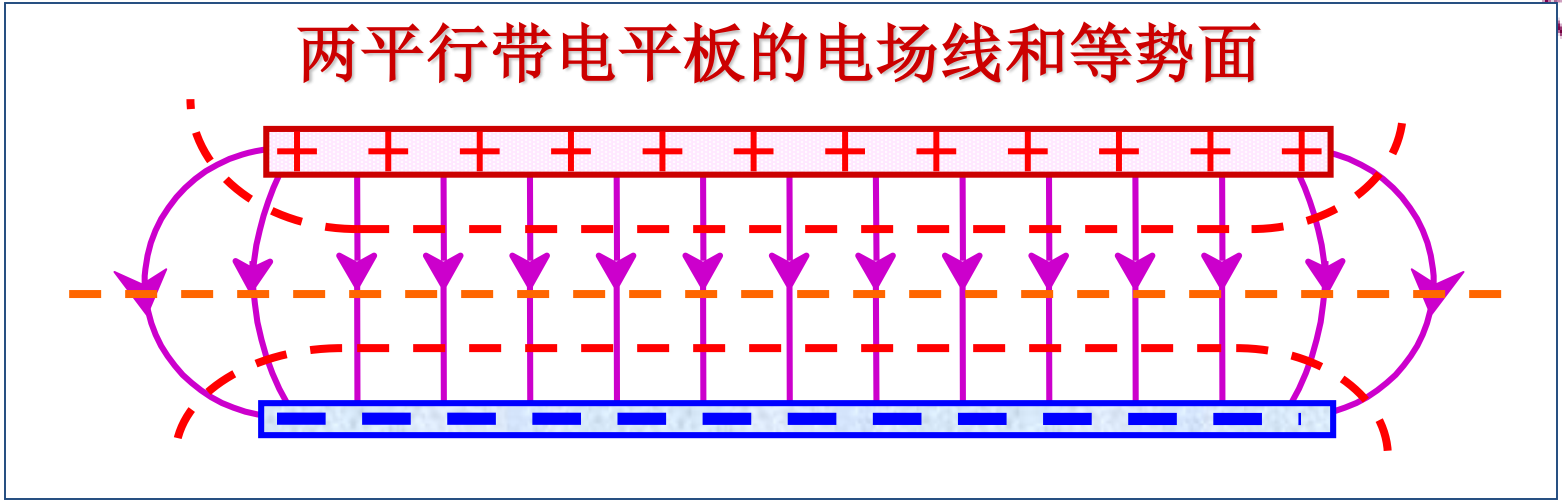
$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

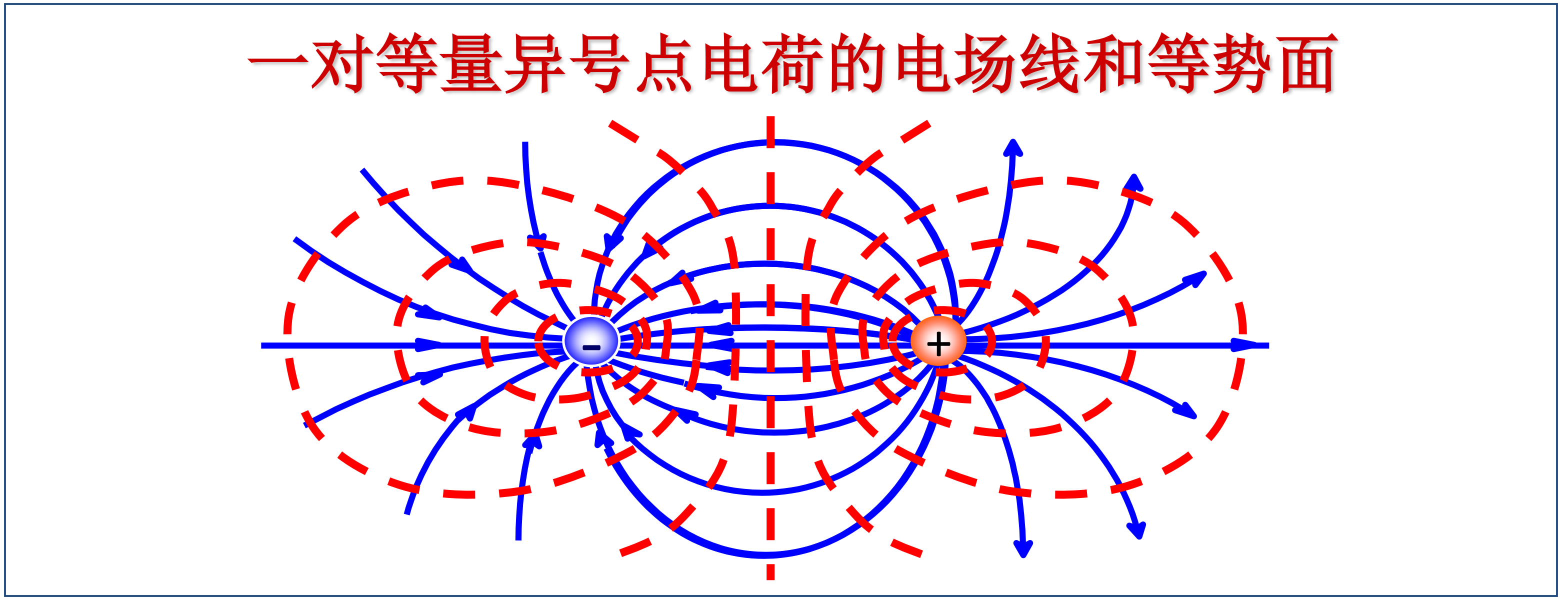
$$= \int_a^b E\,\mathrm{d}l \cos 0 > 0$$

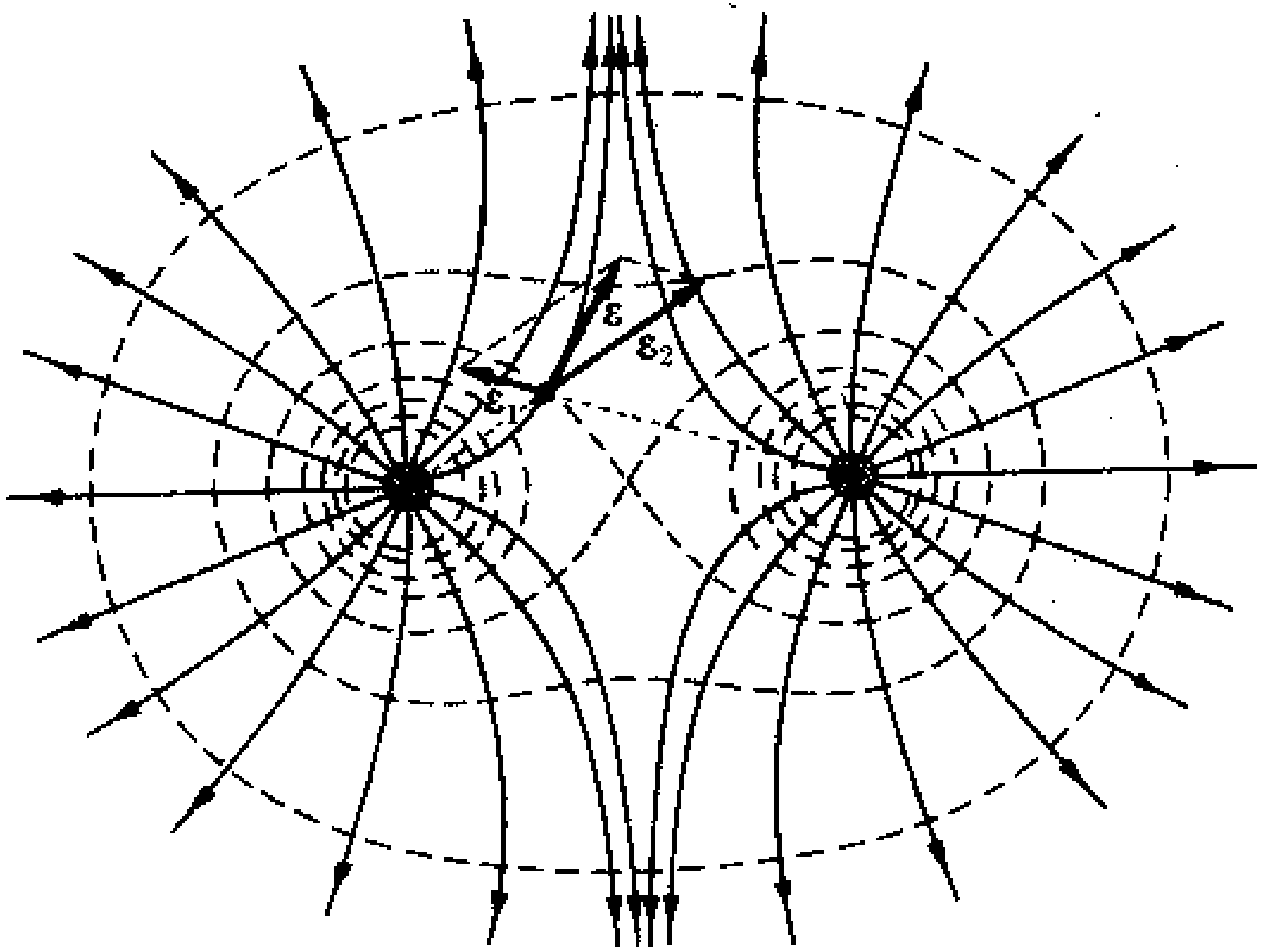
$$\Rightarrow \quad U_a > U_b$$



某些等势面







两个等量的正电荷的电场线和等势面

电场强度(矢量)和电势（标量）都是描述电场性质的物理量。

电场强度(矢量)和电势（标量）有什么关系?

由电场强度求电势

$$U_a = \int_a^{*} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

由电势如何求电场强度？

（由标量求矢量）

高等数学 --- 梯度

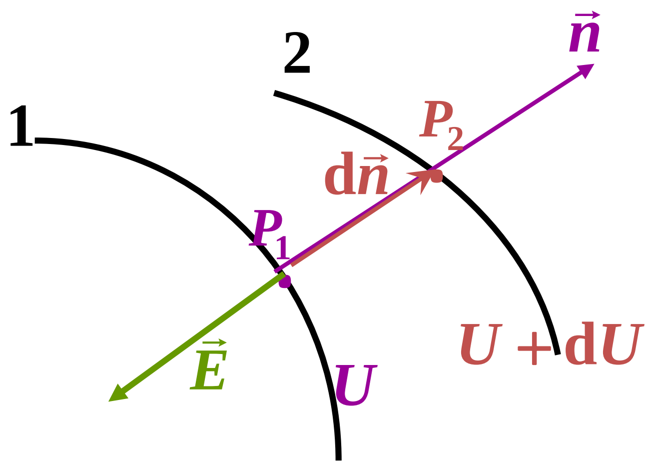
（三）场强与电势的关系：

1.　电势的空间变化率与电势梯度：

取两个非常邻近的等势面1、2，$\mathrm{d}U > 0$。

规定：法线n的单位矢量指向电势升高的地方。

设：$P_1P_2=\mathrm{d}n$，　则：$\overline{P_1P_2}=\mathrm{d}\vec{n}$



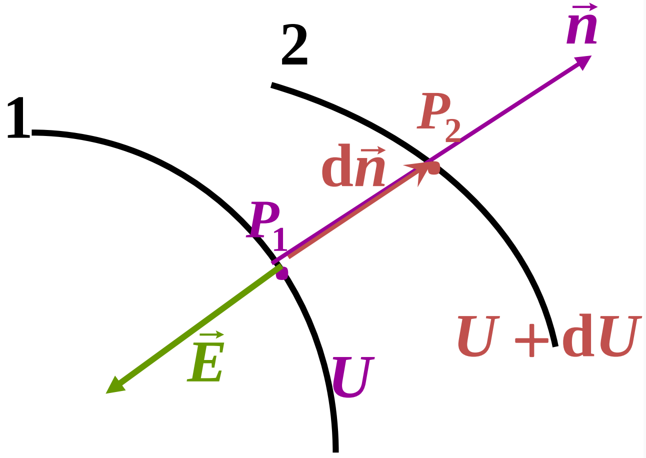
电势梯度：$$\boxed{\mathrm{grad}U=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{n}}$$

物理意义：电势梯度反映了电势在空间变化最快的情况

2. 场强与电势梯度的关系：

（1） 试验电荷q_0自P_1沿法线移至P_2的过程电场力的功：

$$\mathrm{d}A = q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{n} = q_0\left|\vec{E}\right|\mathrm{d}n\cos\pi = -q_0\left|\vec{E}\right|\mathrm{d}n$$



$$\mathrm{d}A = q_0[U-(U+\mathrm{d}U)] = -q_0\mathrm{d}U$$

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n} \xrightarrow{\vec{E}\uparrow\downarrow\vec{n}} \boxed{\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{n} = -\mathrm{grad}\,U}$$

静电场中各点场强

大小等于该点电势空间变化率的最大值

方向指向电势降落的一侧。

一般情况： $$U = f(x, y, z)$$

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)U = -\nabla U$$

$\boxed{\vec{E}=-\nabla U}$给出了求电场强度矢量的第三种方法：

电荷分布→电位分布函数→电位梯度→$\vec{E}$

梯度的表达式：

在直角坐标中：$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

在柱坐标中：$\nabla=\frac{\partial}{\partial \rho}\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

在球坐标中：$\nabla=\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{\phi}$

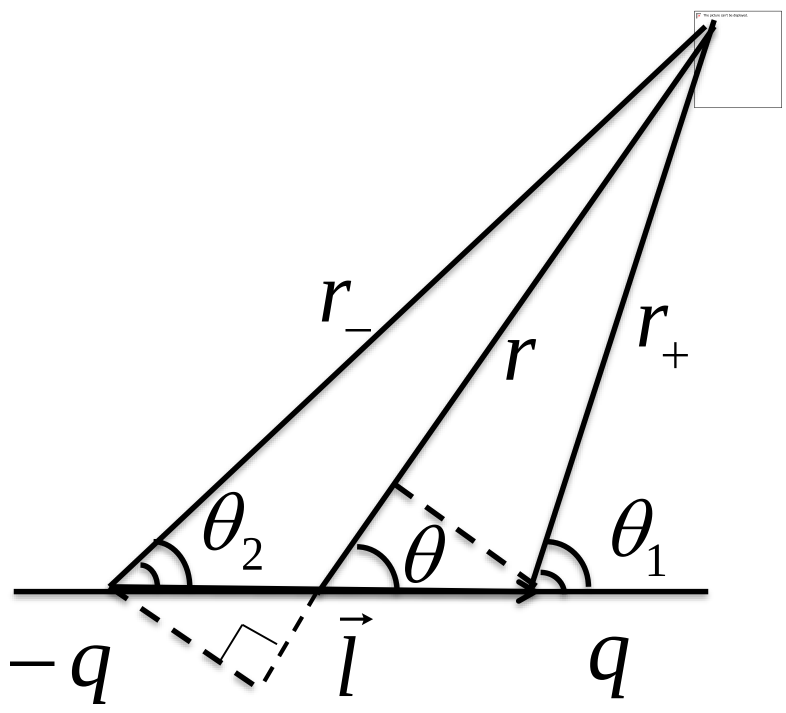
求电场强度的三种方法

利用电场强度叠加原理

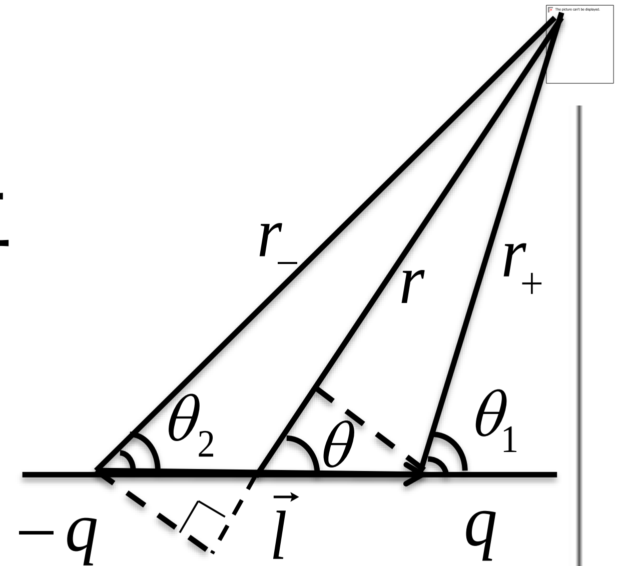
利用高斯定理

利用电势与电场强度的关系

例2、试求电偶极子在远区的电场和电势分布。



解：电偶极子的正、负点电荷，在场点A产生的电势分别记作 U_+, U_- ，电偶极子在A点产生的电势记作U_A。则有：



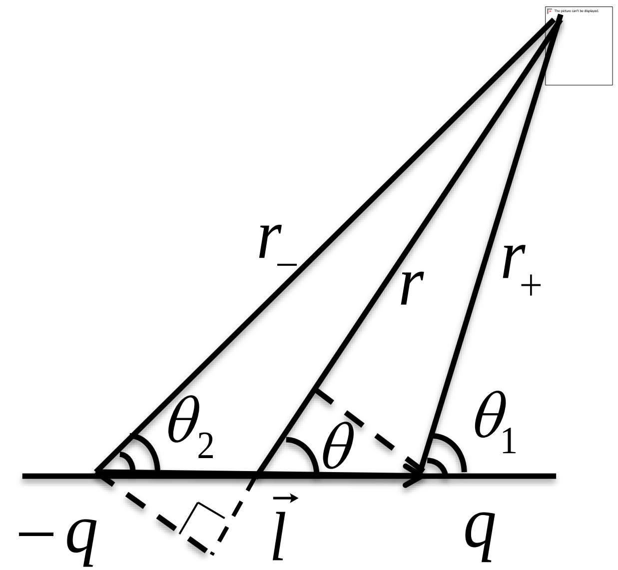
$$U = U_+ + U_- = kq\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = kq\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right)$$

$$r_+ \approx r - \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$r_- \approx r + \frac{l}{2}\cos\theta$$

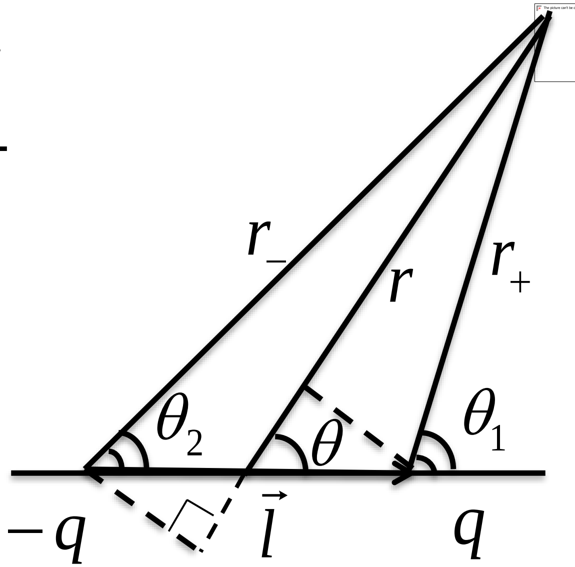
$$r_- - r_+ = l\cos\theta,$$

$$r_- r_+ = r^2 - \frac{l^2}{4}\cos^2\theta \approx r^2$$



$$U = U_{+} + U_{-} = kq\left(\frac{1}{r_{+}} - \frac{1}{r_{-}}\right) = kq\left(\frac{r_{-} - r_{+}}{r_{+} r_{-}}\right)$$

$$U_{A} = kq\frac{l\cos\theta}{r^{2}} = k\frac{\mathrm{P}\cos\theta}{r^{2}} = k\frac{\vec{\mathrm{P}}\cdot\vec{r}}{r^{3}}$$



$$E_{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} = k\frac{2P\cos\theta}{r^{3}}$$

$$E_{\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta} = k\frac{P\sin\theta}{r^{2}} \qquad E_{\varphi} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0$$

单选题 1分

设置

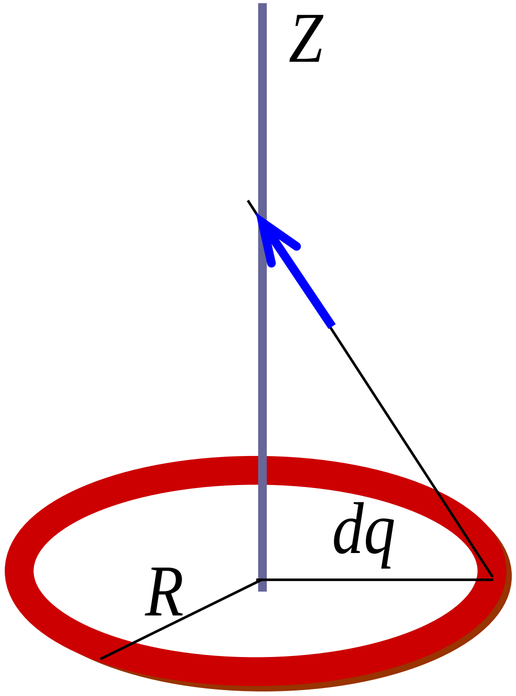
电场强度为零的地方，电势是否为零？

A 是

B 否

提交

例3、半径为R的圆环均匀带电，总电量为q，求其轴线上的电势分布。



解：在圆环上，任取一段线元dl,

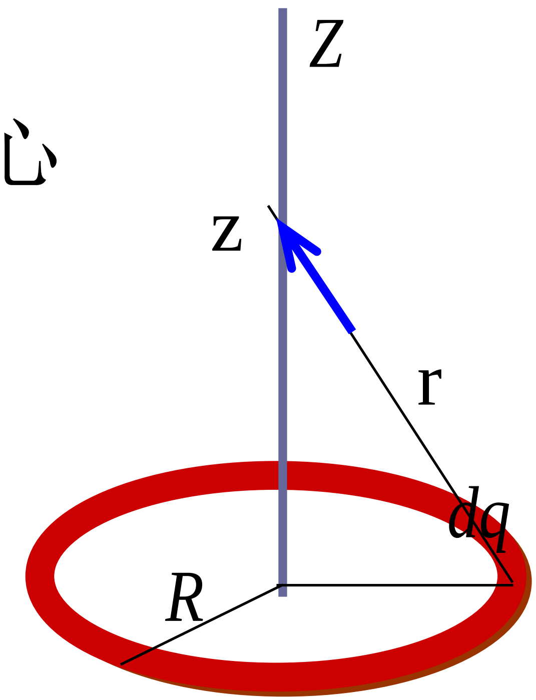
带电量为$dq = \lambda dl = \dfrac{q}{2\pi R} dl$

此电荷元在圆环轴线上，离环心

为z的P点产生的电势为

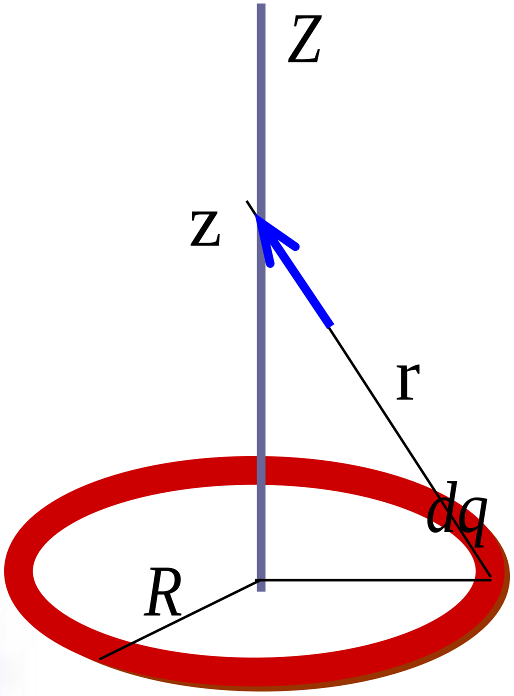
$$dU_P = k\frac{dq}{r} = k\frac{1}{r} \cdot \frac{q}{2\pi R} dl$$

其中$r = \sqrt{R^2 + z^2}$



根据电势叠加原理，整个圆环在P点产生的电势为

$$\int dU_P = \int_0^{2\pi R} k\frac{1}{r}\cdot\frac{q}{2\pi R}dl = k\frac{q}{r}$$



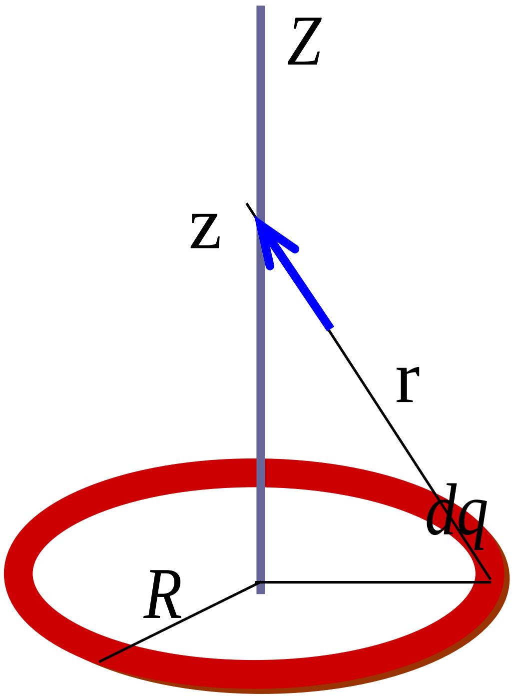
$$U_P = k\frac{q}{r} = k\frac{q}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

- 若场点P离圆环很远，即|z| ≫ R,因此整个圆环在P点产生的电势为

$$U = k\frac{q}{|Z|}$$

- 当场点位于圆环中心时，z=0, r=R,

$$U_{环心} = k\frac{q}{R}$$



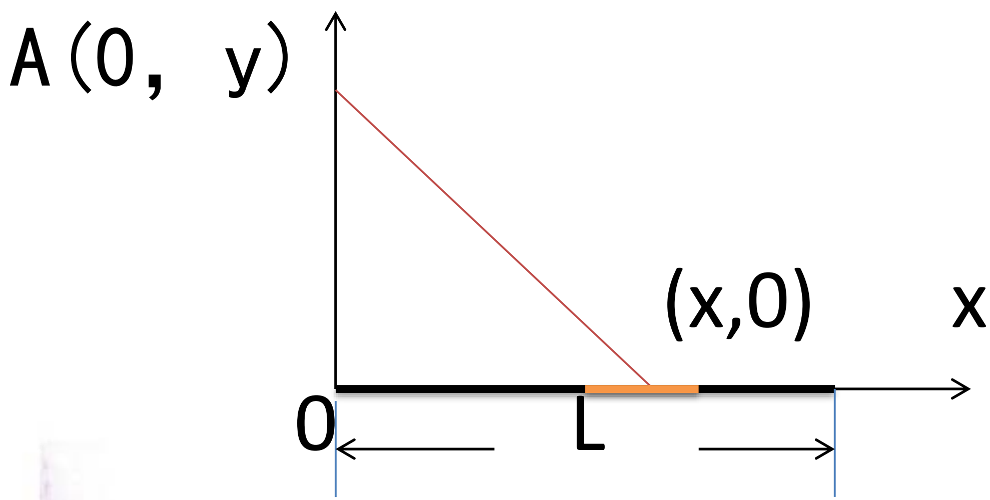
电场强度为零的地方，电势可不为零

例4、如图，沿着x轴放置一根均匀带电细棒，棒两端的坐标分别为（0,0）和（L，0），电荷线密度为$\lambda=\beta x$,其中β为常数，试求：

（1）y轴上，坐标为（0，y)的A点电势U_A。

（2）A点电场矢量的y轴分量。

（3）能否由A点的电势值，求A点电场矢量的x轴分量E_x？



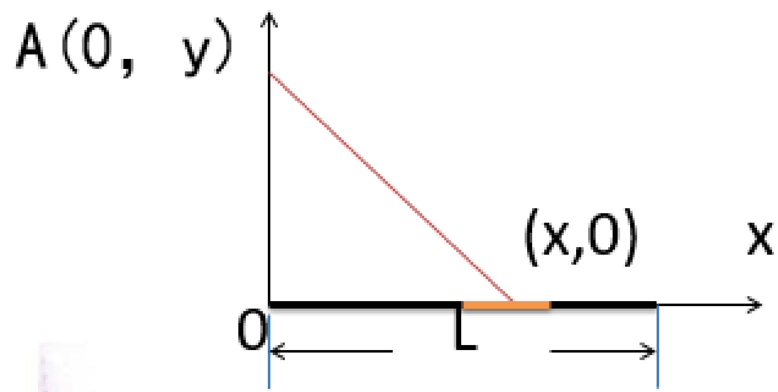
解（1）在（x, 0）处，任取一线元dx，其电量为 $dq=\lambda dx=\beta x dx$，选无穷远点为电势零点，则线元上电荷dq在A点产生的电势为：

$$dU=\frac{kdq}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

根据电势叠加原理，细棒上电荷在A点产生的总电势为：

$$U_A=\int_0^L dU=\int_0^L k\frac{\beta x dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\beta k(\sqrt{L^2+y^2}-|y|)$$



（2）$E_y = -\frac{\partial U_A}{\partial y} = -\beta k y(\frac{1}{\sqrt{L^2+y^2}} - \frac{1}{|y|})$

（3）求U_A时，假设A点在x=0的y轴上，于是U_A表达式中未出现变量x，也就是说U_A没有反映电势沿x轴的变化规律，当然也就无法得到E_x了。

作业：

P353　T8.30　T8.34　T8.37　T8.38

本次课的学习目标，您掌握了吗？

- 等势面
- 等势面和电场线的关系
- 如何由电势求解电场强度

小结：

综上可知：计算电势有两种基本方法：

（1）**定义法**：已知的电场分布，求电势。

$$U_P = \int_P^{参考点} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

计算过程中应注意：

（A）积分区间内，不是单一表达式，应分段积分。

（B）充分利用$\vec{E}$的线积分与路径无关，选择最佳积分路线。

（C）参考点选取：有限大小，选取无穷远；无限大小，在有限空间内，但要使$\vec{E}$在该点有意义。

（2）**叠加法**：

电荷离散分布：$U_P=\sum_{i=1}^{n}U_i=k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$

电荷连续分布：$U_P=\int dU=k\int\frac{dq}{r}$