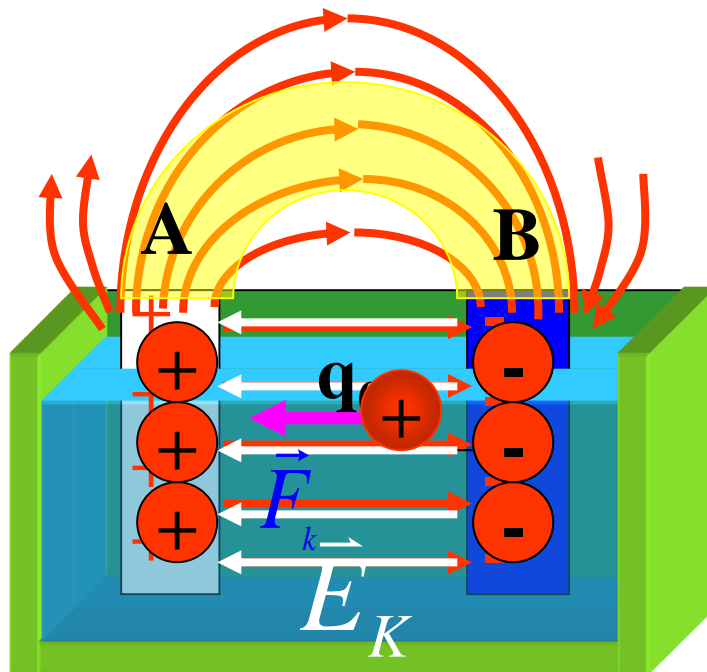


课前热身



- 法拉第电磁感应定律的内容是什么；
- 楞次定律说的是什么？
- 对于电源而言，非静电力的作用是什么？



电动势： 非静电力将单位正电荷从负极拉到正极，
非静电力做的功。

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$



感应电动势对应的非静电力/场是什么？

通过本次课的学习，您将：

- 动生电动势
- 涡旋（感生）电动势
- 会计算动生电动势和感生电动势

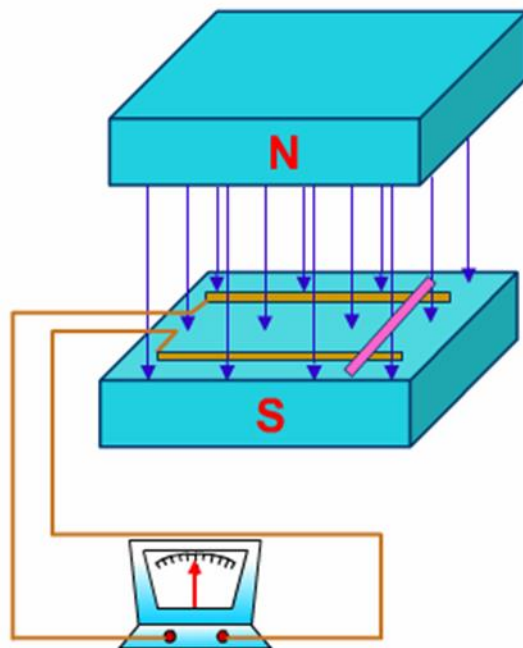


§ 10. 2动生与涡旋电动势

- (1) 感应电动势对应的非静电力/场是什么？
- (2) 如果没有闭合环路，是否有感应电动势？
- (3) 如果没有导体，是否有感应电动势？

一、动生电动势

导体在磁场中运动产生的电动势

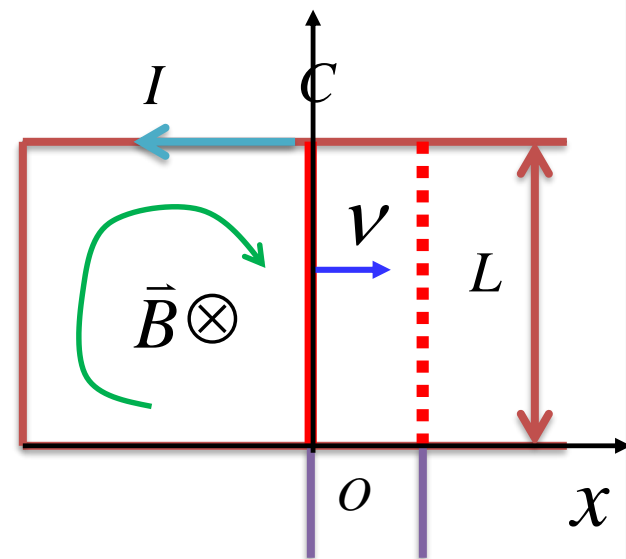




例： 导线在导体轨道上以速度 v 匀速向右侧运动，
磁场如图所示， 请求出闭合回路产生的电动势。

由法拉第电磁感应定律可得：

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \iint dS = BLx$$



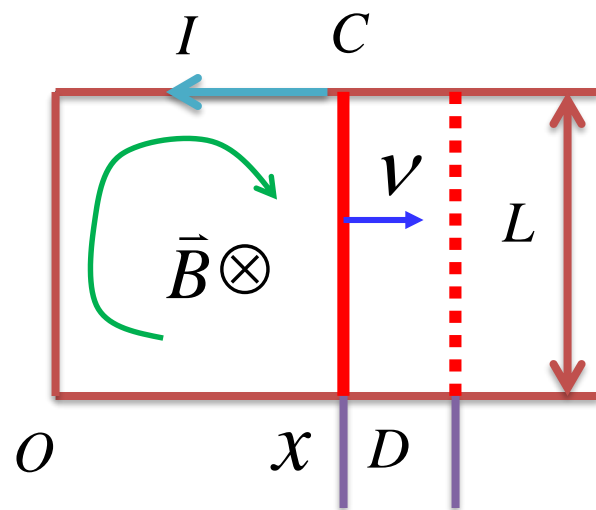
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -BL \frac{dx}{dt} = -BLv$$

$\because \varepsilon < 0, \quad \therefore \varepsilon$ 方向为逆时针。

问题：



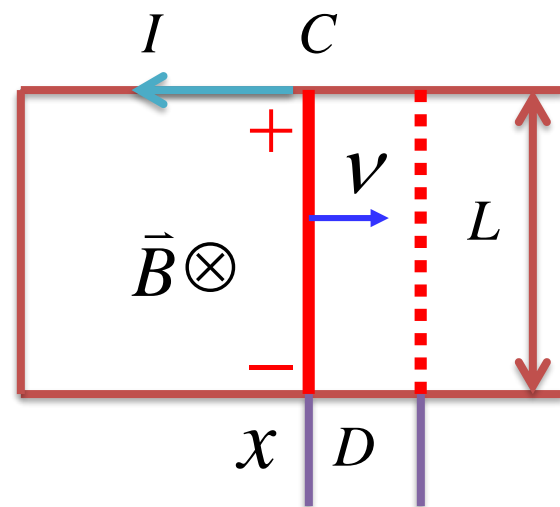
- 这样的动生电动势从微观角度是如何产生的？
- 动生电动势对应的非静电力是什么力？



提出猜想： 洛伦兹力为非静电力

稳态： 静电场阻碍这种运动，达到平衡时，静电力与洛伦兹力大小相同。

$$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$



若洛伦兹力为非静电力， C、D端存在稳定的电位差，
即CD构成电源， C为正极， D为负极。

定量证明



非静电场:

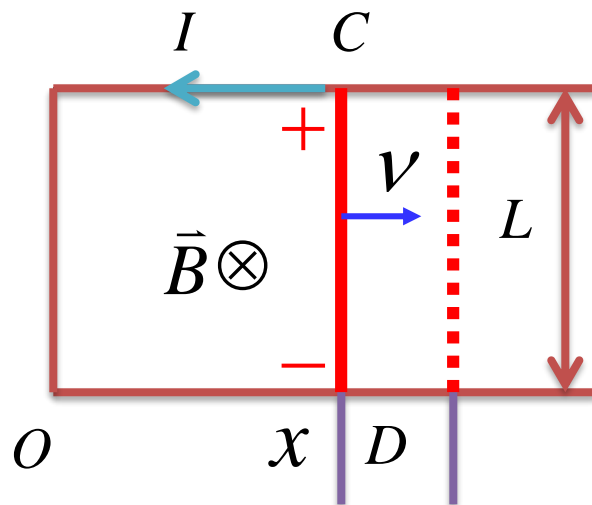
$$\vec{E}_k = \frac{\vec{F}_k}{q}$$

电源电动势

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

由于在外电路中 $\vec{E}_k = 0$

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$



非静电力： 洛伦兹力

任务： 根据电动势的原始定义， 求解电动势。

预期目标：

与应用法拉第电磁感应定律求出的结果一致。

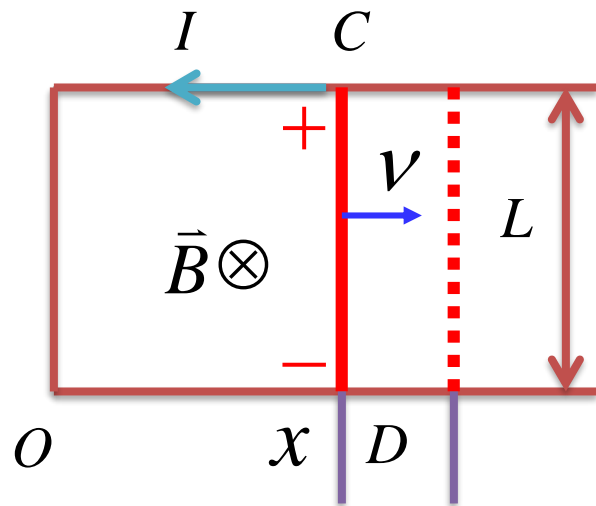


- 非静电场:

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}}{-e} = \frac{-e(\vec{v} \times \vec{B})}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$$

- 根据电源电动势定义:

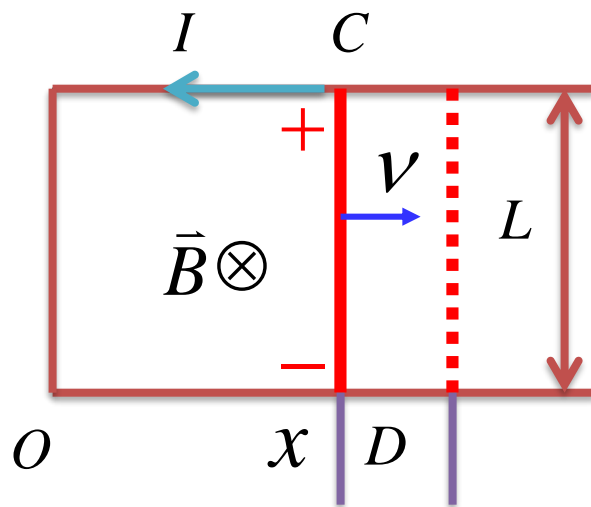
$$\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l} = \int_D^C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_D^C Bv dl = BLv$$



其结论与法拉第定律的结论相同，假设成立，即非静电力是洛伦兹力。



- 动生电动势只分布在运动的导体上，与回路中不运动的部分无关。
- 实际上，即使不存在回路，只要有运动的导体，电动势就存在，而且大小不变，相当于一个开路电源。





对于动生电动势

- 动生电动势的非静电力是洛伦兹力
- 电动势分布于运动的导体上
- 产生静电场。



动生电动势的计算公式

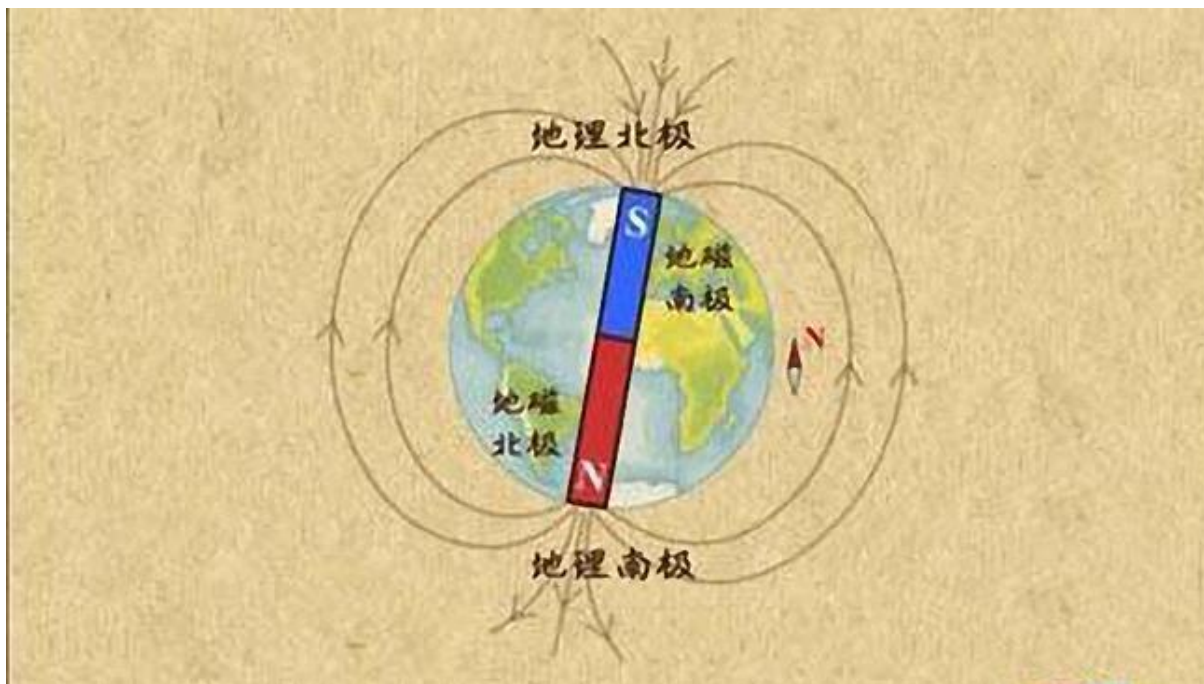
在磁场中任一运动导体L:

$$d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (\text{正负与} d\vec{l} \text{ 有关})$$

\vec{v} 是导线线元 $d\vec{l}$ 相对于磁场 \vec{B} 的速度。

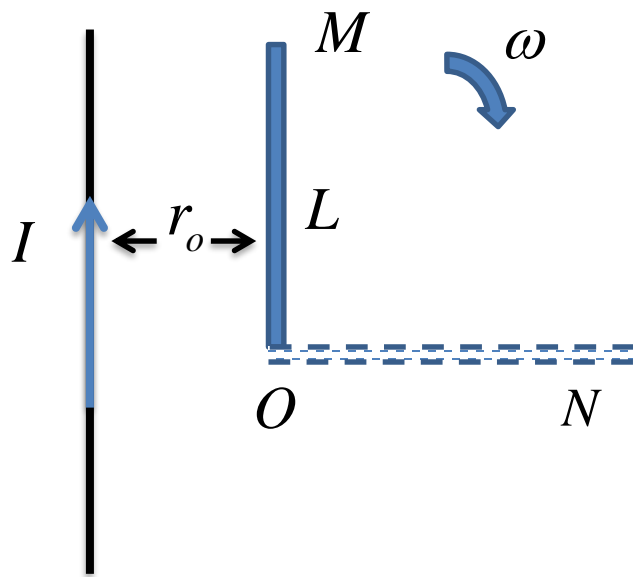
\vec{v} 、 \vec{B} 可以是不均匀的， L 可以是任意形状的。



一架飞机由东向西垂直于磁力线飞行，飞机的机翼两端是否有电势差？



例1、长为 L 的金属棒，绕 O 点，以均角速度 ω 沿顺时针方向旋转。在同一平面内，有一载有稳恒电流 I 的无限长直导线，试分别求棒旋转到 OM 和 ON 位置时，金属棒两端的感应电动势。

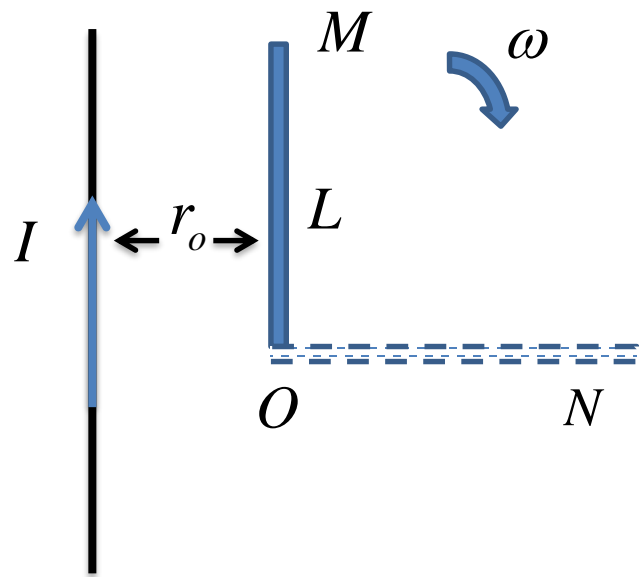


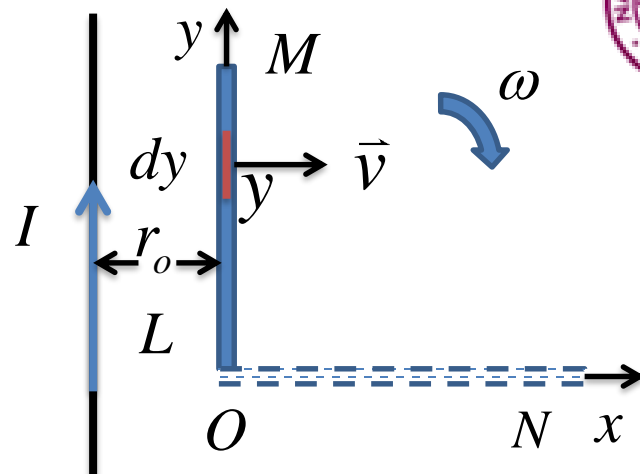


解：可用动生电动势特有方法：
载流直导线产生的磁感矢

量 \vec{B} 的数值为： $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$\mathcal{E} = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$





OM位置:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \int_0^M (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= \int_0^L \omega y B dy = \frac{\omega B}{2} L^2 = \frac{\mu_o I}{4\pi r_o} \omega L^2\end{aligned}$$

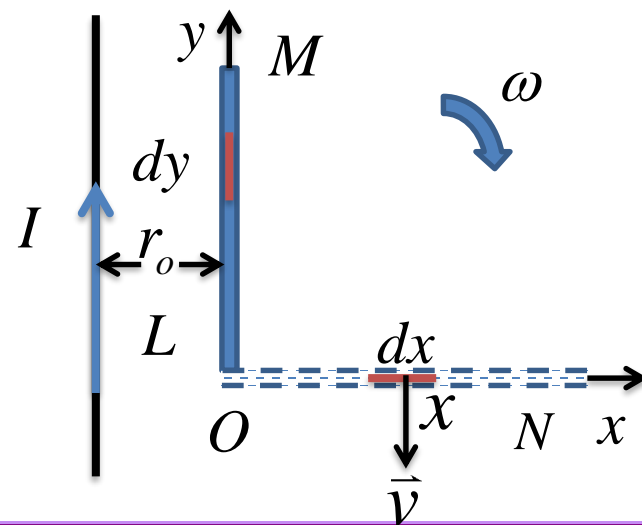
方向: $O \rightarrow M$ 、



ON位置:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \int_0^N (\vec{v} \times \vec{B}') \cdot d\vec{l} = \int_0^L \omega x \frac{\mu_0 I}{2\pi(r_0 + x)} dx \\ &= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \int_0^L \frac{x}{r_0 + x} dx = \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \left[L - r_0 \ln\left(1 + \frac{L}{r_0}\right) \right]\end{aligned}$$

方向: $O \rightarrow M$ 、 $O \rightarrow N$





作业:

P484 10.9, 10.10, 10.11



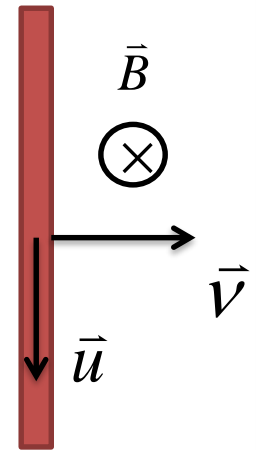
洛伦兹力是否做功？

- ◆ 对于电源，非静电力做功，将其他形式的能量转换为静电能。
- ◆ 对于动生电动势的电源来说，非静电力是洛伦兹力。而我们上一章介绍过，洛伦兹力永远不做功，为什么前后矛盾呢？

当导体以速度 \vec{v} 运动时，自由电子速度包含两个分量： \vec{v} （随同导体）、定向移动速度 u ： \vec{u}

$$\therefore \text{洛伦磁力: } \vec{F} = -e(\vec{v} + \vec{u}) \times \vec{B} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 = -e\vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{F}_2 = -e\vec{u} \times \vec{B}$$



- 分量 \vec{F}_{11} 在 dt 时间内所做的功:

$$\begin{aligned} A_1 &= \vec{F}_1 \cdot (\vec{v} + \vec{u}) dt = -e(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot (\vec{v} + \vec{u}) dt \\ &= -e(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} dt \end{aligned}$$

- 分量 \vec{F}_2 在 dt 时间内所做的功:

$$\begin{aligned} A_2 &= \vec{F}_2 \cdot (\vec{v} + \vec{u}) dt = -e(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot (\vec{v} + \vec{u}) dt \\ &= -e(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \end{aligned}$$

\therefore 由矢量运算公式: $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}$

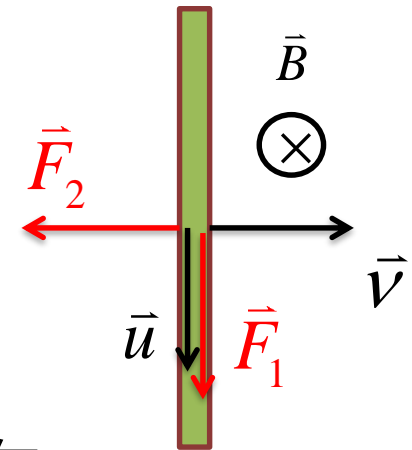
$\therefore A_1 = -A_2$, 即 $A_1 + A_2 = 0$

即: 洛伦兹力做功为0。



◆ 洛伦兹力的一个分量对自由电子做正功，产生动生电动势

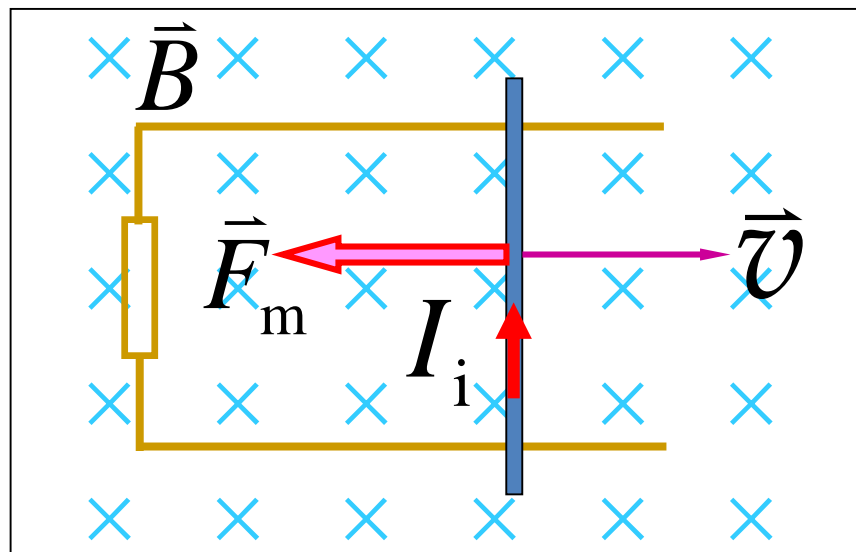
◆ 洛伦兹力的另一分量与导体运动的方向相反，构成导体运动的阻力，做负功。



◆对于这样的电源，磁场本身不提供能量，只是起能量传递的作用。

机械能 \Rightarrow 电能

维持滑杆运动必须外加一力。



外界的能量 $\xrightarrow{\text{磁场 (洛伦兹力)}} \text{静电能}$



机械能转化为电能

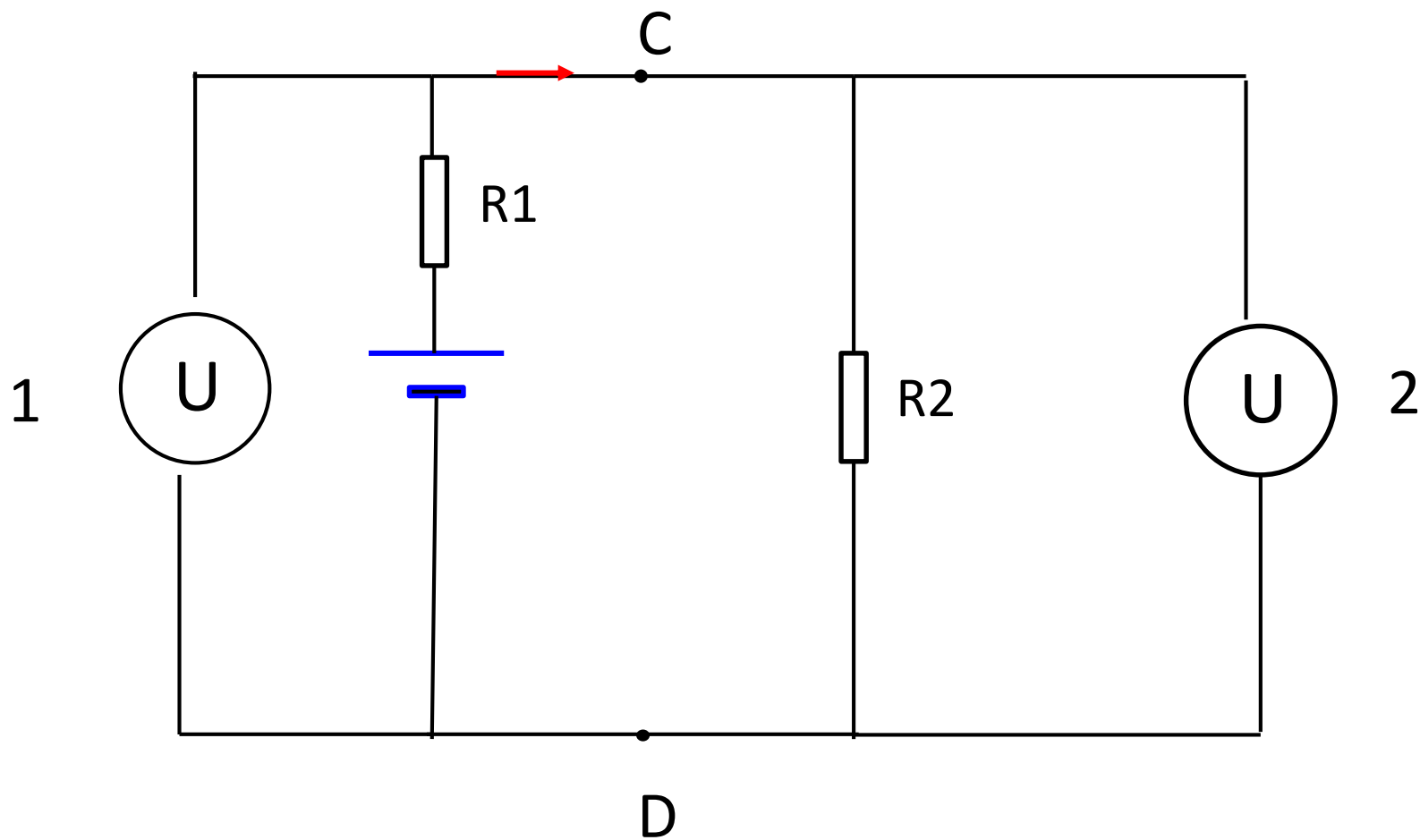
http://open.163.com/movie/2002/5/D/B/M72UIB0K0_M72UN7NDB.html

24'30''----27'20''



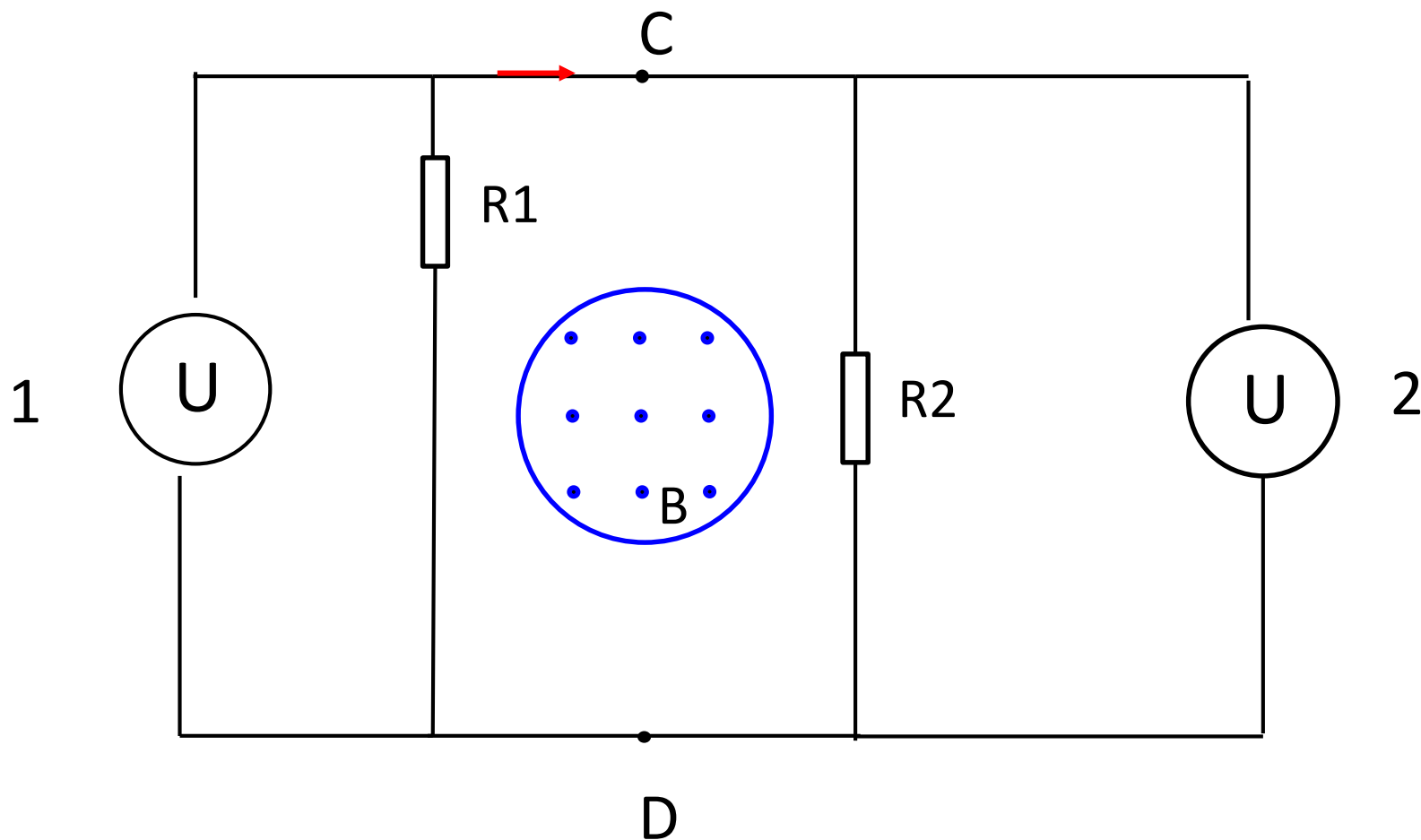
二、涡旋/感生电动势

磁场随时间变化产生的电动势，叫涡旋/感生电动势。

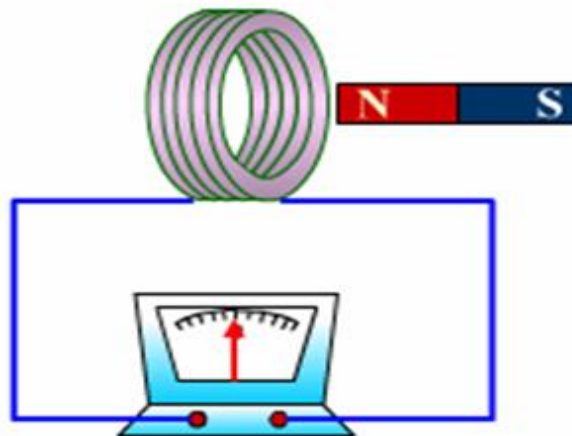


电压表1和2的读数相同

磁场增加



电压表1和2的读数不同!!!



磁场变化产生电动势

磁场变化产生电动势，其非静电场是什么？



实验研究表明：感生电动势完全与导体的种类和性质无关，仅由变化的磁场产生。

麦克斯韦敏锐地感觉到：感生电动势现象预示着电磁场的新效应。

麦克斯韦的假设一：

变化的磁场在其周围激发会激发一种电场，这个电场是涡旋电场。



涡旋电场与静电场的共同点：

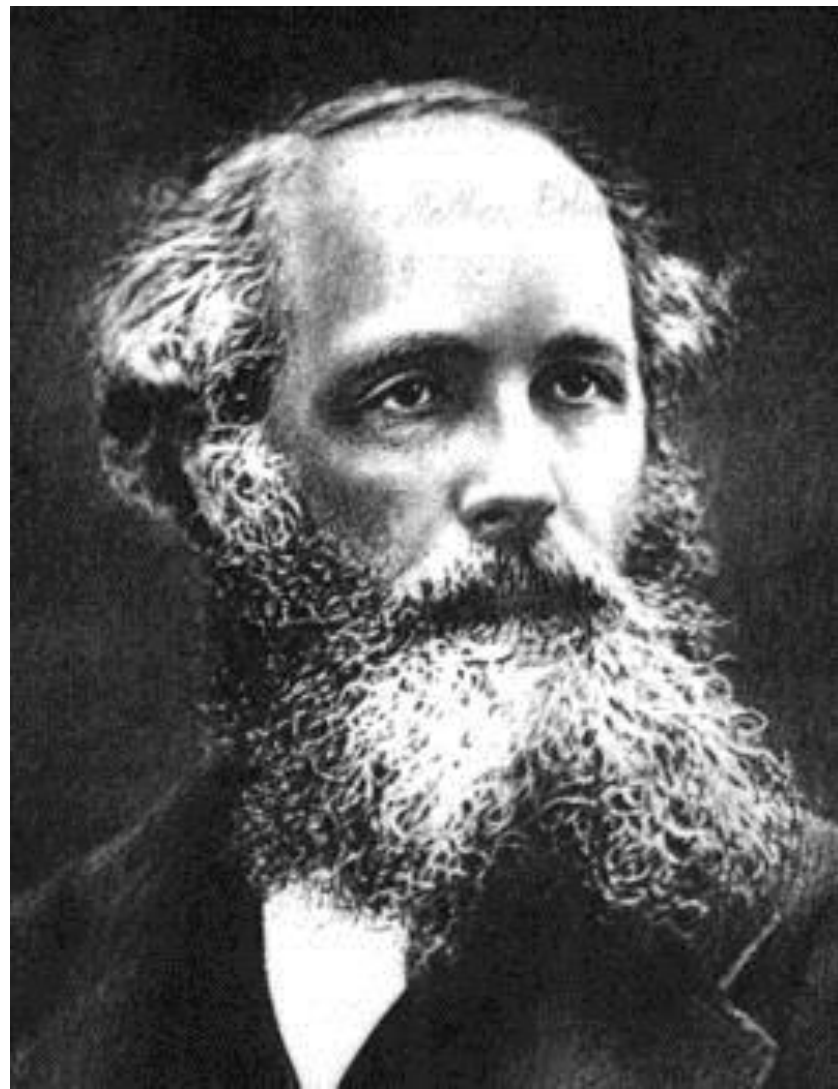
- 对电荷有力的作用

涡旋电场与静电场的不同点：

- 涡旋电场不是由电荷激发的，而是由变化的磁场激发。
- 涡旋电场的电场线闭合，不是保守场

物理学家，数学家。经典电动力学的创始人，统计物理学的奠基人之一。

1865年提出了麦克斯韦方程组



詹姆斯·克拉克·麦克斯韦
英国

1831~1879

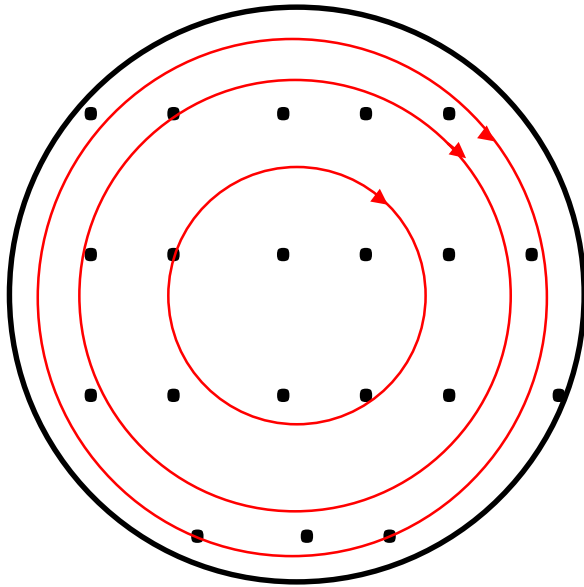


根据麦克斯韦的理论

- 变化的磁场要产生涡旋电场 \vec{E}_v ——是一种非静电场。
- 非静电场的线积分就是感应电动势；
- 这种电动势的存在，不依赖于导体的存在。

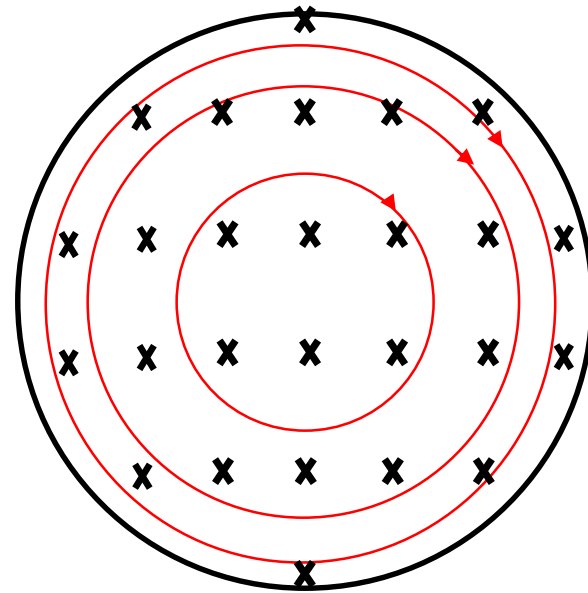
磁场增大

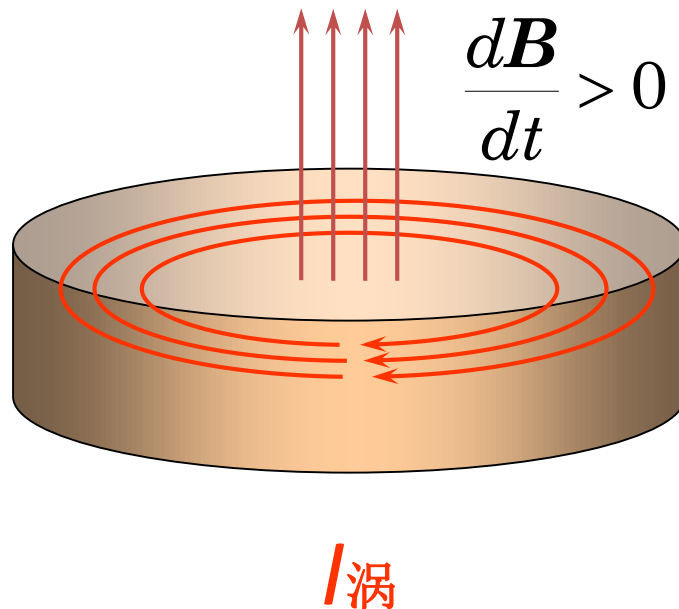
$$\frac{\partial B}{\partial t} > 0$$



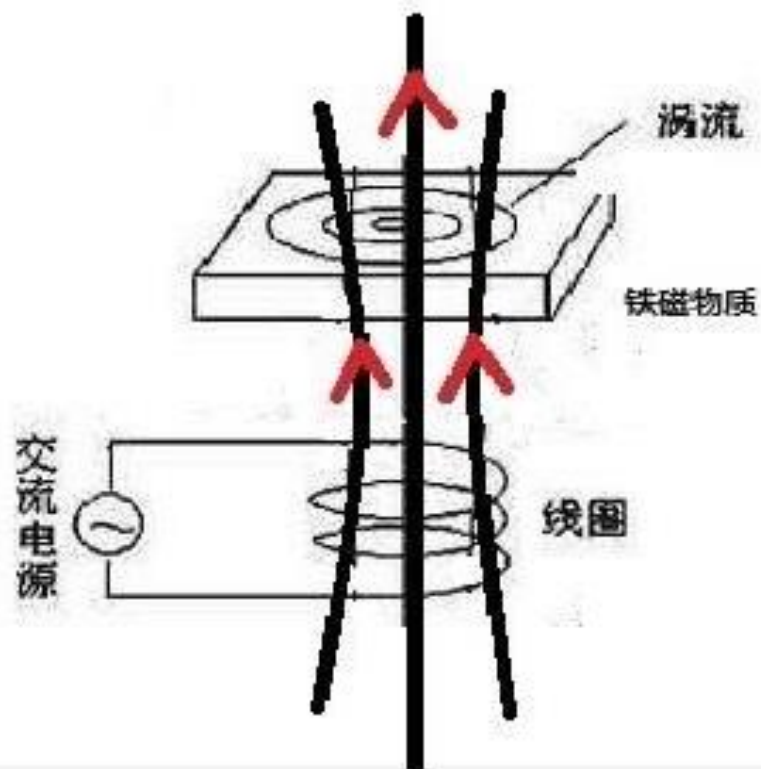
磁场减小

$$\frac{\partial B}{\partial t} < 0$$





将导体放入变化的磁场中时，由于在变化的磁场周围存在着涡旋的感生电场，感生电场作用在导体内的自由电荷上，使电荷运动，形成涡电流。



电磁炉



电源电动势定义

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_v \cdot d\vec{l}$$

L: 沿闭合回路的积分

法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

以闭合回路L为边界的曲面

电场和磁场的关系

$$\oint_L \vec{E}_v \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

电动势的方向：积分环路的方向



任意电场都可以看作是静电场与涡旋电场的叠加

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{静}} + \vec{E}_{\text{涡旋}}$$

$$\because \oint_L \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{l} = 0, \quad \oint_L \vec{E}_{\text{涡旋}} \cdot d\vec{l} = \varepsilon$$

$$\therefore \text{涡旋电动势可表示为: } \varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{由法拉第定律知: } \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

如果闭合回路为边界的曲面不变, 则:

电场和磁场的关系

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



考虑涡旋电场后，电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



对于涡旋电场，电场通过闭合曲面的通量

$$\oiint \vec{E}_{\text{涡旋}} \cdot d\vec{S} = 0$$

- 涡旋（感生）电场的电力线是闭合曲线；
- 涡旋电场沿闭合回路的线积分不等于零，实际上等于闭合回路的感应电动势，即涡旋（感生）电动势；
- 对于涡旋电场，闭合曲面的电通量恒等于零；
- 之所以称其为电场，是因为具有电场的基本性质：对处于其中的电荷具有力的作用。





产生涡旋电动势的能量从哪里来的呢？

磁场的能量转化为电能！！

我们对各种电源的电动势有了更为充分的理解：

电池：化学作用，化学能 \rightarrow 电能；

温差电效应：热扩散作用，热能 \rightarrow 电能；

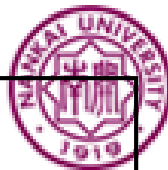
动生电动势：洛伦兹力，机械能 \rightarrow 电能；

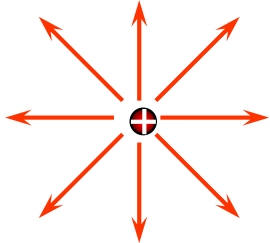
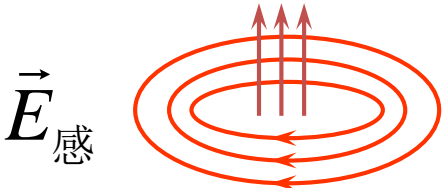
涡旋电动势：涡旋电场力，磁能 \rightarrow 电能。

可见：各种形式的能量都可以转化为电能。



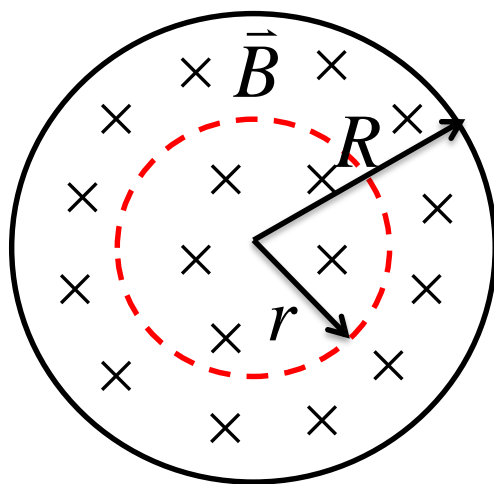
感生电场与静电场的区别



| | 静电场 \vec{E} | 感生电场 $\vec{E}_{\text{感}}$ |
|-------|---|---|
| 起源 | 由静止电荷激发 | 由变化的磁场激发 |
| 电力线形状 | <p>电力线为非闭合曲线</p>  <p>静电场为无旋场</p> | <p>电力线为闭合曲线</p>  <p>$\vec{E}_{\text{感}}$ $\frac{d\mathbf{B}}{dt} > 0$</p> <p>感生电场为有旋场</p> |
| 电场的性质 | <p>为保守场做功与路径无关</p> $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ | <p>为非保守场做功与路径有关</p> $\varepsilon_i = \oint \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \varphi_m}{\partial t}$ |
| | <p>静电场为有源场</p> $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$ | <p>感生电场为无源场</p> $\oiint \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{S} = 0$ |



例1、如图，长直螺线管半径为 R ，管内均匀磁感矢量 \vec{B} 垂直纸面向里，已知 $\frac{\partial B}{\partial t}$ 是常数，求管内外的涡旋电场分布。





思路：由法拉第定律求 ε ，

由 $\varepsilon = \oint_L \vec{E}_{\text{涡旋}} \cdot d\vec{l}$ ，则可求出 $\vec{E}_{\text{涡旋}}$

选定绕行方向：顺时针

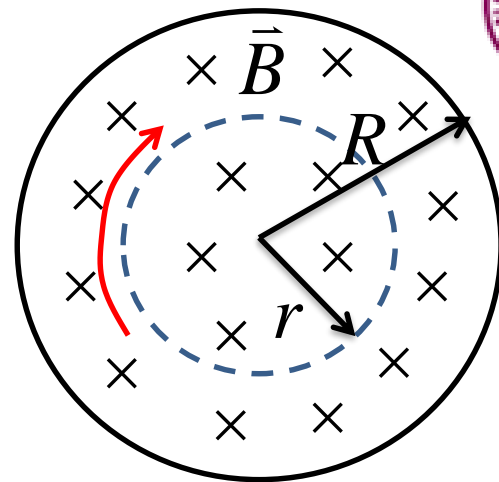
磁通量： $\phi = \pi r^2 B \quad (r < R)$

$$\phi = \pi R^2 B \quad (r > R)$$

电动势：

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad (r < R)$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \quad (r > R)$$





$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{\text{涡旋}} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E_{\text{涡旋}}$$

涡旋电场：

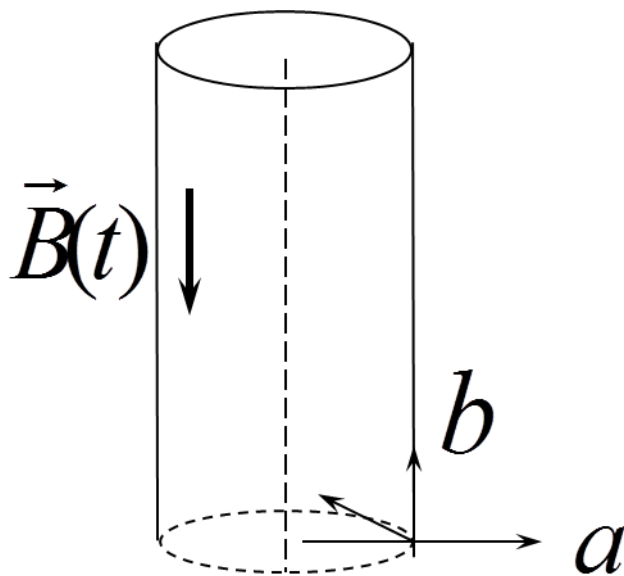
$$E_{\text{涡旋}} = \frac{\varepsilon_1}{2\pi r} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (r < R)$$

$$E_{\text{涡旋}} = \frac{\varepsilon_2}{2\pi r} = -\frac{R^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (r > R)$$

方向： $\frac{\partial B}{\partial t} > 0$ ， 逆时针； $\frac{\partial B}{\partial t} < 0$ ， 顺时针。



例2、半径为 a 、高为 b 的金属圆柱的电导率 σ ，今沿轴线方向施加均匀磁场，其方向竖直向下，已知 $\frac{\partial B}{\partial t} = K$ 为大于零的常量，试求圆柱内总涡流 I 。

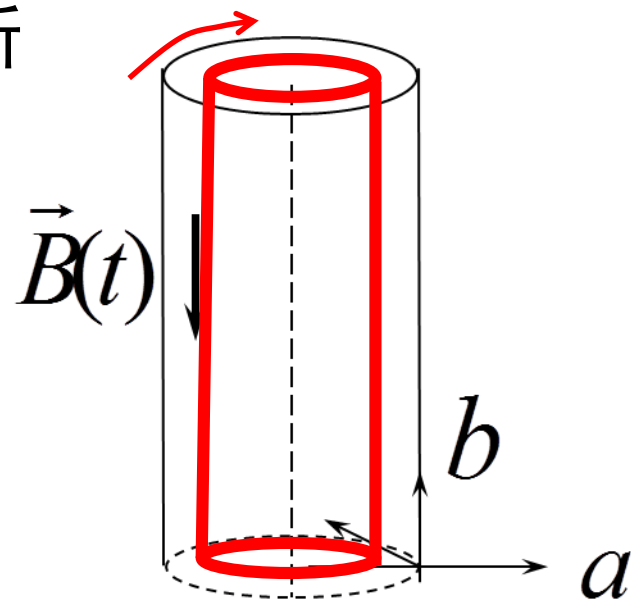




解：先考虑半径为 r ，厚度为 dr ，高度为 b 的同轴圆筒构成的导体回路。

选环绕方向为顺时针方向，则回路所围的磁通为：

$$\phi = B\pi r^2$$





感应电动势 $\varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 K$

电动势小于零，因此感应电动势的方向为逆时针方向

方法一：

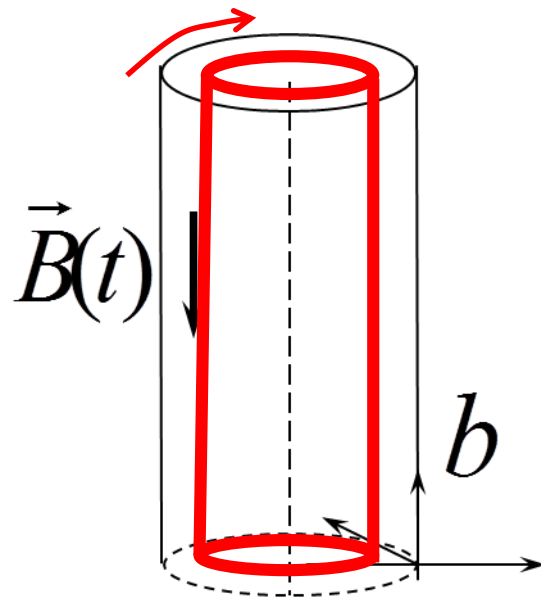
电阻： $dR = \frac{1}{\sigma} \frac{2\pi r}{bdr}$

圆筒内的电流：

$$di = \frac{\varepsilon}{dR} = -\pi r^2 K \sigma \frac{bdr}{2\pi r} = -\frac{1}{2} b \sigma K r dr$$

整个圆柱的涡旋电流：

$$I = \int_0^i di = -\frac{1}{2} b \sigma K \int_0^a r dr = -\frac{K}{4} \sigma b a^2$$





方法二：

感应电动势：
$$\varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 K$$

感应电动势：
$$\varepsilon = \oint \vec{E}_v \cdot d\vec{l} = 2\pi r E_v$$

涡旋电场：
$$E_v = -\frac{1}{2} Kr$$

对于一个确定的圆环面，其电流线密度为：

$$j = \sigma E_v = -\frac{1}{2} K \sigma r$$

对于一个确定的圆环面，其电流为：

$$dI_1 = \vec{j} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{2} K \sigma r dr$$



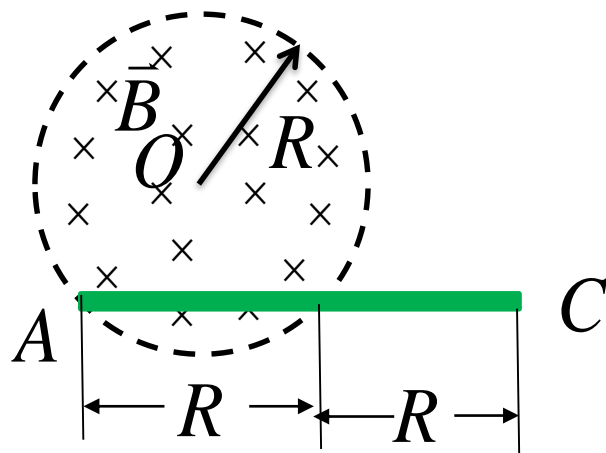
$$I_1 = \int_0^a \vec{j} \cdot d\vec{r} = \int_0^a -\frac{1}{2} K \sigma r dr = -\frac{1}{4} K \sigma a^2$$

整个圆柱体的电流为：

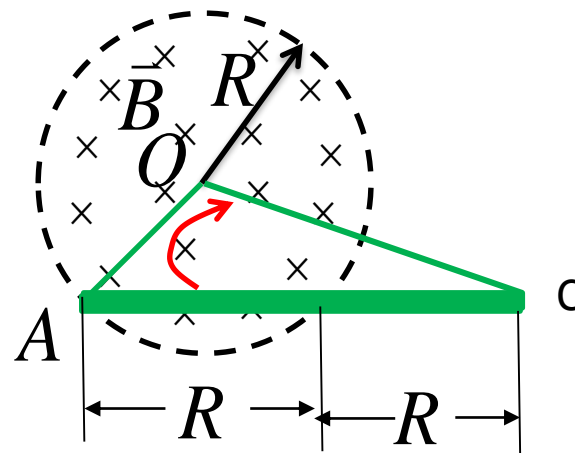
$$I = \int_0^b I_1 dl = \int_0^b -\frac{1}{4} K \sigma a^2 dl = -\frac{1}{4} K \sigma a^2 b$$



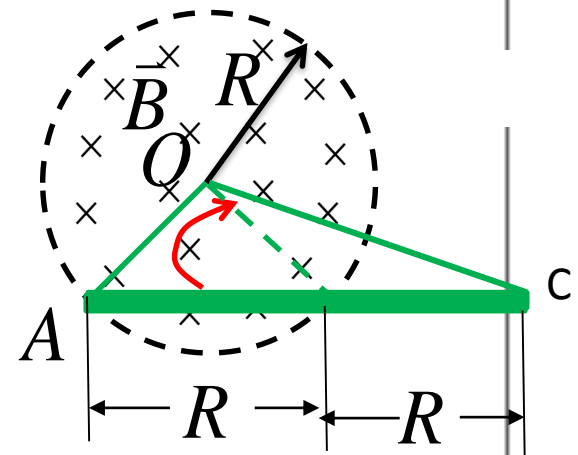
例2、均匀磁感矢量 B 被限定在半径为 R 的圆柱形空间中，且随时间变化，变化率为 $\frac{dB}{dt} = k$ ， k 为正常数， B 的方向垂直纸面向里。在纸面内有一长为 $2R$ 的金属棒，有一半在磁场区域内，另一半在磁场区域外，求：棒 AC 间的涡旋电动势的大小和方向。



解：构建如图所示的闭合环路；
利用Faraday定律求环路电动势；
选定绕行方向：顺时针；



磁通量为等腰三角形与30度的扇形的磁通量，等腰三角形面积： $\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$ ，扇形面积： $\frac{\pi}{12}R^2$



环路电动势：

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{12} \right) R^2 B \right] = - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{12} \right) R^2 \frac{\partial B}{\partial t} = - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{12} \right) R^2 K$$

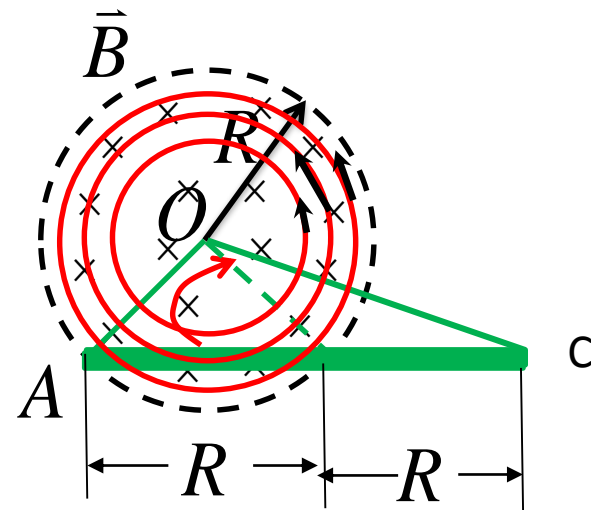


AO段的电动势 $\varepsilon_{AO} = \int_A^O \vec{E}_v \cdot d\vec{l} = \int_A^O E_v \cdot dl \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

OD段的电动势 $\varepsilon_{OC} = \int_O^C \vec{E}_v \cdot d\vec{l} = \int_O^C E_v \cdot dl \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

DA段的电动势

$$\varepsilon_{CA} = \varepsilon - \varepsilon_{AO} - \varepsilon_{OC} = \varepsilon = -\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{12}\right) R^2 K$$



电动势的方向: $A \rightarrow C$



请思考如下问题：

- (1) 感应电动势对应的非静电力/场是什么？
- (2) 如果没有闭合环路，是否有感应电动势？
- (3) 如果没有导体，是否有感应电动势？



- 作业: P484 T10.13 T10.14 T10.20 (电感)



本次课的学习目标，您掌握了吗？

- 动生电动势
- 涡旋（感生）电动势
- 会计算动生电动势和感生电动势