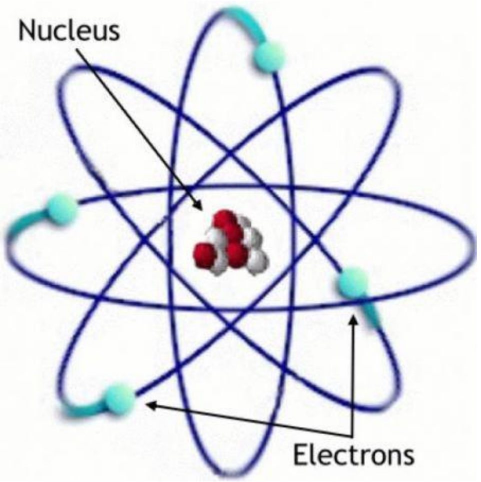
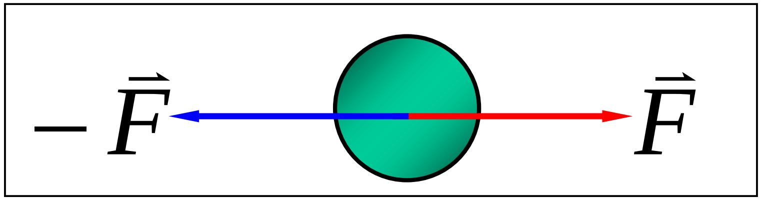
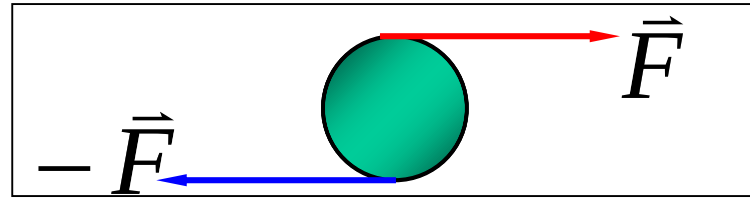
第6章

刚体动力学–刚体的定轴转动

模块1　质点绕固定轴的转动



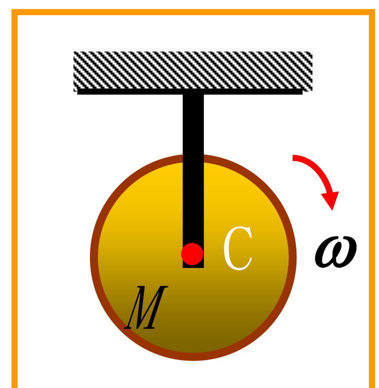




不足：圆盘的运动状态不同，外力的矢量和 $\vec{F}$ 无法体现这种不同

一圆盘绕通过质心的固定轴转动。

$$\vec{P} = m\vec{v}_c = 0$$



不足：圆盘有运动，动量无法体现这种不同

解决办法：

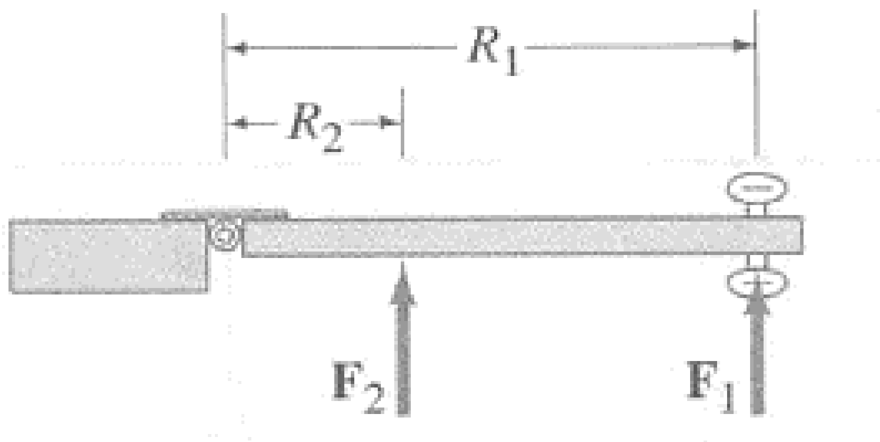
引入新的物理量！

力矩、角动量、转动惯量

在模块1，您将学习：

- 质点力矩和角动量的定义
- 质点的角动量定理
- 质点的角动量守恒

什么能使刚体的运动状态发生变化？



与力的大小、方向、作用的位置都有关系

为了能够体现 力的大小、方向、作用的位置这三个参数，我们需要采用的新数学工具：

两个矢量的叉乘!!!

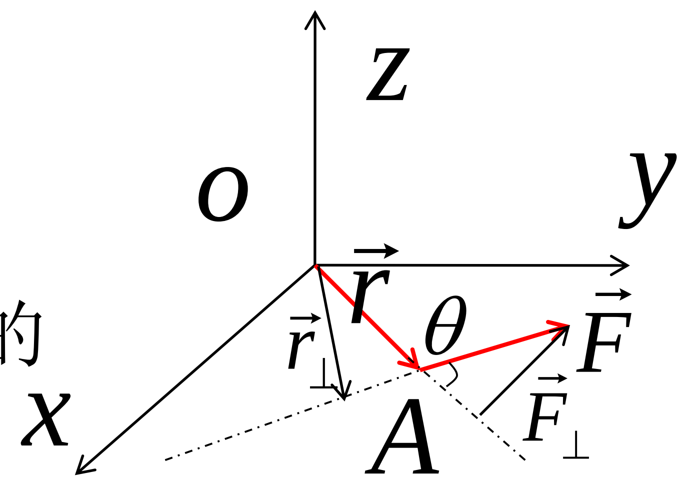
1　作用于质点的力矩

- 选直角坐标系，转轴为z轴，质点在xy平面内。

a. 力在垂直于转轴的平面-xy平面

作用于质点A的力矩定义为：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



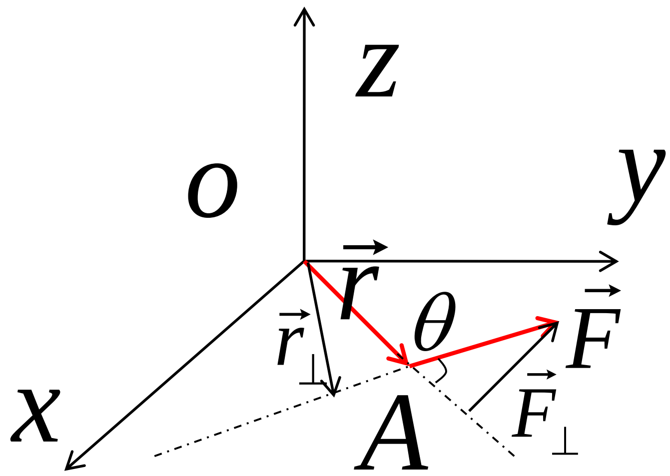
——作用于质点A的绕OZ轴的力矩，或叫转矩。

$\vec{r}$ 是质点相对于Z轴的矢径。

力矩 M 的大小：

$$M = rF\sin\theta = rF_{\perp}$$

$$M = (r\sin\theta)F = r_{\perp}F$$



$\vec{r}_{\perp}$为矢径 $\vec{r}$ 在垂直于 $\vec{F}$ 方向上的分量——力矩的臂，即**力臂**。

$\vec{F}_{\perp}$ 为 $\vec{F}$ 在垂直于$\vec{r}$ 方向的分量。

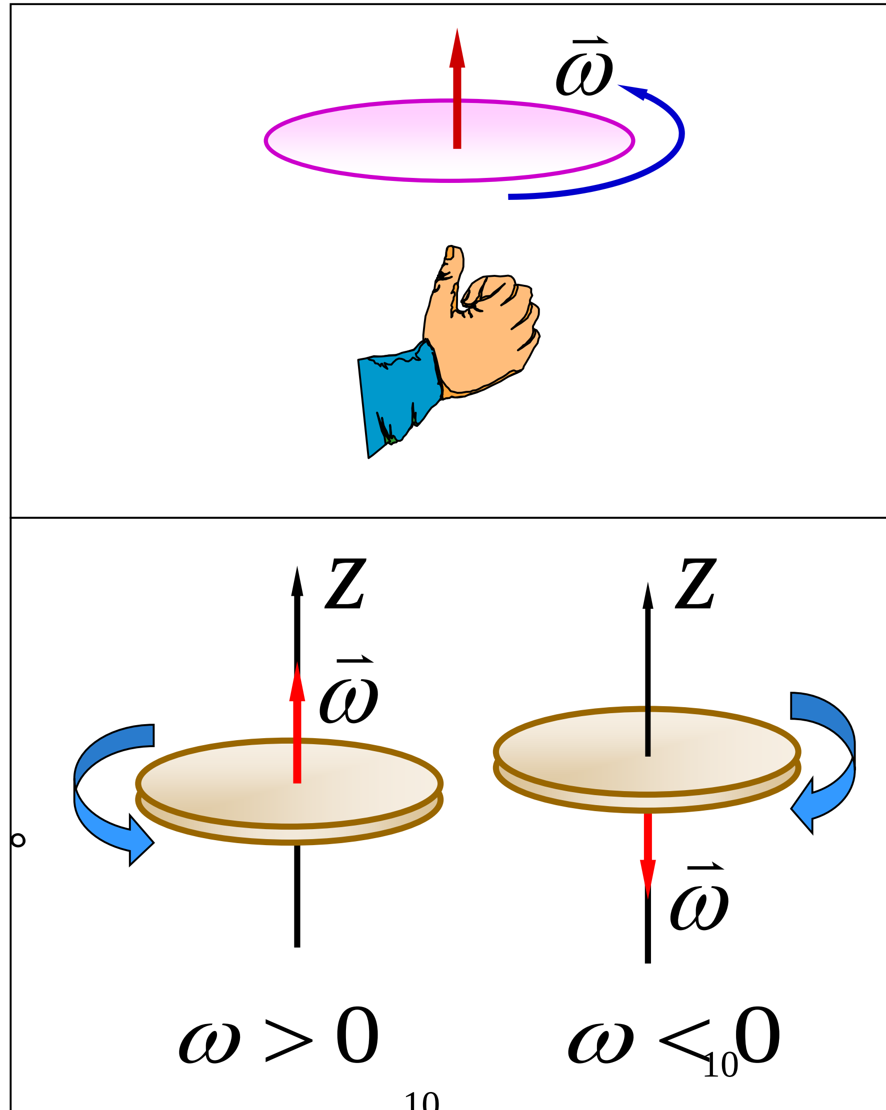
力矩单位：牛顿·米，与功的量纲相同，但不能写成焦耳，它们是完全不同的物理量，力矩是矢量，功是标量。

力矩$\vec{M}$是一矢量，其方向遵守矢量积规定，对于这个例子，平行于OZ轴。

如果： $\vec{\omega}$方向↑,

$\vec{M}$ ↑,(同向)加速转动。

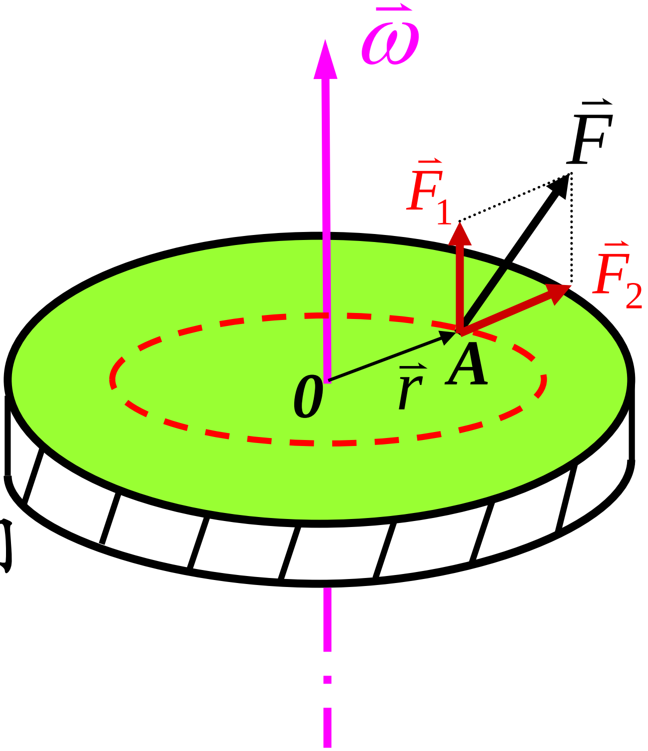
$\vec{M}$ ↓,(反向）减速—阻力矩。



10
10

b、力不在在垂直于转轴的平面

将$\vec{F}$分解成$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$。



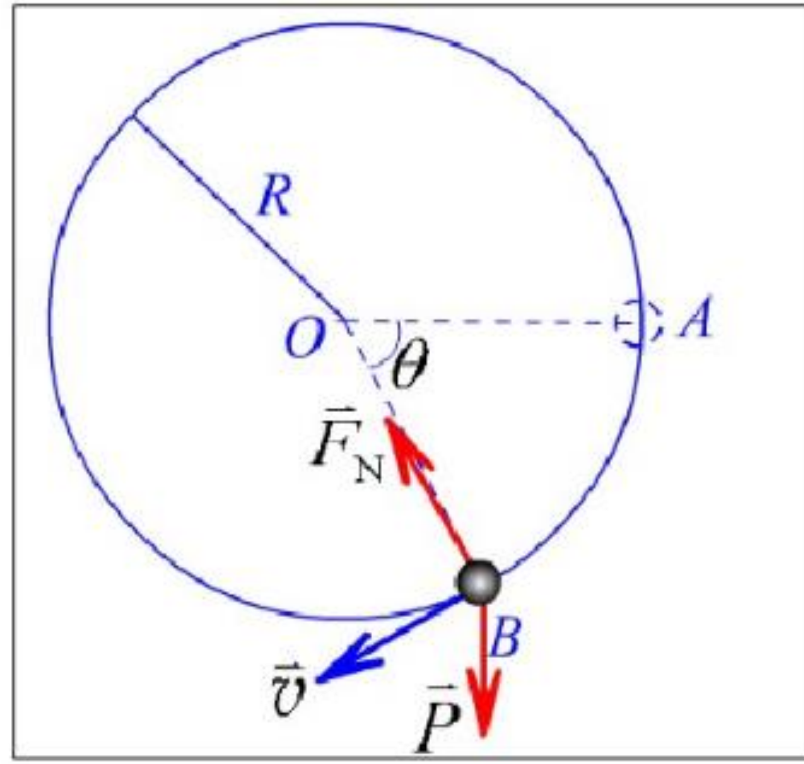
$\vec{F}_1$与转轴平行，$\vec{F}_2$在转动平面内

$\vec{F}_1$对转动无贡献，仅考虑$\vec{F}_2$，

$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}_2$（有效力矩）。

若质点受到多个力的作用，刚体受到的和力矩为各个力矩的矢量和。

小球B在无摩擦力的圆环上由A处从静止状态运动到B。小球对圆环圆心所受的力矩是多少？



$$\vec{M}_N = \vec{R} \times \vec{N} = RN\sin(\pi) = 0$$

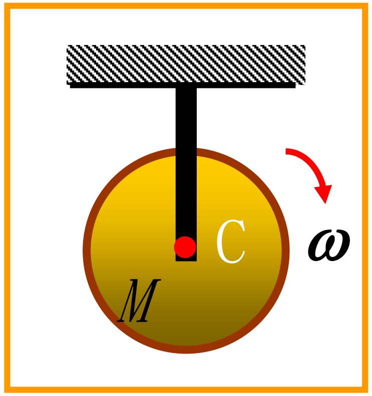
$$\vec{M}_G = \vec{R} \times \vec{G} = RG\cos\theta$$

$$\vec{M} = \vec{M}_N + \vec{M}_G = RG\cos\theta$$

力矩的方向：垂直纸面向里

2、质点的角动量

问题：将一绕通过质心的固定轴转动的圆盘视为一个质点系，系统总动量为多少？



$$\vec{p}_{总} = M\vec{v}_C = 0$$

由于该系统质心速度为零，所以，系统总动量为零，系统有机械运动，总动量却为零.

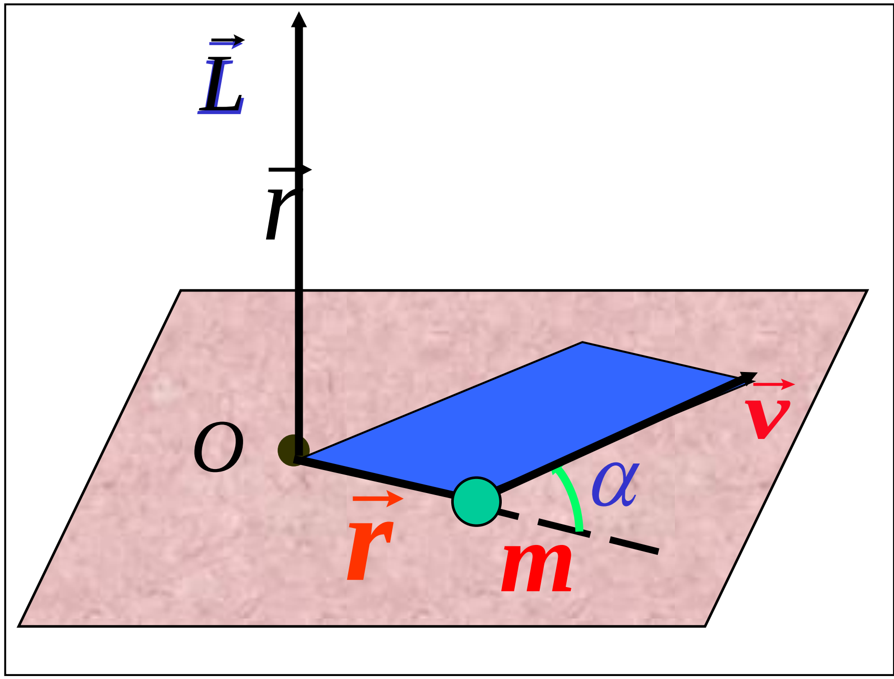
说明不宜使用动量来量度转动物体的机械运动量。

a、假定质点A在xy平面上运动，其动量为 $\vec{P}$

- 定义：质点绕轴线OZ的角动量为：

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

- **角动量**也叫**动量矩**。



方向: 右手定则

大小：$l = rP\sin\alpha$

b、如果质点运动不在xy平面上，则可将 $\vec{P}$ 分解为两个分量：一个平行于z轴，对角动量无贡献，另一个在xy平面上，就是前面讨论的 $\vec{P}$（xy平面内）

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{P}_{xy}$$

角动量的物理意义：

质点对某参考点/参考轴的角动量反映质点绕该参考点/参考轴旋转运动的强弱

质点的角动量（ ）

A 和特定的坐原点无关

B 当位矢和动量平行时等于零

C 当位矢和动量垂直时等于零

Submit

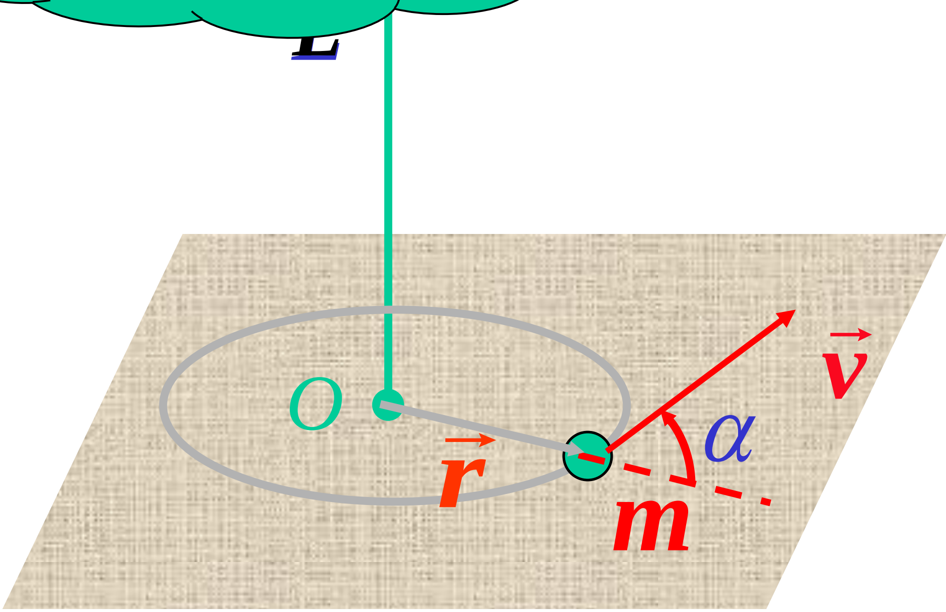
例：做匀速圆周运动时，由于 $\vec{r} \perp \vec{v}$

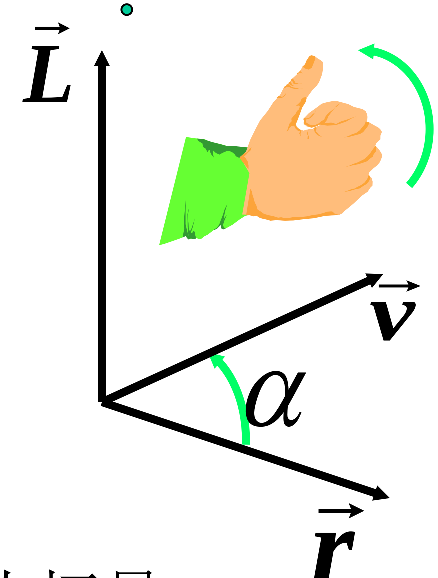
质点对圆心的角动量大小为：

$$L = rmv = mr^2\omega$$

大小不变

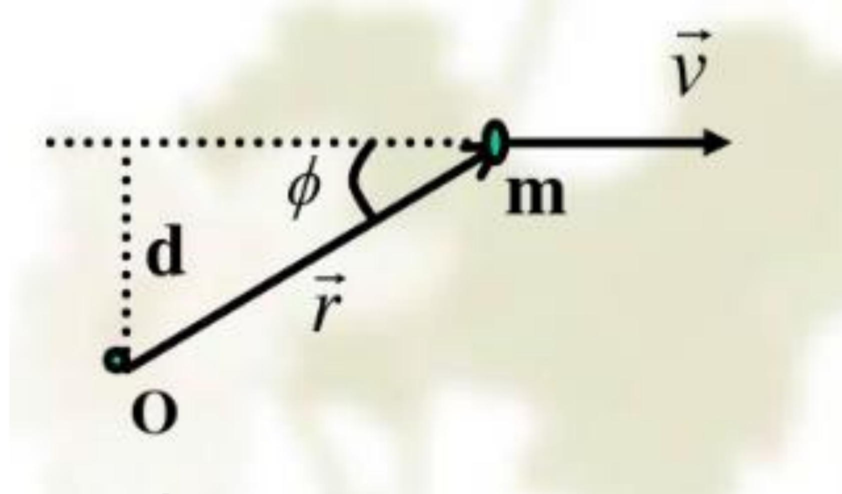
方向不变





质点对圆心O的角动量为恒量

例：直线运动的物体m相对于o点的角动量是多少？

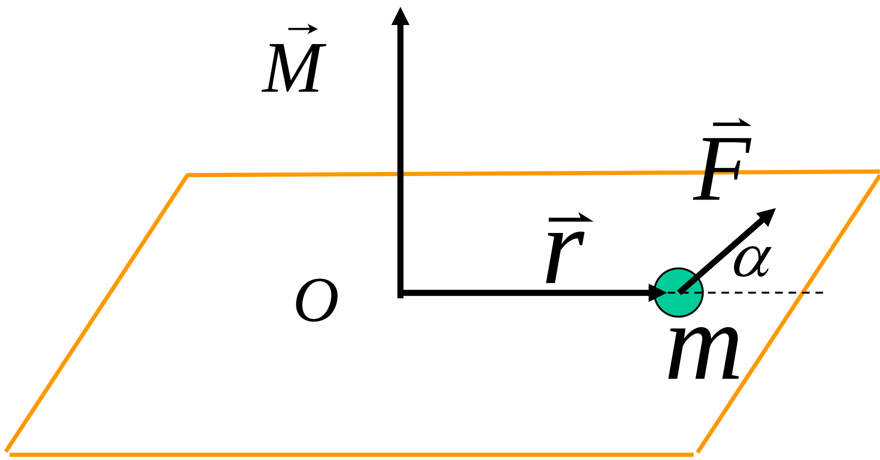


$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = rmv\sin(\phi) = dmv$$

怎样运动，对o点的角动量为零？？

确定质点是否有角动量，看其位矢是否存在绕参考点的转动

三、力矩与角动量的关系



1. 质点 $\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$ $\dfrac{d\vec{l}}{dt}=?$

假定 $\vec{F}$ 和 $\vec{p}$ 都在 xy 平面内

力矩： $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

角动量： $\vec{l}=\vec{r}\times\vec{P}$

由牛二定律知： $\vec{F}=\dfrac{d\vec{P}}{dt}$

$$\therefore \vec{M} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P}) - (\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P}) = \frac{d\vec{l}}{dt} - (\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P})$$

$$而 \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} = \vec{v} \times \vec{P} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$$

-

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{l}}{dt}}$$

$$\vec{M}dt = d\vec{l}$$

质点角动量定理

质点所受的力矩等于它的角动量对时间的变化率

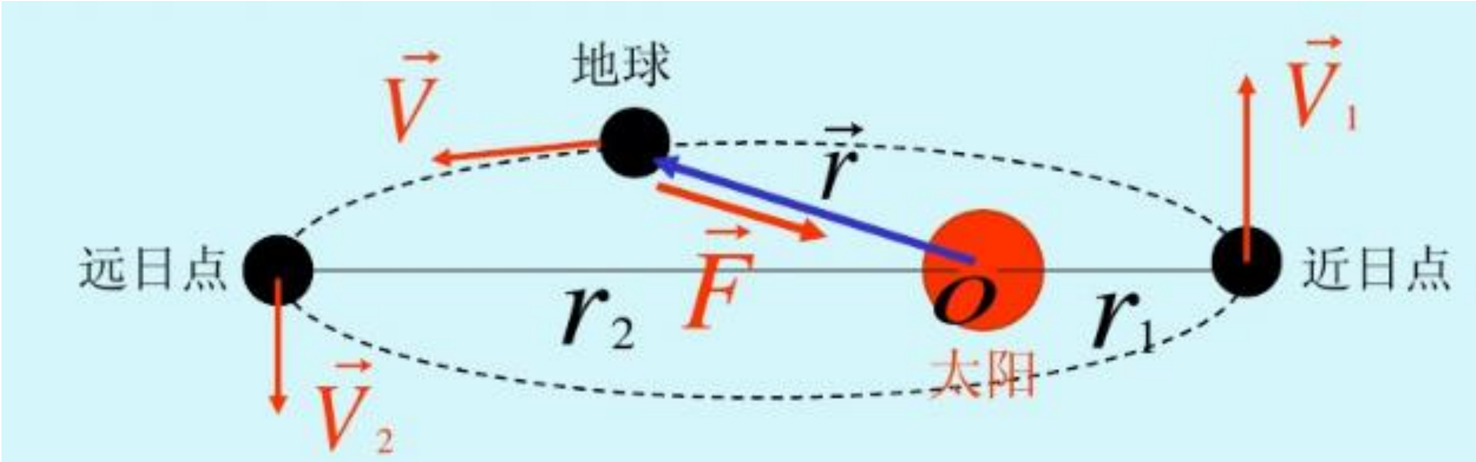
$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{l}}{dt}}$$

质点的角动量守恒定律

$$\vec{M} = 0 \qquad\qquad \vec{l} = C$$

如果质点所受的力矩等于零，则角动量保持不变。

注意：力矩为0，指的是和力矩为0，各个分力矩可以不为0.



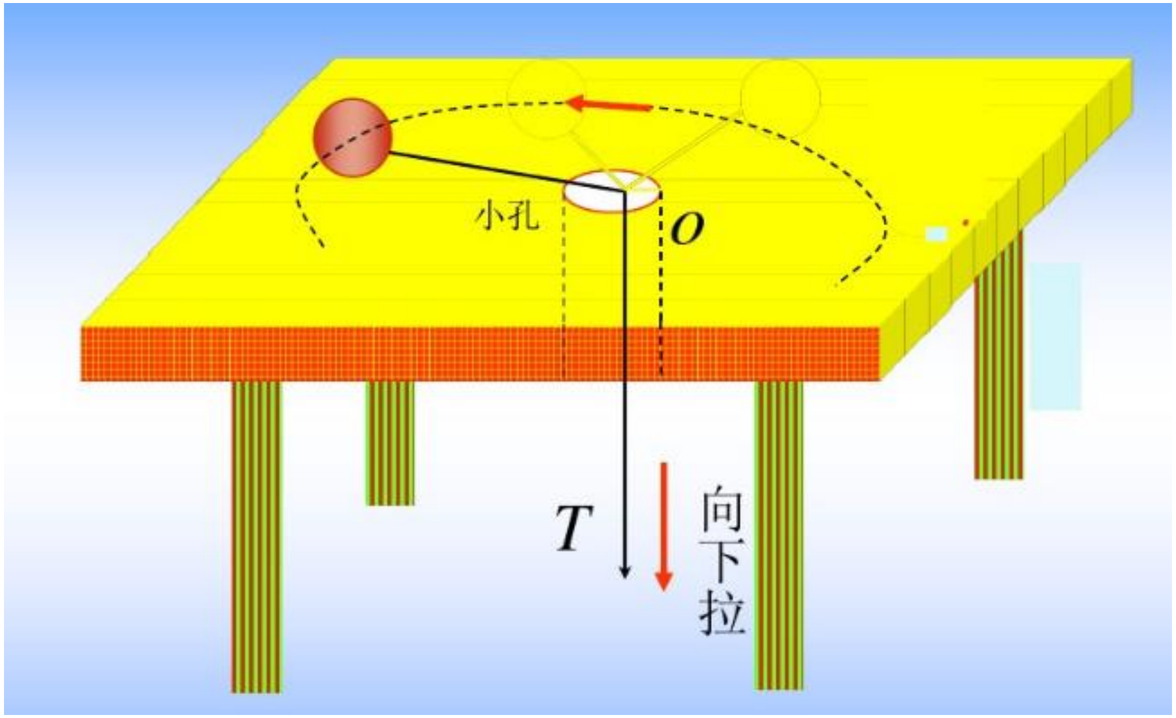
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

地球绕太阳旋转的角动量守恒！

$$\vec{r}_2 \times m\vec{v}_2 = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1$$

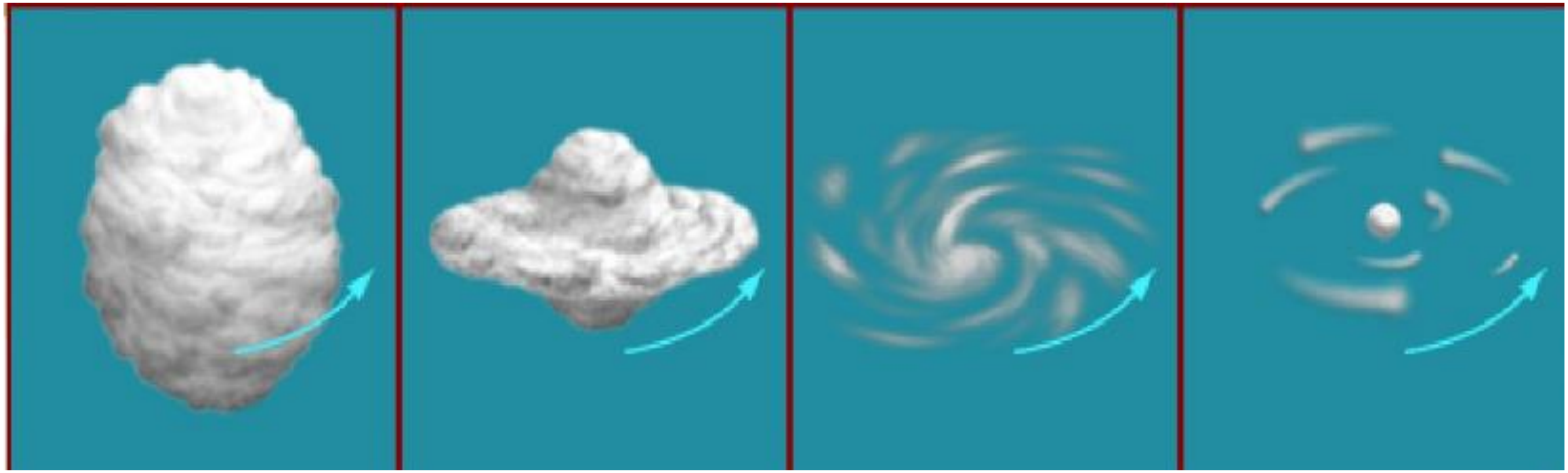
问题：近日点速度变大，动能增加，能量来自哪里？

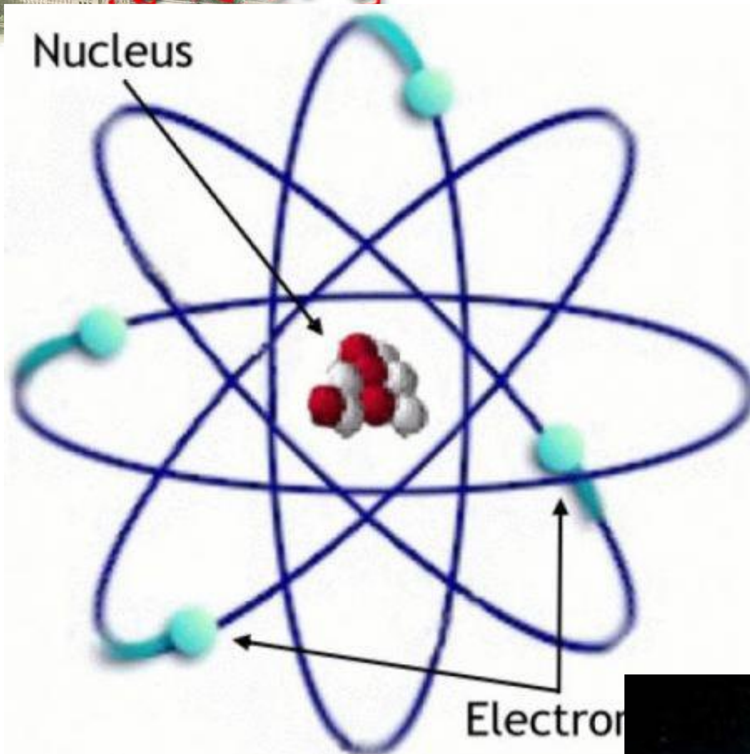
忽略小球与桌面的摩擦力



小球受那几个力矩的作用？
小球所受的合力矩有什么特点？
向下拉线，小球的运动速度会发生怎样的改变？

- 重力和支撑力的力矩不为零，但是这两个力的力矩之和为零。拉力T的力矩为零；
- 小球所受的力矩之和为零；
- 角动量守恒；
- 运动速度增加
- 动能增加（外力作用的结果）





$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

自然界的三个守恒定律

动量守恒

机械能守恒

角动量能守恒

P214-215：　例6.11 和例 6.12

模块1的学习目标，您达到了吗？

- 质点力矩和角动量的定义
- 质点的角动量定理
- 质点的角动量守恒