



# 万有引力

假设已知某个力的势能函数，是否可以计算出这个力（）

- ☒ A 是
- ☐ B 否
- ☐ C 仅当这个力是非保守力时能计算
- ☐ D 无法确定

# 通过本次课的学习，您将学会：

- 万用引力的矢量形式
- 万有引力对应的势能
- 三种宇宙速度



## § 1. 万有引力和重力加速度

□ 关于万有引力的认识，是基于天体运动的，开普勒于1609年及1619年先后发表了**开普勒三定律**：

- 1) 所有行星沿椭圆轨道运行，太阳位于一个椭圆的焦点。
- 2) 太阳到行星的半径在相等的时间扫过相等的面积。
- 3) 行星绕太阳运动的周期的平方与椭圆轨道的长半轴的立方成正比，即  $\frac{T^2}{a^3} = \text{常数}$ ，且此常数对各行星都相同。

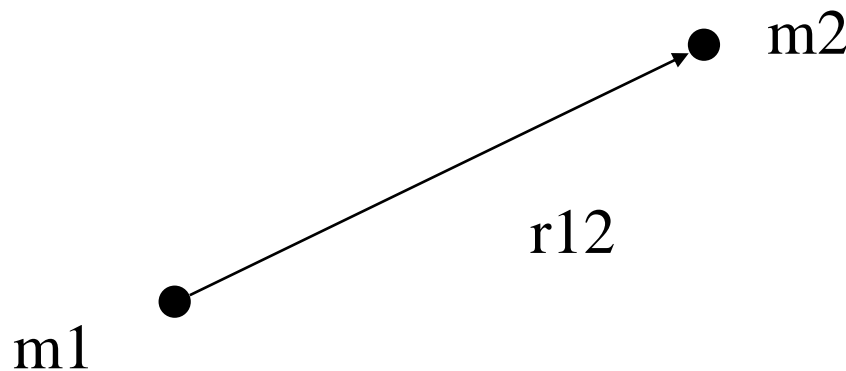
➤ 在此基础上，牛顿总结出了万有引力定律。



## § 1. 万有引力定律

宇宙间任何两个物体都互相以一力吸引着，这个力和两物体质量的乘积成正比，和它们之间的距离平方成反比，矢量表示为：

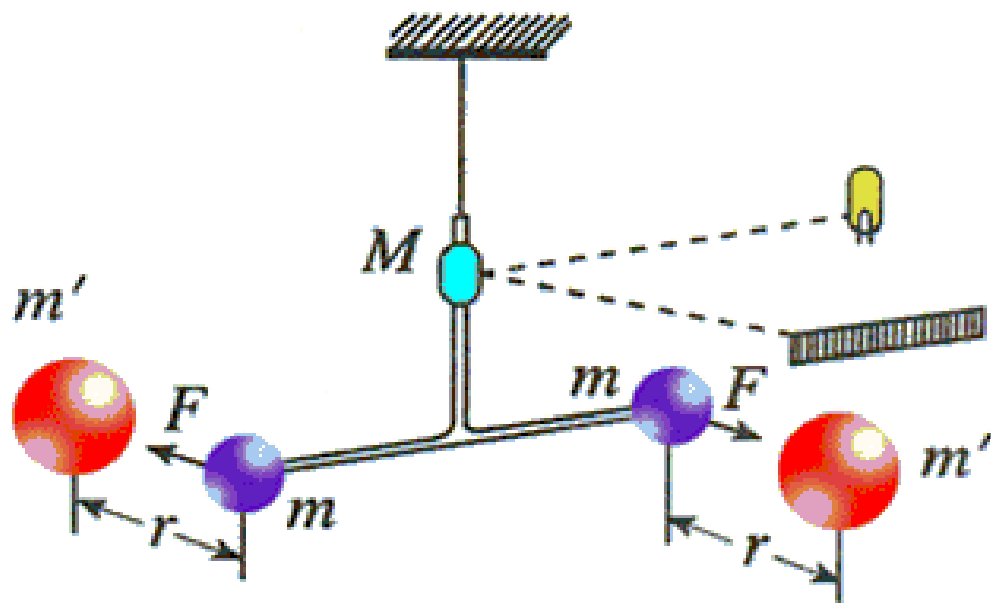
$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$



- G为万有引力常数： $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$
- 适用于两个质点，或质量按球壳均匀分布的球体<sub>6</sub>。

# 引力常量的测量

## 1789年卡文迪许扭秤实验



卡文迪许实验示意图

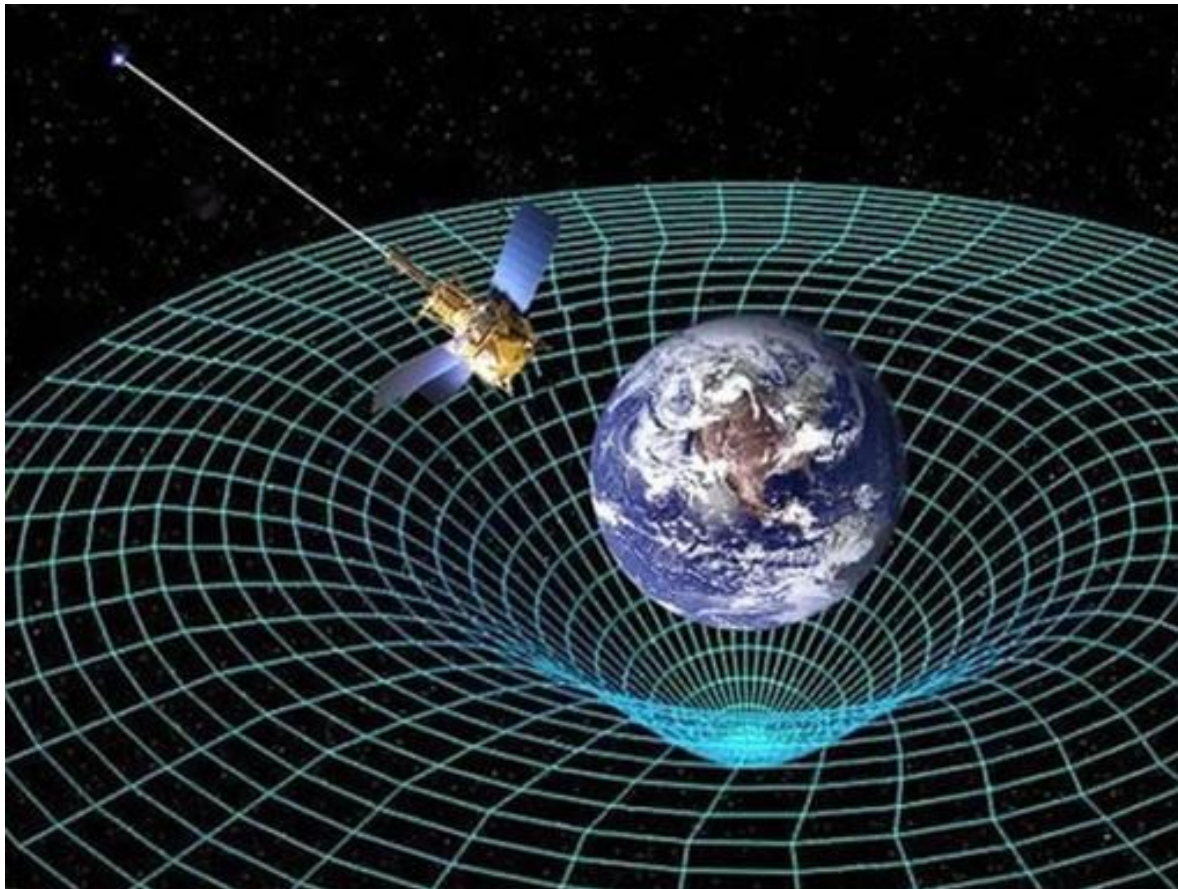


卡文迪许

①数值：  $G=6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

②G值的物理含义：两个质量为1kg的物体相距1m时，它们之间万有引力为  $6.67 \times 10^{-11} \text{ N}$

引力场：任何一个物体都在自己的周围空间建立一个“引力场”，其基本性质是使得处在其中的任何其他物体受到一个作用力。即万有引力是通过引力场来传递的。





## 一、惯性质量和引力质量

- ◆在惯性定律中，指出质量是物体惯性的量度，这时的质量叫**惯性质量**，所以牛顿第二定律 $F=ma$ 。
- ◆在万有引力定律中的质量表示了物体的一种产生引力的性质，叫**引力质量**。即

$$F = G \frac{m_{\text{引}} M}{r^2}$$

- ◆地球上的物体，忽略地球的自转，重力加速度为 $g$ ，可写作

$$m_{\text{惯}} g = G \frac{m_{\text{引}} M}{r^2}$$

- ◆实验证明， $g$ 与物体质量无关。

• 所以  $m_{\text{惯}}, m_{\text{引}}$  成正比  $\frac{m_{\text{惯}}}{m_{\text{引}}} = \frac{GM}{r^2 g}$

目前的实验精度表明:  $m_{\text{惯}} = m_{\text{引}}$

惯性质量与引力质量是**同一本质**的两个方面。

爱因斯坦建立的广义相对论指出，物体的惯性和引力性质产生于同一来源。在广义相对论里，有一些参量一方面表现为物体的惯性，另一方面又自然而然地表现为引力场的源泉。

## 二、重力加速度和高度的关系（忽略地球自转）

忽略地球自转

$$F = G \frac{mM_e}{R_e^2} \quad G_0 = mg_0$$

◆ 地球表面处物体的加速度为  $g_0 = G \frac{M_e}{R_e^2}$

◆ 可得离地面h处物体的加速度为：  $g = G \frac{M_e}{(R_e + h)^2}$

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R_e^2}{(R_e + h)^2}$$

$$\frac{g}{g_0} = \left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^{-2}$$

$$\frac{g}{g_0} = 1 - 2\frac{h}{R_e} + 3\frac{h^2}{R_e^2} + \dots$$

$$\because h \ll R_e$$

$$\frac{g}{g_0} = 1 - 2\frac{h}{R_e}$$



若：  $h = R_e / 1000 = 6370m$

$$g = g_0(1 - 0.002)$$

重力加速度还与纬度、质量分布、地球的形状有关。

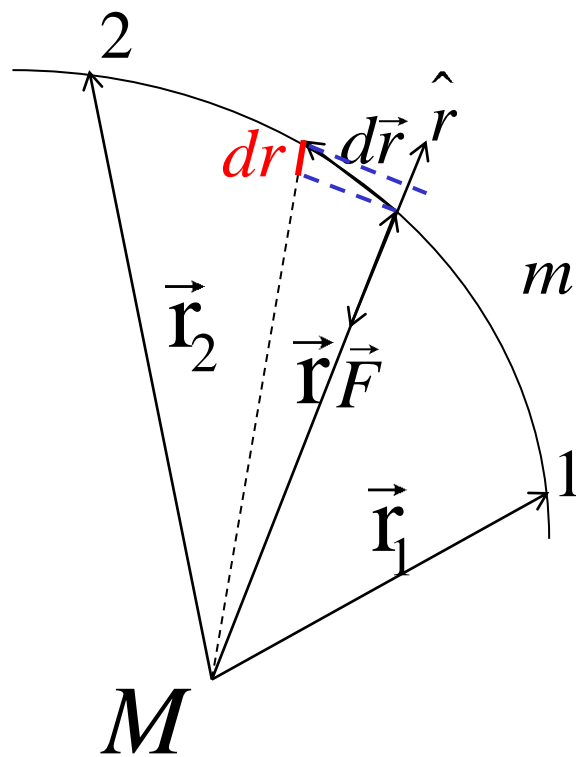


## § 2. 引力势能

## 一、万有引力的功

- 两个质点  $M$ ,  $m$ , 设  $M$  静止,  $m$  运动,  $m$  从  $1 \rightarrow 2$ , 万有引力  $\vec{F}$  所作的功为:

$$\begin{aligned}
 W(1 \rightarrow 2) &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_{r_1(L)}^{r_2} -\frac{GMm}{r^2} dr \\
 &= \left(-\frac{GMm}{r_1}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_2}\right) \\
 &= -\left[\left(-\frac{GMm}{r_2}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_1}\right)\right]
 \end{aligned}$$



万有引力为保守力。

引入势能函数：

$$E_{pr} = -\frac{GMm}{r}$$

物体从位置1移动到位置2，万有引力所做的功：

$$W = -(E_{p2} - E_{p1})$$





$$\begin{aligned} W(1-2) &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{r_1(L)}^{r_2} -\frac{GMm}{r^2} dr \\ &= \left(-\frac{GMm}{r_1}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_2}\right) \\ &= -\left[\left(-\frac{GMm}{r_2}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_1}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\therefore E_{pr} = -\frac{GMm}{r}$$

选无穷远处为势能零点，其余地方势能为负

重力势能与万有引力势能有什么关系？？

- ☐ A 重力势能等于万有引力势能
- ☒ B 重力势能和万有引力势能不等
- ☐ C 不确定

### 三、重力势能与万有引力势能的关系

◆地表引力势能： $E_{PR} = -\frac{GMm}{R}$

◆离地球高度为h处，引力势能：

$$E_{P(R+h)} = -\frac{GMm}{R+h}$$

◆两点引力势能差为：

$$E_{P(R+h)} - E_{PR} = -\frac{GMm}{R+h} + \frac{GMm}{R}$$

- 当 $h \ll R$ 时,

$$\frac{GMm}{R+h} = \frac{GMm}{R(1+\frac{h}{R})} = \frac{GMm}{R} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1} \approx \frac{GMm}{R} \left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

$$\therefore E_{P(R+h)} - E_{PR} \approx -\frac{GMm}{R} \left(1 - \frac{h}{R}\right) + \frac{GMm}{R} = \frac{GMmh}{R^2}$$

$$\text{又} \because \text{地表上 } g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\therefore E_{P(R+h)} - E_{PR} = mgh$$

重力势能可看作是万有引力势能的差，在 $h \ll R$ 时的一级近似。



## § 3. 三种宇宙速度

## □ 第一宇宙速度:

- 物体绕地球运动而不下落所需的最小速度。

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \therefore v = \sqrt{\frac{R^2 g_0}{r}}$$

- 如卫星离地面不远, 令 $r=R$

$$v_1 = \sqrt{Rg} = \sqrt{6.4 \times 10^6 m \times 9.8 m/s^2}$$

$$v_1 = 7.9 km/s$$

## □ 第二宇宙速度:

- 物体完全脱离地球所需的最小的发射速度。
- 利用机械能守恒:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2g_0R} = 11.2km/s$$

## □ 第三宇宙速度:

使物体脱离太阳系所需的最小速度。

太阳质量为 $M_0$ ，太阳中心到地球中心的距离为 $R_0$

脱离太阳系需要的速度： $v = \sqrt{\frac{2GM_0}{R_0}}$

$$M_0 = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}, R_0 = 1.5 \times 10^{11} \text{ m} \quad v = 42.2 \text{ km/s}$$

由于地球绕太阳公转的速度为  $\frac{2\pi R_0}{T} = \frac{2 \times 3.14 \times 1.5 \times 10^{11}}{365 \times 24 \times 3600} = 29.8 \text{ km/s}$

相对地球只要  $v' = 42.2 - 29.8 = 12.4 \text{ km/s}$



相对于地球以速度  $v_3$  发射，克服引力做功，根据机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_3^2 - G\frac{M_em}{R_e} = \frac{1}{2}mv'^2$$

$$\frac{2M_eG}{R_e} = v_2^2$$

$$v_3 = 16.7 \text{ km} / \text{s}$$



对于万有引力，你又拓展了哪些认识？



# 作业

P138 3.24