模块2-1 刚体绕固定轴的转动

在模块2，您将学习：

- 刚体的角动量公式
- 刚体的转动定律
- 运用刚体的转动定律解决问题
- 刚体的角动量守恒

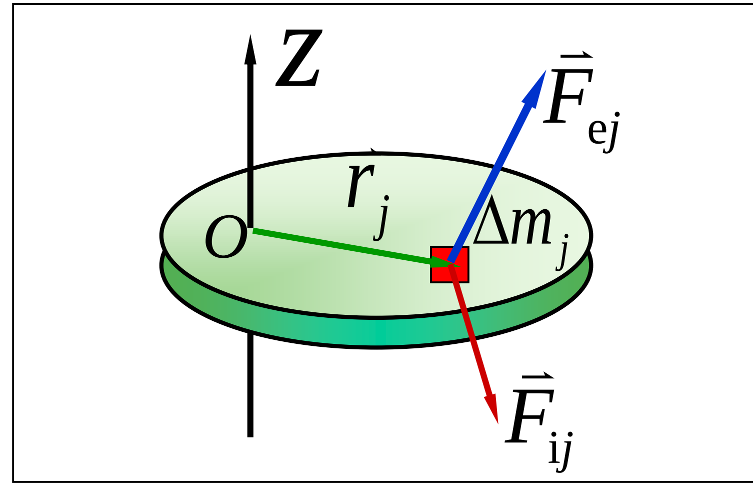
1 刚体的力矩

质量元受外力为 $\vec{F}_{ej}$

质量元受内力为 $\vec{F}_{ij}$

$$M_j = M_{ej} + M_{ij}$$

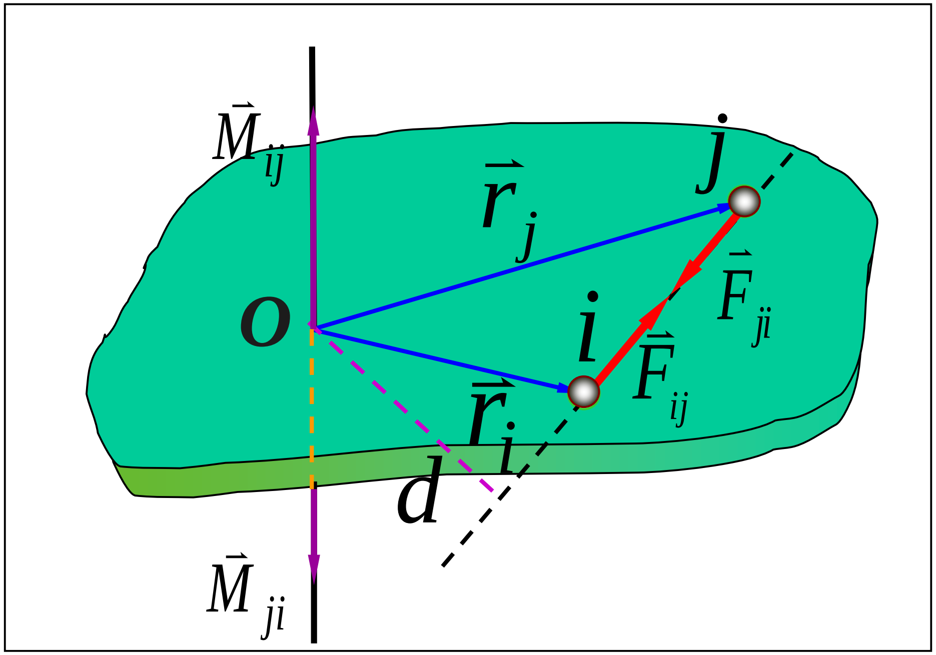
外力矩　　内力矩



刚体受到的总力矩：

$$M = \sum_j M_j = \sum_j M_{ej} + \sum_j M_{ij}$$

南開大學



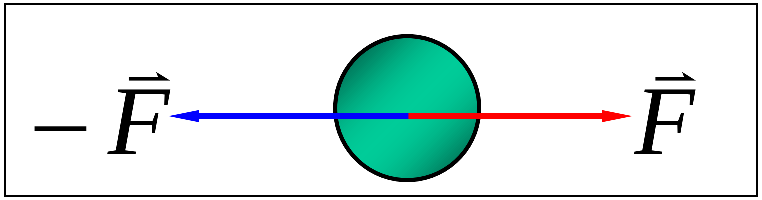
$$\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji}$$

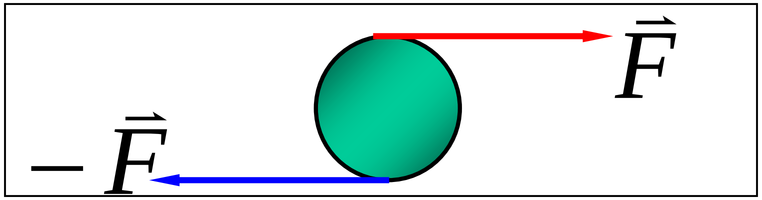
$$\therefore \sum_j M_{ij} = 0$$

刚体受到力矩：

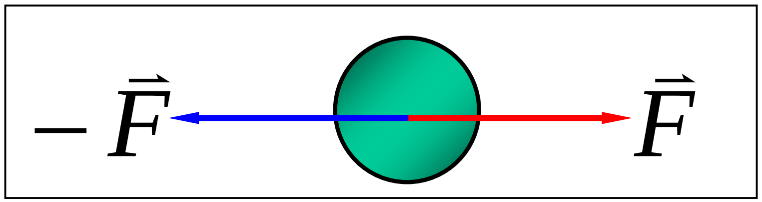
$$\vec{M} = \sum_j \vec{M}_{\mathrm{e}j} = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_{ej}$$

刚体所受的总力矩就是各质点所受外力矩的矢量和。

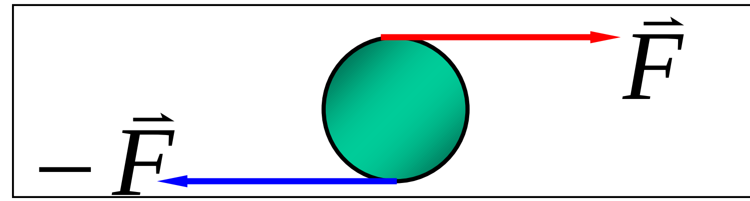




设轮子的半径为R，分析上述两种情况的合力和合力矩



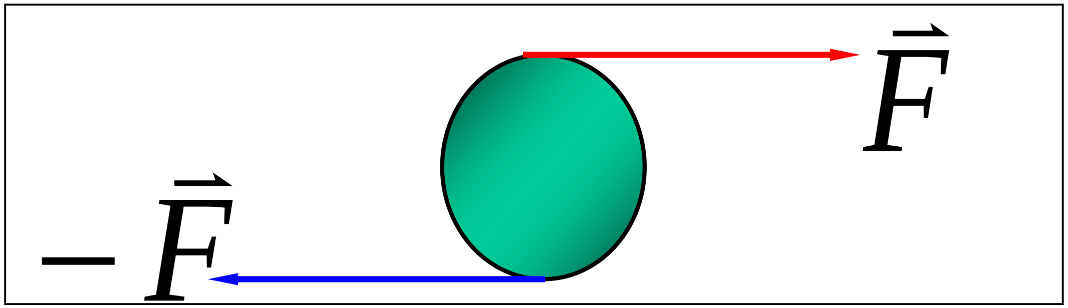
$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \sum_i \vec{M}_i = 0$$



$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \sum_i \vec{M}_i \neq 0$$

合力矩等于各分力矩的矢量和

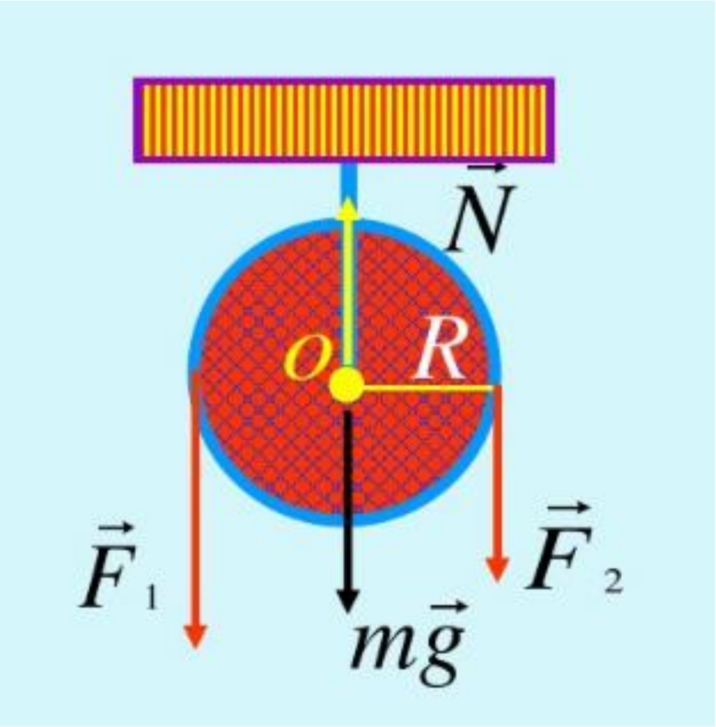
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots$$



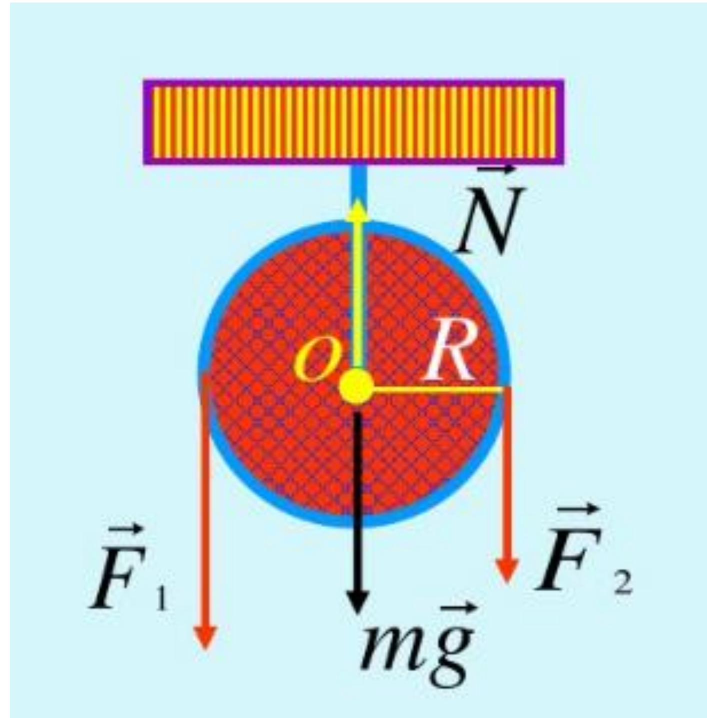
$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \sum_i \vec{M}_i \neq 0$$

力矩的方向指向哪里？

该滑轮受力如图所示，滑轮所受的力矩是多少？



该滑轮受力如图所示，滑轮所受的力矩是多少，方向指向哪里？



规定F2力矩的方向为正方向：

$$M = RF_2 - RF_1$$

滑轮受到重力和支撑力的作用，但是其力矩为0

2　刚体的角动量

刚体对给定参考点的角动量，等于各质点对该参考点的角动量的矢量和

$$\vec{L} = \sum_j \vec{l}_j$$

刚体的角动量定理

推导:

对每一个质元

$$\vec{M}_{jin}+\vec{M}_{jex}=\frac{d\vec{l}_j}{dt}$$

刚体:

$$\sum_i(\vec{M}_{jin}+\vec{M}_{jex})=\sum_i\vec{M}_{jex}=\vec{M}$$

$$\therefore\vec{M}=\sum_j(\frac{d\vec{l}_j}{dt})=\frac{d}{dt}\sum_j\vec{l}_j=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

结论:刚体的角动量定理

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

刚体所受的合外力矩等于刚体的角动量对时间的变化率

单选题 1分

Setting

一个光盘以恒定的速度绕通过中心的垂直轴转动，Q点到中心的距离是P点到中心距离的两倍，在给定时间里，Q点的角速度是（ ）

A 是P点的两倍

B 和P点相同

C 是P点的一半

D 以上都不是

Submit

单选题 1分

Setting

几个力同时作用在一个具有固定转轴的刚体上，如果这几个力的矢量和为零，则此刚体

A 必然不会转动

B 转速必然不变

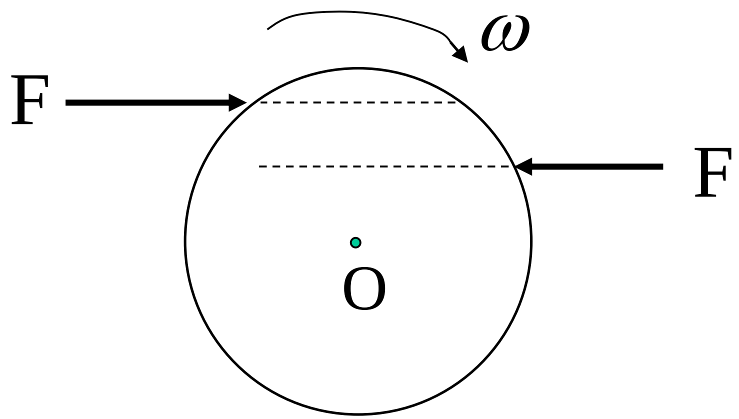
C 转速必然改变

D 转速可能不变，也可能改变

Submit

Setting

一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的光滑固定轴o以角速度ω，如图所示的方向转动。若将两个大小相等方向相反但不在同一条直线的力F沿盘面同时作用到圆盘上，则圆盘的角速度（ ）



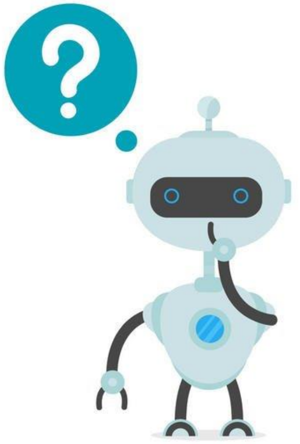
A 必然增大

B 必然减小

C 不会改变

D 如何变化不能确定

Submit



$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

应用这个公式有什么困难？

3　刚体定轴转动定律

我们知道，质点的角动量与质点绕定轴的转动状态有关：

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

分析目标：　将刚体的角动量和角速度联系起来

- 对第i个质点：$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i$

而 $\vec{v}_i = \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i$

$$\therefore \vec{l}_i = \Delta m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i)$$

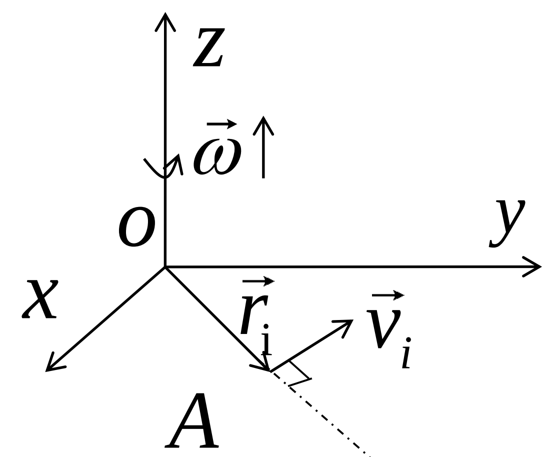
这里 $\vec{r}_i$ 是质点相对于轴线的矢径。

$\because \vec{\omega}_i \perp \vec{r}_i$ 且 $\vec{r}_i \perp \vec{v}_i = \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i$

$\therefore \vec{l}_i$ 的大小：$l_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$

其方向同 $\vec{\omega}$

故 $\vec{l}_i = \Delta m_i r_i^2 \vec{\omega}$



刚体的角动量：$\vec{L}=\sum_i \vec{l}_i=\sum_i \Delta m_i r_i^2\vec{\omega}=\vec{\omega}\sum_i \Delta m_i r_i^2$

这里的r_i 可认为是质点i到轴线的垂直距离。

令$I=\sum_i \Delta m_i r_i^2$ **转动惯量**

引入转动惯量后，刚体的角动量可以表示为：

$$\boxed{\vec{L}=I\vec{\omega}}$$

刚体的角动量：

$$\vec{L} = \sum_j \vec{l}_j$$

引入转动惯量

令 $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$

刚体的角动量：

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

刚体绕定轴转动的转动定律

$$\because \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\therefore \vec{M} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta}$$

$$\boxed{\vec{M} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta}}$$

刚体所受的合外力矩等于刚体转动惯量与角加速度的乘积

观看视频

角动量守恒

4 刚体角动量守恒定律

刚体的角动量守恒定律

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{M} = 0 \Rightarrow} \qquad \boxed{\vec{L} = C}$$

刚体所受的合力矩为零，则刚体的角动量守恒

对于刚体：　　$\because \vec{L} = I\vec{\omega}$

$$\boxed{I\omega = \text{恒量}}$$

◆也就是如果$\vec{M} = 0$, I不变，刚体角速度 ω不变
如 $\vec{M} = 0$，I变化，则 ω 也相应变化。

◆如 $\vec{M} = 0$， 当某刚体的某一部分转动时，则另一部分也将转动。两部分的角动量大小相等，方向相反。

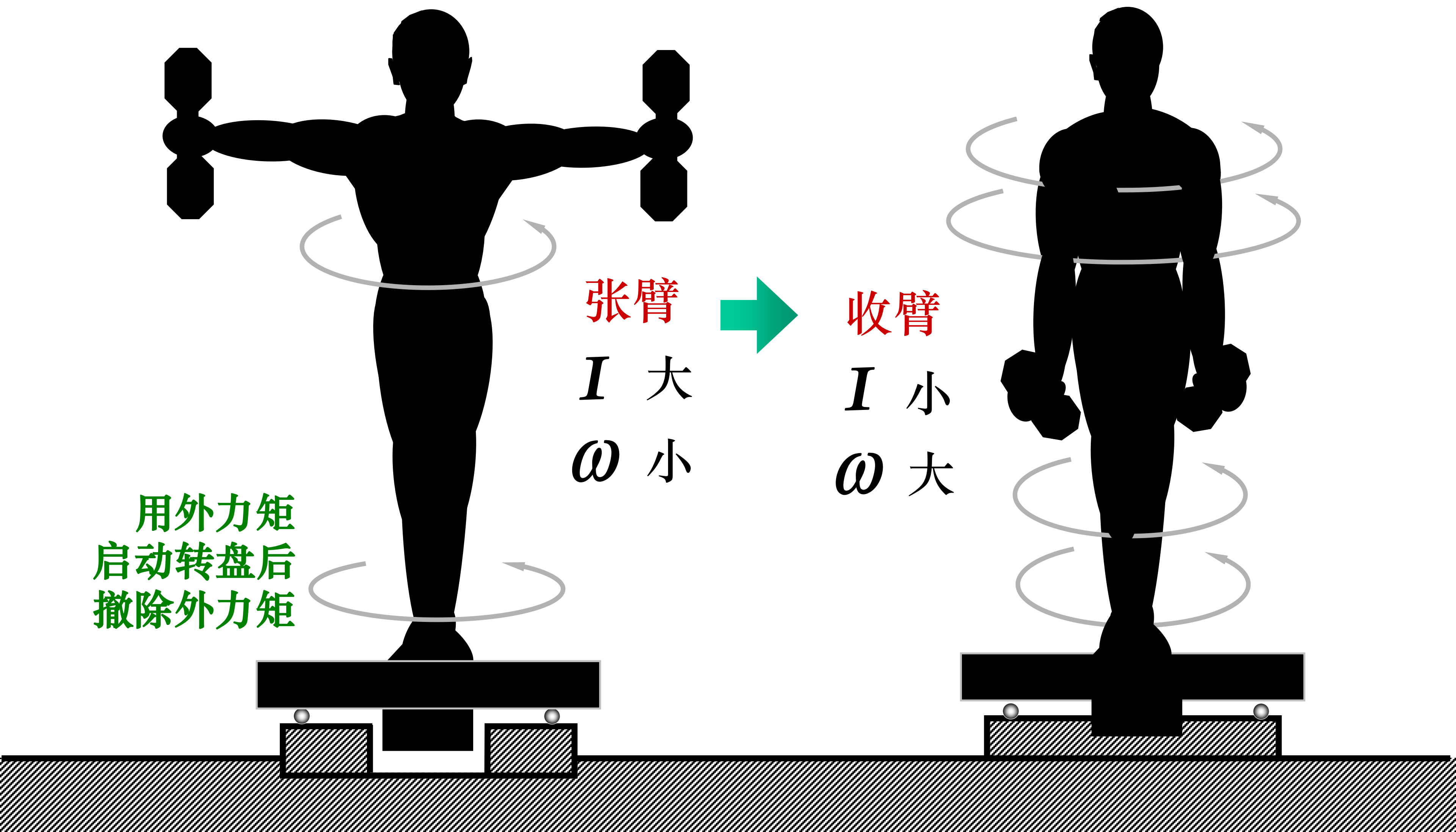
[角动量守恒定律可以帮助我们理解各种身体姿态空翻的难度_好看视频 (baidu.com)]

◆也就是如果 $\vec{M}=0$, I不变，刚体角速度 ω 不变

如 $\vec{M}=0$，I变化，则 ω 也相应变化。

27

角动量守恒现象

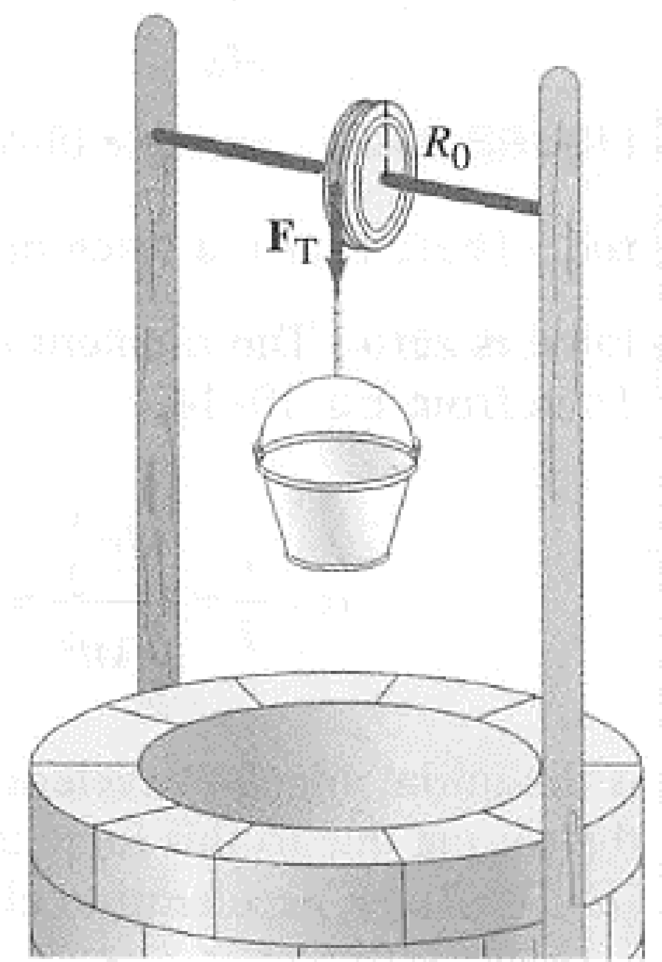


用刚体的转动定律解决一下问题吧！

$$\vec{M} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta}$$

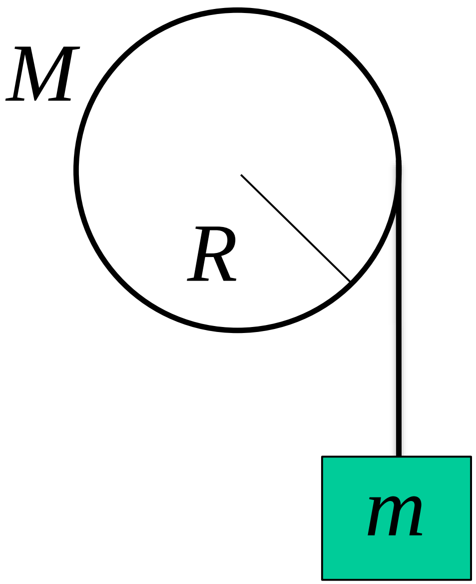
具体用法是：

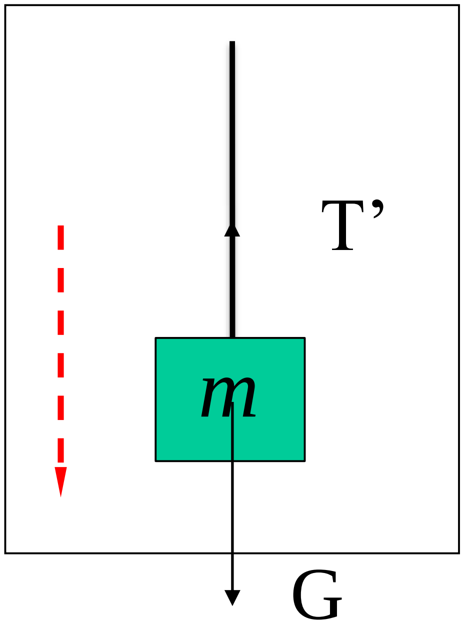
- ◆ 规定一转动方向为正方向，当力矩与规定正方向一致时，取正；反之取负；
- ◆ 当角加速度与规定正方向同向时，取正；反之取负；
- ◆ 通常选择转动的方向（角速度方向）为规定正方向，这样得到了转动定律的代数式。



已知转轮的转动惯量，水桶的质量，初始状态静止。你能否计算出某一时刻转轮的速度和桶的速度？

◆例1：一圆柱形滑轮，可在一通过质心的水平轴上自由转动，转动惯量为 $I=\frac{1}{2}MR^2$。一质量m的物体挂在细线上，细线绕在轮上，求重物m的加速度及滑轮转动的角加速度。

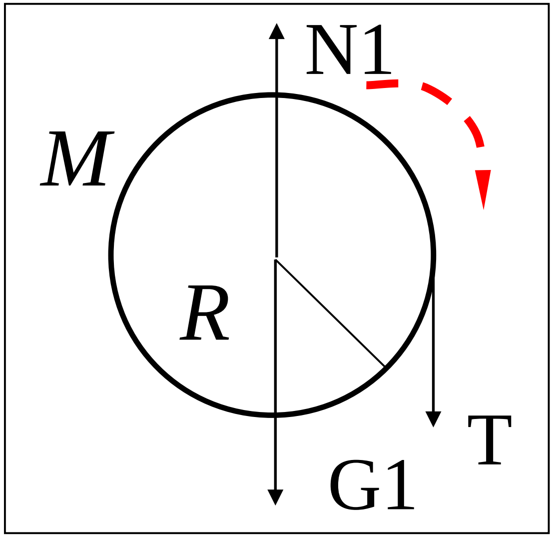




解：因轴线过质心，故滑轮重力和轴对其支持力的力矩为零。

设线上的张力为T，则

重物：mg-T=ma ——(1)



$$M = RT$$

$$RT = \frac{1}{2} mR^2 \beta \text{——（2）}$$

由α与a的关系：$a = R\beta$——（3）

由（1）（2）消去T, 结合（3）得到

$$\beta = \frac{mg}{R(\frac{M}{2} + m)}$$

$$a = \frac{mg}{\frac{M}{2} + m}$$

转盘的转速

$$\frac{d\omega}{dt}=\beta$$

$$\therefore \omega=\beta t+\omega_0=\frac{mg}{R(\frac{M}{2}+m)}t$$

桶的速度

$$\frac{dv}{dt}=a$$

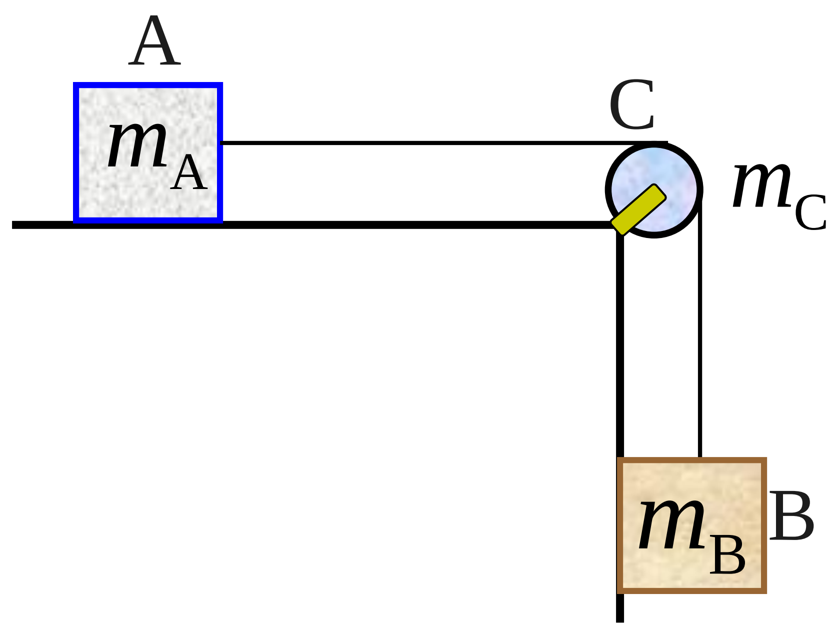
$$\therefore v=at+v_0=\frac{mg}{(\frac{M}{2}+m)}t$$

知道下落的加速度和转动的加速度后，

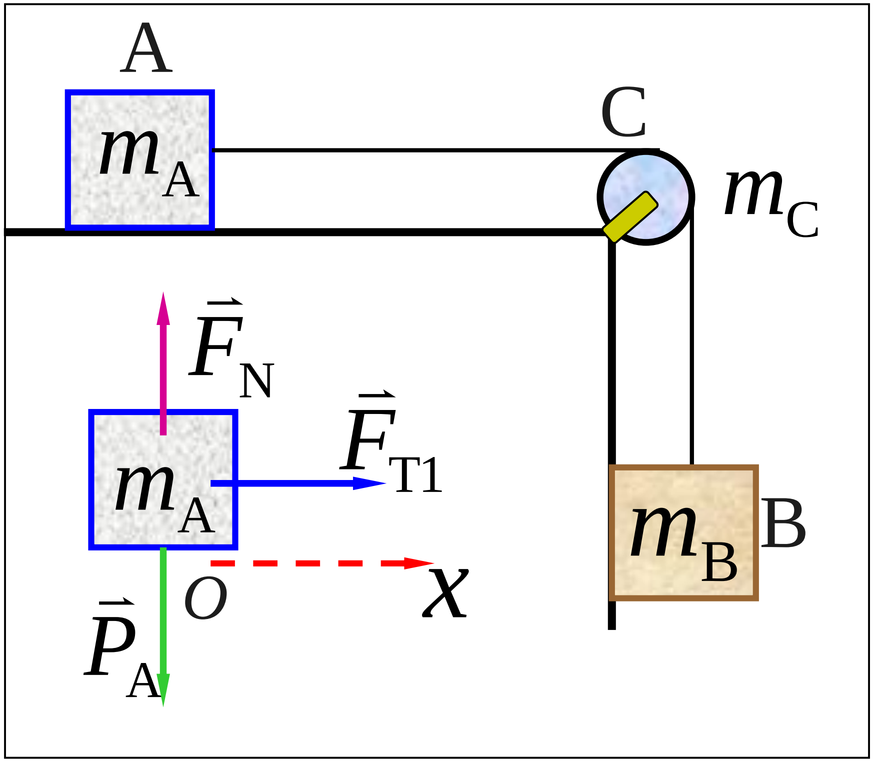
我们可以求任意时刻的速度和转速！

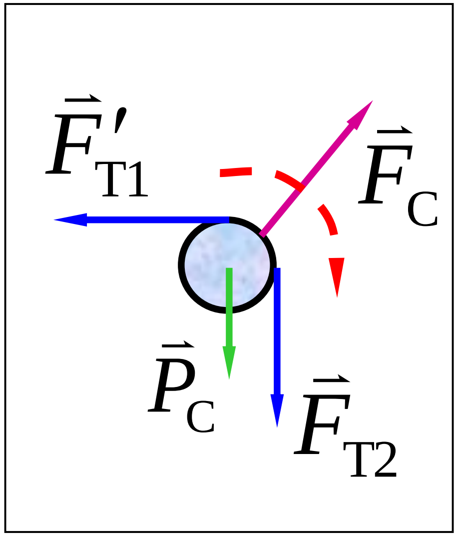
南開大學

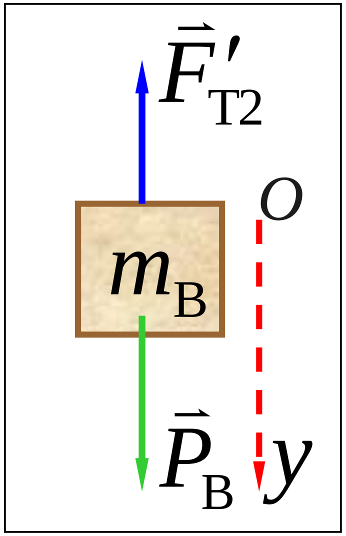
例2 质量为m_A的物体A 静止在光滑水平面上，和一质量不计的绳索相连接，绳索跨过一半径为R、质量为m_C的圆柱形滑轮C（ $I=\frac{1}{2}m_cR^2$ ），并系在另一质量为m_B 的物体B上，B 竖直悬挂．滑轮与绳索间无滑动， 且滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计．(1) 两物体的加速度为多少？ 水平和竖直两段绳索的张力各为多少？(2) 物体 B 从静止落下距离 y 时，其速率是多少？



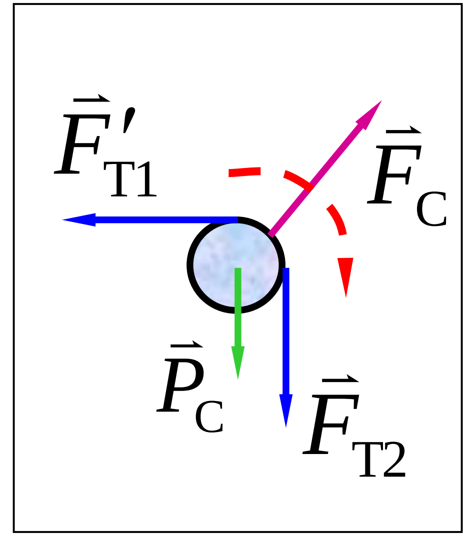
解（1） 用隔离法分别对各物体作受力分析，取如图所示坐标系.

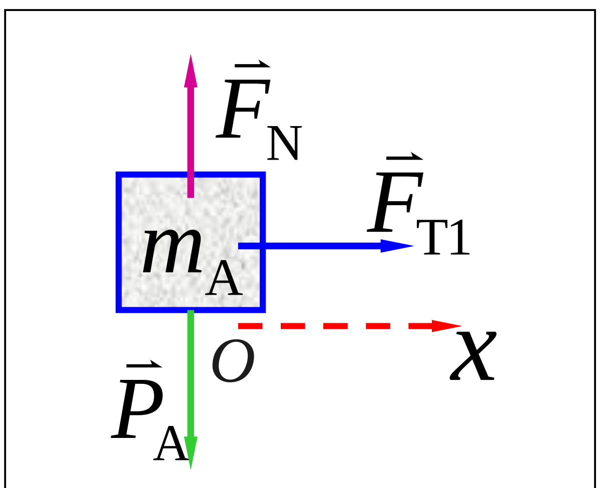


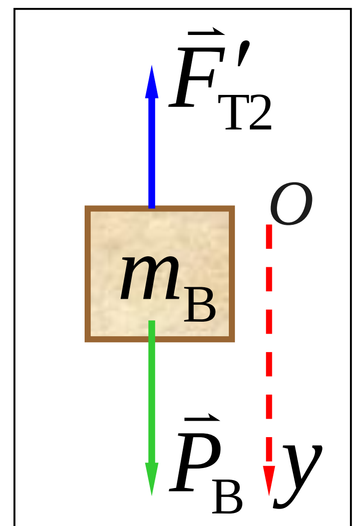




$$\begin{cases} F_{\mathrm{T1}} = m_{\mathrm{A}} a \\ m_{\mathrm{B}} g - F_{\mathrm{T2}} = m_{\mathrm{B}} a \\ R F_{\mathrm{T2}} - R F_{\mathrm{T1}} = \mathrm{I} \alpha \\ a = R \alpha \end{cases}$$







解得：
$$\begin{cases} a = \dfrac{m_{\mathrm{B}} g}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}/2} \\ F_{\mathrm{T1}} = \dfrac{m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}} g}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}/2} \\ F_{\mathrm{T2}} = \dfrac{(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}/2) m_{\mathrm{B}} g}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}/2} \end{cases}$$

如令$m_{\mathrm{C}}=0$，可得

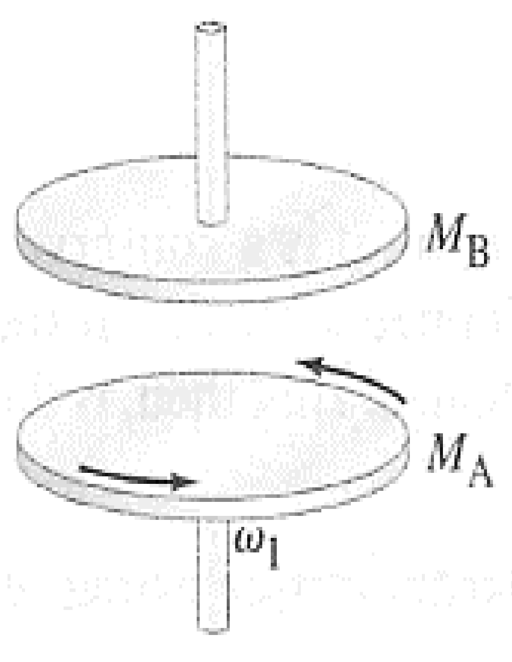
$$F_{\mathrm{T1}}=F_{\mathrm{T2}}=\frac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}g}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{\mathrm{T1}}&=\frac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}g}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}/2} \\ F_{\mathrm{T2}}&=\frac{(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{C}}/2)m_{\mathrm{B}}g}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}/2} \end{aligned}}$$

（2） **B由静止出发作匀加速直线运动，下落的速率**

$$v=\sqrt{2ay}=\sqrt{\frac{2m_{\mathrm{B}}gy}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}/2}}$$

离合器的设计



你要设计一个离合器，这个离合器由两个匀质圆盘组成。Ma ＝ 6.0 kg, Mb ＝ 9.0 kg ，半径R0 ＝ 0.60 m。 最初他们是分离的。圆盘Ma从静止加速到角速度 $\omega_1 = 7.2 rad/s$，耗时2.0 s。计算（1）Ma的角动量，（2）使Ma加速到 ω_1 所需的力矩。

（圆盘的转动惯量 $I = \frac{1}{2}MR^2$ ）

然后，Mb 从静止竖直落到Ma，并与Ma紧密接触。接触前Ma以匀角速度 ω_1 转动。接触后，Ma和Mb共同以恒定的角速度 ω_2 转动，ω_2 远小于 ω_1 ，问题：这个现象产生的原因是什么？ω_2 是多少？

解：根据转动定律，可以求得Ma的角动量

$$L_A = I_A\omega_1 = \frac{1}{2}M_A R_0^2\omega_1 = \frac{1}{2}\times 6.0\times(0.6)^2\times 7.2 = 7.8kg\cdot m^2/s$$

若力矩恒定不变：

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{7.8kg\cdot m^2/s - 0}{2.0} = 3.9m\cdot N$$

由角动量守恒

$$I_A\omega_1 = (I_A + I_B)\omega_2$$

$$\omega_2 = (\frac{I_A}{I_A+I_B})\omega_1 = (\frac{M_A}{M_A+M_B})\omega_1 = (\frac{6}{15})\times 7.2 = 2.9\,\mathrm{rad/s}$$

模块2-1 的学习目标，您达到了吗？

- 刚体的角动量是怎么定义的？
- 刚体的转动定律是什么？
- 我能够应用转动定律求解问题吗？
- 刚体的角动量守恒

作业：

P226 T6.5 T6.6 T6.10