质点运动学第二类基本问题

- 已知质点的加速度以及初始速度和初始位置，可求质点速度及其运动方程.

积分

已知速度或者加速度，求运动学方程（需要已知初始条件）

$$\vec{v} = \int \vec{a} dt$$

$$\vec{r} = \int \vec{v} dt$$

物体做以速度v做匀速直线运动，在t=0时刻，物体位于x0，请运用积分的方法求出该物体的运动学方程。

t=0

矢量：$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$

标量：v=$\frac{dx}{dt}$

dx=vdt

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t vdt$$

x-x_0=vt

x=vt+x_0

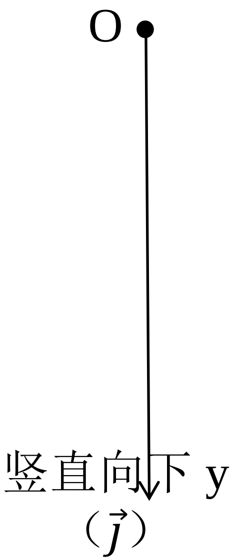
运动学方程：$\vec{r}$=（vt+x_0）$\vec{i}$

物体做自由落体运动，在t=0时刻，物体位于0处，请运用积分的方法求：

（1）该物体速度随时间变化的规律；

（2）此物体的运动学方程；

（3）此物体速度与路程的关系；



$t=0$ $y_0=0$

$v_0=0$

矢量：$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$

标量：$g=\frac{dv}{dt}$

$dv=gdt$

$$\int_0^v dv = \int_0^t gdt$$

$v=gt$

$v=\frac{dy}{dt}$

$gt=\frac{dy}{dt}$

$dy=gtdt$

$$\int_0^y dy = \int_0^t gtdt$$

$y=\frac{1}{2}gt^2$

运动学方程：

$$\vec{y}=\frac{1}{2}gt^2\vec{j}$$

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

0

$t=0,\ y_0=0\quad v_0=0$

竖直向下: y ($\vec{j}$)

矢量: $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$

标量: $g=\frac{dv}{dt}$

$=\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}$

$=v\frac{dv}{dy}$

$\therefore\ v\,dv=g\,dy$

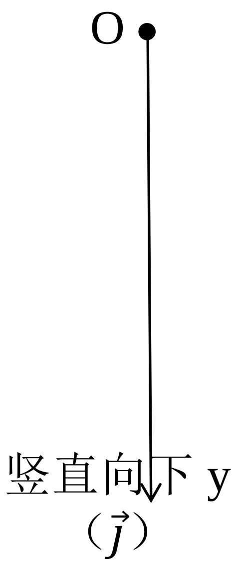
$$\int_{v_0}^{v}v\,dv=\int_{y_0}^{y}g\,dy$$

$$v^2-v_0^2=2g(y-y_0)$$

当 $y_0=0,\ v_0=0$ 时:

$$v^2=2gy$$

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$



t=0 y_0=0
v_0=0

矢量： $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$

标量： $g=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=v\frac{dv}{dy}$

$$v\,dv = g\,dy$$

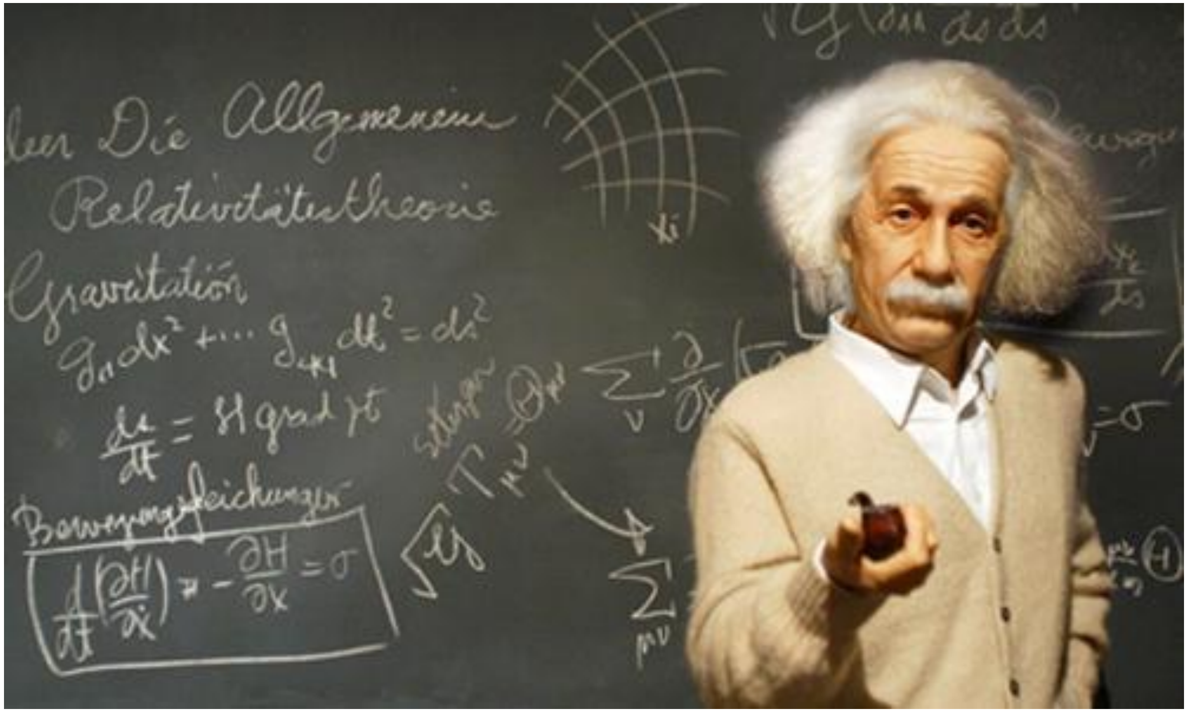
$$\int_{v_0}^{v} v\,dv=\int_{y_0}^{y} g\,dy$$

$$v^2-v_0^2=2g(y-y_0)$$

当 $y_0=0$， $v_0=0$ 时
$$v^2=2gy$$

10

杀鸡用牛刀？？？

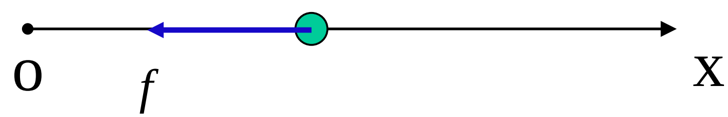


牛刀当然是用来杀牛的！！！

一质量为m的子弹射入沙堆。设子弹在沙堆中受到的阻力的大小与子弹的速度成正比，比例系数为k，　若子弹进入沙堆前的速度为v0，忽略子弹所受的重力，　求在沙堆中前进时，子弹的速度随时间的变化规律。

变加速度问题！

解：选择子弹进入沙堆的位置为坐标原点，子弹前进方向为正方向，建立一维坐标系　$t=0, v=v_0$



$$\vec{f}=-kv\vec{i}$$

$$\vec{f}=m\vec{a}$$

$$\vec{a}=\frac{-kv}{m}\vec{i}$$

$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{i}$$

$$\frac{-kv}{m}=\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{1}{v}dv=\int_0^t-\frac{k}{m}dt$$

$$\ln\frac{v}{v_0}=-\frac{k}{m}t$$

$$v=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$$

必看

教课书P24, 例 1.10 和 1.11。

采用积分解决运动学问题

微积分的数学工具，使我们能够解决更为一般的物理问题。

您能求解运动学方程的第二类问题吗？

- 例1：

质点直线运动方程为 $x = 3\sin\dfrac{\pi}{6}t$ ，求：

a) 什么时刻x=0？什么时刻位移最大？

b) 最大、最小速率时的位置；

c) 最大、最小加速度时的位置；

解： x=0时位移最小

$$3\sin\frac{\pi}{6}t=0$$

$$\frac{\pi}{6}t=k\pi$$

$$t=6k$$

当 t=0、6、12…. 时，x=0

x=±1时，位移最大

$$\frac{\pi}{6}t=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$t=3(2k+1)$$

当t=3、9、15…时，位移最大

b）速度：

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{6}t$$

速率最小时：

$$\frac{\pi}{6}t=\left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}$$

$$t=3\left(2k+1\right)$$

此时x最大，为±3

速率最大时：

$$\frac{\pi}{6}t=2k\frac{\pi}{2}$$

$$t=6k$$

此时x最小，为0

c）加速度：

$$a=\frac{dv}{dt}=-\frac{\pi^2}{12}sin\frac{\pi}{6}t$$

加速度最大时： $\sin\frac{\pi}{6}t=\pm1,\quad |a|=\frac{\pi^2}{12},$

$$\mathrm{x}=\pm3$$

加速度最小时： $\sin\frac{\pi}{6}t=0,\quad |a|=0$

$$\mathrm{x}=0$$

c) $a=\frac{dv}{dt}=-\frac{\pi^2}{12}sin\frac{\pi}{6}t$

|a|最大： $\sin\frac{\pi}{6}t=\pm 1,\quad |a|=\frac{\pi^2}{12},\quad \mathrm{x}=\pm 3$

|a|最小： $\sin\frac{\pi}{6}t=0,\quad |a|=0,\quad \mathrm{x}=0$

- 斜抛运动的情况，同学们可运用所学知识自行推导。

抛物运动

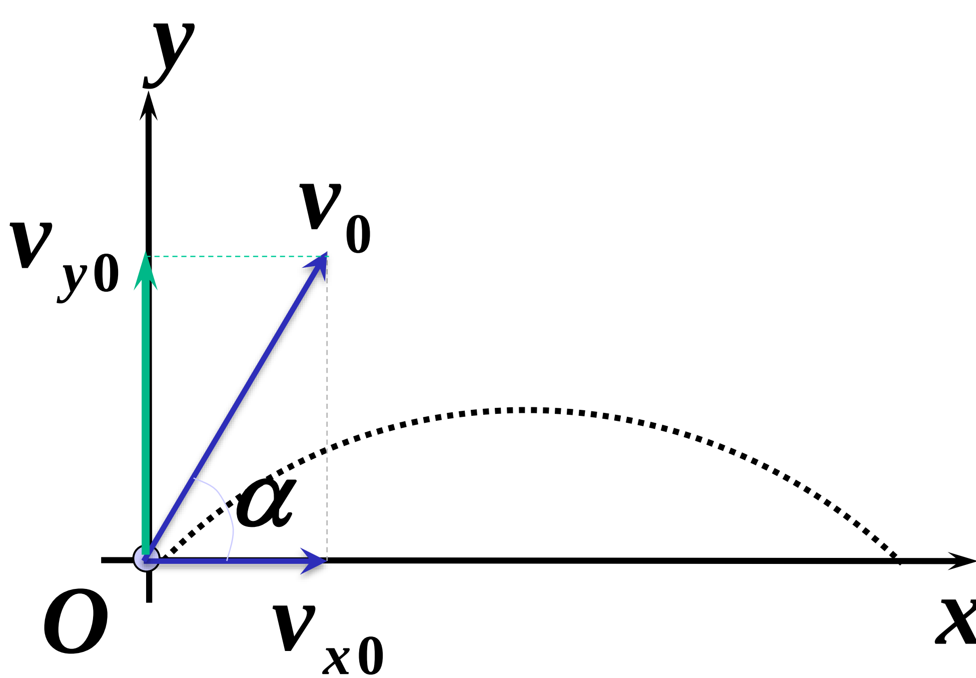
抛物运动：从地上基点把一物体以某一角度投射出去，如忽略空气阻力，物体在空中的运动。

a．x、y方向是直线运动

b．运动方程：

$x=x(t)$

$y=y(t)$



- 在x，y方向上，分别可直接应用直线运动的结论：

✓X方向： $a_x = 0$ 匀速直线运动

初始条件： $t = 0$时$, x = 0, v_{x_0} = v_0 \cos\alpha$

$$a_y = -g$$

✓Y方向：匀变速运动

初始条件：$t = 0$时$, y = 0, v_{y_0} = v_0 \sin\alpha$

求： 抛物运动的速度方程、运动方程、飞行时间、射程、射高、轨迹方程

速度方程：

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases}$$

运动方程：

$$\begin{cases} \mathrm{x} = v_0 \cos\alpha \bullet t \\ \mathrm{y} = v_0 \sin\alpha \bullet t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

以上是四个基本方程，由此可得：

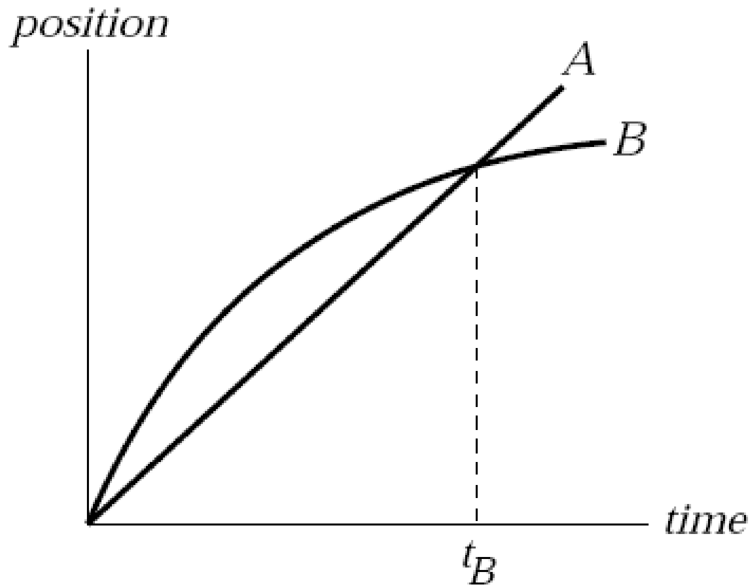
✓ 飞行时间 $T=\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$

✓ 射程 $X=\dfrac{v_0{}^2\sin 2\alpha}{g}$

✓ 射高 $Y=\dfrac{v_0{}^2\sin^2\alpha}{2g}$

轨迹方程 $y=x\cdot tg\alpha-\dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$

➢ 重点掌握4个基本方程（由具体情况而定），其他可由各点的特性推出 。



- 平均速度：$\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

- 平均加速度：$\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$