第六章

物质的弹性

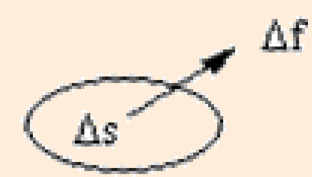
- 物体受到外力时，会发生形变，当外力撤销后，物体能完全恢复原状的变化范围——**弹性范围**（与材料有关）。
- 物体只能部分恢复原状或完全不能恢复原状，但不会分裂的变化范围——**塑性（范性）范围**（与材料有关）。
- **本章在弹性范围内讨论。**
- 固体材料分为晶体、非晶体、微晶体；晶体表现为各向异性；其它表现为各向同性。
- **本章只讨论各向同性的固体材料。**

§1.应力与应变

一、应力

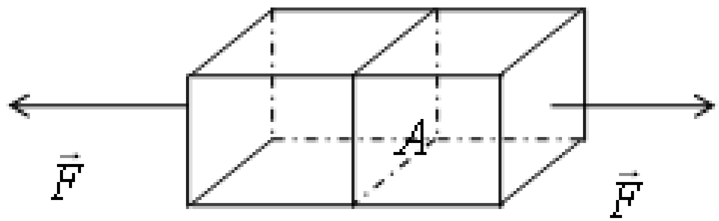
由于形变而使材料单位面积所受的弹力称为**应力**。

$$\tau = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}$$

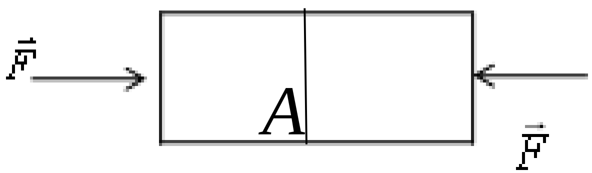


8.1.0 应力定义

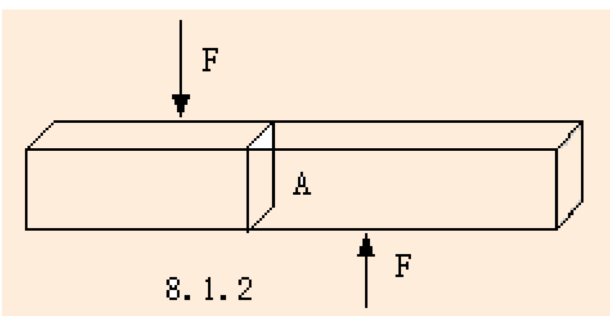
单位为牛顿/米^2，简称为帕



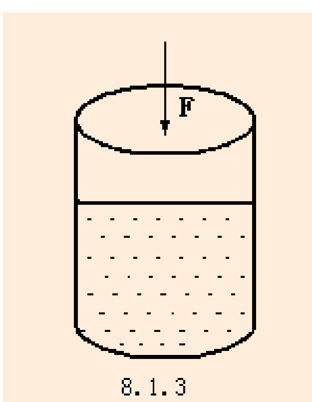
——张应力 $\tau_{\perp} = \dfrac{F}{A}$



——压应力 $\tau_{\perp} = \dfrac{F}{A}$



——切应力 $\tau_{11} = \dfrac{F}{A}$



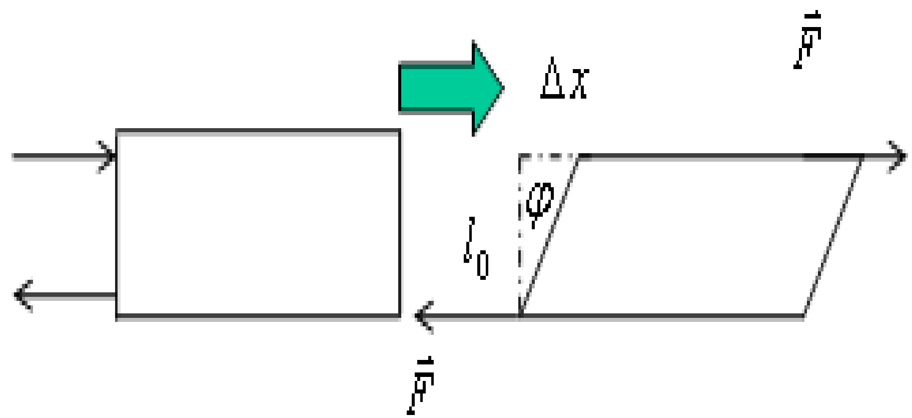
——静压强 $\Delta p = \dfrac{F}{S}$

二、应变：

当物体受应力作用时，其长度、形状、体积都可能发生变化，这种变化与原来对应量之比称为应变。

张应变：$\dfrac{l-l_0}{l_0}=\dfrac{\Delta l}{l_0}$

压应变：$\dfrac{l_0-l}{l_0}=-\dfrac{\Delta l}{l_0}$



切应变：$\dfrac{\Delta x}{l_0}=\varphi$

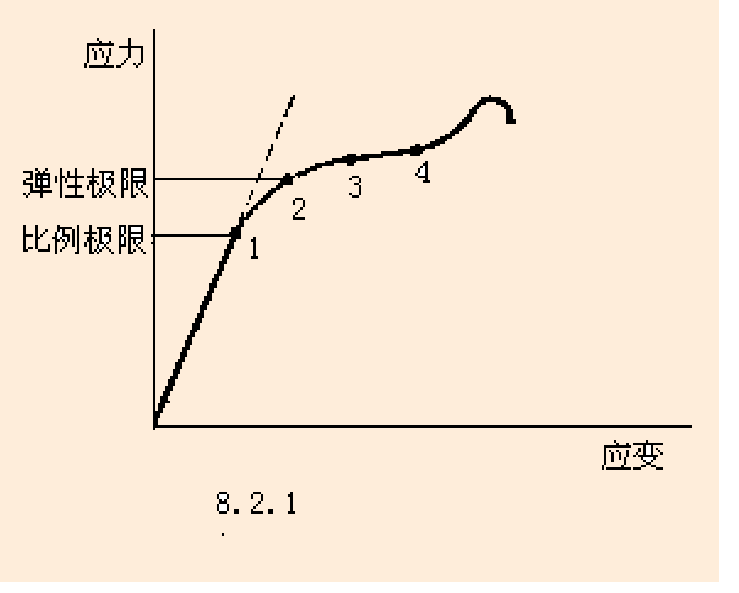
对应静压强的体应变：$\dfrac{\Delta V}{V}$

◆应变无量纲

§2.弹性模量

1 胡克定律

- 在比例极限范围内，物体内部的应力与物体的应变成正比。



- 弹性极限与比例极限很近，这段 范围为弹性范围。

胡克定律

在弹性限度内，应力与应变成正比。

2 弹性模量

在弹性限度内，某一材料的应力与应变的比值称为该材料的弹性模量。单位：　N/m^2

杨氏模量

通常把描述 弹性体的拉伸或压缩，即发生纵向形变时的弹性模量称为杨氏模量（用E或Y表示）

$$E = \frac{\text{张应力}}{\text{张应变}} = \frac{\text{压应力}}{\text{压应变}} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta l}{l_0}}$$

切变模量

切应力与切应变的比——**切变模量**，用G表示

$$G = \frac{切应力}{切应变} = \frac{\frac{F}{A}}{\varphi} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta x}{l_0}}$$

对于一般材料：

$$G = \frac{2}{5}E \sim \frac{3}{8}E$$

材料	杨氏模量	切变模量
钢	20×10^{10}	8×10^{10}
锻铁	19×10^{10}	7×10^{10}
铜	11×10^{10}	4×10^{10}
铝	7×10^{10}	2.4×10^{10}
铅	1.3×10^{10}	0.5×10^{10}

体积（容变）弹性模量，

流体静压强的增加值与体应变的比——体积（容变）弹性模量，用K表示

$$K=-\frac{P}{\frac{\Delta V}{V_0}}$$

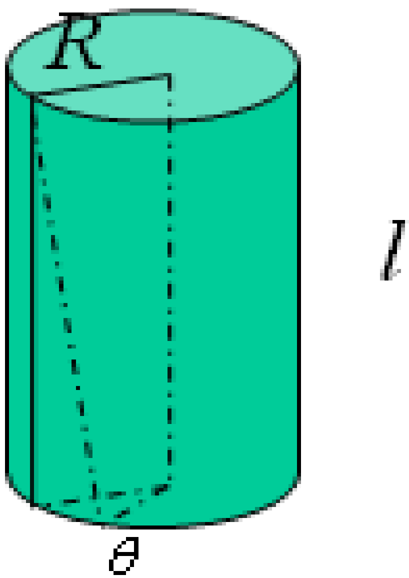
体积压缩系数

体积弹性模量的倒数——体积压缩系数，用$\boldsymbol{\kappa}$表示

$$\boldsymbol{\kappa}=\frac{1}{K}=-\frac{1}{P}\frac{\Delta V}{V_0}$$

扭转系数

扭转、弯曲可看做是纵向形变与切向形变的组合。



$$M = D\theta$$

$$D = \frac{\pi G R^4}{2l}$$ ——扭转系数

θ 为扭转角

§3.泊松比

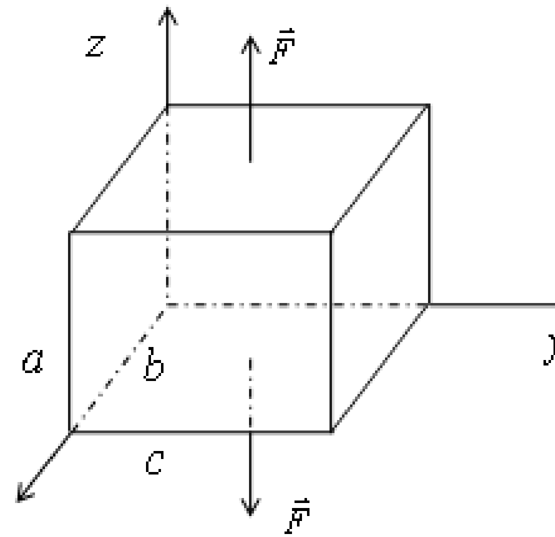
对于纵向形变，拉伸或压缩时，其纵向长度增大或减小的同时，其横向线度会随之减小或增大。设纵向的应变为 $\dfrac{\Delta l}{l_0}$ ，横向应变为 $\dfrac{\Delta d}{d_0}$

则 $$\mu = -\frac{\dfrac{\Delta d}{d_0}}{\dfrac{\Delta l}{l_0}}$$

称为该材料的泊松比。

- 我们来讨论物体在 拉伸后体积的变化。

$$E=\frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta a}{a}} \text{即} \frac{\Delta a}{a}=\frac{F}{AE}$$



$$\therefore \frac{\Delta b}{b}=-\mu\frac{\Delta a}{a}=-\mu\frac{F}{AE} \quad (1)$$

$$\frac{\Delta c}{c}=-\mu\frac{\Delta a}{a}=-\mu\frac{F}{AE} \quad (2)$$

$$\text{而} V=abc$$

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta c}{c}=\frac{\Delta a}{a}-\mu\frac{\Delta a}{a}-\mu\frac{\Delta a}{a}$$

$$\text{即} \frac{\Delta V}{V}=(1-2\mu)\frac{\Delta a}{a}$$

- 实验测定，不管是什么材料，μ 总是小于$\frac{1}{2}$，即 $1-2\mu>0$ ，即拉伸时$\frac{\Delta a}{a}>0,\frac{\Delta V}{V}>0$，体积增加；压缩时，$\frac{\Delta a}{a}<0,\frac{\Delta V}{V}<0$，体积减小，即横向的形变总是不能抵消纵向形变引起的体积变化。

由（1）知$\frac{\Delta V}{V}=(1-2\mu)\frac{F}{EA}$

假设在正六面体的六个面上，都受到应力$\frac{F}{A}$

此时

$$\frac{\Delta V}{V}=3(1-2\mu)\frac{F}{EA}$$

如果各面上是压变力，则体积缩小：

$$\therefore \frac{\Delta V}{V} = -3(1-2\mu)\frac{F}{EA}$$

- 在液体静压强的情形下，$P = \frac{F}{A}$

$$\therefore \frac{\Delta V}{V} = -3(1-2\mu)\frac{P}{E}$$

- 由体积弹性模量定义知：$\kappa = -\frac{P}{\frac{\Delta V}{V}}$

$$\boxed{\therefore \kappa = \frac{E}{3(1-2\mu)}}$$

✓ 这就是体积弹性模量、杨氏模量及泊松比的关系。

§4.固体弹性形变的势能

- 以拉伸为例，计算外力做功：

$$E=\frac{\frac{F}{A}}{\frac{l-l_0}{l_0}}\Rightarrow F=\frac{EA}{l_0}(l-l_0)$$

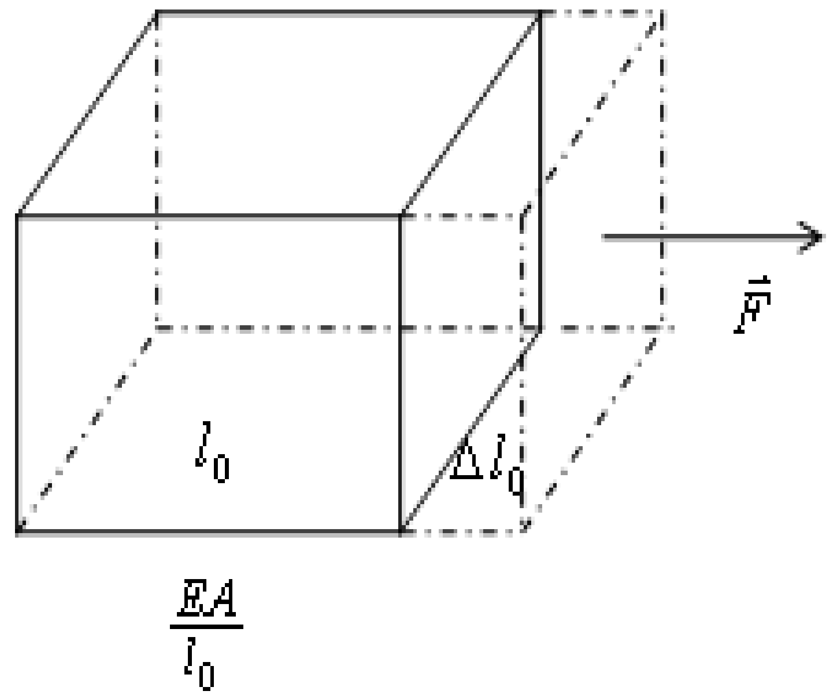
力F使材料拉长dl所作的功：

$$dW=F\cdot dl$$

$$\mathrm{W}=\int_{l_0}^{l}F\cdot dl=\int_{l_0}^{l}\frac{EA}{l_0}(l-l_0)dl$$

$$=\frac{1}{2}\frac{EA}{l_0}(l-l_0)^2$$

$$=\frac{1}{2}\frac{EA}{l_0}(\Delta l)^2$$



其中 $\dfrac{EA}{l_0}$ 叫弹性物体的力系数。

$$W=\tfrac{1}{2}E(\tfrac{\Delta l}{l_0})^2 l_0 A=\tfrac{1}{2}(E\tfrac{\Delta l}{l_0})(\tfrac{\Delta l}{l_0})l_0 A$$

$E\tfrac{\Delta l}{l_0}$ 为应力，$\tfrac{\Delta l}{l_0}$ 为应变，$l_0 A$ 为原体积

$$\therefore\quad W=\frac{1}{2}\text{应力}\times\text{应变}\times\text{体积}$$

可认为是弹性物体的形变势能：

$$\boxed{E_P=\tfrac{1}{2}\text{应力}\times\text{应变}\times\text{体积}}$$

单位体积的形变势能（形变势能密度）为：

$$e_P=\tfrac{1}{2}\text{应力}\times\text{应变}$$

$$e_P=\tfrac{1}{2}\text{弹性模量}\times(\text{应变})^2$$

适合于所有形变。