第三章

功和能

模块1：　功和功率

1.1　功

通过本次课的学习，您将学会：

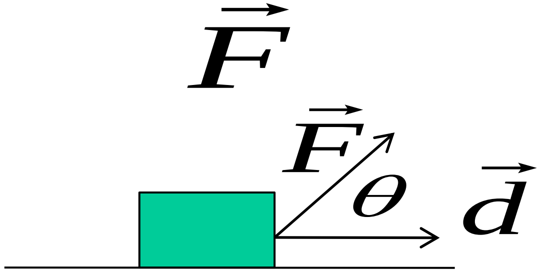
如何解决变力做功的问题

恒定大小的力做功，如何计算？

一、恒力作功

- 力 $\vec{F}$ 作用于物体上，如果 $\vec{F}$ 与位移 $\vec{d}$ 同向，则 $\vec{F}$ 对物体所做的功为：

$$W = Fd$$



- 如果 $\vec{F}$ 与 $\vec{d}$ 不同方向，夹角为 θ，

$$W = Fd\cos\theta$$

恒力沿直线作功

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

功：力对物体所做的功为力沿位移方向的分量与位移的乘积。或功是力与位移的标积。

说明：

1）功是标量，没有方向但有正负

- $\theta < 90^\circ$ 功为正
- $\theta = 90^\circ$ 功为0
- $\theta > 90^\circ$ 功为负

2）功的单位：

SI中， 牛顿· 米=焦耳（J）

CGS中， 达因 ·厘米=尔格（erg）

单选题 1分

设置

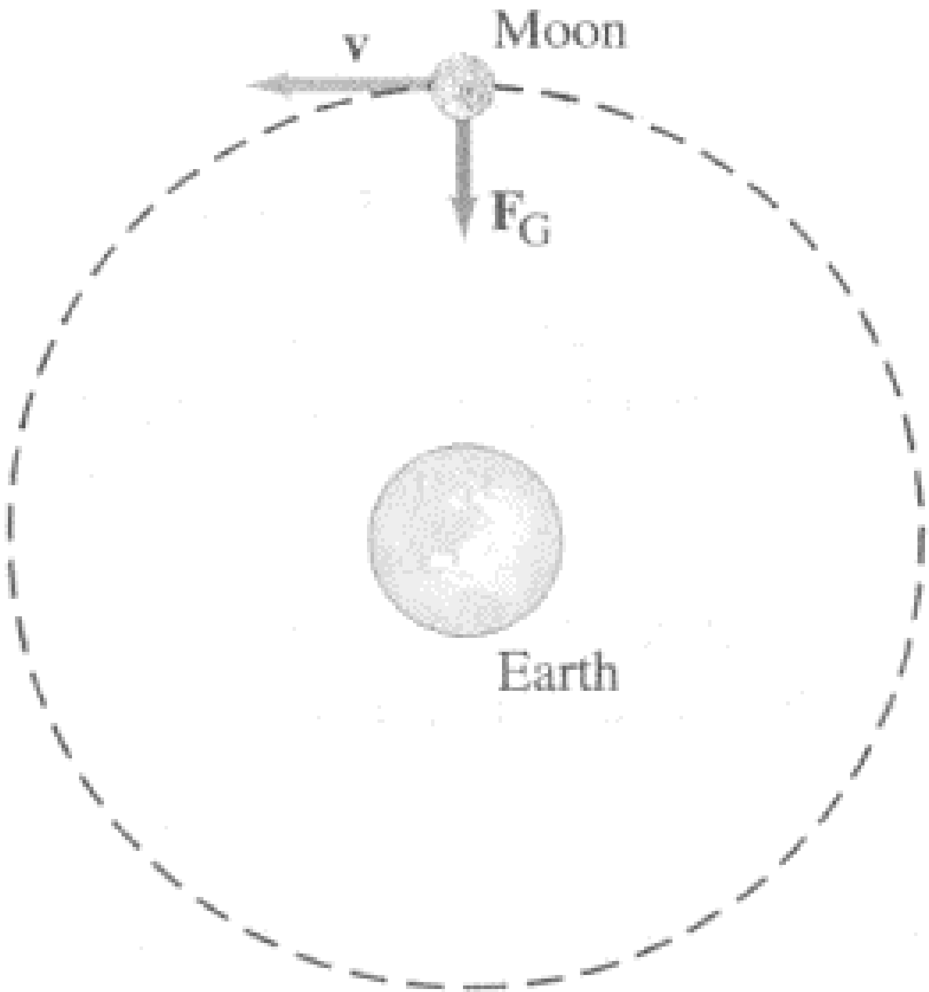
月亮绕地球在近似为圆形的轨道上运动，月亮受到地球的引力作用。地球的引力对月球情况（）

A 做正功

B 做负功

C 不做功

提交


Moon
v
F_G
Earth

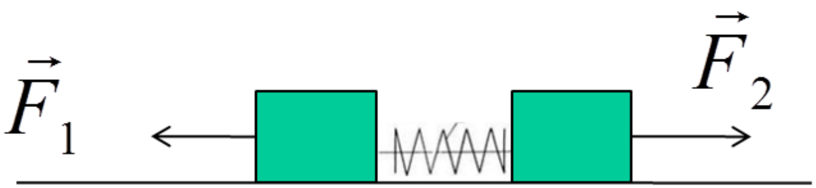
3) 功可看做力的分量与位移的乘积，也可看做是位移沿力的方向的分量与力的乘积。

即 $$W = (F\cos\theta)d = F(d\cos\theta)$$

4）必须指明是哪个力所作的功。

5）外力对物体系做的总功不一定等于合外力所作的功，应等于各个外力所作功的代数和。

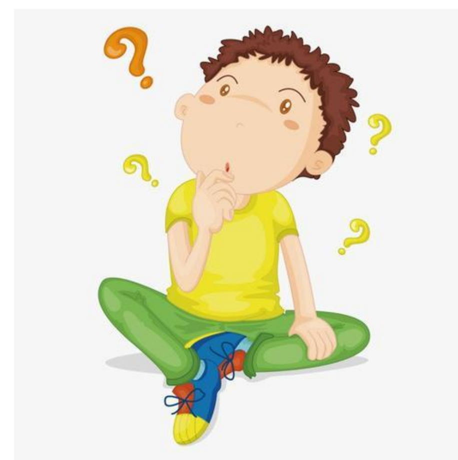
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$



二、变力所作的功

变力：力的方向和大小均会发生变化

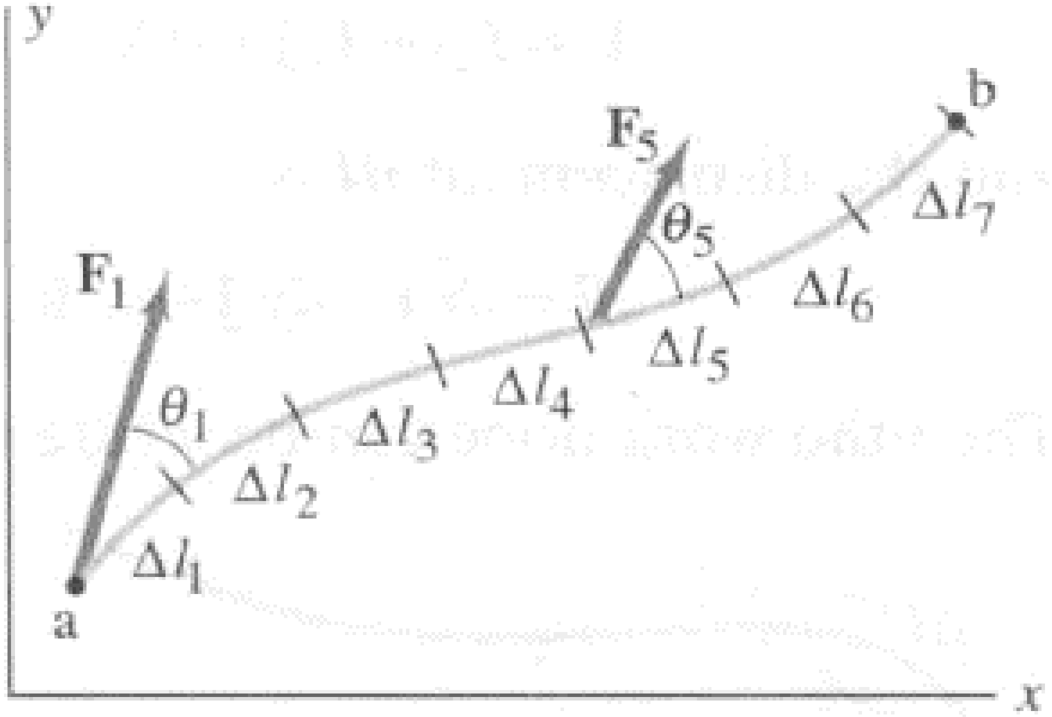
力是什么变量的函数？？？



当 $\vec{F}$ 不恒定，即 $\vec{F}$ 是位置的函数：

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

可将**轨道**分成很多小段，每个小段内，$\vec{F}(\vec{r})$ 可近似看做恒力，每个小段可看做直线。



- 则 $W(A \to B)$

$$= \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{r}_2 + \ldots + \vec{F}_n \cdot \Delta \vec{r}_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i$$

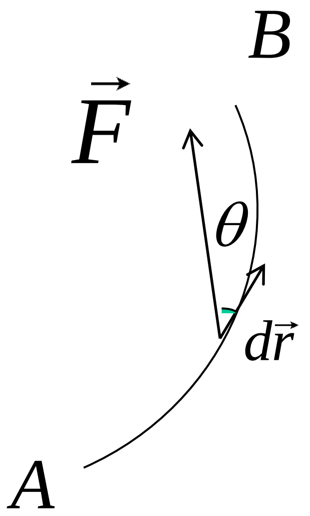
其中 $\vec{F}_i = \vec{F}(\vec{r}_i)$

这是近似表示，在极限情况 $\Delta\vec{r}_i \to 0$ 时，可表示：

$$W(A \to B) = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

功的普遍形式：

$$W(A \to B) = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

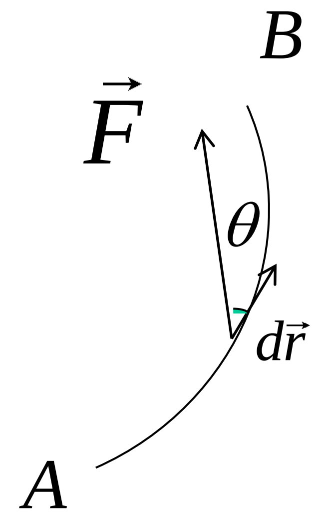


南開大學

（1） 功在自然坐标系下的形式

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F\cos\theta ds = F_{\tau} ds$$

$$\boxed{W(A\to B) = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_A^B F_{\tau} ds}$$



说明：

a. 功的大小只与**力在路程曲线切线方向的分量**有关；

b. 如果作用到物体上的力是法向力，则不做功。

（2）在直角坐标系中表示成分量形式：

$$\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

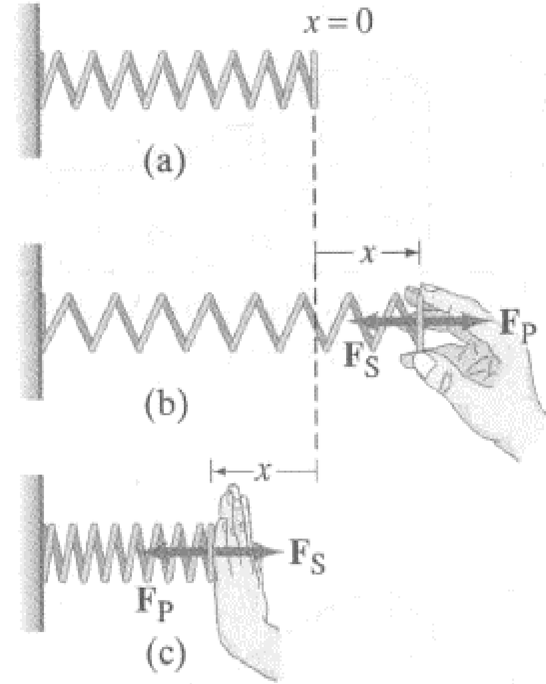
$$W(A\to B) = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$$

特例： 直线运动，运动方向为x 轴， 则

$$W=\int_{x_A}^{x_B}F_x dx$$

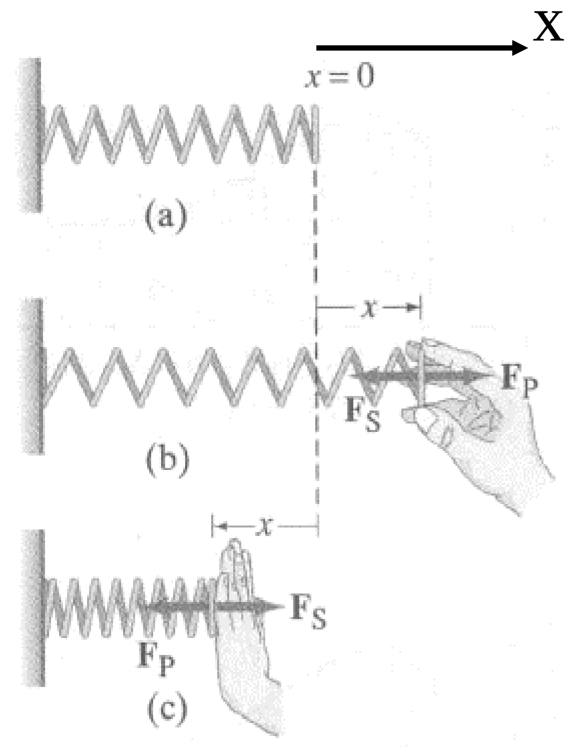
如又是恒力： $W=F_x(x_B-x_A)=Fd\cos\theta$

牛刀小试—弹性力所做的功

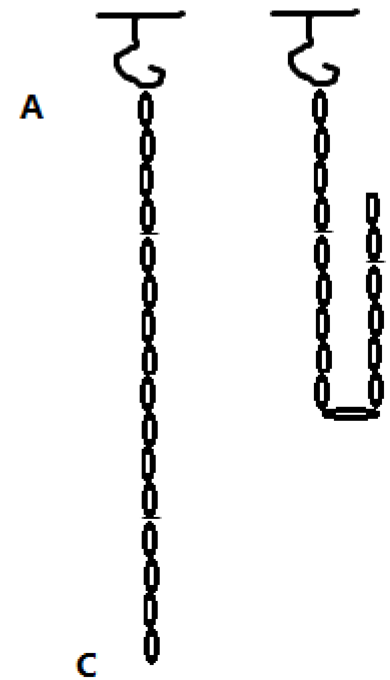


手拉动或压缩弹力系数为K的弹簧，当弹簧从 x_1 ，移动到 x_2 处时，弹簧的弹力所做的功是多少?

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = -\left(\frac{1}{2} k x_2{}^2 - \frac{1}{2} k x_1^2\right)$$



例1：一条长为L，质量为M的匀质柔绳，A端挂在天花板的钩子上，自然下垂。现将C端沿铅垂直方向提高到与A端同一高度处，求该过程中重力所做的功。

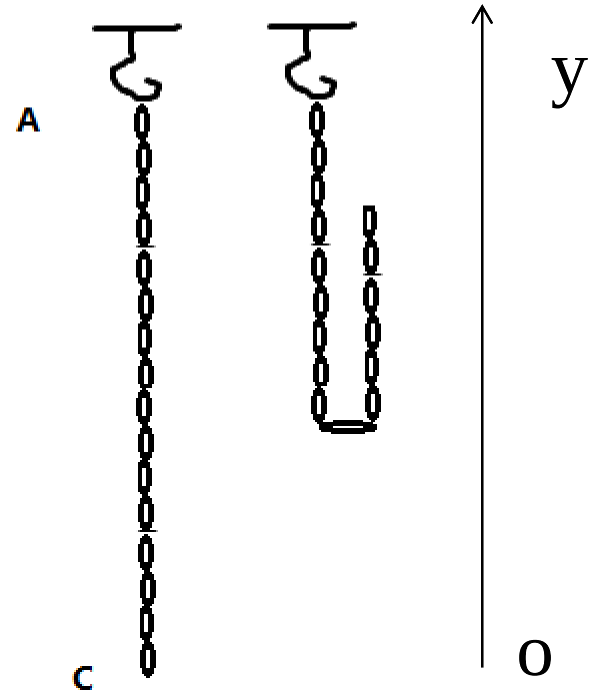


解：　在提升的过程中，重力的大小是变化的，因此是变力做功

建立如图所示的坐标系，坐标原点在o点。

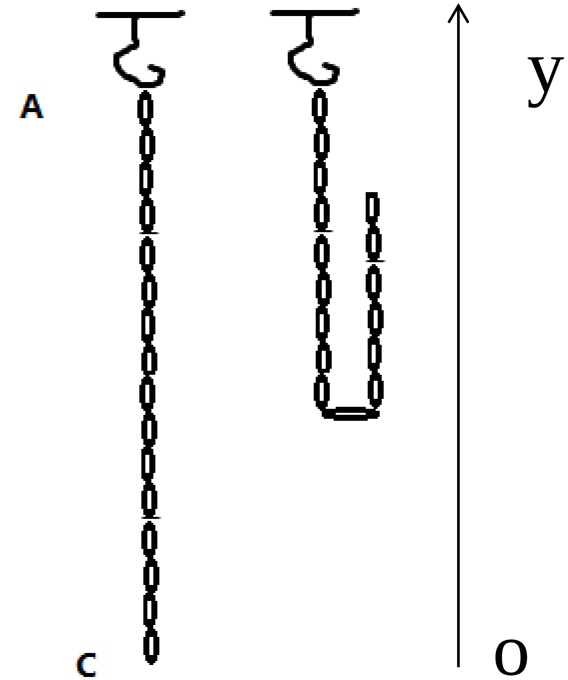
当末端提升到y处时，外力为:

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\rho y g \vec{j}$$



当移动dy这段距离时，所受的外力不变，仍为：

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\rho yg\vec{j}$$



在这段距离外力所做的功为：

$$dw = \vec{F}\cdot dy\vec{j} = \frac{1}{2}\rho ygdy$$

当绳子的C端由最底部到达A时，外力所做的功为：

$$W = \int dw = \int_0^L \frac{1}{2}\rho ygdy = \frac{1}{4}\rho gL^2 = \frac{1}{4}\frac{M}{L}gL^2 = \frac{1}{4}MgL$$

在整个过程中，重力所做的功为：

$$W_G = \int dw = \int_0^L \frac{1}{2}\rho ygdy = -\frac{1}{4}MgL$$

必看

课本 P95，例3.1。变力做功问题

1.2 功率

平均功率

设在t 到 $t+\Delta t$ 时间内，完成的功为 Δw，则这段时间内的平均功率为

$$\bar{P}=\frac{\Delta w}{\Delta t}=\frac{\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{F}\cdot\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

瞬时功率

$$P=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{F}\cdot\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{F}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\boxed{P=\vec{F}\cdot\vec{v}}$$

$$P = \frac{dw}{dt}$$

dw=Pdt $\quad P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

∴ t_1 到 t_2 这段时间内 做功为:

$$\boxed{W = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt}$$

功率是标量，SI中，焦耳/秒=瓦（W）

模块2：　保守力和势能

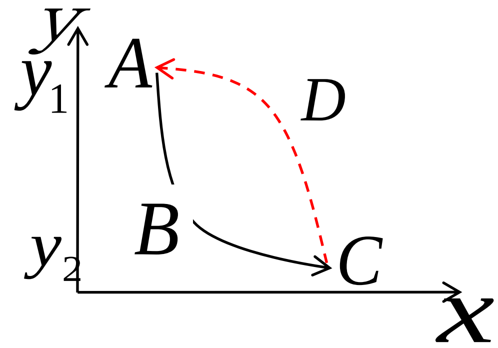
通过本模块的学习，您将学会：

- 保守力和非保守力
- 势能公式
- 由势能求力

2.1 保守力与非保守力

重力所作的功

物体质量为m，$y_1 - y_2 = h$



1　物体沿ABC路径由A运动到C，重力所做的功；

2　物体沿CDA路径由C运动到A，重力所做的功；

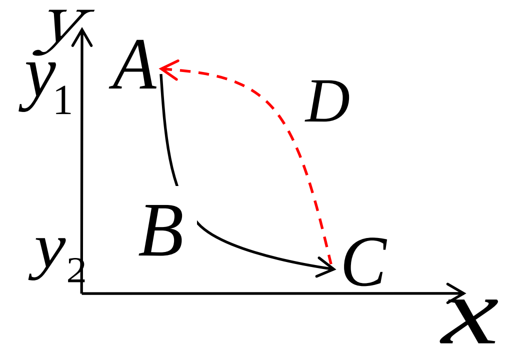
3　物体沿ABCDA这个闭合路径所做的功

问题：　1 重力做功与路径是否有关？

　　　　2 重力沿闭合路径作功有什么特点？

重力所作的功

◆物体沿ABC路径由A运动到C，重力所做的功：



$$W=\int_A^C \vec{F}_G\cdot d\vec{r}=\int_A^C(-mg\vec{j})\cdot(dy\vec{j})=\int_{y_1}^{y_2}-mg\cdot dy=-mg(y_2-y_1)=mgh$$

◆ 物体沿CDA路径由C运动到A，重力所做的功：

$$W'=\int_C^A \vec{F}_G\cdot d\vec{r}=\int_C^A(-mg\vec{j})\cdot(dy\vec{j})=\int_{y2}^{y_1}-mg\cdot dy=-mg(y_1-y_2)=-mgh$$

重力作功与路径无关！

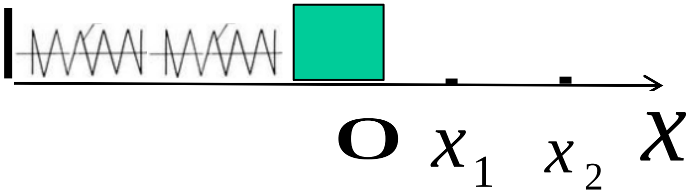
◆ 物体沿ABCBA这个闭合路径所做的功

$$W + W' = 0$$

重力沿闭合路径所做的功为0！！！

弹性力所作的功

设物体质量为m，弹簧的弹性系数为k，建立如图坐标系，坐标原点在平衡位置处。

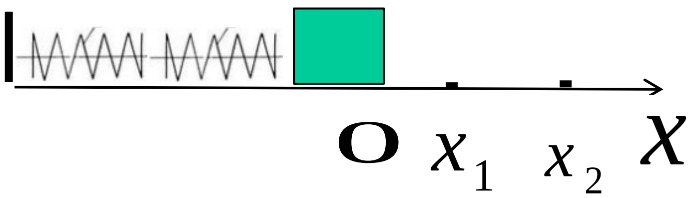


1　物体由 x_1 到 x_2，弹性力所做的功；
2　物体由 x_2 到 x_1，弹性力所做的功；
3　物体沿 $x_1 \to x_2 \to x_1$ 这一闭合路径，弹性力所作用功。

问题：　弹性力沿闭合路径作功有什么特点？

弹性力所作的功

◆ 如果物体在弹性力作用下，由x1运动到x2，则弹力做功为：



$$W=\int_{x_1}^{x_2}Fdx=\int_{x_1}^{x_2}(-kx)dx=-(\frac{1}{2}kx_2^{\ 2}-\frac{1}{2}kx_1^2)$$

◆ 如果物体在弹性力作用下，由x2运动到x1，则弹力做功为：

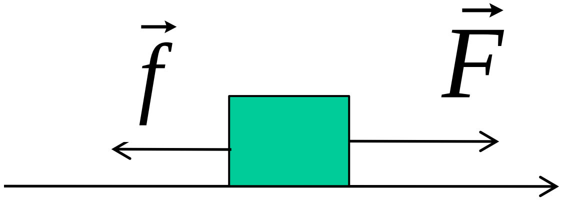
$$W'=\int_{x_2}^{x_1}Fdx=\int_{x_2}^{x_1}(-kx)dx=-(\frac{1}{2}kx_1^{\ 2}-\frac{1}{2}kx_2^2)$$

◆ 物体沿 $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$ 这一闭合路径，弹性力所作用功。

$$W + W' = 0$$

弹性力沿闭合路径所做的功为0！

摩擦力所作的功



◆若物体滑动 $\Delta\vec{r}$ 则摩擦力做功为

$$\Delta W_f = \vec{f} \cdot \Delta\vec{r} = f\Delta r\cos\pi = -f\Delta r$$

◆若物体反方向滑动 $\Delta\vec{r}$ 则摩擦力做功为

$$\Delta W'_f = \vec{f} \cdot \Delta\vec{r} = f\Delta r\cos\pi = -f\Delta r$$

◆ 沿闭合路径一次往返摩擦力做功：

$$-2f\Delta r \neq 0$$

摩擦力沿闭合路径所做的功不为0！

◆保守力：如果一个力对沿任意闭合曲线运动一周的质点所做的功为零，则此力叫保守力。（一个力所做的功如只与起点和终点位置有关，与路径无关）

重力和弹性力是保守力

◆ 非保守力：如果一个力对沿任意闭合曲线运动一周的质点所做的功不为零，叫非保守力或耗散力。（一个力所做的功与路径有关）

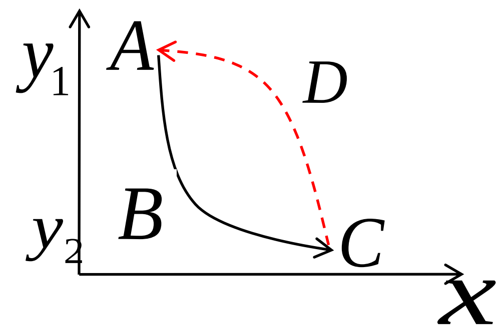
摩擦力是非保守力

2.2 势能

保守力---重力

物体从位置1(A)运动到位置2(C)，重力所作的功：

$$W(\mathrm{A}-\mathrm{C})=-(\mathrm{mgy}_2\text{-}\mathrm{mgy}_1)$$



◆ 引入与位置有关的函数 $\boxed{E_\mathrm{p}=mgy}$

$$W(A-C)=\mathrm{E}_{p1}-E_{p2}=-(E_{p2}-\mathrm{E}_{p1})=-\Delta E_P$$

保守力重力所作的功等于物理量 E_p 增量的负值。

南開大學

保守力---弹性力所做的功：

$$W(1\text{-}2)=-(\frac{1}{2}kx_2{}^2-\frac{1}{2}kx_1^2)$$

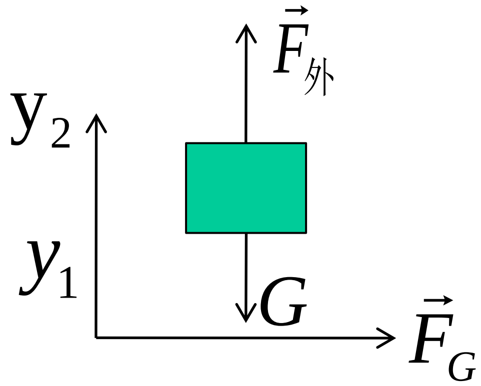
◆ 引入与位置有关的函数 $E_p=\frac{1}{2}kx^2$

$$W(1-2)=\mathrm{E}_{p1}-E_{p2}=-(E_{p2}-\mathrm{E}_{p1})=-\Delta E_P$$

弹性力所作的功等于物理量 E_p 增量的负值

弹性力作正功，E_p 减小。

$\vec{F}_{外}$把重物G匀速缓慢举起



外力做的功为：

$$W_{外}(1-2)=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}_{外}\cdot d\vec{r}=\int_{y_1}^{y_2}mgdy=mgy_2-mgy_1$$

$$W_{外}(1-2)=E_{P2}-E_{P1}=\Delta E_P$$

即外力克服重力所作的功等于 ΔE_P 的增量。

重力做负功， E_p 增加。

保守力做的功，都可以表示为某种仅与物体的位置矢量有关的标量函数 $E_p(\vec{r})$ 在初始位置 $\vec{r}_A$ 和终了位置 $\vec{r}_B$ 的数值之差：

$$W=\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=E_p(\vec{r}_A)-E_p(\vec{r}_B)=-(E_p(B)-E_p(A))$$

保守力做的功，等于某个仅与物体位置有关的标量函数的减少量有关。

$E_p(\vec{r})$ 定义为势能

势能的单位与动能、功的单位相同

势能的定义：设B点为势能零点。

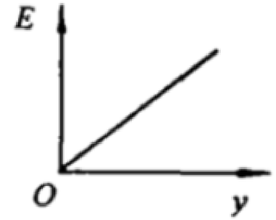
$$E(p_A)=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

重力做功对应的势能： $E_{\mathrm{p}}=mgy$

弹簧弹力做功对应的势能： $E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2$

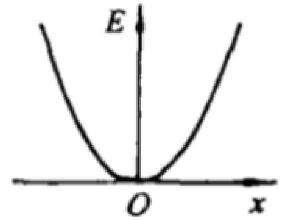
势能曲线

重力势能



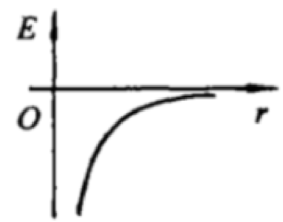
$$E = mgy$$

弹性势能



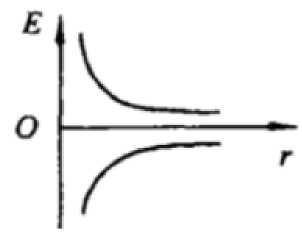
$$E = \frac{1}{2}kx^2$$

引力势能



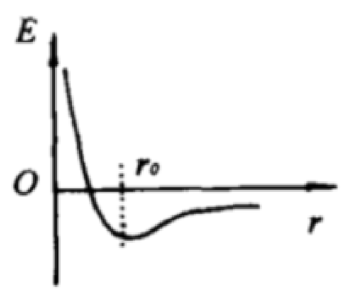
$$E = -\frac{GMm}{r}$$

电势能



$$E = \frac{kq_1q_2}{r}$$

分子势能



$$E = \frac{\lambda}{r^{s-1}} - \frac{\mu}{r^{t-1}}$$

势能的物理意义

- 势能属于系统，取决于系统的相互作用和相对位置；
- 势能是状态参量，反映了体系做功能力的大小；
- 势能差有绝对意义，而势能只有相对意义。势能零点可根据问题的需要来选择；
- 势能只能描述体系在保守力作用下的状态，非保守力作用下的体系状态，不能引进势能。

南開大學

- 已知势能函数，求保守力：

一维情况：

设保守力F沿x轴方向，如物体在F的作用下，作一微小的位移 Δx ，则保守力做功为：

$$F\Delta x = -\Delta E_p$$

$$F = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x}$$

当$\Delta x \to 0$：$F = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta E_p}{\Delta x} = -\frac{dE_p}{dx}$

三维情况： $\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = -\Delta E_p$

$$\Delta r \to 0: \ \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p$$

$$\therefore \ F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p$$

$$\therefore \ dE_p = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

- 而另一方面微分计算：

$$E_p = E_p(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$$

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

比较两式得：

$$F_x = \frac{-\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = \frac{-\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = \frac{-\partial E_p}{\partial z}$$

$$\vec{\mathrm{F}} = \frac{-\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{-\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{-\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\mathrm{F}} = -(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k})E_p$$

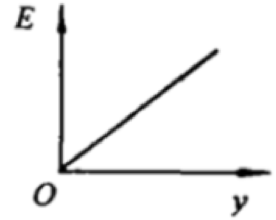
即 $\vec{\mathrm{F}} = -gradE_p$ 或 $\vec{\mathrm{F}} = -\nabla E_p$

$\mathrm{grad} = \nabla = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k})$ —— 梯度符号

保守力等于势能梯度的负值

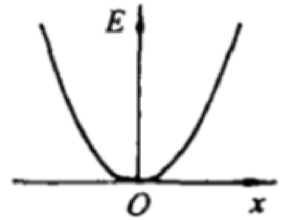
请根据势能曲线判断力的方向

重力势能



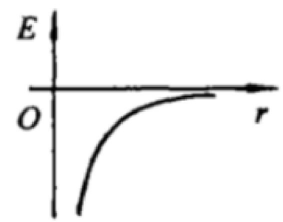
$$E = mgy$$

弹性势能



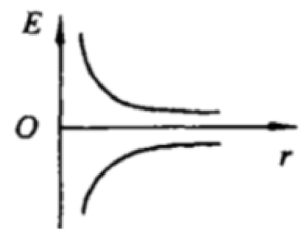
$$E = \frac{1}{2}kx^2$$

引力势能



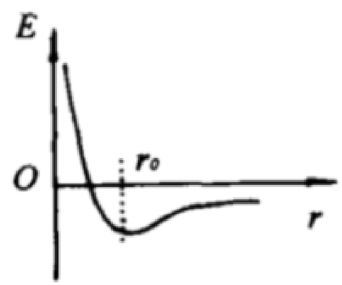
$$E = -\frac{GMm}{r}$$

电势能



$$E = \frac{kq_1q_2}{r}$$

分子势能



$$E = \frac{\lambda}{r^{s-1}} - \frac{\mu}{r^{t-1}}$$

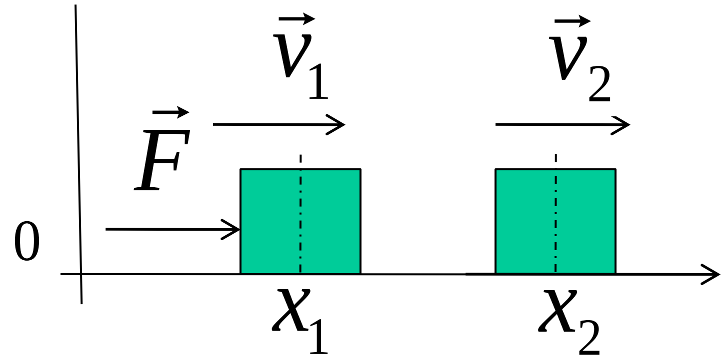
模块3：　动能定理和势能

2.3 动能定理、功能原理和机械能守恒

1 质点的动能

直线运动

- 外力做功



$$W=\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{F}dx$$

$$\because F=ma=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=mv\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore W=\int_{x_1}^{x_2}mv\frac{dv}{dx}dx=\int_{v_1}^{v_2}mvdv=\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

- 设开始受力 $x = x_1$时，$v_1 = 0; x = x_2$时，$v_2 = v$

$$\therefore W = \frac{1}{2} m v^2$$

引入新的物理量——**动能** E_k

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2}$$

说明：

- 动能是一状态参量；
- 与状态参量动量不同，动能为标量。

2 质点的动能定理

速度为 v_1 时，动能为 $E_k = \frac{1}{2}mv_1^2$

速度为 v_2 时，动能为 $E_k = \frac{1}{2}mv_2^2$

$$\boxed{W = E_{k2} - E_{k1}}$$

质点的动能定理:

外力对质点所做的总功等于质点动能的增量。

$$W = E_{k2} - E_{k1}$$

从上式可以解读出哪些物理意义？

说明：

- 功是过程量，动能是状态参量；
- 做功是能量传递的一种形式；
- 做功是物体在相互作用的过程中被传递的能量；
- 动能可以看做运动物体所具有的做功的本领。

3 质点系的动能定理

物理模型2

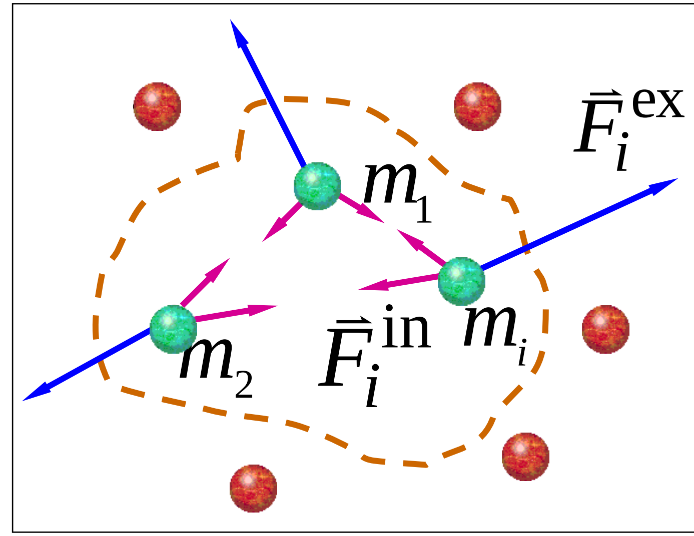
质点系

- 多个质点组成
- 各个质点的相对位置可以变化
- 各质点之间有相互作用力

对第 i 个质点，有

$$W_i^{\mathrm{ex}} + W_i^{\mathrm{in}} = E_{\mathrm{k}i} - E_{\mathrm{k}i0}$$

外力功　内力功



对质点系，有

$$\sum_i W_i^{\mathrm{ex}} + \sum_i W_i^{\mathrm{in}} = \sum_i E_{\mathrm{k}i} - \sum_i E_{\mathrm{k}i0} = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{k}0}$$

质点系动能定理：

$$W_{外}+W_{内}=E_k-E_{k0}$$

$$W_{外}+W_{内}=\Delta E_k$$

外力与内力对质点系做功之和等于质点系总动能的增量。

说明： 内力可以改变质点系的动能

- 动能：标量，与功密切联系；
- 作为作用力和反作用力所做的功不能抵消；

1 爆炸： 各个碎片获得的动能，能量来自哪里？

2. 物体从地球表面某一高度处下落，动能增加。是什么力做功？能量来自哪里？

§5. 物体系的功能原理

- 由质点系动能定理： $W_{外} + W_{内} = E_{k2} - E_{k1}$

$\because W_{内} = W_{保内} + W_{非保内}$

$$W_{保内} = -(E_{p2} - E_{p1})$$

$$E_k + E_p = E$$

机械能：体系所具有的动能和势能之和统称机械能。

功能原理

$$W_{外}+W_{非内}=E_2-E_1$$

$$W_{外}+W_{非内}=\Delta E_k+\Delta E_p$$

外力和非保守内力对物体系所作的总功，等于物体系总的机械能的增量。

§6. 机械能守恒定律

- 可由功能原理直接求得：$W_{外} + W_{非内} = E_2 - E_1$

$\Rightarrow$ $\boxed{如果W_{外}=0，且W_{非内}=0，则E_2=E_1}$

机械能守恒定律

在没有外力和耗散力做功的情况下，一个具有保守力的物体系动能和势能可以相互转换，但是动能和势能之和是恒定的。

保守系统： 没有耗散力，只有保守力的物体系

封闭的保守系统： 没有外力做功的保守系统

机械能守恒定律也可表述为：

封闭的保守系统的机械能守恒。

能量守恒定律：

一个封闭的系统（与外界无能量交换）内部，能量可以由一种形式转换为另一种形式，但系统的总能量保持不变。

说明：

由机械能守恒定律可知，当物体系内有耗散力做功时，物体系的机械能不守恒；但能量守恒是普遍成立的。

$$W_{外} + W_{内} = E_{k2} - E_{k1}$$

动能定理

$$W_{外} + W_{保} + W_{非保} = E_{k2} - E_{k1}$$

$$W_{外} + W_{非保} = E_{k2} - E_{k1} - (E_{p1} - E_{p2})$$

$$W_{外} + W_{非保} = (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) = E_2 - E_1$$

功能原理

$$W_{外} + W_{非保} = 0$$

机械能守恒

$$E_2 - E_1 = 0$$

作业

- P 136 3.5 3.8 3.14