思考2:

在波动中，每个质点只是在平衡位置振动，并没有向前的移动，那么波动中，传播的是什么？

§3.波的能量、能流密度

简谐振动的能量

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_K = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_P \\ &= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}$$

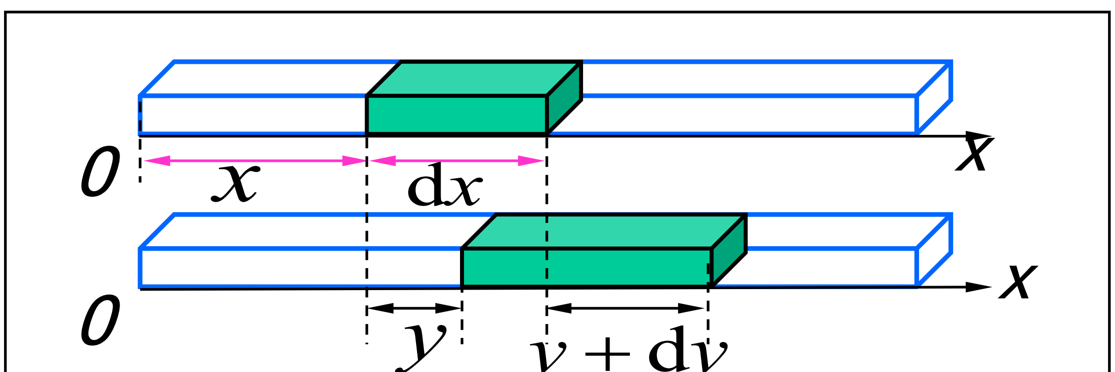
1 波的能量

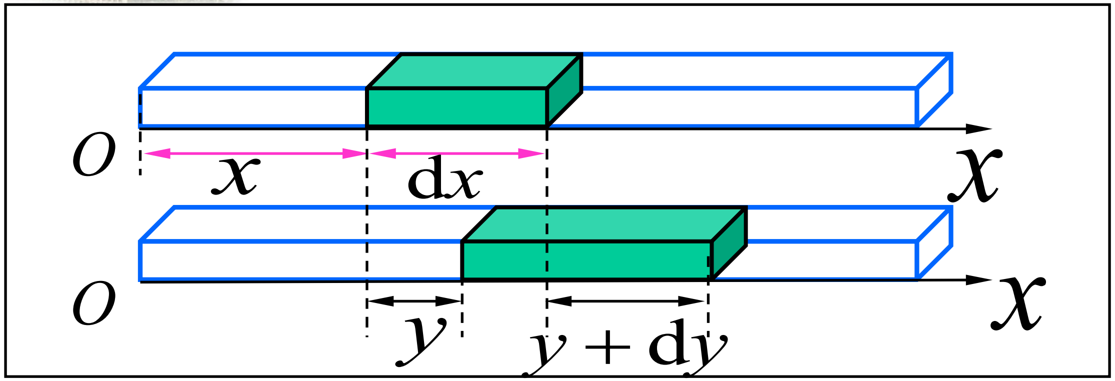
以棒中传播的纵波为例分析波动能量的传播.

$$\Delta W_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}(\Delta m)v^2 = \frac{1}{2}(\rho\Delta V)v^2 \qquad y = A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$$

$$\therefore v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin\omega(t-\frac{x}{u})$$

体积元振动动能 $\Delta W_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$





弹性应变：

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\omega A}{v}\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

弹性势能：

$$\Delta E_P=(\Delta V)\cdot\left[\frac{1}{2}E\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\Delta V)\cdot E\cdot\frac{\omega^2A^2}{v^2}\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]$$

对于纵波：

$$v=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\ \therefore \frac{E}{v^2}=\rho$$

体积元振动势能

$$\therefore \Delta E_P=\tfrac{1}{2}\rho(\Delta V)\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t-\tfrac{x}{v})]$$

体元的总机械能：

$$\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_P=\rho(\Delta V)\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t-\tfrac{x}{v})]$$

$$\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_P=\rho(\Delta V)\omega^2A^2\sin^2[\omega(t-\tfrac{x}{v})]$$

波的能量的特点

(1) 在波动传播的介质中，任一体积元的动能、势能、总机械能均随x,t作周期性变化，且变化是<u>同相位</u>的.

$$\Delta W_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}\rho\Delta VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

$$\Delta E_P=\tfrac{1}{2}\rho(\Delta V)\omega^2A^2\sin^2[\omega(t-\tfrac{x}{v})]$$

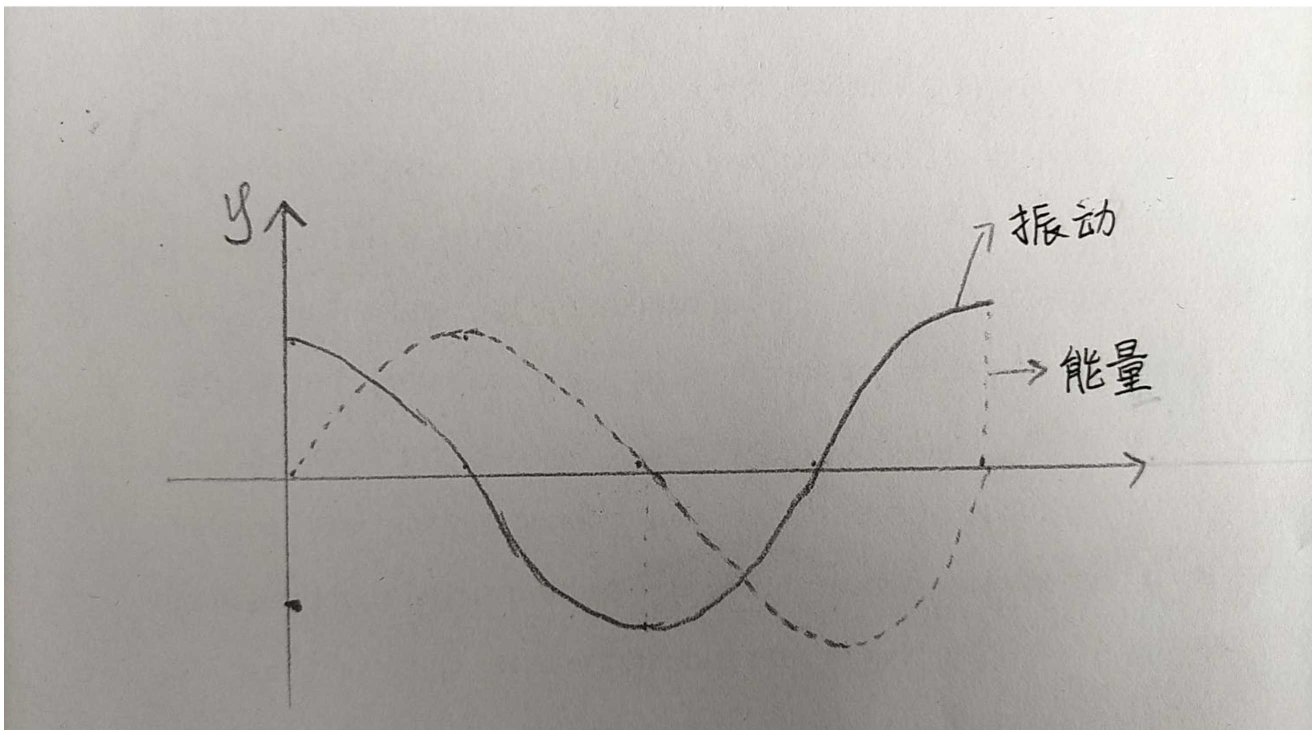
$$\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_P=\rho(\Delta V)\omega^2A^2\sin^2[\omega(t-\tfrac{x}{v})]$$

体积元在平衡位置时，动能、势能和总机械能均最大.

体积元的位移最大时，三者均为零.

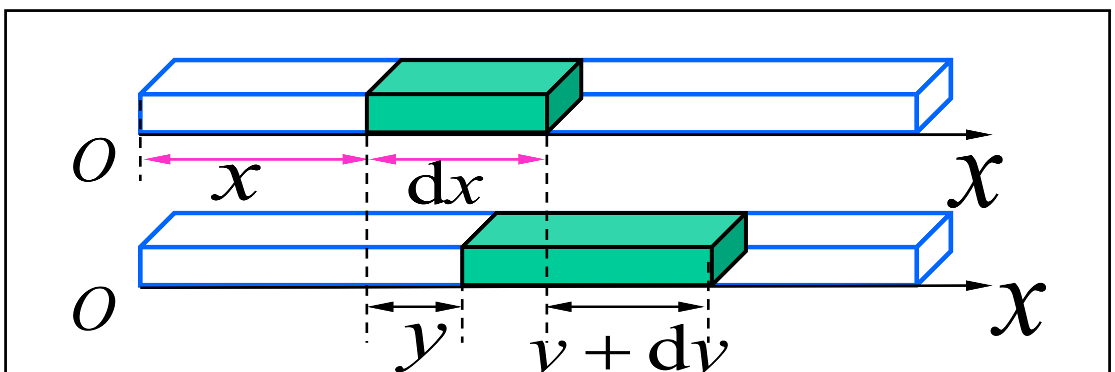
$$\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_P=\rho(\Delta V)\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t-\tfrac{x}{v})]$$

$$y=A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$$



（2） 任一体积元都在不断地接收和放出能量，即不断地传播能量. 任一体积元的机械能不守恒. **波动是能量传递的一种方式 .**

$$\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_p=\rho(\Delta V)\omega^2A^2\sin^2[\omega(t-\tfrac{x}{v})]$$



2、波的能量密度

能量密度：单位体积介质中的波动能量

位置 x 处 t 时刻的能量密度：

$$e = e_k + e_p = \rho\omega^2 A^2 \sin^2 \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

结论：

① 任一时刻任一质点的动能和势能相同；

② 能量密度与 A^2、ω^2、ρ 成正比；

③ 能量密度随时间作周期性变化，周期为波动周期的 $\frac{1}{2}$；

④ 以上结论也适合于横波。

平均能量密度：一个周期内能量密度的平均值

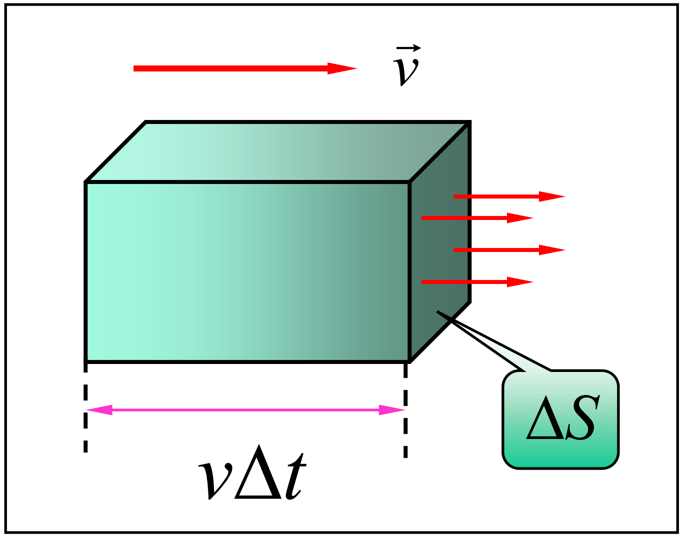
$$\overline{e} = \frac{1}{T}\int_0^T \rho\omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t-\frac{x}{v})dt$$
$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \rho\omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t-\frac{x}{v})dx$$
$$= \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$

平均能量密度是一个常量，说明介质中不积累能量。能量只在波的作用下，在介质中传播。

3、波的能流密度

- **能流**： 单位时间内通过某一截面的能量称为波通过该截面的能流或能通量。

Δt时间内，通过垂直于波速的截面ΔS的能量：



$$\Delta E = ev\Delta t\Delta S$$

能流 $i=\frac{\Delta E}{\Delta t}=ev\Delta S$

$$\because e=\rho\omega^2 A^2\sin^2\omega(t-\tfrac{x}{v})$$
$$\therefore i=[\rho\omega^2 A^2\sin^2\omega(t-\tfrac{x}{v})]v\Delta S$$

平均能流： $\overline{i}=\overline{e}v\Delta S$

$$\overline{i}=\frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v\Delta S$$

平均能流密度： 通过垂直波速的单位面积的平均能流，简称**能流密度**。

$$I = \frac{\bar{i}}{\Delta s} = \bar{e} v$$

$$\boxed{I = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v \propto A^2}$$

（反映波的强弱

能流密度的矢量形式

$$\boxed{\vec{I} = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \vec{v}}$$

单位：W/m^2

说明:

- I 是一矢量，其方向即为波速的方向。
- I 的大小实际上反映了波所携带的能量的多少。即反映了它的强弱
- 在声波、光波中称为声强、光强。

- **声强等级**

1000Hz时，听力下限：$I_0 = 10^{-12} W / \mathrm{m}^2$

声强级： $$L = \log \frac{I}{I_0} (Bel)$$

或： $$L = 10 \log \frac{I}{I_0} (\mathrm{dB})$$

★ 10~20分贝几乎感觉不到。

★ 20~40分贝相当于轻声说话。

★ 40~60分贝相当于室内谈话。

★ 60~70分贝有损神经。

★ 70~90分贝很吵。长期在这种环境下学习和生活，会使人的神经细胞逐渐受到破坏。

★ 90~100分贝会使听力受损。

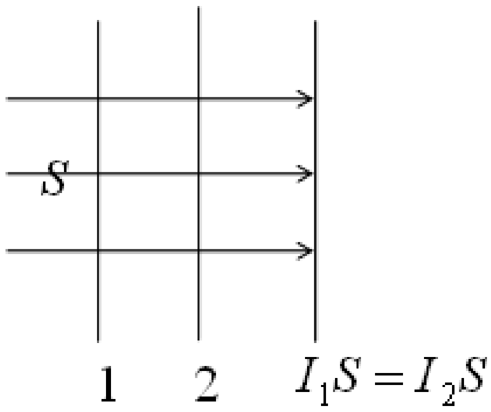
★ 100~120分贝使人难以忍受，几分钟就可暂时致聋。

四、介质无吸收时平面波及球面波的振幅

平面波： 无吸收意味着无能量损失，各处能流密度相同，

$$I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v$$

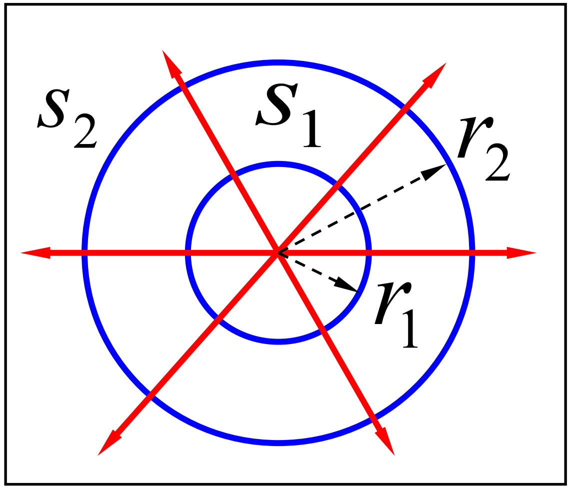
有 A =常量。



即平面波各处的振幅相等

球面波：

振源为点波源，设单位时间发出的能量为 $\overline{i}$ ，因介质不积累能量，故单位时间通过半径为 r_1、 r_2 的两波面的能量相同。



$$\therefore I_1 = \frac{\bar{i}}{4\pi r_1^{\,2}} \quad I_2 = \frac{\bar{i}}{4\pi r_2^{\,2}}$$

$$\therefore \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^{\,2}}{r_1^{\,2}}$$

因I与A^2成正比 $\therefore \frac{A_1^{\,2}}{A_2^{\,2}} = \frac{r_2^{\,2}}{r_1^{\,2}} \qquad \therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$

振幅与离波源的距离成反比。如果距离波源单位距离的振幅为A，则距波源r处的振幅为 $\boldsymbol{A/r}$

由于振动的位相随距离的增加而落后，其关系与平面波类似，球面简谐波的波函数为：

$$y = \frac{A}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)$$

A为半径为1个单位长度位置的振幅。

即球面波的振幅随着传播距离的增加而减小。

本次的学习目标，您达到了吗？

- 波的含义您清楚了吗？
- 您会运用波动方程求解相关问题吗？
- 您是否可以从能量角度理解波动？

模块2

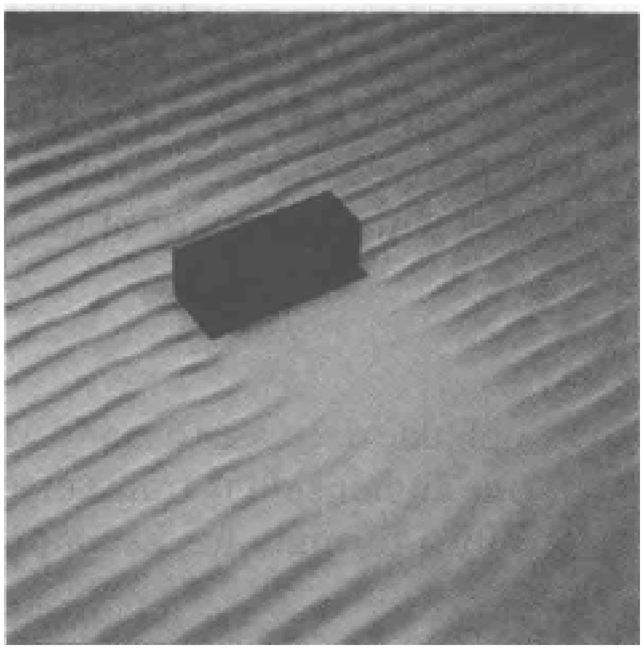
波传播的性质

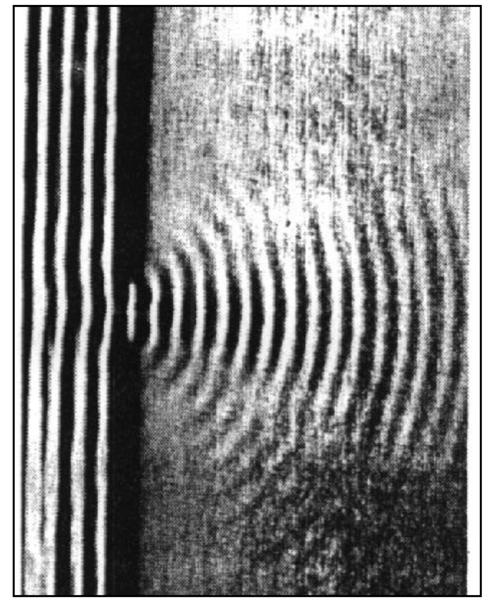
通过本模块，您将学会：

- 惠更斯原理
- 波的干涉-驻波
- 多普勒效应

1.惠更斯原理

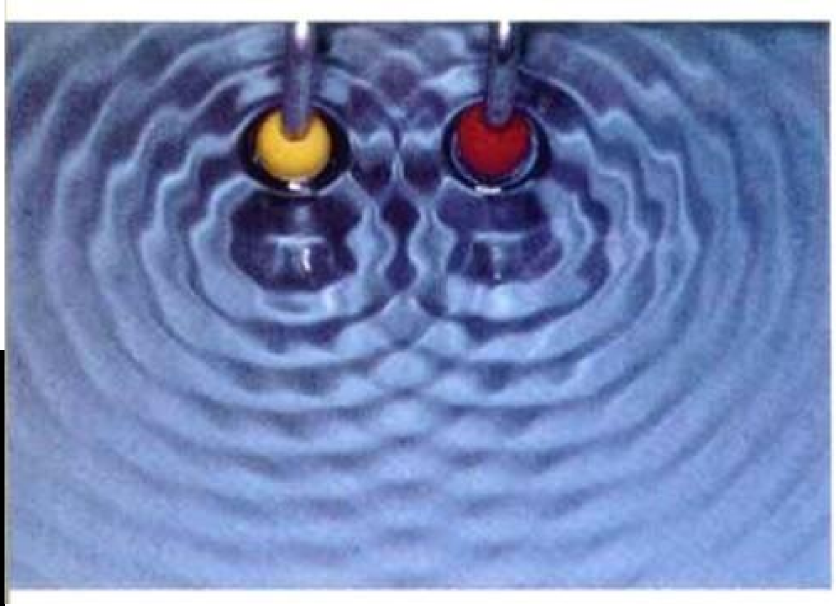
波的衍射

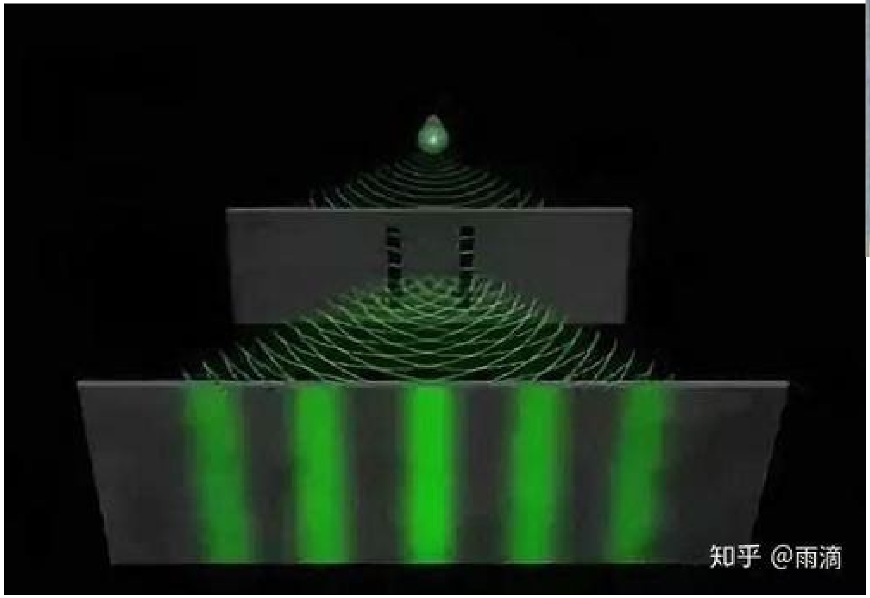




波传播过程中当遇到障碍物时,能绕过障碍物的边缘而传播的现象。又称“绕射”。

波的干涉

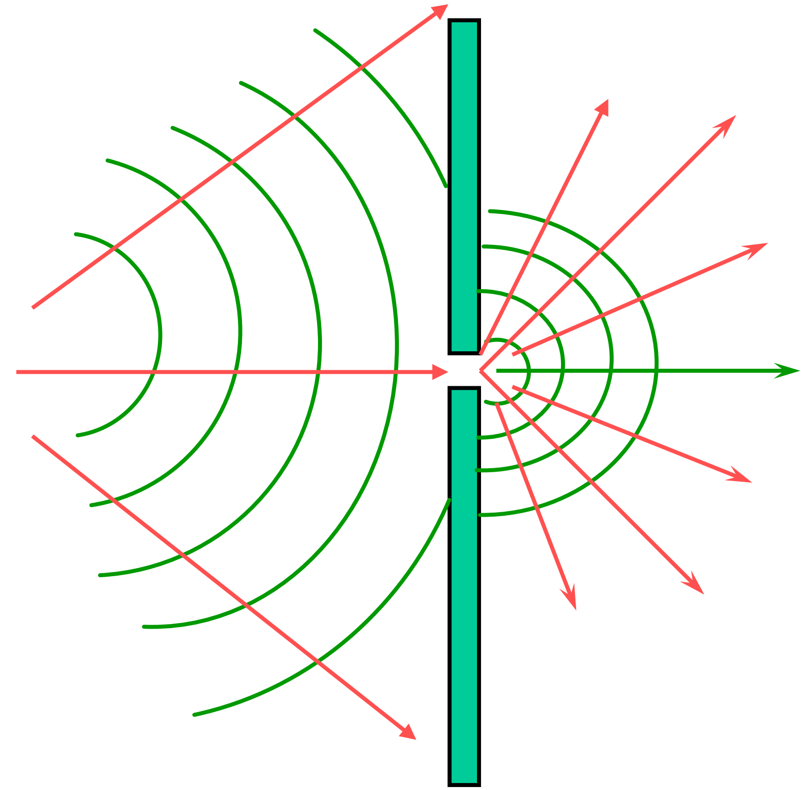




干涉现象　两相干波相遇时产生的各点振动强弱分布稳定（不随时间变化）的现象。

惠更斯 荷兰
1629-1695

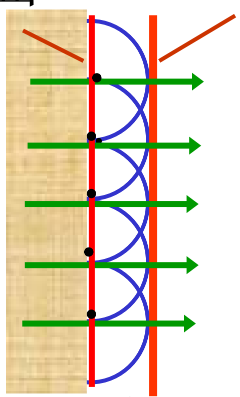
惠更斯原理



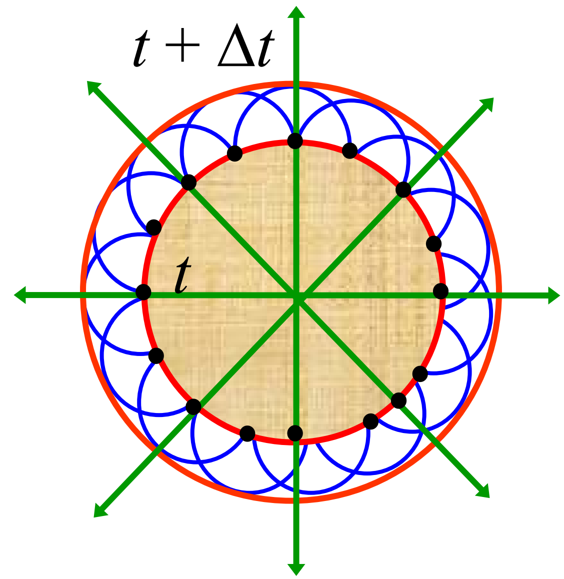
(1) 波前上的各点都可以看作新的波源

(2) 新波源将发出子波

(3)各子波的包络（即公切面）就是下一时刻的新波前



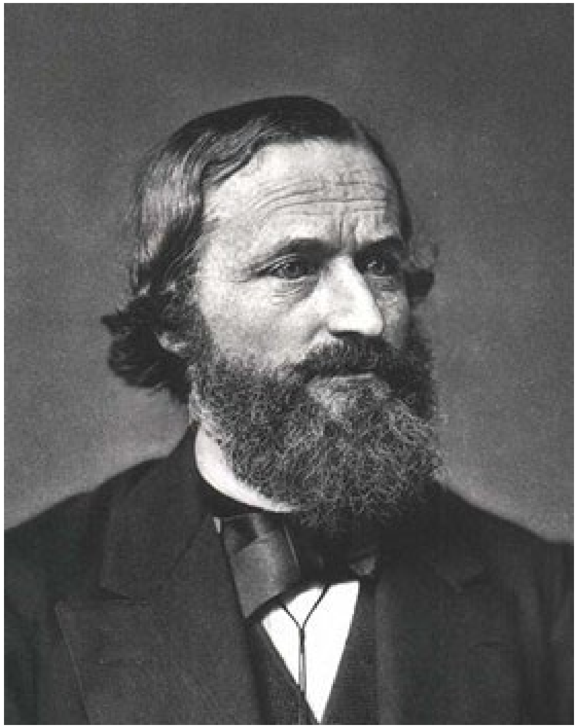
平面波



球面波

成功之处：适用于任何波动过程，在很广泛的范围内解决了波的传播问题。

不足：只是一个定性的粗略解释。



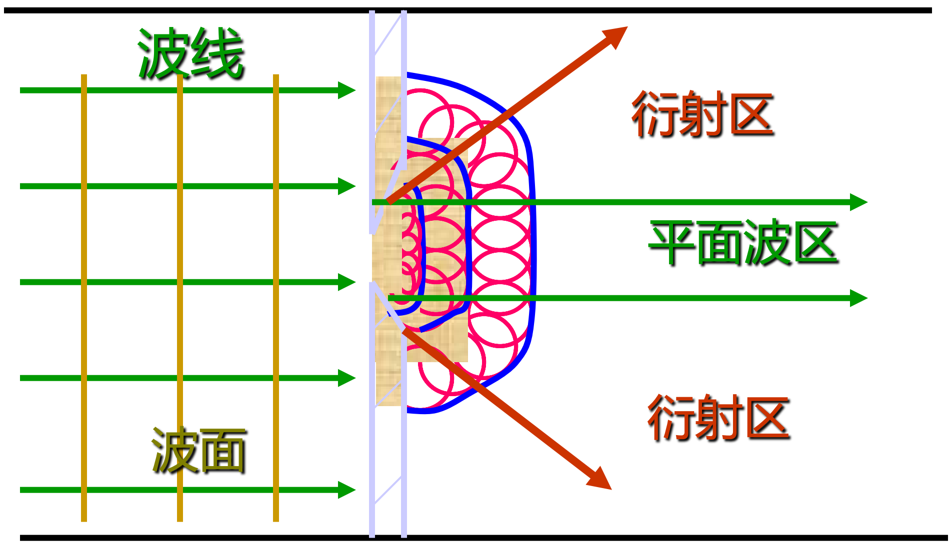
菲涅尔 法国
1788-1827

基尔霍夫 德国
1824-1887

索末菲 德国
1868-1951

用惠更斯原理作图解释：

以平面波遇阻为例作图解释



缝足够大小

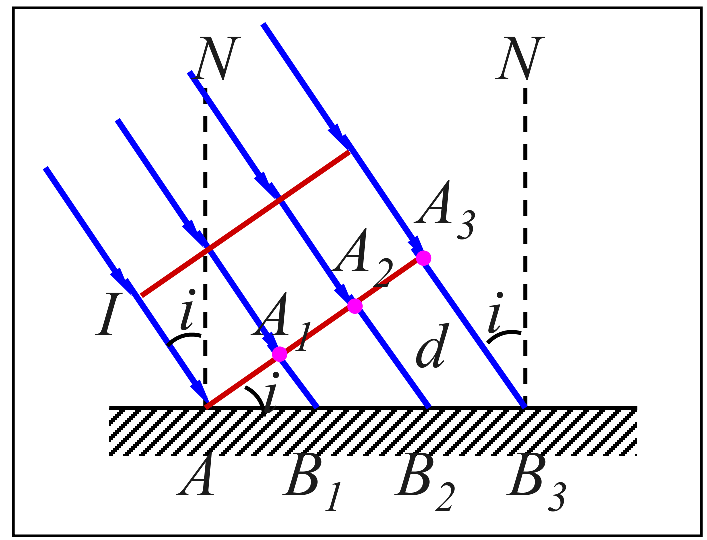
从图中可以很明显地看出，波线已不再是平行射线，出现了衍射现象。

2. 波的反射和折射

一、波的反射

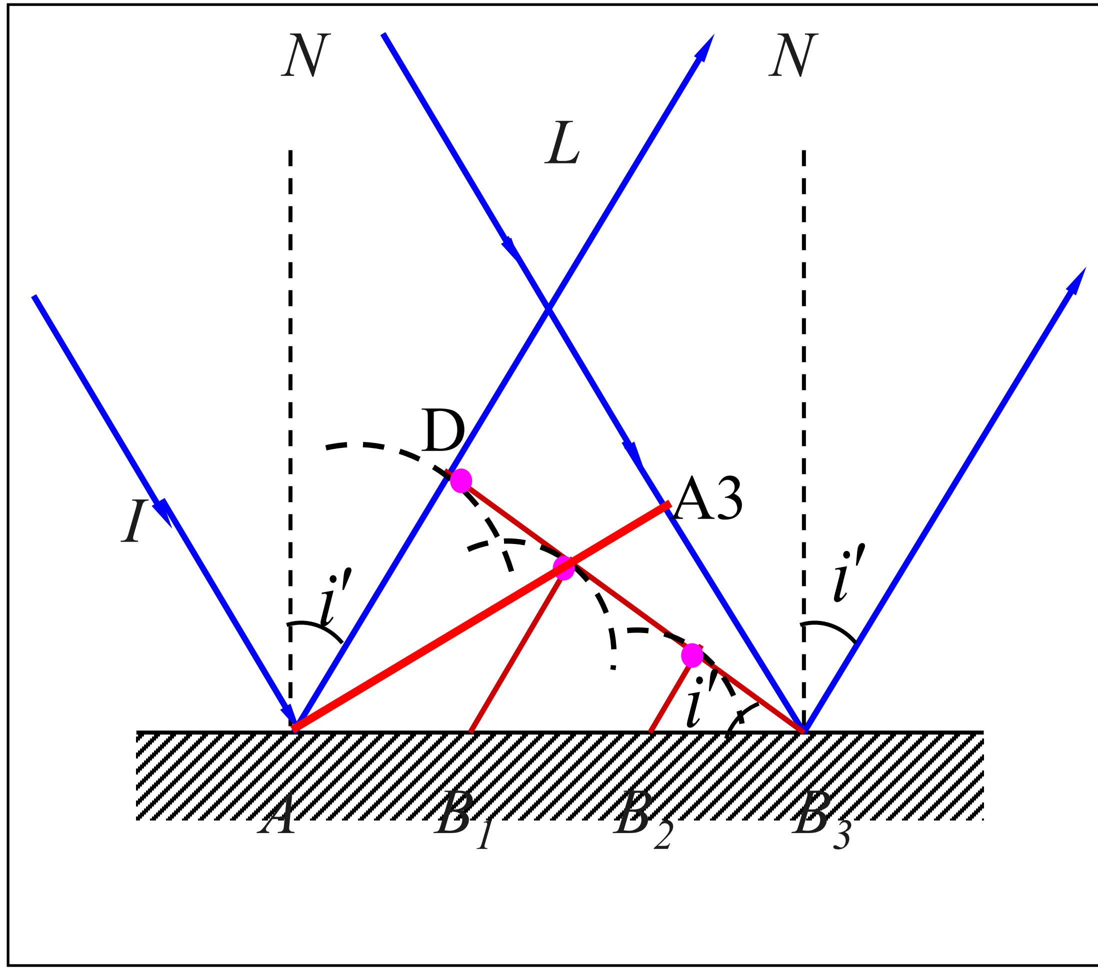
在时刻t，波阵面与图面的交线AA_3到达图示的位置，A点和界面相遇。此后AA_3上各点将依次到达界面。

设经过相等的时间此波阵面与图面的交线依次与分界面在B_1、B_2、B_3相遇，而在 $t+\Delta t$ ，A_3点到达B_3点。



时刻 t

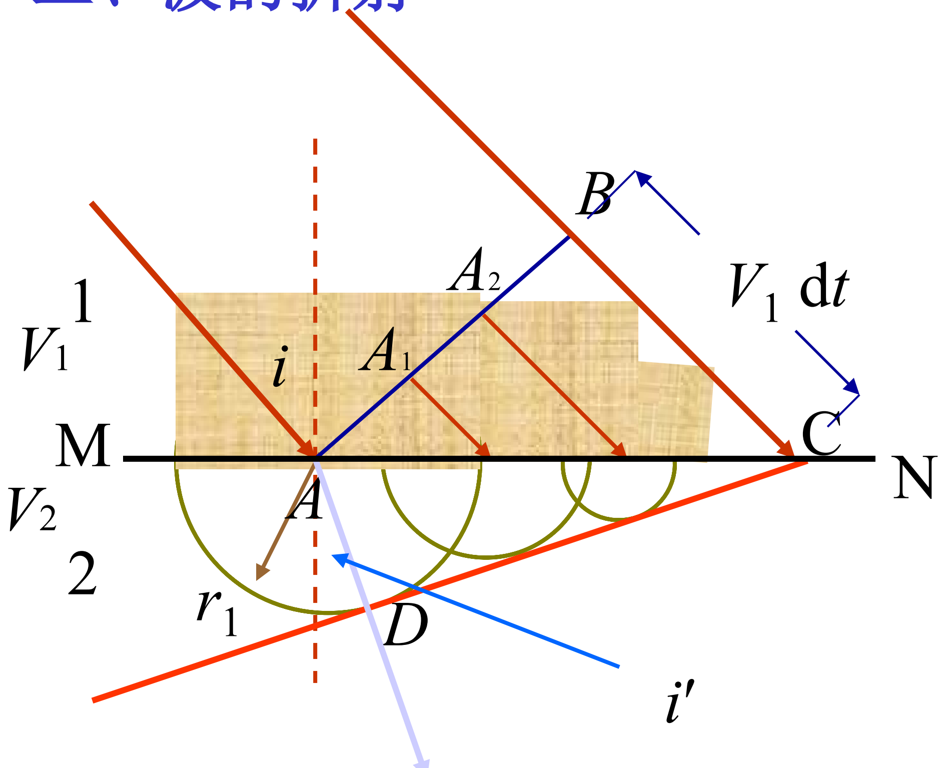
这些子波的包迹面也是与图面垂直的平面。它与图面的交线为B_3D，而且，$DB_3=AA_3$。做垂直于此波阵面的直线，即得反射线。与入射波阵面AA_3垂直的线称为入射线。



时刻 $t+\triangle t$

由三角关系可得反射角等于入射角

二、波的折射



$BC = V_1\,\mathrm{d}t \qquad r_1 = V_2\,\mathrm{d}t$

设 $V_1 > V_2$ 则 $BC > r_1$

设折射角i'，可有：

$$\left.\begin{aligned} AD = AC\sin i' = r_1 = V_2\ \mathrm{d}t \\ BC = AC\sin i = V_1\ \mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\sin i}{\sin i'} \quad \Rightarrow \frac{c}{V_2}\,\frac{V_1}{c} = \frac{\sin i}{\sin i'}$$

又： $n = \dfrac{c}{V}$

$$\Rightarrow n_2 \sin i' = n_1 \sin i$$

3 波的干涉

波的叠加原理和独立传播原理

相遇前、后：两列波各自的传播状况,不发生任何变化

→ **波的独立性原理**

相遇区：此区内各点同时参与两种振动，结果为其矢量迭加

→ **波的迭加原理**

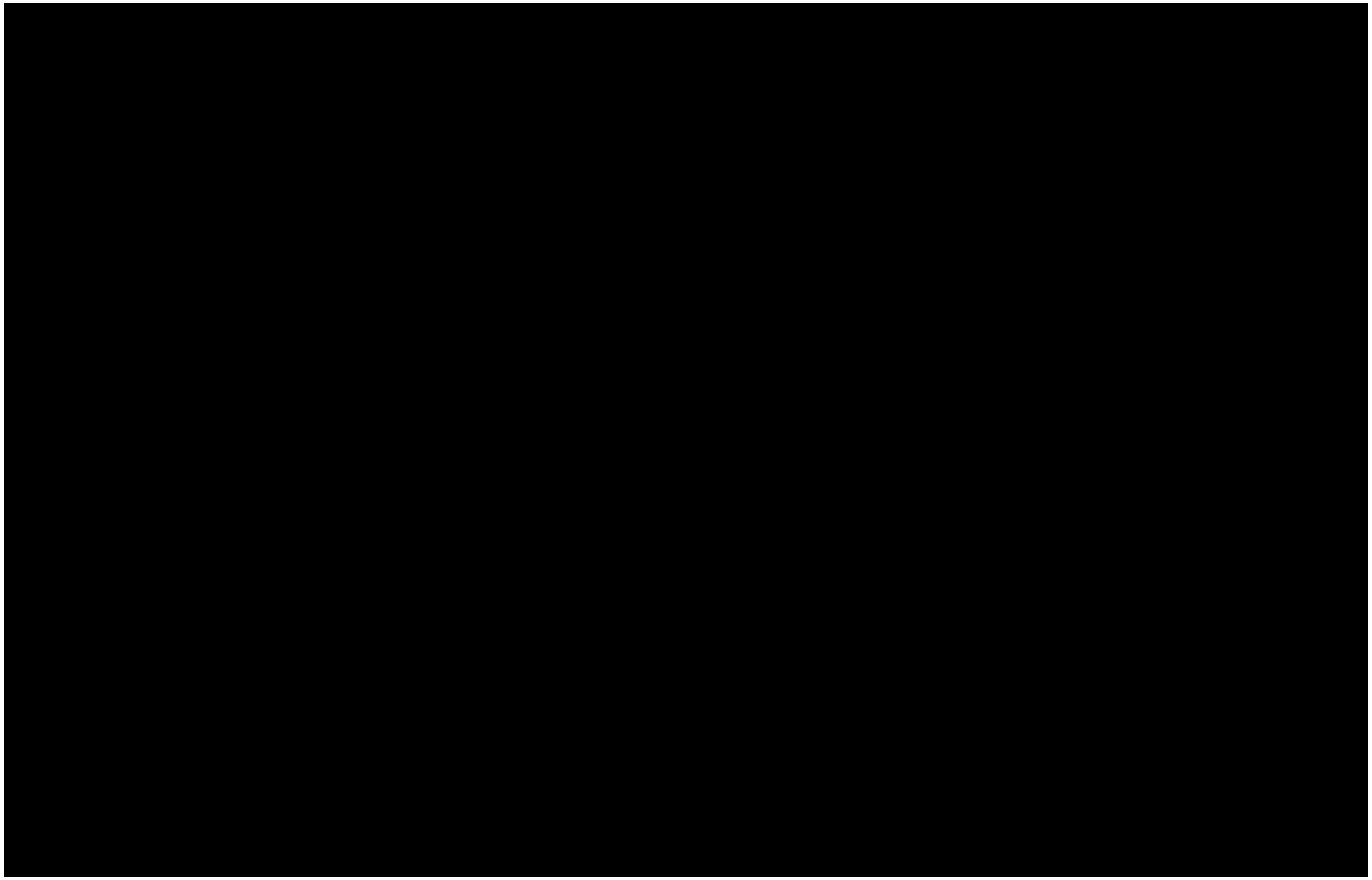
若有几列波同时在介质中传播，则它们各自将以原有的振幅、频率和波长独立传播；在几列波相遇处，质元的位移等于各列波单独传播时在该处引起的位移的矢量和。这种波动传播过程中出现的各分振动独立地参与迭加的事实称为**波的迭加原理**。

波的干涉—驻波

两列**振幅相同**的相干波，彼此沿相反方向传播，叠加后所形成的波——**驻波**。是一种特殊的干涉现象。

https://v.qq.com/x/page/f3075z0jp2o.html

驻 波 的 形 成



二　驻波方程

正向　$y_1 = A\cos\omega(t - \frac{x}{v})$向右

负向　$y_2 = A\cos\omega(t + \frac{x}{v})$向左

$$y = y_1 + y_2 = A\cos\omega(t - \tfrac{x}{v}) + A\cos\omega(t + \tfrac{x}{v})$$

$$= 2A\cos(\tfrac{\omega}{v}x)\cos\omega t$$

又$\because \omega = \dfrac{2\pi}{T}, \quad v = \dfrac{\lambda}{T}, \quad \therefore \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\therefore y = 2A\cos(\tfrac{2\pi x}{\lambda})\cos\omega t$$

讨论

驻波方程 $y = 2A\cos(\frac{2\pi x}{\lambda})\cos\omega t$

(1) 振幅 $\left|2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|$ 随 x 而异，与时间无关

$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm k\pi \quad k = 0,1,2,\cdots \qquad |A'| = 2A$ 　振幅为最大

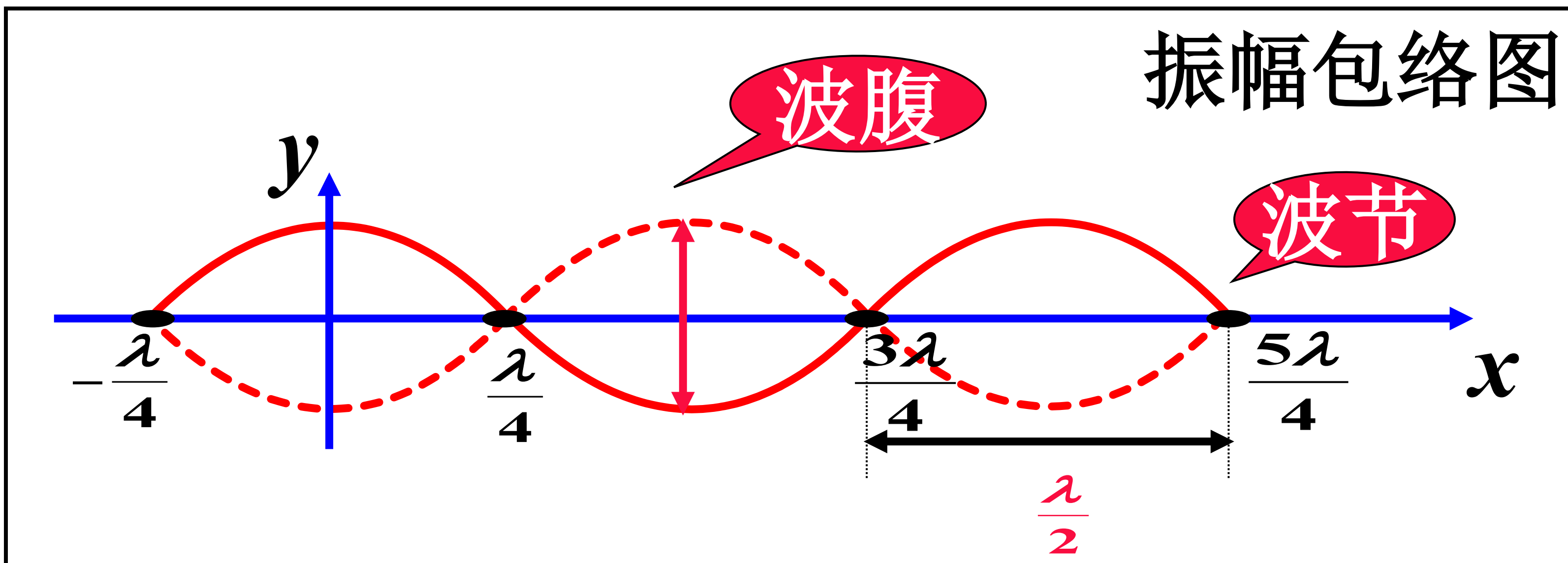
$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm(k+\frac{1}{2})\pi \quad k = 0,1,2,\cdots \qquad |A'| = 0$ 　振幅为0

$x = 2k\dfrac{\lambda}{4}$ （$\dfrac{\lambda}{4}$的偶数倍） $|A'| = 2A$ 为波腹

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$x = (2k+1)\dfrac{\lambda}{4}$ （$\dfrac{\lambda}{4}$的奇数倍） $|A'| = 0$ 为波节

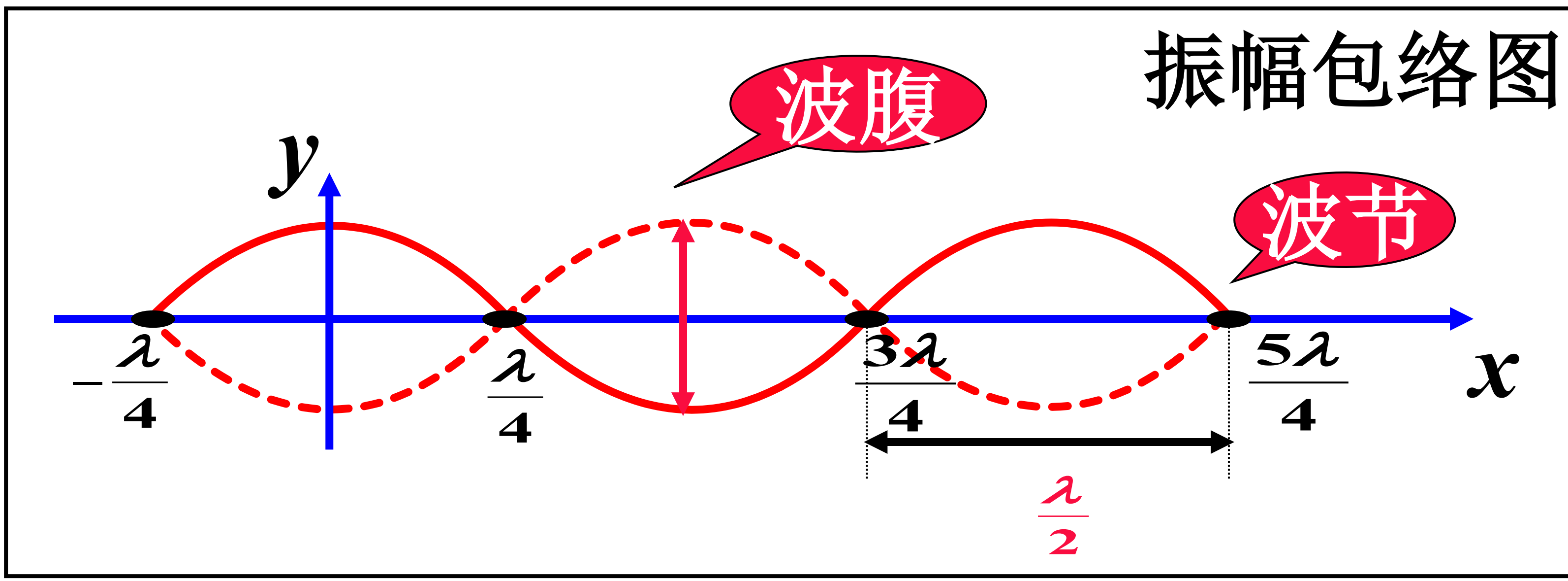
$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$



结论 有些点始终不振动, 有些点始终振幅最大.

相邻波腹（节）间距 $= \lambda/2$

相邻波腹和波节间距 $= \lambda/4$



（2）相位分布

$$y=(2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos\omega t=A'\cos\omega t$$

$$x\in(-\frac{\lambda}{4},\frac{\lambda}{4}),\cos\frac{2\pi}{\lambda}x>0$$

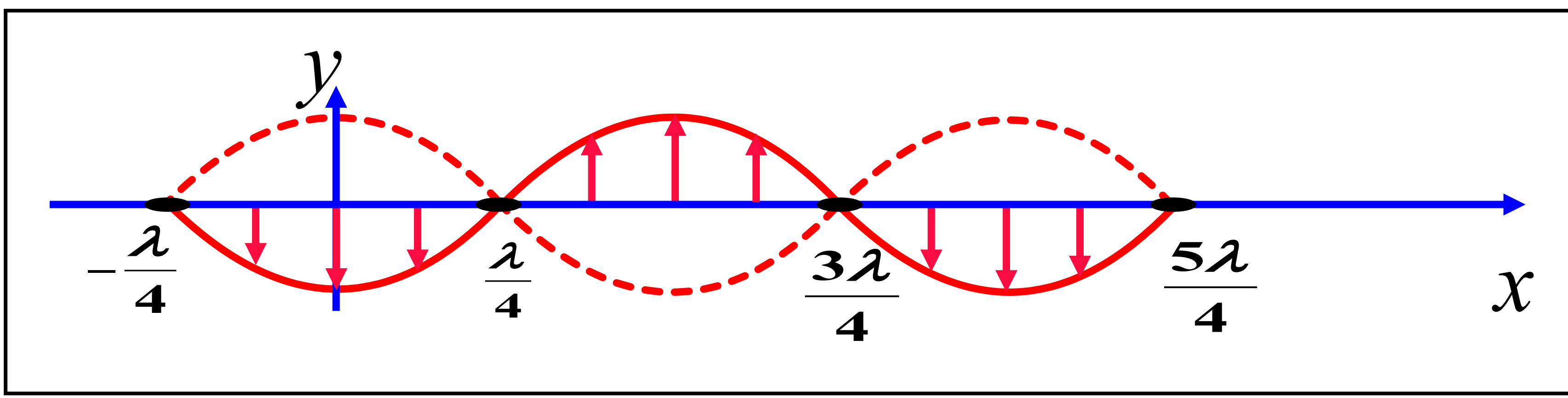
$$y=\left|(2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x)\right|\cos\omega t$$

结论 相邻两波节间各点振动相位相同

$$x \in (\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}), \cos\frac{2\pi}{\lambda}x < 0$$

$$y = -\left|(2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x)\right|\cos\omega t = \left|(2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x)\right|\cos(\omega t + \pi)$$

结论 一波节两侧各点振动相位相反



边界条件

驻波一般由入射、反射波叠加而成，反射发生在两介质交界面上，在交界面处出现波节还是波腹，取决于介质的性质.

介质分类

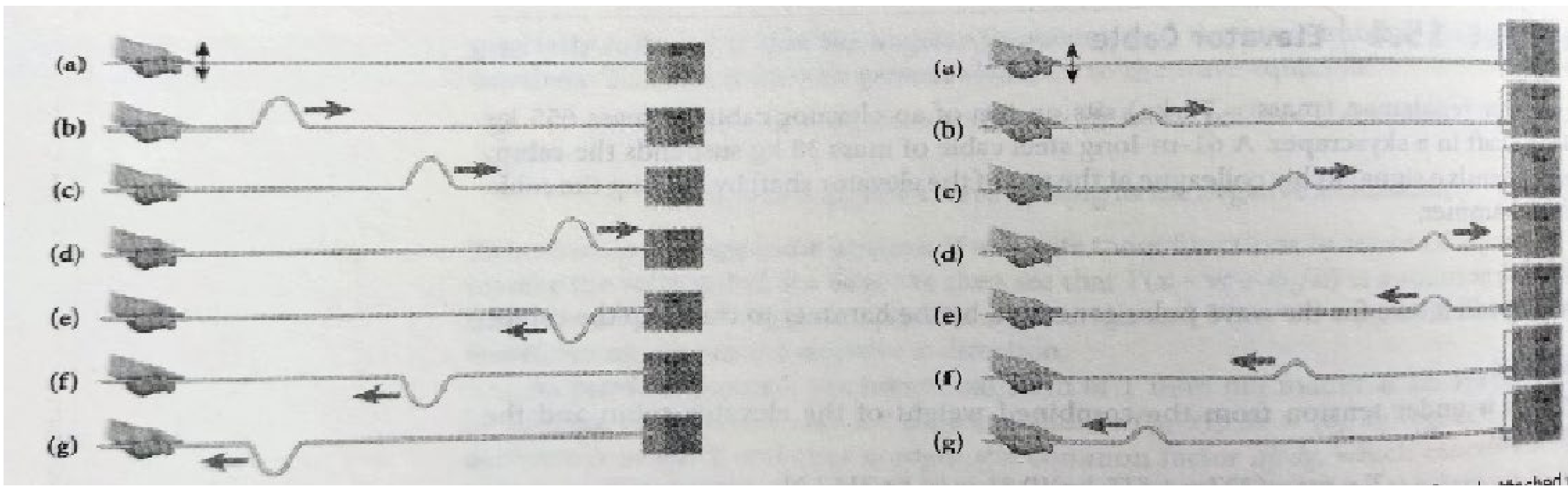
波疏介质, 波密介质

波疏介质 ⟶ 波密介质

波疏介质 ρu 较小

波密介质 ρu 较大

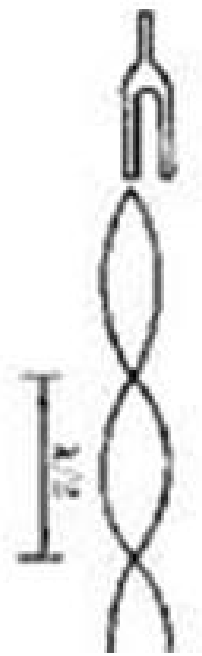
三 相位跃变（半波损失）

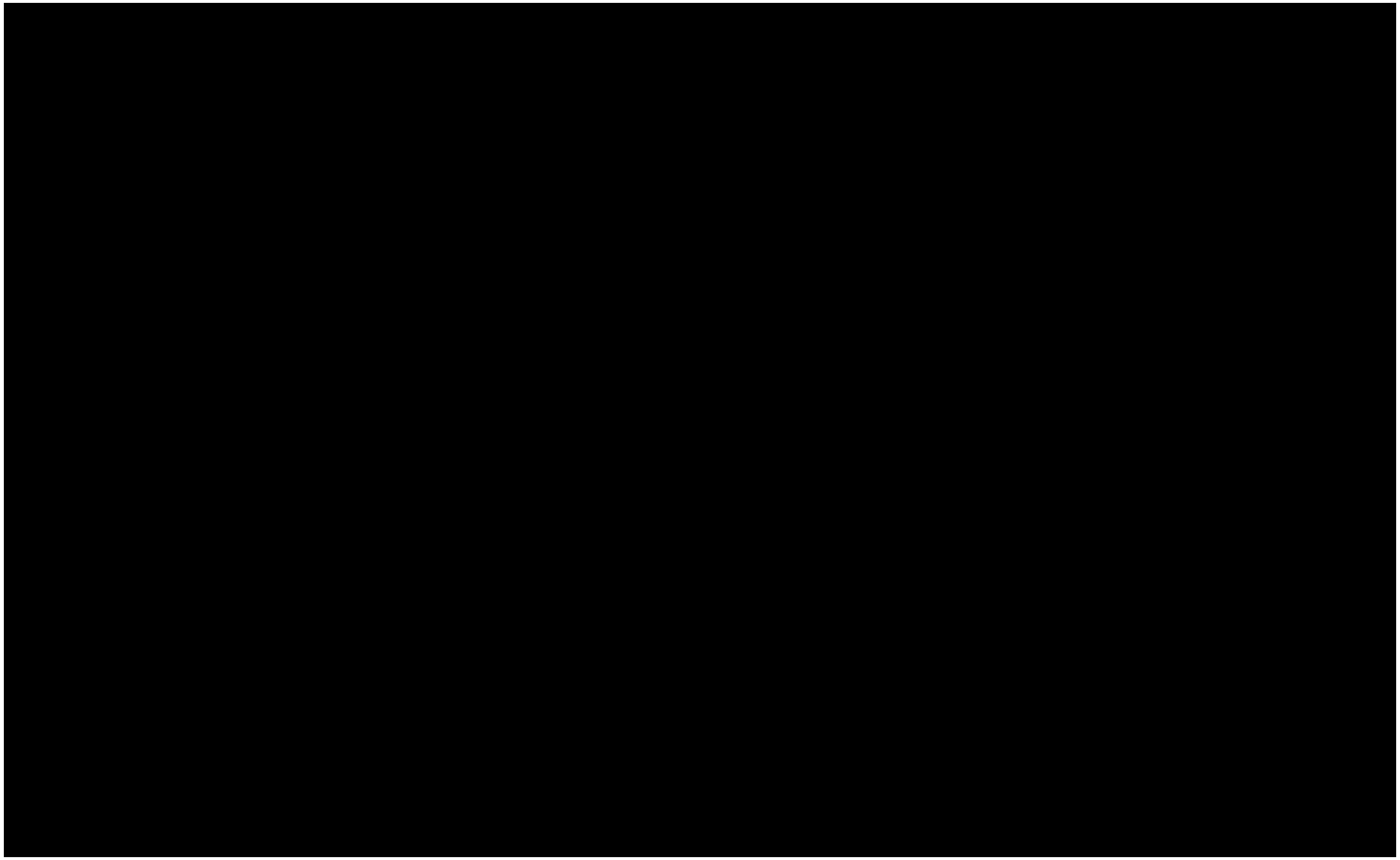


当波从波疏介质垂直入射到波密介质，被反射到波疏介质时形成波节．入射波与反射波在此处的相位时时相反，即反射波在分界处产生π的相位跃变，相当于出现了半个波长的波程差，称半波损失.

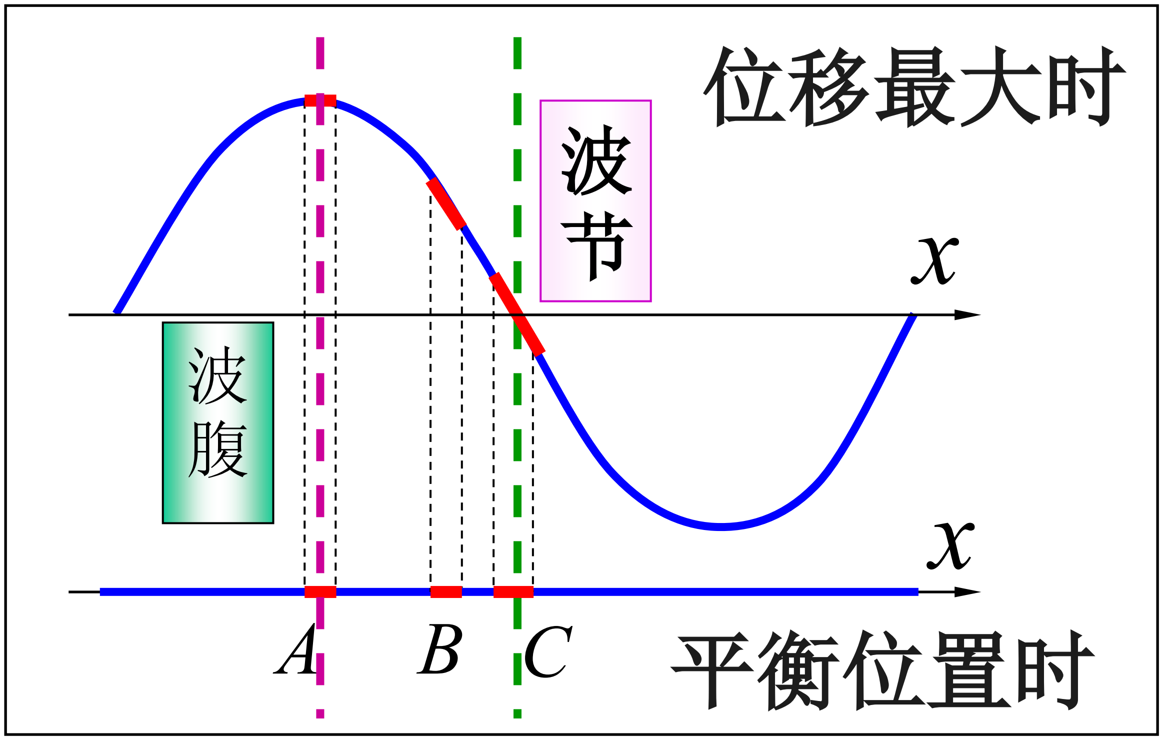
波密介质 ⟶ 波疏介质

当波从波密介质垂直入射到波疏介质，被反射到波密介质时形成波腹．入射波与反射波在此处的相位时时相同，即反射波在分界处不产生相位跃变.





四 驻波的能量



$$\mathrm{d}W_{\mathrm{p}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{k}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

驻波的能量

驻波的能量在相邻的波腹和波节间往复变化，在相邻的波节间发生动能和势能间的转换，动能主要集中在波腹，势能主要集中在波节，但无能量的定向传播.

投票 最多可选1项

设置

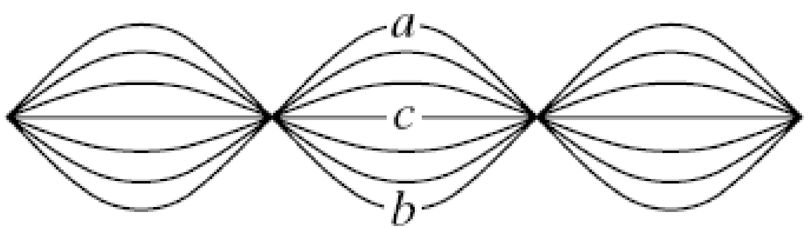
一根绳子的两端固定，拨动绳子将在两个端点a和b之间产生驻波。假定向上运动对应于正的速度值。当绳子在位置c处时，绳子上各点的瞬时速度

A 各处都等于零

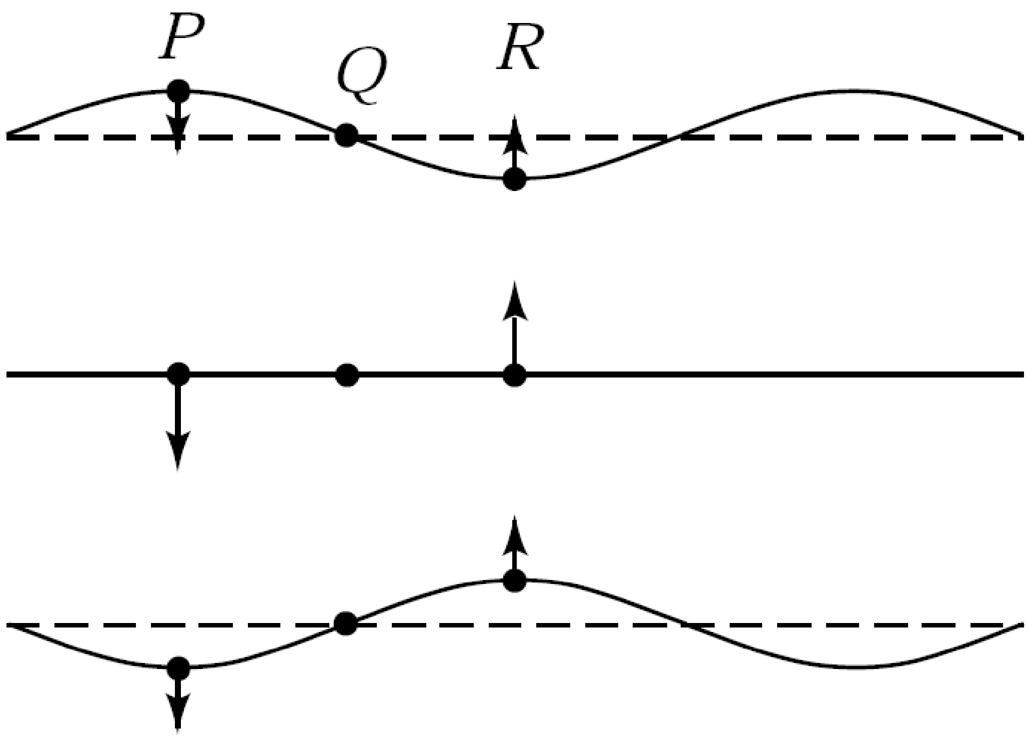
B 各处都是正值

C 各处都是负值

D 取决于所处位置



提交

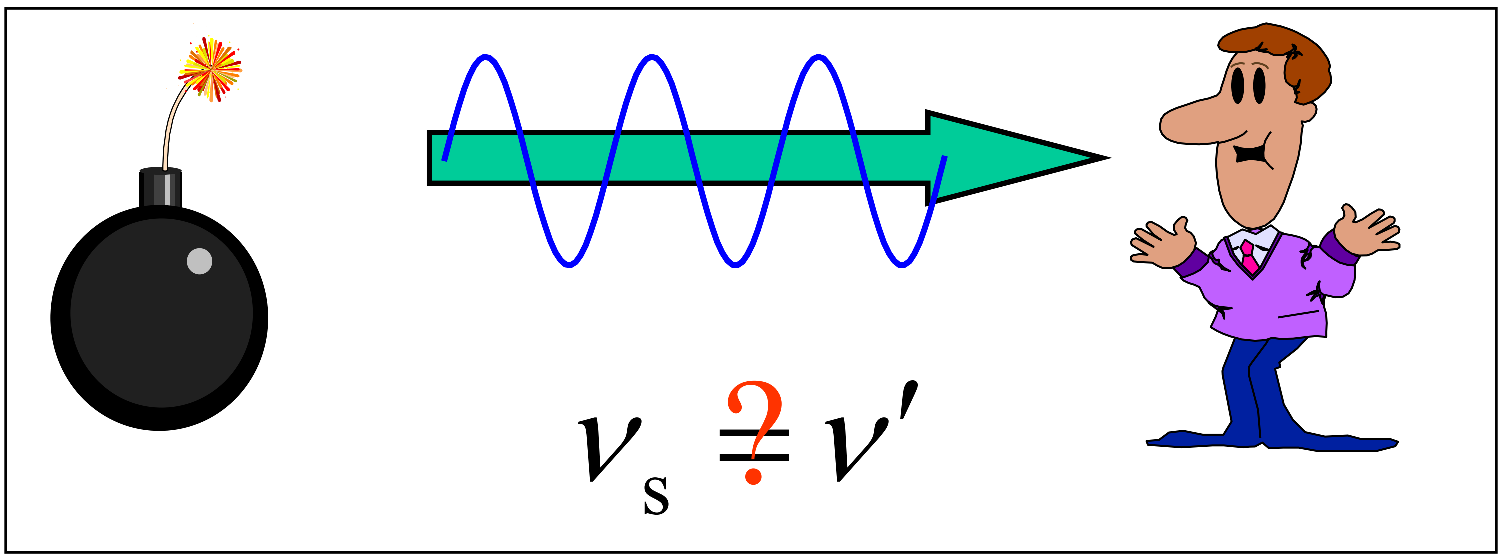

P
Q
R

§8. 多普勒效应

多普勒 奥地利
1803-1853

南開大學

人耳听到的声音的频率与声源的频率一定相同吗？



发射频率 ν_s　　　　　　接收频率 ν'

https://www.bilibili.com/video/av23419680

波源频率——波源在单位时间内振动的次数，或者单位时间内波源发出完整波的数目。

接收频率——单位时间内观测者接收到的振动次数或完整波数.

多普勒效应：如波源与观察者之间有相对运动，则二者频率互不相同，因为单位时间接收到的完整波长数和单位时间内波源发出的完整波长数不同。

设相对于介质，波源速度为v_s,观察者速度v_0， 振频率为γ,观察者接收到频率为γ',波速为v。

1. 如$v_s = 0, v_0 = 0,$ 则$\gamma' = \gamma$;

$2.v_s = 0, v_0 \neq 0$ 振源不动，观察者相对于介质运动

单位时间接受的波数

$$\gamma' = \frac{\nu}{\lambda} \pm \frac{\nu_0}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}(\nu \pm \nu_0)$$

单位时间发射的波数 $\gamma = \frac{\nu}{\lambda}$

$$\gamma' = \gamma\left(\frac{\nu \pm \nu_0}{\nu}\right)$$

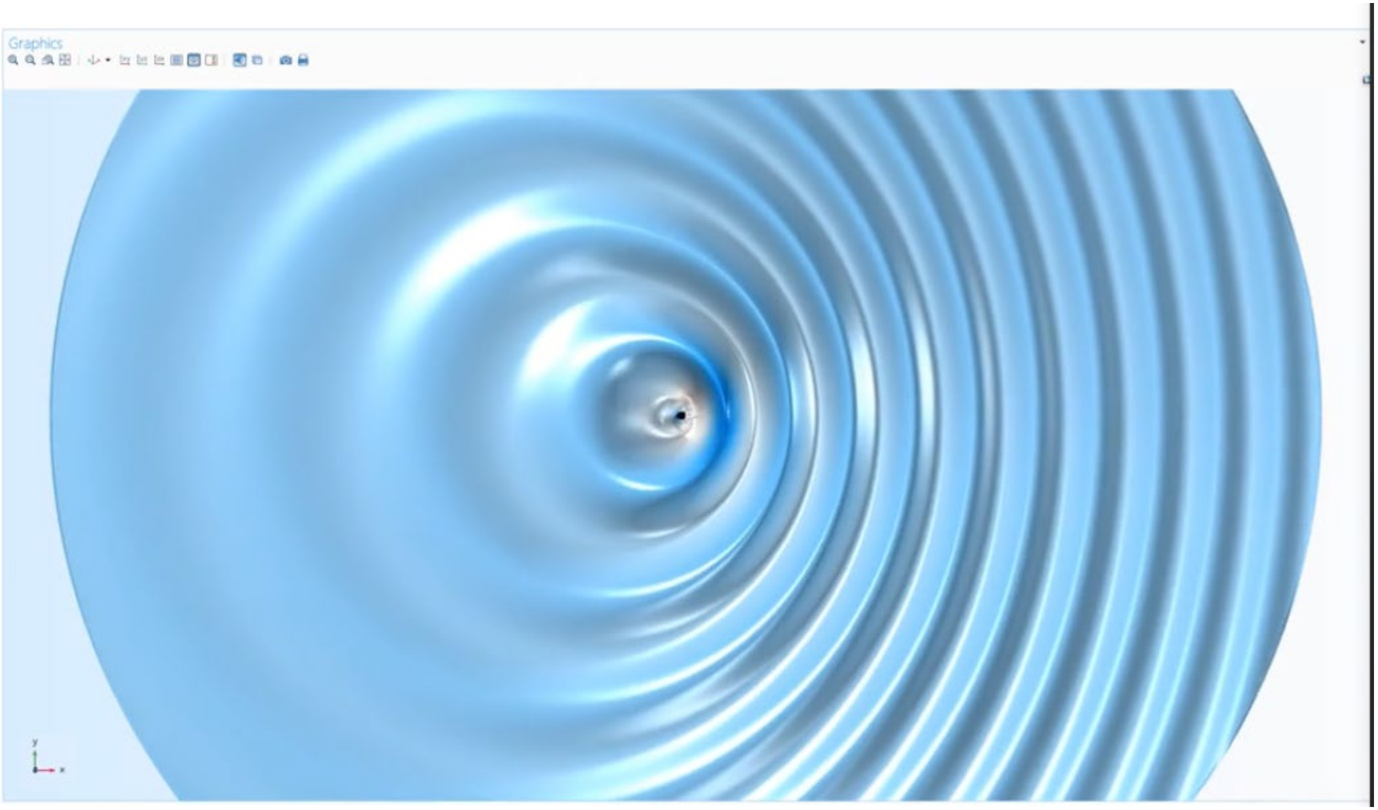
注：相向而行，取“+”，相背而行，取“-”。

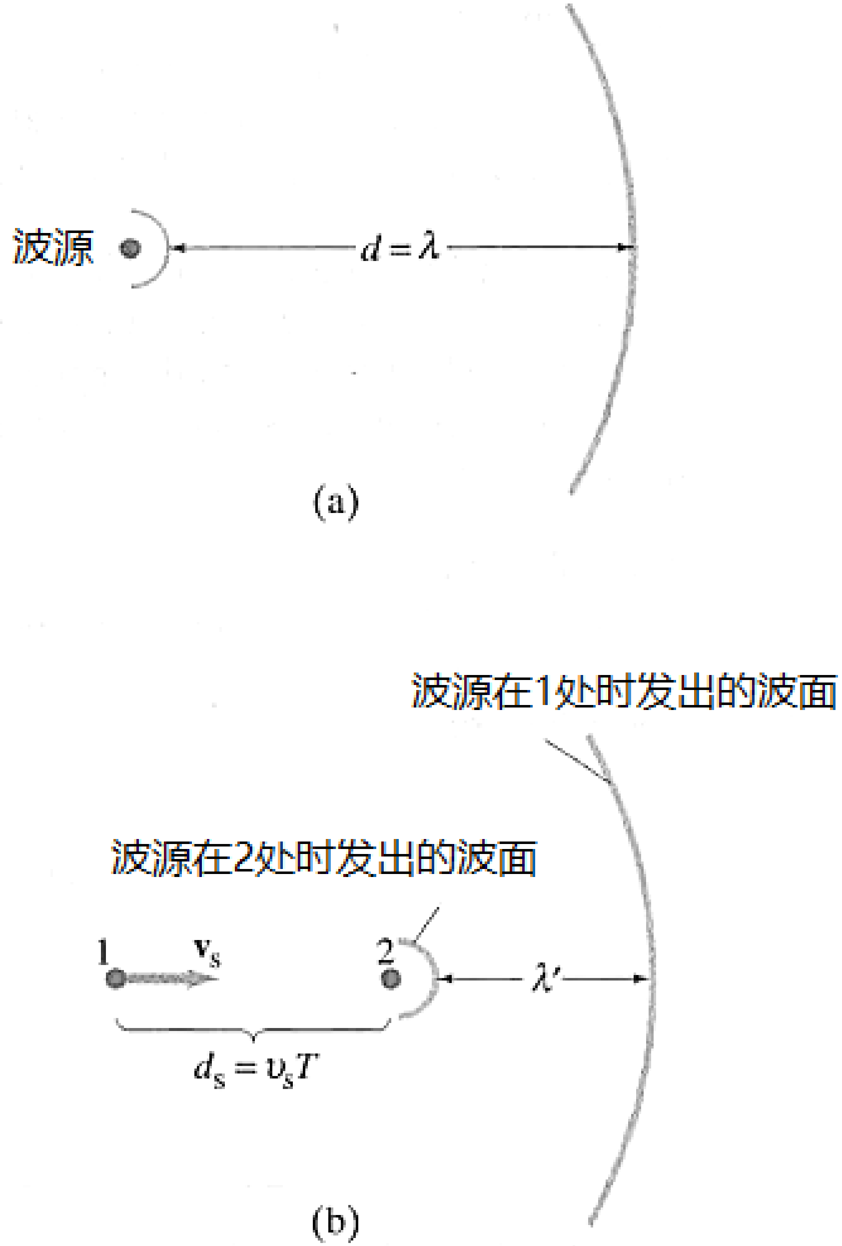
相向运动，频率增大；
相背运动，频率减小。

$3.v_s \neq 0, \quad v_0 = 0$

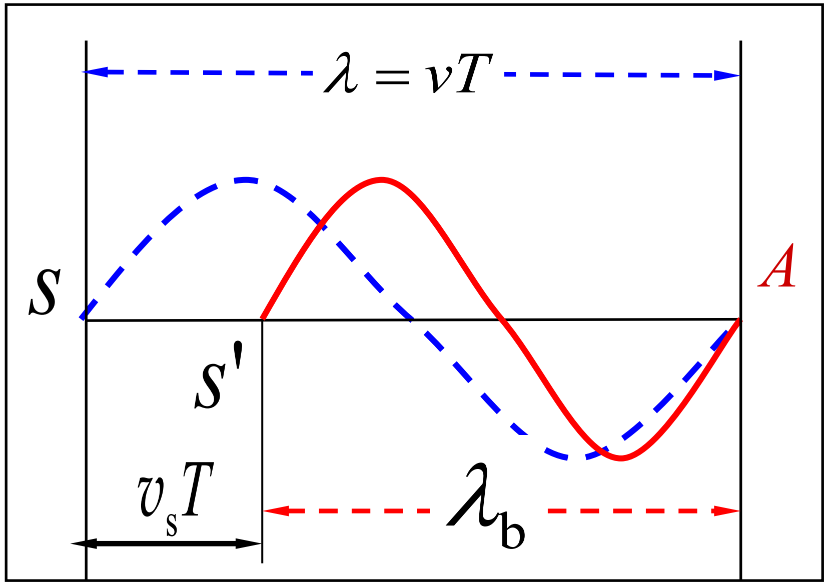
观察者不动, 波源相对介质运动

https://cn.comsol.com/blogs/what-is-the-doppler-effect/





波源
$d=\lambda$
(a)
波源在1处时发出的波面
波源在2处时发出的波面
1
$\mathbf{v}_s$
2
λ'
$d_s = v_s T$
(b)



单位时间发射的波数：$\gamma = \dfrac{v}{\lambda}$

单位时间接收的波数：

$$\gamma' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda - v_s T} = \frac{v}{vT - v_s T} = \frac{v}{v - v_s}\gamma$$

$$\gamma' = \gamma \frac{v}{v \mp v_s}$$

注：相向而行，取“-”，相背而行，取“+”。

相向运动，频率增大；
相背运动，频率减小。

4） $v_s \neq 0$， $v_0 \neq 0$

$$\gamma' = \gamma\left(\frac{v + v_0}{v - v_s}\right) \text{相向}$$

$$\gamma' = \gamma\left(\frac{v - v_0}{v + v_s}\right) \text{相背}$$

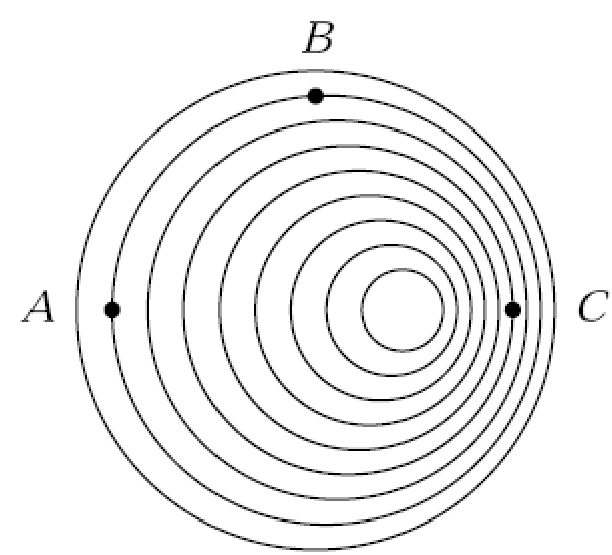
相向运动，频率增大；
相背运动，频率减小。

投票 最多可选1项

设置

三个观察者正在A,B,C处听一个运动的声源发出的声音。下图标明了运动声源发出的声波的波峰相对于三个观察者的位置。则以下哪个描述是正确的?

- A 波阵面在A处的运动速度快于在B和C处的运动速度
- B 波阵面在C处的运动速度快于在A和B处的运动速度
- C 声波的频率在A处最高
- D 声波的频率在B处最高
- E 声波的频率在C处最高



提交

多普勒效应的应用

(1) 交通上测量车速；

(2) 医学上用于测量血流速度；

(3) 天文学家利用电磁波红移说明大爆炸理论；

本次的学习目标，您达到了吗？

- 惠更斯原理的核心思想是什么？
- 驻波是怎么产生的？有什么特点？
- 多普勒效应产生的原因您知道了吗？