博迪版《投资学》习题课-讲义

第三章 证券是如何交易的

1．成交价格和做市策略

下表是专家做市商的最新成交簿，该股票上一笔交易的成交价格是每股 50 美元。

限价买入指令		限价卖出指令	
报价（美元）	股票数量	报价（美元）	股票数量
49.75	500	50.25	100
49.50	800	51.50	100
49.25	500	54.75	300
49.00	200	58.25	100
48.50	600		

（1）若买入 100 股的市场委托指令出现，成交价格将是多少？
（2）下一笔市场委托买入指令将以什么价格成交？
（3）专家做市商会增加还是减少对该股票的库存？

答：

（1）市价买入委托指令，将以最低的限价卖出指令价格（50.25 美元）成交。

（2）因上一笔 100 股买入指令已将市场最低限价（50.25 美元）累积的股票数量（100 股）出清。因此，下一笔市价买入委托指令，将按前一笔交易完成之后的最低卖出指令价格（51.50 美元）成交。

（3）会**增加**自己的库存。从委托指令列表可以看出，此股票的买方力量明显偏弱（当前最高买入指令价格仅 49.75 美元，而市场最低卖出指令价格尚在 54.75 美元），此时专家若**增加买入数量**，可快速弥合买卖双方的价格缺口。

2．保证金购买（买空）情形下的收益率及保证金账户变动

迈克对某股票看涨，该股当前市价为每股 50 美元，迈克自有 5000 美元可投资，另又从经纪人处借入 5000 美元，年利率为 8%。迈克将这 10000 美元全部投资该股票。
（1）若该股股价在下一年内上涨 10%，迈克的收益率将是多少（此股当前未派发股利）？
（2）若维持保证金比例为 30%，该股股价跌至多少时，迈克会收到保证金催缴通知？假设股价是瞬时变化的。

答：

（1）

该股当前市价为50美元/股，迈克用10000美元（自有5000美元、经纪人借款5000美元）可买入的股票数量为$\frac{5000+5000}{50}=200$（股）。

因股价涨幅10%，在无股利的前提下，可得

$$股票收益率r=\frac{股票净收益额}{本金}=\frac{股票总收益额-借款成本}{本金}$$

$$=\frac{(5000+5000)\times 10\%-5000\times 8\%}{5000}=\frac{1000-400}{5000}=12\%$$

（2）

若维持保证金比例为30%，设每股单价为P，借助保证金比例公式

$$保证金比例=\frac{权益价值}{股票市值}=\frac{股票市值-负债}{股票市值}=\frac{(股数\times股价)-负债}{股数\times股价}$$

可得

$$30\%=\frac{200P-5000}{200P}$$

解得$P=35.71$（美元）。

即当$P\leq35.71$（美元）时，迈克会收到保证金催缴通知。

（买空情形下的催缴逻辑：$经纪人催缴\leftarrow保证金告急\leftarrow市值缩水\leftarrow股价下降$）

3．保证金购买（买空）情形下的保证金账户变动

客户向经纪人借入 20000 美元购买某公司股票，该股票的当前市价为每股 40 美元，账户的初始保证金比例要求为 50%，维持保证金比例要求为 35%，两天后该股票的价格跌至每股 35 美元。

（1）此时客户会否收到保证金催缴通知？

（2）股价下跌至多少时，客户会收到保证金催缴通知？

答：

（1）

此时不会收到保证金催缴通知。

已知初始保证金比例为50%，客户负债20000美元，当前股价40美元/股，假设所购股数为x，代入（买空情形下的）保证金比例公式

$$保证金比例=\frac{权益价值}{股票市值}=\frac{股票市值-负债}{股票市值}=\frac{(股数\times股价)-负债}{股数\times股价}$$

可得

$$50\%=\frac{40x-20000}{40x}$$

由此，所购股数为

$$x=1000（股）$$

当股价跌至每股35美元时，同理可得

$$新的股票市值=1000\times35=35000（美元），$$

$$新的权益价值=新的股票市值-负债=35000-20000=15000（美元），$$

进而

$$新的保证金比例=\frac{新的权益价值}{新的股票市值}=\frac{15000}{35000}=42.9\%$$

可见，新的保证金比例（42.9%）超过维持保证金比例要求（35%），因而不会收到保证金催缴通知。

（2）

已知维持保证金比例为35%，所购股数为1000股，客户负债20000美元，设每股单价为P，借助（买空情形下的）保证金比例公式

买空情形下，此处的股票市值为投资者的资产，而非负债

$$保证金比例 = \frac{权益价值}{股票市值} = \frac{股票市值 - 负债}{股票市值} = \frac{(股数 \times 股价) - 负债}{股数 \times 股价}$$

可得

$$35\% = \frac{1000P - 20000}{1000P}$$

解得$P = 30.77$（美元）。可见，当 $P \leq 30.77$美元时，会收到保证金催缴通知。

（买空情形下的催缴逻辑：$经纪人催缴 \leftarrow 保证金告急 \leftarrow 市值缩水 \leftarrow 股价下降$）

4．卖空情形下的保证金账户变动

某股票当前市价为每股 50 美元，投资者对其看跌，决定卖空 100 股。
（1）若经纪人的维持保证金比例要求是空头头寸的 50%，投资者须在经纪人账户中存入多少现金或证券？
（2）若经纪人的维持保证金比例要求是空头头寸的 30%，股价涨到多少时，投资者会收到保证金催缴通知？

答：

（1）

已知$空头头寸 = 卖空股数 \times 当前市价 = 50 \times 100 = 5000$（美元）。

根据题目条件，可知$投资者须存金额 = 空头头寸 \times 50\% = 5000 \times 50\% = 2500$（美元）。

（2）

由题目可知，目前投资者的总资产为7500美元（5000美元为卖空股票的收入，2500美元为保证金）。负债为$100 \cdot P$（因卖空后偿还经纪人的股数确定，而股价未知，因而实际负债数额尚不确定）。由此，权益价值为$(7500 - 100 \cdot P)$。

若维持保证金比例为30%，则有

卖空情形下，此处的股票市值实为投资者的负债，而非资产

$$\frac{权益价值}{股票市值} = \frac{7500 - 100 \cdot P}{100 \cdot P} = 30\%$$

解得$P = 57.69$（美元）。可见，当$P > 57.69$ 美元时，会收到保证金催缴通知。

（卖空情形下的催缴逻辑：$经纪人催缴 \leftarrow 保证金告急 \leftarrow 负债放大 \leftarrow 股价上涨$）

第五章 风险与收益入门及历史回顾

5．单一证券的期望收益与方差

假设某证券在投资期内有三种可能的收益机会：

情形	收益率	发生概率
A	10%	0.5
B	16%	0.4
C	18%	0.1

试算该证券的期望收益率及其方差值。

解：根据单一证券预期收益公式

$$E(r)=\sum_{i=1}^{n}p_i r_i$$

已知

$$r_1=10\%,\ p_1=0.5$$
$$r_2=16\%,\ p_2=0.4$$
$$r_3=18\%,\ p_3=0.1$$

代入可得

$$E(r)=10\%\times0.5+16\%\times0.4+18\%\times0.1=5\%+6.4\%+1.8\%=13.2\%$$

根据单一证券方差公式

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}p_i\left[r_i-E(r)\right]^2$$

代入可得

$$\sigma^2=(10\%-13.2\%)^2\times0.5+(16\%-13.2\%)^2\times0.4+(18\%-13.2\%)^2\times0.1$$
$$=0.001024\times0.5+0.000784\times0.4+0.002304\times0.1$$
$$=0.000512+0.0003136+0.0002304=0.001056$$

6．双证券的期望收益率、收益率标准差、组合的期望收益率

下表为股票 X 和 Y 的相关数据：

	熊市	正常	牛市
概率	0.2	0.5	0.3
股票 X	-20	18	50
股票 Y	-15	20	10

（1）股票 X 和 Y 的期望收益率？

（2）股票 X 和 Y 收益率的标准差？

（3）假设投资 9000 美元于股票 X，1000 美元于股票 Y。组合的期望收益率是多少？

答：

（1）

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r_X}) = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{3}} \boldsymbol{p_i r_i} = 0.2 \times (-20\%) + 0.5 \times 18\% + 0.3 \times 50\% = 20\%$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r_Y}) = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{3}} \boldsymbol{p_i r_i} = 0.2 \times (-15\%) + 0.5 \times 20\% + 0.3 \times 10\% = 10\%$$

（2）

$$\boldsymbol{\sigma_X}^{\boldsymbol{2}} = \sum_{i=1}^{3} p_i\,[r_i - E(r_X)]^2$$
$$= [0.2 \times (-20\% - 20\%)^2] + [0.5 \times (18\% - 20\%)^2] + [0.3 \times (50\% - 20\%)^2]$$
$$= 5.92\%$$

$$\boldsymbol{\sigma_X} = 24.33\%$$

$$\boldsymbol{\sigma_Y}^{\boldsymbol{2}} = \sum_{i=1}^{3} p_i\,[r_i - E(r_Y)]^2$$
$$= [0.2 \times (-15\% - 10\%)^2] + [0.5 \times (20\% - 10\%)^2] + [0.3 \times (10\% - 10\%)^2]$$
$$= 1.75\%$$

$$\boldsymbol{\sigma_Y} = 13.23\%$$

（3）

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = (0.9 \times 20\%) + (0.1 \times 10\%) = 19\%$$

第六章 风险资产的资本配置

7．投资者的效用函数 U

考虑一个期望收益率为 12%、标准差为 18%的组合。短期国债的收益率为 7%。投资者仍然偏好风险资产所允许的最大风险厌恶系数是多少？

答：

已知短期国债的收益率$r_f = 7\%$（无风险资产的效用值U_f就是其自身的收益率），依据效用函数公式$U = E(r) - \frac{1}{2}A\sigma^2$，可得风险投资组合的效用为

$$U_R = E(r) - \frac{1}{2}A\sigma^2 = 12\% - \frac{1}{2}A \cdot (18\%)^2 = 12\% - 0.0162 \cdot A$$

要使风险投资组合优于短期国债，不等式$U_R > U_f$必须成立，亦即

$$12\% - 0.0162 \cdot A > 7\% \Rightarrow A < \frac{12\% - 7\%}{0.0162} = 3.09。$$

因此，要使风险投资组合优于短期国债，风险厌恶系数A须小于3.09。

回答习题 8~12，某风险组合P的期望收益率为 18%，标准差 28%。短期国债利率 8%。

8．投资组合（一无风险资产、一风险资产）的期望收益率和方差

如果客户选择投资 70%于该风险基金，30%于短期国债，则其投资组合的期望收益率和方差是多少？

答：

根据双证券投资组合的期望收益率公式，可知客户投资组合的期望收益率

$$E(r_C) = w_P E(r_P) + w_f E(r_f)$$

已知w_P=70%，w_f=30%，

$$E(r_P) = 18\%,\ E(r_f) = r_f = 8\%，$$

$$\sigma_P = 28\%，\sigma_f = 0，\sigma_{Pf} = 0，$$ 可得

（1）客户投资组合的期望收益率$E(r_C) = (70\% \times 18\%) + (30\% \times 8\%) = 15\%$

（2）（当一个完整投资组合仅由一个风险资产和一个无风险资产构成时，）客户投资组合的方差（等于风险资产的标准差与其投资比例乘积的平方）

$$\sigma_C{}^2 = (w_P \cdot \sigma_P)^2 = (70\% \times 28\%)^2 = (19.6\%)^2 = 3.84\%$$

9．投资组合内部的头寸结构

若风险组合R的具体投资如下表：

股票 A	25%
股票 B	32%
股票 C	43%

那么客户的投资头寸是怎样的？

答：

已知客户对风险组合的投资比例为$w_P = 70\%$，参照上表中的分布，可见：

（1）对股票A的投资头寸为$w_P \cdot 25\% = 70\% \times 25\% = 17.5\%$；

（2）对股票B的投资头寸为$w_P \cdot 32\% = 70\% \times 32\% = 22.4\%$；

（3）对股票C的投资头寸为$w_P \cdot 43\% = 70\% \times 43\% = 30.1\%$。

10．风险投资组合的夏普比率（报酬-波动性比率）

该风险组合的报酬-波动性比率是多少？客户的报酬-波动性比率呢？

答：

根据报酬-波动性比率公式

$$S = \frac{E(r_i) - r_f}{\sigma_i}$$

（1）

已知$E(r_P) = 18\%$，σ_P =28%，$r_f = 8\%$，可得该风险组合的报酬-波动性比率

$$S_P = \frac{E(r_P) - r_f}{\sigma_P} = \frac{18\% - 8\%}{28\%} = 0.3571$$

（2）

同理，基于此前计算的数据结果，可得客户的报酬-波动性比率

$$S_C = \frac{E(r_C) - r_f}{\sigma_C} = \frac{15\% - 8\%}{19.6\%} = 0.3571$$

11．风险组合的投资比例（权重）、收益标准差

假设客户投资于该风险组合的权重为y，期望收益率为16%，试问

（1）y取值多少？

（2）客户组合的收益标准差是多少？

答：

（1）

根据完整投资组合的期望收益率公式

$$E(r_c) = r_f + y[E(r_p) - r_f] = 8\% + y(18\% - 8\%),$$

若客户的投资组合期望收益率$E(r_c) = 16\%$，代入上式可得

$$16\% = 8\% + y(18\% - 8\%),$$

进而得出

$$y = \frac{16\% - 8\%}{18\% - 8\%} = 80\%$$

这意味着，为了得到期望收益率为16%的投资组合，客户必须将全部投资中的80%投资于风

险组合。

（2）

（当一个完整投资组合仅由一个风险资产和一个无风险资产构成时，）客户投资组合的标准差（等于风险资产的标准差与其投资比例的乘积）

$$\boldsymbol{\sigma_C = 80\% \times \sigma_P = 80\% \times 28\% = 22.4\%}$$

12．风险厌恶者的风险资产最优头寸（资本配置）

若客户的风险厌恶系数为$A = 3.5$，他该如何投资？

答：

将$A = 3.5$代入根据风险厌恶者的风险资产最优头寸公式，可得

$$y^* = \frac{E(r_P) - r_f}{A\sigma_P{}^2} = \frac{18\% - 8\%}{3.5 \times (28\%)^2} = \frac{10\%}{27.44\%} = 0.3644$$

因此，客户的最优投资策略是：将总投资中的36.44%配置风险投资组合，其余的63.56%投资于短期国债。

13．投资者的风险厌恶系数与效用函数

下表为效用函数数据。

投资	期望收益$E(r)$	标准差σ
1	0.12	0.30
2	0.15	0.50
3	0.21	0.16
4	0.24	0.21

（1）根据以上效用函数，当风险厌恶系数为$A = 4$，如何投资？

（2）如果是风险中性投资者呢？

答：

（1）

将$A = 4$代入投资的效用函数$U = E(r) - \frac{1}{2}A\sigma^2$，得$U = E(r) - 2\sigma^2$。

整理上表数据，可分别得出 4 种投资情形下的效用值：

$$U_1 = E(r_1) - 2\sigma_1{}^2 = 0.12 - 2 \times 0.30^2 = 0.12 - 0.18 = -0.06$$
$$U_2 = E(r_2) - 2\sigma_2{}^2 = 0.15 - 2 \times 0.50^2 = 0.15 - 0.50 = -0.35$$
$$U_3 = E(r_3) - 2\sigma_3{}^2 = 0.21 - 2 \times 0.16^2 = 0.21 - 0.18 = 0.1588$$
$$U_4 = E(r_4) - 2\sigma_4{}^2 = 0.24 - 2 \times 0.21^2 = 0.24 - 0.50 = 0.1518$$

理性的投资者会优选效用值最高的投资，因此选投**第 3 项**。

（2）

风险中性的投资者，其风险厌恶系数$A = 0$，代入效用函数可得其效用值$U = E(r)$。可见，期望收益率$E(r)$最高的投资是**第 4 项**，因而其效用值也最大。

14．投资的预期风险溢价

假设投资总额为 100000 美元，下表中投资于股票和债券的预期风险溢价（以美元表示）是多少？

行动	概率	期望收益(美元)
投资股票	0.6	50000
	0.4	-30000
投资债券	1.0	5000

答：

投资于股票和债券的预期风险溢价（0.6×50000）＋[0.4×（－30000）]－5000＝13000（美元）。

15．投资组合（一无风险资产、一风险资产）的期望收益和标准差、夏普比率

某股票基金的预期风险溢价为 12%，预期标准差为 12%。短期国债利率为 6%。客户决定向该基金投资 60000 美元，投资于短期国债 40000 美元。客户投资组合的期望收益和标准差各为多少？股票基金的夏普比率（报酬-波动性比率）是多少？

答：

已知$r_f=6\%$，$RP=12\%$，可得

股票基金的收益率$E(r_P)=r_f+RP=18\%$

股票基金的投资比例$y=\frac{60000}{60000+40000}=0.6$

（1）

客户投资组合的期望收益率

$$E(r_c)=r_f+y\left[E(r_P)-r_f\right]=6\%+0.6\times(18\%-6\%)=13.2\%$$

客户投资组合的期望收益绝对额为$(60000+40000)\times 13.2\%=13200$美元。

由题目已知$\sigma_P=12\%$，因此（当一个完整投资组合仅由一个风险资产和一个无风险资产构成时，）客户投资组合的标准差（等于风险资产的标准差与其投资比例的乘积）为$\sigma_C=y\sigma_P=0.6\times 12\%=7.2\%$。

（2）

已知$\boldsymbol{\sigma_P=12\%}$，可得

$$\boldsymbol{S=\frac{E(r_P)-r_f}{\sigma_P}=\frac{RP}{\sigma_P}=\frac{12\%}{12\%}=1}$$

第七章 最优风险资产组合

16．两风险资产最小方差组合的期望收益率和标准差

投资者考虑 3 个共同基金：第 1 个是股票基金，第 2 个是长期债券基金，第 3 个是短期货币基金，收益率为 8%。风险组合的概率分布如下表。

	期望收益（%）	标准差（%）
股票基金S	**20**	**30**
债券基金B	**12**	**15**

基金的收益率之间的相关系数为 0.1。

（1）两种风险基金的最小方差投资组合的投资比例是多少？

（2）这种投资组合收益率的期望值与标准差各是多少？

答：

（1）

机会集的参数为：$E(r_S)=20\%$，$E(r_B)=12\%$，$\sigma_S=30\%$，$\sigma_B=15\%$，$\rho=0.10$。根据标准差和相关系数，可以推出协方差矩阵（注意$\mathrm{Cov}(r_S,r_B)=\rho\cdot\sigma_S\cdot\sigma_B$）：

	债券	股票
债券	**225**	**45**
股票	**45**	**900**

最小方差组合可由下列公式推出：

$$w_{Min}(S)=\frac{\sigma_B{}^2-\mathrm{Cov}(r_S,r_B)}{\sigma_S{}^2+\sigma_B{}^2-2\mathrm{Cov}(r_S,r_B)}=\frac{225-45}{900+225-2\times40}=0.1739$$

$$w_{Min}(B)=1-0.1739=0.8261$$

（2）

最小方差组合的期望收益率

$$E(r_{Min})=0.1739\times20\%+0.8261\times12\%=0.1339=13.39\%$$

最小方差组合收益的标准差为：

$$\sigma_{Min}=\sqrt{w_S{}^2\sigma_S{}^2+w_B{}^2\sigma_B{}^2+2w_Sw_B\mathrm{Cov}(r_S,r_B)}$$

$$=\sqrt{0.1739^2\times900+0.8261^2\times225+2\times0.1739\times0.8261\times45}$$
$$=13.92\%$$

17．相关系数与无风险资产收益率

假设证券市场中有许多股票，股票 A 和 B 的数据见下表：

股票	期望回报（%）	标准差（%）
A	10	5
B	15	10

股票 A、B 的相关系数为-1。若能以无风险利率r_f借入资金，试求其取值。

答：

因$\boldsymbol{\rho_{AB} = -1}$（完全负相关），因此可构造一个无风险投资组合$\boldsymbol{P}$，且在均衡时，它的收益率等于无风险利率（$\boldsymbol{r_f}$）。

为求得该投资组合内的投资比例（$\boldsymbol{w_A}$和$\boldsymbol{w_B}$；且$\boldsymbol{w_B = 1 - w_A}$），令其标准差为$\boldsymbol{0}$。

因$\boldsymbol{\rho_{AB} = -1}$（完全负相关），该投资组合的标准差为：$\boldsymbol{\sigma_P = w_A\sigma_A - w_B\sigma_B}$。

已知$\boldsymbol{\sigma_A = 5\%}$，$\boldsymbol{\sigma_B = 10\%}$，因而有$\boldsymbol{0 = w_A \times 5\% - (1 - w_A) \times 10\%}$，解得$\boldsymbol{w_A = \frac{2}{3}}$。

该无风险投资组合的期望收益率为：

$$\boldsymbol{E(r_P) = w_A E(r_A) + w_B E(r_B) = \frac{2}{3} \times 10\% + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times 15\% = \frac{7}{60} = 11.667\%}$$

因此，$\boldsymbol{r_f = 11.667\%}$。

第八章 指数模型

18．投资组合（三资产）的期望收益、标准差、β、非系统性标准差

下表是两只股票的相关数据：

股票	期望回报$E(r)$（%）	β	公司特定标准差σ（%）
A	13	0.8	30
B	18	1.2	40

市场指数标准差为 22%，无风险利率为 8%。

（1）股票 A 和 B 的标准差是多少？

（2）假设我们建立一个组合，股票 A 占 30%，股票 B 占 45%，国库券占 25%，计算组合的期望收益、标准差、β和非系统性标准差。

答：

（1）

每种股票的标准差由下式给出：

$$\sigma_i = \sqrt{{\beta_i}^2{\sigma_M}^2 + \sigma^2(e_i)}$$

因为$\beta_A = 0.8$，$\beta_B = 1.2$，$\sigma(e_A) = 30\%$，$\sigma(e_B) = 40\%$，且$\sigma_M = 22\%$，可得

$$\sigma_A = \sqrt{{\beta_A}^2{\sigma_M}^2 + \sigma^2(e_A)} = \sqrt{0.82 \times 0.222 + 0.302} = 34.78\%$$

$$\sigma_B = \sqrt{{\beta_B}^2{\sigma_M}^2 + \sigma^2(e_B)} = \sqrt{1.22 \times 0.222 + 0.402} = 47.93\%$$

（2）

资产组合的期望收益率是单个证券的期望收益率的加权平均：

$$E(r_P) = w_A E(r_A) + w_B E(r_B) + w_f E(r_f)$$

已知$w_A = 30\%$，$w_B = 45\%$，$w_f = 25\%$，$E(r_A) = 13\%$，$E(r_B) = 18\%$，$E(r_f) = 8\%$，代入上式得

$$E(r_P) = 30\% \times 13\% + 45\% \times 18\% + 25\% \times 8\% = 14\%$$

投资组合的β值等于各证券β值的加权平均

$$\beta_P = w_A\beta_A + w_B\beta_B + w_f\beta_f$$

因$\beta_A = 0.8$，$\beta_B = 1.2$，$\beta_f = 0$，代入上式得

$$\beta_P = 30\% \times 0.8 + 45\% \times 1.2 + 25\% \times 0 = 0.78$$

投资组合的方差为

$${\sigma_P}^2 = {\beta_P}^2{\sigma_M}^2 + \sigma^2(e_P)$$

其中，${\beta_P}^2{\sigma_M}^2$是系统组成成分，$\sigma^2(e_P)$是非系统成分。

因残差是不相关的，非系统的方差

$$\sigma^2(e_P) = {w_A}^2 \times \sigma^2(e_A) + {w_B}^2 \times \sigma^2(e_B) + {w_f}^2 \times \sigma^2(e_f) = (30\%)^2 \times (30\%)^2 + (45\%)^2 \times (40\%)^2 + (25\%)^2 \times 0 = 0.0405$$

其中，$\sigma^2(e_A)$和$\sigma^2(e_B)$是股票A、B的非系统方差，而$\sigma^2(e_f)$是国库券的非系统方差（取值为0）。因此，投资组合的剩余标准差为：

$$\sigma(e_P) = \sqrt{0.0405} = 20.12\%$$

投资组合的总体方差为：

$$\sigma_P{}^2 = \beta_P{}^2\sigma_M{}^2 + \sigma^2(e_P) = 0.78^2 \times 0.22^2 + 0.0405 = 0.069947$$

进而，投资组合的标准差为$\sigma_P = \sqrt{\sigma_P{}^2} = 26.45\%$。

第九章 资本资产定价模型

19．投资组合的β值

如果$E(r_P)$=18%，$r_f = 6\%$，$E(r_M)$=14%，求该投资组合的β值？

答：

将各项数据代入$E(r_P) = r_f + \beta_P \cdot [E(r_M) - r_f]$可得

$$18\% = 6\% + \beta_P \cdot [14\% - 6\%]$$

解得

$$\beta_P = \frac{18\% - 6\%}{14\% - 6\%} = \frac{12\%}{8\%} = 1.5$$

20．相关系数与股价

某股票的市场价格 50 美元，期望收益率 14%，无风险利率 6%，市场风险溢价 8.5%。如果该股票与市场投资组合的相关系数加倍（其他保持不变），该股票的市场价格是多少？假设该股票永远支付固定数额的股利。

答：

设该股票为A，市场投资组合为M。

若二者的相关系数（ρ_{AM}）加倍（其他所有变量如方差保持不变），则β值（β_{AM}）和风险溢价也将加倍。

因当前风险溢价$RP = E(r) - r_f = 14\% - 6\% = 8\%$，所以

新的风险溢价$RP' = 2RP = 2 \times 8\% = 16\%$，

新的股票贴现率$E(r)' = RP' + r_f = 16\% + 6\% = 22\%$。

若股票支付某一水平的永久红利，则由原始数据可知，红利须满足永续年金的现值公式：

$$股票价格 = \frac{股利}{贴现率}$$

代入数据可得$50 = \frac{D}{14\%}$，求解得$D = 50 \times 14\% = 7$（美元）。

可见，在新贴现率（22%）下，$股票价格 = \frac{7}{22\%} = 31.82$（美元）。

第十章 套利定价理论与风险收益多因素模型

21．单因素模型中的套利机会

考虑以下单因素经济中的数据。所有的投资组合都是充分分散的。

投资组合	$E(r)$	β
A	12%	1.2
B	6%	0

假设存在另一个充分分散的投资组合E，β为0.6，期望收益为8%。套利机会是否存在？如果存在，那么套利策略是什么？

答：

（1）套利机会

已知$\beta_E = 0.6$，$E(r_E) = 8\%$。

因$\beta_B = 0$，故$E(r_B) = 6\%$为无风险利率（r_f）。

组合A的风险溢价-β比率为$\frac{12\%-6\%}{1.2} = 5\%$，而组合$E$的该比率仅为$\frac{8\%-6\%}{0.6} = 3.33\%$。可见存在套利机会。

（2）套利策略

可通过持有等量的组合A、B构建一个新组合G，$\beta_G = 0.6$（与β_E相同）。

可见，组合G的预期收益率和β分别为：

$E(r_G) = (0.5 \times 12\%) + (0.5 \times 6\%) = 9\%$

$\beta_G = (0.5 \times 1.2) + (0.5 \times 0\%) = 0.6$

比较组合G和组合E，虽然$\beta_G = \beta_E = 0.6$，但$E(r_G) > E(r_E)$。因此，买入组合G、卖出等量的组合E，可获得套利机会。根据单因素模型原理（设F为某因素），套利收益为：

$r_G - r_E = [E(r_G) + \beta_G F] - [E(r_E) + \beta_E F] = [9\% + 0.6 \cdot F] - [8\% + 0.6 \cdot F] = 1\%$

即在每个组合中投资1%的资金。

22．单因素模型中的无风险利率

假定投资组合A、B都是充分分散的，$E(r_A) = 12\%$，$E(r_B) = 9\%$。如果经济中只有一个因素，且$\beta_A = 1.2$，$\beta_B = 0.8$。无风险利率等于多少？

答：

根据单因素模型公式

$$E(r_i) = r_f + \beta_i F$$

可得

$$E(r_A) = r_f + \beta_A F$$
$$E(r_B) = r_f + \beta_B F$$

代入数据，可得

$$12\% = r_f + 1.2F$$
$$9\% = r_f + 0.8F$$

解方程组可得：

$$r_f = 3\%$$

23．单因素模型中的证券收益率方差、套利机会

假定证券收益由单因素模型确定，即

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i$$

R_i表示证券i的超额收益，R_M表示市场超额收益。无风险利率为 2%。同样假设证券 A、B 和 C，其数据如下表所示。

证券	β_i	$E(R_i)(\%)$	$\sigma(e_i)(\%)$
A	0.8	10	25
B	1.0	12	10
C	1.2	14	20

（1）如果$\sigma_M = 20\%$，计算证券 A、B 和 C 收益的方差。

（2）现在假定资产的种类无限多，并且与证券 A、B 和 C 具有相同的收益特征。如果证券 A 是一个充分分散的投资组合，则该投资组合的超额收益方差的均值是多少？那么只有 B 或 C 组成的投资组合呢？

（3）市场中是否存在套利机会？如何实现套利？

答：

（1）

由$\sigma^2 = \beta^2 {\sigma_M}^2 + \sigma^2(e)$可得

$$\sigma_A{}^2 = 0.8^2 \times 0.20^2 + 0.25^2 = 0.0881$$
$$\sigma_B{}^2 = 1.0^2 \times 0.20^2 + 0.10^2 = 0.0500$$
$$\sigma_C{}^2 = 1.2^2 \times 0.20^2 + 0.20^2 = 0.0976$$

（2）

如果存在无限的具有相同收益特征的资产，则每一类充分分散化的资产组合都将只有系统性风险（当n无限大时，非系统性风险趋近于零）。

充分分散化$\sigma_A{}^2 = 0.8^2 \times 0.20^2 = 0.0256$

充分分散化$\sigma_B{}^2 = 1.0^2 \times 0.20^2 = 0.0400$

充分分散化$\sigma_C{}^2 = 1.2^2 \times 0.20^2 = 0.0576$

均值将等于个股（都是相等的）的均值。

（3）

无套利机会，因为充分分散化的组合都是公平定价，且落在证券市场线（SML）上。

24．双投资组合的套利机会

假设 X 和 Y 都是充分分散的投资组合，无风险利率为 8%。

投资组合	$E(r)$	β
X	16%	1.00
Y	12%	0.25

投资组合 X 和 Y 是否存在套利机会？

答：

因$\beta_X = 1$，故X为市场组合，$E(r_X) = E(r_M) = 16\%$。

已知$r_f = 8\%$，可得

$$E(r_Y) = r_f + \beta_Y \cdot RP = r_f + \beta_Y \cdot [E(r_M) - r_f] = 8\% + 0.25 \times (16\% - 8\%) = 10\%$$

可见，组合Y的期望收益与均衡收益不符，存在套利机会。