VAE 概率上推导

$I = -\log p(x)$ （表信息）

$H = -\sum p(x) \log p(x)$ 描述某个信息源中信息量的平均值

$E = \sum x p$

$KL(p \| q) = \sum p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} - \sum p(x) \log q(x) + \sum p(x) \log p(x)$ 在p分布下用q来表示信息损失

（相对熵）衡量两个概率分布之间的相似性，p, q为概率分布

$KL \geq 0$　　$KL(p \| q) \neq KL(q \| p)$

$$p(z|x) = \frac{p(x,z)}{p(x)} = \frac{p(x|z)\,p(z)}{p(x)}$$

后验　　$p(z)$（先验）

由于 $p(x) = \int p(x|z)\,p(z)\,dz$

（1维 $\int$
2维 $\iint$
3维 $\iiint$

∴ 由于 Var Inference 用一个 q 分布去尽可能近似 p

min $KL(q \| p)$

$$= \sum q(x) \log \frac{q(x)}{p(x)}$$

$$\Rightarrow KL(q(z|x) \| p(z|x)) = \sum q(z|x) \log \frac{q(z|x)}{p(z|x)}$$

$$= -\sum q(z|x) \log \frac{p(z|x)}{q(z|x)}$$

$$= -\sum q(z|x) \log \frac{\frac{p(z,x)}{p(x)}}{q(z|x)}$$

$$= -\sum q(z|x) \log \frac{p(z,x)}{q(z|x)} \cdot \frac{1}{p(x)}$$

$$= -\sum q(z|x) \left[\log \frac{p(x,z)}{q(z|x)} + \log \frac{1}{p(x)} \right]$$

$$= -\sum q(z|x) \left[\log \frac{p(x,z)}{q(z|x)} - \log(p(x)) \right]$$

$$= -\sum q(z|x) \log \frac{p(x,z)}{q(z|x)} + \sum_{z} q(z|x) \log p(x)$$

$$= -\sum q(z|x) \log \frac{p(x,z)}{q(z|x)} + \log p(x) \times 1$$

$$\therefore \log p(x) = KL(q(z|x) \| p(z|x)) + \underbrace{\sum q(z|x) \log \frac{p(x,z)}{q(z|x)}}_{L}$$

定　　$\downarrow$　　$\nearrow$　　L 推过下界

$$L \leq \log p(x)$$

$$L = \sum q(z|x) \log \frac{p(x,z)}{q(z|x)}$$

$$= \sum q(z|x) \log \frac{p(x|z)\,p(z)}{q(z|x)}$$

$$= \sum q(z|x) \left[\log p(x|z) + \log \frac{p(z)}{q(z|x)} \right]$$

$$= \sum q(z|x) \log p(x|z) + \sum q(z|x) \log \frac{p(z)}{q(z|x)}$$

$$= \underbrace{\sum q(z|x) \log p(x|z)}_{E_{q(x)}(p(x|z))} - KL(q(z|x) \| p(z))$$

2、