## ! https://zhuanlan.zhihu.com/p/616835488

## 坐标变换那些事4-终章:计算Lame系数格式 下的对流项/方向导数

大家还记得我们在一开始(指第二篇文章x)提到的对流项计算问题吗,我们经历如此多的定义与方法介绍,终于可以开始计算它了。

$$(\hat{e}_{ au}\cdot
abla)\hat{e}_{
ho}=-rac{1}{h_{ au}}(
abla h_{
ho})\delta^{
ho}_{ au}+rac{1}{h_{
ho}h_{ au}}rac{\partial h_{ au}}{\partial x_{
ho}}\hat{e}_{ au}$$

首先我们从计算仿射联络的中间步骤出发 (计算仿射联络参见上一篇文章)

$$egin{aligned} 2(\hat{e}_{\sigma}\cdot
abla)\hat{e}_{
ho} &= -
abla g_{
ho\sigma} + \left(rac{\partial g_{
ho\mu}}{\partial x^{\sigma}} + rac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{
ho}}
ight)\hat{e}^{\mu} \ &= -
abla g_{
ho\sigma} + (
abla g_{
ho\mu}\cdot\hat{e}_{\sigma})\hat{e}^{\mu} + (
abla g_{\sigma\mu}\cdot\hat{e}_{
ho})\hat{e}^{\mu} \end{aligned}$$

我们在此处不再去引入仿射联络,而是直接将 $g_{
ho\sigma}$ 展开为 $g_{
ho
ho}\delta^{
ho}_{\sigma} o h_{
ho}^{\ 2}\delta^{
ho}_{\sigma}$ 且继续利用自身基矢与逆基矢的变换关系,化简得到

(注:第二个等号利用关系 $\delta^i_\mu \hat{e}^\mu = \hat{e}^i$ 提出 $\delta$ 到括号外面进行化简)

$$egin{aligned} ext{RHS} &= - 
abla h_{
ho}^{\ 2} \delta_{\sigma}^{
ho} + \left( h_{
ho}^{\ 2} \delta_{\mu}^{
ho} \cdot \hat{e}_{\sigma} + h_{\sigma}^{\ 2} \delta_{\mu}^{\sigma} \cdot \hat{e}_{
ho} 
ight) \hat{e}^{\mu} \ &= - 
abla h_{
ho}^{\ 2} \delta_{\sigma}^{
ho} + \left( \hat{e}_{\sigma} \cdot 
abla h_{
ho}^{\ 2} \right) \hat{e}^{
ho} + \left( \hat{e}_{
ho} \cdot 
abla h_{\sigma}^{\ 2} \right) \hat{e}^{\sigma} \ &= - 2 h_{
ho} 
abla h_{
ho} \delta_{\sigma}^{
ho} + 2 h_{
ho} rac{\partial h_{
ho}}{\partial x_{\sigma}} \hat{e}^{
ho} + 2 h_{\sigma} rac{\partial h_{\sigma}}{\partial x_{
ho}} \hat{e}^{\sigma} \end{aligned}$$

最终左右同除以2,得到

$$(\hat{e}_{\sigma}\cdot
abla)\hat{e}_{
ho}=-h_{
ho}
abla h_{
ho}\delta^{
ho}_{\sigma}+h_{
ho}rac{\partial h_{
ho}}{\partial x_{\sigma}}\hat{e}^{
ho}+h_{\sigma}rac{\partial h_{\sigma}}{\partial x_{
ho}}\hat{e}^{\sigma}$$

需要注意的是,此处的基矢并不是单位基矢,这一点再次强调(可爱(shabi)的作者在这里犯傻了一下午)。

因此我们需要重写单位基矢的约定,我们记 $\hat{E}$ 为单位基矢符号,则有

$$egin{aligned} \hat{E}_{i} &= rac{\hat{e}_{i}}{|\hat{e}_{i}|} \ &= rac{\hat{e}_{i}}{(\hat{e}_{i} \cdot \hat{e}_{i})^{rac{1}{2}}} \ &= rac{\hat{e}_{i}}{(g_{ii})^{rac{1}{2}}} \ &= rac{\hat{e}_{i}}{h_{i}} \ &= h_{i} \hat{e}^{i} \end{aligned}$$

则我们将逆基矢项全部按照这种方式转化,则RHS化简为

$$ext{RHS} = -h_
ho 
abla h_
ho \delta_\sigma^
ho + h_
ho rac{\partial h_
ho}{\partial x_\sigma} rac{1}{h_
ho} \hat{E}_
ho + h_\sigma rac{\partial h_\sigma}{\partial x_
ho} rac{1}{h_\sigma} \hat{E}_\sigma$$

同时,我们也将LHS也按新的单位基矢的约定重写一遍,有

$$egin{aligned} ext{LHS} &= (\hat{e}_{\sigma} \cdot 
abla) \hat{e}_{
ho} \ &= (h_{\sigma} \hat{E}_{\sigma} \cdot 
abla) (h_{
ho} \hat{E}_{
ho}) \ &= rac{\partial h_{
ho}}{\partial x_{\sigma}} \hat{E}_{
ho} + h_{\sigma} h_{
ho} (\hat{E}_{\sigma} \cdot 
abla \hat{E}_{
ho}) \end{aligned}$$

需要注意的是,在计算LHS的第三个等号时,我们需要知道 $h_\sigma \hat{E}_\sigma \cdot \nabla$ 这才能化成一个完整的partial,如果只有一个 $\hat{E}$ 的话是不行的,原因在于 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial}{h_i \partial q_i}$ 

此时我们就可以欢乐的将LHS与RHS联立,得到我们在第二篇文末给出的结论啦

$$(\hat{e}_{ au}\cdot
abla)\hat{e}_{
ho}=-rac{1}{h_{ au}}(
abla h_{
ho})\delta^{
ho}_{ au}+rac{1}{h_{
ho}h_{ au}}rac{\partial h_{ au}}{\partial x_{
ho}}\hat{e}_{ au}$$

希望花这么多时间写这个导师不要骂我偷懒嘿嘿o( \_\_\_\_\_\_)o