

天津大学

本科生毕业设计（论文）



题目：可压缩自由剪切层的稳定性研究

学 院 机械工程学院

专 业 工程力学

年 级 16 本

姓 名 王苗苗

学 号 3016201023

指导教师 董明

独创性声明

本人声明：所呈交的毕业设计（论文），是本人在指导教师指导下，进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本毕业设计（论文）中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。对本毕业设计（论文）所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在论文中作了明确的说明。本毕业设计（论文）原创性声明的法律责任由本人承担。

论文作者签名：

年 月 日

本人声明：本毕业设计（论文）是本人指导学生完成的研究成果，已经审阅过论文的全部内容。

论文指导教师签名：

年 月 日

摘 要

本文采用数值方法对可压缩自由剪切层的线性稳定性进行了系统的研究。选取双曲正切剖面为基本流,在平行流假设下,推导了描述线性失稳的特征值问题。对该特征值问题的数值求解采用基于矩阵 QZ 分解的全局法与基于 Muller 法迭代的局部法。通过全局法,可以得到分布在复空间的特征值谱,它包括离散出现的离散谱和连成连续曲线的连续谱两类。最不稳定的一个或几个连续谱模态是导致转捩或涡对并的主要因素。不同的马赫数下,离散谱表现为亚声速模态、快模态、慢模态和超超模态四种不同的机制,它们在远场表现为不同的渐近形式(衰减、声辐射)。连续谱模态反映剪切层对自由流中声、涡和熵扰动的响应。声波从混合层的一侧入射,则会有透射声波与反射声波出现,表现出剪切层对声波的散射效应。这一过程是符合物理现象的。但混合层中的涡、熵模态连续谱表现出了傅里叶缠绕的非物理现象。这一现象表现为在混合层外势流区域,涡、熵扰动不能自由地出现,而必须缠绕在一起。

关键词: 线性稳定性, 混合层, 特征值问题, 离散谱, 连续谱

ABSTRACT

In this paper, the linear stability of the compressible free shear layer is studied systematically by numerical approaches. The hyperbolic tangent profile is selected as a typical basic flow, and the eigenvalue problem describing linear instability is derived under the parallel-flow assumption. Two methods, a global method based on the QZ decomposition and a local method based on the Muller iterative method, are employed. Use of the global method determines the complex eigenvalue spectra, which includes the discrete modes that appear discretely and the continuous modes that form continuous curves. The most unstable one or several continuous modes are the main factors leading to transition to turbulence or vortex pairing. For different Mach numbers, the instability may belong to four different regimes, i.e. the subsonic mode, the fast mode, the slow mode and the supersonic-supersonic mode, which are different in the far-field asymptotic behavior (attenuation or acoustic radiation). The continuous modes reflect the response of the shear layer to freestream acoustic, vortical and entropy perturbations. If an acoustic wave is incident from one side of the mixing layer, there will be a transmitted acoustic wave penetrating the shear layer and a reflected acoustic wave propagating in the reverse direction, exhibiting the scattering effect of the shear layer on the acoustic wave. This process agrees with the physical phenomenon. However, the vortical and entropy modes in the mixing layer shows a non-physical property of the so-called Fourier entrainment, which indicates that the vortical and entropy perturbations in potential stream could not appear independently.

KEY WORDS: Linear stability theory, Mixing layer, Eigenvalue problem, Discrete spectrum, Continuous spectrum

目 录

第一章 绪论.....	5
1.1 研究背景及意义.....	5
1.2 发展现状.....	6
1.3 本文的研究内容.....	7
第二章 问题建立与求解.....	8
2.1 问题简介.....	8
2.2 控制方程.....	9
2.2.1 有量纲 Navier-Stokes (N-S) 方程组.....	9
2.2.2 方程的无量纲化.....	9
2.3 基本流.....	10
2.4 扰动控制方程 (线性稳定性方程)	11
2.5 数值方法.....	13
2.5.1 边界条件选取.....	13
2.5.2 差分点的选取.....	15
2.5.3 差分格式.....	15
2.5.4 全局法求解.....	18
2.5.5 局部法求解.....	18
2.6 本章小结.....	19
第三章 自由剪切层中的离散谱模态.....	20
3.1 典型亚声速模态.....	20
3.1.1 时间模式.....	20
3.1.2 空间模式.....	22
3.1.3 马赫数影响.....	24
3.1.4 数值结果的验证.....	24
3.2 典型混合 (快、慢) 模态.....	25
3.2.1 空间模式.....	25
3.2.2 马赫数对混合模态的影响.....	28
3.3 超超模态.....	28
3.4 本章小结.....	29

第四章 自由剪切层中的连续谱模态.....	31
4.1 求解方法.....	31
4.1.1 边界条件.....	31
4.2 声模态.....	33
4.2.1 扰动剖面.....	33
4.2.2 透射产生的条件.....	37
4.3 涡模态.....	38
4.4 熵模态.....	45
4.5 本章小结.....	48
第五章 结论与展望.....	49
参考文献.....	50
附 录 A.....	52
附 录 B.....	54
致 谢.....	56

第一章 绪论

1.1 研究背景及意义

自由剪切层流动是工程中常见的流动形式，比如发动机燃烧室内的燃气混合以及喷口外的射流，它的稳定性问题与燃烧室内的流体掺混以及喷口外的噪声辐射有重要的联系。对超声速混合层稳定性的研究对超燃冲压发动机的设计有重要的应用价值。燃烧室内混合层流动的增强掺混主要是通过两种方式实现的。一种是在层流状态下通过促进扰动增长来增加两股流体交界面附近的涡卷起。交界面上的涡可以显著增加上下股流体混合的效率。第二种是促进转捩发生，使燃气实现湍流混合。由于随着马赫数的升高流动变得更加稳定^[1,2]，进而自然转捩所需经历的过程变长，因此对超声速混合层的层流控制有重要的现实意义。

混合层从层流到湍流的转捩过程分四个阶段：（1）感受性阶段，在该阶段外界扰动激发混合层内的失稳模态^[3]；（2）线性失稳阶段，在该阶段小扰动指数增长；（3）非线性转捩阶段，在该阶段扰动累积到有限幅值并出现涡的对并；（4）湍流阶段。

线性稳定性理论是用来描述小扰动在某一组参数下的演化规律。首先把流场写成平均流与小幅值扰动叠加的形式，然后带入 Navier-Stokes (N-S) 方程组，略去非线性项与非平行效应，就可以得到一个齐次线性方程组，即 Orr-Sommerfeld (O-S) 方程。对该系统设置齐次边界条件，就可以得到一个高维特征值问题。如果通过数值方法求解该特征值问题，则可以得到两种类型的复频谱。一种是在复空间内离散出现的，被称为离散谱；另一种可组成复谱空间中连续变化的曲线，因而被称为连续谱。在众多离散谱中，最不稳定的一个或几个离散谱往往是关注的重点，因为它们是快速放大到有限幅值并触发转捩的主要因素。传统上对混合层扰动演化乃至非线性涡对并的分析都是基于离散谱。由于自由剪切层平均流的剖面存在拐点，这种失稳属于 Kelvin-Helmholtz (K-H) 失稳机理。随着对流马赫数的升高，K-H 失稳模态也表现出不同的特性。为了描述 K-H 模态在全参数空间的特性，本文拟采用数值方法对该问题进行系统分析。同时，若自由流中存在声波、涡波和熵波激励，则剪切层内会出现相应的响应。由于自由流中的扰动可以在谱空间连续变化，剪切层对它们的响应恰好对应连续谱。在边界层流动中，Dong & Wu (2013)^[4]与 Wu & Dong (2016)^[5]曾指出，连续谱的涡模态和熵模态的分支并不能真实反映物理问题中的边界层对自由流中的涡、熵

波的响应。这是因为 O-S 方程忽略了基本流的非平行性，这导致了一系列非物理现象的出现。但是，对于自由剪切层流动，尚不清楚涡、熵波是否也有类似的非物理现象，这正是本文的研究目的之一。

1.2 发展现状

20 世纪初，Orr 和 Sommerfeld 先后建立了著名的小扰动线性化方程，亦即 O-S 方程。在平行流假设下，给出了扰动的演化规律。大雷诺数的前提下，对 O-S 方程的求解可借助于渐近方法。O-S 方程提出后，经过二十年左右，Heisenberg 在博士论文中证明了平面 Poiseuille 流在大雷诺数下是不稳定的。Tollmien 和 Schlichting 发展了关于边界层的不稳定理论，利用平行流近似，第一次得到平面剪切流的临界雷诺数。由失稳而产生的波现在被称为 Tollmien-Schlichting 波。1943 年 Tollmien 和 Schlichting 的结果得到了实验的验证。后来 1945 年林家翘^[6]补充了 Heisenberg 的方法，并阐明了粘性对于流动稳定性的双重作用。Lees & Lin(1946)^[7]建立了可压缩剪切层流动的基本的稳定性理论。通过理论分析，Dunn & Lin(1955)^[7]首先指出了三维扰动对剪切流稳定性的重要性。Lessen(1965)^[8]研究了可压缩混合层的亚声速和超声速扰动的时间模式稳定性。Gropengiesser(1969)^[9]也研究了可压缩无粘混合层的稳定性，进行了对马赫数范围从 0 到 3 的空间模式稳定性计算。

Malik (1990)^[10]给出了高效的求解 O-S 方程的算法，其后 Balakuma & Malik(1992)^[11]基于该方法，对超声速边界层中的离散和连续模态进行了系统的研究。Masad & Malik(1995)^[12]给出了直接计算特征值问题某些结果的方式。

对于混合层稳定性的相关研究主要集中于研究可压缩性的影响、研究粘性的作用以及研究三维效应。Ragab(1988)^[1]在研究中发现高马赫数下稳定性会显著增强，并且耗散也会增加。Ragab & Wu(1988)^[13]在研究中指出对于可压缩混合层而言，粘性的稳定性问题在雷诺数大于 1000 的情况下可由无粘 Rayleigh 方程很精确地计算。也就是说，粘性对自由混合层的影响是很小的。同时他们也指出流动的非平行性影响造成的误差是可忽略的。并通过计算得到了最大增长率是由速度比来决定的结论。

Gill(1965)^[14]发现射流有无限多个不稳定模态，这些不稳定模态来源于声波在层内的多次反射。Blumen, Drazin & Billings(1975)和 Drazin & Davey (1977)^[15,16]对可压缩自由剪切层时间模式稳定性进行了研究，发现马赫数在 1 附近时出现了多个不稳定模态。Macaraeg, Streett & Hussani(1988)^[17]采用更准确的基本流假设，也发现了马赫数在 1 附近时的多个不稳定模态。Mack(1990)^[18]用数值求解 O-S 方

程的方法分析了超声速剪切流中的声模态扰动。Jackson & Grosch(1989)^[19]研究了三维无粘可压缩混合层的空间模式稳定性特性，数值计算了当马赫数超过某一特定值时，出现的快模态和慢模态两种不稳定模态，并给出了中性和不稳定波的相速度，指出三维模态和二维模态相比在一定的传播方向有一致的表现，但有更高的增长率。

Balakumar & Malik(1992)^[11]基于可压缩边界层流动，研究了 O-S 方程的连续谱和离散谱。对于超声速自由剪切层，Tam & Burton(1984)^[20]采用渐近理论研究了不稳定模态被声波激发的过程。Dong & Wu(2013)^[4]研究了 Orr-Sommerfeld / Squire 方程的连续谱与自由流涡旋扰动（FSVD）卷入边界层之间的根本区别。结果表明，非平行流效应在自由流中的涡卷入边界层的过程中起着首阶作用。由于 O-S 方程忽略了非平行效应，导致了“傅立叶缠绕”和流向扰动速度在低频时的非正常放大。他们还基于对“edge layer”的分析，给出了符合物理现象的渐近解。Wu & Dong(2016)^[5]把该理论推广到可压缩边界层中，并发现熵波与涡波也发生了缠绕现象。Qin & Dong(2016)^[21]采用直接数值模拟方法，对该渐近解进行了验证。Zhang, Dong & Zhang (2018)^[22]基于该渐近解，研究了旁路转捩过程中二次失稳模态的感受性。

1.3 本文的研究内容

本课题的目的是通过数值计算和理论分析的方法，研究可压缩混合层在宽参数范围内的失稳特性。

本课题的研究内容主要包括：

（1）依照 Malik(1990)^[10]的方法，编写了求解可压缩 O-S 方程的程序。基本方程及数值离散格式在第二章中介绍。

（2）在第三章分析混合层流动的离散谱解失稳特性，展示亚声速模态、快模态、慢模态和超超模态四种完全不同的失稳机制。

（3）在第四章分析混合层流动的连续谱解，包括声、涡和熵模态。进一步的分析表明，声波在入射到剪切层以后会发生散射现象，表现为穿透剪切层的透射和与向着逆方向的反射。分别定义了透射和反射系数来刻画它们的强度。在一定参数范围内，声波不会穿透剪切层。另外，涡、熵模态在所有参数下都不会穿透剪切层，表现为“剪切屏蔽”现象。涡、熵模态表现出如边界层中的傅里叶缠绕现象，而这种非物理现象来自对基本流非平行性的忽略。

第二章 问题建立与求解

2.1 问题简介

剪切层是指由于初始时存在分界，上下部分自由来流存在速度间断而形成的流动。自由剪切层流动是无固壁约束的剪切层流动，射流、混合层流动都是典型的自由剪切层流动。混合层可以视作是两层速度不同的流体被板隔离，在板的尾端相遇后形成的。本文仅以混合层流动为基本流来研究自由剪切层的稳定性特性。

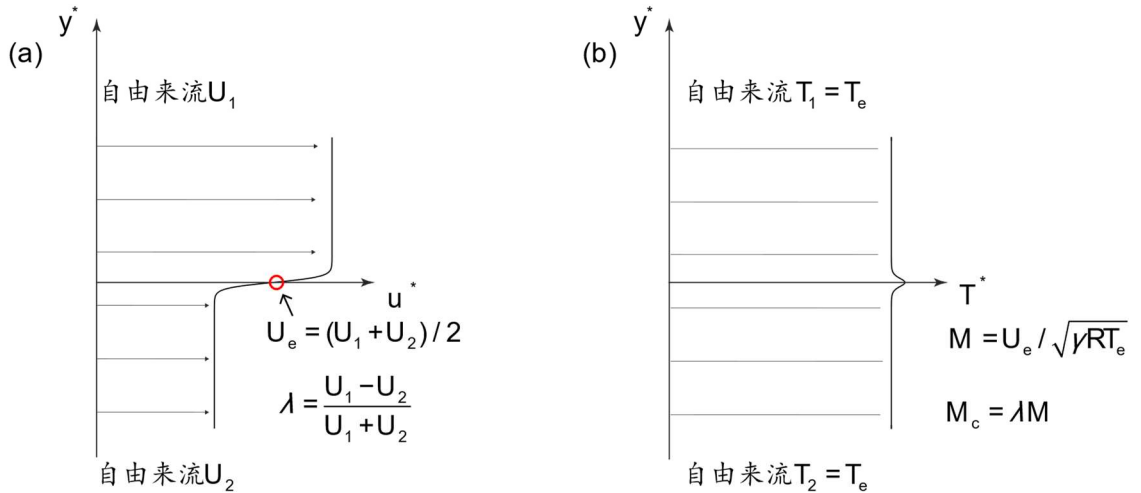


图 2-1 混合层流动示意图

(a) 基本流流向速度剖面 (b) 基本流温度剖面

选取 x^* 方向为流向， y^* 方向为流动的法向。图 2-1 (a) 中， U_1 为 y^* 趋向于正无穷的自由来流速度， U_2 为 y^* 趋向于负无穷的自由来流速度。其中 $U_1 > U_2$ ，记速度比

$$\lambda = (U_1 - U_2) / (U_1 + U_2). \quad (2-1)$$

采用 $U_e = (U_1 + U_2)/2$ 对速度做无量纲化。如图 2-1 (b) 中所示，上下自由来流的温度认为是相同的，即 $T_1 = T_2 = T_e$ 为自由来流温度，本文取 $T_e = 288\text{K}$ 。记 $U(y)$ 为无量纲后的基本流速度， $T(y)$ 为无量纲后的基本流温度。定义 R 为空气的气体常数。定义 γ 是比热容比，视作 1.4。定义马赫数为 $M = U_e / \sqrt{\gamma R T_e}$ ，对流马赫数 $M_c = \lambda M$ 。在 $y^* = 0$ 附近由于上下层流体混合而

导致存在一个速度变化剧烈的区域，需要一个反映这一区域尺度的参数，因此定义半涡厚度为

$$\delta = \frac{U_1 - U_2}{\left| du^* / dy^* \right|_{\max}}, \quad (2-2)$$

其中 U_1, U_2 为上下自由流的来流速度， u^*, y^* 是流向速度和法向坐标。

2.2 控制方程

2.2.1 有量纲 Navier-Stokes (N-S) 方程组

控制方程由直角坐标系下的可压缩连续性方程、动量方程、能量方程和状态方程组成，它们分别为

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*) = 0, \quad (2-3)$$

$$\rho^* \frac{d\mathbf{v}^*}{dt} = -\nabla p^* + \nabla (\lambda^* \nabla \cdot \mathbf{v}^*) + \nabla [\mu^* (\nabla \mathbf{v}^* + \nabla \mathbf{v}^{*T})], \quad (2-4)$$

$$\rho^* c_p \frac{dT^*}{dt} = \nabla \cdot (k^* \nabla T^*) + \frac{dp^*}{dt} + \Phi^*, \quad (2-5)$$

$$p^* = \rho^* R T^*, \quad (2-6)$$

其中 \mathbf{v}^* 为速度矢量、 ρ^* 为密度、 p^* 为压力、 T^* 为温度、 μ^* 为动力学粘度系数、 k^* 为传热系数、 R 为所对应的气体常数、第二粘性系数 $\lambda^* = -2/3 \mu^*$ 。

公式(2-3)(2-4)(2-5)分别为张量形式的连续性方程、动量方程和能量方程，(2-6)为理想气体状态方程。当仅考虑二维流动时，动量方程(2-2)由流向和法向两个方程组成，以 x^* 方向为流向、 y^* 方向为法向。 Φ^* 为粘性耗散，表达式如下：

$$\Phi^* = -\frac{2}{3} \mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + 2 \mu^* \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) + \mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2. \quad (2-7)$$

2.2.2 方程的无量纲化

使用半涡厚度 δ 对长度做无量纲化，无量纲化后 $y = y^* / \delta$ 。温度使用自由来流温度 T_e 来进行无量纲化；密度使用自由来流密度 ρ_∞ 来进行无量纲化；速度使

用自由来流速度的平均 U_e 来进行无量纲化；压力使用自由来流的密度 ρ_e 和 U_e^2 的乘积来进行无量纲化。使用 $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\rho}, \tilde{T}, \tilde{p}$ 代表无量纲化后的物理量，即

$$(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\rho}, \tilde{T}, \tilde{p}) = (\mathbf{v}^* / U_e, \rho^* / \rho_\infty, T^* / T_e, p^* / \rho_\infty U_e^2).$$

动力学粘性系数 μ^* 以自由流的动力学粘性系数 μ_e 进行无量纲化得到无量纲化后的动力学粘性系数 $\tilde{\mu}$ 。传热系数 k^* 通过自由流中的传热系数 k_e 进行无量纲化得到无量纲化后的传热系数 \tilde{k} 。雷诺数 $Re = \rho_\infty U_e \delta / \mu_e$ ，在本文取为 1500。普朗特数 $Pr = C_p \mu_e / k_e$ ，在本文取为 0.72。

无量纲的控制方程组为

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad (2-8)$$

$$\tilde{\rho} \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \{ \nabla (\tilde{\lambda} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot [\tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + \nabla \tilde{\mathbf{v}}^T)] \}, \quad (2-9)$$

$$\tilde{\rho} c_p \frac{d\tilde{T}}{dt} = \frac{1}{Re Pr} \nabla \cdot (\tilde{k} \nabla \tilde{T}) + (\gamma - 1) M^2 \frac{d\tilde{p}}{dt} + \frac{(\gamma - 1) M^2}{Re} \tilde{\Phi}, \quad (2-10)$$

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} R \tilde{T}. \quad (2-11)$$

2.3 基本流

通过对自由剪切层基本流的求解，Lock(1951)给出了混合层的平均流剖面（Lock 剖面）^[23]。在低马赫数和中等的马赫数下，双曲正切函数构成的剖面是对 Lock 剖面的一个很好的近似。Tam&Hu(1988)年用双曲正切函数近似的基本流研究了槽道流中的可压缩混合层的稳定性^[24]。Zhang, Kubota & Dimotakis (1988)也以双曲正切函数作为基本流研究了混合层流动并发现马赫数的升高会使得流动更加稳定^[2]。本文的计算也采用双曲正切函数进行近似。基本流公式如下：

$$U = 1 + \lambda f(y), \quad (2-12)$$

其中 U 为无量纲的平均流速度， λ 由公式(2-1)定义， $f(y) = \tanh(y)$ 。在本文的二维情形下，基本流法向速度 V 和展向速度 W 为 0。此速度剖面满足边界条件

$$U \rightarrow U_1 / U_e \text{ as } y \rightarrow +\infty, \quad U \rightarrow U_2 / U_e \text{ as } y \rightarrow -\infty. \quad (2-13)$$

温度场是可以通过速度场来表达的。由于我们假设上下自由来流的温度比为 1，采用修正的 Crocco-Busemann 关系，得到无量纲的平均流温度表达式如下：

$$T = 1 + \sqrt{Pr} (\gamma - 1) M^2 [(U_1 / U_e - U)(U - U_2 / U_e)] / 2, \quad (2-14)$$

显然，基本流温度满足边界条件

$$T \rightarrow 1 \text{ as } y \rightarrow \pm\infty, \quad (2-15)$$

依据 Sutherland 公式得到

$$\mu = T^{3/2} \frac{1 + C/T_e}{T + C/T_e}, \quad (2-16)$$

其中 $C=110.4K$, T_e 是自由来流温度。图 2-2 给出对流马赫数 $Mc=0.6$ 时的基本流速度、温度以及速度与温度对 y 的导数剖面。定义 p 为基本流压强, ρ 为基本流密度, 采取压力梯度为零的假设, 我们可以得到 $p=1/\gamma M^2, \rho=1/T$ 。定义 μ , k 为平均流的动力学粘性系数和传热系数。

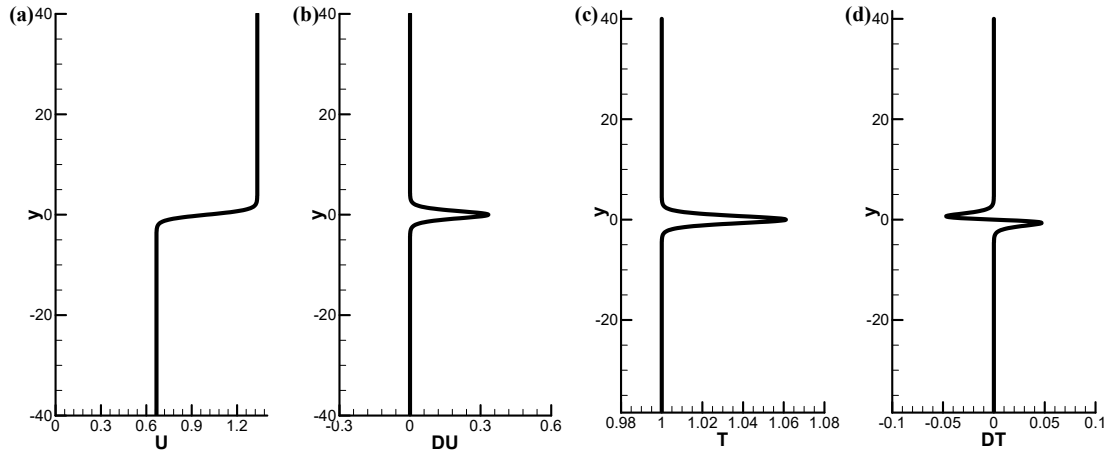


图 2-2 无量纲化后的基本流速度和温度剖面, $M_c=0.6$

(a) 速度剖面 (b) 速度对 y 导数剖面 (c) 温度剖面 (d) 温度对 y 导数剖面

2.4 扰动控制方程（线性稳定性方程）

引入小扰动 u', v', p', T', ρ' 使得

$$[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{T}, \tilde{\rho}, \tilde{w}] = [U, V, p, T, \rho, W] + [u', v', p', T', \rho', w'], \quad (2-17)$$

其中 U, V, W, p, T, ρ 是无量纲化后的基本流物理量。对于热传导系数 \tilde{k} 和动力学粘性系数 $\tilde{\mu}$, 我们引入它们的小扰动 k' 与 μ' 定义为

$$\tilde{k} = k + k', \quad \tilde{\mu} = \mu + \mu', \quad \mu' = T' d\mu / dT, \quad k' = T' dk / dT.$$

忽略高阶小量, 使得方程变为小扰动的线性偏微分方程。观察发现, 方程中系数仅为 y 的函数, 因此可引入行波形式的小扰动。具体形式为

$$[u', v', p', T', w'] = [\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{p}(y), \hat{T}(y), \hat{w}(y)] e^{i(\alpha x - \omega t)} + c.c. \quad (2-18)$$

将上述形式的小扰动代入线性化的 N-S 方程组, 得到线性常微分方程组

$$AD^2\phi + BD\phi + C\phi = 0, \quad (2-19)$$

其中, $D \equiv d/dy$, $\phi = [\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{p}(y), \hat{T}(y), \hat{w}(y)]^T$, A 、 B 、 C 为 5 阶方阵,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2-20)$$

在附录 A 中给出了 B 矩阵和 C 矩阵中的元素 b_{ij} 、 c_{ij} 。进一步, 可以通过引入速度和温度的导数为变量来使方程降阶。对于三维扰动, 可引入变量为

$$\psi = [\hat{u}(y), \frac{d\hat{u}}{dy}, \hat{v}(y), \hat{p}(y), \hat{T}(y), \frac{d\hat{T}}{dy}, \hat{w}(y), \frac{d\hat{w}}{dy}]^T, \quad (2-21)$$

对于二维扰动, 可引入变量为

$$\psi = [\hat{u}(y), \frac{d\hat{u}}{dy}, \hat{v}(y), \hat{p}(y), \hat{T}(y), \frac{d\hat{T}}{dy}]^T, \quad (2-22)$$

其中 \hat{v} 对 y 的导数可以通过连续性方程由其他变量来表达。

最终得到线性小扰动的常微分方程如下:

$$\frac{d\psi}{dy} = \bar{A}\psi, \quad (2-23)$$

其中

$$\bar{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}, \quad (2-24)$$

在附录 B 中给出了 \bar{A} 中的非零元素。

2.5 数值方法

2.5.1 边界条件选取

对于离散谱的计算而言，边界条件是齐次的。对于连续谱的计算而言，边界条件是非齐次的。为了使得连续谱的叙述完整，这里仅给出离散谱的边界条件，连续谱的边界条件将在第四章给出。在无穷远处求解自由流中扰动的方程。由于自由流中各项的梯度很小，因此可以忽略粘性项和热导项。二维动量方程为

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' U' \right) = - \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (2-25)$$

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (2-26)$$

无粘的能量方程为

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + U \frac{\partial T'}{\partial x} + v' \frac{\partial T'}{\partial y} \right) = (\gamma - 1) M^2 \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + U \frac{\partial p'}{\partial x} \right), \quad (2-27)$$

相应的连续性方程为

$$\frac{\gamma M^2}{T} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + U \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + U \frac{\partial T'}{\partial x} + v' \frac{\partial T'}{\partial y} \right) + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0, \quad (2-28)$$

其中 u', v', p', T', w' 代表小扰动， U' 代表 U 对 y 的导数。联立求解可以得到

$$\nabla^2 p' + \frac{T'}{T} \frac{\partial p'}{\partial y} = \frac{M^2}{T} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + U \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{2}{T} U' \frac{\partial v'}{\partial x}. \quad (2-29)$$

由(2-26)化简得

$$\frac{i}{T} (-\omega + U\alpha) \hat{v} = -D\hat{p}, \quad (2-30)$$

代入联立求解后的方程得到

$$D^2 \hat{p} - \alpha^2 \hat{p} + \frac{M^2}{T} (U\alpha - \omega)^2 \hat{p} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} D\hat{p} - 2U' \frac{\alpha}{(U\alpha - \omega)} D\hat{p} = 0. \quad (2-31)$$

为了得到自由流中的边界条件，由于自由流中各项的梯度很小，因此可以忽略粘性项，基本流参数的导数也可以视作 0，因此得到

$$D^2 \hat{p} - \alpha^2 \hat{p} + \frac{M^2}{T} (U\alpha - \omega)^2 \hat{p} = 0, \quad (2-32)$$

解得

$$\hat{p} \rightarrow \exp(\pm \Omega_{\pm} y), \quad (2-33)$$

其中(因为上下边界无量纲的温度为 1，上边界无量纲速度 4/3，下边界无量纲速度 2/3)

$$\Omega_{\pm}^2 = \alpha^2 (1 - M^2 (4/3 - c)^2), \quad (2-34)$$

$$\Omega_-^2 = \alpha^2(1 - M^2(2/3 - c)^2). \quad (2-35)$$

绘制了上下边界的声速随马赫数的变化如图 2-3，当相速度在上（下）边界的声速曲线之外时，上（下）边界就是超声速的边界。当 c 相对上边界的当地速度是超声速时 $\Omega_+^2 < 0$ ，当 c 相对下边界的当地速度是超声速时 $\Omega_-^2 < 0$ 。对于超音速边界，扰动在边界是振荡的。快、慢模态分别在 $y \rightarrow +\infty$ 、 $y \rightarrow -\infty$ 的边界使用超声速的边界条件，另一边使用亚声速边界条件。典型亚声速模态在上下两边界均使用亚声速的边界条件，超超模态在上下两边界均使用超声速的边界条件。

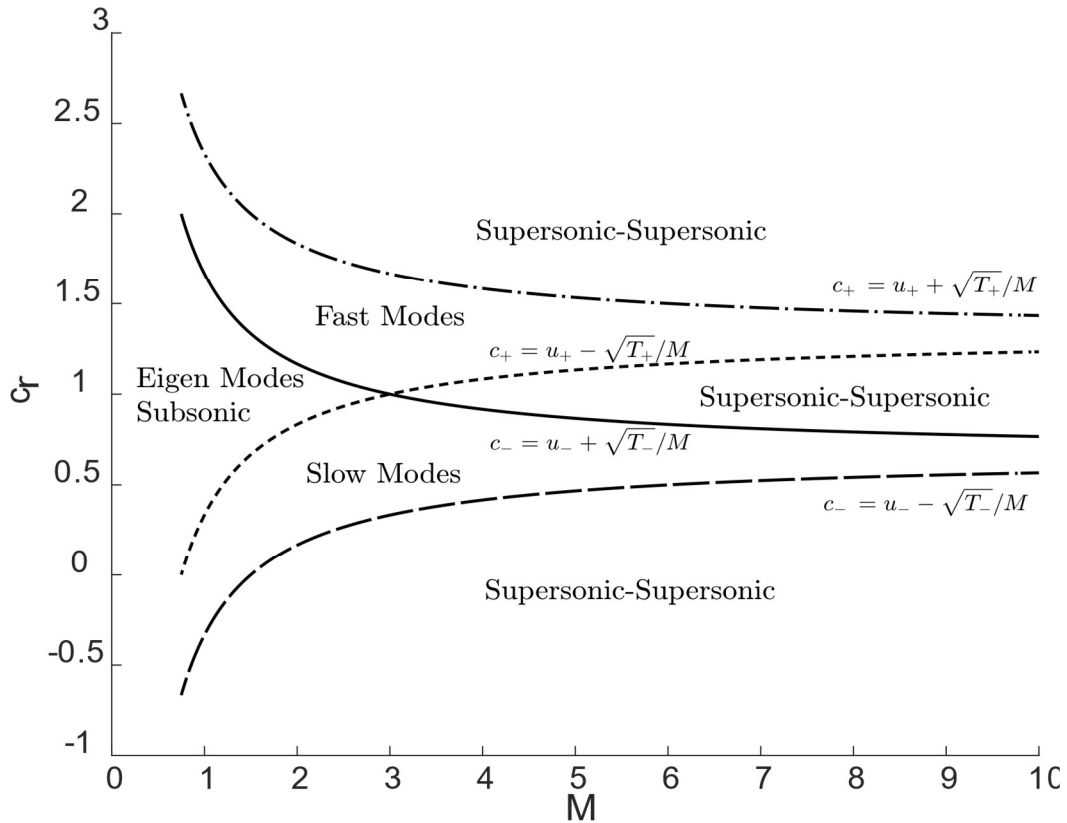


图 2-3 不同马赫数对应上下边界声速曲线

声速曲线公式为

$$c_+ = u_+ \pm \frac{\sqrt{T_+}}{M}, \quad c_- = u_- \pm \frac{\sqrt{T_-}}{M}. \quad (2-36)$$

对于二维扰动上下边界各需要 3 个边界条件。超声速边界的边界条件是

$$k\hat{p} + \frac{i}{T}(U\alpha - \omega)\hat{v} = 0, \quad (2-37)$$

$$k\hat{u} - \frac{d\hat{u}}{dy} = 0, \quad (2-38)$$

$$k\hat{T} - \frac{d\hat{T}}{dy} = 0, \quad (2-39)$$

亚声速边界的边界条件是

$$\hat{u} = 0, \quad (2-40)$$

$$\hat{v} = 0, \quad (2-41)$$

$$\hat{T} = 0. \quad (2-42)$$

2.5.2 差分点的选取

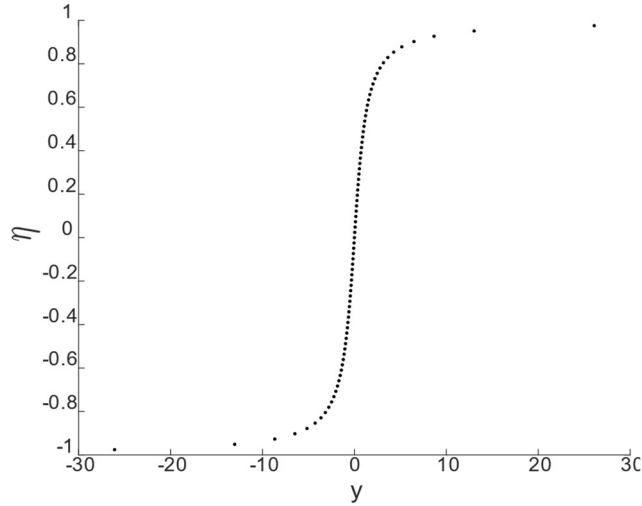


图 2-4 网格点无量纲坐标与实际坐标对比图（81 个网格点）

变网格函数为

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2}\eta\right), \quad (2-43)$$

其中 η 在 -1 到 1 之间均匀变化。设网格点数为 N 。图 2-4 给出 $N=81$ 时网格点的分布。

2.5.3 差分格式

2.5.3.1 四阶精度两点差分格式（4CD）

求解(2-23)使用 Malik(1990)中的两点四阶差分格式^[10],

$$\psi^k - \psi^{k-1} = \frac{h_k}{2} \left(\frac{d\psi^k}{dy} + \frac{d\psi^{k-1}}{dy} \right) - \frac{h_k^2}{12} \left(\frac{d^2\psi^k}{dy^2} - \frac{d^2\psi^{k-1}}{dy^2} \right) + O(h_k^5), \quad (2-44)$$

其中 ψ^k 表示第 k 个网格点上 ψ 的值, h_k 表示第 k 个网格点和第 $k-1$ 个网格点的间距。代入边界条件, 以亚声速模态的边界条件为例,

$$\hat{u}_0 = 0 \quad \hat{v}_0 = 0 \quad \hat{T}_0 = 0, \quad \hat{u}_N = 0 \quad \hat{v}_N = 0 \quad \hat{T}_N = 0, \quad (2-45)$$

得到特征值问题

$$M\Psi = 0, \quad (2-46)$$

其中

$$\Psi = [\psi^0 \quad \psi^1 \quad \psi^2 \quad \dots \quad \psi^N]^T, \quad (2-47)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(I + \frac{h_1}{2}A^0 + \frac{h_1^2}{12}B^0) & (I - \frac{h_1}{2}A^1 + \frac{h_1^2}{12}B^1) & & & & \\ & -(I + \frac{h_2}{2}A^1 + \frac{h_2^2}{12}B^1) & (I - \frac{h_2}{2}A^2 + \frac{h_2^2}{12}B^2) & & & \\ & & \dots & \dots & & \\ & & & -(I + \frac{h_N}{2}A^{N-1} + \frac{h_N^2}{12}B^{N-1}) & (I - \frac{h_N}{2}A^N + \frac{h_N^2}{12}B^N) & \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-48)$$

当求时间模式的特征值时，即给出实数 α ，求复特征值 ω 。当求空间模式的特征值时，即给出实数 ω ，求复特征值 α 。问题归结为找到复特征值 ω 或复特征值 α ，使得

$$|M| = 0. \quad (2-49)$$

2.5.3.2 两阶精度三点差分格式（2FD）

求解(2-19)使用 Malik(1990)中的三点二阶的差分格式^[10]。采用交错网格，在差分半点求解压力，在差分点求解其它的物理量。

在差分方程中，由于初始方程中对 y 的导数变为了对 η 的导数，因此需要引入坐标变换的参数：

$$\begin{cases} f_1 = \frac{d\eta}{dy} \cdot \frac{d\eta}{dy} = \frac{4}{\pi^2 (\tan(\pi\eta/2))^2 + 1}, \\ f_2 = \frac{d\eta}{dy} \cdot \frac{d}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dy} \right) = -\frac{4 \tan(\pi\eta/2)}{\pi (\tan(\pi\eta/2))^2 + 1}, \\ f_3 = \frac{d\eta}{dy} = \frac{2}{\pi (\tan(\pi\eta/2))^2 + 1}. \end{cases} \quad (2-50)$$

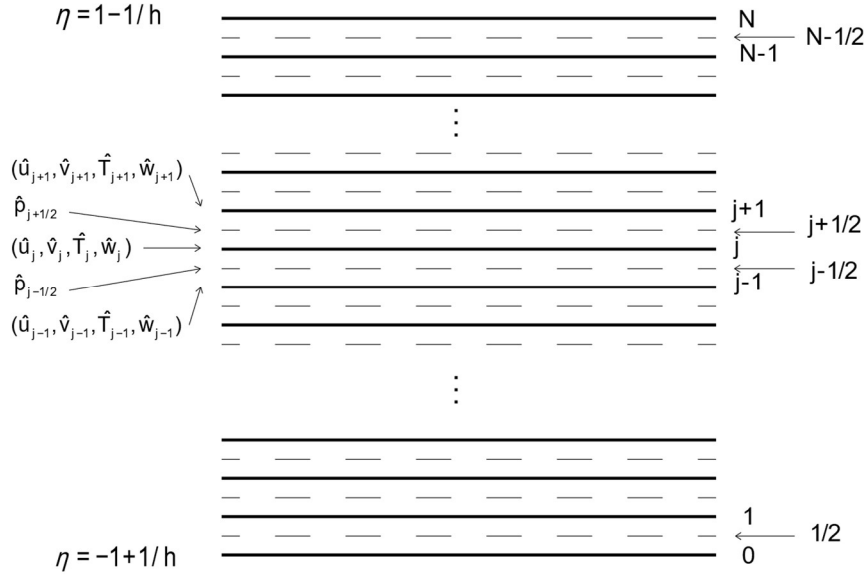


图 2-5 交错网格示意图

Malik(1990)的二阶三点差分格式为

$$f_1 A_j \left[\frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta \eta^2} \right] + d_1 [(f_2 A_j + f_3 B_j) \left(\frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2\Delta \eta} \right) + C_j \phi_j] + d_2 [f_3 B_j \left(\frac{\phi_{j+1/2} - \phi_{j-1/2}}{\Delta \eta} \right) + C_j \left(\frac{\phi_{j+1/2} + \phi_{j-1/2}}{2} \right)] = 0 \quad j=1 \dots N-1 \quad (2-51)$$

$$f_3 B_{j+1/2} \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta \eta} + C_{j+1/2} \phi_{j+1/2} = 0 \quad j=1 \dots N, \quad (2-52)$$

方程(2-51)中的 d_1 作为变量 $\hat{u}, \hat{v}, \hat{T}, \hat{w}$ 的系数时取 1，作为变量 \hat{p} 的系数时取 0； d_2 作为变量 $\hat{u}, \hat{v}, \hat{T}, \hat{w}$ 的系数时取 0，作为变量 \hat{p} 的系数时取 1。

使用亚声速的边界条件时，即

$$\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{T}, \hat{w}\}_0 = 0, \quad (2-53)$$

$$\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{T}, \hat{w}\}_N = 0. \quad (2-54)$$

根据网格，给出所有差分变量的排列如下

$$\Psi = [\psi_0^{\text{tr}}, \hat{p}_{1/2}, \dots, \psi_{j-1}^{\text{tr}}, \hat{p}_{j-1/2}, \psi_j^{\text{tr}}, \hat{p}_{j+1/2}, \psi_{j+1}^{\text{tr}}, \dots, \hat{p}_{N-1/2}, \psi_N^{\text{tr}}]^{\text{tr}}, \quad (2-55)$$

其中 tr 上标代表转置， $\psi_j = [\hat{u}_j, \hat{v}_j, \hat{T}_j, \hat{w}_j]^{\text{tr}}$ 。

最终得到差分方程

$$M\Psi = 0. \quad (2-56)$$

2.5.4 全局法求解

对于时间模式，可以把特征值问题(2-23)中的系数矩阵 \bar{A} 写成 $\bar{B} + \omega \bar{C}$ 的形式，其中 \bar{B} 和 \bar{C} 与 ω 无关。则(2-23)可写成

$$(d/dy - \bar{B})\psi = \omega \bar{C}\psi, \quad (2-57)$$

差分后得到方程(2-56)，差分矩阵 $M = M_1\omega + M_0$ ，这是一个广义特征值问题。我们可以将(2-56)变换为

$$-M_1^{-1}M_0\Psi = \omega\Psi, \quad (2-58)$$

把该系统化成常规特征值问题。然后采用 Matlab 中的 eig 函数，求解特征值问题。

对于空间模式，(2-57)变成

$$(d/dy - \bar{B}_1)\psi = (\alpha \bar{C}_1 + \alpha^2 \bar{C}_2)\psi, \quad (2-59)$$

差分后得到方程(2-56)，差分矩阵 $M = \bar{M}_2\alpha^2 + \bar{M}_1\alpha + \bar{M}_0$ 。我们需要引入 $\Psi' = [\Psi, \alpha\Psi]^T$ ，将(2-56)化为

$$\left(\begin{bmatrix} \bar{M}_0 & \bar{M}_1 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & \bar{M}_2 \\ -I & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \Psi' = 0, \quad (2-60)$$

进而把该系统化成常规特征值问题。然后采用 Matlab 中的 eig 函数，求解特征值问题。

全局求解可以得到离散后方程的所有特征值。计算量大，但可以在对模态一无所知的情况下进行。

2.5.5 局部法求解

求解时间模式特征值问题的本质就是要在给定 α 的情况下找到复 ω ，使得(2-49)得到满足；而求解空间模式问题时需要在给定 ω 下找到满足(2-49)的复 α 。我们还可以采用 Muller 法对以上问题迭代求解。

以空间模式为例，在给定 ω 下，我们首先猜一个比较接近特征值解的复 α ，记作 α_1 。然后对它进行摄动，得到 $\alpha_2 = \alpha_1 + \epsilon$ ， $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\epsilon$ ，其中 ϵ 为小量。以 M 的行列式值作为 Muller 法的目标函数，并使用二次函数逼近 0 点。分别将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 代入计算 M 的行列式值。通过三个等式，反解得到以 α 为自变量的二次方程的系数。求解二次方程得到新的 α_1 值，同样进行摄动得到 α_2, α_3 。迭代求解，直至得到的 α_1 稳定。局部法通常需要给出比较合适的初值，只有在知道所求特征值的大概范围时才可以采用。我们在 2FD 全局求解结果的基础上使用 4CD 进行局部求解，通过一定的迭代优化得到更加准确的特征值。

2.6 本章小结

本章详细介绍了混合层的线性稳定性问题的求解方法。首先对混合层流动的特征进行了介绍，之后推导了线性稳定性的控制方程，使用混合层流动的基本流和计算域，引入二阶三点差分格式(2FD)和四阶两点差分格式(4CD)。给出了亚声速边界和超声速边界的边界条件。给出全局求解和局部求解两种求解途径，并比较了两种途径的特点。连续谱的计算在本章的计算格式和方法基础上采用了非齐次的边界条件，会在第四章给出。

第三章 自由剪切层中的离散谱模态

由(2-36)可知，根据马赫数和相速度不同，可压缩自由剪切层包括亚声速模态、快模态、慢模态和超超模态四类不同的模态。本章求解离散后得到的时间模式特征值问题或空间模式特征值问题(2-49)、(2-56)，以展示不同离散模态的特征。

3.1 典型亚声速模态

3.1.1 时间模式

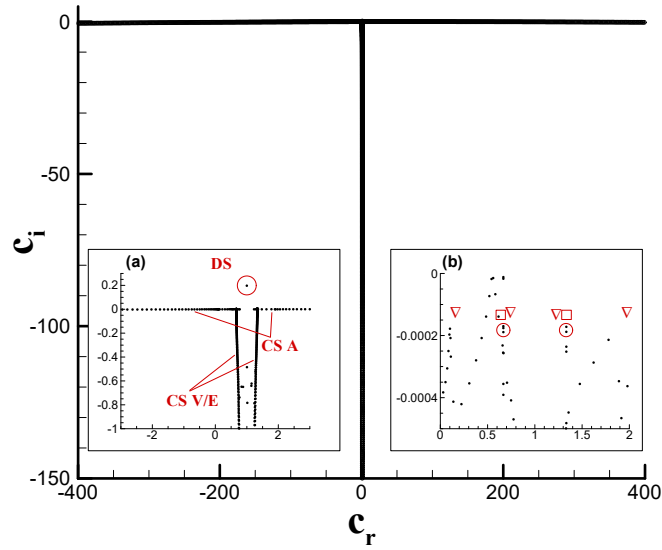


图 3-1 时间模式全局解的复相速度，波数 $\alpha=0.1$ ，对流马赫数 $M_c=0.6$ 速度比 $\lambda=1/3$ ，网格点数 1001。其中子图(a)与(b)是对相速度谱的局部放大，图中 DS 表示离散谱（discrete spectrum），CS 表示连续谱（continuous spectrum），A、V 和 E 分别表示声模态（acoustic）、涡模态（vortical）和熵模态（entropy），(b)中三角形、正方形、圆形分别代表在下一章中计算的声波、涡波、熵波复相速度

若波数 α 给定实数，则可计算出复频率 $\omega = \omega_r + i\omega_i$ （或复相速度 $c = c_r + ic_i$ ， $\omega = \omega / \alpha$ ），其虚部表示时间增长率。采用 2.5.4 介绍的全局特征值求解方法，计算得到给定波数下的复相速度。图 3-1 展示了 $\alpha=0.1$ 、对流马赫数 $M_c=0.6$ 、速度比 $\lambda=1/3$ 的相速度谱。图中存在一个离散的不稳定解（ $\omega=0.100+0.0197i$ ），它被称为离散谱。由于它的相速度几乎为 1，由公式(2-36)可知它对应于自由剪切层中

的亚声速模态。此外，在 $c_i < 0$ 的区域内存在四支连续谱。其中两支从 $c_r = 4/3$ 和 $2/3$ 出发（分别对应上下两股自由流速度），随着 c_i 的减小向 $c_r = 1$ 靠近。它们对应于第四章讨论的涡模态（vortical continuous mode）和熵模态（entropy continuous mode）。另外两支的相速度分别随着 c_i 的减小趋于正负无穷，它们对应于第四章讨论的声模态。

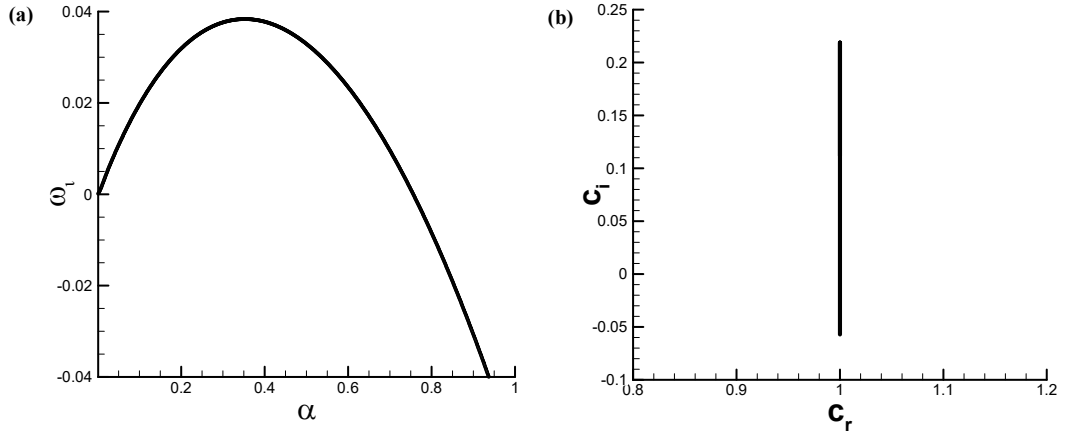


图 3-2 时间模式特征值计算结果，对流马赫数 $M_c = 0.6$ 速度比 $\lambda = 1/3$

(a) 增长率随波数变化曲线 (b) 复相速度

针对最不稳定的离散谱模态，图 3-2 (a) 展示了对流马赫数 $M_c = 0.6$ ，速度比 $\lambda = 1/3$ 的参数条件下亚声速模态的增长率 ω_i 随波数的变化。时间模式增长率在 $\alpha = 0.352$ 时出现极大值。当 $\alpha < 0.352$ 时，增长率随着 α 的减小而减小，并在 α 趋于 0 时趋于 0。当 $\alpha > 0.352$ 时，增长率随着 α 的增大而减小，并在 $\alpha = 0.756$ 时为 0。该波数称为亚声速模态的中性波数，在 $\alpha > 0.756$ 时，扰动是稳定的。该参数下的复相速度如图 3-2 (b) 所示。这些模态的相速度实部 c_r 都是 1。由公式 (2-36) 可知，它们均属于亚声速模态。

图 3-3 给出了 $\alpha = 0.352$ （它对应的复频率为 $\omega = 0.3520 + 0.0385i$ ）的特征函数。扰动能量集中在 $y = 0$ 附近，而在无粘自由流中趋于 0。

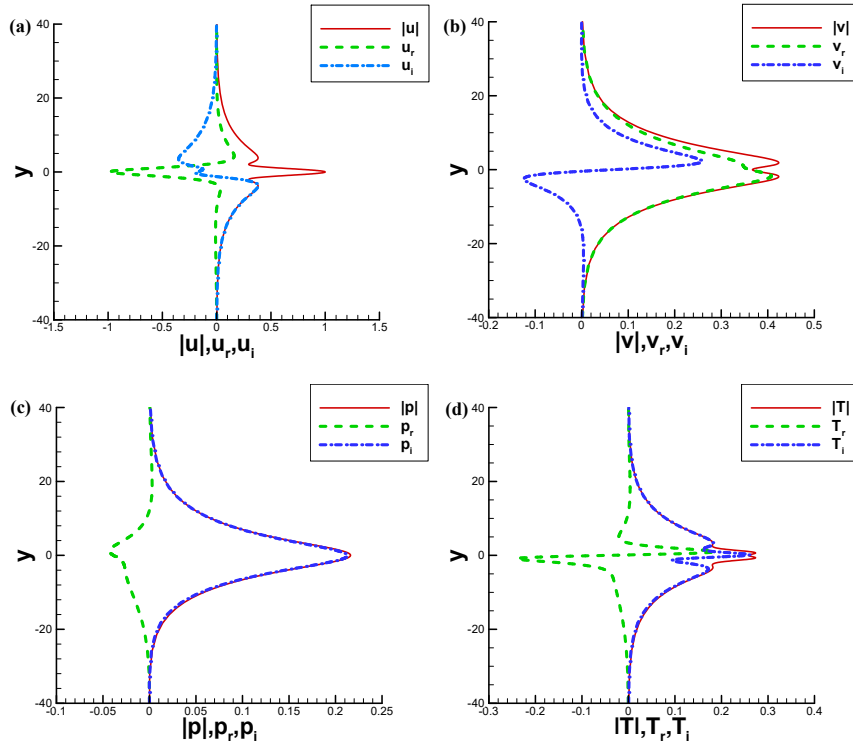


图 3-3 时间模式下 $M_c=0.6, \lambda=1/3, \alpha=0.3520, \omega=0.3520+0.0385i$ 的特征函数
(a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

3.1.2 空间模式

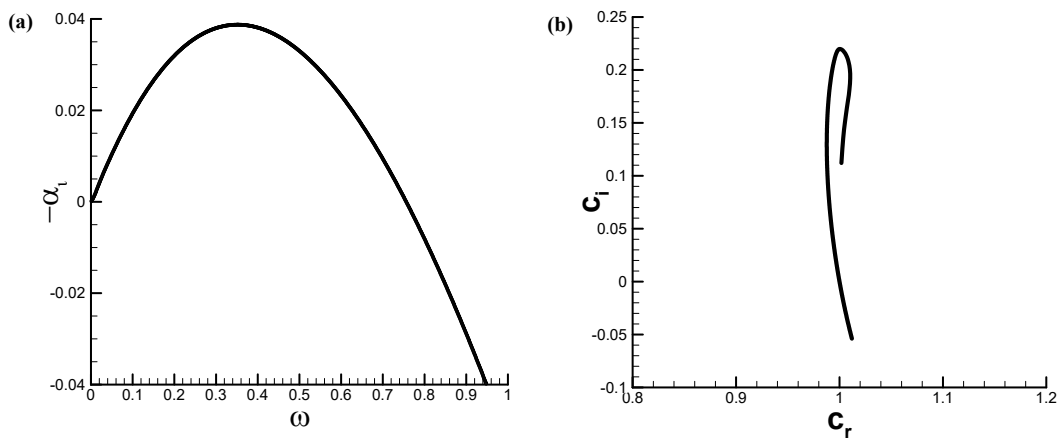


图 3-4 空间模式特征值计算结果，对流马赫数 $M_c=0.6$ 速度比 $\lambda=1/3$
(a) 增长率 $-\alpha_i$ 随 ω 的变化曲线 (b) 复相速度

若频率 ω 给定实数，则可计算出复波数 $\alpha = \alpha_r + \alpha_i$ （或复相速度 $c = c_r + ic_i$ ），其虚部表示空间增长率。针对最不稳定的离散谱模态，图 3-4（a）展示了对流马赫数 $M_c=0.6$ ，速度比 $\lambda=1/3$ 的参数条件下亚声速模态的空间增长率 $-\alpha_i$ 随频率的变化。增长率在 $\omega=0.352$ 时出现极大值。当 $\omega<0.352$ 时，增长率随着 ω 的减小而减小，并在 ω 趋于 0 时趋于 0。当 $\omega>0.352$ 时，增长率随着 ω 的增大而减小，并在 $\omega=0.756$ 时为 0。该频率称为亚声速模态的中性频率。在 $\omega>0.756$ 时，扰动是稳定的。该参数下的复相速度如图 3-4（b）所示。这些模态的相速度实部 c_r 都接近 1，由公式(2-36)可知，它们均属于亚声速模态。

给出了 $\omega=0.352$ （它对应的复波数为 $0.3520-0.0386i$ ）的特征函数如图 3-5，四个子图分别表示 u, v, p, T 的特征剖面。在上下边界扰动很快衰减，不存在振荡的现象，因为这是典型亚声速模态的特征函数。扰动能量集中在 $y=0$ 附近，而在无粘自由流中趋于 0。由于图 3-5 与 3-3 工况的频率和波数的非常非常接近（它们的增长率满足 Gaster 变换），二者给出的特征函数也几乎相同。

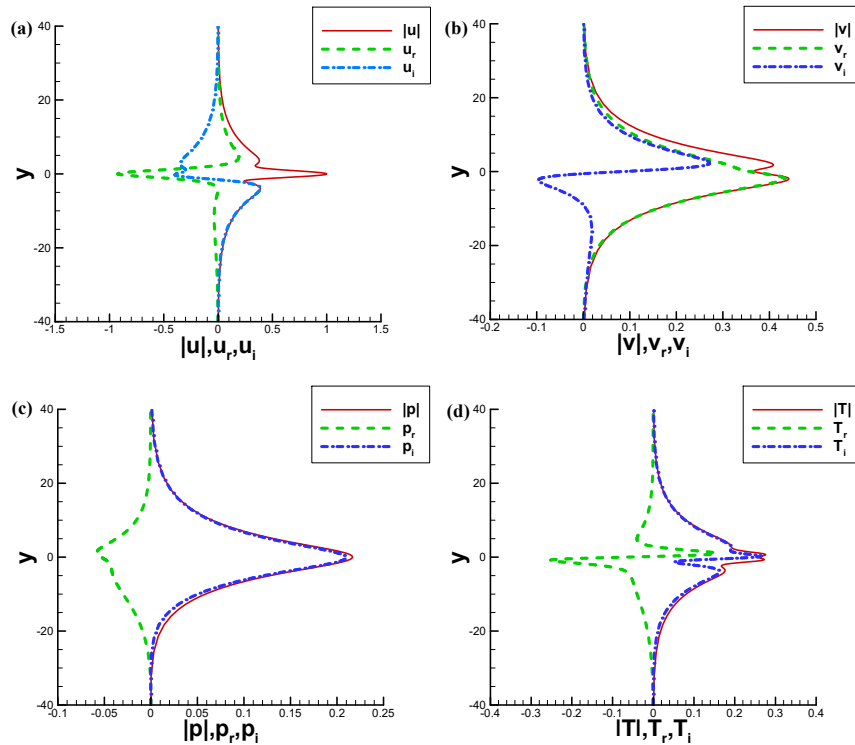


图 3-5 空间模式下 $M_c=0.6, \lambda=1/3, \alpha=0.352-0.0386i, \omega=0.3520$ 的特征函数

(a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

3.1.3 马赫数影响

为了研究对流马赫数对典型亚声速模态的影响,绘制了 $\lambda=1/3$ 空间模式不同对流马赫数下增长率随频率变化曲线如图 3-6。不同曲线代表不同对流马赫数,可以看出随对流马赫数增加,不稳定的频率范围逐渐变小,也就是中性频率变小;同时,随对流马赫数的增加,最大增长率(曲线最高点)逐渐降低。

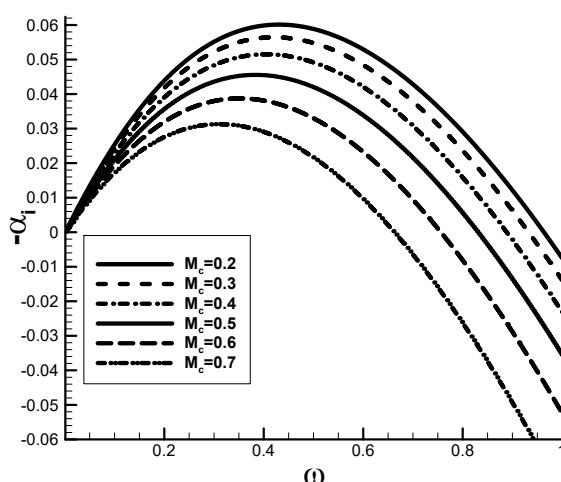


图 3-6 空间模式不同对流马赫数下增长率随频率变化曲线, $\lambda=1/3$

3.1.4 数值结果的验证

为了和已有文献^[25]进行比较,计算了在对流马赫数 $M_c=0.003$ 、0.600、0.950 时某些频率下的空间模式特征值 α 。表 3-1 中第三列为求得的给定的对流马赫数和频率下的空间模式特征值 α , 第四列为已有文献中结果。对比可知,在二维扰动前提下, M_c 为 0.003、0.600、0.950 时本文求得的结果与文献中给出的结果均吻合。

表 3-1 二维空间模式特征值计算结果对照

M_c	ω	α	$\alpha^{[25]}$
0.003	0.440	0.440-0.0632i	0.440-0.0632i
0.600	0.350	0.350-0.0387i	0.350-0.0387i
0.950	0.150	0.150-0.0117i	0.150-0.0117i

3.2 典型混合（快、慢）模态

3.2.1 空间模式

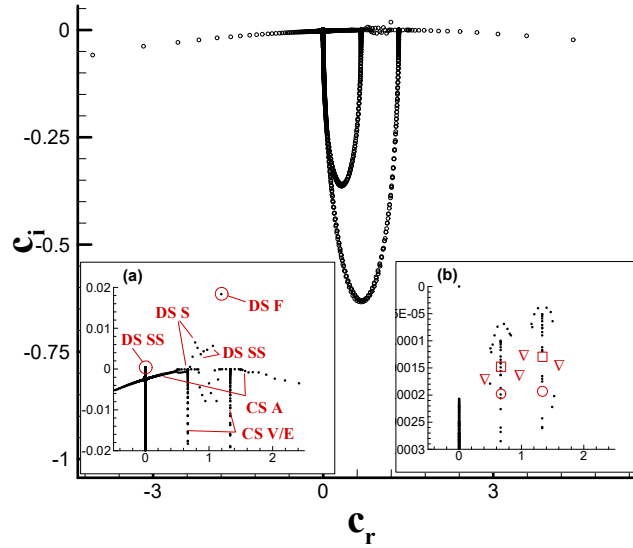


图 3-7 空间模式全局解的复相速度，频率 $\omega=0.1$ ，对流马赫数 $M_c=0.6$ ，速度比 $\lambda=1/3$ ，网格点数 1001，其中子图(a)与(b)是对相速度谱的局部放大，图中 DS 表示离散谱（discrete spectrum），F、S 和 SS 分别表示快模态(fast mode)、慢模态(slow mode)和超超模态(supersonic-supersonic mode)，CS 表示连续谱（continuous spectrum），A、V 和 E 分别表示声模态（acoustic）、涡模态（vortical）和熵模态（entropy），(b)中使用三角形、正方形、圆形分别代表在下一章中计算得到的声波、涡波、熵波复相速度

若频率给定为实数，则可计算出复波数 $\alpha = \alpha_r + \alpha_i$ （或复相速度 $c = c_r + ic_i$ ），其虚部表示空间增长率。采用全局特征值方法，计算得到给定波数下的复相速度。图 3-7 展示了 $\omega=0.1$ ，对流马赫数 $M_c=2$ 的计算结果。图中的特征值有稳定的（增长率 $-\alpha_i < 0$ ），也有不稳定的（增长率 $-\alpha_i > 0$ ）。通过全局求解我们得到了所有的特征值。而由于这些特征值的边界条件是在上下边界扰动衰减为 0，因此当计算域足够大时，可以得到在一定的范围内衰减的扰动。因此采取亚声速模态边界条件进行全局求解不仅可以得到亚声速模态的结果，还可以得到混合模态的结果和超超模态的结果。得到了相速度实部趋近于 0 的两支，这两支是不符合 $\alpha_i^2 < \alpha_r^2$ 的结果，是不符合物理规律的。除了它们以外，可以看到图中明显有几个分支，这些分支和连续谱中的涡波、熵波、声波存在对应关系。左右的两支和声波对应，中间的一支和涡波、熵波对应。对于连续谱的分析将在第四章中给出。上边界为超声速边界，下边界为亚声速边界的模态被称为慢模态；而下边界为超声速边界、

上边界为亚声速边界的模态被称为快模态。由于上下边界的性质不同，这两种模态也被称为混合模态。

典型混合模态结果是使用局部方法迭代求解方程(2-23)得到的。慢模态上边界使用超声速边界条件(2-37)(2-38)(2-39)，下边界使用亚声速边界条件(2-40)(2-41)(2-42)。快模态相反，上边界使用亚声速边界条件(2-40)(2-41)(2-42)，下边界使用超声速边界条件(2-37)(2-38)(2-39)。

图 3-8(a)展示了 $M_c=2$ 快模态和慢模态空间模式最大增长率随频率的变化。快模态和慢模态的增长率随频率的变化趋势都是先增加后减小。慢模态在 $\omega=0.0786$ 时达到最大增长率，快模态在 $\omega=0.1103$ 时达到最大增长率，慢模态的最大增长率 ($-\alpha_i=0.0014$) 比快模态 ($-\alpha_i=0.0009$) 要大。慢模态的中性频率 ($\omega_N=0.1619$) 比快模态 ($\omega_N=0.2370$) 要大。图 3-8 (b) 为快模态和慢模态的复相速度，它们与快、慢模态的复相速度要求(2-36)吻合。

给出了 $\omega=0.1$ 的快模态（它对应的复波数为 $0.0849 - 0.000960i$ ）和慢模态（它对应的复波数为 $0.122 - 0.00132i$ ）的特征函数分别如图 3-9 和图 3-10。可以看出，快模态向下边界辐射声波；而在上边界很快衰减，没有辐射声波。慢模态向上边界辐射声波；而在下边界很快衰减，没有辐射声波。观察到快模态 T 扰动的特征函数最大幅值比 u 扰动特征函数最大幅值高了一个量级左右，而慢模态 T 扰动的特征函数最大幅值和 u 扰动特征函数最大幅值量级相当。以各自的 u 扰动最大幅值为归一化指标，慢模态的 v 扰动最大幅值和 p 扰动最大幅值比快模态的低一个量级左右。

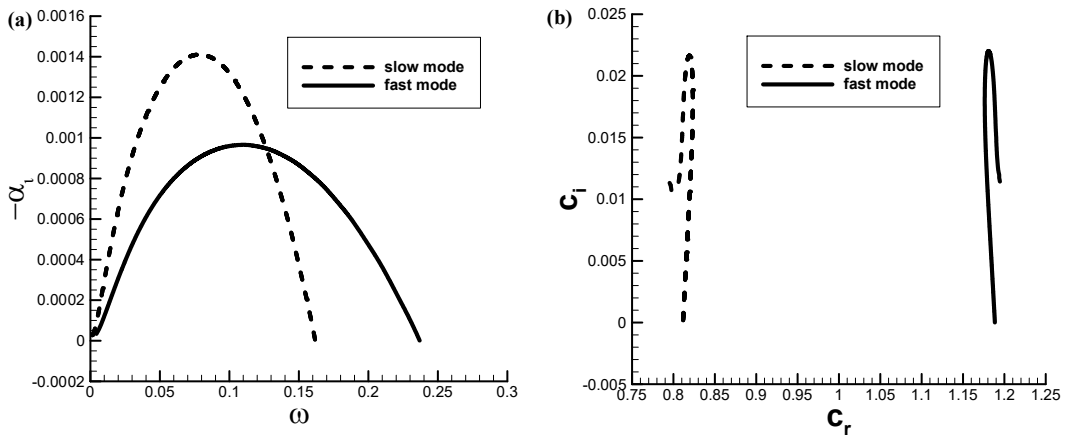


图 3-8 快模态和慢模态特征值结果，对流马赫数 $M_c=2$ 速度比 $\lambda=1/3$

(a) 增长率 $-\alpha_i$ 随 ω 的变化曲线 (b) 复相速度

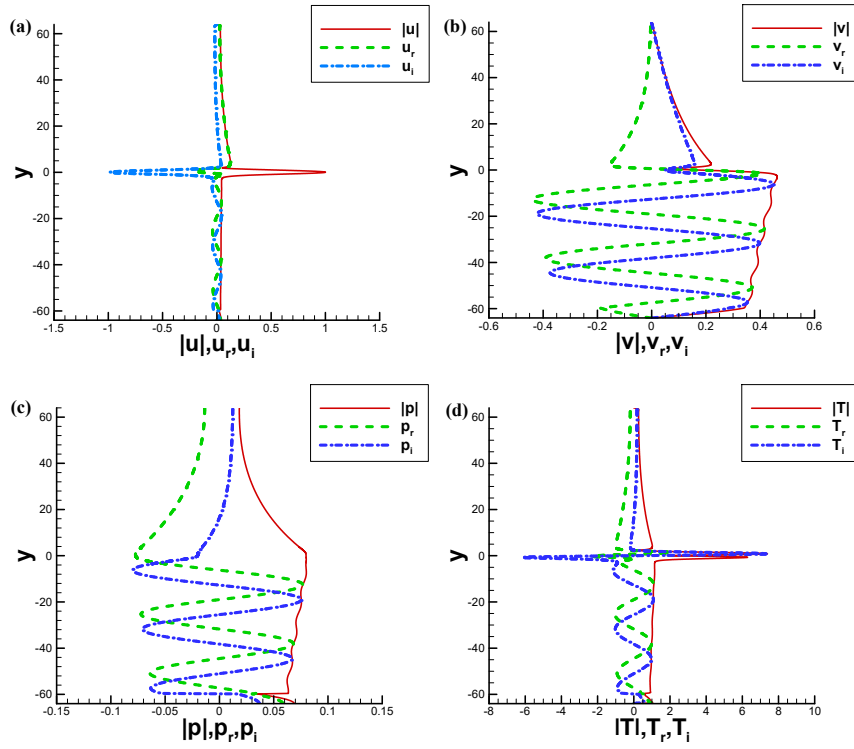


图 3-9 快模态, $\omega=0.1, \alpha=0.0849-0.000960i$ 的特征函数, 对流马赫数 $M_c=2$

(a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

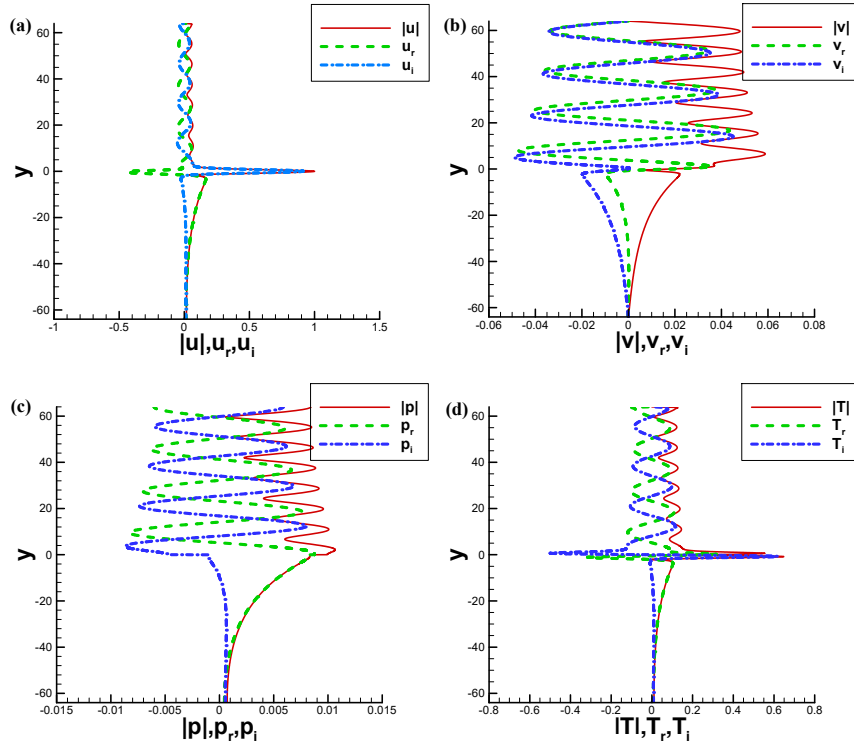


图 3-10 慢模态对流马赫数 $M_c=2$, $\omega=0.1, \alpha=0.122-0.00132i$ 的特征函数

(a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

3.2.2 马赫数对混合模态的影响

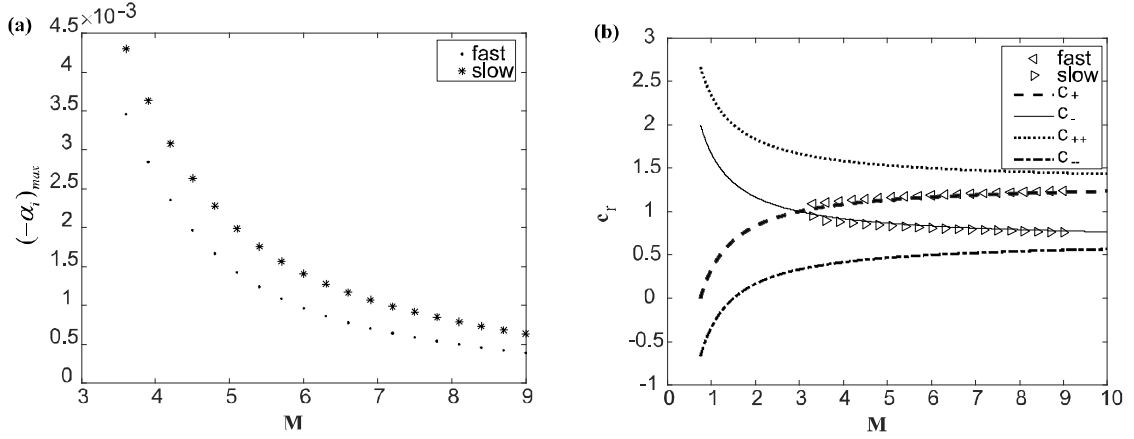


图 3-11 快慢模态特征值随马赫数变化, $\lambda = 1/3$

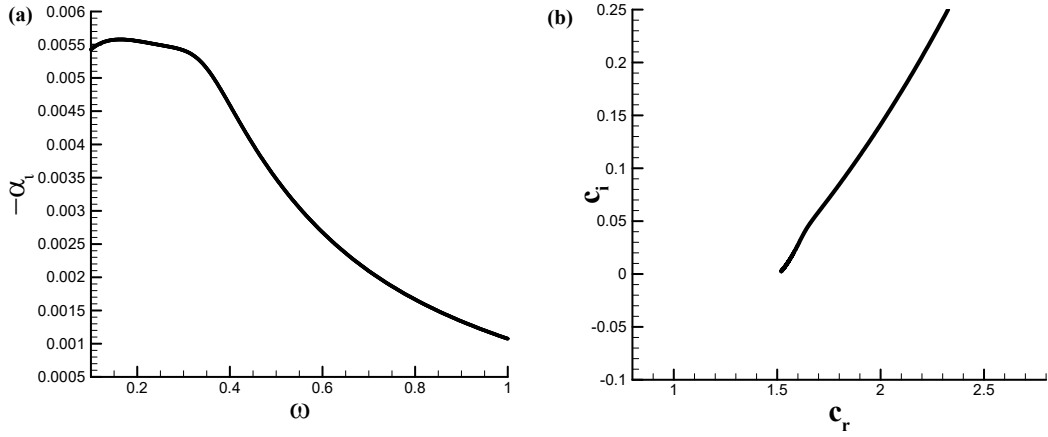
(a) 最大增长率随马赫数变化曲线,其中点和星分别表示快模态 (fast) 和慢模态 (slow) 的最大增长率 (b) 中性相速度实部随马赫数变化, c_{++} 代表相对上自由流比当地速度快的声速曲线, c_{+-} 代表相对上自由流比当地速度慢的声速曲线, c_{-+} 代表相对下自由流比当地速度快的声速曲线, c_{--} 代表相对下自由流比当地速度慢的声速曲线, 左向三角形代表快模态 (fast) 的相速度, 右向三角形代表慢模态 (slow) 的相速度。

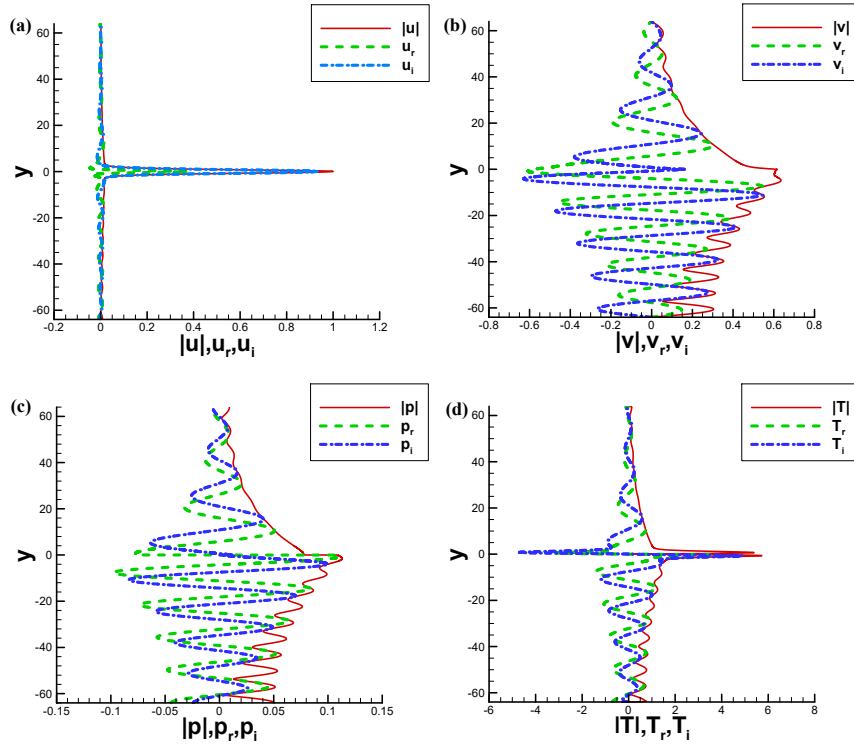
为了研究马赫数对典型混合模态的影响, 绘制了图 3-11 (a) 最大增长率随马赫数变化曲线和图 3-11 (b) 中性相速度实部随马赫数变化曲线。由图 3-11 (a) 我们可以看出随马赫数的增加, 最大增长率逐渐减小, 同时快模态的最大增长率始终比慢模态的最大增长率要小。由图 3-11 (b) 可以看出中性相速度接近于声速线。通过计算结果, 还发现在计算的范围内在同一马赫数下的快模态和慢模态中性点的波数是一致的, 快模态的中性频率始终比慢模态要大。

3.3 超超模态

上下边界均为超声速边界(2-36)的模态被称为超超模态, 超超模态的结果是使用局部法迭代求解方程(2-23)得到的。超超模态上下边界均使用超声速边界条件(2-37)(2-38)(2-39)。

在图 3-12 (a) 中展示了 $M_c=2$ 超超模态的空间模式最大增长率 $(-\alpha_i)$ 随频率的变化曲线 (此处没有完整地给出特征值的计算结果, 也可能有多组超超模态的解)。图 3-12 (b) 为复相速度曲线, 由(2-36)可知, 它属于超超模态。如图 3-13 给出了 $\omega=0.1$ (对应的特征值 $\alpha=0.0361 - 0.00543i$) 的特征函数。扰动向上下边界向远场辐射声波, 且声波幅值以一定的衰减率减小。。在足够远的地方可以看做扰动衰减到 0, 这也是之前的全局求解可以得到超超模态解的原因。


 图 3-12 对流马赫数 $M_c=2$, $\lambda=1/3$, 超超模态特征值结果

 (a) 增长率 $-\alpha_i$ 随 ω 的变化曲线 (b) 复相速度

 图 3-13 超超模态对流马赫数 $M_c=2$, $\lambda=1/3$, $\omega=0.1$, $\alpha=0.0361-0.00543i$ 的特征函数 (a)

u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

3.4 本章小结

本章采用第二章中的数值格式，求解特征值问题，得到并分析结果。对于亚声速模态时间模式和空间模式的问题，求解特征值和特征剖面，说明了马赫数的

升高可以使得流动更加稳定。并和已有文献的结果进行了对比证明了本文结果的正确性。对于混合模态空间模式的问题，也求解了特征值和特征剖面，给出了最大增长率随对流马赫数的变化和中性点相速度实部的变化曲线。对于超超模态给出了特征值和特征剖面。同时给出了 $M_c=0.6$ 的时间模式和 $M_c=2$ 的空间模式全局计算结果，对全局解中涉及到的连续谱内容进行了简要解释，将在下章给出连续谱的具体结果。

第四章 自由剪切层中的连续谱模态

4.1 求解方法

本章对连续谱模态进行研究。由图 3-1 和图 3-7 可知，自由剪切层中除了存在离散谱以外，还存在连续谱。后者对应自由剪切层对外界强迫的响应。由于扰动是由自由边界的强迫产生的，所以其色散关系不是由剪切层决定的，而是由自由流中的声波、涡波和熵波决定的。因而，连续谱模态的控制方程仍然是可压缩 O-S 方程(2-23)，但它所满足的边界条件不再是(2-37)、(2-38)、(2-39)或(2-40)、(2-41)、(2-42)，而是需要通过分析自由流中的扰动特性来得到。

4.1.1 边界条件

由于自由剪切层包含上下两股自由流，强迫可以分别由上下两个边界引入。自由流温度、密度分别为 T_e 、 ρ_e 。记 U_f 、 T 、 ρ 为某一自由流边界的无量纲化后速度、温度、密度， M_f 为某一自由流边界的来流的马赫数。

上边界自由来流速度为 U_1 ，取 $\lambda=1/3$ ，对上边界自由流

$$U_f = 1 + \lambda = \frac{4}{3}, \quad T=1, \quad \rho=1, \quad M_f = \frac{U_1}{\sqrt{\gamma R T_e}} = \frac{U_1 M}{U_e} = \frac{U_f M_c}{\lambda} = 4M_c, \quad (4-1)$$

下边界自由流自由来流速度为 U_2 ，取 $\lambda=1/3$ ，对下边界自由流，

$$U_f = 1 - \lambda = \frac{2}{3}, \quad T=1, \quad \rho=1, \quad M_f = \frac{U_2}{\sqrt{\gamma R T_e}} = \frac{U_2 M}{U_e} = \frac{U_f M_c}{\lambda} = 2M_c, \quad (4-2)$$

当研究上自由流扰动强迫时令这些物理量取上边界的值，研究下自由流扰动强迫时令这些物理量取下边界的值即可。

令频率为 ω 、流向波数为 k_x 的扰动为

$$\phi(y)e^{i(k_x x - \omega t)} + c.c., \quad (4-3)$$

其中， ϕ 为 $[\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{p}(y), \hat{T}(y)]^T$ 。把(4-1)和(4-3)带入方程(2-19)，则可得到

$$\hat{u}'' + \frac{1}{3}ik_x \hat{v}' + \hat{u}[-i\text{Re}(U_f k_x - \omega) - \frac{4}{3}k_x^2] - ik_x \text{Re} \hat{p} = 0, \quad (4-4)$$

$$\hat{v}'' + \frac{1}{4}ik_x \hat{u}' - \frac{4}{3}\text{Re} \hat{p}' + \hat{v}[-\frac{3}{4}i\text{Re}(U_f k_x - \omega) - \frac{3}{4}k_x^2] = 0, \quad (4-5)$$

$$\hat{T}'' + \hat{p}[iM_f^2 \text{Re} \sigma(\gamma-1)(U_f k_x - \omega)] - \hat{T}[\text{Re} \sigma i(U_f k_x - \omega) + k_x^2] = 0, \quad (4-6)$$

$$\hat{v}' + ik_x \hat{u} - i(U_f k_x - \omega)\hat{\theta} + i(U_f k_x - \omega)\gamma M_f^2 \hat{p} = 0, \quad (4-7)$$

系统(4-3)到(4-6)可化为和(2-23)一致的一阶常微分系统 $D\psi = \bar{A}\psi$, 其中 ψ 由(2-22)定义, D 表示对 y 的导数, \bar{A} 由(2-24)定义。该六阶齐次常微分方程组有六个通解, 因而它的解可表示为

$$\psi = \sum_{j=1}^6 A_j \mathbf{b}^{(j)} e^{\lambda_j y}, \quad (4-8)$$

其中 $\mathbf{b}^{(j)}$ 是 6 元特征向量, $\mathbf{b}^{(1)}$ 、 $\mathbf{b}^{(2)}$ 使用第三项做归一化, $\mathbf{b}^{(3)}$ 、 $\mathbf{b}^{(4)}$ 、 $\mathbf{b}^{(5)}$ 、 $\mathbf{b}^{(6)}$ 使用第六项做归一化。 λ_j 是特征值。Balakumar&Malik^[11]给出

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{\lambda_{10}}, \quad \lambda_3 = -\lambda_4 = \sqrt{\lambda_{20}}, \quad \lambda_5 = -\lambda_6 = \sqrt{\lambda_{30}}, \quad (4-9)$$

$$\lambda_{10} = i \operatorname{Re}(U_f k_x - \omega) + k_x^2, \quad (4-10)$$

$$\lambda_{20} = \frac{1}{2} \left[b_{22} + b_{33} - \left[(b_{22} + b_{33})^2 + 4(b_{23}b_{32} - b_{22}b_{33}) \right]^{\frac{1}{2}} \right], \quad (4-11)$$

$$\lambda_{30} = \frac{1}{2} \left[b_{22} + b_{33} + \left[(b_{22} + b_{33})^2 + 4(b_{23}b_{32} - b_{22}b_{33}) \right]^{\frac{1}{2}} \right], \quad (4-12)$$

$$b_{22} = k_x^2 - \operatorname{Re}(U_f k_x - \omega)^2 \frac{\frac{3}{4} \gamma M_f^2 - (\gamma - 1) \sigma M_f^2}{\frac{3}{4} \operatorname{Re} + i(U_f k_x - \omega) \gamma M_f^2}, \quad (4-13)$$

$$b_{33} = i(U_f k_x - \omega) \sigma \operatorname{Re} + k_x^2, \quad (4-14)$$

$$b_{23} = \frac{\operatorname{Re}(U_f k_x - \omega)^2 (\frac{3}{4} - \sigma)}{\frac{3}{4} \operatorname{Re} + i(U_f k_x - \omega) \gamma M_f^2}, \quad (4-15)$$

$$b_{32} = -i(U_f k_x - \omega)(\gamma - 1) \sigma M_f^2 \operatorname{Re}, \quad (4-16)$$

当将 λ_{10} 、 λ_{20} 、 λ_{30} 中任一项设为负实数时, 都至少会产生一对纯虚数, 这一纯虚数表征了自由流中的波动。为方便表示, 我们令 $\phi(y) \sim e^{ik_y y} + c.c.$, 其中 k_y 为法向波数。当 $\lambda_{10} = -k_y^2$ 时, 自由流中的扰动对应涡波的色散关系, 当 $\lambda_{20} = -k_y^2$ 时, 自由流中的扰动对应声波的色散关系, 当 $\lambda_{30} = -k_y^2$ 时, 自由流中的扰动对应熵波的色散关系。

本文考虑空间模式的问题, 现给出一般性的求解思路 (在具体小节会给出进一步解释)。以上自由流入射的涡波为例。给出 ω 和 k_y , 利用上自由流涡波的色散关系可以得到 k_x 。此时上自由流的六个特征值中 λ_1, λ_2 为纯虚数; λ_3, λ_4 中有一个实部是大于零的, 不妨设 λ_4 的实部大于 0; λ_5, λ_6 中有一个实部是大于 0 的, 不妨设 λ_6 的实部大于 0。在上自由流 $y \rightarrow \infty$ 时, 实部大于零的特征值会使得扰动无穷大, 是不合理的, 因此我们将它们对应的幅值 A_4, A_6 设为 0。因此在上边界我们有四个幅值 A_1, A_2, A_3, A_5 是待求量; 而在下边界, 采用上边界的涡波所对应的色散关

系得到的 k_x 计算特征值后, λ_1, λ_2 中有一个实部是小于零的, 不妨设 λ_2 的实部小于 0; λ_3, λ_4 中有一个实部是小于零的, 不妨设 λ_4 的实部小于 0; λ_5, λ_6 中有一个实部是小于 0 的, 不妨设 λ_6 的实部小于 0。在下自由流 $y \rightarrow -\infty$ 时, 实部小于零的特征值会使得扰动无穷大, 也是不合理的, 因此有三个幅值 A_2, A_4, A_6 将被设为 0。另外的三个幅值 A_1, A_3, A_5 是三个待求量。注意, 若从上边界入射的扰动为声波, 则在下自由流中有一对几乎为共轭的纯虚数。我们不妨设它们为 λ_1, λ_2 , 且 λ_1 所对应的声波与入射声波的传播方向一致。由于没有从下边界同时入射的声波, 我们可以设 $\lambda_2=0$ 。将入射方向的 A_1 设为 1, 我们得到上下自由流的 ψ 表达式:

$$\psi_u = \mathbf{b}_u^{(1)} \mathbf{e}^{\lambda_1^u y} + A_2^u \mathbf{b}_u^{(2)} \mathbf{e}^{\lambda_2^u y} + A_3^u \mathbf{b}_u^{(3)} \mathbf{e}^{\lambda_3^u y} + A_5^u \mathbf{b}_u^{(5)} \mathbf{e}^{\lambda_5^u y}, \quad (4-17)$$

$$\psi_l = A_1^l \mathbf{b}_l^{(1)} \mathbf{e}^{\lambda_1^l y} + A_3^l \mathbf{b}_l^{(3)} \mathbf{e}^{\lambda_3^l y} + A_5^l \mathbf{b}_l^{(5)} \mathbf{e}^{\lambda_5^l y}, \quad (4-18)$$

其中上标或下标 u 和 l 分别表示上下两股自由流的值。在上边界有六个方程(4-17), 有三个未知量 A_2, A_3, A_5 。将这三个未知量消去, 可以得到关于 ψ_u 的三个边界条件, 同理可得到下边界的三个边界条件。其中上边界是非齐次的边界条件, 下边界是齐次的边界条件。根据 2.5.1 节的叙述, 此时边界条件是适定的。

4.2 声模态

4.2.1 扰动剖面

对于自由流的声波, $U_f k_x - \omega = O(1)$ 。我们令 $\lambda_3 = -\lambda_4 = ik_y$, 带入(4-11)可得到声波的色散关系,

$$\frac{1}{2} \left[b_{22} + b_{33} - \left[(b_{22} + b_{33})^2 + 4(b_{23}b_{32} - b_{22}b_{33}) \right]^{\frac{1}{2}} \right] + k_y^2 = 0, \quad (4-19)$$

当 $\text{Re} \rightarrow \infty$ 时, (4-19)可简化为

$$k_x^2 + (U_f k_x - \omega)^2 M_f^2 + k_y^2 = 0, \quad (4-20)$$

即相速度

$$c = \frac{\omega}{k_x} = U_f \pm \sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2}{M_f^2 k_x^2}} = U_f \pm \frac{1}{M_f \cos(\theta)} \quad \text{as } \text{Re} \rightarrow \infty, \quad (4-21)$$

其中 $\theta = \arctan(k_y / k_x)$ 。

当(4-21)取正号时, 相速度 $c = \omega / k_x = U_f + 1 / M_f / \cos \theta$ 大于主流速度, 因而称该模态为快声波。当(4-21)取负号时, 相速度 $c = \omega / k_x = U_f - 1 / M_f / \cos \theta$ 小于主流速度, 因而称该模态为慢声波。

若声波从上边界入射，则能量的传播方向是沿着 y 的负方向的，因而，必然有群速度 $c_g = d\omega / dk_y < 0$ 时。这样由色散关系(4-21)可知，只有 $k_y < 0$ 的快声波和 $k_y > 0$ 的慢声波是入射的。相反，若声波是从下边界入射的，则只能选取 $k_y > 0$ 的快声波和 $k_y < 0$ 的慢声波。

由于在 $y=0$ 附近平均流存在梯度，声波入射到剪切层以后会发生散射现象。这一现象可以与光从一种介质入射到另一种介质的过程相比拟。声波的散射效应表现为沿着入射方向穿过剪切层的透射与沿着相反方向的反射。选取 $M_c=2$, 速度比 $\lambda=1/3$ ，若从上边界引入 $\omega=0.1$, $k_y=-0.5$ 的快声波（由色散关系求得 $k_x=0.0281+0.0001i$ ），则扰动的特征函数如图 4-1 所示。在上半平面的声波扰动透射引起了下半平面的扰动。压强扰动、法向和流向速度扰动、温度扰动分别在 1、10、 10^2 的量级。流向速度扰动、温度扰动在混合层中心处急剧增加，这表明存在临界层。由公式(4-9)可知，入射声波的幅值为 A_3'' ，反射声波的幅值为 A_4'' ，则声波的反射系数可定义为 $R=A_4''/A_3''$ 。对于图 4-1 的工况，可计算出反射系数 $R=0.7272+3.2832i$ 。在下边界附近，扰动仍然可以用公式(4-8)的形式描述，但为了区分，我们记声波的幅值为 A_3^T 与 A_4^T 。由于在下边界没有引入入射声波， $A_3^T=0$ 。透射系数可定义为 $T=A_4^T/A_3''$ 。对于本算例， $T=0.6769-0.4760i$ 。

选取 $M_c=2$, 速度比 $\lambda=1/3$ ，若从上边界引入 $\omega=0.1$ ， $k_y=0.2$ 的慢声波（由色散关系求得 $k_x=0.0958+0.0000i$ ），则扰动的特征函数如图 4-2 所示。在上半平面的声波扰动透射引起了下半平面的扰动。压强扰动、法向速度扰动分别在 1、10 的量级。流向速度扰动、温度扰动在混合层中心处急剧增加，这表明存在临界层。计算得到反射系数 $R=-1.9856+1.8884i$ ，透射系数 $T=-0.4482-0.3646i$ 。若从上边界引入 $\omega=0.1$ ， $k_y=0.5$ 的慢声波（由色散关系求得 $k_x=0.1233+0.0001i$ ），则扰动的特征函数如图 4-3 所示。入射的声波没有穿透剪切层而在下半平面传播。压强扰动、法向速度扰动分别在 1、10 的量级。流向速度扰动、温度扰动在混合层中心处急剧增加，这表明存在临界层。计算得到反射系数 $R=-0.2584+3.8590i$ 。若从上边界引入 $\omega=0.1$ ， $k_y=1.8$ 的慢声波（由色散关系求得 $k_x=0.2453+0.0016i$ ），则扰动的特征函数如图 4-4 所示。在上半平面的声波扰动透射引起了下半平面的扰动。压强扰动、法向速度扰动分别在 1、10 的量级。流向速度扰动、温度扰动在混合层中心处急剧增加，这表明存在临界层。计算得到反射系数 $R=-4.3640+0.2811i$ 透射系数 $T=-0.0110+0.0444i$ 。

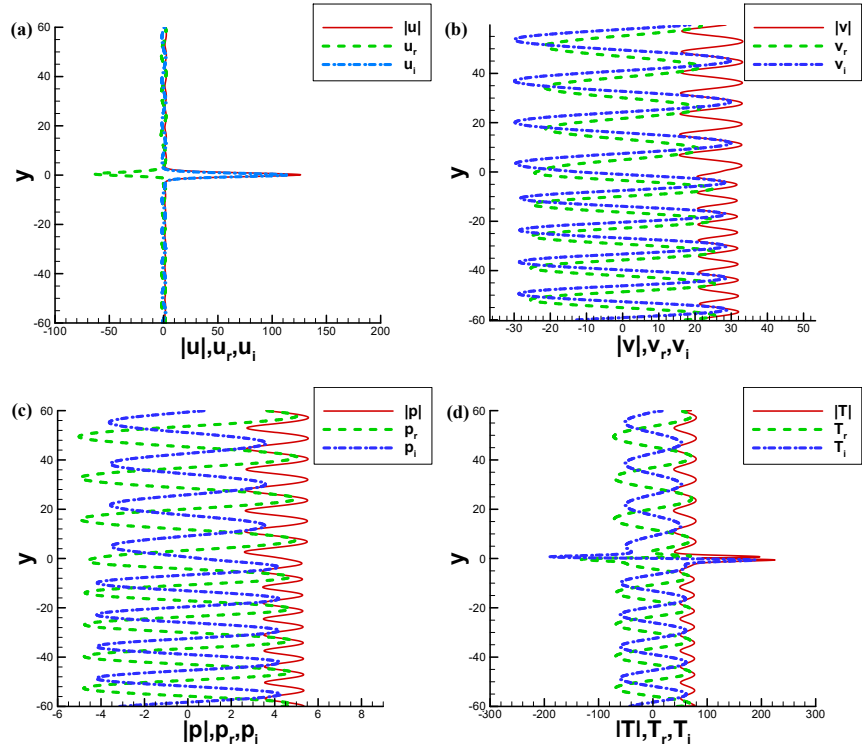


图 4-1 $M_c=2, \lambda=1/3, \omega=0.1, k_y=-0.5, k_x=0.0281+0.0001i$, 快声波
(a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

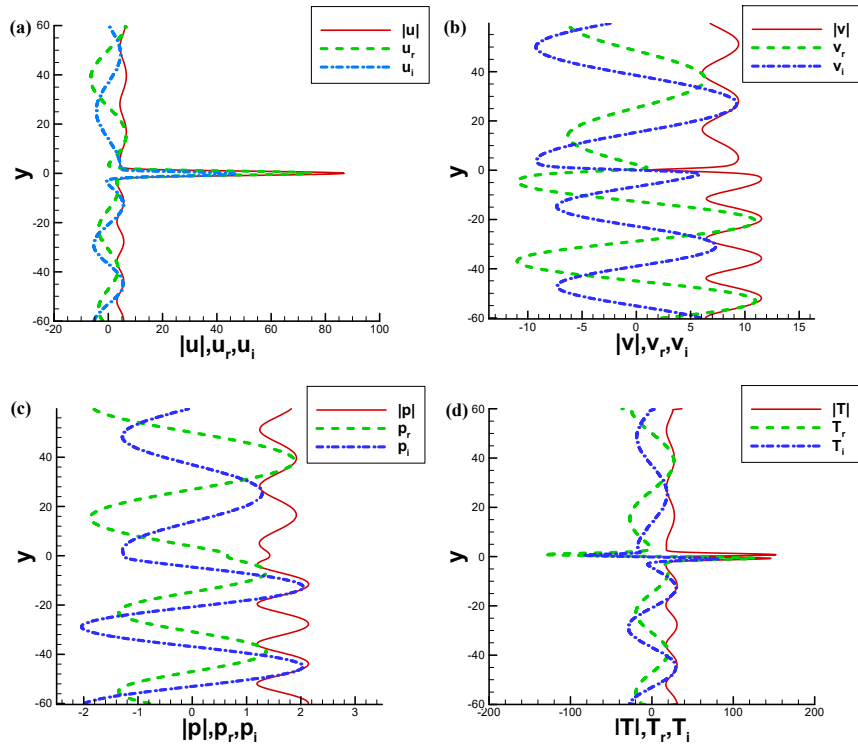


图 4-2 $M_c=2, \lambda=1/3, \omega=0.1, k_y=0.2, k_x=0.0958+0.0000i$, 慢声波
(a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

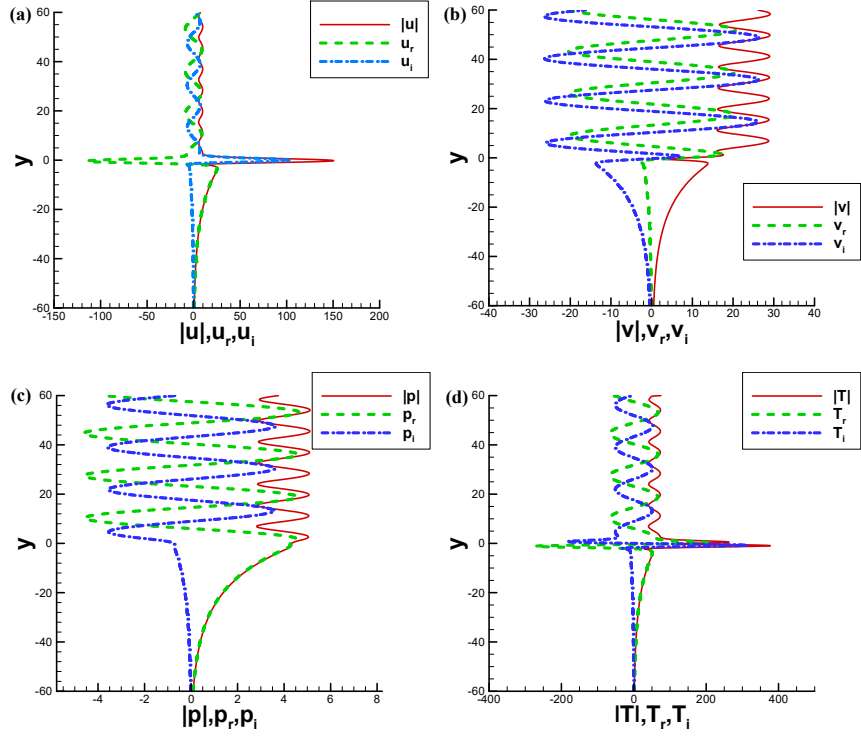


图 4-3 $M_C=2, \lambda=1/3, \omega=0.1, k_y=0.5, k_x=0.1233+0.0001i$ ，慢声波
(a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

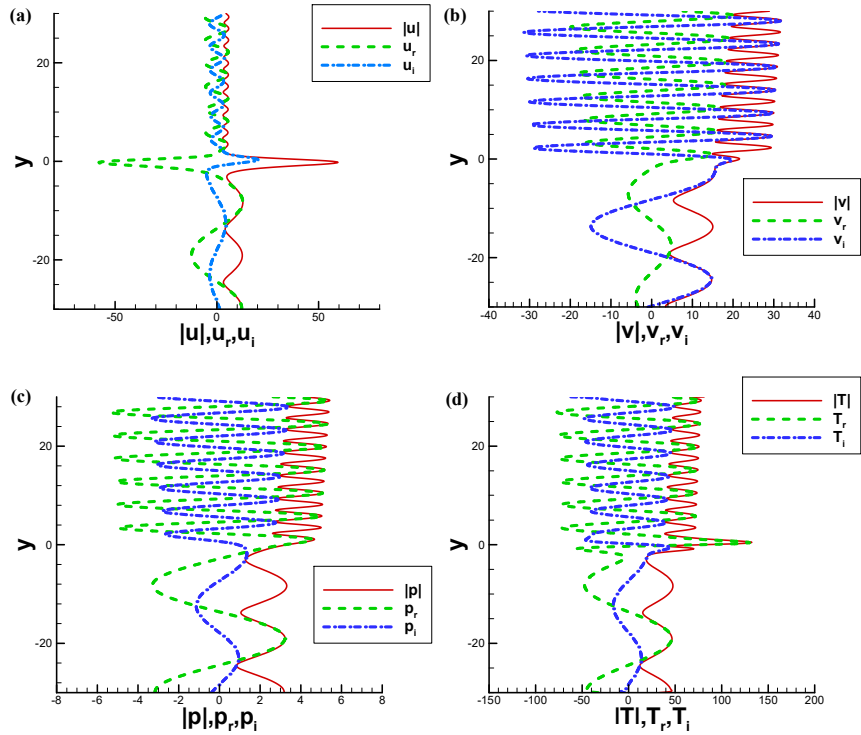


图 4-4 $M_C=2, \lambda=1/3, \omega=0.1, k_y=1.8, k_x=0.2453+0.0016i$ ，慢声波
(a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

4.2.2 透射产生的条件

对于上边界入射声波的特定工况，在上一节给出了扰动剖面 and 反射系数、透射系数的计算结果。通过慢声波的三个工况计算发现，透射现象有时发生，有时不发生。那么上边界入射声波的透射现象产生条件是什么？

分析透射现象的发生条件也就是分析下边界存在一对纯虚数的特征值的条件。当雷诺数很大时，上边界入射声波的色散关系是

$$\frac{\omega}{k_x} = U_f \pm \sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2}{M_f^2 k_x^2}} + O\left(\frac{1}{\text{Re}}\right), \quad (4-22)$$

其中正号对应于快声波，负号对应于慢声波。因为速度比 $\lambda = 1/3$ ，下自由流速度、马赫数是上自由流速度、马赫数的一半。因为特征值是纯虚数，那么相速度在下边界会满足涡波、熵波或是声波的相速度关系(4-28)、(4-32)或是(4-21)。如果相速度在下边界满足涡波、熵波的相速度关系，那么 $\omega / k_x = U_f / 2$ ，代换计算得到 $\mp U_f M_f / 2 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} / k_x$ ，取负时对应于快声波，取正时对应于慢声波。对于所给的 U_f 和 M_f ，左端项的绝对值大于 1，这个式子不可能成立。如果相速度在下边界满足声波的相速度关系，那么在首阶上有

$$\frac{\omega}{k_x} = \frac{U_f}{2} \pm 2 \sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2}{M_f^2 k_x^2}}, \quad (4-23)$$

以 $k_y^2 > 0$ 为条件，代换计算得到需要满足的关系为

$$\frac{M_f^2 U_f^2 k_x^2}{4} + k_y^2 \pm M_f U_f k_x \sqrt{k_x^2 + k_y^2} - 3k_x^2 > 0, \quad (4-24)$$

取正时对应于快声波，取负时对应于慢声波，将(4-24)除以 k_x^2 得到

$$\frac{M_f^2 U_f^2}{4} + \left(\frac{k_y}{k_x}\right)^2 \pm M_f U_f \sqrt{1 + \left(\frac{k_y}{k_x}\right)^2} - 3 > 0, \quad (4-25)$$

为了简单起见，代换 $\tan(\theta)^2 = (k_y / k_x)^2$ ，其中 $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ 。那么不等式会化为

$$\sec(\theta)^2 \pm M_f U_f \sec(\theta) + \frac{M_f^2 U_f^2}{4} - 4 > 0, \quad (4-26)$$

取正时对应于快声波，取负时对应于慢声波。计算得到以 $\sec(\theta)$ 为自变量的二次方程(4-26)的解为 $\mp(M_f U_f / 2 \pm 2)$ （括号外取负时对应于快声波的解，取正时对应于慢声波的解）。因此不存在透射现象的 $\sec(\theta)$ 范围是 $\mp M_f U_f / 2 - 2$ 到 $\mp M_f U_f / 2 + 2$ 之间（负正号取负时对应于快声波的解，取正时对应于慢声波的解）。

另外，可以对透射现象存在的 k_y 的范围进行估计。在(4-24)中，由于 k_x 是通过求解色散关系(4-19)得到的，因此将 M_f 、 U_f 、 ω 视做参数时，不等式左端可

以表达成 k_y 的函数。通过求解这一不等式可以得到可发生透射的 k_y 范围。为了简单起见，我们绘制了不等式左端在 $M_c=2, \lambda=1/3, \omega=0.1$ 的条件下随 k_y 的变化曲线如图 4-5，我们可以看出对于慢声波而言在 $k_y \in [0.35, 1.75]$ 的范围内不等式 (4-24) 左端项是位于横轴下方的，也就是说至少当 k_y 在这一范围内时是没有透射现象的。因此，上一节计算得到的慢声波透射现象结果是合理的。

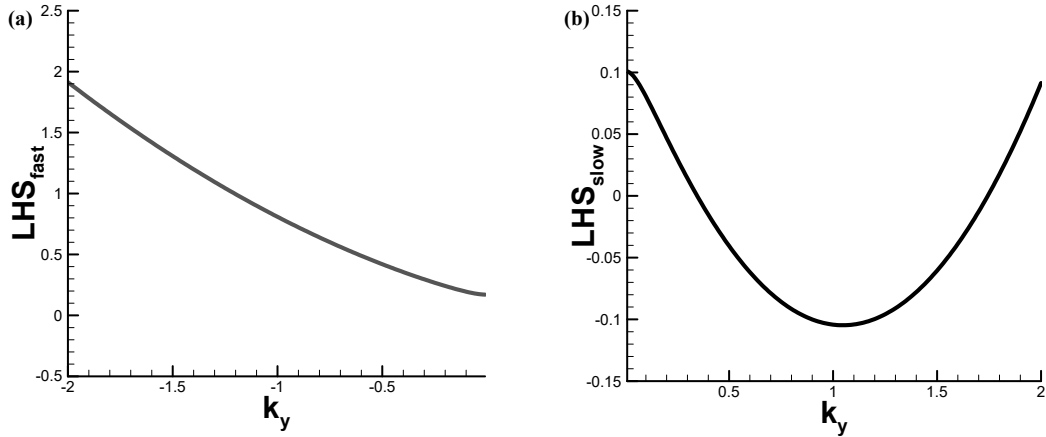


图 4-5 不等式(4-24)左端值随 k_y 变化曲线 $M_c=2, \omega=0.1, \lambda=1/3$

(a) 快声波不等式左端项随 k_y 的变化 (b) 慢声波不等式左端项随 k_y 的变化

4.3 涡模态

对于自由流的涡波 $U_f k_x - \omega = O(1/\text{Re})$, $\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{\lambda_{10}}$ 。令 $\lambda_1 = -\lambda_2 = ik_y$, 代入(4-10)得到色散关系

$$k_x^2 + i\text{Re}(U_f k_x - \omega) + k_y^2 = 0, \quad (4-27)$$

即相速度

$$c = \frac{\omega}{k_x} = U_f - \frac{i(k_x^2 + k_y^2)}{\text{Re} k_x}, \quad (4-28)$$

因此

$$c = \frac{\omega}{k_x} \rightarrow U_f \quad \text{as} \quad \text{Re} \rightarrow \infty. \quad (4-29)$$

由(4-29)和(4-33)知， $\text{Re} \rightarrow \infty$ 时涡波和熵波的相速度在首阶上是相同的。因此在涡波的色散关系(4-27)下， λ_5, λ_6 也会接近于纯虚数。特征值接近纯虚数意味着随 y 的增加，它并不会很快衰减，而是以波动的形式在自由流中出现。另外为了保证边界条件的适定，我们需要确定将三个幅值 A_2, A_5, A_6 中哪一个赋为 0，进

而会求得自由流中另外两个波动的幅值。我们的计算得到了一个涡波扰动引发的其他两个自由流波动的幅值，并且这一幅值是确定的。可以象征性地理解为波动之间相互缠绕共同出现，因此称这是自由流涡波、熵波的缠绕现象。这一现象是与物理相悖的：自由流中的扰动并不完全由自由流决定，其缠绕的部分是由剪切层确定的。为定量刻画这一非物理的缠绕现象，定义单位幅值的涡波和法向波数为 $-k_y$ 的涡波的缠绕系数 $VE_2 = A_2 / A_1 = A_2$ ；涡波和特征值为 λ_5 的熵波的缠绕系数 $VE_5 = A_5 / A_1 = A_5$ ；涡波和特征值为 λ_6 的熵波的缠绕系数 $VE_6 = A_6 / A_1 = A_6$ 。

选取 $M_c=2$ 、 $\lambda=1/3$ ，对法向波数 $k_y=0.5$ 、频率 $\omega=0.01$ 的上边界入射涡波（由色散关系求得 $k_x=0.0075+0.0001i$ ），将幅值 A_2'' 赋为 0 时，得到了扰动剖面如图 4-6。压力扰动剖面的量级比其他扰动的量级要小很多，这符合涡波和熵波的特性，进而说明没有声波被激发。法向速度扰动相对流向速度扰动要小大概两个量级，这是由涡波速度散度为 0 的特性决定的。温度扰动和流向速度扰动在 1 的量级，说明涡波和熵波之间存在明显的缠绕。在混合层速度梯度较大的区域出现了“剪切屏障”（shear sheltering）现象，导致扰动没有传入下半平面。幅值求解结果为 $A_4''=-0.0060+0.0003i$ ， $A_5''=-768i$ ， $A_6''=320-256i$ 。选取 $M_c=2$ 、 $\lambda=1/3$ ，对法向波数 $k_y=0.5$ 、频率 $\omega=0.1$ 的上边界入射涡波（由色散关系求得 $k_x=0.0750+0.0001i$ ），将幅值 A_2'' 赋为 0 时，得到了扰动剖面如图 4-7。由于流向波数提高了 10 倍，因而法向速度扰动也增大了 10 倍。幅值求解结果为 $A_4''=-0.0062-0.0062i$ ， $A_5''=106-348i$ ， $A_6''=708+179i$ 。选取 $M_c=2$ 、 $\lambda=1/3$ ，对法向波数 $k_y=0.5$ 、频率 $\omega=1$ 的上边界入射涡波（由色散关系求得 $k_x=0.7500+0.0004i$ ），将幅值 A_2'' 赋为 0 时，得到了扰动剖面如图 4-8。由于流向波数再次升高了 10 倍，法向速度与流向速度同量级。幅值求解结果为 $A_4''=-4284+8981i$ ， $A_5''=101-393i$ ， $A_6''=472-208i$ 。

以上三种情况均设置 $A_2''=0$ ，得到的物理图像是在上自由流引入单一傅里叶频率下的涡波后，自由流中又出现了一对缠绕的熵波，进而使扰动出现了量级为 1 的温度扰动。

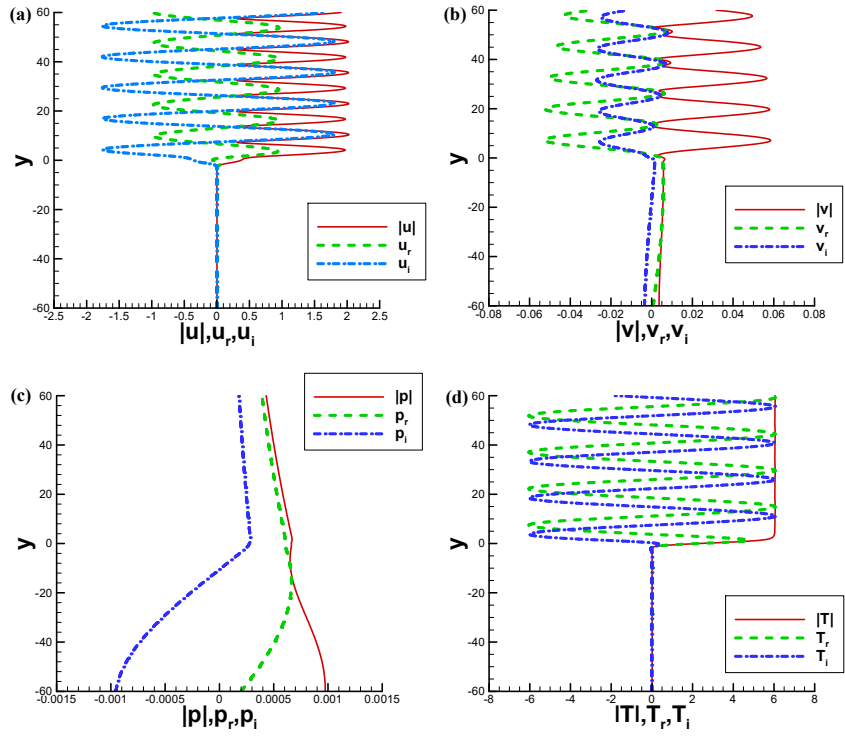


图 4-6 $M_c = 2, \lambda = 1/3, \omega = 0.01, k_x = 0.0075 + 0.0001i, k_y = 0.5$ 上自由流涡波 $A_2'' = 0$ 的扰动剖面 (a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

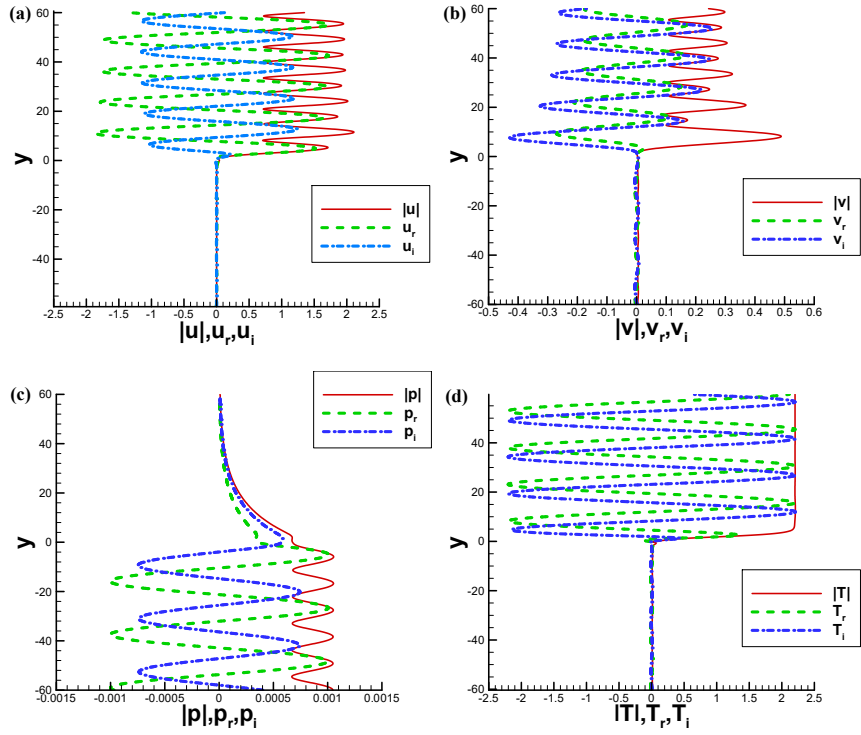


图 4-7 $M_c = 2, \lambda = 1/3, \omega = 0.1, k_x = 0.0750 + 0.0001i, k_y = 0.5$ 上自由流涡波 $A_2'' = 0$ 的扰动剖面 (a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

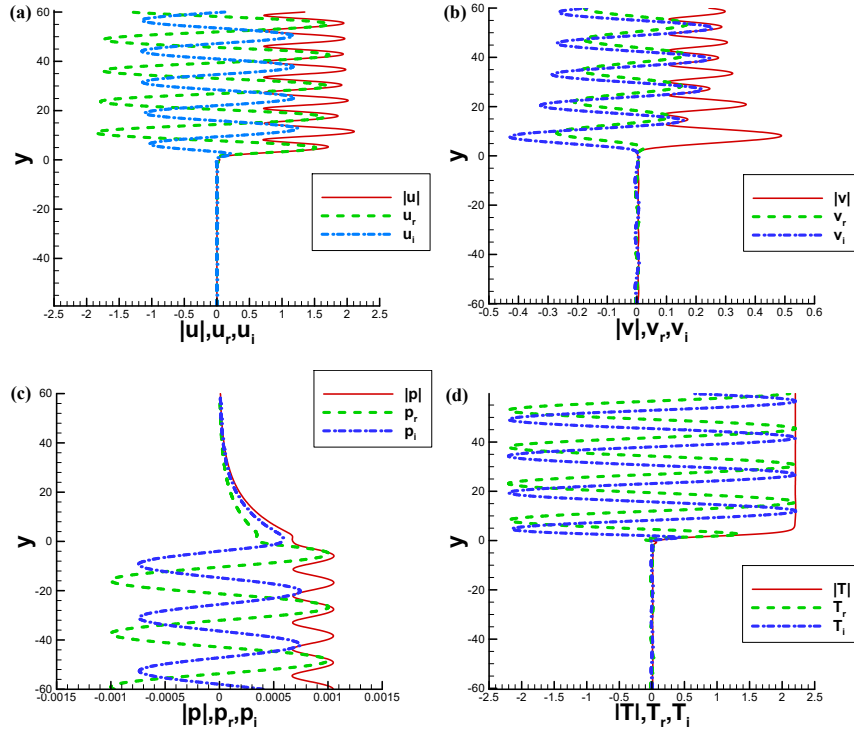


图 4-8 $M_c = 2, \lambda = 1/3, \omega = 1, k_x = 0.7500 + 0.0004i, k_y = 0.5$ 上自由流涡波 A_2'' 为 0 的扰动剖面 (a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

选取 $M_c=2$ 、 $\lambda=1/3$ ，对法向波数 $k_y=0.5$ 、频率 $\omega=0.01$ 的上边界入射涡波（由色散关系求得 $k_x=0.0075 + 0.0001i$ ），将幅值 A_5'' 赋为 0 时，得到了扰动剖面如图 4-9。压力扰动非常小导致计算结果中出现锯齿形。幅值求解结果为 $A_2''=0.7430+1.1411i$, $A_4''=-0.0094-0.0046i$, $A_6''=3.5456-201.94i$ 。选取 $M_c=2$ 、 $\lambda=1/3$ ，对法向波数 $k_y=0.5$ 、频率 $\omega=0.1$ 的上边界入射涡波（由色散关系求得 $k_x=0.0750+0.0001i$ ），将幅值 A_5'' 赋为 0 时，得到了扰动剖面如图 4-10。流向速度扰动幅值是法向速度扰动幅值的五倍左右。幅值求解结果为 $A_2''=-1.0980+1.8717i$, $A_4''=-0.0094-0.0145i$, $A_6''=3.4078 - 9.4633i$ 。选取 $M_c=2$ 、 $\lambda=1/3$ ，对法向波数 $k_y=0.5$ 、频率 $\omega=1$ 的上边界入射涡波（由色散关系求得 $k_x=0.7500 + 0.0004i$ ），将幅值 A_5'' 赋为 0 时，得到了扰动剖面如图 4-11。法向速度扰动幅值是流向速度扰动幅值的两倍左右。由于流向波数升高了十倍，法向速度扰动也升高了十倍。幅值求解结果为 $A_2''=0.7379 + 2.0578i$, $A_4''=4.0505 + 6.0486i$, $A_6''=-0.2693 - 0.4883i$ 。随着 ω 的增加，流向速度扰动剖面的波长变长。

进而分析缠绕系数随 k_y/k_x 的变化来获得更多的认识。选取 $M_c=2$ 、 $\lambda=1/3$ ，将幅值 A_5'' 赋为 0，对 $k_y \in [-2,2]$ 的上边界入射涡波缠绕系数进行计算，得到图 4-12 的结果。同样的 k_y 范围，在 $\omega=0.01$ 时， k_x 更小， k_y/k_x 的变化范围更大。因

此在子图 (a) (b) 中给出 $\omega=0.1$ 和 $\omega=1$ 时缠绕系数随 k_y/k_x 的变化曲线，在子图 (c) (d) 中单独给出 $\omega=0.01$ 时缠绕系数随 k_y/k_x 的变化曲线。在所计算的 k_y 范围内， $\omega=0.01$ 时缠绕系数 VE_6 较 $\omega=0.1$ 和 1 时增加了一个量级，而缠绕系数 VE_2 的量级变化不大。在 $k_y/k_x < 0$ 时缠绕系数 VE_2 和 VE_6 都较小，在 $k_y/k_x > 0$ 时缠绕系数 VE_2 呈现波动的态势并且幅值似乎在增加，缠绕系数 VE_6 幅值也逐渐增加，几乎在最大的 k_y/k_x 缠绕系数 VE_2 和 VE_6 都达到最大的幅值。

选取 $M_c=0.6$ 、 $\lambda=1/3$ ，将幅值 A_5'' 赋为 0 ，对 $k_y \in [-2,2]$ 的上边界入射涡波缠绕系数进行计算，得到图 4-13 的结果。同样的 k_y 范围，在 $\omega=0.01$ 时， k_x 更小， k_y/k_x 的变化范围更大。因此在子图 (a) (b) 中给出 $\omega=0.1$ 和 $\omega=1$ 时缠绕系数随 k_y/k_x 的变化曲线，在子图 (c) (d) 中单独给出 $\omega=0.01$ 时缠绕系数随 k_y/k_x 的变化曲线。在所计算的 k_y 范围内， $\omega=0.01$ 时缠绕系数 VE_6 较 $\omega=0.1$ 和 1 时增加了一个量级，而缠绕系数 VE_2 的量级变化不大。在 $k_y/k_x < 0$ 时缠绕系数 VE_2 和 VE_6 都较小，在 $k_y/k_x > 0$ 时缠绕系数 VE_2 呈现波动的态势并且幅值似乎在增加，缠绕系数 VE_6 幅值也逐渐增加。

在对流马赫数为 2 、 0.6 时的缠绕系数随 k_y/k_x 变化趋势是相似的。缠绕系数 VE_6 的量级在对流马赫数为 2 时较对流马赫数为 0.6 时显著增加。

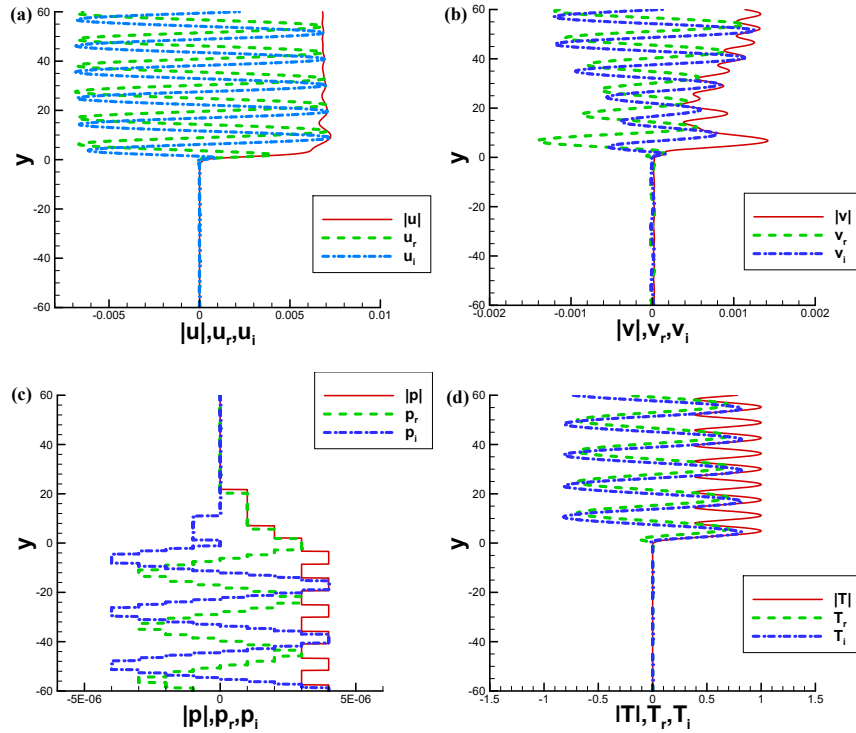


图 4-9 $M_c = 2, \lambda = 1/3, \omega = 0.01, k_x = 0.0075 + 0.0001i, k_y = 0.5$ 上自由流涡波 $A_5''=0$ 扰动剖面 (a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

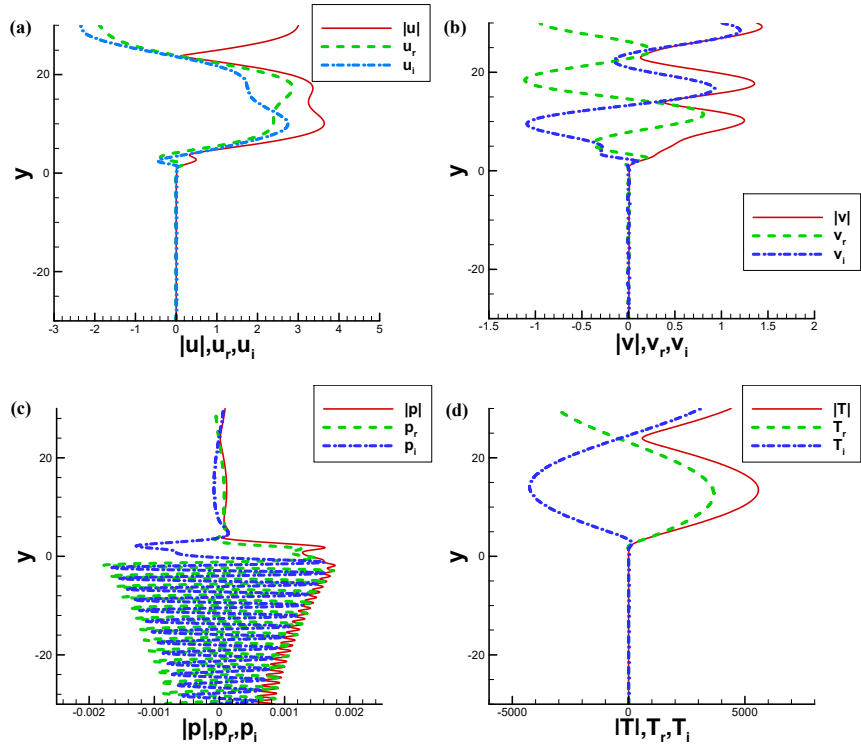


图 4-10 $M_c = 2, \lambda = 1/3, \omega = 0.1, k_x = 0.0750 + 0.0001i, k_y = 0.5$ 上自由流涡波 A_5^u 为 0 的扰动剖面 (a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

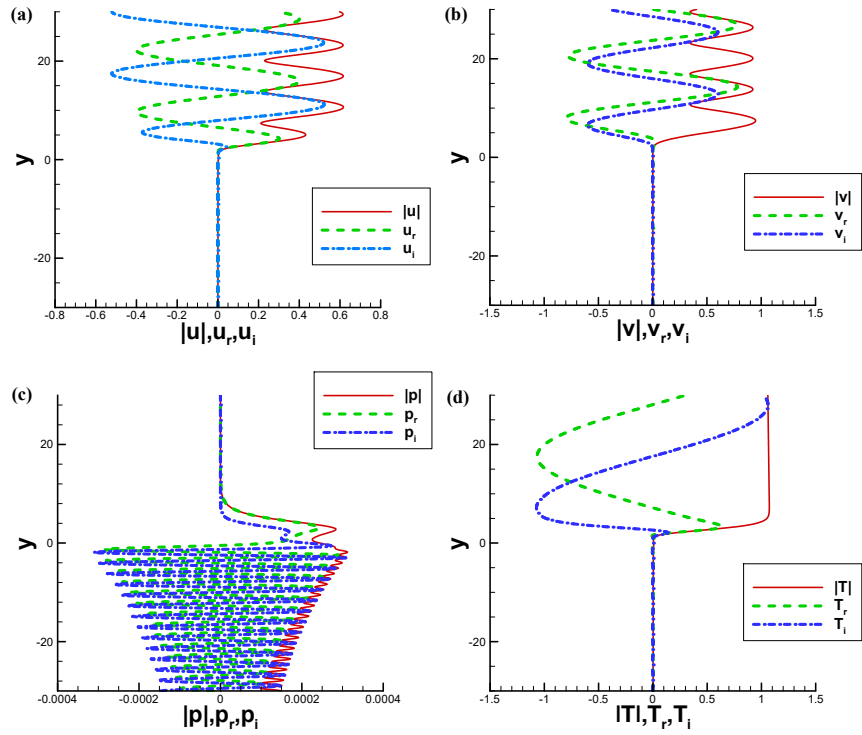


图 4-11 $M_c = 2, \lambda = 1/3, \omega = 1, k_x = 0.7500 + 0.0004i, k_y = 0.5$ 上自由流涡波 A_5^u 为 0 的扰动剖面 (a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

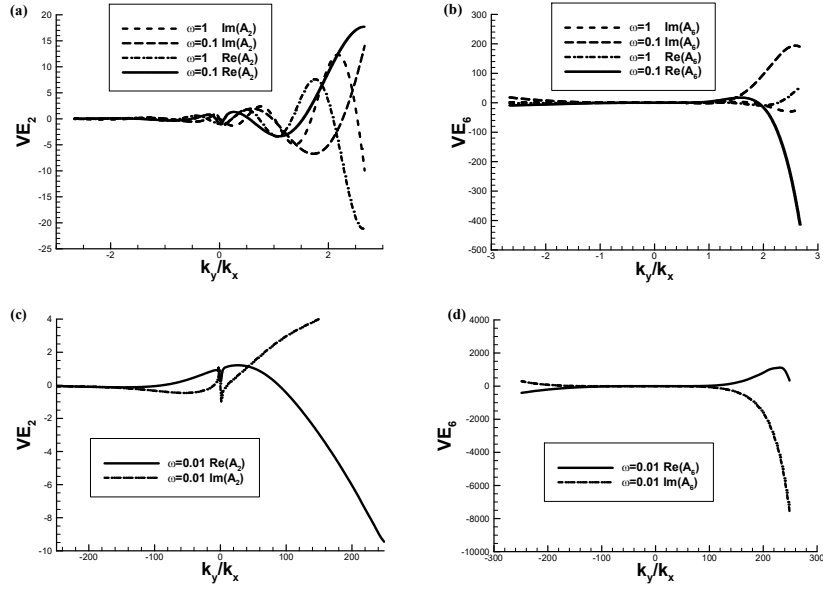


图 4-12 $M_c=0.6, \lambda=1/3$ 将 A_5^u 赋为 0 时, 不同 ω 下缠绕系数随 k_y/k_x 的变化曲线
 (a) A_2 变化曲线 $\omega=0.1, \omega=1$ (b) A_6 变化曲线 $\omega=0.1, \omega=1$ (c) A_2 变化曲线 $\omega=0.01$ (d) A_6 变化曲线 $\omega=0.01$

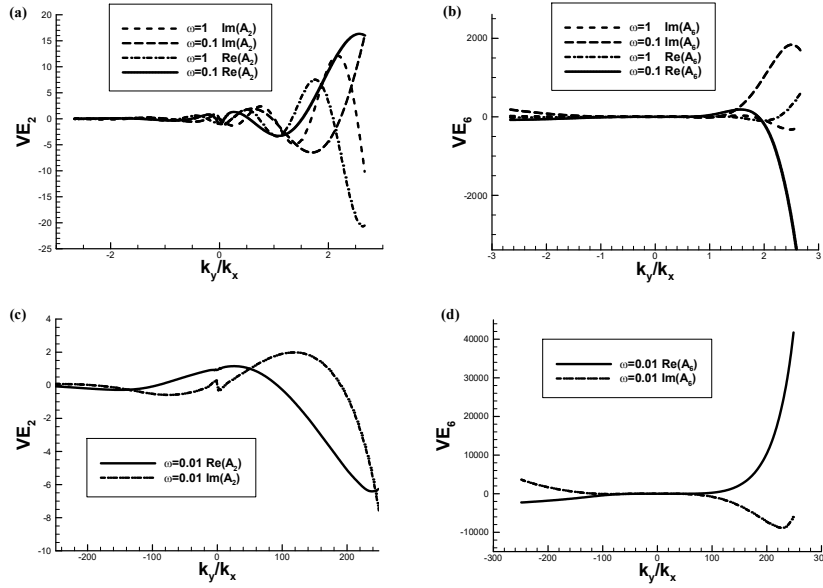


图 4-13 $M_c=2, \lambda=1/3$ 将 A_5^u 赋为 0 时, 不同 ω 下缠绕系数随 k_y/k_x 的变化曲线
 (a) A_2 变化曲线 $\omega=0.1, \omega=1$ (b) A_6 变化曲线 $\omega=0.1, \omega=1$ (c) A_2 变化曲线 $\omega=0.01$ (d) A_6 变化曲线 $\omega=0.01$

4.4 熵模态

对于自由流的熵波 $U_f k_x - \omega = O(1/\text{Re})$ ，令 $\lambda_5 = -\lambda_6 = ik_y$ ，我们得到色散关系为

$$\frac{1}{2} \left[b_{22} + b_{33} + \left[(b_{22} + b_{33})^2 + 4(b_{23}b_{32} - b_{22}b_{33}) \right]^{\frac{1}{2}} \right] + k_y^2 = 0, \quad (4-30)$$

当 $\text{Re} \rightarrow \infty$ 时(4-30)简化为

$$i(U_f k_x - \omega) \sigma \text{Re} + k_x^2 + k_y^2 = 0, \quad (4-31)$$

也就是

$$c = \frac{\omega}{k_x} = U_f - \frac{i(k_x^2 + k_y^2)}{\sigma \text{Re} k_x}, \quad (4-32)$$

因此

$$c = \frac{\omega}{k_x} \rightarrow U_f \quad \text{as} \quad \text{Re} \rightarrow \infty. \quad (4-33)$$

由(4-29)和(4-33)知， $\text{Re} \rightarrow \infty$ 时涡波和熵波的相速度在首阶上是相同的，因此在熵波扰动的色散关系下， λ_1, λ_2 也会接近于纯虚数。特征值接近纯虚数意味着随 y 的增加，它并不会很快衰减，而是以波动的形式在自由流中出现。另外为了保证边界条件的适定，我们需要确定将三个幅值 A_1, A_2, A_6 中哪一个赋为 0，进而会求得自由流中另外两个波动的幅值。我们的计算得到了一个熵波扰动引发的其它两个自由流波动的幅值，并且这一幅值是确定的。可以象征性地理解为波动之间相互缠绕共同出现，因此称这是自由流涡波、熵波的缠绕现象。这一现象是与物理相悖的：自由流中的扰动并不完全由自由流决定，其缠绕的部分是由剪切层确定的。为定量刻画这一非物理的缠绕现象，定义单位的法向波数 k_y 的熵波和法向波数 $-k_y$ 的熵波的缠绕系数 $EE_6 = A_6 / A_5 = A_6$ ；熵波和特征值为 λ_1 的涡波的缠绕系数 $EE_1 = A_1 / A_5 = A_1$ ；熵波和特征值为 λ_2 的涡波的缠绕系数 $EE_2 = A_2 / A_5 = A_2$ 。

选取 $M_c=2$ 、 $\lambda=1/3$ ，将 A_1'' 赋为 0，给出法向波数 $k_y=0.5$ ， $\omega=0.1$ 的上边界入射熵波（由色散关系求得 $k_x=0.0750+0.0002i$ ）的扰动剖面如图 4-14 所示，压强扰动相对其他扰动的扰动是很小的，温度扰动和流向速度扰动都在 1 的量级，而法向速度扰动在 0.1 的量级。在混合层速度梯度较大的区域出现了“剪切屏障”（shear sheltering）现象，导致扰动没有传入下半平面。幅值求解结果为 $A_2''=0.0048+0.0031i$ ， $A_4''=-2.8708 \times 10^{-5} + 1.4012 \times 10^{-5}i$ ， $A_6''=-0.5062+2.2143i$ 。

选取 $M_c=2$ 、 $\lambda=1/3$ ，将 A_6'' 赋为 0，给出法向波数 $k_y=0.5$ ， $\omega=0.1$ 的上边界入射熵波（由色散关系求得 $k_x=0.0750+0.0002i$ ）的扰动剖面如图 4-15 所示，法向速度扰动在 0.1 的量级，流向速度扰动在 1 的量级，而温度扰动到了百的量级，

也就是将 A_6'' 赋为 0 时的温度扰动比将 A_1'' 赋为 0 时要高了两个数量级。幅值求解结果为 $A_1''=0.1072-0.0545i$, $A_2''=-0.1407+0.2661i$, $A_4''=-0.0024-0.0022i$ 。

为了研究缠绕系数随 k_y/k_x 的变化, 选取 $M_c=2$ 、 $\lambda=1/3$, $\omega=0.1$ 。将 A_1'' 赋为 0 绘制了缠绕系数 EE_2, EE_6 随 k_y/k_x 的变化曲线如图 4-16。在所研究的 k_y/k_x 范围内, 缠绕系数 EE_2 在 $k_y/k_x < 0$ 时接近 0, 在 k_y/k_x 接近 0 时虚部和实部都迅速减小, 在 $k_y/k_x > 0$ 时逐渐回到接近 0 的值, 并呈现波动的态势。缠绕系数 EE_6 在 $k_y/k_x < 0$ 时始终接近 0, 在 $k_y/k_x > 0$ 时呈现波动的态势并在 k_y/k_x 最大时虚部、实部的绝对值都达到最大。缠绕系数 EE_2 在 0.01 的量级而缠绕系数 EE_6 在 10 的量级。将 A_6'' 赋为 0 绘制了缠绕系数 EE_1, EE_2 随 k_y/k_x 的变化曲线如图 4-17, 在所研究的 k_y/k_x 范围内, 缠绕系数 EE_1 和 EE_2 都在 $k_y/k_x=0$ 附近剧烈变化, 当 k_y/k_x 从负向趋于 0 时实部都迅速变小, 当 k_y/k_x 从正向趋于 0 时实部都迅速变大。而在 k_y/k_x 距 0 稍远的地方缠绕系数 EE_1 和 EE_2 的实部、虚部都接近 0。当 k_y/k_x 从负向趋于 0 时 EE_1 的虚部迅速变小而 EE_2 的虚部迅速变大, 当 k_y/k_x 从正向趋于 0 时 EE_1 的虚部迅速变大而 EE_2 的虚部迅速变小。

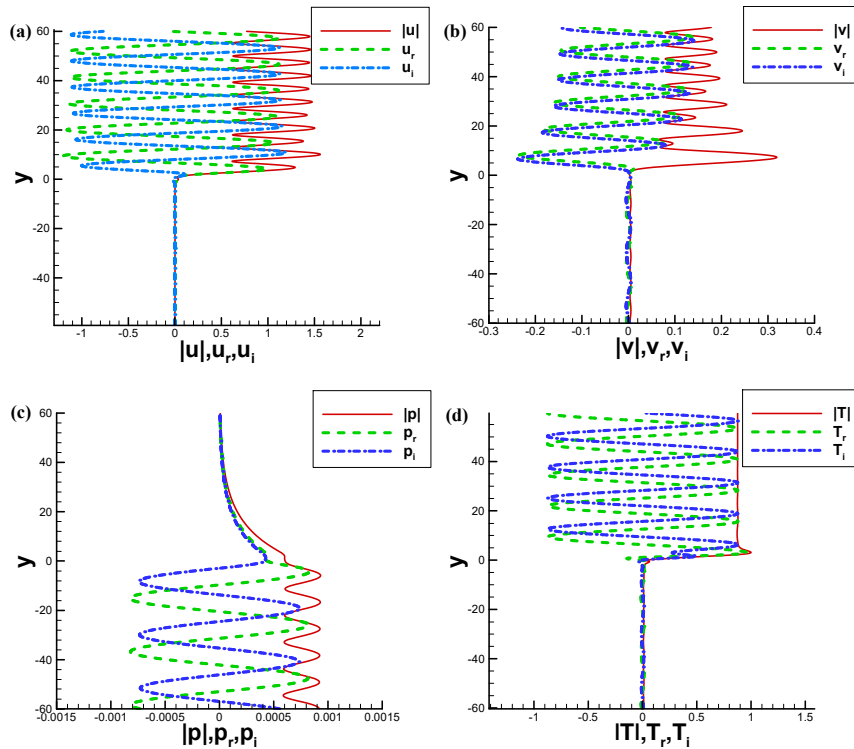


图 4-14 $M_c = 2, \lambda = 1/3, \omega = 0.1, k_x = 0.0750 + 0.0002i, k_y = 0.5$ 上自由流熵波 A_1'' 为 0 的扰动剖面 (a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

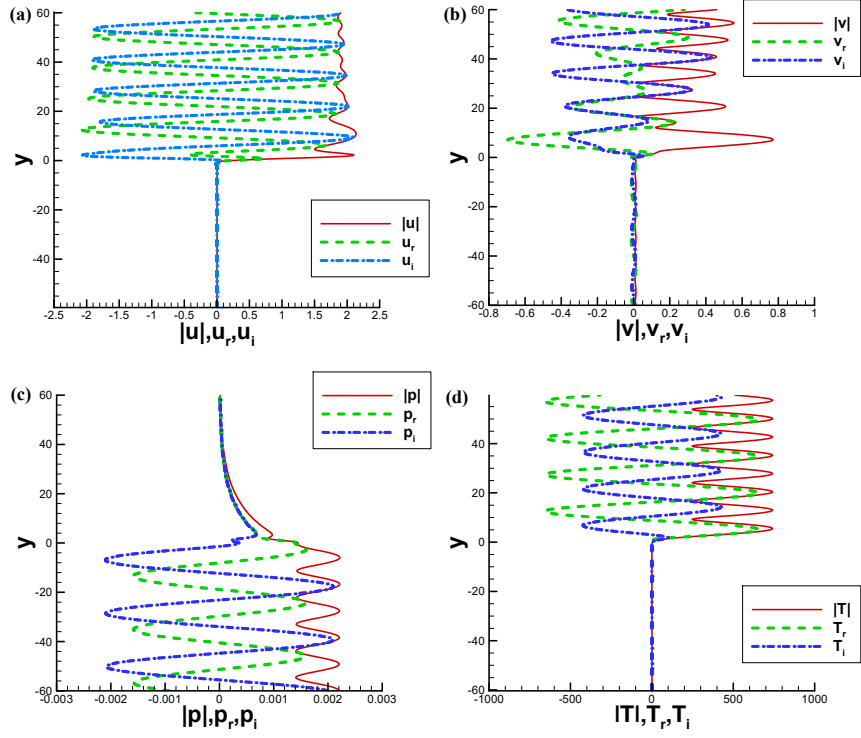


图 4-15 $M_c = 2, \lambda = 1/3, \omega = 0.1, k_x = 0.0750 + 0.0002i, k_y = 0.5$ 上自由流熵波 A_6'' 为 0 的扰动剖面 (a) u 扰动剖面 (b) v 扰动剖面 (c) p 扰动剖面 (d) T 扰动剖面

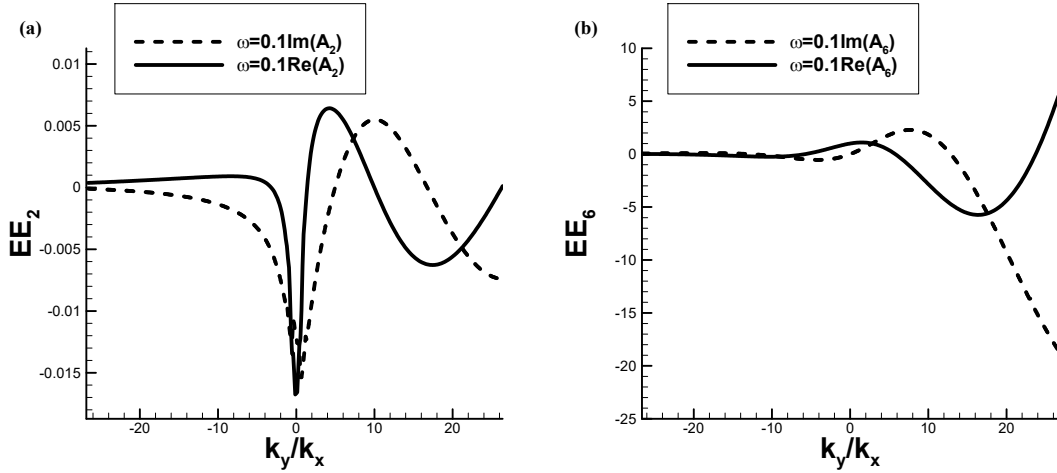


图 4-16 将 A_1'' 赋为 0 情况下, $R=1500, M_c=2, \omega=0.1$ 缠绕系数随 k_y/k_x 的变化 (a) A_2 随 k_y 的变化 (b) A_6 随 k_y 的变化

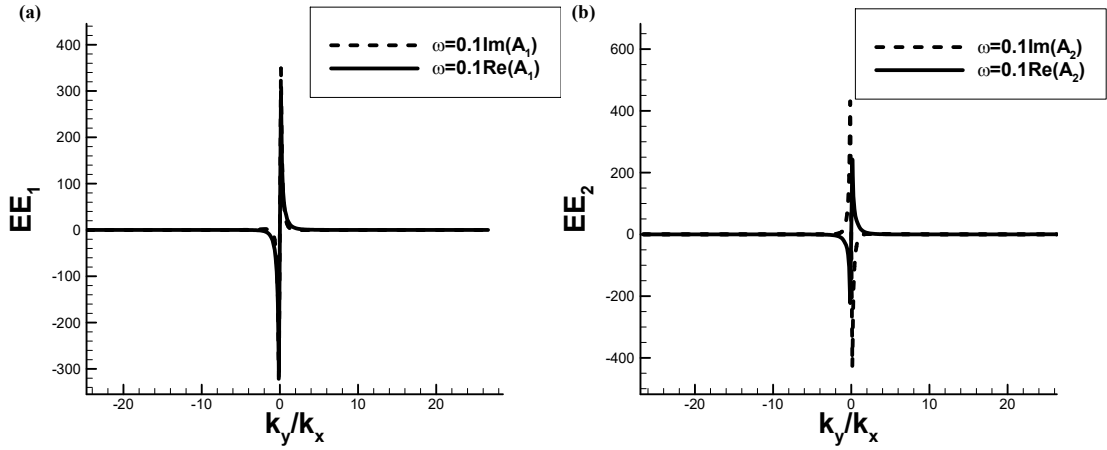


图 4-17 将 A_6^u 赋为 0 情况下, $R=1500, M_C=2, \omega=0.1$ 缠绕系数随 k_y/k_x 的变化 (a) A1 随 k_y 的变化 (b) A2 随 k_y 的变化

4.5 本章小结

本章给出了连续谱的分析思路, 边界条件的赋予方法和计算结果。给出了混合层上自由流声波强迫的扰动剖面和反射、透射系数。仔细观察涡模态和熵模态, 我们发现它们在自由流中存在缠绕现象: 即一对涡模态和一对熵模态在自由流中构成四个线性无关的基; 当任一扰动被引入时, 至少有另外扰动必须同时出现。这显然使自由流变得“不自由”。Wu & Dong(2013)^[4]和 Dong & Wu(2016)^[5]曾对这种非物理现象出现的本质进行了分析, 他们指出, 这是由于忽略了非平行效应而出现的。他们还基于渐近理论给出了符合物理现象的渐近解。本章计算了这些扰动之间互相依赖的缠绕系数。

第五章 结论与展望

本文以混合层为代表研究了自由剪切层流动的稳定性，对混合层失稳从离散谱分析和连续谱分析两方面开展了研究。

给出了混合层的离散谱和连续谱的计算结果，主要包括

（1）混合层内不稳定模态的特征值、特征函数结果。我们给出了典型亚声速模态、典型混合模态、超超模态的特征值和特征函数分布，并分析了对流马赫数的变化对典型亚声速模态、典型混合模态的最大增长率和中性频率的影响。

（2）混合层外扰动强迫的结果。我们给出了连续谱的计算结果，对涡波、声波、熵波激发的扰动进行了计算。讨论了声波入射混合层的散射现象以及涡、熵模态的非物理缠绕现象。

我们对混合层的离散谱和连续谱都进行了研究，并进行了分析，这一结果对理解混合层中扰动的产生和增长是有价值的。超声速混合层的稳定性问题与燃烧室内的流体掺混以及喷口外的噪声辐射有重要的联系。我们的结果对理解混合层的失稳机理有重要的理论意义，对可压缩自由剪切层的稳定性特性的研究也有很重要的基础意义。

本文的后续工作包括：

1. 分析不同机制下离散谱的渐近行为，揭示超声速、高超声速 Kelvin-Helmholtz 失稳的本质。
2. 分析混合层中离散谱模态的感受性问题。
3. 引入非平行性效应，研究正确描述混合层对涡波和熵波响应的方法。

参考文献

- [1] Ragab S. Instabilities in the Wake/mixing-layer Region of a Splitter Plate Separating Two Supersonic Streams[C]. 1st National Fluid Dynamics Conference, 1988: 3677.
- [2] Zhuang M, Kubota T, Dimotakis P. On the Instability of Inviscid, Compressible Free Shear Layers. 1st Natl[J]. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 1988: 88-3538.
- [3] Fedorov A V. Receptivity of a High-speed Boundary Layer to Acoustic Disturbances[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2003, 491: 101-129.
- [4] Dong M, Wu X. On continuous spectra of the Orr-Sommerfeld/Squire equations and entrainment of free-stream vortical disturbances[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2013, 732: 616-659.
- [5] Wu X, Dong M. Entrainment of Short-wavelength Free-stream Vortical Disturbances in Compressible and Incompressible Boundary Layers[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2016, 797: 683-728.
- [6] 李家春. 流体运动稳定性和渐近方法 [J]. 力学与实践, 1981 (4): 21—26, 35.
- [7] Drazin P G, Reid WH. Hydrodynamic Stability[M]. Cambridge University Press, 2004.
- [8] Lessen M, Fox J, Zien H. On the Inviscid Stability of the Laminar Mixing of Two Parallel Streams of a Compressible Fluid[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1965, 23(2): 355-367.
- [9] Gropengiesser H. On the Stability of Free Shear Layers in Compressible Flows[J]. Nasa Technical Report No. Tt F-12786, 1969.
- [10] Malik M R. Numerical Methods for Hypersonic Boundary Layer Stability[J]. Journal of Computational Physics, 1990, 86(2): 376-413.
- [11] Balakumar P, Malik M R. Discrete Modes and Continuous Spectra in Supersonic Boundary Layers[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1992, 239: 631-656.
- [12] Masad J, Malik M. Direct Computation of Boundary-layer Stability Characteristics[J]. Journal of Computational Physics, 1995, 117(2): 228-239.
- [13] Ragab S. Instabilities in the Free Shear Layer Formed By Two Supersonic Streams[C]. 26th Aerospace Sciences Meeting, 1988: 38.
- [14] Gill A. Instabilities of ‘Top - hat’ jets and Wakes in Compressible Fluids[J]. The Physics of Fluids, 1965, 8(8): 1428-1430.

- [15] Blumen W, Drazin P, Billings D. Shear Layer Instability of an Inviscid Compressible Fluid. Part 2[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1975, 71(2): 305-316.
- [16] Drazin P, Davey A. Shear Layer Instability of an Inviscid Compressible Fluid. Part 3[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1977, 82(2): 255-260.
- [17] Macaraeg M G, Streett C L, Hussaini M Y. A spectral collocation solution to the compressible stability eigenvalue problem[J], 1988.
- [18] Mack L M. On the Inviscid Acoustic-mode Instability of Supersonic Shear Flows[J]. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 1990, 2(2): 97-123.
- [19] Jackson T L, Grosch C E. Inviscid Spatial Stability of a Compressible Mixing Layer[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1989, 208(1): 609.
- [20] Tam C K, Burton D E. Sound Generated By Instability Waves of Supersonic Flows. Part 1. Two-dimensional Mixing Layers[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1984, 138: 249-271.
- [21] Qin H, Dong M. Boundary-layer Disturbances Subjected to Free-stream Turbulence and Simulation on Bypass Transition[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2016, 37(8): 967-986.
- [22] Zhang A, Dong M, Zhang Y. Receptivity of Secondary Instability Modes in Streaky Boundary Layers[J]. Physics of Fluids, 2018, 30(11): 114102.
- [23] Lock R. The Velocity Distribution in the Laminar Boundary Layer Between Parallel Streams[J]. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1951, 4(1): 42-63.
- [24] Tam C, Hu F. Instabilities of Supersonic Mixing Layers Inside a Rectangular Channel[C]. 1st National Fluid Dynamics Conference, 1988: 3675.
- [25] 罗纪生. 三维超音速混合层的稳定性分析及增强混合途径的研究[J]. 全国流体力学青年研讨会论文集, 2001.

附录 A

$$B_{11} = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T'$$

$$B_{12} = i\alpha l_1$$

$$B_{14} = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} U'$$

$$B_{21} = i\alpha l_1 / l_2$$

$$B_{22} = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T'$$

$$B_{23} = -R / (l_2 \mu)$$

$$B_{25} = i\beta l_1 / l_2$$

$$B_{32} = 1$$

$$B_{41} = 2(\gamma - 1)\sigma M^2 U'$$

$$B_{44} = 2k' / k$$

$$B_{45} = 2(\gamma - 1)\sigma M^2 W'$$

$$B_{52} = i\beta l_1$$

$$B_{54} = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} W'$$

$$B_{55} = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T'$$

$$C_{11} = -i\xi R / (\mu T) - (l_2 \alpha^2 + \beta^2)$$

$$C_{12} = -RU' / (\mu T) + \frac{i\alpha}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T'$$

$$C_{13} = -i\alpha R / \mu$$

$$C_{14} = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} U'' + \frac{1}{\mu} \frac{d^2 \mu}{dT^2} T' U'$$

$$C_{15} = -\alpha \beta l_1$$

$$C_{21} = i\alpha \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T' l_0 / l_2$$

$$C_{22} = -i\xi R / (l_2 \mu T) - (\alpha^2 + \beta^2) / l_2$$

$$C_{24} = i \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} (\alpha U' + \beta W') / l_2$$

$$C_{25} = i\beta \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T' l_0 / l_2$$

$$C_{31} = i\alpha$$

$$C_{32} = -T' / T$$

$$C_{33} = i\gamma M^2 \xi$$

$$C_{34} = -i\xi / T$$

$$C_{35} = i\beta$$

$$C_{42} = 2i(\gamma - 1)M^2 \sigma (\alpha U' + \beta W') - \sigma R T' / (\mu T)$$

$$C_{43} = i\xi(\gamma - 1)M^2 \sigma R / \mu$$

$$C_{44} = -i\xi R \sigma / (\mu T) - (\alpha^2 + \beta^2) + (\gamma - 1)M^2 \sigma \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} (U'^2 + W'^2) + k'' / k$$

$$C_{51} = -\alpha \beta l_1$$

$$C_{52} = i\beta \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} \right) T' - R W' / (\mu T)$$

$$C_{53} = -i\beta R / \mu$$

$$C_{52} = i\beta \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} \right) T' - R W' / (\mu T)$$

$$C_{53} = -i\beta R / \mu$$

$$C_{54} = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} W'' + \frac{1}{\mu} \frac{d^2 \mu}{dT^2} T' W'$$

$$C_{55} = -i\xi R / (\mu T) - (\alpha^2 + l_2 \beta^2)$$

其中'代表对 y 的导数，并且设

$$\xi = \alpha U + \beta W - \omega$$

$$l_j = j + \lambda / \mu$$

附 录 B

$$a_{12} = 1$$

$$a_{21} = i\xi R / (\mu T) + (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$a_{22} = -\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T'$$

$$a_{23} = U' R / (\mu T) - i\alpha l_1 T' / T - i\alpha \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T'$$

$$a_{24} = i\alpha R / \mu - \alpha l_1 \gamma M^2 \xi$$

$$a_{25} = -\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} U'' - \frac{1}{\mu} \frac{d^2\mu}{dT^2} T' U' + \alpha l_1 \xi / T$$

$$a_{26} = -\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} U'$$

$$a_{31} = -i\alpha$$

$$a_{33} = T' / T$$

$$a_{34} = -i\gamma M^2 \xi$$

$$a_{35} = i\xi / T$$

$$a_{37} = -i\beta$$

$$a_{41} = -i\chi l_2 \alpha T' / T - 2i\chi \alpha \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T'$$

$$a_{42} = -i\chi \alpha$$

$$a_{43} = -\gamma \left\{ i\xi R / (\mu T) + \alpha^2 + \beta^2 \right\} + l_2 \chi \left\{ \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T'^2 / T + T'' / T \right\}$$

$$a_{44} = -i\chi \gamma M^2 l_2 \left\{ \xi \left\{ \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T' + T' / T \right\} + \alpha U' + \beta W' \right\}$$

$$a_{45} = i\chi \left[(\alpha U' + \beta W') \left(\frac{l_2}{T} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} \right) + \xi \frac{l_2}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T' / T \right]$$

$$a_{46} = i l_2 \chi \zeta / T$$

$$a_{47} = -i\beta \chi \left[\frac{2}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T' + l_2 T' / T \right]$$

$$a_{48} = -i\beta \chi$$

$$a_{56} = 1$$

$$a_{62} = -2(\gamma - 1) M^2 \sigma U'$$

$$a_{63} = -2i(\gamma - 1)M^2\sigma(\alpha U' + \beta W') + \sigma RT' / (\mu T)$$

$$a_{64} = -i\xi(\gamma - 1)M^2\sigma R / \mu$$

$$a_{65} = i\xi R\sigma / (\mu T) + (\alpha^2 + \beta^2) - (\gamma - 1)M^2\sigma \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} (U'^2 + W'^2) - k'' / k$$

$$a_{66} = -2k' / k$$

$$a_{68} = -2(\gamma - 1)M^2\sigma W'$$

$$a_{78} = 1$$

$$a_{83} = -i\beta \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T' - i\beta l_1 T' / T + RW' / (\mu T)$$

$$a_{84} = i\beta R / \mu - \beta l_1 \gamma M^2 \xi$$

$$a_{85} = \beta l_1 \xi / T - \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} W'' - \frac{1}{\mu} \frac{d^2\mu}{dT^2} T' W'$$

$$a_{86} = -\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} W'$$

$$a_{87} = i\xi R / (\mu T) + \alpha^2 + \beta^2$$

$$a_{88} = -\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} T'$$

其中，()’指对 y 的导数，并且

$$\xi = (\alpha U + \beta W - \omega),$$

$$\chi = 1 / \{R / \mu + i\gamma M^2 \xi l_2\},$$

$$l_j = j + \lambda / \mu.$$

致 谢

四年时光弹指而过，感谢学校给予了我学习与成长的机会。学校图书馆为我提供了求知的沃土，课任老师的悉心教导为我的毕业设计研究打下了基础。四年里我从不谙世事的孩童成长为有一技之长的大四学生。我会铭记实事求是的校训，并在以后的人生中坚持严谨务实的态度。

感谢董明老师给我提供了开展毕业设计研究工作的机会。自确定题目以来，从公式推导到具体计算，董老师在各个环节都督促指导我完成工作，给了我很多帮助。并在我编程计算问题遇到困难时给予了很多宝贵的建议。同时，董老师对我遇到的问题都悉心地给予了解答，使得我可以顺利完成毕业设计。回顾自己完成毕业设计的过程，我能清晰地意识到自己做事更有条理，并且逐渐养成了做记录的习惯。另外，我比较完整地体会了解决问题的过程，作为本科生，这对我的帮助很大。