

曲线坐标系

胡友秋 编著

中国科学技术大学地球和空间科学学院
中国科学院基础等离子体物理重点实验室

郑重声明： 未经作者允许，不得以任何方式出版或翻印

衷心欢迎： 凡读过本材料者给作者提出批评建议 (email: huyq@ustc.edu.cn)

曲线坐标系

胡友秋 编著

中国科学技术大学地球和空间科学学院
中国科学院基础等离子体物理重点实验室
(2008 年 3 月初稿, 2010 年 2 月定稿)

目 录

1. 引 言	1
1.1 曲线坐标系	1
1.2 引入曲线坐标系的目的	1
1.3 本材料的主要内容	1
2. 引入过程和基本参数	2
2.1 坐标变换	2
2.2 基矢和逆基矢	2
2.3 度规系数和度规张量	5
2.4 位移矢量的分解	6
2.5 矢量的分解	7
2.6 与度规系数相关的两个恒等式	8
2.7 弧元、面元和体元	9
2.8 基矢的代数运算	10
3. 基矢的微分运算	10
3.1 引 言	10
3.2 基矢的散度	11
3.3 逆基矢的旋度	11
3.4 标量的梯度	12
3.5 基矢的方向导数	12
4. 张量的微分运算	14
4.1 矢量散度	14
4.2 矢量旋度	14
4.3 矢量梯度	14
4.4 矢量梯度之梯度	15
4.5 拉普拉斯算符	16
5. 正交曲线坐标系	16
5.1 定 义	16
5.2 拉梅系数和单位基矢	16
5.3 弧元、面元和体元	18
5.4 矢量和张量按单位基矢及其并矢展开	18
5.5 单位基矢的微分	19
5.6 标量的梯度和方向导数	21
5.7 矢量的散度	21
5.8 矢量的旋度	21
5.9 拉普拉斯算符	22
6. 具可忽略坐标的曲线坐标系	25
6.1 问题的提出	25
6.2 可忽略坐标的数学定义	25
6.3 可忽略坐标对应的基矢	25
6.4 Killing 矢量与黎曼曲率张量的关系	26
6.5 欧几里得空间 Killing 矢量的通解	27
6.6 由可忽略坐标基矢确定坐标	28
6.7 具可忽略坐标的坐标系的类型	28
7. 曲线坐标系的构建及张量微分运算举例	29
7.1 旋转椭球坐标系	29
7.2 磁面坐标系	33
7.3 任意曲面上面电流密度的二维散度	38
8. 任意坐标变换下的张量定义和张量运算	44
8.1 引 言	44
8.2 张量的定义	46
8.3 张量的代数运算	50
8.4 张量的微分运算	52
8.5 典型张量微分运算不变性的验证	52
8.6 狭义相对论中的正交线性变换	56

曲线坐标系

1. 引言

有关曲线坐标系的参考书甚多，但往往篇幅大，涉及背景知识和数学概念多，不便非数学专业人员阅读和尽快掌握相关运算技巧^{*}。本材料将简述曲线坐标系的基本知识和张量微分运算，重点放在运算技巧方面，略去严格繁琐的数学分析和论证，旨在给非数学专业人员提供一本关于曲线坐标系下张量微分运算的通俗读物。

1. 曲线坐标系

我们限于三维位置空间。该空间作为“欧几里得空间”的特例，需要 3 个坐标进行描述。最简单的坐标为直角坐标，由它们构成直角坐标系，又称“笛卡儿”坐标系。我们可以用直角坐标的 3 个彼此独立的连续可微函数作为新坐标，来取代 3 个直角坐标。新坐标的等值面一般为曲面，称为坐标曲面；不同坐标曲面之间的交线一般为曲线，称为坐标曲线。顾名思义，在某个坐标曲面上，对应坐标为常数，其余两个坐标可变；在某条坐标曲线上，对应坐标连续变化，其余两个坐标分别为常数。以上在直角坐标基础上引入的新坐标系，称为曲线坐标系。

2. 引入曲线坐标系的目的

为何要引入曲线坐标系，而不统一使用最为简单的直角坐标系呢？从物理角度考虑，大致可归纳为以下几个方面的原因：

- (1) 使解域边界或解域内的间断面与某个坐标曲面一致，便于处理边界条件和边值关系。
- (2) 便于针对物理问题的对称性质实现空间降维处理，把复杂的三维问题（因变量与全部 3 个空间坐标有关）转化为二维（仅与 2 个曲线坐标有关）甚至一维问题（仅与 1 个曲线坐标有关）。
- (3) 便于处理介质的各向异性。反映介质各向异性的介质参量为三维二阶张量，且物理规律本身常常要求这些张量为对称张量。通过选择合适的曲线坐标系，可使得它们对角化，从而只出现 3 个对角元素，由它们完全确定相应张量的性质。以磁化等离子体为例，它在平行和垂直于磁场方向的物理性质截然不同，相应出现的热传导系数、电导率、粘滞系数乃至等离子体压强均为张量。在这种情况下，可直接将磁力线选为一条坐标曲线，并选择其余两个坐标，共同构成正交曲线坐标系（其 3 个基矢彼此正交）。以下将这样构成的坐标系称为“磁力线坐标系”。在该坐标系中，上述张量将转化为对角张量，仅含 3 个对角元素。进一步，在这 3 个对角元素中，垂直方向上的两个元素一般相等，体现了该方向上的各向同性性质，以致独立元素的数目进一步缩减为 2 个。我们既可直接使用磁力线坐标系，也可以使用别的曲线坐标系 S 。对于后者，可通过磁力线坐标系和 S 系之间的变换关系，将对角化张量变换至 S 系中；经变换之后的张量虽可能出现 9 个非零分量，但其中只涉及 2 个独立参数，它们即为变换之前的张量的 2 个独立对角元素。

3. 本材料的主要内容

- (1) 介绍曲线坐标系的基本知识。
- (2) 给出曲线坐标系下的物理场张量的微分运算公式并介绍运算技巧。
- (3) 定义可忽略坐标，讨论具可忽略坐标的坐标系的可能类型。

^{*} 近年出版的若干张量分析的通俗读物提到曲线坐标系，便于阅读，参见本材料末尾提及的 3 本具代表性参考书。

(4) 举例说明曲线坐标系中的张量微分运算步骤和基本技巧。

(5) 任意坐标变换下的张量定义和张量运算。

本材料的读者只需具备场论、微分（含隐函数微分）和线性代数方面的基本知识，就能通过自学掌握本材料的全部内容；在学习过程中，应完成和重复全部推导过程，从中训练和熟悉计算技巧。

2. 引入过程和基本参数

1. 坐标变换

设 (x, y, z) 为三维位置空间的直角坐标，按下式确定曲线坐标：

$$x^i = x^i(x, y, z), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

要求变换函数为单值的连续可微函数，且变换的雅可比式满足

$$J \equiv \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(x, y, z)} \neq 0, \infty, \quad (2.2)$$

以确保曲线坐标 $x^i (i = 1, 2, 3)$ 之间相互独立，变换非奇异，同时可以将式(2.1)反演，获得 x, y 和 z 与曲线坐标的函数关系，确保这些函数也是单值的连续可微函数。

值得说明的是：允许变换式(2.1)在个别点、线和面上出现奇异性，即在这些局地奇异位置上 $J = 0, \infty$ ，或坐标出现多值。曲线坐标系存在局地奇异性，对其必须进行特别处理。此外，我们对曲线坐标采用上标记法。对下面即将定义的三维矢量和各阶张量，其分量也通过上标或下标表示，其中上标表示“逆变”指标，下标表示“协变”指标，可通过熟背“上逆下协”将这一约定记住。

2. 基矢和逆基矢

(1) 几何表述

如图 1 所示：过空间任意点 P 作出 3 个坐标曲面，它们的 3 条交线即为坐标曲线。针对 P 点定义基矢和逆基矢如下：基矢为相应坐标曲线的切向矢量，由粗实线箭头表示，记为 $e_i (i = 1, 2, 3)$ ；逆基矢为坐标曲面的法向矢量，由细实线箭头表示，记为 $e^i (i = 1, 2, 3)$ 。记住基矢编号为下标，逆基矢编号为上标，满足“上逆下协”的约定。

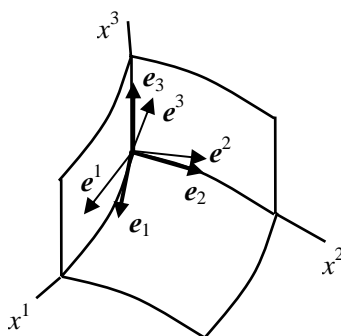


图 1 基矢和逆基矢的指向

注意上述关于基矢和逆基矢指向的定义均是针对考察点 P 而言的；考察点位置不同，一般将导致基矢和逆基矢的指向变化。因此，基矢和逆基矢均是空间位置或空间坐标的函数。此外，我们尚未就基矢和逆基矢的长度作出规定，这一问题留待下面解决。这里只强调一点，基矢和逆基矢不必

为单位矢量.

(2) 数学定义

如前所述, 沿 x^i 坐标曲线仅 x^i 本身变化, 其余两个坐标维持常数不变 (读者可类比直角坐标: 沿 x 轴仅 x 变化, y 和 z 维持不变). 用直角坐标下的位置矢量

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \quad (2.3)$$

表示沿 x^i 坐标曲线任意一点的位置, 式中 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 和 \mathbf{e}_z 为沿 3 个直角坐标轴方向的单位矢量; 则该位置矢量应是 x^i 的单值连续可微函数. 于是, 我们可视 x^i 为“参数”, 采用直角坐标将坐标曲线写成如下参数形式:

$$x = x(x^i), \quad y = y(x^i), \quad z = z(x^i); \quad \text{or} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i). \quad (2.4)$$

该曲线的切向矢量与 $\partial \mathbf{r} / \partial x^i$ 平行, 将后者定义为基矢:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.5)$$

由条件式(2.2)可知, $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$ 彼此独立 (或非共面), 但不一定相互正交, 且一般不是单位矢量, 即其长度一般不等于 1.

作为坐标曲面的法向矢量, 逆基矢可由基矢导出, 基本思路如下. 一个坐标曲面通过两条坐标曲线, 相应两条基矢恰好与坐标曲面相切. 于是我们可由两基矢的矢积去定义逆基矢. 先让我们计算由 3 个基矢构成的六面体的体积, 结果如下:

$$V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}. \quad (2.6)$$

推导中用到式(2.5). 由 3 个基矢非共面性质, 必有 $V \neq 0$. 在安排坐标变换式(2.1)时, 我们不难实现 $V > 0$, 这样的坐标系称为右旋坐标系; 以下我们默认 $V > 0$, 即限于右旋坐标系. 三个逆基矢定义如下:

$$\mathbf{e}^1 = \frac{1}{V}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{e}^2 = \frac{1}{V}(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{e}^3 = \frac{1}{V}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2). \quad (2.7)$$

通过简单的矢量运算可以证明

$$\mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3) = \frac{1}{V^3}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \cdot [(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)] = \frac{[\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)]^2}{V^3},$$

再由式(2.6)得

$$\mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3) = \frac{1}{V}. \quad (2.8)$$

上式表明, 3 个逆基矢同样具有非共面性质, 即它们彼此独立; 3 个逆基矢的混合积与对应的基矢混合积同号, 且互为倒数关系. 不过, 3 个逆基矢之间不一定相互正交, 且一般不是单位矢量.

在进行矢量分解和乘法 (点乘、叉乘) 运算时, 基矢的正交性将会提供便利. 在我们常用的直角坐标系、球坐标系和圆柱坐标系中, 3 个基矢彼此正交, 分别与相应逆基矢平行. 通常将它们合二而一, 全部转化为单位矢量. 于是, 我们可以十分方便地在这类坐标系中将矢量进行分解和乘法 (点乘或叉乘) 运算. 可是, 对于一般曲线坐标系来说, 上述定义的基矢一般互不正交, 逆基矢也是如此. 有趣的是, 在基矢和逆基矢之间存在正交关系, 使得我们在一般曲线坐标系中的矢量分解

和乘法运算同样方便。这正是人们在一般曲线坐标系中引入两套基矢的理由之一。

(3) 正交“归一”关系

基矢和逆基矢之间存在如下正交“归一”关系：

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_k^i = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad (2.9)$$

式中 δ_k^i 称为克罗内克 (Kronecker) 符号。上式可利用式(2.7)和式(2.6)通过简单的矢量运算去证明，例如

$$\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{V} (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = \frac{1}{V} (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_2 = 0,$$

等等。

正交归一条件不可理解为 $\mathbf{e}^i // \mathbf{e}_i$ ，二者之间的夹角可以不等于 0，但二者之间的标积等于 1。正因为如此，我们在“归一”一词上加上引号，以区别于通常对于归一含义的理解。

(4) 用逆基矢表示基矢

直接由式(2.6)和式(2.7)可证

$$\mathbf{e}_1 = V(\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3), \quad \mathbf{e}_2 = V(\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1), \quad \mathbf{e}_3 = V(\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2). \quad (2.10)$$

(5) 逆基矢表为曲线坐标的梯度

以上我们通过基矢的矢积即式(2.7)定义逆基矢，其几何意义是所定义的逆基矢与相应坐标曲面垂直。另一方面， x^i 的梯度 ∇x^i 也与坐标曲面垂直，也就是说 \mathbf{e}^i 应与 ∇x^i 平行。其实，我们可以证明二者恰好相等，即

$$\mathbf{e}^i = \nabla x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial x^i}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial x^i}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.11)$$

下面以 $\mathbf{e}^1 = \nabla x^1$ 为例给出证明。将变换式(2.1)反演求得直角坐标作为曲线坐标的函数：

$$x = x(x^1, x^2, x^3), \quad y = y(x^1, x^2, x^3), \quad z = z(x^1, x^2, x^3),$$

然后按隐函数求导的办法计算 $(\partial x^1 / \partial x)_{y,z}$ 。为此，分别对上面 3 个等式求微分得

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial x}{\partial x^3} dx^3, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial y}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial y}{\partial x^3} dx^3, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial z}{\partial x^3} dx^3. \end{aligned}$$

将上式视为 dx^1, dx^2 和 dx^3 的 3 元 1 次代数方程，其系数矩阵为 V (见式(2.6))。维持左边的源项 $dx \neq 0$ (表示对 x 求导)，令 $dy = dz = 0$ (表示求导时固定 y 和 z 不变)，则可由克拉玛法则解得

$$dx^1 = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial y}{\partial x^2} \frac{\partial z}{\partial x^3} - \frac{\partial y}{\partial x^3} \frac{\partial z}{\partial x^2} \right) dx = \frac{1}{V} \frac{\partial(y, z)}{\partial(x^2, x^3)} dx.$$

于是，我们最终求得

$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial x}\right)_{y,z} = \frac{1}{V} \frac{\partial(y,z)}{\partial(x^2,x^3)}.$$

至此完成隐函数求导过程. 上式即为 ∇x^i 的 x 分量. 另一方面, 由式(2.5)和式(2.7)有

$$(\mathbf{e}^1)_x = \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_x = \frac{1}{V} \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \frac{1}{V} \frac{\partial(y,z)}{\partial(x^2,x^3)}.$$

于是证得

$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial x}\right)_{y,z} = (\mathbf{e}^1)_x.$$

同理可证

$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial y}\right)_{x,z} = (\mathbf{e}^1)_y, \quad \left(\frac{\partial x^1}{\partial z}\right)_{x,y} = (\mathbf{e}^1)_z,$$

从而最终证得 $\mathbf{e}^i = \nabla x^i$ 成立. 对于式(2.11)的其余两个等式 ($i=2,3$), 证明步骤类似, 证毕.

将式(2.11)代入式(2.8)得

$$\mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3) = \frac{1}{V} = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(x, y, z)} = J = \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} \right]^{-1}, \quad (2.12)$$

推导过程中用到式(2.2)和式(2.6). 上式表明, V 的倒数正好等于坐标变换式(2.1)的雅克比式.

3. 度规系数和度规张量

(1) 度规系数

度规系数定义如下:

$$g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = g_{ki}, \quad g^{ik} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k = g^{ki}. \quad (2.13)$$

由点乘运算的互易性, 可证明度规系数对指标的对称性: $g_{ik} = g_{ki}$, $g^{ik} = g^{ki}$.

(2) 度规张量

以并逆基矢或并基矢为“基底”, 由相应度规系数按如下方式构成的二阶张量称为度规张量:

$$\tilde{\mathbf{G}} = g_{ik} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k = g^{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k. \quad (2.14)$$

在上式中, 我们使用了同指标求和约定, 且一对求和指标总是一上一下, 或者说一逆一协. 同指标求和约定又称为爱因斯坦约定. 在本材料中, 除非做出特别说明, 我们一律遵循爱因斯坦约定. 有关上式表示的量为二阶张量这一点, 将在第 8 节做出说明. 由度规系数的对称性, 自然推得度规张量为对称张量. 此外, g_{ik} 表示度规张量的协变分量, g^{ik} 则表示它的逆变分量, 与前述“上逆下协”的命名规则一致.

(3) 度规张量与空间性质

度规系数完全决定了空间的度量性质和几何结构, 下面将作出具体说明. 以上通过欧几里得空间的坐标变换引入度规张量, 经变换得到的空间仍属于欧几里得空间. 其实, 度规张量的分量可以随意规定, 只要求它是非退化的, 即它对应的矩阵 $\mathbf{G} = (g_{ik})$ 的行列式不为零 ($\det(\mathbf{G}) \neq 0$). 如果度规张量是对称的, 按它规定度量性质的空间称为黎曼空间; 其中, 由度规张量确定的所谓“黎曼

曲率张量”（参见第 4 节）等于零的空间称为欧几里得空间，又称“平直空间”；否则属于“弯曲空间”。在坐标变换下，度规系数（即度规张量分量）会发生变化，但度规张量和黎曼曲率张量作为一个整体维持不变。因此，坐标变换不会改变空间的本来性质，例如欧几里得空间经坐标变换之后，仍为欧几里得空间。顺便指出，引力空间属于（四维）弯曲空间，其黎曼曲率张量不为零，将在广义相对论中进行定量分析。这些概念与我们关注的曲线坐标系和相关运算并无直接关系，提及它们只是为了定性说明坐标变换、度规张量与空间性质之间的关系。

(4) 曲线坐标下的度规系数表达式

由坐标变换式，按式(2.5)和式(2.11)可获得所需要的度规系数

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial x^i} \frac{\partial x}{\partial x^k} + \frac{\partial y}{\partial x^i} \frac{\partial y}{\partial x^k} + \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial z}{\partial x^k}, \quad (2.15)$$

$$g^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x} \frac{\partial x^k}{\partial x} + \frac{\partial x^i}{\partial y} \frac{\partial x^k}{\partial y} + \frac{\partial x^i}{\partial z} \frac{\partial x^k}{\partial z}. \quad (2.16)$$

4. 位移矢量的分解

位移矢量即位置矢量 \mathbf{r} 的微分 $d\mathbf{r}$ ，它是张量微分的基础。

(1) 位移矢量按基矢分解

由式(2.5)得

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i = dx^i \mathbf{e}_i. \quad (2.17)$$

上式即为 $d\mathbf{r}$ 按基矢的展开式，其展开系数 dx^i 为位移矢量的逆变分量。再次提醒注意：基矢 \mathbf{e}_i 的模一般不等于 1，且不同基矢之间一般不正交。

(2) 位移矢量按逆基矢分解

也可以将 $d\mathbf{r}$ 按逆基矢展开，设展开式如下：

$$d\mathbf{r} = dx_k \mathbf{e}^k. \quad (2.18)$$

相应， dx_k 为 $d\mathbf{r}$ 的协变分量。既代表同一矢量，协变分量和逆变分量之间一定存在某种换算关系，下面就来分析这种关系。

(3) 位移矢量协变分量和逆变分量的关系

由式(2.17)和式(2.18)得

$$d\mathbf{r} = dx^i \mathbf{e}_i = dx_k \mathbf{e}^k.$$

将上式与 \mathbf{e}_k 点乘，利用正交归一关系式(2.9)和式(2.13)得

$$dx^i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) = dx_k \Rightarrow dx_k = g_{ik} dx^i.$$

若改为与 \mathbf{e}^i 点乘，则相应结果为

$$dx^i = dx_k (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k) \Rightarrow dx^i = g^{ik} dx_k.$$

将上述结果写在一起：

$$dx_k = g_{ik} dx^i, \quad dx^i = g^{ik} dx_k. \quad (2.19)$$

上式中，求和指标同样是一上一下，即一逆一协。

(4) 度规张量的协变分量和逆变分量的关系

将 g^{jk} 乘以式(2.19)中第 1 式对 k 求和得

$$g^{jk} dx_k = g^{jk} g_{ik} dx^i.$$

接着由式(2.19)中的第 2 式（令其中 $i = j$ ）可知上式左边等于 dx^j ，或将其等效地写为 $\delta_i^j dx^i$ ，于是得

$$g^{jk} g_{ik} dx^i = \delta_i^j dx^i.$$

由 dx^i 的任意性，上式成立的充分必要条件是

$$g^{jk} g_{ik} = \delta_i^j. \quad (2.20)$$

上式表明，由度规张量协变分量构成的矩阵与由度规张量逆变分量构成的矩阵互逆，即

$$G = (g_{ik}), \quad G^{-1} = (g^{ik}). \quad (2.21)$$

5. 矢量的分解

对于矢量 \mathbf{f} ，同样存在两种分解方式：

$$\mathbf{f} = f^i \mathbf{e}_i = f_k \mathbf{e}^k, \quad (2.22)$$

f^i 为逆变分量， f_k 为协变分量。

(1) 矢量分量的计算

由基矢与逆基矢之间的正交归一关系式(2.9)易证

$$f^i = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}^i, \quad f_k = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_k. \quad (2.23)$$

(2) 矢量协变分量和逆变分量的关系

将式(2.22)代入式(2.23)，并利用式(2.13)得

$$\begin{aligned} f^i &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}^i = f_k \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^i = g^{ik} f_k, \\ f_k &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_k = f^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = g_{ik} f^i, \end{aligned}$$

即

$$f_k = g_{ik} f^i, \quad f^i = g^{ik} f_k. \quad (2.24)$$

上式与位移矢量协变、逆变分量的关系式(2.19)形式类似。这是预料中的结果，既然位移矢量也是矢量。

(3) 由度规系数给出基矢和逆基矢的关系

前面得到的式(2.7)和式(2.10)已经给出基矢和逆基矢之间的关系。下面设法通过度规系数来表达这种关系。将式(2.24)代入式(2.22)得

$$\mathbf{f} = f^i \mathbf{e}_i = f_k \mathbf{e}^k = g_{ik} f^i \mathbf{e}^k.$$

由 f^i 的任意性得 $\mathbf{e}_i = g_{ik} \mathbf{e}^k$ ；通过类似步骤可证 $\mathbf{e}^k = g^{ik} \mathbf{e}_i$ 。于是通过度规系数给出的基矢和逆基矢的关系如下：

$$\mathbf{e}_i = g_{ik} \mathbf{e}^k, \quad \mathbf{e}^k = g^{ik} \mathbf{e}_i. \quad (2.25)$$

上述基矢与逆基矢的关系在张量微分运算中特别有用. 基矢、逆基矢关系式(2.25)与位移矢量协变、逆变分量关系式(2.19)形式上也是类似的.

6. 与度规系数相关的两个恒等式

$$V^2 = \det(G), \quad (2.26)$$

$$V^2 = \frac{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}{g^{11}} = \frac{g_{11}g_{33} - g_{13}^2}{g^{22}} = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g^{33}}. \quad (2.27)$$

(1) 恒等式(2.26)的证明

将式(2.25)代入式(2.6)得

$$V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = g_{1i}g_{2j}g_{3k} \mathbf{e}^i \cdot (\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k). \quad (2.28)$$

引入交错符号

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{下标偶排列} \\ -1, & \text{下标奇排列} \\ 0, & \text{下标出现重复} \end{cases} \quad (2.29)$$

其中偶排列指的是排列 123 及其相邻下标实施偶次置换操作后的结果, 奇排列指的是排列 123 的相邻下标实施奇次置换操作后的结果. 容易看出, 对两个相邻下标实施奇次置换操作之后, ε_{ijk} 反号; 偶次置换操作之后, ε_{ijk} 维持不变. 使用 ε_{ijk} , 可将 $\det(G)$ 写成

$$\det(G) = \varepsilon_{ijk} g_{1i}g_{2j}g_{3k} \equiv g,$$

式中 g 为度规系数矩阵的行列式. 由式(2.12)得

$$\mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3) = \frac{1}{V} \varepsilon_{123} \Rightarrow \mathbf{e}^i \cdot (\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k) = \frac{1}{V} \varepsilon_{ijk}.$$

将上述两式代入式(2.28)得

$$V = \frac{1}{V} \varepsilon_{ijk} g_{1i}g_{2j}g_{3k} = \frac{1}{V} \det(G),$$

证毕.

(2) 恒等式(2.27)的证明

由式(2.21)得 $GG^{-1} = G(g^{ik}) = I$ (I 为单位矩阵), 亦即

$$G \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

将上述代数方程组拆成如下 3 个部分:

$$G \begin{pmatrix} g^{11} \\ g^{21} \\ g^{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} g^{12} \\ g^{22} \\ g^{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} g^{13} \\ g^{23} \\ g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

各部分均为 3 元 1 次代数方程组, 其系数矩阵同为 G . 由克拉玛法则, 可分别解得 g^{11} 、 g^{22} 和 g^{33} , 结果如下:

$$g^{11} = \frac{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}g_{33} - g_{13}^2}{g}, \quad g^{33} = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g}.$$

将 $g = \det(G) = V^2$ (参见式(2.26)) 代入上式, 即证得式(2.27), 证毕.

顺便指出, 交错符号 ε_{ijk} 与克罗内克符号 δ_i^j 之间存在如下重要关系:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_j^m\delta_k^n - \delta_j^n\delta_k^m. \quad (2.30)$$

上式可通过列举法给予证明. 当张量运算式中出现两次叉乘运算时, 在直角坐标下将运算式展开之后将连续两次出现交错符号, 这时式(2.30)特别有用. 下面举例说明它的应用.

例 1 证明如下等式成立 (同指标求和):

$$\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_m^n, \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6.$$

证 利用式(2.30)得

$$\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{ijn} = \delta_j^j\delta_m^n - \delta_j^n\delta_m^j = 3\delta_m^n - \delta_m^n = 2\delta_m^n,$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \delta_j^j\delta_k^k - \delta_j^k\delta_k^j = 3 \times 3 - 3 = 6.$$

证毕.

7. 弧元、面元和体元

弧元、面元和体元是描述空间度量性质和几何结构的基本要素, 它们的表达式涉及坐标微分和度规系数, 下面一一导出. 空间的几何图形由弧元、面元和体元这些基本要素构成, 而这些要素由坐标微分和度规系数确定, 因此我们说度规系数完全决定了空间的度量性质和几何结构.

(1) 弧元: 弧元 ds 的表达式可通过位移矢量 $d\mathbf{r}$ 求模得到. 由式(2.17)、式(2.18)和式(2.13)得

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_{ij}dx^i dx^j = g^{ij}dx_i dx_j. \quad (2.31)$$

上式即为度规张量决定空间度量性质的数学表述: 度规系数 (或度规张量) 确定了弧元 (长度) 与坐标微分之间的关系.

写下沿坐标曲线方向的位移矢量 (又称弧元矢量):

$$d\mathbf{s}_1 = \mathbf{e}_1 dx^1, \quad d\mathbf{s}_2 = \mathbf{e}_2 dx^2, \quad d\mathbf{s}_3 = \mathbf{e}_3 dx^3, \quad (2.32)$$

其模为 (利用式(2.13))

$$ds_1 = \sqrt{g_{11}}dx^1, \quad ds_2 = \sqrt{g_{22}}dx^2, \quad ds_3 = \sqrt{g_{33}}dx^3. \quad (2.33)$$

(2) 面元: 沿各坐标曲面的面元的表达式由弧元矢量按如下方式导出:

$$\begin{cases} d\mathbf{a}_1 = d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{s}_3 = V dx^2 dx^3 \mathbf{e}^1, \\ d\mathbf{a}_2 = d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1 = V dx^1 dx^3 \mathbf{e}^2, \\ d\mathbf{a}_3 = d\mathbf{s}_1 \times d\mathbf{s}_2 = V dx^1 dx^2 \mathbf{e}^3. \end{cases} \quad (2.34)$$

各面元的模可由上式和式(2.27)导出, 结果如下:

$$\begin{cases} da_1 = V\sqrt{g^{11}}dx^2dx^3 = \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}dx^2dx^3, \\ da_2 = V\sqrt{g^{22}}dx^1dx^3 = \sqrt{g_{11}g_{33} - g_{13}^2}dx^1dx^3, \\ da_3 = V\sqrt{g^{33}}dx^1dx^2 = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}dx^1dx^2. \end{cases} \quad (2.35)$$

(3) 体元：由式(2.32)、式(2.6)和式(2.26)得

$$d\tau = ds_1 \cdot (ds_2 \times ds_3) = Vdx^1dx^2dx^3 = \sqrt{g}dx^1dx^2dx^3. \quad (2.36)$$

8. 基矢的代数运算

张量的代数运算归结为基矢、逆基矢之间的代数运算。基矢、逆基矢之间的点乘由式(2.9)和式(2.13)规定，基矢之间或逆基矢之间的叉乘（矢积）运算由式(2.7)和式(2.10)表述。碰到基矢与逆基矢之间的叉乘，可利用式(2.25)将逆基矢相对基矢展开或反之，转化为基矢之间或逆基矢之间的叉乘运算。以矢量 \mathbf{f} 和 \mathbf{h} 之间的点乘为例，可按如下 4 种方式进行：

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{h} = f^i \mathbf{e}_i \cdot h^k \mathbf{e}_k = f^i h^k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k),$$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{h} = f_i \mathbf{e}^i \cdot h_k \mathbf{e}^k = f_i h_k (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k),$$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{h} = f^i \mathbf{e}_i \cdot h_k \mathbf{e}^k = f^i h_k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k),$$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{h} = f_i \mathbf{e}^i \cdot h^k \mathbf{e}_k = f_i h^k (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k).$$

其中涉及基矢之间、逆基矢之间以及基矢与逆基矢之间的点乘。由式(2.9)和式(2.13)求得上述四种计算方案的答案分别为 $g_{ik}f^i h^k$ 、 $g^{ik}f_i h_k$ 、 $f^i h_i$ 和 $f_i h^i$ ；利用矢量协变分量和逆变分量之间的关系式(2.24)，很容易证明这些答案彼此相等。

基矢和逆基矢之间还存在并列运算。基矢和逆基矢本身，以及由它们之间的并列运算的产物，将作为矢量和张量展开式的“基底”（参见第 8 节）。

3. 基矢的微分运算

1. 引言

对于曲线坐标系来说，基矢因点而异。对张量进行微分运算时，不仅要对方分量微分，还要对基底所涉及的基矢（或逆基矢）微分。对方量的微分类似于一般标量微分，容易处理；关键是如何实现对基矢的微分运算。因此，基矢的微分运算是一切张量微分运算的基础。

以矢量的散度和旋度为例，将矢量 \mathbf{f} 写成基矢或逆基矢的线性组合(参见式(2.22))：

$$\mathbf{f} = f^i \mathbf{e}_i = f_k \mathbf{e}^k.$$

对于散度计算，我们采用第 1 个展式，求得 \mathbf{f} 的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot (f^i \mathbf{e}_i) = (\nabla f^i) \cdot \mathbf{e}_i + f^i \nabla \cdot \mathbf{e}_i. \quad (3.1)$$

对于旋度计算，我们采用第 2 个展式，求得 \mathbf{f} 的旋度为

$$\nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times (f_i \mathbf{e}^i) = (\nabla f_i) \times \mathbf{e}^i + f_i \nabla \times \mathbf{e}^i. \quad (3.2)$$

完成上述计算的关键在于计算基矢的散度和逆基矢的旋度。至于就散度和旋度计算针对矢量展开式的不同选择，完全出于计算方便；通过以下基矢的散度和逆基矢的旋度计算可以清晰理解这一点。

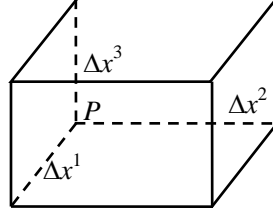


图2 用于基矢散度计算的体积元 $\Delta\tau$

2. 基矢的散度

为计算基矢的散度，我们从散度的原始定义出发：

$$\nabla \cdot \mathbf{e}_i = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oint_A \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{a}, \quad (3.3)$$

式中 $\Delta\tau$ 为由坐标面元构成的六面体体积，示于图2，图中 $P(x^1, x^2, x^3)$ 为六面体的顶点， Δx^1 、 Δx^2 和 Δx^3 为边长， A 为边界（闭合曲面）。

由式(2.36)和式(2.34)分别求得六面体的体积和三个面元矢量如下：

$$\Delta\tau = V \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3,$$

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{a}_1 = V \Delta x^2 \Delta x^3 \mathbf{e}^1, \\ \Delta \mathbf{a}_2 = V \Delta x^1 \Delta x^3 \mathbf{e}^2, \\ \Delta \mathbf{a}_3 = V \Delta x^1 \Delta x^2 \mathbf{e}^3. \end{cases}$$

由于 $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$ ，只有以 \mathbf{e}_i 为法向的面元即面元 $\Delta \mathbf{a}_i$ 对式(3.3)右边的积分有贡献。这样的面元有两个：一个位于 x^i ，另一个位于 $x^i + \Delta x^i$ ，两个面元面积的差别仅来自乘子 V 随 x^i 的变化。于是，式(3.3)右边的积分化为

$$\frac{1}{\Delta\tau} \oint_A \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{a} \approx \frac{1}{V(x_i) \Delta x^i} [V(x^i + \Delta x^i) - V(x^i)] \approx \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial x^i}. \quad (3.4)$$

在以上推导过程中，体元 $\Delta\tau$ 中3个弧元乘子被面元 $d\mathbf{a}_i$ 中的2个弧元乘子消去之后，余下一个弧元乘子 Δx^i 留在分母；将式(3.4)代入式(3.3)之后取极限 $\Delta\tau \rightarrow 0$ （即 $\Delta x^i \rightarrow 0$ ），式(3.4)中的近似相等变为严格相等，最终求得基矢的散度公式如下：

$$\nabla \cdot \mathbf{e}_i = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial x^i} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^i}, \quad (i=1,2,3) \quad (3.5)$$

最后一个等式用到 $g = \det(G) = V^2$ （参见式(2.26)）。由以上推导过程可见，选择求基矢 \mathbf{e}_i 的散度，便于直接利用基矢和逆基矢之间的正交归一关系，简化推导过程，最终求得的基矢散度表达式也较为简单。与此相应，在求矢量散度时，应当将作用对象按基矢展开，按式(3.1)给出的方式进行计算。

3. 逆基矢的旋度

由式(2.11)，逆基矢等于曲线坐标 x^i 的梯度，故其旋度为零：

$$\nabla \times \mathbf{e}^i = 0, \quad (i=1,2,3) \quad (3.6)$$

顺便指出，基矢的旋度一般不等于零。在求旋度时，应当将作用对象按逆基矢展开，按式(3.2)给出的方式进行计算，其中右边第2项恒等于零。

4. 标量的梯度

标量 ϕ 的梯度表达式可从 ϕ 的全微分表达式中获取：

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \mathbf{e}^i \cdot d\mathbf{r} = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r};$$

由 $d\mathbf{r}$ 的任意性，推得 $\nabla \phi$ 的表达式如下：

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \mathbf{e}^i. \quad (3.7)$$

注意， $\partial \phi / \partial x^i$ 为 $\nabla \phi$ 的协变分量。

虽说矢量和张量的分量不是标量，但作为单个数量，同样可使用式(3.7)计算它的“梯度”（这类梯度自然也非矢量）。例如，出现在式(3.1)和式(3.2)中的 ∇f^i 和 ∇f_i 就属于这类梯度。

5. 基矢的方向导数

一般物理教科书的附录只给出正交曲线坐标系（参见第5节）中的梯度、散度、旋度和拉普拉斯算符公式，但在连续介质力学的动力学方程中常会出现方向导数运算。对于这类运算，一般只好利用如下矢量恒等式，将方向导数转化为梯度、散度和旋度运算：

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f} &= \nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) + \nabla (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f}) \\ &\quad - \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + \mathbf{g} \nabla \cdot \mathbf{f} - \mathbf{f} \nabla \cdot \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

从该式出发，由给定的梯度、散度和旋度表达式，原则上可以导出方向导数在各类正交曲线坐标系中的表达式。由式(3.8)可见，这类推导相当繁琐。

如果将矢量 \mathbf{f} 和 \mathbf{g} 相对基矢展开，方向导数的计算将变得十分简单：

$$(\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f} = g^i \mathbf{e}_i \cdot \nabla (f^k \mathbf{e}_k) = g^i (\mathbf{e}_i \cdot \nabla f^k) \mathbf{e}_k + f^k g^i (\mathbf{e}_i \cdot \nabla \mathbf{e}_k), \quad (3.9)$$

其中关键在于计算基矢的方向导数 $\mathbf{e}_i \cdot \nabla \mathbf{e}_k$ 。为此，在式(3.8)中取 $\mathbf{f} = \mathbf{e}_\rho$ ， $\mathbf{g} = \mathbf{e}_\sigma$ （希腊字母 σ 和 ρ 表示整数标号，在1到3间取值，与 i, j 等作用相同）得

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla) \mathbf{e}_\rho &= \nabla \times (\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\sigma) + \nabla (\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\sigma) - \mathbf{e}_\sigma \times (\nabla \times \mathbf{e}_\rho) - \mathbf{e}_\rho \times (\nabla \times \mathbf{e}_\sigma) + \mathbf{e}_\sigma \nabla \cdot \mathbf{e}_\rho - \mathbf{e}_\rho \nabla \cdot \mathbf{e}_\sigma \\ &= \nabla \times [V(\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\sigma / V)] + \nabla g_{\rho\sigma} - \mathbf{e}_\sigma \times [\nabla \times (g_{\rho\mu} \mathbf{e}^\mu)] \\ &\quad - \mathbf{e}_\rho \times [\nabla \times (g_{\sigma\mu} \mathbf{e}^\mu)] + [(\partial g / \partial x^\rho) \mathbf{e}_\sigma - (\partial g / \partial x^\sigma) \mathbf{e}_\rho] / (2g), \end{aligned}$$

推导中依次用到式(2.13)、式(2.25)和式(3.5)。上式右边第一项化为

$$\nabla \times [V(\frac{1}{V} \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\sigma)] = \nabla V \times (\frac{1}{V} \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\sigma) = \frac{1}{2g} \nabla g \times (\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\sigma) = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\sigma} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\rho} \mathbf{e}_\sigma,$$

推导中依次用到式(3.6)、式(2.7)、式(3.7)和式(2.9)。代回原式得

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla) \mathbf{e}_\rho &= \mathbf{e}_\rho \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\rho} \mathbf{e}_\sigma + \nabla g_{\rho\sigma} - \mathbf{e}_\sigma \times (\nabla g_{\rho\mu} \times \mathbf{e}^\mu) \\ &\quad - \mathbf{e}_\rho \times (\nabla g_{\sigma\mu} \times \mathbf{e}^\mu) + \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\rho} \mathbf{e}_\sigma - \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\sigma} \mathbf{e}_\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla g_{\rho\sigma} - \delta_{\sigma}^{\mu} \nabla g_{\rho\mu} + (\mathbf{e}_{\sigma} \cdot \nabla g_{\rho\mu}) \mathbf{e}^{\mu} - \delta_{\rho}^{\mu} \nabla g_{\sigma\mu} + (\mathbf{e}_{\rho} \cdot \nabla g_{\sigma\mu}) \mathbf{e}^{\mu} \\
&= -\nabla g_{\rho\sigma} + (\mathbf{e}_{\sigma} \cdot \nabla g_{\rho\mu} + \mathbf{e}_{\rho} \cdot \nabla g_{\sigma\mu}) \mathbf{e}^{\mu} = -\nabla g_{\rho\sigma} + \left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \right) \mathbf{e}^{\lambda}.
\end{aligned}$$

在推导过程中依次用到式(3.7)、式(2.9)和度规张量的对称性，最后一步将求和指标 μ 换成 λ 。利用式(3.7)，上式最终化为

$$(\mathbf{e}_{\sigma} \cdot \nabla) \mathbf{e}_{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \right) \mathbf{e}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \right) \mathbf{e}_{\mu}, \quad (3.10)$$

其中第 2 个等式用到式(2.25)。

定义

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \right), \quad (3.11)$$

则可将式(3.10)简写为

$$(\mathbf{e}_{\sigma} \cdot \nabla) \mathbf{e}_{\rho} = \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} \mathbf{e}_{\mu}. \quad (3.12)$$

$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}$ 为基矢 \mathbf{e}_{ρ} 沿 \mathbf{e}_{σ} 的方向导数的逆变分量，称为“仿射联络”。由度规张量的对称性，易判断仿射联络对下指标对称，即

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} = \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu}. \quad (3.13)$$

由仿射联络对下标的对称性及式(3.12)，不难看出基矢的方向导数满足如下互易关系：

$$(\mathbf{e}_{\sigma} \cdot \nabla) \mathbf{e}_{\rho} = (\mathbf{e}_{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{e}_{\sigma}. \quad (3.14)$$

对固定的一组 ρ 和 σ ， $\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}$ 为一个矢量的逆变分量，该矢量即 $(\mathbf{e}_{\sigma} \cdot \nabla) \mathbf{e}_{\rho}$ 或 $(\mathbf{e}_{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{e}_{\sigma}$ 。如果允许 ρ 和 σ 在 1 到 3 间取值，则 $\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}$ 有 $3^3 = 27$ 个分量，但它并不代表一个三阶张量的分量。也就是说，将所有 9 个方向导数凑在一起，并不能构成三阶张量；或者一般地说，由若干个低阶张量的分量凑在一起，并不能构成高阶张量。关于 $\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}$ 不构成三阶张量这一结论，将在第 8 节给出证明。

其实，从曲线坐标系中的张量微分运算角度，大可不必引入和计算仿射联络，只需引入和计算度规张量就足够了。换句话说，我们在实施曲线坐标系中的张量微分运算时，只需计算 9 个度规系数，用不着去计算仿射联络的 27 个分量（其中独立分量数目为 18 个）。之所以在这里引入仿射联络，纯粹出于便于表述之目的。在下一节提到矢量梯度运算，在第 6 节讨论可忽略坐标，以及在第 8 节验证张量微分运算的不变性时，会用到仿射联络这种简便表示。

本节得到的式(3.5)~(3.7)和式(3.10)十分有用；从它们出发，可以在任意曲线坐标系下准确、便捷地导出各类张量微分运算表达式及其分量形式。

在结束本节之前，我们再强调一点。基矢（逆基矢）的运算，包括第 2 节末提到的代数运算和本节介绍的微分运算，系张量运算的中间步骤，它们的运算结果一般不是张量，亦即基矢（逆基矢）的运算不具备相对坐标变换的不变性。仿射联络作为基矢方向导数的产物并不构成张量（参见式(3.12)），就是一个典型例子。不过，一旦将分解后的所有涉及基矢（逆基矢）微分的运算结果合成起来，所得到的张量微分的最终结果必为张量。有关这一点，将在第 8 节做进一步说明。

4. 张量的微分运算

本节从上节的标量梯度和基矢微分公式出发，导出各类张量的微分公式。为方便起见，重抄有关公式如下：

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \mathbf{e}^i. \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{e}_i = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial x^i} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^i}, \quad (i=1,2,3) \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{e}^i = 0, \quad (i=1,2,3) \quad (4.3)$$

$$(\mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla) \mathbf{e}_\rho = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\lambda} \right) \mathbf{e}_\mu = \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad (\rho, \sigma = 1,2,3) \quad (4.4)$$

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\lambda} \right), \quad (\rho, \sigma = 1,2,3) \quad (4.5)$$

1. 矢量散度

从矢量 \mathbf{f} 相对基矢的展开式出发，利用式(4.1)和式(4.2)得

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot (f^i \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \cdot \nabla f^i + f^i \nabla \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial f^i}{\partial x^i} + \frac{f^i}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} f^i). \quad (4.6)$$

2. 矢量旋度

从矢量 \mathbf{f} 相对逆基矢的展开式出发，利用式(4.1)和式(4.3)得

$$\nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times (f_i \mathbf{e}^i) = \nabla f_i \times \mathbf{e}^i = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^i.$$

将式(2.10)改写成如下等效形式：

$$\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^i = \frac{1}{V} \varepsilon_{kji} \mathbf{e}_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon_{kji} \mathbf{e}_k,$$

式中 ε_{kji} 为交错符号，由式(2.29)定义；于是上述 $\nabla \times \mathbf{f}$ 的表达式化为

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \varepsilon_{kji} \mathbf{e}_k, \quad (4.7)$$

或写成如下便于应用的形式：

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} \right) \mathbf{e}_3 \right\}. \quad (4.8)$$

3. 矢量梯度

在黎曼几何学中将**矢量梯度**称为**一阶绝对导数**，或**一阶协变导数**，其结果为**二阶张量**。以并逆基矢为基底将矢量梯度展开：

$$\nabla f = f_{\rho;\sigma} \mathbf{e}^\sigma \mathbf{e}^\rho, \quad (4.9)$$

式中 $f_{\rho;\sigma}$ 为 ∇f 的协变分量，前一个下标 ρ 为矢量 f 的协变分量编号，后一个下标为被微分坐标序号；二者之间用分号隔开，以示区别。由正交归一关系式(2.9)，容易求得矢量梯度的协变分量如下：

$$f_{\rho;\sigma} = \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\sigma : \nabla f, \quad (4.10)$$

式中“:”号表示双点乘。下面推导 $f_{\rho;\sigma}$ 的具体表达式。

利用式(4.1)、式(4.4)和正交归一关系式(2.9)得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\sigma : \nabla f &= (\mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla f) \cdot \mathbf{e}_\rho = [\mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla (f_\mu \mathbf{e}^\mu)] \cdot \mathbf{e}_\rho = (\mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla f_\mu) \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}_\rho + f_\mu (\mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla \mathbf{e}^\mu) \cdot \mathbf{e}_\rho \\ &= \mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla f_\rho + f_\mu \mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla (\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}_\rho) - f_\mu (\mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla \mathbf{e}_\rho) \cdot \mathbf{e}^\mu = \frac{\partial f_\rho}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\rho\sigma}^\mu f_\mu, \end{aligned}$$

于是式(4.10)化为

$$f_{\rho;\sigma} = \frac{\partial f_\rho}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\rho\sigma}^\mu f_\mu. \quad (4.11)$$

上式右边第1项为矢量协变分量 f_ρ 本身的偏导数，第2项为逆基矢偏导数的贡献，这一贡献来自逆基矢的空间非均匀性。

4. 矢量梯度之梯度

在黎曼几何学中将矢量梯度之梯度称为二阶绝对导数，或二阶协变导数，其结果为三阶张量。将其按三并逆基矢展开：

$$\nabla \nabla f = f_{\rho;\sigma;\mu} \mathbf{e}^\mu \mathbf{e}^\sigma \mathbf{e}^\rho, \quad (4.12)$$

式中 $f_{\rho;\sigma;\mu}$ 为 $\nabla \nabla f$ 的协变分量，前一个下标 ρ 为矢量 f 的协变分量编号，后2个下标表示被微分坐标序号；三者之间用分号隔开，以示区别。由正交归一关系式(2.9)，容易求得矢量梯度之梯度的协变分量如下：

$$f_{\rho;\sigma;\mu} = \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\sigma \mathbf{e}_\mu : \nabla \nabla f, \quad (4.13)$$

式中“:”号表示三点乘。下面推导 $f_{\rho;\sigma;\mu}$ 的具体表达式。

利用式(4.1)、式(4.4)、式(4.10)、式(4.11)和正交归一关系式(2.9)得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\sigma \mathbf{e}_\mu : \nabla \nabla f &= \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\sigma : [(\mathbf{e}_\mu \cdot \nabla) \nabla f] = \mathbf{e}_\mu \cdot \nabla (\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\sigma : \nabla f) - [(\mathbf{e}_\mu \cdot \nabla) (\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\sigma)] : \nabla f \\ &= \mathbf{e}_\mu \cdot \nabla f_{\rho;\sigma} - [(\mathbf{e}_\mu \cdot \nabla \mathbf{e}_\rho) \mathbf{e}_\sigma + \mathbf{e}_\rho (\mathbf{e}_\mu \cdot \nabla \mathbf{e}_\sigma)] : \nabla f = \frac{\partial f_{\rho;\sigma}}{\partial x^\mu} - [\Gamma_{\rho\mu}^\lambda \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\sigma + \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\lambda] : \nabla f \\ &= \frac{\partial f_{\rho;\sigma}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda f_{\lambda;\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda f_{\rho;\lambda}, \end{aligned}$$

于是式(4.13)化为

$$f_{\rho;\sigma;\mu} = \frac{\partial f_{\rho;\sigma}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda f_{\lambda;\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda f_{\rho;\lambda}. \quad (4.14)$$

进一步将矢量梯度协变分量的表达式(4.11)代入式(4.14)，经过一番整理之后求得

$$f_{\rho;\sigma;\mu} = \left\{ \frac{\partial^2 f_\rho}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} - \left(\Gamma_{\sigma\rho}^\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \frac{\partial f_\rho}{\partial x^\lambda} \right) + \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\nu f_\nu \right\} - \left(\frac{\partial \Gamma_{\sigma\rho}^\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\nu \right) f_\nu. \quad (4.15)$$

利用混合偏导数可交换被微分坐标顺序和仿射联络相对 2 个下标的对称性，可证上式右边第 1 项相对下标 σ 和 μ 对称，而右边第 2 项则不具备这种对称性。于是一般来说，二阶绝对导数的被微分坐标之次序不能交换，即 $f_{\rho;\sigma;\mu} \neq f_{\rho;\mu;\sigma}$ 。由式(4.15)可求得二者的差来自第 2 项（非对称项），结果为

$$f_{\rho;\sigma;\mu} - f_{\rho;\mu;\sigma} = -R_{\rho\sigma\mu}^\nu f_\nu, \quad (4.16)$$

式中

$$R_{\rho\sigma\mu}^\nu = \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda - \frac{\partial \Gamma_{\rho\mu}^\nu}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\sigma\lambda}^\nu \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \quad (4.17)$$

构成四阶张量，称为黎曼曲率张量。在欧几里得空间，黎曼曲率张量为零，二阶绝对导数的被微分坐标之次序可以交换，即 $f_{\rho;\sigma;\mu} = f_{\rho;\mu;\sigma}$ 。黎曼曲率张量的几何意义在于：一矢量沿一闭合曲线平行移动一周所发生的变化与黎曼曲率张量有关；对一无限小闭合曲线，该变化与黎曼曲率张量成正比。

以上关于绝对导数和黎曼曲率张量的知识性介绍，与第 6 节讨论可忽略坐标有关，与我们的主题即曲线坐标系下的张量微分运算没有直接关联。不过，如何从标量梯度和基矢方向导数的表达式出发实现绝对导数协变分量的计算，值得读者玩味。

5. 拉普拉斯算符

由式(4.1)、式(2.24)和式(4.2)得

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &\equiv \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \mathbf{e}^i \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} g^{ij} \mathbf{e}_j \right) = \mathbf{e}_j \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} g^{ij} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} g^{ij} \nabla \cdot \mathbf{e}_j \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} g^{ij} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} g^{ij} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right), \end{aligned}$$

即

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right). \quad (4.18)$$

读者还可以采取类似步骤推导张量（含并矢）的散度和旋度表达式，它们均归结为标量梯度和基矢（逆基矢）微分运算（散度、旋度和方向导数）。

5. 正交曲线坐标系

在物理学中，正交曲线坐标系得到广泛应用，其度规张量为对角张量，相应的张量微分的表达式较为简单。本节就从一般曲线坐标系的张量微分公式出发，导出正交曲线坐标系下的相应结果。其中，基矢的微分运算仍构成张量微分计算的基础。

1. 定义

3 个基矢（或逆基矢）彼此正交的曲线坐标系称为正交曲线坐标系。

2. 拉梅系数和单位基矢

由基矢的正交性立即可推得度规张量为对角张量，即

$$g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = 0, \quad (i \neq k) \quad (5.1)$$

于是只有 3 个对角分量不为零，它们可用 3 个所谓拉梅系数 $h_i (i=1,2,3)$ 取代，其定义如下：

$$h_1 = \sqrt{g_{11}} = 1/\sqrt{g^{11}}, \quad h_2 = \sqrt{g_{22}} = 1/\sqrt{g^{22}}, \quad h_3 = \sqrt{g_{33}} = 1/\sqrt{g^{33}}, \quad (5.2)$$

其中用到 $g_{ii} = 1/g^{ii} (i=1,2,3)$ ，它可由式(2.20)导出。3 个拉梅系数的乘积为

$$D \equiv h_1 h_2 h_3 = \sqrt{g} = V, \quad (5.3)$$

式中 $g = \det(G)$ 为度规张量对应矩阵的行列式。由矢(2.15)和式(2.16)得

$$h_i = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial x^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x^i} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{\partial x^i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^i}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (i=1,2,3) \quad (5.4)$$

从上式出发，根据给定的曲线坐标和直角坐标之间的变换关系，即可求得 3 个拉梅系数。

例 2 由给定的球坐标系 (r, θ, φ) 与直角坐标 (x, y, z) 之间的变换关系

$$\begin{cases} r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \\ \theta = \arccos[z/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}], \\ \varphi = \arctan(y/x); \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta; \end{cases}$$

计算球坐标系的 3 个拉梅系数。

解 从给定的正变换关系（由直角坐标至球坐标）出发得

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r}, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r}, & \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{r}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{xz}{r^3}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{yz}{r^3}, & \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{x^2 + y^2}{r^3}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} \frac{y}{x^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} \frac{1}{x}, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0; \end{aligned}$$

代入式(5.4)的第 2 个等式求得

$$\begin{aligned} h_1 &= \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2} = \left[\left(\frac{x}{r} \right)^2 + \left(\frac{y}{r} \right)^2 + \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} = 1, \\ h_2 &= \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2} = \left(\frac{x^2 + y^2}{r^4 \sin^2 \theta} \right)^{-1/2} = r, \\ h_3 &= \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2} = \left(\frac{x^2 + y^2}{x^4 (1 + \tan^2 \varphi)^2} \right)^{-1/2} = r \sin \theta. \end{aligned}$$

我们也可以从反变换关系（从球坐标至直角坐标）出发计算拉梅系数：

$$\partial x / \partial r = \sin \theta \cos \varphi, \quad \partial x / \partial \theta = r \cos \theta \cos \varphi, \quad \partial x / \partial \varphi = -r \sin \theta \sin \varphi;$$

$$\partial y / \partial r = \sin \theta \sin \varphi, \quad \partial y / \partial \theta = r \cos \theta \sin \varphi, \quad \partial y / \partial \varphi = r \sin \theta \cos \varphi;$$

$$\partial z / \partial r = \cos \theta, \quad \partial z / \partial \theta = -r \sin \theta, \quad \partial z / \partial \varphi = 0;$$

代入式(5.4)的第 1 个等式求得

$$\begin{aligned} h_1 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2} = (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta)^{1/2} = 1, \\ h_2 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} = r(\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta)^{1/2} = r, \\ h_3 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{1/2} = r(\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)^{1/2} = r \sin \theta. \end{aligned}$$

所得答案一致. 解毕.

从例 2 可见, 从反变换式出发计算拉梅系数更为直接、简便. 通常我们要求将拉梅系数写成正交曲线坐标的函数, 而反变换式本身正好就是正交曲线坐标的函数, 与这一目标一致.

当 3 个基矢之间彼此正交时, 3 个逆基矢将分别与其对应的基矢平行, 它们之间也是彼此正交的. 在这种情况下, 就没有引入两套基矢的必要. 此外, 我们可规定基矢的模为 1, 即为单位矢量. 这样规定的单位基矢 \hat{e}_i 的表达式如下:

$$\hat{e}_i = \frac{1}{|\mathbf{e}_i|} \mathbf{e}_i = \frac{1}{|e^i|} \mathbf{e}^i = \frac{1}{h_i} \mathbf{e}_i = h_i \mathbf{e}^i, \quad (i=1,2,3) \quad (5.5)$$

其中用到式(2.13)和式(5.2). 注意单位基矢 (的方向) 仍是空间位置的函数, 在微分时应视其为变量.

3. 弧元、面元和体元

将式(5.1)~(5.4)依次代入式(2.31)、式(2.32)、式(2.34)和式(3.36)分别推得:

$$(ds)^2 = (h_1 dx^1)^2 + (h_2 dx^2)^2 + (h_3 dx^3)^2. \quad (5.6)$$

$$ds_1 = h_1 dx^1 \hat{e}_1, \quad ds_2 = h_2 dx^2 \hat{e}_2, \quad ds_3 = h_3 dx^3 \hat{e}_3, \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} d\mathbf{a}_1 = h_2 h_3 dx^2 dx^3 \hat{e}_1, \\ d\mathbf{a}_2 = h_1 h_3 dx^1 dx^3 \hat{e}_2, \\ d\mathbf{a}_3 = h_1 h_2 dx^1 dx^2 \hat{e}_3. \end{cases} \quad (5.8)$$

$$d\tau = D dx^1 dx^2 dx^3 = h_1 h_2 h_3 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (5.9)$$

4. 矢量和张量按单位基矢及其并矢展开

从单位基矢的表达式(5.5)出发, 可将矢量和张量分别写成按单位基矢及其并矢展开的形式:

$$\mathbf{F} = F_i \hat{e}_i, \quad F_i = f_i / h_i = h_i f^i, \quad (i=1,2,3) \quad (5.10)$$

$$\vec{K} = K_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j, \quad K_{ij} = k_{ij} / (h_i h_j) = h_i h_j k^{ij}, \quad (i, j=1,2,3) \quad (5.11)$$

式中顶部出现双向箭头的量表示张量, 大写字母表示按单位基矢及其并矢展开得到的分量, 小写字母表示按基矢、逆基矢及其并矢展开得到的分量. 利用单位基矢的正交归一关系, 可通过单位基矢

与矢量点乘，与张量双点乘求得分量表达式，即

$$F_i = \hat{e}_i \cdot \mathbf{F}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.12)$$

$$K_{ik} = \hat{e}_k \hat{e}_i : \vec{\mathbf{K}}, \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (5.13)$$

5. 单位基矢的微分

从单位基矢的微分公式出发推导张量微分表达式，具有相当大的灵活性，适应于复杂张量微分表达式的推导。为此，我们必须事先导出单位基矢的微分公式。这些公式可从一般曲线坐标系下的基矢微分公式推得。以下为表述简便起见，将曲线坐标 x^i 改写为 x_i ，以符合通常表述习惯。既然在正交曲线坐标系中不再提协变坐标（曾用 x_i 表示），将 x^i 改写为 x_i 不致引起误会。

(1) 散度

从曲线坐标系下基矢散度的一般公式(3.5)出发，利用式(5.3)和式(5.5)得

$$\nabla \cdot \mathbf{e}_i = \nabla \cdot (h_i \hat{e}_i) = h_i \nabla \cdot \hat{e}_i + \hat{e}_i \cdot \nabla h_i = h_i \nabla \cdot \hat{e}_i + \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial x_i},$$

从中解得

$$\nabla \cdot \hat{e}_i = \frac{1}{D h_i} \frac{\partial D}{\partial x_i} - \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{D}{h_i} \right), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.14)$$

(2) 旋度

从曲线坐标系下逆基矢旋度为零的结果出发，利用式(5.5)得

$$\nabla \times \mathbf{e}^i = \nabla \times (\hat{e}_i / h_i) = (\nabla \times \hat{e}_i) / h_i + \nabla(1/h_i) \times \hat{e}_i = 0,$$

从中解得

$$\nabla \times \hat{e}_i = -h_i \nabla \left(\frac{1}{h_i} \right) \times \hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \hat{e}_j \right) \times \hat{e}_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.15)$$

(3) 方向导数

从推导式(3.10)过程中的中间结果

$$2(\mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla) \mathbf{e}_\rho = -\nabla g_{\rho\sigma} + (\mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla g_{\rho\mu} + \mathbf{e}_\rho \cdot \nabla g_{\sigma\mu}) \mathbf{e}^\mu$$

出发，不去引入仿射联络，而是通过式(5.1)~(5.2)将上式的度规系数代之以拉梅系数，即

$$g_{\rho\sigma} = g_{\rho\rho} \delta_\sigma^\rho = h_\rho^2 \delta_\sigma^\rho,$$

再通过式(5.5)将上式中的基矢和逆基矢代之以单位基矢，从而推得

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla) \mathbf{e}_\rho &= -\frac{1}{2} (\nabla h_\rho^2) \delta_\sigma^\rho + \frac{1}{2} (\mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla h_\rho^2) \delta_\mu^\rho \mathbf{e}^\mu + \frac{1}{2} (\mathbf{e}_\rho \cdot \nabla h_\sigma^2) \delta_\mu^\sigma \mathbf{e}^\mu \\ &= -h_\rho (\nabla h_\rho) \delta_\sigma^\rho + h_\rho (\mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla h_\rho) \mathbf{e}^\rho + h_\sigma (\mathbf{e}_\rho \cdot \nabla h_\sigma) \mathbf{e}^\sigma \\ &= -h_\rho (\nabla h_\rho) \delta_\sigma^\rho + (\partial h_\rho / \partial x_\sigma) \hat{e}_\rho + (\partial h_\sigma / \partial x_\rho) \hat{e}_\sigma. \end{aligned}$$

将上式与

$$(\mathbf{e}_\sigma \cdot \nabla) \mathbf{e}_\rho = h_\sigma \hat{e}_\sigma \cdot \nabla (h_\rho \hat{e}_\rho) = h_\rho h_\sigma (\hat{e}_\sigma \cdot \nabla \hat{e}_\rho) + (\partial h_\rho / \partial x_\sigma) \hat{e}_\rho$$

联立，从中解得

$$(\hat{\mathbf{e}}_\sigma \cdot \nabla) \hat{\mathbf{e}}_\rho = -\frac{1}{h_\sigma} (\nabla h_\rho) \delta_\sigma^\rho + \frac{1}{h_\rho h_\sigma} \frac{\partial h_\sigma}{\partial x_\rho} \hat{\mathbf{e}}_\sigma, \quad (\rho, \sigma = 1, 2, 3)$$

或改写成（将希腊字母指标改成英文字母指标）

$$(\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \nabla) \hat{\mathbf{e}}_i = -\frac{1}{h_k} (\nabla h_i) \delta_k^i + \frac{1}{h_i h_k} \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (5.16)$$

特别当 $i \neq k$ 时，上式右边第 1 项为零，只剩下第 2 项：

$$(\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \nabla) \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i h_k} \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (i, k = 1, 2, 3; i \neq k) \quad (5.17)$$

对于 $i = k$ 的情况，由式(5.16)可以分别导出

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \nabla) \hat{\mathbf{e}}_1 = -\frac{1}{h_1} \nabla h_1 + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \hat{\mathbf{e}}_1 = -\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \hat{\mathbf{e}}_2 - \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \hat{\mathbf{e}}_3, \\ (\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \nabla) \hat{\mathbf{e}}_2 = -\frac{1}{h_2} \nabla h_2 + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \hat{\mathbf{e}}_2 = -\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \hat{\mathbf{e}}_1 - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \hat{\mathbf{e}}_3, \\ (\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \nabla) \hat{\mathbf{e}}_3 = -\frac{1}{h_3} \nabla h_3 + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial h_3}{\partial x_3} \hat{\mathbf{e}}_3 = -\frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \hat{\mathbf{e}}_1 - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \hat{\mathbf{e}}_2. \end{cases} \quad (5.18)$$

通常，单位基矢对曲线坐标的偏导数更加常用，其表达式由式(5.16)导出，只需将式中的 $\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \nabla$ 换成 $(1/h_k) \partial / \partial x_k$ 即可，结果为：

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial x_k} = -(\nabla h_i) \delta_k^i + \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (5.19)$$

表 1 圆柱坐标系和球坐标系的坐标、拉梅系数及其偏导数、基矢及其偏导数

圆柱坐标系				球坐标系			
曲线坐标	ρ	φ	z	曲线坐标	r	θ	φ
拉梅系数	1	ρ	1	拉梅系数	1	r	$r \sin \theta$
$\partial / \partial \rho$	0	1	0	$\partial / \partial r$	0	1	$\sin \theta$
$\partial / \partial \varphi$	0	0	0	$\partial / \partial \theta$	0	0	$r \cos \theta$
$\partial / \partial z$	0	0	0	$\partial / \partial \varphi$	0	0	0
单位基矢	$\hat{\mathbf{e}}_\rho$	$\hat{\mathbf{e}}_\varphi$	$\hat{\mathbf{e}}_z$	单位基矢	$\hat{\mathbf{e}}_r$	$\hat{\mathbf{e}}_\theta$	$\hat{\mathbf{e}}_\varphi$
$\partial / \partial \rho$	0	0	0	$\partial / \partial r$	0	0	0
$\partial / \partial \varphi$	$\hat{\mathbf{e}}_\varphi$	$\hat{\mathbf{e}}_\rho$	0	$\partial / \partial \theta$	$\hat{\mathbf{e}}_\theta$	$-\hat{\mathbf{e}}_r$	0
$\partial / \partial z$	0	0	0	$\partial / \partial \varphi$	$\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\varphi$	$\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\varphi$	$-\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$

特别当 $i \neq k$ 时，上式右边第 1 项为零，只剩下第 2 项：

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial x_k} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (i, k = 1, 2, 3; i \neq k) \quad (5.20)$$

对于 $i = k$ 的情况, 由式(5.19)可以分别导出

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x_1} = -\nabla h_1 + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \hat{e}_1 = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \hat{e}_2 - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \hat{e}_3, \\ \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial x_2} = -\nabla h_2 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \hat{e}_2 = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \hat{e}_1 - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \hat{e}_3, \\ \frac{\partial \hat{e}_3}{\partial x_3} = -\nabla h_3 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_3} \hat{e}_3 = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \hat{e}_1 - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \hat{e}_2. \end{cases} \quad (5.21)$$

针对常用的圆柱坐标系和球坐标系, 有关结果列于表 1.

6. 标量的梯度和方向导数

推导曲线坐标系的张量微分公式有 3 种方式: (1) 从梯度、散度和旋度的原始定义出发, 在第 3 节推导基矢散度 (参见式(3.5)) 和标量梯度 (参见式(3.7)) 就是这样做的; (2) 从曲线坐标系下的一般公式出发, 回到正交曲线坐标系的特殊情况, 例如本节推导弧元、面元、体元的表达式和单位基矢的微分公式就是这样做的; (3) 从单位基矢的微分公式出发, 对张量相对单位基矢及其并矢的展开式进行微分运算, 类似于第 4 节推导张量微分公式所采取的做法. 在以下分析中, 我们使用第 2 种方式. 对于一些特殊的张量微分运算, 我们将使用第 3 种方式, 即从单位基矢的微分公式出发进行推导, 对此我们将举例加以说明.

首先, 从曲线坐标系下的标量梯度的一般表达式(3.7)出发, 利用式(5.5)并将 x^i 改写为 x_i 得

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \mathbf{e}^i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \hat{e}_i. \quad (5.22)$$

由上式易求得标量 ϕ 的方向导数:

$$\hat{e}_i \cdot \nabla \phi = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.23)$$

7. 矢量的散度

由曲线坐标系下散度的一般公式(4.6)出发, 利用式(5.3)和式(5.10)得

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} f^i) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{D F_i}{h_i} \right), \quad (5.24)$$

式中 $D = h_1 h_2 h_3$ (参见式(5.3)), 原曲线坐标 x^i 换成正交曲线坐标 x_i , 以符合通常表述习惯.

8. 矢量的旋度

由曲线坐标系下旋度的一般式(4.7)出发, 利用式(5.3)、式(5.5)和式(5.10) 并将 x^j 改写为 x_j 得

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \varepsilon_{kji} \mathbf{e}_k = \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{h_k}{D} \frac{\partial (h_i F_i)}{\partial x_j} \varepsilon_{kji} \hat{e}_k. \quad (5.25)$$

上式可写成如下便于应用的形式:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 F_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial (h_2 F_2)}{\partial x_3} \right] \hat{e}_1 + \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial (h_1 F_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial (h_3 F_3)}{\partial x_1} \right] \hat{e}_2$$

$$+ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial x_2} \right] \hat{e}_3. \quad (5.26)$$

9. 拉普拉斯算符

由曲线坐标系下拉普拉斯算符的一般公式(4.17)出发, 利用式(5.1)~(5.3) 并将 x^i 改写为 x_i 得

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{D}{h_i^2} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right), \quad (5.27)$$

或写成如下便于应用的形式:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) \right\}. \quad (5.28)$$

以上我们从曲线坐标系一般微分公式出发导出正交曲线坐标系下的结果, 前提是相应微分公式的一般形式已经在曲线坐标系下获得. 如果不是这样, 我们就不得不从单位基矢的微分公式出发, 去完成正交曲线坐标系下相应微分公式的推导任务, 现举例说明.

例 3 在正交曲线坐标系下, 有二阶张量 $\vec{K} = K_{ik} \hat{e}_i \hat{e}_k$, 求 $\nabla \cdot \vec{K}$ 的分量表达式.

解 眼下我们尚未导出曲线坐标系下 $\nabla \cdot \vec{K}$ 的一般表达式. 当然, 我们可以从基矢或逆基矢的微分公式出发, 先导出一般曲线坐标系下 $\nabla \cdot \vec{K}$ 的表达式, 然后回到正交曲线坐标系的特殊情况. 但是我们没有必要这样做. 我们完全可以从正交曲线坐标系下的单位基矢的微分公式出发, 直接导出 $\nabla \cdot \vec{K}$ 分量表达式. 推导过程如下:

$$\nabla \cdot \vec{K} = \nabla \cdot (K_{ik} \hat{e}_i \hat{e}_k) = (\hat{e}_i \cdot \nabla K_{ik}) \hat{e}_k + K_{ik} (\nabla \cdot \hat{e}_i) \hat{e}_k + K_{ik} (\hat{e}_i \cdot \nabla \hat{e}_k),$$

其中涉及梯度 ∇K_{ik} , 单位基矢散度 $\nabla \cdot \hat{e}_i$ 和方向导数 $\hat{e}_i \cdot \nabla \hat{e}_k$. 依次将式(5.22)(取 $\phi = K_{ik}$)和式(5.14)代入上式, 添上求和号, 得

$$\nabla \cdot \vec{K} = \sum_{i,k=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial K_{ik}}{\partial x_i} \hat{e}_k + \sum_{i,k=1}^3 \frac{K_{ik}}{D} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{D}{h_i} \right) \hat{e}_k + \sum_{i,k=1}^3 \frac{K_{ik}}{h_i} \frac{\partial \hat{e}_k}{\partial x_i}. \quad (5.29)$$

由事先确定的正交曲线坐标系的拉梅系数和基矢偏导数 (类似表 1), 即可按上式计算 $\nabla \cdot \vec{K}$. 如果我们希望从拉梅系数的偏导数出发进行计算, 则可利用式(5.16)将上式右边的第 3 项改写为

$$\sum_{i,k=1}^3 \frac{K_{ik}}{h_i} \frac{\partial \hat{e}_k}{\partial x_i} = \sum_{i,k=1}^3 K_{ik} \left[-\frac{1}{h_i} (\nabla h_k) \delta_i^k + \frac{1}{h_i h_k} \frac{\partial h_i}{\partial x_k} \hat{e}_i \right]. \quad (5.30)$$

通常我们需要写出 $\nabla \cdot \vec{K}$ 的 3 个分量. 有两种途径: 一种是将和式(5.29)的所有各项一一写出, 然后按单位基矢分组, 求得全部分量; 另一种途径是将某单位基矢与式(5.29)点乘, 求得 $\nabla \cdot \vec{K}$ 沿该基矢方向的分量表达式. 例如, 为求 $\nabla \cdot \vec{K}$ 的第 1 个分量, 我们可用 \hat{e}_1 点乘式(5.29), 得

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \vec{K})_1 &= \hat{e}_1 \cdot \sum_{i,k=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial K_{ik}}{\partial x_i} \hat{e}_k + \hat{e}_1 \cdot \sum_{i,k=1}^3 \frac{K_{ik}}{D} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{D}{h_i} \right) \hat{e}_k + \hat{e}_1 \cdot \sum_{i,k=1}^3 \frac{K_{ik}}{h_i} \frac{\partial \hat{e}_k}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial K_{i1}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{K_{i1}}{D} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{D}{h_i} \right) - \sum_{i,k=1}^3 \frac{K_{ik}}{h_i} \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x_i} \cdot \hat{e}_k. \end{aligned}$$

推导中用到如下等式:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_k}{\partial x_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\partial(\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_1)}{\partial x_i} - \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_1}{\partial x_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k = \frac{\partial \delta_1^k}{\partial x_i} - \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_1}{\partial x_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k = -\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_1}{\partial x_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k,$$

其中 δ_1^k 或等于 1 (当 $k=1$), 或等于 0 (当 $k \neq 1$), 其偏导数恒为零. 若将单位基矢偏导数表达式 (5.20)~(5.21) 代入, 则经过一番代数运算, 最终求得 $(\nabla \cdot \vec{\mathbf{K}})_1$ 的表达式如下:

$$(\nabla \cdot \vec{\mathbf{K}})_1 = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{h_i} \frac{\partial K_{i1}}{\partial x_i} + \frac{K_{i1}}{D} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{D}{h_i} \right) \right] + \frac{K_{12}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{K_{13}}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{K_{22}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{K_{33}}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1}.$$

采取类似步骤可获得其余 2 个分量, $(\nabla \cdot \vec{\mathbf{K}})_2 = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot (\nabla \cdot \vec{\mathbf{K}})$ 和 $(\nabla \cdot \vec{\mathbf{K}})_3 = \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot (\nabla \cdot \vec{\mathbf{K}})$.

例 4 在正交曲线坐标系下, 写出 $\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B}$ 的分量表达式.

解 我们同样未就 $\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B}$ 给出曲线坐标系下的一般表达式. 下面从正交曲线坐标系下的单位基矢的微分公式出发, 直接导出它的分量表达式. 推导过程如下:

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} = A_i \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \nabla (B_k \hat{\mathbf{e}}_k) = A_i (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \nabla B_k) \hat{\mathbf{e}}_k + A_i B_k \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \nabla \hat{\mathbf{e}}_k,$$

其中涉及梯度 ∇B_k 和单位基矢的方向导数 $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \nabla \hat{\mathbf{e}}_k$. 依次将式(5.22) (取 $\phi = B_k$) 和式(5.19)代入上式, 添上求和号, 并利用式(5.16)得

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} &= \sum_{i,k=1}^3 \frac{A_i}{h_i} \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_k + \sum_{i,k=1}^3 \frac{A_i B_k}{h_i} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_k}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i,k=1}^3 \frac{A_i}{h_i} \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_k + \sum_{i,k=1}^3 A_i B_k \left[-\frac{1}{h_i} (\nabla h_k) \delta_i^k + \frac{1}{h_i h_k} \frac{\partial h_i}{\partial x_k} \hat{\mathbf{e}}_i \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

接着用 $\hat{\mathbf{e}}_1$ 点乘式(5.31), 得第 1 个分量 $(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B})_1$:

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B})_1 = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \sum_{i,k=1}^3 \frac{A_i}{h_i} \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_k + \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \sum_{i,k=1}^3 \frac{A_i B_k}{h_i} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_k}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{h_i} \frac{\partial B_1}{\partial x_i} - \sum_{i,k=1}^3 \frac{A_i B_k}{h_i} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_1}{\partial x_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k \quad (5.32)$$

若将单位基矢偏导数表达式(5.20)~(5.21)代入, 则经过一番代数运算, 最终求得 $(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B})_1$ 的表达式如下:

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B})_1 = \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{h_i} \frac{\partial B_1}{\partial x_i} + \frac{A_1 B_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{A_1 B_3}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{A_2 B_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{A_3 B_3}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1}.$$

采取类似步骤可获得其余 2 个分量, $(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B})_2 = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B})$ 和 $(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B})_3 = \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B})$.

例 5 如图 3 所示: 在太阳周围的行星际空间引入球坐标系 (r, θ, φ) , 太阳位于坐标原点. 在赤道面 ($\theta = \pi/2$) 上, 行星际磁场呈螺旋状, 磁场与径向的夹角为 $\alpha(r)$, 随径向距离变化. 设行星际空间等离子体的压强各向异性: 在磁力线坐标系中可写成如下对角张量:

$$\vec{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} P_{\parallel}(r) & 0 & 0 \\ 0 & P_{\perp}(r) & 0 \\ 0 & 0 & P_{\perp}(r) \end{pmatrix},$$

式中 P_{\parallel} 和 P_{\perp} 分别为平行和垂直于磁场方向的压强, 它们仅为径向距离的函数. 在赤道面上计算压强梯度力密度 $\mathbf{F} = -\nabla \cdot \vec{\mathbf{P}}$, 并确定其径向分量.

解 问题归结为计算张量的散度, 并确定其径向分量. 该张量在磁力线坐标系中为对角张量. 过

赤道面内的某考察点 P 引单位矢量 \mathbf{e}_{\parallel} ，与行星际磁场平行；引单位矢量 \mathbf{e}_{\perp} ，与行星际磁场垂直。球坐标的单位基矢为 $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\theta}, \mathbf{e}_{\varphi})$ ，其中 \mathbf{e}_{θ} 垂直纸面（即赤道面）向里，见图 3。

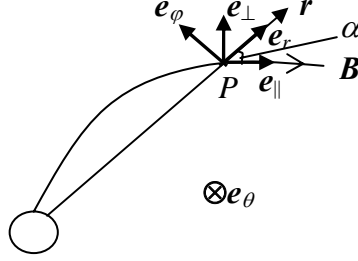


图 3 赤道面内的行星际螺旋磁场

首先，在磁力线坐标系（单位基矢为 $(\mathbf{e}_{\parallel}, \mathbf{e}_{\theta}, \mathbf{e}_{\perp})$ ）中，压强为对角张量，表达式如下：

$$\vec{\mathbf{P}} = P_{\parallel}(r)\mathbf{e}_{\parallel}\mathbf{e}_{\parallel} + P_{\perp}(r)(\mathbf{e}_{\theta}\mathbf{e}_{\theta} + \mathbf{e}_{\perp}\mathbf{e}_{\perp}) = [P_{\parallel}(r) - P_{\perp}(r)]\mathbf{e}_{\parallel}\mathbf{e}_{\parallel} + P_{\perp}(r)\vec{\mathbf{I}},$$

式中 $\vec{\mathbf{I}}$ 为单位张量，其表达式如下：

$$\vec{\mathbf{I}} = \mathbf{e}_{\parallel}\mathbf{e}_{\parallel} + \mathbf{e}_{\theta}\mathbf{e}_{\theta} + \mathbf{e}_{\perp}\mathbf{e}_{\perp} = \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_{\theta}\mathbf{e}_{\theta} + \mathbf{e}_{\varphi}\mathbf{e}_{\varphi}.$$

其次，将单位基矢 \mathbf{e}_{\parallel} 用球坐标单位基矢表示。经过简单的几何分析得

$$\mathbf{e}_{\parallel} = \cos \alpha \mathbf{e}_r - \sin \alpha \mathbf{e}_{\varphi},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\parallel}\mathbf{e}_{\parallel} &= (\cos \alpha \mathbf{e}_r - \sin \alpha \mathbf{e}_{\varphi})(\cos \alpha \mathbf{e}_r - \sin \alpha \mathbf{e}_{\varphi}) \\ &= \cos^2 \alpha \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \sin^2 \alpha \mathbf{e}_{\varphi}\mathbf{e}_{\varphi} - \sin \alpha \cos \alpha (\mathbf{e}_r\mathbf{e}_{\varphi} + \mathbf{e}_{\varphi}\mathbf{e}_r), \end{aligned}$$

从而将压强张量写成球坐标下并基矢的线性组合形式：

$$\vec{\mathbf{P}} = (P_{\parallel} - P_{\perp})[\cos^2 \alpha \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \sin^2 \alpha \mathbf{e}_{\varphi}\mathbf{e}_{\varphi} - \sin \alpha \cos \alpha (\mathbf{e}_r\mathbf{e}_{\varphi} + \mathbf{e}_{\varphi}\mathbf{e}_r)] + P_{\perp}\vec{\mathbf{I}}, \quad (5.33)$$

式中 P_{\parallel} 、 P_{\perp} 和 α 均是径向距离 r 的函数（与 θ 、 φ 无关）。

最后，在球坐标系下计算压强张量的散度。由式(5.33)得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\mathbf{P}} &= \nabla[(P_{\parallel} - P_{\perp})\cos^2 \alpha] \cdot \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + (P_{\parallel} - P_{\perp})\cos^2 \alpha [(\nabla \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_r \cdot \nabla \mathbf{e}_r] \\ &\quad + \nabla[(P_{\parallel} - P_{\perp})\sin^2 \alpha] \cdot \mathbf{e}_{\varphi}\mathbf{e}_{\varphi} + (P_{\parallel} - P_{\perp})\sin^2 \alpha [(\nabla \cdot \mathbf{e}_{\varphi})\mathbf{e}_{\varphi} + \mathbf{e}_{\varphi} \cdot \nabla \mathbf{e}_{\varphi}] \\ &\quad - \nabla[(P_{\parallel} - P_{\perp})\sin \alpha \cos \alpha] \cdot (\mathbf{e}_r\mathbf{e}_{\varphi} + \mathbf{e}_{\varphi}\mathbf{e}_r) \\ &\quad - (P_{\parallel} - P_{\perp})\sin \alpha \cos \alpha [(\nabla \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_{\varphi} + \mathbf{e}_r \cdot \nabla \mathbf{e}_{\varphi} + (\nabla \cdot \mathbf{e}_{\varphi})\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_{\varphi} \cdot \nabla \mathbf{e}_r] + \nabla P_{\perp}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

进一步推导需要用到球坐标系下的单位基矢微分公式（参见式(5.14)和表 1）：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{e}_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(r^2 \sin \theta / 1)}{\partial r} = \frac{2}{r}, \quad \nabla \cdot \mathbf{e}_{\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(r^2 \sin \theta / r \sin \theta)}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \sin \theta \mathbf{e}_{\varphi} = \mathbf{e}_{\varphi}, (\theta = \pi / 2), \quad \frac{\partial \mathbf{e}_{\varphi}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_{\varphi}}{\partial \varphi} = -\sin \theta \mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_r, (\theta = \pi / 2), \end{aligned}$$

下面按题意计算压力梯度力的径向分量。由式(5.34)得

$$F_r = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{F} = -\mathbf{e}_r \cdot (\nabla \cdot \vec{\mathbf{P}})$$

$$\begin{aligned}
&= -\nabla[(P_{\parallel} - P_{\perp})\cos^2 \alpha] \cdot \mathbf{e}_r - (P_{\parallel} - P_{\perp})[\cos^2 \alpha (\nabla \cdot \mathbf{e}_r) + \sin^2 \alpha (\mathbf{e}_{\varphi} \cdot \nabla \mathbf{e}_{\varphi}) \cdot \mathbf{e}_r] - \mathbf{e}_r \cdot \nabla P_{\perp} \\
&= -\frac{d}{dr}[(P_{\parallel} - P_{\perp})\cos^2 \alpha] - \frac{2}{r}(P_{\parallel} - P_{\perp})\cos^2 \alpha + \frac{1}{r}(P_{\parallel} - P_{\perp})\sin^2 \alpha - \frac{dP_{\perp}}{dr} \\
&= -\frac{d}{dr}(P_{\parallel}\cos^2 \alpha + P_{\perp}\sin^2 \alpha) - \frac{3}{r}(P_{\parallel} - P_{\perp})\left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{3}\right),
\end{aligned}$$

解毕.

6. 具可忽略坐标的曲线坐标系 *

1. 问题的提出

在物理学问题的理论分析特别是解析分析中, 常用降维简化, 即假定因变量与某个坐标或某两个坐标无关, 问题由三维转化为二维或一维. 除开因变量之外, 在基本方程中还会出现与坐标系相关的度规系数; 在实施降维简化时, 自然也必须要求这些度规系数与相应的坐标无关, 否则所实施的降维简化不自洽; 或者说, 在该坐标系中没法实施降维简化. 自身变化不会改变度规系数的坐标称为“可忽略坐标”, 相应的坐标系称为具可忽略坐标的坐标系. 于是, 二维简化要求坐标系至少具有 1 个可忽略坐标, 因变量与该坐标无关; 而一维简化则要求坐标系至少具有 2 个可忽略坐标, 因变量与该 2 个坐标无关.

如果坐标系已经给定, 则其度规系数的表达式已知, 可直接看出度规系数究竟与哪个或哪些坐标无关, 从而找到相应的可忽略坐标, 正确地实施降维简化. 可是, 有时我们希望得到降维简化的一般结果, 它适合于一类坐标系, 而不限于一种特定的坐标系. 当然, 这类坐标系的度规系数应与相应的坐标无关, 以保证降维简化自洽有效. 这就给我们提出如下问题: 在事先不知道度规系数的情况下, 如何判断一类坐标系具有可忽略坐标, 或者说这类坐标系属于具可忽略坐标的坐标系呢? 本节就来回答这个问题.

2. 可忽略坐标的数学定义

设曲线坐标系的坐标为 $x^i (i=1,2,3)$, 相应度规系数为 $g_{ik} (i,k=1,2,3)$, 满足

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^3} = 0, \quad (i,k=1,2,3) \quad (6.1)$$

则称 x^3 为可忽略坐标. 在该坐标系下, 我们可以假定因变量与 x^3 无关, 实施二维简化.

3. 可忽略坐标对应的基矢

为找到可忽略坐标, 只需找到它对应的基矢 $\xi = \mathbf{e}_3$. 将该基矢相对基矢 $\mathbf{e}_k (k=1,2,3)$ 或逆基矢 $\mathbf{e}^k (k=1,2,3)$ 展开:

$$\xi = \xi^k \mathbf{e}_k = \xi_k \mathbf{e}^k, \quad (6.2)$$

式中展开系数 ξ^k 和 ξ_k 分别为 ξ 的逆变分量和协变分量. 显然成立

$$\xi^1 = \xi^2 = 0, \quad \xi^3 = 1, \quad (6.3)$$

* 澳大利亚学者 J. W. Edenstrasser 在攻读博士期间提出并澄清可忽略坐标的概念, 用来分析实验室等离子体的平衡态性质, 参见: J. W. Edenstrasser, The only three classes of symmetric MHD equilibria, J. Plasma Phys., 1980, 24, 515~518.

$$\xi_k = g_{ki}\xi^i = g_{k3}, \quad (k=1,2,3) \quad (6.4)$$

下面计算 ξ 的绝对导数的协变分量. 由式(4.5)和式(4.11)得

$$\begin{aligned} \xi_{k;j} &= \frac{\partial \xi_k}{\partial x^j} - \Gamma_{jk}^i \xi_i = \frac{\partial \xi_k}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) g^{il} \xi_i \\ &= \frac{\partial \xi_k}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \xi^l. \end{aligned}$$

以上推导中用到 $\xi^l = g^{il} \xi_i$. 将式(6.3)和式(6.4)代入上式得

$$\xi_{k;j} = \frac{\partial g_{k3}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{3j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{3k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{3k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{3j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^3} \right).$$

以上推导中用到 $g_{k3} = g_{3k}$. 由上式互换指标 k 和 j 并利用度规系数的对称性得

$$\xi_{j;k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{3j}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{3k}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^3} \right).$$

再将上述两式求和, 得

$$\xi_{k;j} + \xi_{j;k} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^3}.$$

若 x^3 为可忽略坐标, 即满足条件式(6.1), 则其对应基矢 $\xi = \mathbf{e}_3$ 满足如下方程:

$$\xi_{k;j} + \xi_{j;k} = 0. \quad (6.5)$$

满足式(6.5)的矢量 ξ 称为 Killing 矢量, 由 W. Killing 于 1892 年首次引入, 用来分析空间的对称性质. 以上分析表明: 可忽略坐标对应的基矢一定是 Killing 矢量.

4. Killing 矢量与黎曼曲率张量的关系

重抄式(4.14)、式(4.16)和式(4.17)如下

$$f_{\rho;\sigma;\mu} = \frac{\partial f_{\rho;\sigma}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda f_{\lambda;\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda f_{\rho;\lambda}, \quad (4.14)$$

$$f_{\rho;\sigma;\mu} - f_{\rho;\mu;\sigma} = -R_{\rho\sigma\mu}^\nu f_\nu, \quad (4.16)$$

$$R_{\rho\sigma\mu}^\nu = \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda - \frac{\partial \Gamma_{\rho\mu}^\nu}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\sigma\lambda}^\nu \Gamma_{\rho\mu}^\lambda. \quad (4.17)$$

将式(4.14)中的下标 ρ 和 σ 互换得

$$f_{\sigma;\rho;\mu} = \frac{\partial f_{\sigma;\rho}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda f_{\lambda;\rho} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda f_{\sigma;\lambda}. \quad (4.14a)$$

将式(4.14)和式(4.14a)相加得

$$f_{\rho;\sigma;\mu} + f_{\sigma;\rho;\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f_{\rho;\sigma} + f_{\sigma;\rho}) - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda (f_{\lambda;\sigma} + f_{\sigma;\lambda}) - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda (f_{\rho;\lambda} + f_{\lambda;\rho}).$$

若 $\mathbf{f} = \xi$, 即 \mathbf{f} 为 Killing 矢量, 则由上式和式(6.5)可证

$$\xi_{\rho;\sigma;\mu} + \xi_{\sigma;\rho;\mu} = 0. \quad (6.6)$$

将式(4.17)中的 3 个协变指标 ρ, σ 和 μ 循环置换后得

$$R_{\mu\rho\sigma}^\nu = \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\nu}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\sigma\lambda}^\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda - \frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^\nu}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\rho\lambda}^\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (4.17a)$$

$$R_{\sigma\mu\rho}^\nu = \frac{\partial \Gamma_{\sigma\mu}^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda - \frac{\partial \Gamma_{\sigma\rho}^\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda. \quad (4.17b)$$

将式(4.17)、式(4.17a)和式(4.17b)相加，利用仿射联络相对 2 个协变指标（下指标）的对称性，可证

$$R_{\rho\sigma\mu}^\nu + R_{\mu\rho\sigma}^\nu + R_{\sigma\mu\rho}^\nu = 0. \quad (6.7)$$

将式(4.16)中的协变指标循环置换，得

$$f_{\mu;\rho;\sigma} - f_{\mu;\sigma;\rho} = -R_{\mu\rho\sigma}^\nu f_\nu, \quad (4.16a)$$

$$f_{\sigma;\mu;\rho} - f_{\sigma;\rho;\mu} = -R_{\sigma\mu\rho}^\nu f_\nu. \quad (4.16b)$$

将式(4.16)、式(4.16a)和式(4.16b)相加，利用式(6.7)得

$$f_{\rho;\sigma;\mu} - f_{\rho;\mu;\sigma} + f_{\mu;\rho;\sigma} - f_{\mu;\sigma;\rho} + f_{\sigma;\mu;\rho} - f_{\sigma;\rho;\mu} = -(R_{\rho\sigma\mu}^\nu + R_{\mu\rho\sigma}^\nu + R_{\sigma\mu\rho}^\nu) f = 0,$$

上式对任意矢量 f 成立，其中也包括 Killing 矢量 ξ ：

$$\xi_{\rho;\sigma;\mu} - \xi_{\rho;\mu;\sigma} + \xi_{\mu;\rho;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\rho} + \xi_{\sigma;\mu;\rho} - \xi_{\sigma;\rho;\mu} = 0.$$

考虑到式(6.6)，上式左边第 1、6 项，第 2、3 项，以及第 4、5 项可以合并，故有

$$\xi_{\rho;\sigma;\mu} - \xi_{\rho;\mu;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\rho} = 0,$$

即

$$\xi_{\mu;\sigma;\rho} = \xi_{\rho;\sigma;\mu} - \xi_{\rho;\mu;\sigma} = -R_{\rho\sigma\mu}^\nu \xi_\nu, \quad (6.8)$$

其中第 2 个等式来自式(4.16)。上式为 Killing 矢量的二阶绝对导数与黎曼曲率张量的关系。该方程虽从式(6.5)导出，但其解不一定满足条件式(6.5)。因此，Killing 矢量应同时满足式(6.8)和式(6.5)。

5. 欧几里得空间 Killing 矢量的通解

让我们回到我们感兴趣的欧几里得空间。在该空间中，黎曼曲率张量为零，式(6.8)化为

$$\xi_{\mu;\sigma;\rho} = 0. \quad (6.9)$$

回到直角坐标（这属于一种“不失一般”的技巧），上式化为

$$\xi_{\mu;\sigma;\rho} = \frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = 0. \quad (6.10)$$

在直角坐标下，式(6.5)简化为

$$\frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x^\mu} = 0. \quad (6.11)$$

由式(6.10)可推断 ξ_μ 应当是直角坐标 x^ρ 的线性函数, 即

$$\xi_\mu = a_\mu + B_{\mu\rho} x^\rho. \quad (6.12)$$

将上式代入式(6.11)得

$$B_{\mu\rho} + B_{\rho\mu} = 0, \quad (6.13)$$

即 \vec{B} 为反对称张量, 只有 3 个独立分量, 可将其与矢量 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 按如下方式对应:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix},$$

且

$$\vec{B} \cdot \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \times \mathbf{r},$$

以致式(6.12)可以写成如下矢量形式:

$$\xi = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}, \quad (6.14)$$

式中 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 为常矢量. 任何表达式一经写成矢量 (或张量) 形式之后, 就具有在坐标变换下的不变性. 因此, 在直角坐标下导出的 Killing 矢量的表达式(6.14)对任何曲线坐标系均成立.

上述 Killing 矢量有 6 个可调参数: \mathbf{a} 的 3 个分量对应平移 (坐标变换), \mathbf{b} 的 3 个分量对应旋转 (坐标变换), 旋转轴沿着 \mathbf{b} 的方向.

6. 由可忽略坐标基矢确定坐标

一旦确定忽略坐标的基矢 \mathbf{e}_3 , 就可以由下式确定具可忽略坐标系的 3 个坐标:

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_3 \cdot \nabla x^1 = 0, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_3 \cdot \nabla x^2 = 0, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_3 \cdot \nabla x^3 = 1. \quad (6.15)$$

其中用到式(2.9)和式(2.11). 以下将举例说明确定方法.

7. 具可忽略坐标的坐标系的类型

(1) 平移对称坐标系

可忽略坐标的基矢为 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{a}$, 不妨取 $\mathbf{e}_3 = a\mathbf{e}_z$, 代入式(6.15)得

$$\frac{\partial x^1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial x^2}{\partial z} = 0, \quad a \frac{\partial x^3}{\partial z} = 1,$$

从中解得

$$x^1 = x^1(x, y), \quad x^2 = x^2(x, y), \quad x^3 = z/a. \quad (6.16)$$

常数 a 仅改变 z 坐标的尺度; 一般维持尺度不变, 取 $a = 1$. x^1 和 x^2 可以为 x 和 y 的任意独立函数, 所对应的 2 个坐标曲面与 z 平面垂直, 但彼此不一定正交. 常用的特例包括: 直角坐标系 ($x^1 = x, x^2 = y$), 圆柱坐标系 ($x^1 \equiv \rho = (x^2 + y^2)^{1/2}, x^2 \equiv \varphi = \arctan(y/x)$), 椭圆柱坐标系 (x^1 坐标曲面为椭圆柱面, x^2 坐标曲面为双曲柱面) 和以 z 轴为轴的其他柱坐标系.

(2) 轴对称坐标系

可忽略坐标的基矢为 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{b} \times \mathbf{r}$. 不妨取 $\mathbf{b} = b\mathbf{e}_z$, 在圆柱坐标系 (ρ, φ, z) 下有 $\mathbf{e}_3 = b\rho\mathbf{e}_\varphi$, 代入式(6.15)得

$$\frac{\partial x^1}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} = 0, \quad b \frac{\partial x^3}{\partial \varphi} = 1,$$

从中解得

$$x^1 = x^1(\rho, z), \quad x^2 = x^2(\rho, z), \quad x^3 = \varphi/b. \quad (6.17)$$

常数 b 仅改变 φ 坐标的尺度; 一般维持尺度不变, 取 $b=1$. x^1 和 x^2 可以为 ρ 和 z 的任意独立函数, 所对应的 2 个坐标曲面与 φ 平面 (以 z 轴为边的半平面) 垂直, 但彼此不一定正交. 常用的特例包括: 圆柱坐标系 ($x^1 = \rho, x^2 = z$)、球坐标系 ($x^1 \equiv r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}, x^2 \equiv \theta = \arcsin(z/r)$) 和其他轴对称 (有时称旋转对称) 坐标系.

(3) 螺线坐标系

可忽略坐标基矢为 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}$. 取 $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_z, \mathbf{b} = b\mathbf{e}_z$, 有 $\mathbf{e}_3 = a\mathbf{e}_z + b\rho\mathbf{e}_\varphi$, 代入式(6.15)得

$$a \frac{\partial x^1}{\partial z} + b \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} = 0, \quad a \frac{\partial x^2}{\partial z} + b \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} = 0, \quad a \frac{\partial x^3}{\partial z} + b \frac{\partial x^3}{\partial \varphi} = 1.$$

从中解得

$$x^1 = x^1(\rho, bz - a\varphi), \quad x^2 = x^2(\rho, bz - a\varphi), \quad x^3 = z/a. \quad (6.18)$$

注意 $x^3 = z/a$ 只是一种可能, 还存在其他选择, 例如 $x^3 = \varphi/b$ 等. x^1 和 x^2 可以为 ρ 和 $bz - a\varphi$ 的任意独立函数. 常用的特例为

$$x^1 = \rho, \quad x^2 = bz - a\varphi, \quad x^3 = z/a, \quad (6.19)$$

其中由 x^1 坐标曲面 ($\rho = C_1$) 和 x^2 坐标曲面 ($bz - a\varphi = C_2$) 交出的坐标曲线 (沿该曲线 z 变化) 为躺在半径为 $\rho = C_1$ 的圆柱面上的螺线, 故由式(6.19)表示的坐标系又称螺线坐标系.

综上所述, 具有一个可忽略坐标的坐标系仅分为 3 种类型, 相应的二维物理结构也只有 3 种类型, 它们分别具有平移、旋转和螺线对称性质.

7 曲线坐标系的构建及张量微分运算举例

本节举几个典型例子, 具体说明曲线坐标系下的微分运算技巧和注意事项.

1. 旋转椭球坐标系

(1) 坐标变换式

旋转椭球坐标系属于正交曲线坐标系, 其 3 个坐标曲面分别为旋转单叶双曲面、旋转椭球和以 z 轴为边界的半平面. 在直角坐标 (x, y, z) 下其曲面方程分别为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(1-\eta^2)} - \frac{z^2}{a^2\eta^2} = 1, \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (7.1)$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(1 + \xi^2)} + \frac{z^2}{a^2\xi^2} = 1, \quad (0 \leq \xi < \infty) \quad (7.2)$$

$$\frac{y}{x} = \tan \varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \quad (7.3)$$

式中 a 为常数, 3 个曲线坐标分别为 η 、 ξ 和 φ , 它们对应的坐标曲面分别为旋转单叶双曲面、旋转椭球和以 z 轴为边界的半平面. 图 4 示出前两簇曲面与 $x-z$ 平面的交线.

由式(7.1)~(7.2)可解出

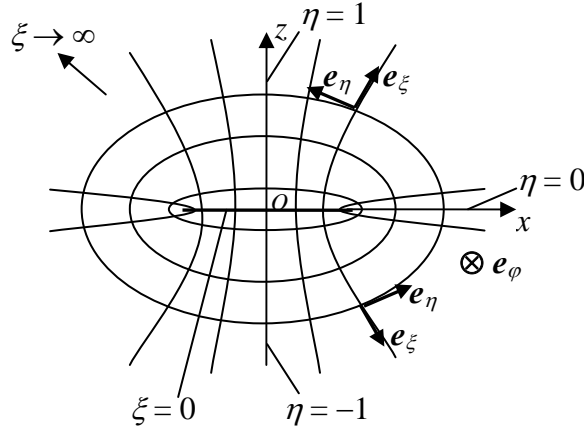


图 4 旋转单叶双曲面和旋转椭球面与 $x-z$ 平面的交线

$$\eta^2 = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 + \frac{4r^2}{a^2} \cos^2 \theta \right]^{1/2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad (7.4)$$

$$\xi^2 = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 + \frac{4r^2}{a^2} \cos^2 \theta \right]^{1/2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (7.5)$$

其中, 直角坐标被代之以球坐标; 这样做的好处在于第 3 个坐标 φ 正好就是球坐标的方位角坐标.

在由式(7.4)计算 η 时需做开方, 存在一个正根和负根的选择问题. 我们规定: 北半球 ($0 \leq \theta < \pi/2$) 取正根, 南半球 ($\pi/2 < \theta \leq \pi$) 取负根. 做这种规定的目的在于实现空间位置与曲线坐标的单值对应关系: 北半球对应正 η 值, 南半球对应负 η 值, 防止出现南北半球相对赤道对称的空间点具有完全相同的坐标.

为获得度规系数与曲线坐标 (η, ξ, φ) 的函数关系, 宜将坐标变换式反演成直角坐标与旋转椭球坐标的关系. 为此, 由式(7.1)和式(7.2)消去 z^2 , 可解出

$$x^2 + y^2 = a^2(1 - \eta^2)(1 + \xi^2).$$

再由式(7.3)可分别求得 x 和 y ; 将上式代回式(7.1)或式(7.2)可解得 z , 最终结果如下:

$$\begin{cases} x = a(1 - \eta^2)^{1/2}(1 + \xi^2)^{1/2} \cos \varphi, \\ y = a(1 - \eta^2)^{1/2}(1 + \xi^2)^{1/2} \sin \varphi, \\ z = a\xi\eta. \end{cases} \quad (7.6)$$

(2) (η, ξ, φ) 构成右旋正交曲线坐标系

对坐标系的右旋正交性质的事先判别十分重要. 一方面, 我们习惯于使用右旋坐标系; 另一方面, 如第 5 节所述, 对于正交曲线坐标系, 基矢和逆基矢彼此平行, 只需引入 3 个单位基矢, 可用 3 个拉梅系数取代度规系数, 等等, 这给张量微分运算带来极大简化. 下面就来证明由 (η, ξ, φ) 构成的旋转椭球坐标系为右旋正交曲线坐标系.

证明只需对逆基矢进行. 由逆基矢等于坐标梯度的结论可知, 需要证明如下关系式成立:

$$\nabla \eta \cdot \nabla \xi = 0, \quad \nabla \eta \cdot \nabla \varphi = 0, \quad \nabla \xi \cdot \nabla \varphi = 0, \quad \nabla \eta \cdot (\nabla \xi \times \nabla \varphi) > 0.$$

上式可等效地改写成

$$\nabla \eta^2 \cdot \nabla \xi^2 = 0, \quad \mathbf{e}_\varphi \cdot \nabla \eta^2 = 0, \quad \mathbf{e}_\varphi \cdot \nabla \xi^2 = 0, \quad \mathbf{e}_\varphi \cdot (\nabla \eta \times \nabla \xi) / (r \sin \theta) > 0, \quad (7.7)$$

式中 \mathbf{e}_φ 为方位向的单位基矢; 其顶部的尖角号已经舍去, 旨在简化表述. 以下所有单位基矢的顶部均舍去尖角号. 为证明式(7.7)成立, 我们利用球坐标下的梯度计算公式

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

计算 $\nabla \eta^2$ 和 $\nabla \xi^2$, 式中 \mathbf{e}_r 、 \mathbf{e}_θ 和 \mathbf{e}_φ 为球坐标系的 3 个单位基矢. 由于 η^2 和 ξ^2 均与 φ 无关, 式(7.7)中间的两个式子显然成立. 从式(7.4)和式(7.5)分别求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^2}{\partial r} &= \frac{r}{a^2} \left\{ \frac{-1 + \frac{r^2}{a^2} + 2 \cos^2 \theta}{\left[\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 + \frac{4r^2}{a^2} \cos^2 \theta \right]^{1/2}} - 1 \right\}, \quad \frac{\partial \xi^2}{\partial r} = \frac{r}{a^2} \left\{ \frac{-1 + \frac{r^2}{a^2} + 2 \cos^2 \theta}{\left[\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 + \frac{4r^2}{a^2} \cos^2 \theta \right]^{1/2}} + 1 \right\}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \eta^2}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \xi^2}{\partial \theta} = -\frac{2r \sin \theta \cos \theta}{a^2} \left[\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 + \frac{4r^2}{a^2} \cos^2 \theta \right]^{-1/2}, \end{aligned}$$

据此证得

$$\nabla \eta^2 \cdot \nabla \xi^2 = \frac{\partial \eta^2}{\partial r} \frac{\partial \xi^2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta^2}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^2}{\partial \theta} = 0,$$

从而式(7.7)中的第一式得证; 同时证得

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \cdot (\nabla \eta \times \nabla \xi) &= \frac{\mathbf{e}_\varphi}{4\eta\xi r \sin \theta} \cdot (\nabla \eta^2 \times \nabla \xi^2) \\ &= \frac{1}{4\eta\xi r \sin \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \eta^2}{\partial r} \frac{\partial \xi^2}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \eta^2}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^2}{\partial r} \right) = \frac{r \cos \theta}{\eta\xi a^4} \left[\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 + \frac{4r^2}{a^2} \cos^2 \theta \right]^{-1/2}. \end{aligned}$$

注意 ξ 和 $\cos \theta / \eta$ 非负, 因而上式恒正, 即式(7.7)的最后一个式子得证, 证毕.

(3) 拉梅系数

重抄式(5.4)如下:

$$h_i = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial x^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x^i} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{\partial x^i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^i}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (5.4)$$

用第 1 个式子需要写出直角坐标 (x, y, z) 与曲线坐标 $(x^1, x^2, x^3) = (\eta, \xi, \varphi)$ 的显函数关系, 优点是能将拉梅系数表达为曲线坐标的显函数. 我们已经推得 (x, y, z) 与 (η, ξ, φ) 的显函数关系式(7.6), 宜选择式(5.4)的第 1 个式子计算拉梅系数. 结果为

$$\begin{cases} h_1 \equiv h_\eta = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{a(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}}{(1 - \eta^2)^{1/2}}, \\ h_2 \equiv h_\xi = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{a(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}}{(1 + \xi^2)^{1/2}}, \\ h_3 \equiv h_\varphi = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{1/2} = a(1 - \eta^2)^{1/2}(1 + \xi^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (7.8)$$

读者容易验证, 由式(7.8)中的第 3 式算得的 h_3 恰好等于球坐标下的值 $r \sin \theta$.

(4) 拉普拉斯方程

将式(7.8)代入式(5.28)得

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2(\eta^2 + \xi^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \xi^2) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] + \left(\frac{1}{1 - \eta^2} - \frac{1}{1 + \xi^2} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right\} = 0. \quad (7.9)$$

对于上述方程, 可用分离变量法求解.

(5) 奇异性与奇异面

除开直角坐标系之外, 所有曲线坐标系均存在奇异线, 该处度规系数矩阵的行列式等于零或无穷大, 坐标和基矢不再单值. 较为复杂的曲线坐标系还会出现奇异面, 该处度规系数矩阵的行列式等于零或无穷大; 坐标和基矢不仅出现多值, 而且在奇异面两侧发生跳变. 在求解基本方程的时候, 应对这些奇异线和奇异面进行特别处理. 下面就旋转椭球坐标系的奇异线和奇异面及其特别处理进行初步分析.

(a) 奇异线

极轴 (上半段极轴 $\eta = 1$, 下半段极轴 $\eta = -1$) 为奇异线, 该处 φ 可在区间 $(0, 2\pi)$ 内取任意值, 单位基矢 \mathbf{e}_η 和 \mathbf{e}_φ 的方向不确定. 对常用的圆柱坐标系和球坐标系, 以及一切旋转对称坐标系, 均存在极轴奇异线. 各种曲线坐标系的极轴处理方法类似, 基本要求是物理量在极轴上单值 (不因方位角 φ 不同而改变), 在极轴的邻域内连续可微.

(b) 奇异面

下述圆面属于奇异面:

$$r \leq a, \quad \theta = \pi/2; \quad \text{or} \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad \xi = 0, \quad (7.10)$$

它与 $x - z$ 平面的交线示于图 5 (粗实线).

在奇异面两侧， η 值反号，基矢 \mathbf{e}_η 和 \mathbf{e}_ξ 反向，即

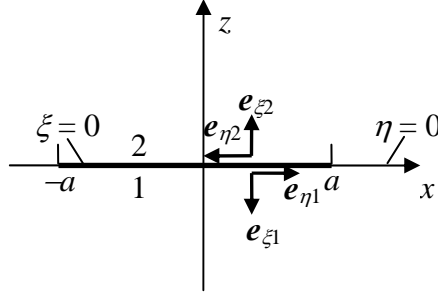


图 5 奇异面（粗实线）两侧的单位基矢反向

$$\eta_1 = -\eta_2, \quad \mathbf{e}_{\eta 1} = -\mathbf{e}_{\eta 2}, \quad \mathbf{e}_{\xi 1} = -\mathbf{e}_{\xi 2}. \quad (7.11)$$

上述关系也可从图 4 看出。如果有一矢量

$$\mathbf{A} = A_\eta \mathbf{e}_\eta + A_\xi \mathbf{e}_\xi, \quad \text{则} \quad \begin{cases} A_{\eta 1} = A_{\eta 2}: & \text{表示切向分量反号} \\ A_{\eta 1} = -A_{\eta 2}: & \text{表示切向分量连续} \\ A_{\xi 1} = A_{\xi 2}: & \text{表示法向分量反号} \\ A_{\xi 1} = -A_{\xi 2}: & \text{表示法向分量连续} \end{cases}$$

在获得矢量 \mathbf{A} 的解之后，一定要按上述方式正确处理奇异边界上的边值关系。以带电圆盘导体产生的电场 \mathbf{E} 为例，则圆盘面两侧的电场切向分量连续和法向分量跳变的条件的表达式应为

$$E_{\eta 1} = -E_{\eta 2}, \quad E_{\xi 1} + E_{\xi 2} = \sigma / \varepsilon_0,$$

式中 σ 为面电荷密度， ε_0 为真空介电常量。

2. 磁面坐标系

(1) 为何要引入磁面坐标系？

在磁化等离子体中，带电粒子运动受磁场约束，可分解为 3 种主要运动方式：一是绕磁力线的回旋运动，二是在磁力线两端磁镜点（带电粒子在磁镜点发生反射）之间的来回振荡运动，三是沿着某个由磁力线编织成的闭合磁面（呈鼓状，又称“磁鼓”）的漂移运动。磁场中带电粒子的分布与上述运动方式密切相关，沿磁力线和磁面的粒子分布函数满足一定规律。为描述这种分布，人们常采用磁力线作为坐标曲线，选择适当的磁面作为坐标曲面；这样构建的曲线坐标系称为磁面坐标系。

(2) 磁面坐标系的构建

构建磁面坐标系，必须给定空间磁场。为简单起见，我们假定磁场 \mathbf{B} 为轴对称势场（即无旋场，满足 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ），存在磁标势函数 $\Phi = \Phi(r, \theta)$ 和磁通函数 $\Psi = \Psi(r, \theta)$ ，满足

$$\mathbf{B} = -\nabla\Phi = \nabla \times \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \right) = \nabla\Psi \times \left(\frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \right). \quad (7.12)$$

在坐标系构建之前，先就磁通函数的意义作些解释。首先，由式(7.12)可见， $\Psi \mathbf{e}_\varphi / (r \sin \theta)$ 即磁矢势，它仅存在 φ 分量。其次，由 $\nabla\varphi = \mathbf{e}_\varphi / (r \sin \theta)$ 可知， $\mathbf{e}_\varphi / (r \sin \theta)$ 的旋度为零，可从旋度算符下提出，因而推得式(7.12)的最末一个等式。下面分析磁通函数的几何意义。由

$$\mathbf{B} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \left(\nabla\Psi \times \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \right) = -(\mathbf{B} \cdot \nabla\Psi) \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi = 0,$$

得

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi = 0, \quad (7.13)$$

表示沿磁力线磁通函数为常数。一族磁通函数相等的磁力线构成磁面。下面证明：两个相邻磁面之间的磁通量正比于两个磁面的磁通函数之差。考察磁面与赤道面（ $\theta = \pi/2$ ）的交线。基于磁场的轴对称性，该交线为圆周。设两个磁面交出的圆周半径分别为 r_1 和 r_2 ，则通过两圆周之间的圆环面的磁通为

$$\Phi_B = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint \left(\nabla \Psi \times \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \right) \cdot \mathbf{e}_\theta r dr d\varphi = -2\pi \int_{r_1}^{r_2} (\nabla \Psi) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi(\Psi_1 - \Psi_2). \quad (7.14)$$

上式表明，磁面 1 和磁面 2 之间的磁通等于两磁面磁通函数之差的 2π 倍，证毕。

现在我们来构建磁面坐标系。磁面坐标系分为正交磁面坐标系和非正交磁面坐标系两种类型。正交曲线坐标系中的微分运算相对简单，但坐标本身比较复杂，缺乏直观意义；非正交曲线坐标系的坐标的几何意义比较直观，但微分运算相对复杂。

先来构建正交磁面坐标系。式(7.12)表明， $\nabla \Psi$ 、 $\nabla \Phi$ 和 $\nabla \varphi$ 之间彼此正交，于是 (Ψ, Φ, φ) 构成一组正交曲线坐标。进一步，由

$$\mathbf{e}_\varphi \cdot (\nabla \Psi \times \nabla \Phi) = (\nabla \Psi)^2 / (r \sin \theta) > 0,$$

可判断该坐标系为右旋正交曲线坐标系。上述正交磁面坐标中的 φ 表示方位角，意义直观；其余两个坐标虽具有各自特定的物理含义，但从表述空间位置的角度来看很不直观，很难从它们的值去想像空间某点的具体位置。但是，由于是正交曲线坐标系，张量微分运算只涉及 3 个拉梅系数，相对较为简单。

为使得空间坐标的几何意义更加直观，我们可用磁力线与赤道面交点的距离 L 取代磁通函数 Ψ ，用纬度 λ 取代磁标势 Φ ，保留经度（即方位角）坐标 φ ，由 L 、 λ 和 φ 构成的磁面坐标系显然是非正交的。这时，将不得不采用一般曲线坐标系的张量微分公式，运算起来相对复杂。以此为代价，换来了坐标的几何直观性：从这套坐标出发，较为容易想像它们所代表的空间点的位置。

以下我们设磁场为偶极场，分别介绍两种典型的磁面坐标系，一种正交，另一种非正交；同时举例说明张量微分的运算方法。

(3) 偶极磁场下的正交磁面坐标系

对于偶极场，磁场 \mathbf{B} 、磁标势 Φ 和磁通函数 Ψ 的表达式如下：

$$\mathbf{B} = \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3}, \frac{\sin \theta}{r^3}, 0 \right), \quad \Phi = \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad \Psi = \frac{\sin^2 \theta}{r}. \quad (7.15)$$

下面以纬度 λ 取代余纬 θ ，在地球和天体物理中，前者更为常用。二者的关系是

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2} \quad (7.16)$$

由于 $\nabla \lambda = -\nabla \theta$ ，经变换后的球坐标 (r, λ, φ) 将变为左旋坐标系。这时，可将坐标排序置换奇数次，例如将 r 和 λ 互换位置得 (λ, r, φ) ，使之回到右旋坐标系。将余纬换成纬度之后，式(7.15)化为

$$\mathbf{B} = \left(\frac{2 \sin \lambda}{r^3}, \frac{\cos \lambda}{r^3}, 0 \right), \quad \Phi = \frac{\sin \lambda}{r^2}, \quad \Psi = \frac{\cos^2 \lambda}{r}. \quad (7.17)$$

如前所述, (Ψ, Φ, φ) 构成右旋正交磁面坐标系. 但为直观起见, 我们用

$$L = \frac{1}{\Psi} = \frac{r}{\cos^2 \lambda} \quad (7.18)$$

取代 Ψ 作为磁面坐标, 它等于磁面与赤道面的交线 (为圆周) 半径, 用它表示空间位置更为直观. 此时, 由于 $\nabla L = -\Psi^{-2} \nabla \Psi$, 故需要交换 Φ 和 L 的次序得 (Φ, L, φ) , 使得最终构建的磁面坐标系维持右旋性质. 由 (λ, r, φ) 表示的球坐标系和由 (Φ, L, φ) 表示的磁面坐标系, 均属于右旋正交曲线坐标系, 其基矢配置示意于图 6. 上述球坐标系 (λ, r, φ) 的拉梅系数为 $(r, r, r \sin \theta)$, 下面计算正交磁面坐标系 (Φ, L, φ) 的拉梅系数.

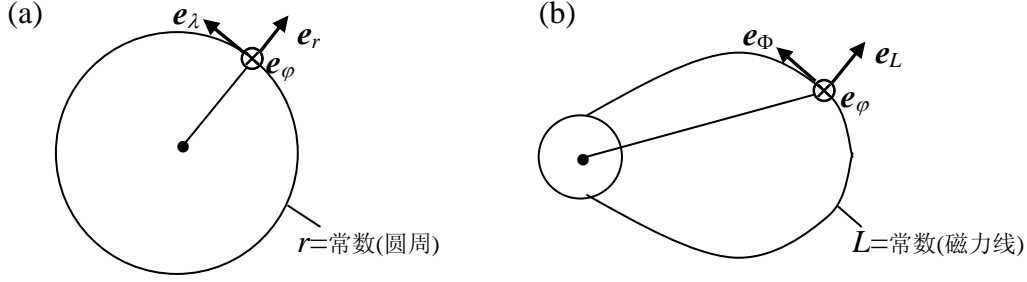


图 6 (a) (λ, r, φ) 构成的球坐标系的基矢; (b) (Φ, L, φ) 构成的正交磁面坐标系的基矢

在目前情况下, 很难写出直角坐标 (x, y, z) 与曲线坐标 (Φ, L, φ) 的显函数关系. 如果坚持用式 (5.4) 的第 1 式计算的话, 将会涉及隐函数求导的复杂问题. 虽说这种方案照样可行, 为简便起见我们还是改用式 (5.4) 的第 2 式即 $h_i = 1/|\nabla x^i|$ 计算拉梅系数. 在计算曲线坐标的梯度时, 我们也不必使用直角坐标, 而改在球坐标 (λ, r, φ) 下操作更为方便. 这样求得的拉梅系数将是球坐标 (λ, r, φ) 的显函数, 但其中的 r 不难通过式 (7.18) 化为 L 的显函数. 至于纬度 λ , 很难将其进一步写成 Φ 和 L 的显函数, 我们暂时在拉梅系数的表达式中予以保留. 由式 (7.17) 和式 (7.18) 得

$$\begin{aligned} \nabla \Phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r = \frac{\cos \lambda}{r^3} \mathbf{e}_\lambda - \frac{2 \sin \lambda}{r^3} \mathbf{e}_r, \\ \nabla L &= \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{\partial L}{\partial r} \mathbf{e}_r = \frac{2 \sin \lambda}{\cos^3 \lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{1}{\cos^2 \lambda} \mathbf{e}_r, \end{aligned}$$

从而推出正交磁面坐标系的头 2 个单位基矢为

$$\mathbf{e}_\Phi = \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} = \frac{\cos \lambda}{\sqrt{1+3 \sin^2 \lambda}} \mathbf{e}_\lambda - \frac{2 \sin \lambda}{\sqrt{1+3 \sin^2 \lambda}} \mathbf{e}_r, \quad (7.19)$$

$$\mathbf{e}_L = \frac{\nabla L}{|\nabla L|} = \frac{2 \sin \lambda}{\sqrt{1+3 \sin^2 \lambda}} \mathbf{e}_\lambda + \frac{\cos \lambda}{\sqrt{1+3 \sin^2 \lambda}} \mathbf{e}_r, \quad (7.20)$$

第 3 个基矢为 \mathbf{e}_φ . 3 个拉梅系数为

$$h_1 \equiv h_\Phi = \frac{1}{|\nabla \Phi|} = \frac{r^3}{\sqrt{1+3 \sin^2 \lambda}} = \frac{L^3 \cos^6 \lambda}{\sqrt{1+3 \sin^2 \lambda}}, \quad (7.21)$$

$$h_2 \equiv h_L = \frac{1}{|\nabla L|} = \frac{\cos^3 \lambda}{\sqrt{1+3 \sin^2 \lambda}}, \quad (7.22)$$

$$h_3 \equiv h_\varphi = r \sin \theta = r \cos \lambda = L \cos^3 \lambda. \quad (7.23)$$

注意以上拉梅系数中出现的纬度 λ 将通过式(7.17)和式(7.18)确定为 Φ 和 L 的如下隐函数:

$$f(\Phi, L, \lambda) = L^2 \Phi \cos^4 \lambda - \sin \lambda = 0. \quad (7.24)$$

于是按隐函数求导公式可得

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \Phi} = -\frac{\partial f / \partial \Phi}{\partial f / \partial \lambda} = \frac{L^2 \cos^3 \lambda}{1 + 4L^2 \Phi \sin \lambda \cos^2 \lambda}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial L} = -\frac{\partial f / \partial L}{\partial f / \partial \lambda} = \frac{2L \Phi \cos^3 \lambda}{1 + 4L^2 \Phi \sin \lambda \cos^2 \lambda}. \quad (7.25)$$

在涉及到拉梅系数本身的偏导数时, 应视拉梅系数为复合函数, 通过如下公式进行计算:

$$\frac{\partial h_i}{\partial \Phi} = \frac{\partial h_i}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \Phi}, \quad \frac{\partial h_i}{\partial L} = \left(\frac{\partial h_i}{\partial L} \right)_\lambda + \frac{\partial h_i}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial L}. \quad (7.26)$$

至此, 正交磁面坐标系构建完毕. 有关张量微分可按正交曲线坐标系的通式获得 (参见第 5 节). 例如某标量 Q 的梯度为

$$\nabla Q = \frac{1}{h_\Phi} \left(\frac{\partial Q}{\partial \Phi} \right)_{L, \varphi} \mathbf{e}_\Phi + \frac{1}{h_L} \left(\frac{\partial Q}{\partial L} \right)_{\Phi, \varphi} \mathbf{e}_L + \frac{1}{h_\varphi} \left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi} \right)_{\Phi, L} \mathbf{e}_\varphi, \quad (7.27)$$

或利用式(7.21)~(7.23)将其写为

$$\nabla Q = \frac{\sqrt{1+3\sin^2 \lambda}}{r^3} \left(\frac{\partial Q}{\partial \Phi} \right)_{L, \varphi} \mathbf{e}_\Phi + \frac{\sqrt{1+3\sin^2 \lambda}}{\cos^3 \lambda} \left(\frac{\partial Q}{\partial L} \right)_{\Phi, \varphi} \mathbf{e}_L + \frac{1}{r \cos \lambda} \left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi} \right)_{\Phi, L} \mathbf{e}_\varphi. \quad (7.28)$$

(4) 偶极磁场下的非正交磁面坐标系

为使曲线坐标的几何意义进一步直观, 可用纬度 λ 取代磁标势 Φ , 由 (λ, L, φ) 构成的磁面坐标系属于非正交坐标系. 三个逆基矢为

$$\mathbf{e}^1 = \nabla \lambda = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\lambda, \quad (7.29)$$

$$\mathbf{e}^2 = \nabla L = \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{\partial L}{\partial r} \mathbf{e}_r = \frac{2 \sin \lambda}{\cos^3 \lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{1}{\cos^2 \lambda} \mathbf{e}_r, \quad (7.30)$$

$$\mathbf{e}^3 = \nabla \varphi = \frac{1}{r \cos \lambda} \mathbf{e}_\varphi, \quad (7.31)$$

成立

$$\mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3) = \mathbf{e}^3 \cdot (\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2) = \frac{1}{r \cos \lambda} \mathbf{e}_\varphi \cdot \left[\frac{1}{r} \mathbf{e}_\lambda \times \left(\frac{2 \sin \lambda}{\cos^3 \lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{1}{\cos^2 \lambda} \mathbf{e}_r \right) \right] = \frac{1}{r^2 \cos^3 \lambda} > 0,$$

故构成右旋坐标系. 从上式及式(2.12)、式(2.26)得

$$V = r^2 \cos^3 \lambda, \quad g = V^2 = r^4 \cos^6 \lambda. \quad (7.32)$$

由式(2.10)得逆基矢

$$\mathbf{e}_1 = V(\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3) = -2r \tan \lambda \mathbf{e}_r + r \mathbf{e}_\lambda, \quad \mathbf{e}_2 = \cos^2 \lambda \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_3 = r \cos \lambda \mathbf{e}_\varphi. \quad (7.33)$$

由式(2.13)得度规系数

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} r^2(1+3\sin^2\lambda)\cos^{-2}\lambda & -2r\sin\lambda\cos\lambda & 0 \\ -2r\sin\lambda\cos\lambda & \cos^4\lambda & 0 \\ 0 & 0 & r^2\cos^2\lambda \end{pmatrix}, \quad (7.34)$$

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = \begin{pmatrix} r^{-2} & 2r^{-1}\sin\lambda\cos^{-3}\lambda & 0 \\ 2r^{-1}\sin\lambda\cos^{-3}\lambda & (1+3\sin^2\lambda)\cos^{-6}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2}\cos^{-2}\lambda \end{pmatrix}, \quad (7.35)$$

至此，非正交磁面坐标系 (λ, L, φ) 的全部基本参数均已确定，接着可按第3节给出的公式计算基矢微分，按第4节给出的公式计算张量微分。例如，某标量 Q 的梯度为

$$\nabla Q = \frac{\partial Q}{\partial x^i} \mathbf{e}^i = \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda} \right)_{L,\varphi} \mathbf{e}^1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial L} \right)_{\lambda,\varphi} \mathbf{e}^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi} \right)_{\lambda,L} \mathbf{e}^3. \quad (7.36)$$

将式(7.29)~(7.31)代入上式得

$$\nabla Q = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda} \right)_{L,\varphi} \mathbf{e}_\lambda + \left(\frac{\partial Q}{\partial L} \right)_{\lambda,\varphi} \left(\frac{2\sin\lambda}{\cos^3\lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{1}{\cos^2\lambda} \mathbf{e}_r \right) + \frac{1}{r\cos\lambda} \left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi} \right)_{\lambda,L} \mathbf{e}_\varphi. \quad (7.37)$$

顺便指出，梯度表达式(7.28)和式(7.37)虽在不同坐标系下写出，但二者完全等效，证明见例6。

例6 证明式(7.37)和式(7.28)等效。

证 由式(7.19)和(7.20)解得

$$\mathbf{e}_\lambda = \frac{\cos\lambda}{\sqrt{1+3\sin^2\lambda}} \mathbf{e}_\Phi + \frac{2\sin\lambda}{\sqrt{1+3\sin^2\lambda}} \mathbf{e}_L, \quad \mathbf{e}_r = -\frac{2\sin\lambda}{\sqrt{1+3\sin^2\lambda}} \mathbf{e}_\Phi + \frac{\cos\lambda}{\sqrt{1+3\sin^2\lambda}} \mathbf{e}_L,$$

再代入式(7.37)得

$$\begin{aligned} \nabla Q &= \frac{1}{r} \left(\frac{\cos\lambda}{\sqrt{1+3\sin^2\lambda}} \mathbf{e}_\Phi + \frac{2\sin\lambda}{\sqrt{1+3\sin^2\lambda}} \mathbf{e}_L \right) \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda} \right)_{L,\varphi} \\ &\quad + \frac{\sqrt{1+3\sin^2\lambda}}{\cos^3\lambda} \left(\frac{\partial Q}{\partial L} \right)_{\lambda,\varphi} \mathbf{e}_L + \frac{1}{r\cos\lambda} \left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi} \right)_{\lambda,L} \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \nabla Q &= \frac{\cos\lambda}{r\sqrt{1+3\sin^2\lambda}} \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda} \right)_{L,\varphi} \mathbf{e}_\Phi \\ &\quad + \left[\frac{\sqrt{1+3\sin^2\lambda}}{\cos^3\lambda} \left(\frac{\partial Q}{\partial L} \right)_{\lambda,\varphi} + \frac{2\sin\lambda}{r\sqrt{1+3\sin^2\lambda}} \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda} \right)_{L,\varphi} \right] \mathbf{e}_L + \frac{1}{r\cos\lambda} \left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi} \right)_{\lambda,L} \mathbf{e}_\varphi, \quad (7.38) \end{aligned}$$

下面的任务是证明式(7.38)右边各项分别与式(7.28)右边的对应项相等。

先考察式(7.38)右边第1项。在固定 L 和 φ 的情况下， Q 仅仅通过 Φ 与 λ 发生关系，因此

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda} \right)_{L,\varphi} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \Phi} \right)_{L,\varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_L.$$

为计算 $(\partial\Phi/\partial\lambda)_L$ ，必须写出 Φ 与 λ 和 L 的函数关系。为此，从 Φ 与 L 的表达式（参见式(7.17)和式(7.18)）中消去 r 得

$$\Phi = \frac{\sin \lambda}{L^2 \cos^4 \lambda}, \quad (7.39)$$

从中可求得

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_L = \frac{\cos \lambda}{L^2 \cos^4 \lambda} + \frac{4 \sin^2 \lambda}{L^2 \cos^5 \lambda} = \frac{1 + 3 \sin^2 \lambda}{L^2 \cos^5 \lambda}.$$

于是式(7.38)右边第 1 项化为

$$\frac{\cos \lambda}{r \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}} \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda} \right)_{L, \varphi} \mathbf{e}_\Phi = \frac{\cos \lambda}{r \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}} \left(\frac{\partial Q}{\partial \Phi} \right)_{L, \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_L \mathbf{e}_\Phi = \frac{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}}{r^3} \left(\frac{\partial Q}{\partial \Phi} \right)_{L, \varphi} \mathbf{e}_\Phi,$$

它恰好等于式(7.28)右边第 1 项.

再考察式(7.38)右边的末项. 由式(7.39)可见, 当固定 λ 和 L 不变时, Φ 也跟着不变. 因此, 在对 φ 求偏导数时, 固定 λ 和 L 不变和固定 Φ 和 L 不变完全等效, 即式(7.38)和式(7.28)右边的末项相等.

最后考察式(7.38)和式(7.28)右边的第 2 项. 如果它们相等的话, 应当成立

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial L} \right)_{\Phi, \varphi} = \left(\frac{\partial Q}{\partial L} \right)_{\lambda, \varphi} + \frac{2 \sin \lambda \cos^3 \lambda}{r(1 + 3 \sin^2 \lambda)} \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda} \right)_{L, \varphi}, \quad (7.40)$$

下面就来证明式(7.40). 由复合函数求导法则可以写下

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial L} \right)_{\Phi, \varphi} = \left(\frac{\partial Q}{\partial L} \right)_{\lambda, \varphi} + \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda} \right)_{L, \varphi} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial L} \right)_\Phi,$$

其中 $(\partial \lambda / \partial L)_\Phi$ 可由式(7.39)求得, 结果如下:

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial L} \right)_\Phi = \frac{2 \sin \lambda \cos^3 \lambda}{r(1 + 3 \sin^2 \theta)},$$

于是式(7.40)得证, 证毕.

3. 任意曲面上面电流密度的二维散度

(1) 面电流密度及其散度方程

在电动力学中, 有时会碰到电流片上面电流密度的散度计算问题. 例如, 作为近似, 我们常将地球电离层近似成一个围绕地球的球壳即球状电流片. 如果该面电流密度的二维散度不为零, 则表明有电流自电离层流出 (散度为正) 或有电流自外部进入电离层 (散度为负), 这体现了外层空间等离子体与电离层之间的电动力学耦合作用. 又如在超声速太阳风的作用下在地球前方形成的弓激波, 在激波面上存在面电流, 也构成一个电流片; 只要能事先确定弓激波的几何形状, 就能依据激波边值关系和太阳风状态精确计算沿弓激波的面电流密度分布. 研究表明, 弓激波面电流密度的二维散度不为零, 会出现法向电流, 由此导致在弓激波和近地空间等离子体之间的电动力学耦合作用. 为实施这类二维散度计算, 宜将电流片取为坐标曲面之一. 通常电流片 (例如弓激波) 的形状复杂, 很难对其他两组坐标曲面做出合适选择去构成正交曲线坐标系; 其实也不必勉为其难. 因此, 下面的讨论将针对一般曲线坐标系 (x^1, x^2, x^3) , 相关坐标、基矢、逆基矢和度规系数的符号同第 2 节.

设电流片为坐标曲面之一, 不妨取为 $x^1 = 0$; 则该曲面的法向单位矢量为

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla x^1}{|\nabla x^1|} = \frac{\mathbf{e}^1}{|\mathbf{e}^1|} = \frac{\mathbf{e}^1}{\sqrt{g^{11}}}, \quad g^{11} = \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^1, \quad (7.41)$$

式中 \mathbf{e}^1 为对应的逆基矢. 设电流片上的面电流密度为 \mathbf{J} , 满足 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$. 于是, 按矢量展开式的一般形式, 易证 \mathbf{J} 仅有 2 个逆变分量, 即可将它表示为

$$\mathbf{J} = J^2 \mathbf{e}_2 + J^3 \mathbf{e}_3, \quad J^2 = \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{J}, \quad J^3 = \mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{J}, \quad (7.42)$$

式中 \mathbf{e}_2 和 \mathbf{e}_3 为基矢, \mathbf{e}^2 和 \mathbf{e}^3 为逆基矢; 由后 2 个式子可由已经算得的 \mathbf{e}^2 、 \mathbf{e}^3 和 \mathbf{J} 计算面电流密度的 2 个逆变分量 (即切向分量). 设电流满足稳恒条件, 即 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. 由式(4.6)得

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} j^1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} j^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (\sqrt{g} j^3) \right] = 0, \quad (7.43)$$

式中 j^i ($i=1,2,3$) 为体电流密度 \mathbf{j} 的 3 个逆变分量, x^2 和 x^3 为余下两个曲线坐标, $g = \det(G)$ 为度规系数矩阵的行列式. 将式(7.43)改写成

$$\frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} j^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (\sqrt{g} j^3) = -\frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} j^1). \quad (7.44)$$

现在我们考察面电流密度 \mathbf{J} 和体电流密度 \mathbf{j} 的关系. 先计算体电流密度的法向分量 j_n 和切向分量 j_t :

$$\begin{aligned} j_n &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{n} = \mathbf{e}^1 \cdot (j^1 \mathbf{e}_1 + j^2 \mathbf{e}_2 + j^3 \mathbf{e}_3) \mathbf{n} / \sqrt{g^{11}} = j^1 \mathbf{n} / \sqrt{g^{11}}, \\ j_t &= \mathbf{j} - j_n = j^1 (\mathbf{e}_1 - \mathbf{n} / \sqrt{g^{11}}) + j^2 \mathbf{e}_2 + j^3 \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (7.45)$$

在推导过程中用到式(7.41)和式(2.9). 在过渡层中, 切向体电流密度 (在电流片近似下趋于无穷大) 应远大于法向体电流密度, 即 $j^2, j^3 \gg j^1$, 因而可略去式(7.45)第 2 式右边的第 1 项, 推得

$$\mathbf{J} = J^2 \mathbf{e}_2 + J^3 \mathbf{e}_3 = \int \mathbf{j}_t ds_1 = \int \mathbf{j}_t (\mathbf{n} \cdot d\mathbf{s}_1) = \int \mathbf{j}_t (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) dx^1 = \int (j^2 \mathbf{e}_2 + j^3 \mathbf{e}_3) dx^1 / \sqrt{g^{11}},$$

式中 $d\mathbf{s}_1$ 为沿过渡层垂直方向的线元, $d\mathbf{s}_1 = dx^1 \mathbf{e}_1$ 为沿 x^1 坐标线的弧元矢量 (参见式(2.32)), 推导过程中用到式(2.9)和式(7.41). 由上式可导出

$$J^2 = \int j^2 dx^1 / \sqrt{g^{11}}, \quad J^3 = \int j^3 dx^1 / \sqrt{g^{11}}. \quad (7.46)$$

将式(7.44)左右两边对 x^1 (跨越电流片过渡层) 积分, 左边积分后的结果为

$$\int \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} j^2) dx^1 + \int \frac{\partial}{\partial x^3} (\sqrt{g} j^3) dx^1 = \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g g^{11}} J^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (\sqrt{g g^{11}} J^3), \quad (7.47)$$

推导中用到式(7.46); 右边积分后的结果为

$$-\int \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} j^1) dx^1 = -\int \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g g^{11}} j_n) dx^1 = \sqrt{g g^{11}} (j_{n1} - j_{n2}) = \sqrt{g g^{11}} j_{in}, \quad (7.48)$$

推导中用到式(7.45)中的第一式, j_{n1} 和 j_{n2} 为电流片两侧的法向 (法向 \mathbf{n} 由 1 侧指向 2 侧) 体电流密度, 而 j_{in} 则为沿垂直方向进入电流片的净体电流密度. 如果 $j_{in} < 0$, 表示法向电流自电流片流出. 由式(7.47)和式(7.48), 最终将式(7.44)化为

$$\frac{1}{\sqrt{g g^{11}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g g^{11}} J^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (\sqrt{g g^{11}} J^3) \right] = j_{in}. \quad (7.49)$$

让我们考察上式左边项的数学意义. 为此, 考察电流片上的某个面积 A , 其边界为闭合回路 C . 则

从该边界 C 流出 A 的净电流为

$$I_{\text{out}} = \oint_C \mathbf{J} \cdot (d\mathbf{s} \times \mathbf{n}) = \iint_A \nabla_2 \cdot \mathbf{J} da,$$

后一个等式来自二维高斯公式，其中 $\nabla_2 \cdot \mathbf{J}$ 为面电流密度的二维散度。与此同时，自外界流入 A 的净电流为

$$I_{\text{in}} = \iint_A j_{\text{in}} da.$$

由电流稳恒条件，成立 $I_{\text{out}} = I_{\text{in}}$ ，即

$$\iint_A \nabla_2 \cdot \mathbf{J} da = \iint_A j_{\text{in}} da.$$

考虑到 A 的任意性，上式意味着电流片上处处成立 $\nabla_2 \cdot \mathbf{J} = j_{\text{in}}$ ，从而推断式(7.49)左边等于面电流密度的二维散度，即

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{g g^{11}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g g^{11}} J^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (\sqrt{g g^{11}} J^3) \right] = j_{\text{in}}. \quad (7.50)$$

将上式与式(7.43)对比，面电流密度的二维散度一般不等于一般矢量的三维散度表达式中的后两项之和，除非 g^{11} 等于常数。对平面（直角坐标系）、圆柱面（圆柱坐标系）和球面（球坐标系）电流片来说，均有 $\sqrt{g^{11}} = 1/h_1 = 1$ （ h_1 为对应坐标 x^1 的拉梅系数，对直角坐标 x^1 为 x ，圆柱坐标 x^1 为极径 ρ ，球坐标 x^1 为径向距离 r ，相应拉梅系数均等于 1），可以简单地从三维散度表达式删去一项，就可获得面电流密度的二维散度表达式。对于形状复杂的电流片，不能这样做，而必须采用式(7.50)。上面的分析过程表明，要获得二维散度的表达式，一般不可从三维散度的微分形式出发，而应当从二维散度的原始定义（积分形式）出发去进行推导。

下面的任务是构建电流片坐标系，其中坐标 x^1 的某个坐标曲面（ $x^1 = 0$ ）取为电流片。余下两个坐标可随意选取，最好选择那些我们熟悉且意义直观的坐标。一般我们熟悉的坐标为直角坐标 (x, y, z) 、球坐标 (r, θ, φ) 和圆柱坐标 (z, ρ, φ) ，于是我们可以从这 3 类坐标系出发去构建电流片坐标系。以上我们有意识地安排 3 个坐标的顺序，使得其中后两个坐标对应 x^2 和 x^3 。相应，我们可以构建 3 类电流片坐标系。下面依次介绍各类电流片坐标系的构建过程和运算公式。

(2) (x^1, y, z) 电流片坐标系

在这种坐标下，电流片由如下方程描述：

$$x = f(y, z), \quad (7.51)$$

式中 $f(y, z)$ 为 y 和 z 的单值光滑函数。于是 3 个坐标分别选为

$$x^1 = x - f(y, z), \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad (7.52)$$

其中 $x^1 = 0$ 表示电流片。上述坐标系显然是非正交的，必须按第 2 节介绍的一般曲线坐标系的方法进行处理。由式(2.11)和式(7.52)求得该坐标系的逆基矢为：

$$\mathbf{e}^1 = \nabla x^1 = \mathbf{e}_x - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y - \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}^2 = \nabla x^2 = \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}^3 = \nabla x^3 = \mathbf{e}_z, \quad (7.53)$$

式中 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ 为直角坐标下的单位基矢。由式(2.8)和式(2.26)求得变换系数矩阵的行列式为

$$g = [\mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)]^{-2} = 1, \quad (7.54)$$

推导中用到式(7.53). 由式(2.10)和式(7.53)求得该坐标系的基矢为

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_x. \quad (7.55)$$

由式(2.13)、式(7.53)和式(7.55)求得度规张量的协变分量和逆变分量, 结果为

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \partial f / \partial y & \partial f / \partial z \\ \partial f / \partial y & 1 + (\partial f / \partial y)^2 & (\partial f / \partial y)(\partial f / \partial z) \\ \partial f / \partial z & (\partial f / \partial y)(\partial f / \partial z) & 1 + (\partial f / \partial z)^2 \end{pmatrix}, \quad (7.56)$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 + (\partial f / \partial y)^2 + (\partial f / \partial z)^2 & -\partial f / \partial y & -\partial f / \partial z \\ -\partial f / \partial y & 1 & 0 \\ -\partial f / \partial z & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.57)$$

容易验证, 度规张量对应矩阵的行列式为 1, 与式(7.54)一致.

由式(7.57), $g^{11} = 1 + (\partial f / \partial y)^2 + (\partial f / \partial z)^2$ 不是常数, 因此必须从式(7.49)出发, 该式化为

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{g^{11}} J^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{g^{11}} J^3) \right] = \sqrt{g^{11}} j_{\text{in}}, \quad \sqrt{g^{11}} = \sqrt{1 + (\partial f / \partial y)^2 + (\partial f / \partial z)^2}. \quad (7.58)$$

注意, 式(7.58)中的偏导数沿电流片进行 (即固定 x^1 不变, 而非固定 x 不变). 在数值计算中用差商逼近微商时, 应取电流片上离散格点之间的 y 向距离 Δy 和 z 向距离 Δz 作为分母, 据此计算偏导数: $\partial(\sqrt{g^{11}} J^2) / \partial y = \Delta(\sqrt{g^{11}} J^2) / \Delta y$ 和 $\partial(\sqrt{g^{11}} J^3) / \partial z = \Delta(\sqrt{g^{11}} J^3) / \Delta z$; 不能取格点之间的实际距离作为分母. 按式(7.58)算得的 j_{in} 流入电流片的法向电流密度, $j_{\text{in}} < 0$ 表示电流自电流片流出.

最后, 由式(7.41)和式(7.53)求得电流片单位法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}^1}{|\mathbf{e}^1|} = \frac{\mathbf{e}_x - (\partial f / \partial y) \mathbf{e}_y - (\partial f / \partial z) \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial f / \partial y)^2 + (\partial f / \partial z)^2}}. \quad (7.59)$$

如果要计算穿越舷电流片某部分 A 的总电流, 可将 j_{in} 过曲面 A 积分:

$$\begin{aligned} I &= \iint_A j_{\text{in}} da_1 = \iint_A j_{\text{in}} |d\mathbf{a}_1| = \iint_A j_{\text{in}} \sqrt{g} |\mathbf{e}^1 dx^2 dx^3| \\ &= \iint_A j_{\text{in}} \sqrt{1 + (\partial f / \partial y)^2 + (\partial f / \partial z)^2} dy dz. \end{aligned} \quad (7.60)$$

在推导过程中用到面积元矢量的定义 $d\mathbf{a}_1 = \sqrt{g} \mathbf{e}^1 dx^2 dx^3$, $|\mathbf{e}^1| = \sqrt{g^{11}}$, 式(7.52)和式(7.54).

(3) (x^1, θ, φ) 电流片坐标系

在这种坐标下, 电流片由如下方程描述:

$$r = f(\theta, \varphi), \quad (7.61)$$

式中 $f(\theta, \varphi)$ 为 θ 和 φ 的单值光滑函数. 于是 3 个坐标分别选为

$$x^1 = r - f(\theta, \varphi), \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi, \quad (7.62)$$

其中 $x^1 = 0$ 表示电流片. 由式(2.11)和式(7.62)求得该坐标系的逆基矢为:

$$\mathbf{e}^1 = \nabla x^1 = \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{e}^2 = \nabla x^2 = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}^3 = \nabla x^3 = \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi, \quad (7.63)$$

式中 $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ 为球坐标下的单位基矢, $r = f(\theta, \varphi)$ (见式(7.61)式, 下同). 由式(2.8)和式(2.26)求得变换系数矩阵的行列式为

$$g = [\mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)]^{-2} = r^4 \sin^2 \theta, \quad (7.64)$$

推导中用到式(7.63). 由式(2.10)、式(7.63)和式(7.64)求得该坐标系的基矢为:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_2 = r \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_3 = r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r. \quad (7.65)$$

由式(2.13)、式(7.63)和式(7.65)求得度规张量的协变分量和逆变分量, 结果为

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial f}{\partial \theta} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} & r^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} & \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} & r^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 \end{pmatrix}, \quad (7.66)$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} & -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} & \frac{1}{r^2} & 0 \\ -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (7.67)$$

容易验证, $\det(g_{ij}) = [\det(g^{ij})]^{-1} = r^4 \sin^2 \theta = g$.

式(7.67)中的 g^{11} 不是常数, 因此必须从式(7.49)出发, 该式化为

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sqrt{g g^{11}} J^2) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sqrt{g g^{11}} J^3) \right] = \sqrt{g g^{11}} j_{in}, \quad \sqrt{g g^{11}} = r^2 \sin \theta \sqrt{1 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2}. \quad (7.68)$$

注意, 式(7.68)中的偏导数沿电流片进行 (即固定 x^1 不变, 而非固定 r 不变). 在数值计算中用差商逼近微商时, 应取电流片上格点之间的 θ 向格距 $\Delta\theta$ 和 φ 向格距 $\Delta\varphi$ 作为分母, 据此计算偏导数:

$$\partial(\sqrt{g g^{11}} J^2) / \partial \theta = \Delta(\sqrt{g g^{11}} J^2) / \Delta\theta, \quad \partial(\sqrt{g g^{11}} J^3) / \partial \varphi = \Delta(\sqrt{g g^{11}} J^3) / \Delta\varphi.$$

最后, 由式(7.41)和式(7.63)求得电流片单位法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}^1}{|\mathbf{e}^1|} = \frac{\mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2}}. \quad (7.69)$$

如果要计算穿越舷电流片某部分 A 的总电流, 可将 j_{in} 过曲面 A 积分:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_A j_{\text{in}} da_1 = \iint_A j_{\text{in}} |d\mathbf{a}_1| = \iint_A j_{\text{in}} \sqrt{g} |\mathbf{e}^1 dx^2 dx^3| \\
&= \iint_A j_{\text{in}} r^2 \sin \theta \sqrt{1 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2} d\theta d\varphi.
\end{aligned} \tag{7.70}$$

在推导过程中用到面积元矢量的定义 $d\mathbf{a}_1 = \sqrt{g} \mathbf{e}^1 dx^2 dx^3$, $|\mathbf{e}^1| = \sqrt{g^{11}}$, 式(7.62)和式(7.64).

(4) (x^1, ρ, φ) 电流片坐标系

在这种坐标下, 电流片由如下方程描述:

$$z = f(\rho, \varphi), \tag{7.71}$$

式中 $f(R, \varphi)$ 为 R 和 φ 的单值光滑函数. 于是 3 个坐标分别选为:

$$x^1 = z - f(\rho, \varphi), \quad x^2 = \rho, \quad x^3 = \varphi, \tag{7.72}$$

其中 $x^1 = 0$ 表示电流片. 由式(2.10)和式(7.72)求得该坐标系的逆基矢为:

$$\mathbf{e}^1 = \nabla x^1 = \mathbf{e}_z - \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{e}^2 = \nabla x^2 = \mathbf{e}_\rho, \quad \mathbf{e}^3 = \nabla x^3 = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\varphi, \tag{7.73}$$

式中 $(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi)$ 为圆柱坐标下的单位基矢. 由式(2.8)和式(2.26)求得变换系数矩阵的行列式为

$$g = [\mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)]^2 = \rho^2, \tag{7.74}$$

推导中用到(7.73)式. 由式(2.10)和式(73)和(74)求得该坐标系的基矢为

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\rho + \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_3 = \rho \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_z. \tag{7.75}$$

由式(2.13)、式(73)式和(75)求得度规张量的协变分量和逆变分量, 结果为

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial f}{\partial \rho} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial \rho} & 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} & \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} & \rho^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 \end{pmatrix}, \tag{7.76}$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 & -\frac{\partial f}{\partial \rho} & -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ -\frac{\partial f}{\partial \rho} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} & 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}. \tag{7.77}$$

容易验证, $\det(g_{ij}) = [\det(g^{ij})]^{-1} = \rho^2 = g$.

式(73)中的 g^{11} 不是常数, 因此必须从式(7.49)出发, 该式化为

$$\left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\sqrt{g g^{11}} J^2) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sqrt{g g^{11}} J^3) \right] = \sqrt{g g^{11}} j_{\text{in}}, \quad \sqrt{g g^{11}} = \rho \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)^2}. \quad (7.78)$$

注意，式(7.78)中的偏导数沿电流片进行（即固定 x^1 不变，而非固定 x 不变）。在数值计算中用差商逼近微商时，应取电流片上格点之间的 R 向格距 ΔR 和 φ 向格距 $\Delta \varphi$ 作为分母，据此计算偏导数：

$$\partial(\sqrt{g g^{11}} J^2) / \partial \rho = \Delta(\sqrt{g g^{11}} J^2) / \Delta \rho, \quad \partial(\sqrt{g g^{11}} J^3) / \partial \varphi = \Delta(\sqrt{g g^{11}} J^3) / \Delta \varphi.$$

最后，由式(7.41)和式(7.73)求得电流片单位法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}^1}{|\mathbf{e}^1|} = \frac{\mathbf{e}_z - \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)^2}}. \quad (7.79)$$

如果要计算穿越舷电流片某部分 A 的总电流，可将 j_{in} 过曲面 A 积分：

$$\begin{aligned} I &= \iint_A j_{\text{in}} da_1 = \iint_A j_{\text{in}} |d\mathbf{a}_1| = \iint_A j_{\text{in}} \sqrt{g} |\mathbf{e}^1 dx^2 dx^3| \\ &= \iint_A j_{\text{in}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)^2} r d\rho d\varphi. \end{aligned} \quad (7.80)$$

在推导过程中用到面积元矢量的定义 $d\mathbf{a}_1 = \sqrt{g} \mathbf{e}^1 dx^2 dx^3$ ， $|\mathbf{e}^1| = \sqrt{g^{11}}$ ，式(7.72)和式(7.74)。

8 任意坐标变换下的张量定义和张量运算

1. 引言

与时空有关的物理量称为场。以场为研究对象的物理学分支离不开张量的概念和张量分析的数学工具。为定量描述时空，或一般地说空间，需引入若干坐标；坐标的个数等于空间维数，但各个坐标可以随意选取，仅有的限制是不同坐标之间相互独立。例如通常的位置空间需要 3 个坐标描述，对应三维空间，所使用的坐标可以是直角坐标、球坐标、圆柱坐标或其他曲线坐标；如果把时间也考虑进来，则需要 4 个坐标，包括 3 个位置空间坐标和 1 个时间坐标，对应四维空间。从数学角度，张量是针对一特定空间定义的，在坐标变换下保持不变，其维数等于相应空间的维数，其分量数目等于维数 N 的 m （非负整数）次方，相应张量称为 m 阶张量。通常称零阶张量（ $m=0$ ）为标量，只有 1 个分量；一阶张量（ $m=1$ ）为矢量，有 N 个分量；二阶张量（ $m=2$ ）有 N^2 个分量，常省去“二阶”一词，直呼其为“张量”。在本节中，为避免混淆，“张量”一词通称所有各阶张量，包括标量（零阶）、矢量（一阶）、二阶张量和高阶张量。张量既包括通常的物理量，也包括对坐标的微分算符，它们不随坐标的选择而改变；也就是说，张量在坐标变换下维持不变。从物理角度，希望引入的物理量及满足的方程（物理规律）与坐标系选择无关，这一愿望恰好与张量的数学理念一致。因此，物理学中出现的基本物理量一定是张量，相关的基本物理规律一定能写成张量形式。

在物理学各分支学科的教材中，一般限于三维张量，基本物理规律被写成三维张量形式。这意味着，人们在同一个惯性参考系（俗称“实验室参考系”）中分析问题；不同参考系相对静止，享有同一个时间坐标（允许时间起点不同，但这对于物理分析无关紧要），区别仅在于 3 个位置空间坐标。因此，参考系之间的变换仅仅限于 3 个空间位置坐标。从物理角度要求：在三维位置空间坐标

的任何变换（包括非线性变换）下，物理量及其满足的微分方程形式维持不变。于是，人们就可以在三维位置空间选择不同的曲线坐标系进行数学描述和处理，且确信所获得的结论与坐标系选择无关。此外，多数物理学教材回避对张量的严格数学定义，限于从物理直觉出发去解释张量。例如：标量只有一个分量，取单一数值；矢量有 3 个分量，既有数值又有方向，或被直观地比喻成有一定长度和一定方向的箭头；二阶张量有 9 个分量，涉及两个方向，等等。各向异性应力涉及作用面和作用力两个方向，各向异性电介质的介电常量涉及电位移矢量和电场强度两个方向，它们都是二阶张量。在不同曲线坐标系中，张量的分量的取值各异，但通常不加证明地默认张量及其微分方程形式作为一个整体维持不变。

电动力学教材中的狭义相对论部分算是一个例外。为证明电磁规律在不同惯性参考系中形式不变，人们不得不进入四维时空空间，将位置空间坐标（3 个）和时间坐标（1 个）捆绑在一起实施变换，以反映作相对运动的不同惯性参考系之间的时空关系。从爱因斯坦提出的光速不变原理和相对性原理出发^{*}，上述坐标变换为洛伦兹变换；进一步从相对性原理出发，物理量及其方程应当在洛伦兹变换下维持不变，即物理量必须是四维张量，它们满足的方程可以转化为四维张量形式。四维张量及其运算的概念比较抽象，很难用物理直觉加以表达，故有必要从纯数学角度进行严格定义，阐述它们在坐标变换下的不变性质。在通常电动力学教材中，从叙述简单、便于理解和实用性的角度出发，将坐标变换限于正交线性变换。该变换相当于坐标架的刚性旋转，对应的变换矩阵为正交矩阵，对应的基矢满足正交归一关系。狭义相对论引入的洛伦兹变换，恰好属于这类正交线性变换；在这一变换下定义张量及其运算完全能够满足狭义相对论的需要。

可是，如果将张量及其运算的定义限于正交线性变换，那么就很难理解三维位置空间中的张量及其运算的不变性问题，因为所采用的曲线坐标系涉及的坐标变换总是非线性的，一般来说也是非正交的。基矢之间非正交，与基矢和张量分量相关的变换矩阵自然也不是正交矩阵。这样一来，我们需要恢复张量及其运算的一般定义，即将正交线性坐标变换推广至任意坐标变换，才能回答曲线坐标系下的三维张量及其运算的不变性问题。也正是这种不变性，赋予下述做法以合理性：任何张量微分恒等式，仅需在直角坐标系中给予证明；一旦完成这种证明，该恒等式将对所有曲线坐标系成立；不同的曲线坐标系下的处理结果与坐标系选择无关。众所周知，直角坐标系下的 3 个基矢为常单位矢量，彼此正交，便于进行数学运算，给张量微分恒等式证明和化简带来极大方便。

其实，数学中对张量及其运算的定义针对的是任意坐标变换，正交线性变换只是一种特例^{**}。在任意坐标变换（包括正交线性变换）下，基矢的变换矩阵和坐标微分的变换矩阵满足转置互逆关系（关于这一点，下面即将做出说明），这一重要结论构成定义张量及其各种代数运算的基础。引入矢量算符之后，由张量代数运算的不变性自动导出张量微分运算的不变性，即运算结果为张量。为具体实施曲线坐标系下的张量微分运算，我们从基矢和逆基矢的微分运算公式出发，推导出各类张量微分运算公式，相关结果参见第 4 节。这些公式含张量分量、度规系数和基矢，它们均与坐标系有关。但是，运算结果既然作为张量，应当与坐标系无关。本节的目的在于给出张量及其运算的一般定义，并验证第 4 节获得的张量微分运算结果为张量，即与坐标系无关。从曲线坐标系下的张量运算的实际需要和兼顾自然直观的意愿出发，我们的叙述将限于三维位置空间；除开仅适合三维张量的叉乘和旋度运算之外，有关讨论不难推广至任意维空间。

^{*} 爱因斯坦强调（参见，爱因斯坦，相对论的意义，科学出版社，北京，1955，李灏译）洛伦兹变换同时包含了光速不变原理和相对性原理，而一些教科书一定程度上忽视或未曾明确提及后者在推导洛伦兹变换中所起的作用。

^{**} 例如参见：洛薛夫斯基，黎曼几何与张量解析，高等教育出版社，北京，1955，俞玉森译。

2. 张量的定义

考察曲线坐标系 (x^1, x^2, x^3) ，其基矢和逆基矢分别为（参见式(2.5)和式(2.11)）

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}, \quad \mathbf{e}^i = \nabla x^i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8.1)$$

引入坐标变换

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8.2)$$

将原坐标 (x^1, x^2, x^3) 变换为新坐标 (x'^1, x'^2, x'^3) ；希望定义各阶张量及其运算，在上述坐标变换下维持不变。式(8.2)与式(2.1)不同：前者由一个曲线坐标系 (x^1, x^2, x^3) 变换到另一个曲线坐标系 (x'^1, x'^2, x'^3) ，旨在引入张量的概念；后者则是由直角坐标系 (x, y, z) 变换到曲线坐标系 (x^1, x^2, x^3) ，旨在分析曲线坐标系的基本性质和相关参数。

让我们先从基矢出发进行讨论。类比式(8.1)的第1式，新坐标系下的基矢为

$$\mathbf{e}'_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x'^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \mathbf{e}_j, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8.3)$$

上式给出了基矢的变换关系，变换系数为 $\partial x^j / \partial x'^i$ ，它对应的矩阵一般为非正交的，且一般是空间位置的函数。注意式(8.3)中的求和指标 j 为一上一下，或一逆一协，与第2节的做法和约定一致。

下面分析坐标微分的变换关系。由式(8.2)得

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} dx^k, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8.4)$$

上式给出了坐标微分的变换关系，变换系数为 $\partial x'^i / \partial x^k$ ，它对应的矩阵一般也是非正交的，且一般是空间位置的函数。有趣的是，变换系数 $\partial x^j / \partial x'^i$ 和 $\partial x'^i / \partial x^k$ 满足如下正交归一关系：

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} = \delta_k^j = \begin{cases} 1, & (j = k) \\ 0, & (j \neq k) \end{cases} \quad (8.5)$$

上式的证明十分容易，其左边等于 $\partial x^j / \partial x^k$ ，它在 $j = k$ 时为1，在 $j \neq k$ 时为零（因 x^j 和 x^k 为独立自变量）。基矢变换系数和坐标微分变换系数的正交归一关系式(8.5)，是确保张量及其相关运算在坐标变换下不变的基础。

首先，它保证了所谓“位移矢量”的不变性。将式(8.3)和式(8.4)相乘后求和，利用式(8.5)得

$$dx'^i \mathbf{e}'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} dx^k \mathbf{e}_j = \delta_k^j dx^k \mathbf{e}_j = dx^k \mathbf{e}_k. \quad (8.6)$$

上式告诉我们，如果规定基矢按式(8.4)变化，坐标位移按式(8.5)变化，则和式 $dx^i \mathbf{e}_i$ 将在坐标变换下不变。很自然，我们将

$$d\mathbf{r} = dx^i \mathbf{e}_i. \quad (8.7)$$

定义为矢量，它在坐标变换下不变，称为位移矢量。注意，上式与第二节的式(2.17)一致。按本材料给出的表述方式，张量表示为“基底”的线性组合，组合系数即为张量分量。在式(8.7)中，基底为基矢 \mathbf{e}_i ， dx^i 为位移矢量的逆变分量。

张量概念是通常矢量和矩阵概念的推广。将上述同指标求和表达式转化成矩阵乘法形式，将更

加直观且便于运算. 为此, 引入如下矩阵:

$$A \equiv \begin{pmatrix} \partial x'^1 / \partial x^1 & \partial x'^1 / \partial x^2 & \partial x'^1 / \partial x^3 \\ \partial x'^2 / \partial x^1 & \partial x'^2 / \partial x^2 & \partial x'^2 / \partial x^3 \\ \partial x'^3 / \partial x^1 & \partial x'^3 / \partial x^2 & \partial x'^3 / \partial x^3 \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

$$B \equiv \begin{pmatrix} \partial x^1 / \partial x'^1 & \partial x^2 / \partial x'^1 & \partial x^3 / \partial x'^1 \\ \partial x^1 / \partial x'^2 & \partial x^2 / \partial x'^2 & \partial x^3 / \partial x'^2 \\ \partial x^1 / \partial x'^3 & \partial x^2 / \partial x'^3 & \partial x^3 / \partial x'^3 \end{pmatrix}, \quad (8.9)$$

则坐标微分变换式(8.4)和基矢变换式(8.3)可分别写成如下矩阵乘积形式:

$$\begin{pmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

于是, A 和 B 分别为基矢和坐标微分的变换矩阵. 正交归一关系式(8.5)也可写成乘积形式:

$$A^T B = AB^T = I, \quad (8.11)$$

式中 T 表示转置, I 为单位矩阵. 上式表明, 坐标微分变换矩阵与基矢变换矩阵满足“转置互逆”条件: 一个矩阵的转置等于另一个矩阵的逆. 在正交线性变换下, 变换矩阵为正交矩阵, 它的转置矩阵等于逆矩阵, 属于上述一般情况的特例. 最后, 位移矢量在坐标变换下不变的证明过程由式(8.6)表达, 它也可用如下矩阵乘法表示:

$$dx'^i \mathbf{e}'_i = (dx'^1, dx'^2, dx'^3) \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = (dx^1, dx^2, dx^3) A^T B \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = (dx^1, dx^2, dx^3) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = dx^k \mathbf{e}_k,$$

从中可以看出坐标微分变换矩阵与基矢变换矩阵的转置互逆条件在维持位移矢量不变性上所起的关键作用. 下面将要定义的各阶张量的不变性, 也正是依据同样的条件得以实现, 读者可自行检验.

按位移矢量的定义类推, 可以引入一般矢量

$$\mathbf{f} = f^i \mathbf{e}_i, \quad (8.12)$$

它以基矢为基底, 其 3 个逆变分量在坐标变换(8.2)下按照与式(8.4)类似的方式发生变化:

$$f'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} f^k, \quad (i=1,2,3). \quad (8.13)$$

由位移矢量的不变性立即推得矢量 \mathbf{f} 的不变性. 换句话说, 具有 3 个分量, 其分量 $f^i (i=1,2,3)$ 在坐标变换(8.2)下按式(8.13)变换, 则 \mathbf{f} 为矢量, 它作为一个整体 (由式(8.12)表示) 维持不变. 因此, 任意矢量的不变性也是以基矢和坐标微分的变换矩阵之间的转置互逆关系为前提的.

类似的定义可以推广至二阶张量 $\tilde{\mathbf{T}}$: 具有 9 个分量, 在坐标变换(8.2)下, 其分量 $T^{ik} (i, k=1,2,3)$ 按

$$T'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} T^{mn}, \quad (i, k=1,2,3) \quad (8.14)$$

变换，则

$$\vec{T} = T^{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \quad (8.15)$$

为二阶张量。上式中，基底为并基矢，分量为逆变分量。该张量的不变性的证明如下：

$$\vec{T}' = T'^{ik} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} T^{mn} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \mathbf{e}_j \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \mathbf{e}_l = \delta_m^j \delta_n^l T^{mn} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_l = T^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \vec{T},$$

证明中用到式(8.3)、式(8.14)和式(8.5)。类似的定义还可推广至三阶张量：以三并基矢为基底，分量变换式为

$$T'^{ijk} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^j}{\partial x^n} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} T^{mnl}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (8.16)$$

以及更高阶张量：以多并基矢为基底，相关分量变换式按式(8.11)类推。这些张量的不变性同样通过式(8.5)去证明。

在数学教科书中，张量是通过其分量的变换关系定义的；其实质是为保证张量在坐标变换下的整体不变性。因此，从整体不变性出发，或从分量的变换关系出发，对张量作出的定义完全等效。在判断一个量是否为张量时，我们既可以从它的整体不变性出发，也可以从它的分量变换关系出发。在以下需要进行这类判断时，我们将交替使用这两种判断方法。

以上我们从基矢构成的基底和逆变分量变换关系出发，给张量作出了定义。下面改从逆基矢构成的基底及协变分量出发定义张量。这两种方式定义的张量属于同一个张量，只是基底选择不同，相应分量的数值有别而已。

类比式(8.1)的第2式，新坐标系下的逆基矢为

$$\mathbf{e}'^i = \nabla x'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \nabla x^k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \mathbf{e}^k, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8.17)$$

以逆基矢为基底，一个矢量 \mathbf{f} 定义为

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}^i, \quad (8.18)$$

其协变分量 f_i 在坐标变换(8.2)下按

$$f'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} f_k, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8.19)$$

变换。这样定义的矢量在坐标变换(8.2)下维持不变：

$$\mathbf{f}' = f'_i \mathbf{e}'^i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} f_k \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \mathbf{e}^j = \delta_j^k f_k \mathbf{e}^j = f_j \mathbf{e}^j = \mathbf{f}.$$

作为矢量之一的位移矢量，可仿照式(8.18)将其写成

$$d\mathbf{r} = dx_i \mathbf{e}^i. \quad (8.20)$$

只要其协变分量 dx_i 按与式(8.19)一样的方式变换，即

$$dx'_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} dx_k, \quad (i=1,2,3). \quad (8.21)$$

则 $d\mathbf{r}$ 在坐标变换(8.2)下不变.

类似的定义可以推广至二阶张量：在坐标变换(8.2)下，分量按

$$T'_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} T_{mn}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (8.22)$$

变换，则

$$\vec{T} = T_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \quad (8.23)$$

为二阶张量。上式中，基底为并逆基矢，分量为协变分量。该张量的不变性的证明如下：

$$\vec{T}' = T'_{ij} \mathbf{e}'^i \mathbf{e}'^j = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} T_{mn} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \mathbf{e}^k \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} \mathbf{e}^l = \delta_k^m \delta_l^n T_{mn} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^l = T_{mn} \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n = \vec{T},$$

证明中用到式(8.17)、式(8.22)和式(8.5)。类似的定义还可推广至三阶张量 $\vec{\vec{T}}$ （以三并逆基矢为基底）

$$\vec{\vec{T}} = T_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k; \quad T'_{ijk} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} T_{mnl}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

和更高阶张量，且同样通过式(8.5)证明它们的不变性。

还可将张量相对由基矢、逆基矢联合构成的基底展开，其分量既有协变指标（下标），又有逆变指标（上标），对此不作赘述。应予再次强调的是，一个特定张量的所有可能的表达式只是基底选择不同，因而分量数值有别，它们代表的是同一个张量。

下面我们论证由基矢代数运算引入的三个特殊张量。

(1) 度规张量：以度规系数（基矢标积或逆基矢标积）作为分量，按式(2.14)构成，即

$$\vec{\vec{G}} = g_{ik} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k = g^{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k. \quad (8.24)$$

为证明 $\vec{\vec{G}}$ 为张量，只需证明 g_{ik} 的变换式与式(8.22)相同，以及 g^{ik} 的变换式与式(8.14)相同即可。由基矢变换式(8.3)得

$$g'_{ik} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_k = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \mathbf{e}_m \cdot \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \mathbf{e}_n = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} g_{mn}, \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

与变换式(8.22)相同；由逆基矢变换式(8.17)得

$$g'^{ik} = \mathbf{e}'^i \cdot \mathbf{e}'^k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \mathbf{e}_m \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} \mathbf{e}_n = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} g^{mn}, \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

与变换式(8.14)相同；证毕。

(2) Kronecker 符号 δ_k^i ：它来自基矢与逆基矢的标积，即式(2.9)。于是有

$$\delta_k^i = \mathbf{e}'^i \cdot \mathbf{e}'_k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \mathbf{e}_n = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \delta_n^j, \quad (8.25)$$

推导中用到基矢变换式(8.3)和逆基矢变换式(8.17)。式(8.25)表明，Kronecker 符号 δ_k^i 为二阶张量的一

阶协变、一阶逆变分量.

(3) 三阶交错张量: 仅适合于三维空间, 其协变分量 e_{ijk} 和逆变分量 e^{ijk} 分别来自基矢的混合积和逆基矢的混合积:

$$e_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k), \quad e^{ijk} = \mathbf{e}^i \cdot (\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k), \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (8.26)$$

由基矢及逆基矢的变换关系, 立即可证 $\{e_{ijk}\}$ 或 $\{e^{ijk}\}$ 为三阶张量. 将式(2.6)和式(2.8)代入式(8.26)得

$$e_{ijk} = V \varepsilon_{ijk}, \quad e^{ijk} = V^{-1} \varepsilon_{ijk}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (8.27)$$

注意, V 不是标量, 它与坐标系有关. 因此, 一般来说, 交错符号 ε_{ijk} 不构成三阶张量. 只有在直角坐标系的正交线性 (即刚性旋转) 变换下, 3 个基矢为正交单位矢量, $V = 1$, ε_{ijk} 才构成三阶张量, 通常命名为 “交错单位张量”.

关于张量的称谓方面有必要做出如下补充说明. 在数学和理论物理教科书中, 更注重张量分量在坐标变换下的变化规律, 并据此定义张量; 张量的运算 (包括代数运算和绝对微分运算) 也被写成分量形式, 其中不直接牵扯基底. 在张量的称谓上, 直接将分量本身称为张量, 且按分量的指标的上下位置, 分别称为逆变、协变或混合张量. 例如, 称 f^i 为逆变矢量, f_i 为协变矢量, T^{ik} 为二阶逆变张量, T_{ik} 为二阶协变张量, δ_i^k 为二阶 (一阶协变、一阶逆变) 混合张量, 等等. 本材料采取了另外一种称谓方式: 将每个分量和它对应的基底相乘之后求和, 所得结果称为张量. 例如将 $\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}^i = f^k \mathbf{e}_k$ 称为矢量, 将

$$\vec{T} = T_{ik} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k = T^{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = T_i^{\bullet k} \mathbf{e}^i \mathbf{e}_k = T_{\bullet i}^k \mathbf{e}_k \mathbf{e}^i$$

称为二阶张量, 等等. 上式中出现在指标前方的实心圆点表示相应指标排序靠后, 具体效果体现在基底中的基矢 \mathbf{e}_k 和逆基矢 \mathbf{e}^i 的排序上 (注意 $\mathbf{e}^i \mathbf{e}_k \neq \mathbf{e}_k \mathbf{e}^i$). 以并矢 $\mathbf{T} = \mathbf{a}\mathbf{b}$ 为例, 其分量分别为

$$T_{ik} = a_i b_k, \quad T^{ik} = a^i b^k, \quad T_i^{\bullet k} = a_i b^k, \quad T_{\bullet i}^k = a^k b_i.$$

采取后一种称谓方式旨在突显张量及其运算在坐标变换下的不变性, 强调基底的不同选择只会影响张量分量的数值但不会改变张量本身, 从而自然理解物理量要用张量表示、物理规律要写成张量形式的道理. 顺便指出, 如果限于欧几里得空间 (平直空间) 直角坐标系间的刚性旋转变换, 则基矢与逆基矢相等, 各基矢之间彼此正交, 勿需区分指标的上下, 可统一采用符合通常习惯的下指标.

3. 张量的代数运算

张量的代数运算涉及指标的置换、加 (减) 法、乘法和缩并等. 要使这些运算的结果与坐标系选择无关, 或者说它们在坐标变换下具有不变性, 要求运算结果为张量 (同维但可変阶). 有关证明与张量自身的不变性证明类似, 同样以基矢和坐标微分的变换矩阵转置互逆为基础.

(1) 指标的置换: 将分量的两个协变指标置换或将两个逆变指标置换 (基底维持不变), 例如经协变指标置换由二阶张量的协变分量 A_{ik} 得 $B_{ki} = A_{ik}$, 它将作为一个新张量的协变分量; 经逆变指标置换由二阶张量的逆变分量 A^{ik} 得 $B^{ki} = A^{ik}$, 它将作为一个新张量的逆变分量. 分别从 A_{ik} 满足的变换式(8.17)和 A^{ik} 满足的变换式(8.9)出发, 不难证明 B_{ik} 和 B^{ik} 满足同样的变换式, 因而张量经指标置换之后仍为张量*. 或者说, 按下述方式

$$\vec{A} = A_{ik} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k \Rightarrow \vec{B} = B_{ik} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k = A_{ki} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k, \quad \vec{A} = A^{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \Rightarrow \vec{B} = B^{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = A^{ki} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$$

* 对下面将要定义的张量运算, 若不述说证明过程, 表示从相关变换式出发很容易证明运算结果为张量.

自张量 \vec{A} 构建的量 \vec{B} 也是张量，它同样在坐标变换(8.2)下保持不变。注意，在对分量指标进行置换时，基底维持不变。若同时置换基底，则可能导致恒等运算。例如 $A^{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \equiv A^{ki} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i$ ：其中在置换分量指标的同时，对基底中的基矢指标也做了置换；由于求和指标的字母的任意选取不会影响求和结果，因而上述置换操作等于白做。

(2) 加（减）法：若干类型（维数、阶数）和基底相同的张量的对应分量相加或相减，所获得的全部分量将构成另一个同类型张量。利用加减法运算，很容易将张量分解为对称张量和反对称张量两个部分：

$$T_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}), \quad T^{ik} = \frac{1}{2}(T^{ik} + T^{ki}) + \frac{1}{2}(T^{ik} - T^{ki}),$$

各式中右边第 1 项为对称张量分量，相对下标对称；第 2 项为反对称张量分量，相对下标反对称。

(3) 张量的乘法：将两个张量的所有分量（个数可以不同）彼此相乘，则全部乘积构成一个新张量的分量。乘积张量的阶数等于两个乘子张量阶数之和。并矢运算属于张量乘法的特例，例如

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{g} = g_k \mathbf{e}^k \Rightarrow \vec{\mathbf{T}} = \mathbf{fg} = f_i g_k \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k,$$

矢量 \mathbf{f} 与矢量 \mathbf{g} 相乘（相并）构成张量 \mathbf{T} 。如果一个并矢再与某个矢量相乘（相并），则构成“三并矢”：

$$\mathbf{fg} = f_i g_j \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{h} = h_k \mathbf{e}^k \Rightarrow \mathbf{fgh} = f_i g_j h_k \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k.$$

张量的相乘可以发生在一个张量的协（逆）变分量与另一个张量的逆（协）变分量之间，例如：

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{g} = g^k \mathbf{e}_k \Rightarrow \vec{\mathbf{T}} = \mathbf{fg} = f_i g^k \mathbf{e}^i \mathbf{e}_k,$$

相乘结果仍为张量，且由 $g_k \mathbf{e}^k = g^k \mathbf{e}_k = \mathbf{g}$ 容易看出 $f_i g_k \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k = f_i g^k \mathbf{e}^i \mathbf{e}_k$ ；二者为同一并矢，只是基底不同而已。提起注意的是，张量的乘法不满足交换率，例如 \mathbf{fg} 一般不等于 \mathbf{gf} ，除非 \mathbf{f} 和 \mathbf{g} 仅相差一个标量乘子。

(4) 张量的缩并：对一个给定的高阶张量的分量，任选其中一个逆变指标和一个协变指标实施同指标求和，得出的结果为张量，其阶数减 2。

两个矢量的点乘可通过如下先相乘、后缩并的步骤实现：

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{g} = g^k \mathbf{e}_k \Rightarrow T_i^k = f_i g^k \Rightarrow T_i^i = f_i g^i,$$

运算结果为标量。它与如下运算过程等效：

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{g} = g^k \mathbf{e}_k \Rightarrow \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = f_i \mathbf{e}^i \cdot g^k \mathbf{e}_k = f_i g^k (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k) = f_i g^k \delta_k^i = f_i g^i,$$

推导中用到基矢和逆基矢之间的正交归一关系式(2.9)。采取类似步骤，我们可以定义矢量和张量之间，以及张量和张量之间的点乘运算，例如可按如下方式实施矢量 \mathbf{f} 与张量 $\vec{\mathbf{T}}$ 之间的点乘：

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}^i, \quad \vec{\mathbf{T}} = T^{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \Rightarrow \mathbf{f} \cdot \vec{\mathbf{T}} = f_i \mathbf{e}^i \cdot T^{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = f_i T^{ik} \mathbf{e}_k,$$

运算结果为矢量。

对于三维矢量，还有一种常用的运算，那就是矢量之间的叉乘：

$$\mathbf{f} = f^j \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{g} = g^k \mathbf{e}_k \Rightarrow \mathbf{f} \times \mathbf{g} = f^j g^k \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k = \epsilon_{ijk} f^j g^k \mathbf{e}^i \equiv h_i \mathbf{e}^i$$

其中用到式(8.26)定义的三阶交错张量，以及式(2.6)、式(2.7)和式(2.27)。上述运算过程归结为三阶张

量分量 e_{ijk} 与一阶张量分量 f^m 和 g^n 连乘, 然后将指标 j 和 m 、指标 k 和 n 缩并, 所得结果 h_i 必为矢量的协变分量. 换句话说, 矢量 \mathbf{f} 和 \mathbf{g} 的叉乘结果为矢量 $\mathbf{h} = h_i \mathbf{e}^i$.

4. 张量的微分运算

张量的微分运算涉及梯度、散度, 三维张量的微分运算还涉及旋度. 这些运算均用到矢量算符.

(1) 矢量算符

在计算某个标量的全微分时, 我们自动获得矢量算符. 某标量 ϕ 的全微分如下:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i,$$

它应在坐标变换下不变, 也为标量. 上述标量来自位移矢量 $dx^i \mathbf{e}_i$ 与

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \mathbf{e}^i$$

的标积, 因而 $\partial \phi / \partial x^i \mathbf{e}^i$ 必为矢量, 常称为标量 ϕ 的梯度. 既然 ϕ 为标量, 则 $\mathbf{e}^i \partial / \partial x^i$ 必为矢量, 属于算符型矢量, 记为 “ ∇ ”, 称为矢量算符, 又称哈密顿算符, 其表达式如下:

$$\nabla = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (8.28)$$

与一般矢量的写法不同, 我们将逆基矢 \mathbf{e}^i 写在 “分量” $\partial / \partial x^i$ 的前方, 旨在明确 \mathbf{e}^i 不受 $\partial / \partial x^i$ 的作用. 下面我们证明算符 ∇ 的确为矢量, 证明如下. 由式(8.19)和式(8.5)得

$$\nabla' = \mathbf{e}'^i \frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \mathbf{e}^j \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^k} = \delta_j^k \mathbf{e}^j \frac{\partial}{\partial x^k} = \mathbf{e}^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla, \quad \text{证毕.}$$

(2) 张量微分运算的不变性

张量的微分运算形式上归结为矢量算符与张量之间的代数运算: 例如梯度为矢量算符与张量的 “乘积”, 散度为矢量算符与张量的 “点乘”, 旋度为矢量算符与张量的 “叉乘”, 等等. 因此, 张量的微分运算的不变性直接来自张量代数运算的不变性, 勿需另外证明.

在具体问题求解过程中, 我们需要将张量形式的基本方程写成分量形式, 即写出张量微分运算结果 (仍为张量) 的全部分量, 其中涉及各张量分量 (关于坐标的) 的偏导数. 在第 4 节中, 我们已通过将张量微分分解为对分量的微分和对基底中基矢的微分, 导出常用的几种微分运算结果的表达式: 标量散度、矢量的散度和旋度、标量的拉普拉斯算符运算、矢量梯度 (一阶绝对导数) 和矢量梯度的梯度 (二阶绝对导数), 等等. 采取类似的方法, 还能导出其他张量微分运算公式, 例如张量的散度和旋度. 在这些张量微分运算结果的表达式中, 会出现与坐标系直接相关的分量、度规系数和基矢 (逆基矢). 这给人一种印象: 似乎张量微分运算结果与坐标系有关. 其实, 这是一种误解. 在张量微分公式中出现的分量、度规系数和基矢的确与坐标系有关, 但最终运算结果既然是张量, 就应当独立于坐标系的选择. 例如我们可以在不同曲线坐标系中计算某标量的梯度或某矢量的散度, 结果应当相同, 与坐标系无关. 第 7 节曾给出两种曲线坐标系 (正交磁面坐标系和非正交磁面坐标系) 下的标量梯度的表达式, 并证明二者的等效性 (参见例 6), 提供了一个具体例证. 为进一步确信这一结论, 下面将以矢量的散度、旋度和梯度为例, 验证运算结果在坐标变换(8.2)下的不变性. 注意, 我们这里指的是 “验证” 而非 “证明”, 因为这种不变性在引入这类运算的时候就已经被 “证明” 过了.

5. 典型张量微分运算不变性的验证

我们可以从第 4 节得到的张量微分表达式出发去直接验证它的不变性. 不过, 既然推导这些表

达式的前提是基于对分量和基底中的基矢（或逆基矢）分别求导，一种等效的做法是从这些前提出发去验证张量微分运算的不变性。下面我们就这两种验证方法进行举例说明。

(1) 矢量散度

矢量散度表达式（参见式(4.6)）的结果为

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} f^i). \quad (8.29)$$

导出该结果的前提是

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot (f^i \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \cdot \nabla f^i + f^i \nabla \cdot \mathbf{e}_i. \quad (8.30)$$

要验证式(8.29)的不变性，等效于验证式(8.30)的不变性。

按式(8.30)，原坐标系中的矢量表达式为

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{e}_i \cdot \nabla f^i + f^i \nabla \cdot \mathbf{e}_i \equiv A + B, \quad A \equiv \mathbf{e}_i \cdot \nabla f^i, \quad B \equiv f^i \nabla \cdot \mathbf{e}_i. \quad (8.31)$$

新坐标系中的矢量散度表达式为

$$\nabla' \cdot \mathbf{f}' = \mathbf{e}'_i \cdot \nabla' f'^i + f'^i \nabla' \cdot \mathbf{e}'_i \equiv A' + B', \quad A' \equiv \mathbf{e}'_i \cdot \nabla' f'^i, \quad B' \equiv f'^i \nabla' \cdot \mathbf{e}'_i. \quad (8.32)$$

我们的目标是验证式(8.31)和式(8.32)是否相等，从而确认矢量散度运算的不变性，且 $\nabla \cdot \mathbf{f}$ 为标量。下面分别推导 A' 和 B' 的表达式。依次使用式(8.28)和式(8.5)得

$$\begin{aligned} A' &\equiv \mathbf{e}'_i \cdot \nabla' f'^i = \frac{\partial}{\partial x'^i} \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} f^k \right) = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} f^k \right) = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial f^k}{\partial x^m} + \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^m \partial x^k} f^k \\ &= \delta_k^m \frac{\partial f^k}{\partial x^m} + \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^m \partial x^k} f^k = \frac{\partial f^k}{\partial x^k} + \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^m \partial x^k} f^k = \mathbf{e}_k \cdot \nabla f^k + \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^m \partial x^k} f^k \\ &= A + \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^m \partial x^k} f^k; \end{aligned}$$

依次使用式(8.28)、式(8.3)、式(8.17)、式(2.9)和式(8.5)得

$$\begin{aligned} B' &\equiv f'^i \nabla' \cdot \mathbf{e}'_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} f^k \mathbf{e}'^j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}'_i}{\partial x'^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} f^k \frac{\partial}{\partial x'^j} (\mathbf{e}'^j \cdot \mathbf{e}'_i) - \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} f^k \mathbf{e}'_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}'^j}{\partial x'^j} \\ &= -\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} f^k \mathbf{e}'_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}'^j}{\partial x'^j} = -\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} f^k \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \mathbf{e}_m \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^n} \mathbf{e}^n \right) \\ &= -\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^n} f^k \mathbf{e}_m \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^n}{\partial x^l} - \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} f^k \frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^l \partial x^n} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}^n \\ &= -\delta_k^m \delta_n^l f^k \mathbf{e}_m \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^n}{\partial x^l} - \delta_k^m \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} f^k \frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^l \partial x^n} \delta_m^n = -f^k \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^n}{\partial x^n} - \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^l \partial x^k} f^k \\ &= -f^k \frac{\partial}{\partial x^n} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^n) + f^k \mathbf{e}^n \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^n} - \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^l \partial x^k} f^k \\ &= f^k \mathbf{e}^n \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^n} - \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^l \partial x^k} f^k = f^k \nabla \cdot \mathbf{e}_k - \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^l \partial x^k} f^k = B - \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^m \partial x^k} f^k. \end{aligned}$$

将 A' 和 B' 的表达式代入式(8.32)得

$$\nabla' \cdot \mathbf{f}' = A' + B' = A + B = \nabla \cdot \mathbf{f},$$

验证完毕. 由以上推导结果可见, 一般 $A' \neq A, B' \neq B$, 即 $\mathbf{e}_i \cdot \nabla f^i$ 和 $f^i \nabla \cdot \mathbf{e}_i$ 均不是标量, 它们在坐标变换下会发生变化; 可是二者之和为标量, 即 $\nabla \cdot \mathbf{f}$ 为标量. 或者说, 矢量散度属于坐标变换下的不变运算. 考虑到 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_i \cdot \nabla f^i = \partial f^i / \partial x^i$, 我们得出结论: 由矢量分量方向导数即普通偏导数产生的 $\partial f^i / \partial x^i$ (注意 i 为求和指标) 在坐标变换下一般会发生变化, 它不构成标量.

(2) 矢量旋度

导出矢量旋度表达式的 (参见式(4.7)) 的结果为

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \varepsilon_{kji} \mathbf{e}_k, \quad (8.33)$$

导出该结果的前提是

$$\nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times (f_i \mathbf{e}^i) = \nabla f^i \times \mathbf{e}^i = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^i = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} e^{kji} \mathbf{e}_k, \quad (8.34)$$

式中 e^{kji} 为三阶交错张量的逆变分量 (参见式(8.26)). 要验证式(8.33)的不变性, 等效于证明式(8.34)的不变性, 下面给出证明.

按式(8.34), 新坐标系中的矢量表达式为

$$\nabla' \times \mathbf{f}' = \frac{\partial f'_i}{\partial x'^j} e'^{kji} \mathbf{e}'_k. \quad (8.35)$$

下面证明式(8.35)和式(8.34)相等, 从而完成矢量旋度运算的不变性证明, 即 $\nabla \times \mathbf{f}$ 为矢量. 依次使用式(8.19)、式(8.5)、式(8.3)和三阶张量分量的变换式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial f'_i}{\partial x'^j} e'^{kji} \mathbf{e}'_k &= \frac{\partial x_m}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial x^n}{\partial x'^i} f_n \right) \frac{\partial x'^k}{\partial x^v} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\rho} e^{\nu\rho\sigma} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \mathbf{e}_l \\ &= \frac{\partial x_m}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^m} (f_n) \frac{\partial x^n}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^k}{\partial x^v} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\rho} e^{\nu\rho\sigma} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \mathbf{e}_l + \frac{\partial}{\partial x'^j} \left(\frac{\partial x^n}{\partial x'^i} \right) f_n \frac{\partial x'^k}{\partial x^v} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\rho} e^{\nu\rho\sigma} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \mathbf{e}_l \\ &= \delta_\sigma^m \delta_\rho^v \delta_v^l \frac{\partial f_n}{\partial x^m} e^{\nu\rho\sigma} \mathbf{e}_l + \delta_v^l \frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^j \partial x'^i} f_n \frac{\partial x'^j}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\rho} e^{\nu\rho\sigma} \mathbf{e}_l = \frac{\partial f_n}{\partial x^m} e^{lmn} \mathbf{e}_l + \frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^j \partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\rho} f_n e^{l\rho\sigma} \mathbf{e}_l. \end{aligned}$$

下面证明上式右边第2项等于零. 证明过程如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^j \partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\rho} f_n e^{l\rho\sigma} \mathbf{e}_l &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^j \partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\rho} f_n e^{l\rho\sigma} \mathbf{e}_l + \frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^i \partial x'^j} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\rho} f_n e^{l\rho\sigma} \mathbf{e}_l \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^j \partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\rho} e^{l\rho\sigma} - \frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^i \partial x'^j} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\rho} e^{l\rho\sigma} \right) f_n \mathbf{e}_l \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^i \partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\rho} - \frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^i \partial x'^j} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\rho} \right) f_n e^{l\rho\sigma} \mathbf{e}_l = 0, \end{aligned}$$

证毕. 在上述证明过程中, 由更换求和指标 (i 、 j 、 ρ 和 σ) 不会影响求和结果推得第1个等式, 由 $e^{l\rho\sigma} = -e^{l\sigma\rho}$ 推得第2个等式, 由更换括弧中第1项的混合偏导数次序不会影响运算结果推得第3个等式, 第4个等式显而易见: 左边括号内的两项恰好互相抵消.

(3) 矢量梯度

我们在第4节推出了矢量梯度的分量表达式 (参见式(4.10)和式(4.11)):

$$f_{\rho;\sigma} = e_\rho e_\sigma : \nabla f = \frac{\partial f_\rho}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\rho\sigma}^\mu f_\mu \equiv A_{\rho\sigma} - B_{\rho\sigma}, \quad A_{\rho\sigma} \equiv \frac{\partial f_\rho}{\partial x^\sigma}, \quad B_{\rho\sigma} \equiv \Gamma_{\rho\sigma}^\mu f_\mu, \quad (8.36)$$

式中

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\lambda} \right),$$

为仿射联络（参见式(3.11)）， g_{ik} 和 g^{ik} 为度规系数。下面，我们验证 $f_{\rho;\sigma}$ 满足二阶张量协变分量的变换关系，即其分量在坐标变换(8.2)下按如下关系变换：

$$f_{\rho;\sigma} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^n}{\partial x'^\sigma} f_{m;n}, \quad (\rho, \sigma = 1, 2, 3) \quad (8.37)$$

先考察式(8.36)右边第 1 项经坐标变换(8.2)之后的结果：

$$\begin{aligned} A'_{\rho\sigma} &= \frac{\partial f'_\rho}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial}{\partial x'^\sigma} \left(\frac{\partial x^m}{\partial x'^\rho} f_m \right) = \frac{\partial x^m}{\partial x'^\rho} \frac{\partial f_m}{\partial x'^\sigma} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^\sigma \partial x'^\rho} f_m \\ &= \frac{\partial x^m}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^n}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial f_m}{\partial x^n} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^\sigma \partial x'^\rho} f_m = \frac{\partial x^m}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^n}{\partial x'^\sigma} A_{mn} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^\sigma \partial x'^\rho} f_m. \end{aligned} \quad (8.38)$$

与变换式(8.37)相比，上式右边多出 1 项，因而 $A_{\rho\sigma} = \partial f^\rho / \partial x_\sigma$ 不满足二阶张量协变分量的变换关系。

下面考察式(8.36)右边第 2 项经坐标变换(8.2)之后的结果：

$$\begin{aligned} B'_{\rho\sigma} \equiv \Gamma_{\rho\sigma}^\mu f'_\mu &= \frac{1}{2} g'^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g'_{\rho\lambda}}{\partial x'^\sigma} + \frac{\partial g'_{\sigma\lambda}}{\partial x'^\rho} - \frac{\partial g'_{\rho\sigma}}{\partial x'^\lambda} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^k} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^n} g^{kn} \left[\frac{\partial}{\partial x'^\sigma} \left(\frac{\partial x^p}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^q}{\partial x'^\lambda} g_{pq} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left(\frac{\partial x^p}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^q}{\partial x'^\lambda} g_{pq} \right) - \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \left(\frac{\partial x^p}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^q}{\partial x'^\sigma} g_{pq} \right) \right] \frac{\partial x^m}{\partial x'^\mu} f_m. \end{aligned} \quad (8.39)$$

以下推导分两步进行：第一步，将中括弧内的 3 项偏导数运算仅作用于度规系数 g_{pq} ，由此得到的结果记为 $C'_{\rho\sigma}$ ；第二步，对原坐标相对新坐标的偏导数（如 $\partial x^p / \partial x'^\rho$ 等）实施偏导数运算，将结果记为 $D'_{\rho\sigma}$ 。也就是说，我们将 $B'_{\rho\sigma}$ 拆成两项：

$$B'_{\rho\sigma} = C'_{\rho\sigma} + D'_{\rho\sigma}. \quad (8.40)$$

经过一番繁琐但并不困难的数学推导，分别求得 $C'_{\rho\sigma}$ 和 $D'_{\rho\sigma}$ 的表达式为

$$C'_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^n}{\partial x'^\sigma} \Gamma_{mn}^\mu f_\mu, \quad D'_{\rho\sigma} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^\rho \partial x'^\sigma} f_m. \quad (8.41)$$

代回至式(8.40)得

$$B'_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^n}{\partial x'^\sigma} \Gamma_{mn}^\mu f_\mu + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^\rho \partial x'^\sigma} f_m = \frac{\partial x^m}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^n}{\partial x'^\sigma} B_{mn} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^\rho \partial x'^\sigma} f_m. \quad (8.42)$$

与变换式(8.42)相比，上式右边同样多出 1 项，因而 $B_{\rho\sigma} = \Gamma_{mn}^\mu f_\mu$ 不满足二阶张量协变分量的变换关系。这反过来说明仿射联络 Γ_{mn}^μ 不能作为三阶张量的（二阶协变—一阶逆变）分量。

最后，将式(8.38)和式(8.42)相减，多余的项正好互抵，最终求得

$$f'_{\rho;\sigma} = A'_{\rho\sigma} - B'_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^n}{\partial x'^\sigma} (A_{mn} - B_{mn}) = \frac{\partial x^m}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^n}{\partial x'^\sigma} f_{m;n}, \quad (8.43)$$

上式与变换式(8.37)形式相同，从而 $f_{\rho;\sigma}$ 的确为二阶张量的协变分量，验证完毕。

6. 狭义相对论中的正交线性变换

在电动力学中的狭义相对论部分，要用到张量及其运算的数学概念。这些概念立足于一种特定的时空坐标变换——正交线性变换。在这种变换下，基矢和坐标微分的变换矩阵均为正交常数矩阵。仔细的读者会发现，在引入张量及其运算的过程中，不需要利用变换矩阵为正交常数矩阵的条件，而只需利用基矢变换矩阵与坐标微分变换矩阵转置互逆的条件。正交矩阵的转置正好等于它的逆矩阵，自动满足上述条件。如前所述，任意坐标变换均能满足这一条件（参见式(8.11)）。因此，狭义相对论基于正交线性变换引入的张量及其运算的数学概念，与从一般坐标变换引入的相应概念完全一致。也就是说，张量及其运算本来就与坐标变换的具体形式无关，不妨将这种变换限于正交线性变换；从这种变换入手引入的张量及其运算的数学概念具有普遍意义。不过，为讨论曲线坐标系下的张量微分运算，还是应当从三维空间的一般坐标变换出发，就像本节一开始所做的那样。

爱因斯坦在他的《相对论的意义》一书中曾深刻指出：“必须将几何学的基本概念和自然对象联系起来；没有这样的联系，几何学对于物理学家是没有价值的。”就张量及其运算而言，从数学角度可以随意选取坐标变换，变换后的坐标及各种类型的张量分量一般只具有数学意义。作为狭义相对论基础的洛伦兹变换，由洛伦兹等人最先导出。可是，他们对变换后得到的“动尺长度”和“本地时间”做出了错误的解释：视动尺缩短为物体的实际收缩，视本地时间为数学辅助量。之所以产生这种错误观念，是因为他们固守牛顿的绝对时空观念的缘故。爱因斯坦明确指出经变换至运动参考系后得到的时空坐标和物理量均是在运动参考系中的实测量，而非只具有数学意义的辅助量；在惯性参考系变换下，它们满足一定的变换规律，维持光速不变和物理规律不变。爱因斯坦的狭义相对论以及随后由他创立的广义相对论，提供了实现几何学基本概念和自然现象完美结合的最好范例。

最后推荐几本最近出版的张量分析参考书供选择阅读，其中涉及曲线坐标系和张量微分运算的基本知识：

- [1] 黄克智，薛明德，陆明万，张量分析，北京：清华大学出版社，2009.
- [2] 余天庆，毛为民，张量分析及应用，北京：清华大学出版社，2007.
- [3] 吕盛明，张量算法简明教程，合肥：中国科学技术大学出版社，2008.