! https://zhuanlan.zhihu.com/p/616819167

坐标变换那些事3：基矢与仿射联络

在上两篇中我们初步了解了如何对一个新坐标系做分析。但对于特殊构造的微分计算式可能仍然难以下手，比如第二篇文末的对流项。本篇从最基本的基矢出发，尝试给大家一个解决微分运算的底层思路。

基矢的微分运算

首先我们需要定义一些东西，不过这部分相当杂乱，且在文中也会有补充。

对角张量及性质

由基矢的正交性定义对角张量g_{ik}为

$$g_{ik} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_k = 0 \quad (i \neq k) \tag{0.1}$$

由基矢本身的定义

$$\hat{e}^i \cdot \hat{e}_j = \delta^i_j \tag{0.2}$$

依据（0.1）以及（0.2）可以得到**斜变基矢与逆变基矢的变换关系**遵从度规张量的系数矩阵元，如下

$$\hat{e}_i = g_{ik}\hat{e}^k \tag{0.3}$$

由度规张量还可以得到很多有用的结论，在这里我们先给出对角张量g的第二个定义 (也就是第二篇里提到的基矢度规模$\mathbb{V}$)

$$g = \deg(G) \equiv \mathbb{V}^2 \tag{0.4}$$

其中，基矢度规模$\mathbb{V}$还可以理解为基矢空间的基元大小，听着绕口其实写出式子大伙就会懂了，如下 (下式的其他123-cycle排列也是可以的)

$$\begin{aligned}\mathbb{V} &\equiv \hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) \\ \frac{1}{\mathbb{V}} &\equiv \hat{e}^1 \cdot \left(\hat{e}^2 \times \hat{e}^3\right)\end{aligned} \tag{0.5}$$

由上式我们也可以方便的得出第二种**斜变基矢与逆变基矢的变换关系**

$$\hat{e}^1 = \frac{1}{\mathbb{V}}\left(\hat{e}_2 \times \hat{e}_3\right) \tag{0.6}$$

我们回到度规张量的系数矩阵G本身，我们发现依照上文我们阐述的关系（0.1），矩阵中**仅有对角线上的三个分量不为零**，而且更有意思的是它们是具有数学意义的，恰好是我们第一篇里提到的Lame系数

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{g_{11}} = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \\ h_2 &= \sqrt{g_{22}} = \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} \\ h_3 &= \sqrt{g_{33}} = \frac{1}{\sqrt{g^{33}}} \end{aligned} \tag{0.7}$$

大家看到这里应该回想到我们第一篇提到的，Lame系数h_i其实对应了对应坐标的模长，在这里的意义也就是对角项。则第二篇末尾summary部分的总g我们也可以定义了，如下

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \equiv \mathbb{V} \tag{0.8}$$

两种对矢量的基矢展开

对一个矢量的基矢展开写作

$$\vec{f} = f^i \hat{e}_i \tag{1.1}$$

$$\vec{f} = f_i \hat{e}^i \tag{1.2}$$

这之后的计算我们都遵循'**上逆下斜**'的约定，需要提到的是，上述两种展开方式虽然在形式上是等价的，但为了方便计算在不同的微分运算中常常需要选择性使用。

举栗说明（为什么使用更合适在之后的计算中会说明）

1. 对散度计算时使用（1.1）更合适

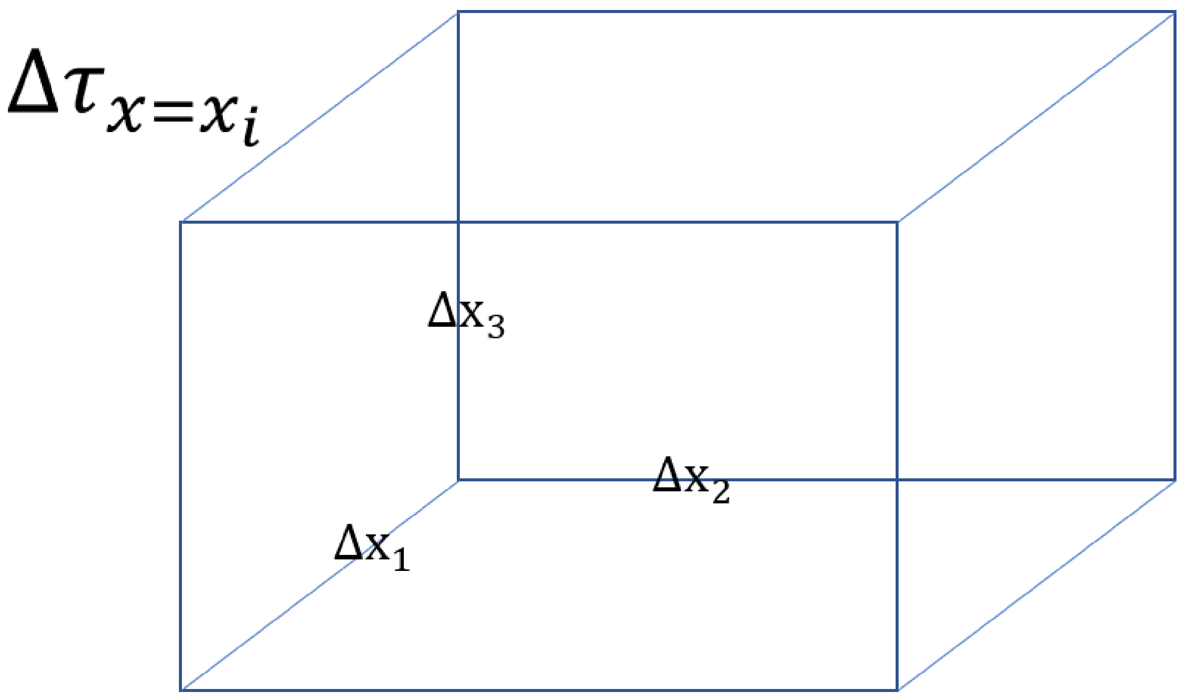
$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{f} &= \nabla \cdot \left(f^i \hat{e}_i\right) \\ &= \left(\nabla f^i\right) \hat{e}_i + f^i (\nabla \cdot \hat{e}_i) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

2. 对旋度计算时使用（1.2）更合适

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{f} &= \nabla \times \left(f_i \hat{e}^i\right) \\ &= (\nabla f_i) \times \hat{e}^i + f_i (\nabla \times \hat{e}^i) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

基矢的散度div

我们的研究基于微元$\Delta\tau$开始，如图所示



在图中我们定义如下式子

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= V\Delta x^1\Delta x^2\Delta x^3\\ \Delta A_1 &= V\Delta x^2\Delta x^3\hat{e}^1\\ \Delta A_2 &= V\Delta x^1\Delta x^3\hat{e}^2\\ \Delta A_3 &= V\Delta x^1\Delta x^2\hat{e}^3\end{aligned}$$

我们由散度的定义写出式子为

$$\nabla\cdot\hat{e}_i = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\iint_A \hat{e}_i\cdot d\vec{A}$$

则对于面积分一项，我们由基矢的运算关系（0.2）敏锐地意识到在$d\vec{A}$项中要求有对应的$\hat{e}^i$项才能让积分不为零。这样面积变化的最近相邻面元就只能存在于x^i处与$x^i+\Delta x^i$处。

而从面元的定义可以看出，面元面积的差异仅来自于乘子V随着x^i的变化，则散度可以计算为

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\hat{e}_i &= \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{[V(x^i+\Delta x^i)-V(x^i)]\Delta x^j\Delta x^k}{V(x^i)\Delta x^i\Delta x^j\Delta x^k}\\
&=\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial x^i}\\
&=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^i}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

基矢的旋度curl

这里就涉及到前文提及的运算技巧，展开方式（1.2）了

基矢的旋度一般不为零，但一般求旋度都是按**逆基矢**展开，因为逆基矢$\hat{e}^i$与坐标的grad (∇x^i) 平行（其实是恰好相等），则有 *(电动力学里背烂的结论：梯度的旋度一定为0)*

$$
\nabla\times\hat{e}^i=\nabla\times(\nabla x^i)\equiv 0 \tag{2.2}
$$

这样（1.2）展开中，仅剩余第一项$(\nabla f_i)\times\hat{e}^i$是需要我们计算的了。

标量grad

对于标量ϕ，它的梯度我们从它本身的全微分中可以方便的获取，如下

$$
d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}dx^i=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\hat{e}^i\cdot d\vec{r}
$$

由于其中$d\vec{r}$的任意性，则有

$$
\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\hat{e}^i \tag{2.3}
$$

对流项/方向导数 $(\hat{e}_\tau\cdot\nabla)\hat{e}_\rho$

虽然对流项/方向导数是一个比较经典的微分运算，但我们这里提出一个方法论类型的，也就是将遇见的陌生微分运算都转化为梯度、散度、旋度等基本计算的组合。

这里我们利用矢量的微分展开，如下

$$
2(\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}=\nabla\times\left(\vec{f}\times\vec{g}\right)+\nabla(\vec{f}\cdot\vec{g})-\vec{g}\times\left(\nabla\times\vec{f}\right)-\vec{f}\times(\nabla\times\vec{g})+\vec{g}(\nabla\cdot\vec{f})-\vec{f}(\nabla\cdot\vec{g}) \tag{2.4}
$$

注：当然我们在计算时为图简单，都避免了并矢计算的出现，但可能某些计算中使用并矢会更快，这一点就看个人的计算喜好了。

在进行下一步计算时，我们需要区分出几个概念

1. 矢量需要展开成基矢的组合
2. **基矢往往不等价于单位矢量**！作者在推导的时候吃了大亏，故此处重点强调。

此时我们观察LHS，我们直接对其展开，来观察如果我们需要计算一个真实的对流项，我们需要涉及到哪些项的计算

$$
\begin{aligned}
(\vec{g} \cdot \nabla) \vec{f} &= g^i \hat{e}_i \cdot \nabla \left(f^k \hat{e}_k\right) \\
&= g^i \left(\hat{e}_i \cdot \nabla f^k\right) \hat{e}_k + f^k g^i \left(\hat{e}_i \cdot \nabla \hat{e}_k\right)
\end{aligned}
$$

从这里可以看出，第二项是我们的计算重点，也就是基矢的方向导数计算！

接下来我们对（2.4）以基矢$\vec{f} \rightarrow \hat{e}_\rho, \vec{g} \rightarrow \hat{e}_\sigma$方式展开，有

$$
2(\hat{e}_\sigma \cdot \nabla)\hat{e}_\rho = \nabla \times (\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\sigma) + \nabla(\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\sigma) - \hat{e}_\sigma \times (\nabla \times \hat{e}_\rho) - \hat{e}_\rho \times (\nabla \times \hat{e}_\sigma) + \hat{e}_\sigma(\nabla \cdot \hat{e}_\rho) - \hat{e}_\rho(\nabla \cdot \hat{e}_\sigma) \tag{2.5}
$$

逐项讲解

这里我会逐项讲解，确实是有些复杂（大伙可以对照着看一下）

对于第一项，采用了乘V除V的构造方式，为的是能使用（0.6）将两个基矢的叉乘化为一个逆基矢的形式。

$$
\nabla \times (\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\sigma) = \nabla \times \left[V \frac{\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\sigma}{V}\right]
$$

此时记$\frac{\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\sigma}{V}$为一个新的逆基矢$\hat{e}^{\text{woc}}$

直接使用基矢的旋度展开公式（1.2.1）,得到

$$
\begin{aligned}
\nabla \times [V \hat{e}^{\text{woc}}] &= (\nabla V) \times \hat{e}^{\text{woc}} + f_i(\nabla \times \hat{e}^{\text{woc}}) \\
&= (\nabla V) \times \hat{e}^{\text{woc}} \\
&= \frac{1}{2g} \nabla \times g \times \hat{e}_\rho \times \hat{e}_\sigma
\end{aligned}
$$

此处使用三连叉乘公式（前面没写，就标注为1.3吧）

$$
(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \tag{1.3}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\sigma) &= \frac{1}{2g} \nabla \times g \times \hat{e}_\rho \times \hat{e}_\sigma \\
&= \frac{1}{2g} \left[\left(\hat{e}_\sigma \cdot \nabla g\right) \hat{e}_\rho - \left(\hat{e}_\rho \cdot \nabla g\right) \hat{e}_\sigma\right] \\
&= \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial g}{\partial x^\sigma} \hat{e}_\rho - \frac{\partial g}{\partial x^\rho} \hat{e}_\sigma\right)
\end{aligned}
$$

对于第二项，遵循（0.1）的定义化为对角张量形式。

$$
\nabla(\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\sigma) = \nabla g_{\rho\sigma}
$$

对于第三项与第四项，使用（0.3）将基矢转换为逆基矢，这样可以直接使用逆基矢旋度为0这个结论（2.2），转换的逆基矢记为新参量μ，它就是仿射联络分量

$$-\hat{e}_\sigma \times (\nabla \times \hat{e}_\rho) - \hat{e}_\rho \times (\nabla \times \hat{e}_\sigma) = -\hat{e}_\sigma \times \nabla \times (g_{\rho\mu}\hat{e}^\mu) - \hat{e}_\rho \times \nabla \times (g_{\sigma\mu}\hat{e}^\mu)$$

对于第五项与第六项，则使用基矢的散度（2.1）直接进行计算。

$$\hat{e}_\sigma(\nabla \cdot \hat{e}_\rho) - \hat{e}_\rho(\nabla \cdot \hat{e}_\sigma) = \frac{1}{2g}\left(-\frac{\partial g}{\partial x^\sigma}\hat{e}_\rho + \frac{\partial g}{\partial x^\rho}\hat{e}_\sigma\right)$$

算到这里我们可以发现，第一项与第五、六项消去了

利用消去看出互易关系

关于这个消去，其实已经证明了这个对流项的**互易关系**了！（只不过后面的仿射联络能更明显的看出）

我们对第一项直接使用展开公式如下

$$\nabla \times (\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\sigma) = (\hat{e}_\sigma \cdot \nabla)\hat{e}_\rho - (\nabla \cdot \hat{e}_\rho)\hat{e}_\sigma + (\nabla \cdot \hat{e}_\sigma)\hat{e}_\rho - (\hat{e}_\rho \cdot \nabla)\hat{e}_\sigma$$

可以观察发现，如果第一项与第五、六项消去了，那么意味着上式化简为

$$(\hat{e}_\sigma \cdot \nabla)\hat{e}_\rho = (\hat{e}_\rho \cdot \nabla)\hat{e}_\sigma$$

此时对流项的互易关系得证。当然，我们尝试使用一种更优美的方式来呈现对流项的内核，也就是马上要计算得到的仿射联络。

经过以上一大堆的废话，我们最终将（2.5）化简为

$$2(\hat{e}_\sigma \cdot \nabla)\hat{e}_\rho = \nabla g_{\rho\sigma} - \hat{e}_\sigma \times \nabla \times (g_{\rho\mu}\hat{e}^\mu) - \hat{e}_\rho \times \nabla \times (g_{\sigma\mu}\hat{e}^\mu)$$

再用一次旋度展开公式（1.2.1），略去逆基矢旋度为零的项，得到

$$\mathrm{RHS} = \nabla g_{\rho\sigma} - \hat{e}_\sigma \times \nabla g_{\rho\mu} \times \hat{e}^\mu - \hat{e}_\rho \times \nabla g_{\sigma\mu} \times \hat{e}^\mu$$

再次使用三连叉乘公式（1.3），化简为

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS} &= \nabla g_{\rho\sigma} + (\nabla g_{\rho\mu} \cdot \hat{e}_\sigma)\hat{e}^\mu + (\nabla g_{\sigma\mu} \cdot \hat{e}_\rho)\hat{e}^\mu - (\hat{e}^\mu \cdot \hat{e}_\sigma)\nabla g_{\rho\mu} - (\hat{e}^\mu \cdot \hat{e}_\rho)\nabla g_{\sigma\mu} \\ &= \nabla g_{\rho\sigma} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma}\hat{e}^\mu + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\rho}\hat{e}^\mu - \delta^\mu_\sigma \nabla g_{\rho\mu} - \delta^\mu_\rho \nabla g_{\sigma\mu}\end{aligned}$$

接下来对δ项做归并，留下非零项，以及利用上度规张量的对称性$g_{ij} = g_{ji}$，我们可以得到

$$2(\hat{e}_\sigma \cdot \nabla)\hat{e}_\rho = -\nabla g_{\rho\sigma} + \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\rho}\right)\hat{e}^\mu$$

可以发现这是一个高度对称性的式子，我们考虑将逆基矢改变为基矢，这样就可以看作对流项计算结果成为一个基矢的展开形式。

利用性质（0.3）与（0.7），我们最终有

$$(\hat{e}_\sigma \cdot \nabla)\hat{e}_\rho = \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \left(-\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\rho} \right) \hat{e}_\mu$$

将$\hat{e}_\mu$前面一坨系数（当然它们很有对称性很优美）记作仿射联络$\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$，最后可以将仿射联络写的优美些，如下

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\rho\sigma} &= \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \left(-\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\rho} \right) \\ (\hat{e}_\sigma \cdot \nabla)\hat{e}_\rho &= \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \hat{e}_\mu \end{aligned}} \tag{2.6}$$

从这个仿射联络就可以非常明显的看出上文提到的互易关系啦！

呼，真不容易。但大家有没有发现，我们推得了仿射联络，但却和我们在坐标变换那些事1中提到的问题有所出入？

对的，我们还没解决这个对流项真正可供计算的形式，仿射联络只是给出了它的性质。那么我们在下一篇文章中将会直接计算对流项，相比于这个困难的证明真的会好很多啦~