! https://zhuanlan.zhihu.com/p/616382002

坐标变换那些事1：引言：简化表达而产生的标注-Lame系数

写这篇文章主要是记录一下对坐标变换中涉及到的各类定义以及微分运算做一个汇总，由于涉及的方面较多，故分多篇来写。

万恶之源：总想着偷懒点记住各类general differential operators

事情的起因是这样的，最近在看一个独特的坐标系，它与笛卡尔坐标的变换为

$$
\begin{aligned}
a &= (x^2+y^2)^{1/2}\cos\alpha - z\sin\alpha \\
b &= (x^2+y^2)^{1/2}\sin\alpha + z\cos\alpha \\
\theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

当然，我们也可以方便的写出这种curvlinear coordinate的反变换

$$
\begin{aligned}
a\cos\alpha + b\sin\alpha &= (x^2+y^2)^{1/2} \\
b\cos\alpha - a\sin\alpha &= z \\
\tan\theta &= \frac{y}{x}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

这个系统本质上是一个锥形斜面，物理意义是a为斜面外的点到斜面的垂高，b为斜面外的点沿斜面切向，距离坐标原点的距离。（懒得画图了，重点非此）

思考，在解决一般坐标变换问题时，如球坐标/柱坐标这类经典坐标，写出其div,grad,curl往往是件简单的事情，因为熟悉。对于一个陌生的系统我们希望使用一个通用的方式，让我们来找到坐标变换的度规，这里即为lame系数的来由。

Lame系数

可能听起来名词会有点陌生，但一写出来大伙应该恍然大悟。这本应该是**电动力学的前置知识**ovo

举一个栗子吧，比如在球坐标系中，我们有

$$\begin{aligned} x &= r\sin\alpha\cos\theta \\ y &= r\sin\alpha\sin\theta \\ z &= r\cos\alpha \end{aligned} \tag{2.1}$$

当然为了方便起见，这里列出它的反变换

$$\begin{aligned} r &= (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

以大家最熟悉的球坐标系下的Laplace算子为例

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}$$

对比直角坐标下的Laplace算子，其实大家会发现它们之间的共性，也就是由于分母位置的微元相较于直角坐标发生了一定程度的‘放缩’，导致最后各个微分计算式中形式发生变化。那么就自然的有思考：这种变化是不是能被规范呢，也就是我只要存在一个与原有的笛卡尔坐标系发生线性变换的坐标系，那么我就一定能找出它的所有微分关系（基于这个规范化的表达）。**其实就是为了偷懒（x**

那么Lame系数就很好的解决了这个问题。

定义笛卡尔坐标系中的有向线元

$$d\vec{l} = dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y + dz\hat{e}_z$$

对于任意一个曲线坐标系(q_1, q_2, q_3)中，需要注意的是$d\vec{l}$仍然是新的三个分量的线性组合，但此时基矢也是随着变换参数在变化的。

若称$\hat{e}_i$为单位基矢，则此时局域基矢的定义为

$$= d\vec{l} = \sum_{i=1}^{3} h_i dq_i \hat{e}_i \tag{2.3}$$

此时h_i则称为Lame系数

在不同坐标变换中，对同一位置矢量$\vec{R}$而言,展开式均为如下

$$d\vec{R} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_i} dq_i \tag{2.4}$$

将（2.4）与（2.3）联立对比，即可得到Lame系数真正的数学意义

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_i} = h_i \hat{e}_i$$

即h_i为此时系数变换的模长

由此定义，我们可以方便的得出各Lame系数的计算公式为

$$h_i = \frac{1}{\left(\sum_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.5}$$

我们选取一个直观的栗子给大家计算下：球坐标系下的Lame系数

此处用到（2.2），得到

$$\begin{gathered}
\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \\
\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \\
\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}
\end{gathered} \tag{2.6}$$

则有

$$h_1 = h_r = 1$$

继续对下一参数α，由（2.2）计算得到 *[会多次使用（2.5）的推论]*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\arccos\left(\frac{z}{r}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)^{1/2}} \cdot -\frac{z}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \\
&= \frac{z}{r^2\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)^{1/2}} \frac{x}{r}
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{z}{r^2\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)^{1/2}} \frac{y}{r}
$$

计算z分量

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\arccos\left(\frac{z}{r}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)^{1/2}} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot -\frac{z}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}\right) \\
&= -\frac{1}{r}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

则由Lame系数定义式得到

$$
\begin{aligned}
h_2 = h_\alpha &= \frac{1}{\left(\frac{z^2\left(x^2+y^2\right)}{r^4\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)r^2} + \frac{1-\frac{z^2}{r^2}}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= r
\end{aligned}
$$

同理，对θ，由（2.2）计算得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2+y^2} \\
\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{x}{x^2+y^2} \\
\frac{\partial\theta}{\partial y} &= 0
\end{aligned}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
h_3 = h_\theta &= (x^2+y^2)^{1/2} \\
&= r\sin\alpha
\end{aligned}
$$

自此，我们得到了球坐标系下的三个Lame系数为

$$
h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r\sin\alpha
$$

可能已经有小朋友不耐烦的说，哎呀求出来这个有啥用，还没有微分关系做验证。其实如果眼尖的小朋友应该已经发现了，这三个系数分别对应了单位线元在球坐标下的微分展开系数。当然我们会严谨的由Lame系数推导出它的微分关系，如上文提到的Laplace,div,grad,curl等，与已知的结论作比较来看出这种方法的强大通用性。打算放到下一篇里来讲了。