! https://zhuanlan.zhihu.com/p/616707591

坐标变换那些事2：常见微分运算的通用表达

在上一篇中我们知道了如何求得任一正交曲线坐标系的Lame系数。以下我们将会从Lame系数出发，简单推导坐标系中常用的微分运算。注意，以下的推导暂未更新斜变逆变版本，我们将在下一篇中阐述更多。

Gradient 梯度

定义为：标量场f在基矢方向的方向导数
从定义出发，我们有

$$\begin{aligned}\nabla f &= \sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i \frac{\partial f}{\partial l_i} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i \frac{\partial f}{h_i \partial q_i}\end{aligned}$$

简记为

$$\nabla \phi = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \hat{e}_i \tag{1.1}$$

Div 散度

定义为：单位体积内矢量场$\vec{F}$的通量大小
从定义出发，我们有

$$\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_A \vec{F} \cdot d\vec{A}}{\Delta V}$$

其中我们明确微元的定义为在新坐标系下

$$dA = h_i h_j dq_i dq_j \quad dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

则代入上式得到

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_i} (F_i h_j h_k) \tag{1.2}$$

Laplace $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$

由上文计算式（1.1）（1.2）直接得

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \nabla\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}\hat{e}_i\frac{\partial}{h_i\partial q_i}\right)\\ &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(h_jh_k\frac{\partial}{h_i\partial q_i}\right)\end{aligned}\tag{1.3}$$

Curl 旋度

定义为：矢量场$\vec{F}$在单位面积的边界上的有向环流量

$$(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n} = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{\oint_l \vec{F}\cdot d\vec{l}}{\Delta A}$$

此时选择面法向量为基矢$\vec{n}=\hat{e}_i$，则有

$$\oint_l \vec{F}\cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial}{\partial q_j}F_kh_k - \frac{\partial}{\partial q_k}F_jh_j\right)dq_jdq_k \tag{\#}$$

注：关于（#）式子的来由放到文末
此时仍然选取$dA=h_jh_kdq_jdq_k$，代入定义式则有

$$\begin{aligned}(\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{e}_i &= \frac{1}{h_jh_k}\left(\frac{\partial}{\partial q_j}F_kh_k - \frac{\partial}{\partial q_k}F_jh_j\right)\\ &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{j,k}\epsilon_{ijk}h_i\frac{\partial}{\partial q_j}(F_kh_k)\end{aligned}$$

聪明的小伙伴应该一眼就能看出来这个形式对应了什么，我们展开来写一下(gather一下分量式)

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{F} &= \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_3F_3)}{\partial x_2}-\frac{\partial(h_2F_2)}{\partial x_3}\right]\hat{e}_1+\frac{1}{h_1h_3}\left[\frac{\partial(h_1F_1)}{\partial x_3}-\frac{\partial(h_3F_3)}{\partial x_1}\right]\hat{e}_2+\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial(h_2F_2)}{\partial x_1}-\frac{\partial(h_1F_1)}{\partial x_2}\right]\hat{e}_3\\ &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3\end{vmatrix}\end{aligned}\tag{1.4}$$

对流项/方向导数 $(\hat{e}_\tau\cdot\nabla)\hat{e}_\rho$

这个东西可不像上面几个好求，不过也只有做流体的小朋友可能对这一项恨之入骨吧hhh。这里先卖个关子，直接给出结论，它的证明需要我们引入非常多其他的知识才能做到，我放到下面几篇来慢慢道来。

$$(\hat{e}_\tau\cdot\nabla)\hat{e}_\rho = -\frac{1}{h_\tau}(\nabla h_\rho)\delta_\tau^\rho+\frac{1}{h_\rho h_\tau}\frac{\partial h_\tau}{\partial x_\rho}\hat{e}_\tau \tag{1.5}$$

Summary

在总结部分，我们承上启下，引入几个下面篇章中需要使用的量来表示
定义 *(其实大伙能看出来g其实是基矢空间模的平方项，在下一篇基矢的微分运算中会详细说明它的性质)*

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \equiv \mathbb{V}$$

则我们总结为

$$\begin{aligned}
\text{Grad:} \quad & \nabla\phi = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\hat{e}_i \\
\text{Div:} \quad & \nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_i}(F_i\frac{\sqrt{g}}{h_i}) \\
\text{Curl:} \quad & \nabla\times\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix} \\
\text{Laplace:} \quad & \nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sqrt{g}\frac{\partial}{{h_i}^2\partial q_i}\right)
\end{aligned}$$

需要注意的是，我们计算中所有的h_i其实都是会随着坐标变化的，所以在求偏导时，在括号里和括号外的区分要格外小心哦。

附注：（#）的导出

$$\oint_l \vec{F}\cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial}{\partial q_j}F_k h_k - \frac{\partial}{\partial q_k}F_j h_j\right)dq_j dq_k \tag{\#}$$

其实这个证明有点倒推的意思，因为要得到（#）式子等于是要反向推导一遍（x

对LHS应用Stokes定理得

$$\oint_l \vec{F}\cdot d\vec{l} = \iint_A (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{A}$$

我们从分量式出发，有

$$(\nabla\times\vec{F})_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial F_k}{\partial x_j}\hat{e}_i$$

这里还是备注一下$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{指标任一重复} \\ 1 & 123\ \text{cycle} \\ -1 & 132\ \text{cycle} \end{cases}$

且利用h_i定义$h_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_i}$

代入LHS则有

$$
\begin{aligned}
\oint_l \vec{F}\cdot d\vec{l} &= \iint_A \epsilon_{ijk}\frac{\partial F_k}{\partial x_j} h_j h_k dq_j dq_k \\
&= \iint_A \left(\frac{\partial F_k}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_k} - \frac{\partial F_j}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\right) h_j h_k dq_j dq_k \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial q_j} F_k h_k - \frac{\partial}{\partial q_k} F_j h_j\right) dq_j dq_k
\end{aligned}
$$

$$\boxed{(\#)}$$