! https://zhuanlan.zhihu.com/p/616835488

坐标变换那些事4-终章：计算Lame系数格式下的对流项/方向导数

大家还记得我们在一开始（指第二篇文章x）提到的对流项计算问题吗，我们经历如此多的定义与方法介绍，终于可以开始计算它了。

$$(\hat{e}_\tau \cdot \nabla)\hat{e}_\rho = -\frac{1}{h_\tau}(\nabla h_\rho)\delta_\tau^\rho + \frac{1}{h_\rho h_\tau}\frac{\partial h_\tau}{\partial x_\rho}\hat{e}_\tau$$

首先我们从计算仿射联络的中间步骤出发（计算仿射联络参见上一篇文章）

$$\begin{aligned} 2(\hat{e}_\sigma \cdot \nabla)\hat{e}_\rho &= -\nabla g_{\rho\sigma} + \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\rho}\right)\hat{e}^\mu \\ &= -\nabla g_{\rho\sigma} + (\nabla g_{\rho\mu} \cdot \hat{e}_\sigma)\hat{e}^\mu + (\nabla g_{\sigma\mu} \cdot \hat{e}_\rho)\hat{e}^\mu \end{aligned}$$

我们在此处不再去引入仿射联络，而是直接将$g_{\rho\sigma}$展开为$g_{\rho\rho}\delta_\sigma^\rho \to {h_\rho}^2\delta_\sigma^\rho$
且继续利用自身基矢与逆基矢的变换关系，化简得到
(注：第二个等号利用关系$\delta_\mu^i\hat{e}^\mu = \hat{e}^i$提出$\delta$到括号外面进行化简)

$$\begin{aligned} \mathrm{RHS} &= -\nabla {h_\rho}^2\delta_\sigma^\rho + \left({h_\rho}^2\delta_\mu^\rho \cdot \hat{e}_\sigma + {h_\sigma}^2\delta_\mu^\sigma \cdot \hat{e}_\rho\right)\hat{e}^\mu \\ &= -\nabla {h_\rho}^2\delta_\sigma^\rho + \left(\hat{e}_\sigma \cdot \nabla {h_\rho}^2\right)\hat{e}^\rho + \left(\hat{e}_\rho \cdot \nabla {h_\sigma}^2\right)\hat{e}^\sigma \\ &= -2h_\rho\nabla h_\rho\delta_\sigma^\rho + 2h_\rho\frac{\partial h_\rho}{\partial x_\sigma}\hat{e}^\rho + 2h_\sigma\frac{\partial h_\sigma}{\partial x_\rho}\hat{e}^\sigma \end{aligned}$$

最终左右同除以2，得到

$$(\hat{e}_\sigma \cdot \nabla)\hat{e}_\rho = -h_\rho\nabla h_\rho\delta_\sigma^\rho + h_\rho\frac{\partial h_\rho}{\partial x_\sigma}\hat{e}^\rho + h_\sigma\frac{\partial h_\sigma}{\partial x_\rho}\hat{e}^\sigma$$

需要注意的是，此处的基矢并不是单位基矢，这一点再次强调（可爱（shabi）的作者在这里犯傻了一下午）。

因此我们需要重写单位基矢的约定，我们记$\hat{E}$为单位基矢符号，则有

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_i &= \frac{\hat{e}_i}{|\hat{e}_i|} \\
&= \frac{\hat{e}_i}{(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\hat{e}_i}{(g_{ii})^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\hat{e}_i}{h_i} \\
&= h_i \hat{e}^i
\end{aligned}
$$

则我们将逆基矢项全部按照这种方式转化，则RHS化简为

$$
\mathrm{RHS} = -h_\rho \nabla h_\rho \delta_\sigma^\rho + h_\rho \frac{\partial h_\rho}{\partial x_\sigma} \frac{1}{h_\rho} \hat{E}_\rho + h_\sigma \frac{\partial h_\sigma}{\partial x_\rho} \frac{1}{h_\sigma} \hat{E}_\sigma
$$

同时，我们也将LHS也按新的单位基矢的约定重写一遍，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= (\hat{e}_\sigma \cdot \nabla)\hat{e}_\rho \\
&= (h_\sigma \hat{E}_\sigma \cdot \nabla)(h_\rho \hat{E}_\rho) \\
&= \frac{\partial h_\rho}{\partial x_\sigma} \hat{E}_\rho + h_\sigma h_\rho (\hat{E}_\sigma \cdot \nabla \hat{E}_\rho)
\end{aligned}
$$

需要注意的是，在计算LHS的第三个等号时，我们需要知道$h_\sigma \hat{E}_\sigma \cdot \nabla$这才能化成一个完整的partial，如果只有一个$\hat{E}$的话是不行的，原因在于$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial}{h_i \partial q_i}$

此时我们就可以欢乐的将LHS与RHS联立，得到我们在第二篇文末给出的结论啦

$$
(\hat{e}_\tau \cdot \nabla)\hat{e}_\rho = -\frac{1}{h_\tau} (\nabla h_\rho) \delta_\tau^\rho + \frac{1}{h_\rho h_\tau} \frac{\partial h_\tau}{\partial x_\rho} \hat{e}_\tau
$$

希望花这么多时间写这个导师不要骂我偷懒嘿嘿o(￣︶￣)o