Aufgabe 7.3

a) Für $n=32$ Datenelemente 5 sek $\longrightarrow$ Wieviel Zeit für $n=64$

(i) $f(n) := \log_2(n)$

Die zur Bearbeitung benötigte Zeit beträgt $t(n) = c \cdot \log_2(n)$ (c konstant)

Bestimme c: $t(32) = 5$

$$c \cdot \log_2(32) = 5 \Rightarrow c = 1 \longrightarrow t(n) = 1 \cdot \log_2(n)$$

Also für $n=64$ Datenelemente: $\underline{\underline{t(64)}} = \log_2(64) = \underline{\underline{6}}$

6 sekunden sind nötig

(ii) $f(n) := n \longrightarrow t(n) = c \cdot n$ (c konstant)

$t(32) = 5 \Leftrightarrow c \cdot 32 = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{32} \longrightarrow t(n) = \frac{5}{32} \cdot n$

Also für $n=64$: $\underline{\underline{t(64)}} = \frac{5}{32} \cdot 64 = \underline{\underline{10}}$. 10 sekunden nötig

(iii) $f(n) := n \cdot \log_2(n) \longrightarrow t(n) = c \cdot n \cdot \log_2(n)$ (c konstant)

$t(32) = 5 \Leftrightarrow c \cdot 32 \cdot \log_2(32) = 5 \Rightarrow c = \frac{1}{32} \longrightarrow t(n) = \frac{1}{32} \cdot n \cdot \log_2(n)$

Für $n=64$: $\underline{\underline{t(64)}} = \frac{1}{32} \cdot 64 \cdot \log_2(64) = \underline{\underline{12}}$. 12 sek nötig.

(iv) $f(n) := n^2 \longrightarrow t(n) = c \cdot n^2$

$t(32) = 5 \Leftrightarrow c \cdot 32^2 = 5 \Rightarrow c = \frac{1}{1024} \longrightarrow t(n) = \frac{1}{1024} \cdot n^2$

$\Rightarrow \underline{\underline{t(64)}} = \frac{1}{1024} \cdot 64^2 = \underline{\underline{20}}$. 20 sek nötig

(v) $f(n) := 2^n \longrightarrow t(n) = c \cdot 2^n$

$t(32) = 5 \Leftrightarrow c \cdot 2^{32} = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{2^{32}}$

$\underline{\underline{t(64)}} = \frac{5}{2^{32}} \cdot 2^{64} = 5 \cdot 2^{32}$ sek. ~680 Jahre nötig

13.) (b) $\forall a,b > 0 \quad \log_a(n) \in O(\log_b(n))$

Wir wissen: $\forall f(n)$ gilt $f(n) \in O(f(n))$

$\Rightarrow \log_a(n) \in O(\log_a(n))$

$\exists c, n_0 \; \forall n \geq n_0 \quad \log_a(n) \leq c \cdot \log_a(n)$ $\quad$ c konstant $c \in \mathbb{R}$

$\log_a(n) \leq c \cdot \log_a\left(b^{\log_b(n)}\right)$

$\log_a(n) \leq c \cdot \log_a(b) \cdot \log_b(n)$

Sei $\bar{c} := c \cdot \log_a(b)$ konstant: $\Rightarrow \log_a(n) \leq \bar{c} \cdot \log_b(n)$

$\Rightarrow \log_a(n) \in O(\log_b(n))$

(c) „Raten": $\log(n) < \sqrt{n} < n \cdot \log(n) < n^2 < 2^n$

Bew: Regel von l'Hospital $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$ $*$

① $\log(n) < \sqrt{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\log(n)} \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\sqrt{n}} \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \infty$$

② $\sqrt{n} < n \cdot \log(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \log(n)}{\sqrt{n}} \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \sqrt{n} \cdot (\log(n)+1) = \infty$$

③ $n \cdot \log(n) < n^2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n \cdot \log(n)} \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\log(n)+1} \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty$$

④ $n^2 < 2^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n \cdot \ln(2)}}{n^2} \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \ln(2) \frac{e^{n \cdot \ln(2)}}{2n}$$

$$\overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2)^2}{2} \cdot e^{n \cdot \ln(2)} = \infty$$