

Inhaltsverzeichnis

1	Norm und Skalarprodukt	7
1.1	Norm	7
1.2	Skalarprodukt	7
1.2.1	Vom Skalarprodukt induzierte Norm	7
1.2.2	Cauchy-Schwarzche Ungleichung	7
2	Symmetrische, positiv definite Matrix	8
2.1	Cholesky-Zerlegung	8
2.2	[?] diagonaldominant und alle Diagonalelemente größer gleich 0	8
2.3	Eigenwerte	8
2.4	Eigenvektor	8
3	Matrixnormen	9
3.1	Natürliche Matrixnorm	9
3.2	Verträglichkeit	9
3.3	Zeilensummennorm	9
3.4	Spaltensummennorm	9
3.5	Spektralnorm	10
4	Spektralradius, Konditionszahl einer Matrix	11
4.1	Spektralradius ρ	11
4.2	Konditionszahl einer Matrix A	11
4.3	Sonderfall symmetrisch, positiv definite Matrix	11
5	Ähnlichkeitstransformation, Invarianz der Eigenwerte	12
5.1	Reduktionsmethoden	12
6	Gleitkommazahlen, ...	13
6.1	Gleitkommazahl (normalisiert)	13
6.2	Gleitkommagitter	13
6.3	Maschinengenauigkeit eps	13
6.4	Rundungsfehler	13
7	Darstellung des Interpolationsfehlers	14
7.1	Fehler I	14
7.2	Fehler II	14
8	Konditionierung einer numerischen Aufgabe, Konditionszahlen $k_{i,j}$	15
8.1	numerische Aufgabe	15

8.2	Konditionszahl (relativ)	15
9	Stabilität eines Algorithmus	16
9.1	stabiler Algorithmus	16
10	Auslöschung	17
11	Horner-Schema*	18
11.1	Code	18
11.2	Auswertung	18
12	Interpolation und Approximation	19
12.1	Grundproblem	19
12.2	Aufgabenstellung	19
12.3	Interpolation	19
12.4	Approximation	19
13	Lagransche Interpolationsaufgabe	20
13.1	Aufgabe	20
13.2	Eindeutigkeit + Existenz	20
13.3	Lagransche Basispolynome	20
13.4	Eigenschaften	20
13.5	Lagransche Darstellung	20
14	Newtonsche Basispolynome...	21
14.1	Newton-Polynome	21
14.1.1	Auswertung	21
14.1.2	Vorteil	21
14.2	Newtonsche Darstellung	21
14.3	Dividierte Differenzen*	21
15	Nevillsche Darstellung	22
15.1	Schema	22
15.2	Code	22
16	Hermite-Interpolation	23
16.1	Aufgabe	23
16.2	Existenz + Eindeutig	23
16.3	Fehler	23

17 Extrapolation	24
17.1 Richardson-Extrapolation	24
17.2 Lagrange	24
17.3 Neville	24
17.4 Extrapolationsfehler	24
18 Spline-Interpolation	26
18.1 Interpolationsnachteil	26
18.2 Abhilfe	26
18.3 Lineare Spline	26
18.4 Kubischer Spline	26
18.5 Existenz	26
18.6 Approximationsfehler	26
19 Gauß-Approximation	27
20 Gram-Schmidt-Algorithmus	28
20.1 Code	28
21 Interpolatorische Quadraturformeln	29
21.1 Interpolatorische Quadratur Formel	29
21.2 Ordnung	29
21.3 Newton-Cotes-Formel*	29
21.4 Abgeschlossene Formeln	29
21.5 Offene Formeln	30
21.6 Code	30
21.7 Problem	30
21.8 Abhilfe: Summierte Quadraturformeln *	30
21.8.1 Fehlerdarstellung	30
22 Gaußsche Quadraturformeln *	31
22.1 Gewichtetes Skalarprodukt	31
22.2 Gauß-Quadratur	31
22.3 Wahl der Stützstellen	31
22.4 Kongergenz der Gauß-Quadraturen	31
22.5 Code	31
23 Störungssatz...	32
23.1 Störungssatz	32
23.2 gestörte Matrix	32

24 Lösung von Dreieckssystemen+Aufwand*	33
24.1 Rückwärtseinsetzen	33
24.2 Vorwärtseinsetzen	33
24.3 Aufwand	33
25 Gaußsches Eliminationsverfahren...	34
25.1 Gauß-Elimination	34
25.2 Spaltenpivotisierung	34
25.3 LR - Zerlegung	34
25.4 Code	34
26 Symmetrisch positiv definite Systeme	35
26.1 Cholesky-Zerlegung	35
26.2 Aufwand	35
26.3 Code	35
27 Least-Squares-Lösungen	36
27.1 Least-Squares-Lösung	36
27.2 Eindeutigkeit	36
28 QR-Zerlegung, ...	37
28.1 QR-Zerlegung	37
28.2 Least-Squares mit Vollrang	37
28.3 Aufwand	37
28.4 Code	37
29 Householder-Transformation, ...	38
29.1 Householder Transformation	38
29.2 Eigenschaften von Householder	38
29.3 Householder-Verfahren	38
29.4 Ergebnis	38
30 Intervallschachtelung/Bisektionsverfahren	39
30.1 Intervallschachtelung/Bisektionsverfahren	39
30.2 Eigenschaften	39
30.3 Code	39
31 Konvergenz iterativer Methoden	40
31.1 Konvergenzordnung	40
31.2 Lineare Konvergenz	40
31.3 Superlineare Konvergenz	40
31.4 Quadratische Konvergenz	40

32 Newton Verfahren im \mathbb{R}^n	41
32.1 Code	41
33 Newton-Kantorisch	42
33.1 Voraussetzungen	42
33.2 Fehlerabschätzung	42
34 Sukzessive Approximation *	43
34.1 Konvergenz	43
34.2 Code	43
35 Newton-Verfahren für affin - lineares $f(x) = Ax - b$	44
35.1 Problem	44
36 Fixpunktiteration *, Konvergenzaussage	45
36.1 Problem	45
36.2 Aufspaltung	45
36.3 Konvergenz	45
36.4 Code	45
37 Jacobi *, Gauß-Seidel *, SOR *	46
37.1 Jacobi-Verfahren	46
37.2 Gauß-Seidel	46
37.3 SOR	46
37.4 Konvergenz	46
37.5 Fehler verringern	46
38 Allgemeines Abstiegsverfahren	47
38.1 Voraussetzung	47
38.2 A-Skalarprodukt, A-Norm	47
38.3 Abstiegsverfahren	47
38.4 Gradient	47
38.5 Schrittweite	47
38.6 Iteration	47
38.7 Code	47
39 Gradientenverfahren	48
39.1 Iteration	48
39.2 Konvergenz	48
39.3 Lemma von Kantorich	48
39.4 Fehlerabschätzung	48

40 CG-Verfahren	49
40.1 Fehlerabschätzung	49
41 Vorkonditionierung	50
42 Satz von Gerschgorin	51
43 Stabilitätsatz	52
44 Potenzmethode *, inverse Iteration *	53
44.1 Potenzmethode	53
44.2 Rayleigh-Quotient	53
44.3 Inverse Iteration	53
45 Hessenberg-Normalform	54
45.1 Hessengerg-Matrix	54
46 QR-Verfahren	55

1 Norm und Skalarprodukt

1.1 Norm

Definitheit: $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

absolute Homogenität: $\|\alpha x\| = |\alpha| * \|x\|$

Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

1.2 Skalarprodukt

$$\left. \begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \langle x, y + z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned} \right\} \text{Linearität}$$
$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$\left. \begin{aligned} \langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle &= 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned} \right\} \text{positivDefinitheit}$$

1.2.1 Vom Skalarprodukt induzierte Norm

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

1.2.2 Cauchy-Schwarzche Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| * \|y\|$$

2 Symmetrische, positiv definite Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrix

insbesondere: Diagonalmatrizen, Einheitsmatrizen

positiv definit: $x^t A x > 0$ (beliebige Matrix)

alle EW > 0 (symmetrische Matrix)

alle Haupt[TODO: ?] > 0 (symmetrische Matrix)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow 3 \text{ Hauptminoren[?]} = \det(a), \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

2.1 Cholesky-Zerlegung

$A = GG^t$ G unter der Matrix, invertierbar (symmetrische Matrix)

2.2 [?] diagonaldominant und alle Diagonalelemente größer gleich 0

(symmetrische Matrix)

2.3 Eigenwerte

$$\det(\lambda \text{ En} - A) = 0$$

2.4 Eigenvektor

$$f(v) = \lambda v$$

3 Matrixnormen

3.1 Natürliche Matrixnorm

$$\|A\|_{\infty} := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \max_{\|x\|_{\infty}=1} \|Ax\|_{\infty}$$

$$\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\|\lambda A\| = |\lambda| * \|A\|$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\|A * B\| \leq \|A\| * \|B\|$$

3.2 Verträglichkeit

$$\|Ax\| \leq \|A\| * \|x\|$$

3.3 Zeilensummennorm

= natürliche Matrixnorm

$$\|A\|_{\infty} = \max_{\|x\|_{\infty}=1} \|Ax\|_{\infty} = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_{\infty} &= \max\{|1| + |-2| + |-3|, |2| + |3| + |-1|\} \\ &= \max\{6, 6\} = 6 \end{aligned}$$

3.4 Spaltensummennorm

$$\|A\|_1 := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max\{|1| + |2|, |-2| + |3|, |-3| + |-1|\} \\ &= \max\{3, 5, 4\} = 5 \end{aligned}$$

$$\|A^t\|_1 = \|A\|_{\infty}$$

3.5 Spektralnorm

$$\begin{aligned}
 \|A\|_2 &:= \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \\
 &= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \\
 &= \max_{\|x\|_2=1} \langle Ax, Ax \rangle \\
 &= \max_{\|x\|_2=1} \langle A^t Ax, x \rangle \\
 &= \max \sqrt{|\lambda|}, \lambda * EW von A^t A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, A^t A = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \det(\mu E_n - A^t A) = 0 \Leftrightarrow \mu_{1,2} = 16, 1 \\
 \|A\|_2 &= \sqrt{\max(\mu_1, \mu_2)} = \sqrt{\mu_1} = \sqrt{16} = 4
 \end{aligned}$$

4 Spektralradius, Konditionszahl einer Matrix

4.1 Spektralradius ρ

$\varphi(A) = \max : 1 \leq i \leq n |\lambda_i(A)| = \text{spr}(A)$ der betragsmäßig größte Eigenwert von A

$\|A\| \geq |\lambda|$ (für jede Matrixnorm, die mit einer Vektornorm verträglich ist)

4.2 Konditionszahl einer Matrix A

$$\text{cond}(A) = \|A\| * \|A^{-1}\|$$

4.3 Sonderfall symmetrisch, positiv definite Matrix

$$\text{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

5 Ähnlichkeitstransformation, Invarianz der Eigenwerte

$$y = Ax$$

$$\bar{x} = Cx, \bar{y} = Cy \quad (\det C \neq 0), C \in GL$$

$$y = Ax \Rightarrow C^{-1}\bar{y} = AC^{-1}\bar{x} \Rightarrow \bar{y} = CAC^{-1}\bar{x} \Rightarrow \bar{y}\bar{A}\bar{x}$$

$$\bar{A} = CAC^{-1} \Rightarrow \bar{A} \sim A$$

λ EW, v EV zu A

$$\Rightarrow Av = C^{-1}\bar{A}Cv = \lambda v$$

$\Rightarrow \bar{A}$ und A haben dieselben Eigenwerte, algebraisch und geometrische Vielfachen stimmen überein (Invarianz der Eigenwerte)

5.1 Reduktionsmethoden

A durch Ähnlichkeitstransformationen

$$A = A^{(0)} = T_1^{-1}A^{-1}T_1 = Q \dots = T_i^{-1}A^{(i)}T_i = \dots$$

auf Form bringen, für welche EW und EV leicht zu berechnen sind (z.B. Jordan-Normalform)

6 Gleitkommazahlen, ...

6.1 Gleitkommazahl (normalisiert)

$$b \in \mathbb{N}, b \geq 2, x \in \mathbb{R}$$

$$x = \pm m * b^{\pm e}$$

$$\text{Mantisse: } m = m_1 b^{-1} + m_2 b^{-2} + \dots \in \mathbb{R}$$

$$\text{Exponent: } e = e_{s-1} b^{s-1} + \dots + e_0 b^0 \in \mathbb{N}$$

für $x \neq 0$ eindeutig

6.2 Gleitkommagitter

$A = A(b, r, s)$ größte Darstellbare Zahl: $(1 - b^{-r}) * b^{b^s-1}$

mit b als Basis, r als Mantissenlänge, s als Exponentenlänge

$$(b = 10) : 0,314 * 10^1 = 3,14$$

$$0,123 * 10^6 = 123.000$$

Beispiel: konvertiere von Basis 8 zu Basis 10:

$$x = (0,5731 * 10^5)_8 \in A(8, 5, 1)$$

$$x = (5 * 8^{-1} + 7 * 8^{-2} + 3 * 8^{-3} + 1 * 8^{-4}) * 8^5$$

$$x = 5 * 8^4 + 7 * 8^3 + 3 * 8^2 + 1 * 8^1 = 24.264 * 10^0$$

6.3 Maschinengenauigkeit eps

$$eps = \frac{1}{2} b^{-r+1}, IEEE : eps = \frac{1}{2} * 2^{-52} \approx 10^{-16}$$

6.4 Rundungsfehler

$$\text{absolut : } |x - rd(x)| \leq \frac{1}{2} b^{-r} b^e$$

$$\text{relativ : } \left| \frac{x - rd(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{2} b^{-r+1} = eps$$

7 Darstellung des Interpolationsfehlers

7.1 Fehler I

$f \in C^{n+1}[a, b]$, $\forall x \in [a, b] \exists \xi_x \in (\overline{x_0, \dots, x_n, x})$, wobei das Intervall das kleinst mögliche Intervall, das alle x_i enthält, s.d.

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

7.2 Fehler II

$f \in C^{n+1}[a, b]$, $\forall x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ gilt :

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

$$\text{mit } f[x_i, \dots, x_{i+k}] = y[x_i, \dots, x_{i+k}]$$

$$\text{und } f[x_0, \dots, x_n, x] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} f^{n+1}(x_0 + t_1(x_1 - x_0) + \dots + t_n(x_n - x_{n-1} + t(x - x_n)) dt dt_n \dots dt_1$$

für $x_0 = x_1 = \dots = x_n :$

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) = f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

$$\Rightarrow f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

8 Konditionierung einer numerischen Aufgabe, Konditionszahlen $k_{i,j}$

8.1 numerische Aufgabe

$x_j \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1, \dots, x_m) \Rightarrow y_i = f_i(x_j)$
fehlerhafte Eingangsgrößen $x_i + \Delta y_i$
 $|\Delta y_i|$ ist der absolute Fehler, $|\frac{\Delta y_i}{y_i}|$ ist der relative Fehler

8.2 Konditionszahl (relativ)

$$k_{ij}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \frac{\Delta x_j}{x_j}$$

$$\frac{\Delta y_i}{y_i} = \sum_{j=1}^m k_{ij}(x) \frac{\Delta x_j}{x_j}$$

$|k_{ij}(x)| \gg 1 \Rightarrow$ schlecht konditioniert

$|k_{ij}(x)| \ll 1 \Rightarrow$ gut konditioniert, ohne Fehlerverstärkung

$|k_{ij}(x)| > 1 \Rightarrow$ Fehlerverstärkung

$|k_{ij}(x)| < 1 \Rightarrow$ Fehlerdämpfung

9 Stabilität eines Algorithmus

9.1 stabiler Algorithmus

akkumulierte Fehler der Rechnung (Rundungsfehler, Auswertungsfehler, etc.) übersteigen den unvermeidbaren Problemfehler der Konditionierung der Aufgabe nicht. Aka Trotz Ungenauigkeiten bei den Eingabe Variablen erhalten wir fast sehr genaue Ergebnisse.

10 Auslöschung

Verlust von Genauigkeit bei der Subtraktion von Zahlen mit gleichem Vorzeichen

TODO: bei bedarf ein Beispiel

11 Horner-Schema*

Das sogenannte "Horner-Schema"

$b_n = a_n$, $k = n - 1, \dots, 0$ $b_k = a_k + \xi b_{k+1}$ liefert den Funktionswert
 $p(\xi) = b_0$ des Polynoms
 $p(x) = a_0 + x(\dots + x(a_{n-1} + a_n x)\dots)$

11.1 Code

```
def horner(Ac, Ax, n, x):
```

```
    y = 0.0
```

```
    for i in reversed range(n):
```

```
        y = y * (x - Ax[i]) + Ac[i]
```

```
    return y
```

Ac: Vektor mit Koeffizienten, ist ein np Array

Ax: Stützstellen, ist ein np Array

n: Anzahl der Stützstellen, ist ein int

x: Auswertungspunkt, ist ein double

Immer Horner-Schema zur Auswertung von Polynomen verwenden.

11.2 Auswertung

TODO: subsection

12 Interpolation und Approximation

12.1 Grundproblem

Darstellung und Auswertung von Funktionen

12.2 Aufgabenstellung

$f(x)$ nur auf diskreter Menge von Argumenten x_0, \dots, x_n bekannt und soll rekonstruiert werden

analytisch gegebene Funktion soll auf Reelwerte dargestellt werden, damit jederzeit Werte zu beliebigen x berechnet werden können.

Einfach konstruierte Funktionen in Klassen P :

Polynome: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

rationale Funktion: $r(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$

trigonometrische Funktion: $t(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

Exponentialsummen: $e(x) = \sum_{k=1}^n a_k \exp(b_k x)$

12.3 Interpolation

Zuordnung von $g \in P$ zu f durch Fixieren von Funktionswerten

$$g(x_i) = y_i = f(x_i), i = 0, \dots, n$$

12.4 Approximation

$g \in P$ beste Darstellung, z.B.

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| \text{ minimal}$$

$$\left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ minimal}$$

13 Lagransche Interpolationsaufgabe

13.1 Aufgabe

Finde zu $n + 1$ verschiedene Stützstellen/Knoten $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und Werten $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ ein Polynom $p \in P_n$ mit $p(x_i) = y_i$

13.2 Eindeutigkeit + Existenz

Die Lagransche Interpolationsaufgabe ist eindeutig lösbar

TODO: bei bedarf Beweis rein kopieren den Ich nicht verstanden hab

13.3 Lagransche Basispolynome

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \in P_n, i = 0, \dots, n$$

13.4 Eigenschaften

$$\text{ortogonal: es gilt } L_i^{(n)}(x_k) = d_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bilden Basis von P_n

haben Grad n

13.5 Lagransche Darstellung

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i^{(n)}(x) \in P_n \text{ mit } p(x_j) = y_j$$

Nachteil: Bei Hinzunahme von (x_{n+1}, y_{n+1}) ändert sich das Basispolynom komplett

TODO: Beispiel

14 Newtonsche Basispolynome...

14.1 Newton-Polynome

$$N_0(x) = 1, N_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \text{ mit } p(x) = \sum_{i=0}^n a_i N_i(x)$$

14.1.1 Auswertung

$$\begin{aligned} y_0 &= p(x_0) = a_0 \\ y_1 &= p(x_1) = a_0 + a_1 * (x_1 - x_0) \\ &\vdots \\ y_n &= p(x_n) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + \dots + a_n(x_n - x_0) * \dots * (x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

14.1.2 Vorteil

Bei Hinzunahme von (x_{n+1}, y_{n+1}) muss nur eine neue Rechnung durchgeführt werden, und nicht das gesamte Polynom neu berechnet werden

TODO: Beispiel

14.2 Newtonsche Darstellung(stabile Variante)

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y[x_0, \dots, x_i] N_i(x)$$

14.3 Dividierte Differenzen*

$$y[x_i, \dots, x_{k+1}] = \frac{y[x_{i+1}, \dots, x_{k+1}] - y[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \text{ mit } k = 1, \dots, j \text{ und } i = k - j$$

für beliebige $[?] \sigma : 0, \dots, n \rightarrow 0, \dots, n$ gilt $y[\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n] = y[x_0, \dots, x_n]$

15 Nevillsche Darstellung

$$p_{jj}(x) = y_j \quad j = 0, \dots, n \quad k = 1, \dots, j \quad i = k - j$$

$$p_{i,i+k}(x) = p_{i,i+k-1}(x) + (x - x_i) \frac{p_{i+1,i+k}(x) - p_{i,i+k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i}$$

15.1 Schema

x	$k = 0$		$k = 2$	\dots	$k = n - 1$	$k = n$
x_0	y_0	\longrightarrow	$p_{0,1}$	\dots	$p_{0,n-1}$	$p_{0,n}$
x_1	y_1	\longrightarrow	$p_{1,2}$	\dots	$p_{1,n}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots			
x_{n-1}	y_{n-1}	\longrightarrow	$p_{n-1,n}$			
x_n	y_n					

TODO: add the diagonal arrows

Hinzunahme von (x_{n+1}, y_{n+1}) ist problemlos

Auswertung von $p_{0,n}(x)$ in $\xi \neq x_i$ ohne vorherige Bestimmung der Koeffizienten der Newton-Darstellung ist einfach und Numerisch stabil möglich

15.2 Code

```
def divDiffs(xi, yi, x):
    n = len(xi)
    p = n * [0]
    for k in range(n):
        for i in range(n - k):
            if k == 0:
                p[i] = yi[i]
            else:
                p[i] = ((x - xi[i + k]) * p[i] + (xi[i] - x) * p[i + 1]) / (xi[i]
- xi[i + k])
    return p[0]
```

16 Hermite-Interpolation

16.1 Aufgabe

Gegeben : $x_i \quad i = 0, \dots, m \quad \text{paarweise verschieden}$
 $y_i^{(k)} \quad i = 0, \dots, m \quad k = 0, \dots, \mu_i (\mu_i \geq 0)$

Gesucht: $p \in P_n, n = m + \sum_{i=0}^m \mu_i : p^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}$

x_i sind $(\mu_i + 1)$ -fache Stützstellen

$x_0 = -1, x_1 = 1, m = 1, y_0^{(0)} = 0, y_1^{(0)}, y_1^{([l?])} = 2$

$\Rightarrow \mu_0 = 0, \mu_1 = 1$

$\Rightarrow n = 1 + 0 + 1 = 2$

$\Rightarrow p(x) = x^2$

16.2 Existenz + Eindeutig

analog zur Lagrange-Interpolation

16.3 Fehler

$f \in C^{n+1}[a, b] : \forall x \in [a, b] \exists \xi_x \in (\overline{x_0, \dots, x_m, x}), \text{ s.d.}$

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_0, \dots, x_m, \dots, x_m, x] \prod_{i=0}^m (x - x_i)^{\mu_i + 1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^m (x - x_i)^{\mu_i + 1}$$

17 Extrapolation zum Limes + Fehler

17.1 Richardson-Extrapolation

nicht direkt berechenbare Größe

$$a(0) = \lim_{k \rightarrow 0} a(k), \quad k \in \mathbb{R}_+$$

berechne $a(k_i)$ für gewisse k_i , $i = 0, \dots, n$ und $[?] p_n(0)$ des Interpolations Polynoms zu $(h_i, a(h_i))$ als Schätzung für $a(0)$

$$a(0) := \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)} \quad (= 0)$$

$$a(x) := \frac{(\cos(x)-1)}{\sin(x)}$$

Interpolation $a(x)$ an Stützstellen k_i nahe bei 0:

$$k_0 = \frac{1}{8} \quad a(k_0) = -6,258151 * 10^{-2}$$

$$k_1 = \frac{1}{16} \quad a(k_1) = -3,126018 * 10^{-2}$$

$$k_2 = \frac{1}{32} \quad a(k_2) = -1,562627 * 10^{-2}$$

17.2 Lagrange

$$p_2(x) = a(k_0) \frac{(x-\frac{1}{16})(x-\frac{1}{32})}{(\frac{1}{8}-\frac{1}{16})(\frac{1}{8}-\frac{1}{32})} + a(k_1) \frac{(x-\frac{1}{8})(x-\frac{1}{32})}{(\frac{1}{16}-\frac{1}{8})(\frac{1}{16}-\frac{1}{32})} + a(k_2) \frac{(x-\frac{1}{8})(x-\frac{1}{16})}{(\frac{1}{32}-\frac{1}{8})(\frac{1}{32}-\frac{1}{16})}$$

$$\Rightarrow a(0) \sim p_2(0) = -1,02 * 10^{-5}$$

17.3 Neville

$$p_{i,i+k}(0) = p_{i,i+k-1}(0) + \frac{p_{i,i+k-1}(0) - p_{i+1,i+k}(0)}{\frac{x_{i+k}}{x_i} - 1}, \quad k = 1, 2$$

i	x_i	$p_{i,i}(0) = a(k_i)$	$p_{i,i+1}(0)$	$p_{i,i+2}(0)$
0	$x_0 = \frac{1}{8}$	$-6,258151 * 10^{-2}$	$6,115 * 10^{-5}$	$-1,02 * 10^{-5}$
1	$x_1 = \frac{1}{16}$	$-3,126018 * 10^{-2}$	$7,64 * 10^{-6}$	
2	$x_2 = \frac{1}{32}$	$-1,562627 * 10^{-2}$		

17.4 Extrapolationsfehler

$a(n)$ habe die Entwicklung:

$$a(h) = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j h^{jq} + a_{n+1}(h) h^{(n+1)q} \quad \text{mit } q > 0, \text{ Koeffizienten } a_j$$

$$\text{und } a_{n+1}(h) = a_{n+1} + a(1[????])$$

$(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ erfülle:

$$0 \leq \frac{h_{k+1}}{h_k} \leq p < 1 \quad (\Rightarrow h_k \text{ positiv monoton fallend})$$

Dann gilt für $p_1^{(k)} \in P_n$ (in h^q) durch $(h_k^q, a(h_k)), \dots, (h_{k+n}^q, a(h_{k+1}))$

$$a(0) - p_n^{(k)}(0) = O(h_k^{(n+1)q}) \quad (k \rightarrow \infty)$$

18 Spline-Interpolation

18.1 Interpolationsnachteil

Starke Oszillation von Polynomen höheren Grades

18.2 Abhilfe

Spline-Interpolation, d.h. stückweise polynomielle Interpolation mit $(n - 1)$ -mal stetig diff.baren Knoten

18.3 Lineare Spline

alle Abschnitt-Splines sind lineare Funktionen

18.4 Kubischer Spline

$s_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kubischer Spline bezüglich $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, wenn gilt

1. $s_n \in C^2[a, b]$
2. $S_n|_{I_i} \in P_3$, $i = 1, \dots, n$
natürlicher Spline:
3. $s_n''(a) = s_n''(b) = 0$

18.5 Existenz

Der interpolierende kubische Spline existiert und ist eindeutig bestimmt durch zusammen Vorgabe von $s_n''(a), s_n''(b)$

für natürlichen Spline s_n durch $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n$ gilt:

$$\int_a^b |s'(x)|^2 dx \leq \int_a^b |g''(x)|^2 dx$$

bezüglich $g \in C^2[a, b]$ mit $g(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n$

18.6 Approximationsfehler

$f \in C^4[a, b], s_1''(a) = f''(a) \wedge s_n''(b) = f''(b)$:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2} h^4 \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$$

19 Gauß-Approximation

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

H Prähilbertraum, $\delta \subset H$ endlich Dimensional

$\exists f \in H$ eindeutig bestimmte "beste Approximation" $g \in S$

$$\|f - g\| = \min_{\varphi \in S} \|f - \varphi\|$$

bes. einfache Lösung, wenn $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ eine ONB ist, d.h.

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{i,j} \Rightarrow \alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow g = \sum_{i=1}^n \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \text{ ist beste Approximation}$$

20 Gram-Schmidt-Algorithmus

$$w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad \tilde{w}_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma \langle v_k, w_i \rangle w_i, \quad w_k := \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|}$$

20.1 Code

```
n = size(v, 1)
k = size(v, 2)
u = np.zeros(n, k)
u[:, 1] = v[:, 1]/sqrt(v[:, 1] * v[:, 1])
for i in range(2, k):
    u[:, i] = v[:, i]
    for j in range(1, i - 1):
        u[:, i] = u[:, i] - (u[:, i] * u[:, j]) / (u[:, j] * u[:, j]) * u[:, j]
    u[:, i] = u[:, i] / sqrt(u[:, i] * u[:, i])
```

21 Interpolatorische Quadraturformeln

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx I^{(n)}(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

Stützstellen $a \leq a_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ und Gewichte $\alpha_i \in \mathbb{R}$

21.1 Interpolatorische Quadratur Formel

$$I^{(n)}(f) = \int_a^b p_n(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i^{(n)}(x) dx$$

Lagrange:

$$I(f) - I^{(n)}(f) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_0(x) dx = (b-a) * \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

$$w_i = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b L_i(x) dx$$

21.2 Ordnung

$$I^{(n)} \text{ von der Ordnung } m \Leftrightarrow \forall p \in P_{m-1}$$

$$\int_a^b p(x) dx = I^{(n)}(p) \quad \text{exakt}$$

\Rightarrow Interpolatorische Quadraturformel zu $(n+1)$ -Stützstellen sind mindestens von der Ordnung $n+1$

\Rightarrow höchstens Ordnung $2n+2$, mindestens $n+1$

21.3 Newton-Cotes-Formel*

äquidistante Stützstellen

21.4 Abgeschlossene Formeln

$$H = \frac{b-a}{n}, x_i = a + iH, a = x_0, b = x_n$$

$$\text{Trapezregel: } I^{(1)}(f) = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$\text{Simpsonregel: } I^{(2)}(f) = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

$$\text{3/8-Regel: } I^{(3)}(f) = \frac{b-a}{8} [f(a) + 3f(a+H) + 3f(b-H) + f(b)]$$

¹ α_i

21.5 Offene Formeln

$$(H = \frac{b-a}{n+2}, x_i = a + (i+1)H, a < x_0, x_n < b)$$

$$I^{(0)}(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) \quad \text{Mittelpunktregel}$$

$$I^{(1)}(f) = \frac{(b-a)}{2}(f(a+H) + f(b-H))$$

$$I^{(2)}(f) = \frac{(b-a)}{3}(2f(a+H) - f(\frac{a+b}{2}) + 2f(b-H))$$

21.6 Code

21.7 Problem

negative Gewichte $\alpha_i \Rightarrow$ Auslöschungsgefahr

Oszillationen des Lagrange Interpolanten (Runge-Phänomen)

$$\Rightarrow I^{(n)}(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(f)$$

21.8 Abhilfe: Summierte Quadraturformeln *

$$I - n^{(n)}(f) = \sum_{i=1}^{N-1} I_{[x_i, x_{i+1}]}^{(n)}(f) \quad h = \frac{b-a}{N}, x_i = a + iH$$

21.8.1 Fehlerdarstellung

$$I_{[x_i, x_{i+1}]}(f) - I_{[x_i, x_{i+1}]}^{(n)}(f) = w_n h^{n+2} f^{(m+1)}(\xi_i), \quad \xi_i \in [a, b]$$
$$m \geq n : I(f) - I_n^{(n)}(f) = w_n h^{(m+1)}(b-a) f^{(m+1)}(\xi)$$

22 Gaußsche Quadraturformeln *

22.1 Gewichtetes Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx, \quad \omega(x) \geq 0, x \in (a, b)$$

22.2 Gauß-Quadratur

∃! interpolierte Quadraturformel [?] (n + 1) paarweise verschiedene Stützstellen auf [-1, b] mit Ordnung 2n + 2. Stützstellen = Nullstellen

$$\alpha_i = \int_{-1}^1 \prod_{j=0, j \neq i}^n \left(\frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right)^2 dx > 0^2, \quad i = 0, \dots, n$$

$$f \in C^{2n+2}([-1, 1]) \text{ Restglied :}$$

$$R^{(n)} = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 \prod_{j=0}^n (x - \lambda_j)^2 dx, \quad \xi \in (-1, 1)$$

22.3 Wahl der Stützstellen

Nullstellen $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in (-1, 1)$ des (n + 1)-sten Legendre-Polynomes $L_{n+1} \in P_{n+1}$

22.4 Kongergenz der Gauß-Quadraturen

Sei $I^{(n)}(f)$ die (n + 1) punktige [?] Gauß-Formel zu $I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx \forall f \in C[-1, 1] : I^{(n)}(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(f)$

22.5 Code

²Positivität der Gewichte

23 Störungssatz...

23.1 Störungssatz

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär mit $\|\delta A\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, dann gilt für die

23.2 gestörte Matrix

$\tilde{A} = A + \delta A$ ist regulär

Für den relativen Fehler der Lösung gilt mit Konditionszahl von A:

$$\text{cond}(A) = \|A\| * \|A^{-1}\|$$

die Ungleichung:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left[\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right]$$

24 Lösung von Dreieckssystemen+Aufwand*

24.1 Rückwärtseinsetzen

$$x_j = \begin{cases} \frac{b_n}{a_{nn}} & j = n \\ \frac{1}{a_{jj}}(b_j - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}x_k) & j = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

24.2 Vorwärtseinsetzen

$$x_j = \begin{cases} \frac{b_n}{a_{nn}} & j = n \\ \frac{1}{a_{jj}}(b_j - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}x_k) & j = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

24.3 Aufwand

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2}{2} + O(n)$$

25 Gaußsches Eliminationsverfahren...

25.1 Gauß-Elimination

Umformen von $Ax = b$ auf $Rx = c$, R ist eine rechte obere Dreieck Matrix

25.2 Spaltenpivotisierung

$$|a_{r_k,k}^{(k-1)}| = \max_{j=k,\dots,n} |a_{jk}^{(k-1)}|$$

25.3 LR - Zerlegung

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 8 & 8 & 33 \\ -4 & 10 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 15 \\ 73 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[2*]{(-4)*} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 33 \\ 2 & 1 & 7 \\ -4 & 10 & 4 \end{pmatrix} P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminierung

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 & 33 \\ 2 & 1 & 7 \\ -4 & 10 & 4 \end{pmatrix} L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 8 & 8 & 33 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 28 & 41 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 & 33 \\ 0 & 28 & 41 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 8 & 8 & 33 \\ 0 & 28 & 41 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = R$$

$$PA = LR \Rightarrow L_2 L_1 P_2 P_1 A = F \Rightarrow P_2 P_1 A = L_1^{-1} L_2^{-1} R, P_2 P_1 = P$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 L_1 = (\cdot \cdot \cdot), (L_2 L_1)^{-1} = L = ([\text{linkeunteredreiecksmatrix}])$$

$$Ax = b \Rightarrow LRx = Pb, Pb = \tilde{b}$$

$$\Rightarrow Ly = \tilde{b}, Rx = y$$

A regulär + diagonaldominant $\Rightarrow A = LR$ kann ohne Pivot bezeichnet werden

25.4 Code

26 Symmetrisch positiv definite Systeme

26.1 Cholesky-Zerlegung

Jede symmetrische positiv definite Matrix A hat eine sogenannte Cholesky - Zerlegung:

$$A = LDL^t = \tilde{L}\tilde{L}^t, \quad \tilde{L} := LD^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{l}_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{l}_{n,1} & \dots & \tilde{l}_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{l}_{1,1} & \dots & \tilde{l}_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \tilde{l}_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$i \geq j : a_{i,j} = \sum_{k=1}^j \tilde{l}_{i,k} \tilde{l}_{j,k} = \sum_{k=1}^{j-1} \tilde{l}_{i,k} \tilde{l}_{j,k} + \tilde{l}_{i,j} \tilde{l}_{j,j}$$

$$i = 1, \dots, n \quad \tilde{l}_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{i,k}^2}$$

$$j = i + 1, \dots, n \quad \tilde{l}_{i,j} = \frac{1}{\tilde{l}_{i,i}} (a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{i,k} \tilde{l}_{j,k})$$

Bandmatrizen: Nullen nicht speichern/berechnen Diagonal-Dominante:
keine Pivotisierung notwendig symmetrisch positiv definite: keine Pivotisierung notwendig

26.2 Aufwand

$$N_{Cholesky}(n) = \frac{n^3}{6} + O(n^2) \quad (\text{billiger als } A = LR)$$

26.3 Code

27 Least-Squares-Lösungen

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} Ax = b$$

keine Lösung, $b \notin \text{im}(A)$

unendlich viele Lösungen $\bar{x} + \delta x \Leftrightarrow A\bar{x} = b, \delta x \in \ker(A) \neq \{0\}$

27.1 Least-Squares-Lösung

Es existiert immer eine "Lösung" $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ mit kleinsten Fehlerquadraten

27.2 Eindeutigkeit

$R(A) = n \Leftrightarrow \bar{x}$ eindeutig, jede weitere Lösung: $\bar{x} + y, y \in \ker(A)$

$$\text{Gerade: } b = C + Dt \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C + x_1 D = y_1$$

$$C + x_2 D = y_2$$

$$C + x_3 D = y_3$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$1. C = A^t A = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}, b' = A^t b = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$2. \text{Cholesky Zerlegung: } G^t G = C \Rightarrow G = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$3. G^t y = b' \Rightarrow y = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}, Gx = y \Rightarrow x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Gerade: } b = a_1 + a_2 t$$

$$\text{Alternativ: } Q^t A = R = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, Gx = y \Rightarrow x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 x = \tilde{b}_1 \Rightarrow D = a_1, C = A_2$$

28 QR-Zerlegung, ...

28.1 QR-Zerlegung

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\text{Rang}(A) = n \leq m$

\exists eindeutig bestimmte Matrix $Q \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $Q^t Q = E_n$ (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
 $\overline{Q}^t Q = E_n$ (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

und eindeutig bestimmte obere Dreiecks Matrix $R \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $r_{i,i} < 0$ reell,
s.d.

$A = QR$ Q orthonormale Matrix ($m = n$ unitär) $Q^t = Q^{-1}$

$u := v + \mathfrak{S} \|v\| * e_n$

\mathfrak{S}

$\begin{cases} -1 & v_1 < 0 \\ 1 & v_1 \geq 0 \end{cases}$ Householder Matrix $H = E_n - 2 \frac{uu^t}{u^t u}$

28.2 Least-Squares mit Vollrang

$A = Q_1 R = (Q_1 | Q_2) \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = (Q_1 | Q_2) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$Rx = Q^t b$ $R = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\text{Rang}(A) = n$

$\|Ax - b\|_2^2 = \|Rx - Q_1^t b\|_2^2 + \|Q_2^t b\|_2^2$ minimal für $x = R^{-1} Q_1^t b$

28.3 Aufwand

Doppelter Aufwand für QR wie für LR

$N_{QR}(n) = \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$

28.4 Code

29 Householder-Transformation, ...

29.1 Householder Transformation

$v \in \mathbb{K}, \|v\|_2 = 1$

$$H = E_n - 2 \frac{vv^t}{v^t v}$$

Spiegelung eines Vektors an einer Hyperebene durch Null im euklidischen Raum $H_{\vec{x}} = x - 2vv^t x$

$$v\bar{v}^t = \begin{pmatrix} v_1\bar{v}_1 & \dots & v_1\bar{v}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n\bar{v}_1 & \dots & v_n\bar{v}_n \end{pmatrix}$$

TODO: skizze

29.2 Eigenschaften von Householder

Symmetrisch: $H = H^t$

Orthogonal: $H^t H = E_n$

Involutorisch: $H^2 = E_n$

EW: -1 einfach, 1 (n - 1)-fach

Mantisse-Vektor-Multiplikationen mit Householder sind schnell berechenbar

29.3 Householder-Verfahren

Gruppe numerischer Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer skalaren, reellen Funktion

Zur Berechnung der QR-Zerlegung

$S_t A^{(t-1)} = A^{(t)}$, S_t ist Householder-Transformation

29.4 Ergebnis

QR-Zerlegung von A (aber nichteindeutig!)

30 Intervallschachtelung/Bisektionsverfahren

30.1 Intervallschachtelung/Bisektionsverfahren

n = 1

Erzeugen einer konvergenten Folge von Intervallschachtelungen

$a_0, b_0 \in [a, b]$ mit $f(a_0)f(b_0) < 0$

Konvergenz: $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$

$|b_{k+1} - a_{k+1}| = \frac{1}{2}|b_k - a_k| = 2^{-k-1}|b_0 - a_0|$

30.2 Eigenschaften

sehr stabil, langsam, Erweiterung für $x \in \mathbb{R}^n \vee x \in \mathbb{C}$ nicht möglich

30.3 Code

for k = 0, 1, ... do:

$x[k] = 0.5(a[k] + b[k])$

 if $f(a[k])f(x[k]) \leq 0$:

$a[k + 1] = a[k]$

$b[k + 1] = x[k]$

 else:

$a[k + 1] = x[k]$

$b[k + 1] = b[k]$

 if $\text{abs}(b[k + 1] - a[k + 1]) < \text{TOL}$ $\text{abs}(a[k + 1])$:

 Ende Lösung: $0.5(b[k + 1] + a[k + 1])$

31 Konvergenz iterativer Methoden

31.1 Konvergenzordnung

$$\alpha > 1$$

$$|x_{k+1} - x_*| \leq C|x_k - x_*|^\alpha \quad k = 0, 1, \dots$$

31.2 Lineare Konvergenz

$$\alpha = 1 \Rightarrow \text{ClineareKontraktionsrate}$$

31.3 Superlineare Konvergenz

$$|x_{k+1} - x_k| \leq C_k|x_k - x_*| \quad \text{mit } C_k \rightarrow 0$$

31.4 Quadratische Konvergenz

$$|x_{k+1} - x_*| \leq C|x_k - x_*| \quad \text{also } \alpha = 2$$

Konvergenz der Ordnung α (quadratische Konvergenz, kubische, etc.) \Rightarrow
superlineare Konvergenz \Rightarrow lineare Konvergenz

32 Newton Verfahren im \mathbb{R}^n

$$x_{k+1} = x_k - j_f(x_k)^{-1} f(x_k)$$

$$j_f(x_k)^{-1} = \frac{1}{\det(j_f)} * j_f^*, \quad j_f^* = \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

guter Startwert: superlineare Konvergenz

schlechter Startwert³: lineare Konvergenz

32.1 Code

33 Newton-Kantorisch

33.1 Voraussetzungen

$f : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit f' L-stetig, d.h.

1. $\|j_f(x) - j_f(y)\| \leq L\|x - y\|$
 2. $\|j_f^{-1}(x)\| \leq \beta$
 3. $x_0 \in D_f(x)$
 4. $q := \frac{1}{2}\alpha\beta L$ mit $\alpha = \|j_f^{-1}(x_0)f(x_0)\|$ auf der Niveaumenge $D(x) = \{y \in D \mid \|f(y)\| \leq \|x\|\}$
- \Rightarrow Dann konvergiert (x_k) quadratisch gegen Nullstelle $z \in D$ von f

33.2 Fehlerabschätzung

$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{\alpha}{1-q} q^{(2^k-1)}, \quad k \geq 1$$

34 Sukzessive Approximation *

$x_{t+1} = x_t + C^{-1}f(x_t)$ C reguläre Matrix $\in \mathbb{R}^{n \times n}$
 $x_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} z \Rightarrow z = z + C^{-1}f(z)$ bzw $f(z) = 0 \Rightarrow z$ Fixpunkt der Abbildung
 $g(x) := x + C^{-1}f(x)$

34.1 Konvergenz

$g : G \rightarrow G$ Kontraktion, \exists Fixpunkt $z \in G$ von g , q Kontraktionskonstante

$$\|x_t - z\| \leq \frac{q}{1-q} \|x_t - x_{t-1}\| \leq \frac{q^t}{1-q} \|x_1 - x_0\|$$

34.2 Code

35 Newton-Verfahren für affin - lineares $f(x)$ = $Ax - b$

35.1 Problem

Direkte Methoden \rightarrow großen Speicheraufwand für große n

36 Fixpunktiteration *, Konvergenzaussage

36.1 Problem

für sehr große n ist Gauß-Elimination zu speicherintensiv

$$Ax = b \Leftrightarrow a_{j,j} * x_j + \sum_{k=1}^n a_{j,k} x_k = b_j$$

36.2 Aufspaltung

$$A = D + L + R$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & a_{n,n} & \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{2,1} & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_t = Bx_{t-1} + c, \quad B \text{ Iterationsmatrix}$$

36.3 Konvergenz

$$x_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x \Rightarrow x = Bx + c$$

$$x_t \rightarrow x \Leftrightarrow \text{spr}(B) = \max |\lambda| \text{ von } B < 1$$

Asymptotisches Konvergenzverhalten:

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\|x_t - x\|}{\|x_0 - x\|} \right)^{\frac{1}{t}} = \text{spr}(B)$$

36.4 Code

37 Jacobi *, Gauß-Seidel *, SOR *

37.1 Jacobi-Verfahren

$$B = J = -D^{-1}(L + R) \text{ mit } A = D + L + R$$

37.2 Gauß-Seidel

$$B = H_1 = -(D + L)^{-1}R$$

37.3 SOR

$$H_w = (D + wL)^{-1}((1 - w)D - wR)$$

(für $w = 1$: Gauß-Seidel)

37.4 Konvergenz

für positiv definit symmetrische Matrizen:

(I) starke/strikte Diagonaldominanz \Rightarrow J/G-S konvergiert

(II) diagonaldominanz + irreduzibel⁴ \Rightarrow J/G-S konvergiert

(III) Beachte EW von: $J = -D^{-1}(L + R)$ J konvergiert für $\text{spr}(J) < 1$
 $H = -(D + L)^{-1}R$ G-S konvergiert für $\text{spr}(H) < 1$

37.5 Fehler verringern

Wie viele Iterationsschritte t bis Fehler um 10^k verbessert ist?

$$t \geq -\frac{k}{\log_{10} f} \quad f = \text{spr}(B)$$

⁴Knotenmodell

38 Allgemeines Abstiegsverfahren

38.1 Voraussetzung

A symmetrisch positiv definiert

$$\Rightarrow \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \langle Ax, x \rangle > 0$$

38.2 A-Skalarprodukt, A-Norm

$$\langle x, y \rangle_A = \langle x, Ay \rangle, \|x\|_A = \sqrt{\langle Ax, x \rangle}$$

A hat nur reelle EW

$$\lambda_{\min} := \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n =: \lambda_{\max} \Rightarrow \text{spr}(A) = \lambda_{\max}, \text{cond}_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

38.3 Abstiegsverfahren

Iteratives Verfahren, um lokales Minimum einer Funktion zu finden.

In jedem Schritt entlang einer bestimmten Richtung minimieren

38.4 Gradient

$$g_t = Ax_t - b, \text{ Abstiegsrichtung } r_t$$

38.5 Schrittweite

$$\alpha_t = -\frac{\langle g_t, r_t \rangle}{\langle Ar_t, r_t \rangle}$$

38.6 Iteration

$$x_{t+1} = x_t + \alpha_t r_t$$

\Rightarrow Minimierung von Q minimiert

Defektnorm $\|A y - b\|_{A^{-1}}$ und Fehlnorm $\|y - x\|_A$

38.7 Code

39 Gradientenverfahren

Richtung des steilsten Abstiegs

$$r_t = -\text{grad } Q(x_t) = -g_t$$

39.1 Iteration

$$x_0 \in \mathbb{R}^n, g_0 = Ax_0 - b, t \geq 0$$

$$\alpha_t = \frac{\|g_t\|^2}{\langle Ag_t, g_t \rangle}$$

$$x_{t+1} = x_t - \alpha_t g_t$$

$$g_{t+1} = g_t - \alpha_t Ag_t$$

$$\langle Ag_t, g_t \rangle = 0 \Rightarrow g_t = 0 \Rightarrow Ax_t = b$$

39.2 Konvergenz

A positiv definit symmetrisch \Rightarrow Gradientenverfahren konvergiert $\forall x_0$ gegen
 $Ax = b$

39.3 Lemma von Kantorich

$$4 \frac{\lambda_{\min} \lambda_{\max}}{(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})^2} \leq \frac{\| \cdot \|^4}{\langle y, Ay \rangle \langle y, A^{-1}y \rangle}$$

39.4 Fehlerabschätzung

$$\|x_t - x\|_A \leq \left(\frac{1-K^{-1}}{1+K^{-1}}\right)^t \|x_0 - x\|_a, \quad t \in \mathbb{N}$$

\Rightarrow Lagrangsche Konvergenz für $\text{cond}_2(A) \gg 1$

40 CG-Verfahren

Effiziente numerische Methode zur Lösung großen LGS mit symmetrisch positiv definitem A

Liefert nach spätestens m Schritten die exakte Lösung für $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ für exakte Arithmetik)

Fehler fällt monoton

Wähle Abstiegsrichtung d_t mit $\langle d_t, d_j \rangle = 0 \forall i \neq j$

$$x_t = x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_i d_i$$

$$\Rightarrow x_{t+1} = x_t + \alpha_t d_t$$

$$\alpha_t = \frac{\|g_t\|^2}{\langle d_t, A d_t \rangle} \quad \beta_t = \frac{\|g_{t+1}\|^2}{\|g_t\|^2}$$

$$x_{t+1} = x_t + \alpha_t d_t$$

$$g_{t+1} = g_t + \alpha_t A d_t$$

$$d_{t+1} = -g_{t+1} + \beta_t d_t$$

$$d_0 = g_0 = b - A x_0$$

40.1 Fehlerabschätzung

$$\|x_t - x\|_A \leq 2 \left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{K}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{K}}} \right)^t \|x_0 - x\|_A \quad t \in \mathbb{N}$$

$$K = \text{cond}_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

Reduzierung des Anfangsfehlers: $\max_t(\epsilon) \leq \frac{1}{2} \sqrt{K} \ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right) + 1 \text{ Schritte}$

\Rightarrow CG konvergiert schneller als Gradientenverfahren

schneller, je näher $\text{cond}_2(A)$ bei 1 liegt, da $\text{cond}_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$

aber, falls $\lambda_{\max} \gg \lambda_{\min} \Rightarrow$ CG verfahren langsam

Lösung: Vorkonditionierung

41 Vorkonditionierung

$Ax = b$ umformen in $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ mit besser konditioniertem \tilde{A} symmetrisch positiv definit, K regulär: $C = KK^t$

$$Ax = b \Leftrightarrow K^{-1}A(K^t)^{-1}K^t x = K^{-1}b$$

Dann CG anwenden auf $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$

Wähle C so, dass $\text{cond}_2(\tilde{A}) \ll \text{cond}_2(A)$

$$\text{Startwerte: } \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad \tilde{d}_0 = -\tilde{g}_0 = \tilde{b} - \tilde{A}\tilde{x}_0$$

$$g_0 = A x_0 - b$$

$$C_{\rho_{t+1}} = g_{t+1} \quad C_{\rho_0} = g_0 \quad d_0 = -\rho_0$$

⁵ \tilde{A}

⁶ \tilde{x}

⁷ \tilde{b}

42 Satz von Gerschgorin

Alle EW von A in $\mathbb{K}^{n \times n}$ liegen in der Vereinigung der sogenannten Gerschgorin-Kreise

$$K_j = \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - a_{j,j}| \leq \sum_{k=1, k \neq j}^n |a_{j,k}| \}$$

$$U = \bigcup_{i=1}^m K_{j,i}, \quad V = \bigcup_{j=1}^n K_j \setminus U$$

Sind $U \cap V = \emptyset \Rightarrow m$ EW in U , $n - m$ in V

43 Stabilitätsatz

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit n linear unabhängige EV, $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$
 $\Rightarrow \forall \lambda_B$ EW von $B \exists \lambda_A$ EW von A :
 $|\lambda_A - \lambda_B| \leq \text{cond}_2(W) \|A - B\|_2$
 $W = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ EV von A

44 Potenzmethode *, inverse Iteration *

Verfahren, um einen (nicht alle) EW zu finden

44.1 Potenzmethode

$$\begin{aligned} \zeta &\in \mathbb{C}^n & ||\zeta_0|| &= 0 & t &\geq 1 \\ \tilde{\zeta}_t &= A_{\zeta_{t-1}} & \zeta_t &= \frac{\tilde{\zeta}_t}{||\tilde{\zeta}_t||_t} & \lambda_t &:= \frac{\tilde{\zeta}_t^t}{\zeta_t^t} & \zeta_t^t &\neq 0 \end{aligned}$$

44.2 Rayleigh-Quotient

A diagonalisierbar mit $|\lambda_n| > |\lambda_i|$

$$\lambda_t = \frac{\langle \zeta_t, A \zeta_t \rangle}{\langle \zeta_t, \zeta_t \rangle}$$

44.3 Inverse Iteration

A quadratisch $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathbb{R}$ s.d.:

1. $q_k = \frac{x_{k-1}^t}{||x_{k-1}||}$
 2. Löse $(A - \theta E)x_k = q_k$ ($A - \theta E$) regulär
- EW ergibt sich mit Rayleigh-Quadratur: $\lambda_k = \frac{x_k^t A x_k}{x_k^t x_k}$

45 Hessenberg-Normalform

$\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} \exists$ Folge T_i von Householder-Matrizen, so dass:

$i = 1, \dots, n - 2$

TAT^t Hessenberg-Matrix ist

45.1 Hessengerg-Matrix

$H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $h_{i,j} = 0 \forall i > j + 1$

$$H = \begin{pmatrix} h_{1,1} & \dots & \dots & \dots & h_{1,n} \\ h_{2,1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{pmatrix}$$

alle Einträge unterhalb der ersten Nebendiagonalen sind 0 (obere H-Matrix) analog definiert man untere H-Matrix

sowohl obere als auch untere H-Matrix

\Rightarrow Tridiagonalmatrix

46 QR-Verfahren

Berechnung aller EW einer quadratischen Matrix $A_1 = A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$A_t = Q_t R_t \rightarrow A_{t+1} = R_t^* Q_t = Q_{t+1}^* R_{t+1} \rightarrow \cdots \rightarrow A_{t+n}$ Diagonalmatrix
für die im QR-Verfahren erzeugten Matrix A_t gilt:

$$\{\lim_{t \rightarrow \infty} a_{j,j}^{(t)} | j = 1, \dots, n\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$