UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Universität Heidelberg

Analysis 1

Prof. Dr. Peter Albers

Wintersemester 17/18

by Charles Barbret

last modified: 24 Januar, 2018

Inhaltsverzeichnis

0 Ablauf der Vorlesung

0.1 Moodle

Modle passwort: Ableitung

0.2 Übungsbetrieb

Donnerstags kommen die neuen Zettel
Zettel sollen in Zweiergruppen abgegeben werden
Abgabeschluss ist Donnerstags 09:15 im Mathematikon bei den Briefkästen
Das erste Blatt wird spätestenz am 19.10.2017 veröffentlicht

0.3 Plenarübung

Donnerstags 16:00 bis 18:00 im KIP HS1
Erste Plenarübung findet bereits am 19.10.2017

0.4 Klausur

50% der Gesamtpunkte der Aufgabenblätter und einmal vorgerechnet haben.

Klausurtermine: 23.02.2018 09:00 bis 13:00 Uhr und 9.4.2018 09:00 bis 13:00 Uhr

Nicht erscheinen bei der ersten Klausur ohne Abmeldung gilt als 5.0, man kann dann aber immer noch in die Nachklausur.

1 Grundlagen

1.1 Mengen und Aussagen

Definition 1.1:

Eine <u>Menge</u> ist eine Zusammenfassung von wohldefinierten und wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte heißen <u>Elemente</u> der Menge.
<u>wohlbestimmt</u>: Von jedem Objekt steht fest, ob es Element der Menge ist oder nicht
<u>wohl unterschieden</u>: Jedes Objekt kommt höchstens einmal in der Menge vor

Beschreibung der Menge	a) Durch Aufzählung $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ b) Durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft in Form einer Aussage, d.h. eines Satzes, von dem eindeutig feststeht, ob er wahr oder falsch ist. Der Wahrheitsgehalt muss zum gegebenen Zeitpunkt nicht bekannt sein. Bsp A(u):= u ist eine Primzahl (D.h. $u \geq 2$) c) Durch Beschreibung der Elemente

Definition 1.2:

Es sein M und N Mengen

[...]

Bemerkung "oder" bedeutet das einschließliche oder, also nicht "entweder ... oder ..." → Wahrheitstabellen

Seien A und B Aussagen. Wir leiten ab [1]

A	B	A und B	A oder B	"Entweder A oder B"
w	w	w	w	f
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

Implikation zwischen Aussagen

A ⇒ B	steht für: A impliziert B
	Falls A gilt, dann gilt auch B
	A ist hinreichende Bedingung für B
	B ist notwendige Bedingung für A

Formal definieren wir A ⇒ B ist wahr, falls ¬ A oder B

D.h.

A	B	A ⇒ B
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Außerdem kürzen wir ab:

A ⇔ B steht für A ⇒ B ∧ A ⇐ B

Beispiel:

[...]

Bemerkung:

Für alle Mengen M gilt $\emptyset \subset M$

$\forall M : \emptyset \subset M$.

[1] w = wahr, f = falsch

2 Reelle Zahlen [übersprungen]

3 Folgen

Definition 3.1: Folge komplexer Zahlen

Eine Folge komplexer Zahlen ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} a :& \mathbb{N} \to \mathbb{C} \\ & n \to a(n) = a_n \end{aligned}$$

Notation $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Analog: $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, ... = (a_n)_{n \geq n_0}$
Heißt soviel wie, eine Folge hängt von einem Term n ab, wodurch man eine Bijektion zwischen (a_n) und den Natürlichen Zahlen

3.1 Konvergent und Grenzwert

Definition 3.2: Konvergente Folgen

1. Eine Folge $a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent, falls $a \in \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft existiert:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

   Dann heißt a Grenzwert oder Limes von (a_n).

   Schreibweise: $a_n \to a, a_n \xrightarrow{n \to \infty} a$
   $\lim a_n = a, \lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

2. Hat eine Folge keinen Grenzwert, heißt sie divergent.

3. Gilt $a_n \to 0$, so heißt (a_n) Nullfolge.

WICHTIG Die Aussagen "für alle bis auf endlich viele Folgenglieder" und "für unendlich viele Folgenglieder" sind nicht äquivalent.

Lemma 3.1:

a) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

b) Jede konvergente Folge ist beschränkt: $\exists s \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq s$

Satz 3.1: Regeln für n-te Wurzel

a) Für $a \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3.2 Rechenregeln für Grenzwerte

Lemma 3.2:

Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann sind $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{C}, (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n * b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und, falls $b \neq 0 : (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Heißt soviel wie, sollten die Folgen jeweils konvergieren, kann man die Grenzwerte miteinander verrechnen und skalieren.

Lemma 3.3:

Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen. Es gelte $a_n \leq b_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$
Dann gilt: $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Hiermit können wir Folgen abschätzen, was manchmal ganz hilfreich sein kann.

Lemma 3.4: Sandwich-Lemma

Es seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit:

(i) (a_n) und (c_n) sind konvergent mit: $\lim a_n = \lim c_n$

(ii) Für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq b_n \leq c_n$

Dann ist (b_n) konvergent mit: $\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n$
Wenn wir eine Minorante und Majorante finden können, mit dem gleichen Grenzwert, so konvergiert die Folge gegen den selben Grenzwert

3.3 Häufungspunkt, Cauchy-Folge, Teilfolgen

Definition 3.3:

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt monoton wachsend, falls gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$$

Monoton Fallend analog.

Satz 3.2: Monotoniekriterium

Jede beschränkte monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} & \text{falls monoton wachsend} \\ \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Monoton + Beschränkt = Konvergent

Definition 3.4: Häufungspunkte

Sei (a_n) eine Folge. Dann heißt $a \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt der Folge, falls gilt:
$\forall \varepsilon > 0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$
für unterschiedlich viele $n \in \mathbb{N}$
Heißt soviel wie: wenn Teilfolgen konvergieren, sind die Grenzwerte der Teilfolgen die Häufungspunkte der Folge.

Definition 3.5: Teilfolge

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $\forall l \in \mathbb{N} : n_{l+1} > n_l$. Dann heißt $(a_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Lemma 3.5: Häufungspunkte

$a \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine konvergente Teilfolge $(a_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_l} = a$.

Also genau was ich gemeint hatte.

Satz 3.3: Q dicht in R

$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$

Lemma 3.6:

Jede Folge reeller Zahlen besitzt eine monotone Teilfolge.

Heißt, bei jeder Folge reeller Zahlen kann man sich vereinzelnd Elemente raus suchen, welche eine monotone Teilfolge bilden.

Satz 3.4: Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{R}$

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge

Gilt natürlich auch in komplexen Zahlen.

Definition 3.6: Cauchy-Folge

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt Cauchy-Folge, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Satz 3.5: Cauchy Kriterium

Die Folge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn (a_n) eine Cauchy-Folge ist. Bemerkung Es gibt Cauchy-Folgen (a_n) mit $a_n \in \mathbb{Q} \forall n \in \mathbb{N}$ die nicht gegen eine rationale Zahl konvergieren.

Als Beispiel eine Folge die gegen e konvergiert, da $e \notin \mathbb{Q}$

3.4 Limes superior und Limes inferior

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, d.h. $\exists s \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{R} : |a_n| \leq s$. Beobachtung Sei $B_n := \sup\{a_k | k \geq n\}$
$b_n := \inf\{a_k | k \geq n\}$

Dann ist die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Außerdem gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \leq B_n; |b_n|, |B_n| \leq s$

Also konvergieren (b_n) und (B_N) mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} B_n$

Definition 3.7: lim sup und lim inf

Wir definieren:

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} B_n$ limes superior

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ limes inferior

Definition 3.8:

Falls es eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt ist, definieren wir $\sup A := +\infty$.
Falls es eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach unten beschränkt ist, definieren wir $\inf A := -\infty$.

Außerdem setzen wie $\sup \emptyset := -\infty, \inf \emptyset := +\infty$.

Wir setzen: $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty \equiv \infty$.

Definition 3.9: Bestimmt Divergent

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$, falls gilt: $\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 = n_0(K) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \geq K$
Eine Folge (a_n) heißt bestimmt divergent gegen $-\infty$, falls $(-a_n)$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

Satz 3.6:

Die Folge (a_n) sei bestimmt divergent gegen $\pm\infty$ Dann gilt:

(i) $a_n \neq 0$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

Satz 3.7:

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Dann divergiert die Folge $(\frac{1}{a_n})$ bestimmt gegen $+\infty$.

Analog für $a_n < 0$ gegen $-\infty$

Satz 3.8: Charakterisierung von limsup und liminf

Es sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen

1. Es gilt $\limsup a_n = a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt

   (i) $a_n < a + \varepsilon$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$

   (ii) $a_n > a - \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

   Heißt das Supremum a_n ist nur dann kleiner als der Grenzwert, wenn man etwas unendlich kleines an den Grenzwert addiert. Es ist größer als der Grenzwert sobald man etwas vom Grenzwert abzieht.

2. Es gilt $\liminf a_n = a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon < 0$ gilt:

   (i) $a_n > a - \varepsilon$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$

   (ii) $a_n < a + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

   Ähnliche Erklärung wie oben auch.

3. (a_n) ist genau dann Konvergent, wenn $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

4 Stetige Funktionen und die Topologie des $\mathbb{R}^n$

Definition 4.1:

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Teilmenge. Eine reelwertige bzw komplexwertige Funktion auf D ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ bzw $f : D \to \mathbb{C}$

Für zwei Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) definieren wir

(f + g)(x) := f(x) + g(x) $\quad \forall x \in D$

(f - g)(x) := f(x) - g(x) $\quad \forall x \in D$

(f * g)(x) := f(x) * g(x) $\quad \forall x \in D$

und falls gilt: $g(x) \neq 0 \forall x \in D$, $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$

Definition 4.2: Endlicher Abstand

Der endliche Abstand zweier Punkte $x = (x_1, ..., x_n)$ und $y = (y_1, ..., y_n)$ des $\mathbb{R}^n$ ist

$$|x - y| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - x_n)^2)^{\frac{1}{2}}$$

4.1 Stetigkeit

Definition 4.3: $\varepsilon - \delta -$**Kriterium**

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) heißt <u>stetig in $x_0 \in D$</u>, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0 \in D : |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f heißt <u>stetig</u> in D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist.

Heißt soviel wie für jeden Abstand den 2 Folgeglieder [f(x) nach f(y)] von einander haben muss es einen Abstand zwischen x und y geben. Was nicht erfüllt werden kann, wenn die Funktion an x_0 bzw einer Stelle springt.

Satz 4.1: Folgenkriterium

$f : D \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig in $x^* \in D$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$ gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x^*) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$

Satz 4.2: Stetige Funktionen verknüpft sind Stetig

Es seien $f, g \in D \to \mathbb{C}$ stetig in $x^* \in D$ Dann sind $f \pm g, f * g$ und falls $g(x) \neq 0 \forall x \in D \frac{f}{g}$ stetig in x^*.

Satz 4.3: Komposition stetiger Funktionen sind Stetig

Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ und $g : E \to \mathbb{C}$ mit $f(D) \subset E$ gegeben. Ist f stetig in $x^* \in D$ und g stetig in $y^* := f(x^*) \in E$, so ist auch $g \circ f$ stetig in x^*

$$\begin{array}{lll} D & \xrightarrow{f} f(D) \in E & \xrightarrow{g} \mathbb{C} \\ x^* & \to f(x^*) = y^* & \to g(y^*) \end{array}$$

Definition 4.4: Lipschitz-Stetig

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt Lipschitz-Stetig mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, falls gilt: $\forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

4.2 Offen und abgeschlossene Mengen

Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Dann ist $B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq r\}$ der (abgeschlossene) Ball um a mit Radius r.

Um jede Menge im $\mathbb{R}^n$ kann man einen Kreis/Ball ziehen mit Radius r um alle Elemente der Menge M einzuschließen.

Definition 4.5: Randpunkt von M

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt von M, falls gilt:

$$\forall r > 0 : B_r(p) \cap M \neq \emptyset \neq B_r(p) \cap (\mathbb{R}^n \backslash M)$$

Ein Punkt p heißt Randpunkt, wenn man Kreise/Bälle um den Punkt ziehen kann, dass Teil des Kreises/Balls in der Menge liegt

Definition 4.6: Offene Mengen

a) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls $M \cap \delta M = \emptyset$ gilt.

b) M heißt abgeschlossen, falls $\delta M \subset M$ gilt.

Wobei δM den Rand von M beschreibt $\Rightarrow$ Eine Menge ist offen, wenn M vereinigt mit dem Rand leer ist und abgeschlossen, falls der Rand eine Teilmenge von M ist

Lemma 4.1: Offen

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann offen, wenn gilt:

$$\forall p \in M \exists r > 0 : B_r(p) \subset M$$

Heißt M ist offen, wenn für jeden Punkt aus der Menge einen Kreis/Ball ziehen kann mit einem Radius größer 0, der ganz in der Menge ist - Ginge bei abgeschlossenen Mengen nicht, da wenn man einen Punkt am Rand wählt gibt es kein r für den der ganze Kreis/Ball in der Menge ist

Korollar 4.1:

[Offene Mengen bestehen aus Offenen Bällen] Jede offene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Vereinigung offener Bälle.

$$\forall p \in M \exists r_p > 0 : \mathring{B}_{r_p}(p) \subset M$$

$$\Rightarrow M = \bigcup_{p \in M} \mathring{B}_{r_p}(p) =: RHS$$

Heißt um jeden Punkt zieht man ein Kreis dessen Radius größer 0 ist, nimmt dann alle Elemente in den Kreisen und steckt sie in die Menge M

Lemma 4.2: Abgeschlossen

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Für alle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in M \forall n \in \mathbb{N}$; $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \to a$ gilt mit $a \in M$
Heißt, die Menge ist abgeschlossen wenn es keine Folge gibt, dessen Grenzwert außerhalb der Menge liegt

Satz 4.4:

a) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.
   Formulierung 1: Es sei $\mathcal{U} \subset P(\mathbb{R}^n)$ mit $\forall U \in \mathcal{U} : U$ ist offen
   $\Rightarrow \bigcup \mathcal{U} := \{x \in \mathbb{R}^n | \exists U \in \mathcal{U} : x \in U\} \subset \mathbb{R}^n$ ist offen
   Formulierung 2: Es sei I eine (Index-)Menge $\forall i \in I$ sei $U_i \subset \mathbb{R}^n$ offen
   $\Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} U_i \subset \mathbb{R}^n$ ist offen

b) Belibige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen
   Formulierung 1: Es sei $\mathcal{A} \subset P(\mathbb{R}^n) : \forall A \in \mathcal{A} : A$ ist abgeschlossen
   $\Rightarrow \bigcap \mathcal{A} := \{x \in \mathbb{R}^n | \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ ist abgeschlossen
   Formulierung 2: Es sei I eine (Index-)Menge $\forall i \in I$ sei $A_i \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen
   $\Rightarrow \bigcap\limits_{i \in I} A_i \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen.

Definition 4.7: Innen und Abschluss

Das Innere $\mathring{M}$ einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mathring{M} := M \backslash \delta M$.
Der Abschluss $\overline{M}$ ist $\overline{M} := M \cup \delta M$.
Heißt das Innere einer Menge M wird beschrieben als M ohne dem Rand.
Der Abschluss einer Menge ist M vereinigt mit dem Rand

Lemma 4.3:

1. $\mathring{M}$ ist die größte offene Teilmenge, die in M enthalten ist.

$$M \backslash \delta M = \mathring{M} = \bigcup \{U | U \subset M \text{ und U offen}\}$$

   Dadurch, dass $\mathring{M}$ die Menge M ohne dem Rand ist, ist es die größte offene Teilmenge von M

2. $\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge, die M enthält.

$$M \cup \delta M = \overline{M} = \bigcap \{A | A \supset M \text{ und A abgeschlossen}\}$$

   Dadurch, dass $\overline{M}$ die Menge M mit dem Rand ist, ist es die kleinste abgeschlossene Teilmenge von M

Korollar 4.2:

Es sei M eine Menge. Dann gilt:

a) M offen $\Leftrightarrow M = \mathring{M}$

b) M abgeschlossen $\Leftrightarrow M = \overline{M}$

Definition 4.8: Topologie des $\mathbb{R}^n$

Die Topologie des $\mathbb{R}^n$ ist das Mengensystem

$$\mathcal{T} := \{U \subset \mathbb{R}^n | \text{U offen}\}$$

die Menge der offenen Mengen

4.3 Kompaktheit und die Existenz von Extrema

Definition 4.9: Beschränkt und Kompakt

1. Eine Menge $M \in \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn gilt: $\exists s > 0 : M \subset B_s(0)$
   D.h. $\forall x \in M : |x| \leq s$.

2. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, falls jede Folge in M eine konvergente Teilfolge mit Limes in M besitzt
$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in M \forall n \in \mathbb{N} \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_l} = x \in M$

Satz 4.5: Heine-Borel

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz 4.6:

Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann existiert max K und min K.

Satz 4.7:

Das stetige Bild einer Kompakten Menge ist kompakt

D.h. Es sei $f : K \to \mathbb{R}$(oder $\mathbb{C}$) eine stetige Funktion und $K \in \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist $f(K) \subset \mathbb{R}$(oder $\mathbb{C}$) kompakt.

Korollar 4.3:

[Existenz von Extrema] Es sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f ein Maximum und ein Minimum an. D.h
$\exists x_{min}, x_{max} \in K : \min f := f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) =: \max f \forall x \in K$

4.4 Zusammenhang und Zwischenwertsatz

Definition 4.10: Zusammenhängend

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, falls es keine offenen Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit:

(i) $M \cap U_1 \neq \emptyset \neq M \cap U_2$

(ii) $M = (M \cap U_1) \cup (M \cap U_2)$

(iii) $(M \cap U_1) \cap (M \cap U_2) \neq \emptyset$

Definition 4.11: Wegzusammenhängend

Eine Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^n$ heißt wegzusammenhängend, falls es für alle $x, y \in W$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ gibt mit $\gamma([0,1]) \subset W$ und $\gamma(0) = x$ sowie $\gamma(1) = y$. Die Abbildung γ nennt man in dieser Situation einen Weg von x nach y in W.

Heißt man kann einen Weg innerhalb der Menge finden, für den man nie außerhalb die Menge muss um von jedem Punkt der Menge zu jedem Punkt der Menge zu gelangen. Außerdem gilt Zusammenhängend $\subset$ Wegzusammenhängend, und es ist meist leichter Wegzusammenhängend zu zeigen.

Satz 4.8:

Es sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$M \text{ ist ein Intervall} \Leftrightarrow \forall a, b \in M \text{ mit } a < b : [a, b] \subset M$$

Satz 4.9:

Die Zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle:
$M \subset \mathbb{R}$ Zusammenhängend $\Leftrightarrow$ M ist ein Intervall

Satz 4.10: Offen und Abgeschlossen

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ sei gegeben. Dann heißt $M \subset D$ offen in D, falls es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $M = D \cap U$ gilt.

Analog mit M ist abgeschlossen in D, falls eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $M = D \cap A$

Lemma 4.4:

Die Teilmenge $M \subset D$ ist genau dann offen in D, wenn gilt:

$$\forall x \in M \exists r > 0 : B_r(x) \cap D \subset M$$

Beweis als Hausaufgabe, kam in VL 18 vor.

Lemma 4.5: stetig = Urbild offener Mengen sind offen

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben.

f ist stetig $\Leftrightarrow \forall U \in \mathbb{R}$ offen : $f^{-1}(U) \subset D$ ist offen in D.

Lemma 4.6: Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $D \subset \mathbb{R}^n$ Zusammenhängend
$\Rightarrow f(D) \subset \mathbb{R}$ ist Zusammenhängend.

Satz 4.11: Zwischenwertsatz

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f alle Werte zwischen f(a) und f(b) an.
D.h. $f([a, b]) \supset [f(a), f(b)]$ falls gilt $f(a) \leq f(b)$
$f([a, b]) \supset [f(b), f(a)]$ falls gilt $f(b) \leq f(a)$

Korollar 4.4:

Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat eine Nullstelle

D.h. $f(x) = a_n * x^n + ... + a_1 * x + a_0$ mit $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ und n ungerade, dann $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0$

Definition 4.12: (Streng-) Monoton Steigend

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton steigend, falls gilt:

$$\forall x, y \in [a, b] : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \text{ bzw für streng } x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Analog für (streng) monoton fallend

Satz 4.12:

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton steigend. Dann ist $f : [a, b] \to [f(x), f(y)]$ bijektiv und f^{-1} ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.

Analog für streng monoton fallend.

5 Differenzialrechnung

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in D$ für eine Funktion $f : D \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ schreiben wir: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \in \mathbb{R}$, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \backslash \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D \backslash \{x_0\} : x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} c$$

5.1 Differenzeierbarkeit

Definition 5.1: Differenzierbar

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f Differenzierbar in $x_0 \in I$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

Dann heißt $f'(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := \frac{d}{dx} f(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Die Ableitung von f in x_0. f heißt Differenzierbar auf I, falls f in jedem Punkt von I Differenzierbar ist. Die Ableitung von f ist die Funktion:

$$\begin{aligned} f' : & I \to \mathbb{R} \\ & x \to f'(x) \end{aligned}$$

Definition 5.2: Tangente

Tangente an (Graphen von) f in x_0 ist $x \to f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Definition 5.3: Rechtsseitiger und Linksseitiger Limes

Für $f : T \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ definieren wir den rechtsseitigen bzw linksseitigen Limes:

$\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = c$ falls: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I \backslash \{x_0\} : x \geq x_0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = c$ falls: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I : x_0 \geq x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$

Hierzu war als Hausaufgabe zu beweisen, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert in Vorlesung 19. (Das ist Teil eines Beispieles)

Lemma 5.1:

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Differenzierbar in $x_0 \in I$, falls es eine Funktion $\Delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

a) Δ stetig in x_0

b) $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) * \Delta(x) \; \forall x \in I$

Satz 5.1: Differenzierbar $\Rightarrow$ stetig

Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Differenzierbar in $x_0 \in I$, dann ist f stetig in x_0

5.2 Differentationsregeln

Im folgenden seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Differenzierbar in x_0:
$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\Delta_f(x)$
$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)\Delta_g(x)$
mit Δ_f, Δ_g stetig in x_0

Satz 5.2:

$\lambda f, \lambda \in \mathbb{R}$, und $f \pm g$ sind Differenzierbar in x_0 mit
$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$
$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

Satz 5.3: Produktregel/Leibniz-Regel

$f * g$ sind Differenzierbar in x_0 mit
$(f * g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Satz 5.4: Quotientenkriterium

Sei $g(x_0) \neq 0$. Dann ist $g(x) \neq 0$ für alle x in der Nähe von x_0 und $\frac{f(x)}{g(x)}$ ist Differenzierbar mit:
$(\frac{f(x)}{g(x)})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Satz 5.5: Kettenregel

Es seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen auf den Intervallen $I, J \subset R$ mit $f(I) \subset J$. Falls f Differenzierbar in x_0 und g Differenzierbar in y_0 mit $y_0 := f(x_0)$ so ist $g \circ f$ Differenzierbar in x_0 mit:
$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) * f'(x_0)$.

Satz 5.6:

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton, stetig und in $x_0 \in [a, b]$ Differenzierbar mit $f(x_0) \neq 0$ Dann ist die nach Satz 4.12 wohldefinierte Umkehrabbildung f^{-1} in $y_0 := f(x_0)$ Differenzierbar mit:
$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

5.3 Mittelwertsatz und die Existenz von Extrema

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow C^0(I) &:= \{f : I \to \mathbb{R} | f \text{ stetig}\} \\ C^1(I) &:= \{f : I \to \mathbb{R} | f \text{ ist stetig Differenzierbar}\} \end{aligned}$$

Dabei heißt f stetig Differenzierbar, falls f Differenzierbar und $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig ist.
falls f' Differenzierbar, so heißt f 2-fach Differenzierbar.
Wir schreiben $f^{(2)}(x) := f''(x) := (f')'(x)$ 2-te Ableitung.
Analog: $f^{(k+1)}(x) := (f^{(k)})'(x)$ falls diese Ableitung existiert.
f heißt k-fach stetig Differenzierbar, falls $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ existiert und stetig ist.
$\rightsquigarrow C^k(I) := \{f : I \to \mathbb{R} | f$ k-fach stetig Differenzierbar$\}$

Definition 5.4: Lokales Maximum/Minimum

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in I$ ein lokales Minimum/Maximum, falls gilt: $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \cap I : f(x) \leq f(x_0)$ bzw $f(x) \geq f(x_0)$

Satz 5.7: Notwendiges Kriterium für Extrema

$f : I \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in \mathring{I}$ ein Extremum und sei in x_0 diff'bar. Dann gilt $f'(x_0) = 0$

Satz 5.8: Satz von Rolle

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) diff'bar. Es gilt f(a) = f(b). Dann existiert $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$

Satz 5.9: Mittelwertsatz

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) diff'bar. Es gilt f(a) = f(b). Dann existiert $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Korollar 5.1:

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ diff'bar.

a) Aus $m \leq f'(x) \leq M \ \forall x \in I$ folgt: $\forall a, b \in I$ mit $a < b$ gilt: $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

b) f' $= 0 \Rightarrow$ f Konstant

c) Aus $f'(x) > 0 \forall x \in I$ folgt, dass f streng monoton wachsend ist
Analog für $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

Satz 5.10: Hinreichendes Kriterium für Extrema

Es sei $f \in C^2(I)$ und $a \in I$ mit $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0($ bzw. $< 0)$. Dann hat f in a ein lokales Minimum (bzw. Maximum)

Satz 5.11: Verallgemeinerter Mittelwert

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf (a, b). Es gilt $g(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Dann folgt: $g(a) \neq g(b)$ und $\exists x_0 \in (a, b)$ mit: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$
Beweis als Hausaufgabe, kam in VL 21 vor.

Satz 5.12: Regel von l'Hospital

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf (a, b) diff'bar mit $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Außerdem sei $f(b) = g(b) = 0$. Dann gilt $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls dieser Limes existiert.

Eigentlich gilt das auch für $f(b) = g(b) = \infty$

6 Reihen

Definition 6.1: n-te Partialsumme und (Unendliche) Reihen

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann heißt $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$ die n-te Partialsumme. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt (unendliche) Reihe. Das Symbol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ bedeutet.

1. $(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge der Partialsummen
2. Falls die Folge der Partialsummen konvergiert, so bezeichnet $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ den Limes. Dann heißt die Reihe konvergent, sonst divergent

6.1 Konvergenzkriterien

Rechenregeln (Lemma 3.2):
$\sum\limits_{k} a_k, \sum\limits_{k} b_k$ konvergent sind:

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \lambda \in \mathbb{C}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Cauchy-Kriterium für Folgen (Satz 3.5) auf Folgen der Partialsumme angewendet: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : |\sum\limits_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$

Korollar 6.1:

Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k a_k$ konvergiert, so ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Satz 6.1:

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ mit $a_k \geq 0$ für alle bis auf endlich viele $k \in \mathbb{N}$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe (= Folge von Partialsummen) beschränkt ist

Heißt wenn die Reihe beschränkt ist (basically Konvergiert) und die Folgenelemente $a_k \geq 0$ sprich man nie etwas abzieht, dann konvergiert die Reihe auch. Wir wissen auch, dass damit die Reihe konvergieren kann, die Folge eine Nullfolge sein muss.

Satz 6.2: Leibnitz-Kriterium

Es sei (a_n) eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen mit $\lim a_n = 0$
Dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent.

Definition 6.2: Absolut Konvergent

Eine Reihe $\sum a_k$ heißt absolut konvergent, falls $\sum |a_k|$ konvergent ist.

Satz 6.3: Majorantenkriterium

Es sei $\sum b_k$ absolut konvergent und $\sum a_k$ eine Reihe mit $a_k \leq b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\sum a_k$ absolut konvergent. Die Reihe $\sum b_k$ heißt Majorante.

Satz 6.4: Quotientenkriterium

Es sei $\sum a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

1. Falls $q \in (0,1)$ mit $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ existiert, so konvergiert die Reihe absolut

2. Falls $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \geq 1$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, so divergiert $\sum a_k$

6.1.1 Umordnung und absolute Konvergenz

Es sei $\sum a_k$ eine Reihe und $\tau : \mathbb{N} \xrightarrow{\cong} \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann heißt die Reihe $\sum\limits_k a_{\tau(k)} - \ddot{a}_{\tau(1)} + a_{\tau(2)} + a_{\tau(3)} + ...$ eine Umordnung der Reihe $\sum a_k$

Satz 6.5: Absolute Konvergenz bei Umordnung

Es sei $\sum a_k$ absolut konvergent. Dann gilt $\sum\limits_k a_{\tau(k)}$ ebenfalls als absolut konvergent mit: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$

Satz 6.6:

Es sei $\sum a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent

a) $\forall c \in \mathbb{R} \exists \tau : \mathbb{N} \xrightarrow{\cong} \mathbb{N}$ Bijektion mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)} = c$

b) $\exists \tau : \mathbb{N} \xrightarrow{\cong} \mathbb{N}$ Bijektion mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)} = +\infty (oder - \infty)$ (divergiert bestimmt)

c) $\exists \tau : \mathbb{N} \xrightarrow{\cong} \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ ist divergent (und nicht bestimmt divergent)

6.2 Die Exponentialreihe

Definition 6.3: Exponentialreihe

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir $\exp(z) \equiv e^z := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ die Exponentialreihe an der Stelle z.

Satz 6.7: Konvergenz der Exponentialreihe

Die Exponentialreihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$

Satz 6.8: Restgliedabschätzung

Es gilt für $\exp(z) =: \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!} + R_{N+1}(z)$ die Abschätzung: $|R_{N+1}(z)| \leq \frac{2|z|^{N+1}}{(N+1)!}$ falls $|z| \leq 1 + \frac{N}{2}(bzw. N \geq 2(|z|+1))$

Satz 6.9: Cauchy-Produkt von Reihen

Es seien $\sum a_k, \sum b_k$ absolut konvergent. Wir definieren die Reihe $\sum c_k$ durch: $c_k := a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_k b_0 = \sum\limits_{l=0}^{k} a_l * b_{k-l}$ Dann ist $\sum c_k$ absolut konvergent, und es gilt: $(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k)*(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ (Produkt von Limes [Limes ist der Plural von Limes, I GOOGLED IT AND IT'S STUPID]) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\sum\limits_{l=0}^{k} a_l * b_{k-l})$

Satz 6.10: Funktionalgleichung für exp

$\forall z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\exp(z+w) = \exp(z) * \exp(w) \Leftrightarrow e^{z+w} = e^z * e^w$

Korollar 6.2:

a) $\exp(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}; e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

b) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$

c) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : e^n = \exp(n)$