0.1 Norm

Definitheit: $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$
absolute Homogenität: $||\alpha x|| = |\alpha| * ||x||$
Dreiecksungleichung: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

0.2 Skalarprodukt

$$\left.\begin{array}{l} < x+y, z >=< x, z > + < y, z > \\ < x, y+z >=< x, y > + < x, z > \\ < \lambda x, y >= \lambda < x, y > \\ < x, \lambda y >= \lambda < x, y > \end{array}\right\} \text{Linearität}$$

$< x, y >=< y, x >$

$$\left.\begin{array}{l} < x, x >\geq 0 \\ < x, x >= 0 \Rightarrow x = 0 \end{array}\right\} positivDefinitheit$$

1 Symmetrische, positiv definite Matrix

positiv definit: $x^t Ax > 0$ (beliebige Matrix)
alle EW > 0 (symmetrische Matrix)

1.1 Natürliche Matrixnorm

$||A||_\infty := \max\limits_{x \neq 0} \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = \max\limits_{||x||=1} ||Ax||_\infty$
$||A|| = 0 \Rightarrow A = 0$
$||\lambda A|| = |\lambda| * ||A||$
$||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
$||A * B|| \leq ||A|| * ||B||$

1.2 Zeilensummennorm

= natürliche Matrixnorm
$||A||_\infty = \max\limits_{||x||_\infty = 1} ||Ax||_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

1.3 Spaltensummennorm

$||A||_1 := \max\limits_{x \neq 0} \frac{||Ax||_1}{||x||_1} = \max\limits_{||x||_1 = 1} ||Ax||_1 = \max\limits_{j=1,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

1.4 Spektralnorm

$$
\begin{aligned}
A||_2 &:= \max_{||x||_2=1} ||Ax||_2 \\
&= \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} \\
&= \max_{||x||_2=1} < Ax, Ax > \\
&= \max_{||x||_2=1} < A^t Ax, x > \\
&= max\sqrt{|\lambda|}, \lambda * EW von A^t A
\end{aligned}
$$

1.5 Konditionszahl einer Matrix A

$cond(A) = ||A|| * ||A^{-1}||$

1.6 Sonderfall symmetrisch, positiv definite Matrix

$cond(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

1.7 Gleitkommazahl (normalisiert)

$b \in \mathbb{N}, b \geq 2, x \in \mathbb{R}$
$x = \pm m * b^{\pm e}$
Mantisse: $m = m_1 b^{-1} + m_2 b^{-2} + ... \in \mathbb{R}$
Exponent: $e = e_{s-1} b^{s-1} + ... + e_0 b^0 \in \mathbb{N}$
für $x \neq 0$ eindeutig

1.8 Gleitkommagitter

$A = A(b, r, s)$ größte Darstellbare Zahl: $(1 - b^{-r}) * b^{b^s - 1}$
mit b als Basis, r als Mantissenlänge, s als Exponentenlänge

1.9 Maschienengenauigkeit eps

$eps = \frac{1}{2} b^{-r+1}, IEEE : eps = \frac{1}{2} * 2^{-52} \approx 10^{-16}$

1.10 Rundungsfehler

$absolut : |x - rd(x)| \leq \frac{1}{2} b^{-r} b^e$
$relativ : |\frac{x - rd(x)}{x}| \leq \frac{1}{2} b^{-r+1} = eps$

1.11 Fehler I

f$\in C^{n+1}$[a, b], $\forall$ x $\in$ [a, b] $\exists \xi_x \in (\overline{x_0, ..., x_n, x})$, wobei das Intervall das kleinst mögliche Intervall, das alle x_i enthällt, s.d.

$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$

1.12 numerische Aufgabe

$x_j \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1, ..., x_m) \Rightarrow y_i = f_i(x_j)$

fehlerhafte Eingangsgrößen $x_i + \Delta y_i$

$|\Delta y_i|$ ist der absolute Fehler, $|\frac{\Delta y_i}{y_i}|$ ist der relative Fehler

1.13 Konditionszahl (relativ)

$k_{ij}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\frac{\Delta x_j}{x_j}$

$\frac{\Delta y_i}{y_i} = \sum_{j=1}^{m} k_{ij}(x)\frac{\Delta x_j}{x_j}$

$|k_{ij}(x)| >> 1 \Rightarrow$ schlecht konditioniert

$|k_{ij}(x)| << 1 \Rightarrow$ gut konditioniert, ohne Fehlerverstärkung

$|k_{ij}(x)| > 1 \Rightarrow$ Fehlerverstärkung

$|k_{ij}(x)| < 1 \Rightarrow$ Fehlerdämpfung

1.14 stabiler Algorithmus

akkumulierte Fehler der Rechnung (Rundungsfehler, Auswertungsfehler, etc.) übersteigen den unvermeidbaren Problemfehler der Konditionierung der Aufgabe nicht. Aka Trotz Ungenauigkeiten bei den Eingabe Variablen erhalten wir fast sehr genaue Ergebnisse.

2 Auslöschung

Verlust von Genauigkeit bei der Subtraktion von Zahlen mit gleichem Vorzeichen

3 Horner-Schema*

Das sogenannte "Horner-Schema"

$b_n = a_n$, k = n - 1, ..., 0 $b_k = a_k + \xi b_{k+1}$ liefert den Funktionswert $p(\xi) = b_0$ des Polynoms

$p(x) = a_0 + x(... + x(a_{n-1} + a_n x)...)$

3.1 Code

```
def horner(Ac, Ax, n, x):
    y = 0.0
    for i in reversed range(n):
        y = y * (x - Ax[i]) + Ac[i]
    return y
```

Ac: Vektor mit Koeffizienten, ist ein np Array
Ax: Stützstellen, ist ein np Array
n: Anzahl der Stützstellen, ist ein int
x: Auswertungspunkt, ist ein double
Immer Horner-Schema zur Auswertung von Polynomen verwenden.

3.2 Interpolation

Zuordnung von $g \in P$ zu f durch Fixieren von Funktionswerten
$g(x_i) = y_i = f(x_i), i = 0, ..., n$

3.3 Approximation

$g \in P$ beste Darstellung, z.B.
$\max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| minimal$
$(\int\limits_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} minimal$

3.4 Lagransche Darstellung

$p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i L_i^{(n)}(x) \in P_n$ mit $p(x_j) = y_j$

Nachteil: Bei Hinzunahme von (x_{n+1}, y_{n+1}) ändert sich das Basispolynom komplett

3.4.1 Newton-Polynome

Bei Hinzunahme von (x_{n+1}, y_{n+1}) muss nur eine neue Rechnung durchgeführt werden, und nicht das gesamte Polynom neu berechnet werden

3.5 Dividierte Differenzen*

$y[x_i, ..., x_{k+1}] = \frac{y[x_{i+1},...,x_{k+1}]-y[x_i,...,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$ mit k = 1, ..., j und i = k - j

für beliebige [?] $\sigma : 0, ..., n \to 0, ..., n$ gilt $y[\tilde{x_0}, ..., \tilde{x_n}] = y[x_0, ..., x_n]$

3.6 Extrapolationsfehler

a(n) habe die Entwickling:

$a(h) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j h^{jq} + a_{n+1}(h)h^{(n+1)q}$ mit q > 0, Koeffizienten a_j

und $a_{n+1}(h) = a_{n+1} + a(1[?????])$

$(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erfülle:

$0 \leq \frac{h_{k+1}}{h_k} \leq p < 1$ ($\Rightarrow h_k$ positiv monoton fallend)

Dann gilt für $p_1^{(k)} \in P_n$ (in h^q) durch $(h_k^q, a(h_k))$, ..., $(h_{k+n}^q, a(h_{k+1}))$

$a(0) - p_n^{(k)}(0) = O(h_k^{(n+1)q})$ $(k \to \infty)$

3.7 Kubischer Spline

$s_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ kubischer Spline bezüglich $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, wenn gillt

1. $s_n \in C^2[a, b]$
2. $S_n|_{I_i} \in P_3$, i = 1, ..., n

natürlicher Spline:

3. $s_n''(a) = s_n''(b) = 0$

4 Gauß-Approximation

$< f, g >:= \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$ $||f|| = \sqrt{< f, f >}$

H Prähilbertraum, $\delta \subset H$ endlich Dimensional

$\exists f \in H$ eindeutig bestimmte "beste Approximation" $g \in S$

$||f - g|| = \min_{\varphi\in S} ||f - \varphi||$

bes. einfache Lösung, wenn $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ eine ONB ist, d.h.

$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{i,j} \Rightarrow \alpha_i =< f, \varphi_i >$ i = 1, ..., n

$\Rightarrow g = \sum_{i=1}^{n} < f, \varphi_i > \varphi_i$ ist beste Approximation

5 Gram-Schmidt-Algorithmus

$w_1 := \frac{v_1}{||v_1||}$ $\tilde{w_k} := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma < v_k, w_i > w_i$, $w_k := \frac{\tilde{w_k}}{||\tilde{w_k}||}$

5.1 Code

```
n = size(v, 1)
    k = size(v, 2)
    u = np.zeros(n, k)
    u[:, 1] = v[:, 1]/sqrt(v[:, 1] * v[:, 1])
    for i in range(2, k):
        u[:, i] = v[:, i]
        for j in range(1, i - 1):
            u[:, i] = u[:, i] - (u[:, i] * u[:, j]) / (u[:, j] * u[:, j]) * u[:, j]
        u[:, i] = u[:, i] / sqrt(u[:, i] * u[:, i])
```

5.2 Darstellung des Interpolationsfehler

Sei $f \in C^{n+1}[a, b]$. Dann gibt es zu jedem $x \in [a, b]$ ein $\xi_x \in (x_0, ..., x_n, x)$, so dass gilt:

$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$

6 Interpolatorische Quadraturformeln

$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx I^{(n)}(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$

Stützstellen a $\leq a_0 < x_1 < ... < x_n \leq b$ und Gewichte $\alpha_i \in \mathbb{R}$

6.1 Newton-Cotes-Formel*

äquidistante Stützstellen

6.2 Abgeschlossene Formeln

$H = \frac{b-a}{n}, x_i = a + iH, a = x_0, b = x_n$

Trapezregel: $I^{(1)}(f) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$

Simpsonregel: $I^{(2)}(f) = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$

$^3/_8 - Regel : I^{(3)}(f) = \frac{b-a}{8}[f(a) + 3f(a + H) + 3f(b - h) + f(b)]$

6.3 Offene Formeln

$(H = \frac{b-a}{n+2}, x_i = a + (i+1)H, a < x_0, x_n < b)$

$I^{(0)}(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ Mittelpunktregel

$I^{(1)}(f) = \frac{(b-a)}{2}(f(a+H) + f(b-H))$

$I^{(2)}(f) = \frac{(b-a)}{3}(2f(a+H) - f(\frac{a+b}{2}) + 2f(b-H))$

6.4 Code

6.5 Abhilfe: Summierte Quadraturformeln *

$I - n^{(n)}(f) = \sum_{i=1}^{N-1} I^{(n)}_{[x_i, x_i+1]}(f)$ $h = \frac{b-a}{N}, x_i = a + iH$

6.6 Gauß-Quadratur

∃! interpolierte Quadraturformel [?] (n + 1) paarweise verschiedene Stützstellen auf [-1, b] mit Ordnung 2n + 2. Stützstellen = Nullstellen

$\alpha_i = \int_{-1}^{1} \prod_{j=0, j\neq i} (\frac{x-\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j})^2 dx > 0^1,$ i = 0, ..., n

$f \in C^{2n+2}([-1,1]) Restglied:$

$R^{(n)} = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-1}^{1} \prod_{j=0}^{n} (x - \lambda_j)^2 dx,$ $\xi \in (-1, 1)$

6.7 Kongergenz der Gauß-Quadraturen

Sei $I^{(n)}(f)$ die (n + 1) punktige [?] Gauß-Formel zu $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \forall f \in C[-1,1] : I^{(n)}(f) \xrightarrow{n\to\infty} I(f)$

7 Legendre Polynome *

Die Legendre Polynome $L_n \in P_n$ bzw, ihre Vielfachen p_n lassen sich auf $[-1,1]$ in der Form $p_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ schreiben und genügen der rekursiven Bezeichnung

$p_0(x) \equiv 1$, $p_1(x) \equiv x$

$p_{n+1}(x) = xp_n(x) - \frac{n^2}{4n^2-1}p_{n-1}(x)$ für $n \geq 1$

[1] Positivität der Gewichte

8 Ordnung von Quadraturformeln *

Eine Quadraturformel $I^{(n)}(\cdot)$ wird "(mindestens) von der Ordnung m" genannt, wenn durch sie wenigstens alle Polynome aus p_{m-1} exakt integriert werden Die interpolatorische Quadraturformel $I^{(n)}(\cdot)$ zu n + 1-Stützstellen sind also mindestens von der Ordnung n + 1

8.1 Störungssatz

$A \in \mathbb{K}^{nxn}$ regulär mit $||\delta A|| \leq \frac{1}{||A^{-1}||}$, dann gilt für die

8.2 gestörte Matrix

$\tilde{A} = A + \delta A$ ist regulär

Für den relativen Fehler der Lösung gilt mit Konditionszahl von A:

$cond(A) = ||A|| * ||A^{-1}||$

die Ungleichung:

$\frac{||\delta_x||}{||x||} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A)\frac{||\delta A||}{||A||}} \left[\frac{||\delta b||}{||b||} + \frac{||\delta A||}{||A||} \right]$