**Aussagenlogik (AL)** :

- Syntax vs. Semantik
- syntaktische und semantische Grundbegriffe der AL (Junktoren, Formeln, Belegungen, Wahrheitsfunktionen (= Boolesche Funktionen))
- zentrale logische Begriffe (Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, Folgerungs- und Äquivalenzbegriff) und Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen
- Zusammenhang Formeln - Boolesche Funktionen: von einer Formel definierte Boolesche Funktion, Verfahren zur Bestimmung der disjunktiven Normalform (DNF) und konjunktiven Normalform (KNF), aussagenlogische vs. Boolesche Formeln, Basen der Booleschen Funktionen.

**Kalküle** :

- Idee, Anforderungen an und Bestandteile von Kalkülen, Beweise und Beweisbarkeit (aus T), elementare Eigenschaften von Beweisen und Beweisbarkeit, Korrektheit und Vollständigkeit logischer Kalküle, Korrektheitslemma
- Korrektheit (mit Beweisidee) und Vollständigkeit des Shoenfield-Kalküls für AL
- Kompaktheitssatz für AL.

**Syntax und Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe** :

- syntaktische und semantische Grundbegriffe der PL (Strukturen und deren Signatur, Sprachen und deren Signatur
- Terme, Formeln und Sätze und deren Interpretation in Strukturen
- Theorien, Modellbegriff (Modelle und Modellklassen))
- zentrale logische Begriffe (Erfüllbarkeit (von Formeln und Formelmengen), Allgemeingültigkeit, Folgerungs- und Äquivalenzbegriff, Tautologien = aussagenlogisch gültige Formeln) und Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen.

**Der Shoenfield-Kalkül für PL** :

- Korrektheitssatz: Beweisidee und Folgerungen (Konsistenzlemma)

- Vollständigkeitssatz: was versteht man unter einer zulässigen Regel bzw. einem zulässigen Axiom?, was besagt das Deduktionstheorem?, Erfüllbarkeitslemma (EL), wie folgt der Vollständigkeitssatz aus dem EL?, Beweisidee des EL (was ist eine Termstruktur?, Lemma und Satz über Termstrukturen, was ist eine Henkin-Theorie?, Aussage der Sätze von Lindenbaum und über Henkin-Erweiterungen)
- Kompaktheitssatz (für Folgerungsbegriff und für die Erfüllbarkeit - mit Beweis).

**Definierbarkeit in PL1** :

- Elementare und $\Delta$-elementare Strukturklassen - Eigenschaften hiervon
- Beispiele hierzu (Mengen unterschiedlicher Mächtigkeiten, Ordnungen, Gruppen und Körper; Arithmetik)
- Isomorphie und elementare Äquivalenz
- negative Definierbarkeitsergebnisse: z.B. Nicht-$\Delta$-Ele-mentarität der endlichen Strukturen (Satz über die Existenz unendlicher Modelle), Nicht-Elementarität der unendlichen Strukturen, Nicht-$\Delta$-Elementari-tät der Wohlordnungen, sowie der Satz von Skolem (jeweils mit Beweisideen)
- die Prädikatenlogik 2. Stufe
- Definierbarkeit in PL2 (Endlichkeit und Arithmetik - Beweisidee!)
- warum gibt es keinen Kalkül für PL2 (Begründung)?

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Aussagenlogik

## 1.1 *Sprache (der Aussagenlogik)

Besteht aus 3, 5 oder mehr (je nachdem welche Sprache betrachtet wird) Bausteinen:

1. Aussagenvariablen: $A_0, A_1, ...$
2. Junktoren 1-Stellig: $\neg$ <br> 2-Stellig: $\wedge, \vee, \rightarrow \leftrightarrow$
3. Klammern und Komma

Bei der Prädikatenlogik kommen dann noch dazu:

4. Existenzquantor
5. Gleichzeichen

In den $\mathcal{L}$-Sprachen kommen noch dazu:

6. Relationszeichen
7. Funktionszeichen
8. Konstantensymbol(e)

Das Alphabet $A_{AL}$ ist die Menge der Symbole
$A^*$ ist die Menge der Wörter (wobei jedes Wort endlich viele Symbole hat) und das leere Wort $\lambda$

## 1.2 *Formeln

**(F1)** Alle $A_n (n \geq 0)$ sind Formeln

**(F2)** $\varphi$ al. Formel $\Rightarrow \neg\varphi$ al. Formel

**(F3)** $\varphi_1, \varphi_2$ al. Formeln $\Rightarrow (\varphi_1 \odot \varphi_2)$ mit $\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow \leftrightarrow\}$ al. Formel

| | |
|---|---|
| Länge von $\varphi$: | $l(\varphi) :=$ Anzahl der Zeichen |
| | $lz(\varphi) :=$ Anzahl der Junktoren |
| Anderes zu $\varphi$ | $\rho(\varphi) :=$ Schachtelungstiefe der Junktoren |
| | $V(\varphi) :=$ Anzahl der Aussagenvariablen |
| | $TF(\varphi) :=$ Anzahl der Teilformeln |
| | F(V) $:= \{\varphi : V(\varphi) \subseteq V\}$ Menge der al. Formeln, die Variablen aus V enthalten |

## 1.3 *Prinzip der syntaktischen Induktion

(i) E Eigenschaft trifft auf jede Aussagenvariable A zu
Heißt wir Zeigen es gilt für Aussagenvariablen

(ii) Trifft E auf al. Formel $\varphi$ zu $\Rightarrow$ E trifft auf $\neg\varphi$ zu
E gilt für die Formel und dessen Negation

(iii) E trifft auf $\varphi_1, \varphi_2$ zu $\Rightarrow$ E trifft auf $(\varphi_1 \bigodot \varphi_2)$ mit $\bigodot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow \leftrightarrow\}$ zu
Gilt E für $\varphi_1, \varphi_2$ so gilt es auch für deren Verknüpfungen

## 1.4 *!Belegung

Die Belegung B der Variablenmenge V ist Abbildung $B : V \to \{0, 1\}$
B(V) Menge aller Belegungen von V
$|B(V)| = 2^{|V|}$

## 1.5 *Bewertung

Die zur Belegung $B : V \to \{0, 1\}$ gehörende Bewertung $\widehat{B}$

1. $\varphi \equiv A : \widehat{B}(A) := B(A)$
2. $\varphi \equiv \neg\psi : \widehat{B}(\neg\psi) := f_\neg(\widehat{B}(\psi))$
3. $\varphi \equiv (\varphi_1 \bigodot \varphi_2) := f_{\widehat{B}}(\widehat{B}(\varphi_1), \widehat{B}(\varphi_2))$

## 1.6 *!Koinzidenzlemma

**AL Formeln** Seien $B_i : V_i \to \{0, 1\}, i = 0, 1,$ Belegung, sei $\varphi$ eine al. Formel deren Aussagenvariablen in $V_0$ und $V_1$ liegen und stimmen $B_0$ und $B_1$ auf den in $\varphi$ vorkommenden Variablen überein (Was soviel heißt wie jede Variable aus $V_0$ wird durch $B_0$ einen Wert zugewiesen, und jede Variable aus $V_1$ wird durch $B_1$ einen Wert zugewiesen. Jetzt müssen die Variablen in $\varphi$ vorkommen in $V_0$ und $V_1$ vorkommen und deren Belegungen müssen gleich sein.) $\Rightarrow \widehat{B}_0(\varphi) = \widehat{B}_1(\varphi)$

**$\mathcal{L}$-Strukturen** $\mathcal{A}\mathcal{L}$-Struktur, t $\mathcal{L}$-Term, $V = \{x_1, ..., x_n\}, V' = \{x'_1, ..., x'_n\}$ Variablenmenge mit $V(t) \subseteq V, V'$ und B, B' Belegungen in $\mathcal{A}$ sodass $B \restriction V(t) = B' \restriction V(t) \Rightarrow t^{\mathcal{A}}_B = t^{\mathcal{A}}_{B'}$

**$\mathcal{L}$-Formeln** $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $\varphi\mathcal{L}$-Formel, $V = \{x_1, ..., x_m\}, V' = \{x'_1, ..., x'_m\}$ Variablenmengen mit $FV(\varphi) \subseteq V, V'$ und B, B' Belegungen in $\mathcal{A}$ s.d. $B \restriction FV(\varphi) = B' \restriction FV(\varphi) \Rightarrow W^{\mathcal{A}}_B(\varphi) = W^{\mathcal{A}}_{B'}(\varphi)$

## 1.7 *Zentrale semantische Begriffe

| | |
|---|---|
| $\varphi$ allgemeingültig/ag$[\varphi]$ | $\Leftrightarrow \forall$ Belegungen B: $V(\varphi) \to \{0,1\}$ gilt $B(\varphi) = 1$ |
| $\varphi$ erfüllbar/erfb$[\varphi]$ | $\Leftrightarrow \exists$ Belegungen B: $V(\varphi) \to \{0,1\}$ mit $B(\varphi) = 1$ |
| $\varphi$ kontradiktorisch/kd$[\varphi]$ | $\Leftrightarrow \forall$ Belegungen B: $V(\varphi) \to \{0,1\}$ gilt $B(\varphi) = 0$ |

## 1.8 *Boolesche Gesetze

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \wedge B$ äq $B \wedge A$ und $A \vee B$ äq $B \vee A$ | Kommutativgesetz |
| 2. | $A \wedge (B \wedge C)$ äq $(A \wedge B) \wedge C$<br>$A \vee (B \vee C)$ äq $(A \vee B) \vee C$ | Assoziativgesetz |
| 3. | $A \vee A$ äq $A$ äq $A \wedge A$ | Idempotenz |
| 4. | $A \wedge (B \vee C)$ äq $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$<br>$A \vee (B \wedge C)$ äq $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | Distributivgesetz |
| 5. | $A \wedge (A \vee B)$ äq $A$ äq $A \vee (A \wedge B)$ | Absorptionsgesetz |
| 6. | $\neg(A \wedge B)$ äq $\neg A \vee \neg B$<br>$\neg(A \vee B)$ äq $\neg A \wedge \neg B$ | De Morgan |

## 1.9 Ein/Ersetzungsregel

**Formel Einsetzungsregel** Ist al. Formel $\varphi$ allgemeingültig, dann auch $\varphi[\psi/A]$, die aus $\varphi$ durch ersetzen aller vorkommenden A in $\varphi$ durch $\psi$ entsteht

Wir haben eine Formel $\varphi$, welche allgemeingültig ist und die Aussagenvariable A enthält. Jetzt können wir jedes in $\varphi$ vorkommende A durch eine neue Formel $\psi$ ersetzen

**Formel Ersetzungsregel** $\varphi \leftrightarrow \psi$ allgemeingültig $\Rightarrow$ $\chi \leftrightarrow \chi(\psi/\varphi)$ allgemeingültig

**Regeln** Sei Regel R korrekt bezüglich Folgerungen $\Rightarrow$ R korrekt bezüglich Allgemeingültigkeit

| | |
|---|---|
| Einsetzungsregel: | (EIN) $\frac{\varphi}{\varphi[\psi/x]}$ |
| Ersetzungsregel: | (ERS) $\frac{\chi}{\chi[\varphi/\psi]}$ falls $\varphi$ äq $\psi$ |

## 1.10 Substitutionsregel

$sub(\chi, \varphi, \psi)$ Menge aller Varianten $\chi(\psi/\varphi)$

Ist $\varphi \equiv \chi \Rightarrow sub(\chi, \varphi, \psi) = \{\chi, \psi\}$

| | | |
|---|---|---|
| sonst | $\chi \equiv A$ | $sub(\chi, \varphi, \psi) = \{\chi\}$ ($\varphi$ keine Teilformel von $\chi$) |
| | $\chi \equiv \neg\chi_1$ | $sub(\chi, \varphi, \psi) = \{\neg\chi_1^* : \chi_1^* \in sub(\chi_1, \varphi, \psi)\}$ |
| | $\chi \equiv \chi_1 \odot \chi_2$ | $sub(\chi, \varphi, \psi) = \{\chi_1^* \odot \chi_2^* : \chi_i \in sub(\chi_1, \varphi, \psi)\}$ |

## 1.11 *!Erfüllbarkeit von Formelmengen

$T \neq \emptyset$ nicht leere Menge al. Formeln mit Variablenmenge V(T)

(i) Belegung B: $V(T) \to \{0,1\}$ macht T wahr ($B \vDash T$), falls B alle $\varphi \in T$ wahr macht, d.h. $\forall \varphi \in T : B(\varphi) = 1$

(ii) T erfüllbar (erfb[T]) $\Leftrightarrow \exists B$ von V(T), T wahrmacht
$\Rightarrow$ erfb[T] $\Leftrightarrow \exists B \in B(V(T)) : B \vDash T$
$\Leftrightarrow \exists B \in B(V(T)) \forall \varphi \in T : B(\varphi) = 1$
$\Leftrightarrow T = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ : erfb[T] $\Leftrightarrow$ erfb[$\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$]

## 1.12 *!Semantischer Folgerungsbegriff

Eine al. Formel $\varphi$ folgt aus einer Menge T von al. Formeln ($T \vDash \varphi$) $\Leftrightarrow$ jede Belegung $B \in V(T) \cup V(\varphi)$, die T wahr macht, macht auch $\varphi$ wahr, d.h. $\forall B \in B(V(T) \cup V(\varphi)[B \vDash T \Rightarrow B \vDash \varphi]$

Für Einelementige T gilt:$\{\varphi\} \vDash \psi \Leftrightarrow \varphi$ impl. $\psi$
$\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vDash \psi$ kürzer geschrieben:
$\varphi_1, ..., \varphi_n \vDash \psi : \varphi_1, ..., \varphi_n \vDash \psi \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ impl. $\psi$

Hierbei gilt, der semantische Folgerungsbegriff ist monoton, d.h.
$T \subseteq T'$ und $T \vDash \varphi \Rightarrow T' \vDash \varphi$

## 1.13 *Erfüllbarkeit vs die Welt

**vs Folgerung** (i) $T \vDash \varphi \Leftrightarrow$ nicht erfb $[T \cup \{\neg\varphi\}]$

(ii) $T \nvDash \varphi \Leftrightarrow$ erfb$[T \cup \{\neg\varphi\}]$

**vs Semantische Folgerung** Für $T \neq \emptyset$ sind äquivalent:

(i) erfb[T]

(ii) $\nexists \varphi[T \vDash \varphi$ und $T \vDash \neg\varphi]$

(iii) $\exists \varphi[T \nvDash \varphi]$

## 1.14 AL Formel als Funktion

$\varphi$ al. Formel mit $V(\varphi) \subseteq \{A_0, ..., A_{n-1}\}$

Die von $\varphi$ dargestellte n-Stellige Boolesche Funktion $f_{\varphi,n}$ ist definiert durch $f_{\varphi,n}(i_0, ..., i_{n-1}) = \widehat{B}_{i_0,...,i_{n-1}}(\varphi)$
mit $B_{i_0,...,i_{n-1}} : \{A_0, ..., A_{n-1}\} \to \{0,1\}, B_{i_0,...,i_{n-1}}(A_j) = i_j \ (j = 0, ..., n-1)$

## 1.15 *DNF

Eine Boolesche Formel $\varphi$ ist in disjunktiver Normalform (DNF), wenn $\varphi$ die endliche Disjunktion von $\wedge$-Klauseln ist: $\varphi \equiv \kappa_1 \vee ... \vee \kappa_m (m \geq 1)$

Allgemeines Verfahren um DNF anzugeben: Tabelle Aufstellen, alle Terme $x_0$ bis $x_n$ ver-und-en, wobei wenn der Term $x_i$ 0 ist wird die Negation verwendet wird

Beispiel:

| $x_0$ | $x_1$ | Formel |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $\neg x_0 \wedge \neg x_1$ |
| 0 | 1 | $\neg x_0 \wedge x_1$ |
| 1 | 0 | $x_0 \wedge \neg x_1$ |
| 1 | 1 | $x_0 \wedge x_1$ |

## 1.16 *KNF

Boolesche Formel $\varphi$ ist in KNF, wenn $\varphi$ endliche Konjunktion von $\vee$-Klauseln, $\varphi \equiv S_1 \wedge ... \wedge S_m$ mit $m \geq 1$

Im großen und ganzen nur cooles Trivia wissen, man braucht fast immer die DNF

## 1.17 Darstellungssatz

Jede n-stellige Boolesche Funktion kann effektiv als eine Formel $\varphi$ in DNF dargestellt werden.

Heißt man hat eine Funktion, nachdem man die Variablen eingesetzt hat, findet man eine Formel $\varphi$ in DNF sodass $f_{\varphi,n}(i_0, ..., i_{n-1}) = \widehat{B}_{i_0,...,i_{n-1}}(\varphi)$

Analog KNF

## 1.18 Folgerung aus Darstellungssatz

Basis der Booleschen Funktionen:
Menge $\{f_1, ..., f_k\}$ von Booleschen Funktionen, sodass sich jede Boolesche Funktion über $f_1, ..., f_k$ definieren lässt.
Basis M ist minimal $\Leftrightarrow$ keine echte Teilmenge von M eine Basis ist

## 1.19 1. Basissatz

Die Booleschen Funktionen $\{\neg, \wedge, \vee\}$ bilden eine Basis der Booleschen Funktionen

### 1.20 2. Basissatz

Folgende Mengen sind Basen der Booleschen Funktionen:

(i) $\{\neg, \vee\}$

(ii) $\{\neg, \wedge\}$

(iii) {NOR}

(iv) {NAND}

### 1.21 Normalformsatz

Zu jeder al. Formel $\varphi$ kann man eine äquivalente Formel $\varphi_{DNF}$ in DNF , sodass: $V(\varphi) = V(\varphi_{DNF})$

### 1.22 *Kalkül $\mathcal{K}$

- Sprache von $\mathcal{K}$, vom Alphabet welche von $\mathcal{K}$ festgelegt ist
- Menge der Formeln von $\mathcal{K}$, Teilmenge der Wörter über Alphabet von $\mathcal{K}$
- Menge der Axiome von $\mathcal{K}$, Teilmenge der Menge der Formeln von $\mathcal{K}$
- Menge der Regeln der Gestalt
  (R) $\frac{\varphi_1,...,\varphi_n}{\varphi}$ $n \geq 1, \varphi_1, ..., \varphi_n$ Formeln von $\mathcal{K}$ wobei $\varphi_1, ..., \varphi_n$ die Prämissen sind und $\varphi$ die Konklusion ist

### 1.23 *Beweise und Beweisbarkeit

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül aus T Menge von ($\mathcal{K}$-) Formeln ein ($\mathcal{K}$-) Beweis der ($\mathcal{K}$-) Formel $\varphi$ aus T ist endliche Folge $\psi_1, ..., \psi_n$ von ($\mathcal{K}$-) Formeln, sodass gilt:

- $\varphi \equiv \psi_n$
- $\forall \psi_m, 1 \leq m \leq n$ :
  - ist ($\mathcal{K}$-) Axiom oder
  - Eine Formel aus der Formelmenge T oder
  - Konklusion einer ($\mathcal{K}$-) Regel R, deren Prämissen in $\{\psi_1, ..., \psi_{m-1}\}$ liegen

- n ist die Länge des Beweises $\psi_1, ..., \psi_n$

Eine ($\mathcal{K}$-) Formel $\varphi$ is ($\mathcal{K}$-) beweisbar aus T, wenn es einen ($\mathcal{K}$-) Beweis von $\varphi$ aus T gibt.

NB: Jede Formel $\varphi \in T$ ist ein ($\mathcal{K}$-) Beweis (der Länge 1) aus T und damit ($\mathcal{K}$-) beweisbar aus T. $\vDash$ = beweisbar $\Rightarrow$ $\varphi$ ist ($\mathcal{K}$-) beweisbar aus T $\Leftrightarrow T \vDash K\varphi$

Außerdem gilt:

- Monotonie: Falls $T \subseteq T'$ und $T \vdash \varphi \Rightarrow T' \vdash \varphi$
- Transitivität: Gelte $T \vdash \varphi$ und $T' \vdash \psi \forall \psi \in T \Rightarrow T' \vdash \varphi$
- Endlichkeit: Falls $T \vdash \varphi \Rightarrow \exists$ endliche Teilmenge $T_0$ von T mit $T_0 \vdash \varphi$

## 1.24 *Konsistent

Kalkül $\mathcal{K}$ ist Konsistent, falls es eine $\mathcal{K}$-Formel $\psi$ mit $\nvDash \psi$ gibt

## 1.25 *Kalkül der Aussagenlogik

- Sprache basiert auf Alphabet $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, ..., j_1, ..., j_k, (,)\}$ Junktoren $j_1, .., j_k$ Basis der Booleschen Funktionen
- **(F1)** Aussagenvariable $A_i (i \geq 0)$ ist eine Formel

  **(F2)** * 1-Stelliger Junktor, $\varphi$ Formel $\Rightarrow *\varphi$ ist eine Formel

  **(F3)** * 2-Stelliger Junktor, $\varphi_1, \varphi_2$ Formeln $\Rightarrow (\varphi_1 * \varphi_2)$ ist eine Formel

## 1.26 *Korrekt und Vollständig

$\mathcal{K}$ Kalkül der Aussagenlogik

- $\mathcal{K}$ ist korrekt bezüglich der Allgemeingültigkeit, falls jede $\mathcal{K}$-beweisbare Formel $\varphi$ allgemeingültig ist, d.h. $\vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Rightarrow \vDash \varphi \forall \mathcal{K}$-Formeln $\varphi$
- $\mathcal{K}$ ist korrekt bezüglich Folgerungen, falls $T \vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Rightarrow T \vDash \varphi$ für alle $\mathcal{K}$-Formelmengen T und $\mathcal{K}$-Formeln $\varphi$
- $\mathcal{K}$ ist vollständig bezüglich der Allgemeingültigkeit, falls $\vDash \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ für alle $\mathcal{K}$-Formeln $\varphi$
- $\mathcal{K}$ ist vollständig bezüglich Folgerungen, falls $\vDash \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ für alle $\mathcal{K}$-Formelmengen T und $\mathcal{K}$-Formeln $\varphi$
- $\mathcal{K}$ ist adäquat, wenn $\mathcal{K}$ korrekt und vollständig ist, d.h. $\vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Leftrightarrow T \vDash \varphi$

## 1.27 *Korrektheitslemma

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül der Aussagenlogik, dessen Axiome allgemeingültig sind und dessen Regeln korrekt bezüglich Folgerungen sind $\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ Korrekt bezüglich Folgerungen

## 1.28 *Shoenfield

Shoenfield Kalkül S

- Basis: $\{\neg, \vee\}$, $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, ..., \neg, \vee, (, )\}$
- Identitäten:

  (i) $(\varphi \wedge \psi) :\equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

  (ii) $(\varphi \to \psi) :\equiv (\neg\varphi \vee \psi)$

  (iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi) :\equiv ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$

- Axiom: (Ax) $\neg\varphi \vee \varphi (\equiv \varphi \to \varphi)$
- Regeln:

  **Expansion (E)** $\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$

  **Assoziativität (A)** $\frac{\varphi \vee (\psi \vee \delta)}{(\varphi \vee \psi) \vee \delta}$

  **Kürzung (Kü)** $\frac{\varphi \vee \varphi}{\varphi}$

  **Schnitt (S)** $\frac{\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee \delta}{\psi \vee \delta}$

## 1.29 *Korrektheitssatz

Shoenfield-Kalkül S ist korrekt (bezüglich Folgerungen): $T \vdash_S \varphi \Rightarrow T \vDash \varphi$

## 1.30 *Vollständigkeitssätze

- Shoenfield-Kalkül S ist vollständig (bezüglich Folgerungen): $T \vDash \varphi \Rightarrow T \vdash_S \varphi$
- Für endliche T gilt: $T \vDash \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$
- Eine Theorie ist Vollständig wenn gilt: $T \vDash \sigma \Rightarrow T \vdash \sigma$

## 1.31 *Zulässige Regeln

$\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$' Kalküle mit identischen Formelmengen, $\mathcal{K}$' heißt Erweiterung von $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$', wenn alle Axiome und Regeln von $\mathcal{K}$ Axiome und Regeln von $\mathcal{K}$' sind)
Eine Erweiterung $\mathcal{K}$' ist konservativ $\Leftrightarrow \forall T \vdash_{\mathcal{K}'} \varphi \Rightarrow T \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$
Für $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}' : T \vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Rightarrow T \vdash_{\mathcal{K}'} \varphi$
Für $\mathcal{K} \subseteq_{\text{konservativ}} \mathcal{K}' : T \vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Leftrightarrow T \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$

**Kommutativität (Ko)** $\frac{\varphi \vee \psi}{\varphi \vee \psi}$

**Modus Ponens (M)** $\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$

**Verallgemeinerter Expansion (VE)** $\frac{\varphi_{i_1} \vee ... \vee \varphi_{i_m}}{\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n}; m, n \geq 1; \varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_m} \in \{\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n\}$

**Negationsregeln: (N1)** $\frac{\varphi \vee \psi}{\neg\neg\varphi \vee \psi}$

**(N2)** $\frac{\neg\neg\varphi \vee \psi}{\varphi \vee \psi}$

**(N3)** $\frac{\varphi \to \delta, \psi \to \delta}{(\varphi \vee \psi) \to \delta}$

## 1.32 *Regel Erweiterung

Eine Regel R $\frac{\varphi_1, ..., \varphi_n}{\varphi}$ ist zulässig in dem Kalkül $\mathcal{K}$ (ableitbar in $\mathcal{K}$), falls $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$
Eine Formel $\varphi$ ist ein zulässiges Axiom von $\mathcal{K}$ falls $\vdash_{\mathcal{K}} \varphi$

## 1.33 *Zulässige Erweiterung

Eine Erweiterung $\mathcal{K}$' von $\mathcal{K}$ ist eine zulässige Erweiterung, von $\mathcal{K}$ wenn jedes Axiom und jede Regel von $\mathcal{K}$' in $\mathcal{K}$ zulässig ist

## 1.34 Satz über zulässige Erweiterungen

$\mathcal{K}$' zulässige Erweiterung von $\mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{K}$' ist eine konservative Erweiterung d.h. für jede Formelmenge T und Formel $\varphi : T \vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Leftrightarrow \varphi : T \vdash_{\mathcal{K}'} \varphi$

## 1.35 Tautologiesatz

- $\vDash \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$
- (a) $\vDash_{AL} \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$

(b) $\varphi_1, ..., \varphi_n \vDash_{AL} \varphi \Rightarrow \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$

- Formel $\varphi$ ist eine Tautologie (aussagenlogisch gültig, $\vDash_{AL} \varphi$), falls $B(\varphi) = 1$ für alle al. Belegungen B

  Jede Tautologie ist allgemeingültig: $\vDash_{AL} \varphi \rightarrow \vDash \varphi$

## 1.36 *Deductionstheorem

$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow T \cup \varphi \vdash \psi$

## 1.37 *Formelmenge Konsistent

Eine Formelmenge T ist konsistent, falls Formel $\varphi$ ex. mit: $T \nvdash \varphi$ Andernfalls ist T inkonsistent

## 1.38 *Formelmenge Vollständig

Eine Formelmenge T ist vollständig, falls für jede Formel $\varphi$ gilt: $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$

## 1.39 Charakterisierungslemma

T konsistent $\Leftrightarrow$ Es gibt kein $\varphi$ mit $T \vdash \varphi$ und $T \vdash \neg\varphi$

## 1.40 *Endlichkeitslemma für Konsistenz

Eine Formelmenge T ist genau dann konsistent, wenn jede endliche Teilmenge $T_0$ von T konsistent ist

## 1.41 Lemma über Beweisbarkeit und Konsistenz

$T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$

## 1.42 *Konsistenzlemma

Jede erfüllbare Formelmenge T ist konsistent

## 1.43 *Erfüllbarkeitslemma (Modellexistenzsatz, EL)

- Jede konsistente Formelmenge T ist erfüllbar
- Jede konsistente Theorie T ist erfüllbar (d.h. besitzt ein Modell)
  Außerdem gilt: T erfüllbar $\Leftrightarrow$ T konsistent
  Sollte T zusätzlich vollständig sein gilt: $\Rightarrow \exists$ $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ mit $T = Th(\mathcal{A}) = \{\sigma : \mathcal{A} \vDash \sigma\}$

## 1.44 *Adäquatheitssätze

**Folgerungsbegriff** Für jede Formelmenge T und jede Formel $\varphi$ gilt: $T \vDash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \varphi$

**Erfüllbarkeitsbegriff** Für jede Formelmenge T gilt: T erfüllbar $\Leftrightarrow$ T konsistent

**?** $T = (\mathcal{L}, \Sigma) \vDash \sigma \Leftrightarrow T \vdash \sigma$

## 1.45 *Kompaktheitssatz/Endlichkeitssatz

**Folgerungsbegriff** Eine Formel $\varphi$ folgt genau dann aus einer Formelmenge T, wenn es eine endliche Teilmenge $T_0$ von T gibt, aus der $\varphi$ folgt: $T \vDash \varphi \Leftrightarrow$ Es gibt $T_0 \subseteq T$ endlich: $T_0 \vDash \varphi$

**Erfüllbarkeitsbegriff** erfb[T] $\Leftrightarrow$ Für alle $T_0 \subseteq T$ endlich: erfb[$T_0$]

**?** (i) Theorie T erfüllbar $\Leftrightarrow$ Jede endliche Teilmenge $T_0$ erfüllbar

(ii) Satz $\sigma$ folgt aus T $\Leftrightarrow \exists$ endliches $T_0$ aus der $\sigma$ folgt

**PL1** **(a) Kompaktheitssatz für Folgerungsbegriff** T $\mathcal{L}$-Theorie, $\sigma$ $\mathcal{L}$-Satz mit $T \vDash \sigma$, dann existiert endliche Teiltheorie $T_0 \subseteq T$ mit $T_0 \vDash \sigma$

**(b) Kompaktheitssatz für Erfüllbarkeitsbegriff** Jede endliche Teiltheorie $T_0 \subseteq T$ mit $T_0 \vDash \sigma$

Klasse $\kappa$ von $\mathcal{L}$-Strukturen ist elementar $\Leftrightarrow$ Klasse $\kappa$ und Komplement $\overline{\kappa}\Delta$-elementar

# 2 Prädikatenlogik

## 2.1 *Mathematische Struktur

Struktur $\mathcal{A}$ ist ein 4-Tupel $\mathcal{A} = (A; (R_i^{\mathcal{A}}|i \in I); (f_j^{\mathcal{A}}|j \in J); (c_k^{\mathcal{A}}|k \in K))$
Mit I, J, K beliebige Mengen für die gelten:

- A nichtleer : Universum/Träger/Individuenbereich der Struktur $\mathcal{A}$
- $\forall i \in I : R_i^{\mathcal{A}}$ $n_i$-stellige Relation auf A: Grundrelationen auf $\mathcal{A}$
- $\forall j \in J : f_j^{\mathcal{A}}$ $m_j$-stellige Funktion auf A; $f_j^{\mathcal{A}} : A^{m_j} \rightarrow A$: Grundfunktionen
- $\forall k \in K : c_k^{\mathcal{A}}$ Element von A, welche die Konstanten von A bilden

## 2.2 *Signatur

Struktur $\mathcal{A} = (A; (R_i^{\mathcal{A}}|i \in I); (f_j^{\mathcal{A}}|j \in J); (c_k^{\mathcal{A}}|k \in K))$ ist vom Typ / besitzt die Signatur: $\sigma(\mathcal{A}) = ((n_i|i \in I); (m_j|j \in J); K)$
falls $R_i^{\mathcal{A}}$ $n_i$-stellig, $f_j^{\mathcal{A}}$ $m_j$-stellig
Sofern die Struktur keine Relation/Funktion hat, kennzeichnet man das in der Signatur mit einem -

## 2.3 *Syntax

**Terme** Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\sigma)$ mit $\sigma = ((n_i|i \in I); (m_j|j \in J); K)$. Menge der ($\mathcal{L}$-)Terme ist Induktiv definiert durch:

**(T1)** Jede Variable $v_n$, jede Konstante $c_k$ ist ein Term

**(T2)** $t_1, ..., t_m \Rightarrow f_j(t_1, ..., t_m)$ ist ein Term

**Formeln und Sätze** Die Menge der ($\mathcal{L}$-)Formeln ist definiert durch:

**(F1)** (Gleichheitsformel)

(a) $t_1, t_2$ Terme $\Rightarrow t_1 = t_2$ ist eine Formel

(b) $t_1, ..., t_{n_i}$ Terme $\Rightarrow R_i(t_1, ..., t_{n_i})$ ist eine Formel

**(F2)** (Negationsformel) $\varphi$ Formel $\Rightarrow \neg\varphi$ Formel

**(F3)** (Disjunktionen) $\varphi_1, \varphi_2$ Formeln $\Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ Formel

**(F4)** (Existenzformel) $\varphi$ Formel, x Variable $\Rightarrow \exists x\varphi$ Formel

## 2.4 *Semantik

**Terme** Für konstanten $\mathcal{L}$-Term t ist $t^{\mathcal{A}} \in A$ durch Ind(t) definiert:

1. $(c_k)^{\mathcal{A}} := c_k^{\mathcal{A}}$
2. $(f_j(t_1, ..., t_{m_j}))^{\mathcal{A}} := f_j(t_1, ..., t_{m_j})^{\mathcal{A}}$

**Formeln und Sätze** $\mathcal{A}\mathcal{L}$-Struktur, $\varphi \equiv \varphi(x_1, ..., x_n)\mathcal{L}$-Formel mit $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, B Belegung von $\{x_1, ..., x_n\}$
$\Rightarrow$ Wahrheitswert $W_B^{\mathcal{A}}(\varphi) \in \{0, 1\}$ von $\varphi$ in $\mathcal{A}$ bezüglich B durch $Ind(\varphi)$ definiert:

1. $W_B^{\mathcal{A}}(t_1 = t_2) = 1$ gdw $(t_1)_B^{\mathcal{A}} = (t_2)_B^{\mathcal{A}}$
2. $W_B^{\mathcal{A}}(R_i(t_1, ..., t_{n_i})) = 1$ gdw $((t_1)_B^{\mathcal{A}}, ..., (t_{n_i})_B^{\mathcal{A}}) \in R_i^{\mathcal{A}}$
3. $W_B^{\mathcal{A}}(\neg\psi) = 1 \Leftrightarrow W_B^{\mathcal{A}}(\psi) = 0$
4. $W_B^{\mathcal{A}}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = 1$ gdw $W_B^{\mathcal{A}}(\varphi_1) = 1$ oder $W_B^{\mathcal{A}}(\varphi_2) = 1$
5. $W_B^{\mathcal{A}}(\exists y\psi) = 1$ gdw $\exists B'$ von $\{x_1, ..., x_n, y\}$, die mit B auf $\{x_1, ..., x_n\}\backslash\{y\}$ übereinstimmt und $W_{B'}^{\mathcal{A}}(\psi) = 1$

## 2.5 (Variablen-)Belegung in $\mathcal{A}$

Sei $V = \{x_1, ..., x_n\}$ Menge von Variablen und $\mathcal{A}$ $\mathcal{L}$-Struktur.
Eine (Variablen-)Belegung B von V in $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $B : V \rightarrow \mathcal{A}$

## 2.6 Wert von t

Sei $t \equiv t(\overrightarrow{x}) \equiv t(x_1, ..., x_n)\mathcal{L}$-Term, in dem höchstens Variablen $x_1, ..., x_n$ vorkommen, $B : \{x_1, ..., x_n\} \rightarrow \mathcal{A}$ Belegung der Variablen in $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$, Wert $t_B^{\mathcal{A}} \in A$ von t in $\mathcal{A}$ bezüglich Belegung B ist durch Ind(t) definiert:

1. $(x_i)_B^{\mathcal{A}} := B(x_i), (c_k)_B^{\mathcal{A}} := {c_k}^{\mathcal{A}}$
2. $(f_j(t_1, ..., t_{m_j}))_B^{\mathcal{A}} := f_j^{\mathcal{A}}((t_1)_B^{\mathcal{A}}, ..., (t_{m_j})_B^{\mathcal{A}})$

## 2.7 *($\mathcal{L}$-)Satz

Kommt in ($\mathcal{L}$-) Formel keine Variable frei vor ($FV(\varphi) = \emptyset$), dann ist $\varphi$ ein ($\mathcal{L}$-) Satz

## 2.8 *Satz ist in Struktur wahr

$\mathcal{L}$-Satz $\sigma$ ist in $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ wahr, wenn $W_B^{\mathcal{A}}(\sigma) = 1$ für die leere Variablenmenge gilt.

Man sagt für $A \vDash \sigma$, A ist Modell von sigma.

## 2.9 *Formel ist in Struktur wahr

$\mathcal{L}$-Formel $\varphi$ ist in $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ wahr, wenn $W_B^{\mathcal{A}}(\varphi) = 1$ für alle Variablenbelegungen B von $FV(\varphi)$ gilt

Man sagt für $A \vDash \varphi$, A ist Modell von phi.

## 2.10 *Allabschluss mit Formeln

Der Allabschluss $\forall\varphi$ einer Formel $\varphi$, mit freien Variablen $x_1, ..., x_n$ ist ein Satz $\forall\varphi := \forall x_1, ..., \forall x_n \varphi$, wobei Variablen $x_1, ..., x_n$ geordnet bezüglich Aufzählung

## 2.11 *Relation mit Formeln

$\varphi \equiv \varphi(x_1, ..., x_n)\mathcal{L}$-Formel mit $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$. Die von $\varphi$ auf $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ definierte n-stellige Relation $R_\varphi^{\mathcal{A}}$ ist bestimmt durch: $(a_1, ..., a_n) \in R_\varphi^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$

## 2.12 *Zentrale semantische Konzepte

**Allgemeingültigkeit**

$\mathcal{L}$-Formel $\varphi$ ist (logisch) wahr oder allgemeingültig, wenn alle $\mathcal{L}$-Strukturen Modell von $\varphi$ sind: Für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$

**Erfüllbarkeit**

(a) ($\mathcal{L}$-) Formel $\varphi$ ist erfüllbar, wenn $\varphi$ ein Modell besitzt: Es gibt eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Andernfalls ist $\varphi$ unerfüllbar.

(b) Menge $\Phi$ von $\mathcal{L}$-Formeln ist erfüllbar, wenn es eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ gibt, die Modell aller Formeln in $\Phi$ ist

**Folgerungsbegriff**

$\mathcal{L}$-Formel $\varphi$ folgt aus $\mathcal{L}$-Formel $\psi(\psi \vDash \varphi)$, wenn jedes Modell von $\psi$ auch Modell von $\varphi$ ist.

Für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}\psi \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi$

$\varphi$ und $\psi$ sind äquivalent ($\varphi$ äq $\psi$), wenn $\varphi$ und $\psi$ die selben Modelle haben

## 2.13 Formel folgt aus Menge

$\mathcal{L}$-Formel $\varphi$ folgt aus Menge $\Phi$ von ($\mathcal{L}$-) Formeln ($\Phi \vDash \varphi$), wenn jedes Modell von $\Phi$ auch Modell von $\varphi$ ist:
Für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \vDash \Phi \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi$
Die Monotonie gilt auch hier:
$\Phi \subseteq \Psi$ und $\Phi \vDash \varphi \Rightarrow \Psi \vDash \varphi$

## 2.14 Verträglichkeit von $\vDash$ und $\rightarrow$

$$\begin{aligned} \varphi_1, ..., \varphi_n \vDash \sigma \quad &\Leftrightarrow \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \vDash \sigma \\ &\Leftrightarrow \vDash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow \sigma \end{aligned}$$

## 2.15 *Erfüllbare Formelmenge

$\mathcal{L}$-Formelmenge $\Phi$ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ Es gibt keinen $\mathcal{L}$-Satz $\sigma$ mit: $\Phi \vDash \sigma$ und $\Phi \vDash \neg\sigma$

## 2.16 *Zusammenhang zwischen Folgerungs- und Erfüllbarkeitsbegriff

Für jede $\mathcal{L}$-Formelmenge $\Phi$ und jeden $\mathcal{L}$-Satz $\sigma$ gilt: $\Phi \vDash \sigma \Leftrightarrow \Phi \cup \{\neg\sigma\}$ unerfüllbar

## 2.17 Aussagenlogische Folgerung

Formen $\varphi$ ist aussagenlogische Folgerung aus Formeln
$\varphi_1, ..., \varphi_n (\varphi_1, ..., \varphi_n \vDash_{AL} \varphi)$, falls für alle al. Belegungen B gilt:
$B(\varphi_1) = ... = B(\varphi_n) = 1 \Rightarrow B(\varphi) = 1$

## 2.18 Lemma über al Folgerungen

$\varphi_1, ..., \varphi_n \vDash_{AL} \varphi \Rightarrow \varphi_1, ..., \varphi_n \vDash \varphi$

## 2.19 Substitution

$\varphi[t/x]$: alle freien vorkommen von x durch Term t ersetzen

Die Bedingung, dass man t in $\varphi$ für Variable x substituieren kann lautet: Term t heißt in Formel $\varphi$ für Variable x substituierbar, wenn keine in t vorkommende Variable $y \neq x$ in $\varphi$ gebunden vorkommt

Zusätzlich gilt noch: Sei Term t für Variable x in Formel $\varphi$ substituierbar $\Rightarrow \varphi[t/x] \rightarrow \exists x\varphi$ allgemeingültig

# 3 Ein Adäquater Kalkül der Prädikatenlogik

## 3.1 Axiome

Substitutionsaxiome:

(S1) $\varphi[t/x] \rightarrow \exists x\varphi$

Gleichheitsaxiome:

**(G1)** x = x

**(G2)** $x_1 = y_1 \wedge ... \wedge x_{m_j} = y_{m_j} \rightarrow f(x_1, ..., x_{m_j}) = f(y_1, ..., y_{m_j})$

**(G3)** $x_1 = y_1 \wedge ... \wedge x_{n_i} = y_{n_i} \rightarrow R(x_1, ..., x_{n_i}) = R(y_1, ..., y_{n_i})$

**(G4)** $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2$

$\exists$-Einführungsregeln:

($\exists$1) $\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x\varphi \rightarrow \psi}$

Falls x in $\psi$ nicht frei vorkommt.

## 3.2 Aussagenlogische Schlüsse

(AL) $\psi_1, ..., \psi_n \vDash_{AL} \varphi$ $(n \neq 0) \Rightarrow \frac{\psi_1, ..., \psi_n}{\varphi}$ in $S_{PL}$ für n = 0 ist (AL) das Axiomenschema (Hierdurch bestimmt man die Regel $\varphi$)

(AL) $\varphi$ (falls $\vDash_{AL} \varphi$) (Hierdurch bestimmt man das Axiom $\varphi$)

## 3.3 Generalisierung und Distribution

**($\forall$1)** $\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x\psi}$

**($\forall$2)** $\frac{\varphi}{\forall x\varphi}$

**($D_\exists$)** $\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi}$

**($D_\forall$)** $\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi}$

## 3.4 Ersetzung und Substitution I

**(E)** $\frac{\psi_1 \leftrightarrow \psi_1', ..., \psi_n \leftrightarrow \psi_n'}{\varphi \leftrightarrow \varphi'}$ falls $\varphi'$ aus $\varphi$ durch Ersetzen einzelner Vorkommen der Teilformeln $\psi_i$ durch $\psi_i'$ entsteht (wobei die ersetzten Teilformeln nicht ineinander liegen)

**(S2)** $\frac{\varphi}{\varphi[t_1/x_1, ..., t_n/x_n]}$ falls t für $x_i$ Substituirbar in p(S)

## 3.5 Umbenennung Gebundener Variablen

**(U)** $\varphi \leftrightarrow \varphi^*$
Falls $\varphi^*$ aus $\varphi$ durch Umbenennung gebundener Variablen entsteht. Hierbei darf bei Ersetzung einer Teilformel $\exists x \psi$ durch $\exists y \psi[y/x]$ die Variable y nicht in $\psi$ vorkommen.

## 3.6 Substitution II

($S2_\exists$) $\varphi[t_1/x_1, ..., t_n/x_n] \rightarrow \exists x_1 ... \exists x_n \varphi$ (Falls SB erfüllt)

($S2_\forall$) $\forall x_1 ... \forall x_n \varphi \rightarrow \varphi[t_1/x_1, ..., t_n/x_n]$ (Falls SB erfüllt)

($\forall 3_1$) $\frac{\varphi}{\forall \varphi}$

($\forall 3_2$) $\frac{\forall \varphi}{\varphi}$

## 3.7 Gleichheit

**(G5)** s = t → t = s

**(G6)** $t_1 = t_1' \wedge ... \wedge t_n = t_n' \rightarrow s = s'$
falls s' aus s durch Ersetzen einiger (oder auch aller) Vorkommenden der Terme $t_i$ durch entsprechende Terme $t_i'$ entsteht

**(G7)** $t_1 = t_1' \wedge ... \wedge t_n = t_n' \rightarrow (\varphi[t_1/x_1, ..., t_n/x_n] \leftrightarrow \varphi[t_1'/x_1, ..., t_n'/x_n])$
falls die Terme $t_i$ und $t_i'$ für $x_i$ in $\varphi$ Substituierbar sind

## 3.8 *Deduktionstheorem

Sei $\Phi$ Menge von Formeln, $\psi$ Formel $\sigma$ Satz. Dann gilt:
$\Phi \vdash \sigma \rightarrow \psi \Leftrightarrow \Phi \cup \{\sigma\} \vdash \psi$

## 3.9 Korollar zum Deduktionstheorem

Sei $\Phi$ Menge von Formeln, $\psi$ Formel, $\sigma_1, ..., \sigma_n$ Sätze. Dann gilt:
$\Phi \vdash \sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_n \rightarrow \psi \Leftrightarrow \Phi \cup \{\sigma_1, ..., \sigma_n\} \vdash \psi$

## 3.10 Theorie

Eine ($\mathcal{L}$-) Theorie T ist ein Paar T = $(\mathcal{L}, \Sigma)$, wobei:

- $\mathcal{L}$ eine Sprache der Prädikatenlogik: Sprache der Theorie T
- $\Sigma$ eine Menge von $\mathcal{L}$-Sätzen ist: Axiom von T

T endlich $\Leftrightarrow$ $\Sigma$ endlich

## 3.11 Modellklasse

Die Modellklasse Mod(T) einer $\mathcal{L}$-Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ ist die Menge aller $\mathcal{L}$-Strukturen, die Modell der Axiomenmenge $\Sigma$ von T sind: $Mod(T) = \{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ ist eine $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathcal{A} \vDash \Sigma\}$

- $\mathcal{A}$ Modell von T: $\mathcal{A} \vDash T$
- T erfüllbar $\Leftrightarrow$ $\Sigma$ erfüllbar, also $Mod(T \neq \emptyset)$

## 3.12 Syntaktischer Deduktiver Abschluss

Der (syntaktische) deduktive Abschluss von $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ ist:
$C_\vdash(T) = \{\sigma : \sigma \text{ist ein } \mathcal{L}\text{-Satz  und } T \vdash \sigma\}$
Semantischer Abschluss:
$C_\vDash(T) = \{\sigma : \sigma \text{ist ein } \mathcal{L}\text{-Satz und } T \vDash \sigma\}$

## 3.13 Äquivalente L-Theorien

Zwei $\mathcal{L}$-Theorien $T = (\mathcal{L}, \Sigma), T' = (\mathcal{L}, \Sigma')$ sind äquivalent $\Leftrightarrow$ $C_\vdash(T) = C_\vdash(T')$

## 3.14 Erweiterung und Konservative Erweiterung

$\mathcal{L}$'-Theorien $T' = (\mathcal{L}', \Sigma')$ ist eine Erweiterung der $\mathcal{L}$-Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)(T \subseteq T')$ falls:

(i) $\mathcal{L}$' Erweiterung von $\mathcal{L}$

(ii) für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi$ gilt: $T \vdash \varphi \Rightarrow T' \vdash \varphi$
Gilt außerdem für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi$: $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T' \vdash \varphi$ so heißt T' eine konservative Erweiterung

## 3.15 Sprachliche Erweiterung

Theorie $T' = (\mathcal{L}', \Sigma')$ heißt sprachliche Erweiterung der Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$, wenn $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ und $\Sigma = \Sigma'$

Außerdem gilt dann noch, dass T' eine konservative Erweiterung von T ist, da: Für alle $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi$ gilt: $T' \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

## 3.16 Zusätzliches zu Theorien

1. Sei $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ eine $\mathcal{L}$-Theorie, $\mathcal{L}$' eine Erweiterung von $\mathcal{L}$ um die Konstante c, $T' = (\mathcal{L}', \Sigma)$ rein sprachliche Erweiterung von T auf $\mathcal{L}$'. Dann gilt für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi$: $T' \vdash \varphi[c/x] \Leftrightarrow T \vdash \forall x \varphi (\Leftrightarrow T' \vdash \forall x \varphi)$

2. Sei $\Sigma$ Menge von $\mathcal{L}_0$-Sätzen, $\varphi \mathcal{L}_0$-Formel, c konstante von $\mathcal{L}_0$, die weder in $\varphi$ noch in $\Sigma$ vorkommt. Dann gilt: $\Sigma \vdash \forall x \varphi$

## 3.17 Konsistent/Widerspruchsfrei

Eine Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ ist konsistent oder widerspruchsfrei, falls es einen $\mathcal{L}$-Satz $\sigma$ gibt mit $T \nvdash \sigma$ Man nennt eine Theorie konsistent, wenn man mindestens einen Satz nicht beweisen kann - man kann nicht alles beweisen, sonst würde etwas vorkommen wie $T \vdash \sigma \wedge T \vdash \neg\sigma$.

## 3.18 Charakterisierungslemma für Konsistenz (LCK)

Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ ist konsistent $\Leftrightarrow \nexists$ $\mathcal{L}$-Satz $\sigma : T \vdash \sigma$ und $T \vdash \neg\sigma$

## 3.19 Lemma über Zusammenhang zwischen Beweisbarkeit und Konsistenz

(i) $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\forall\varphi\}$ inkonsistent

(ii) $T \nvdash \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\forall\varphi\}$ konsistent

für Satz $\sigma$ ist Allabschluss $\forall\sigma = \sigma \Rightarrow$ für Sätze gilt: $T \vdash \sigma \Leftrightarrow T \cup \{\neg\sigma\}$ inkonsistent

## 3.20 Relation $\sim$

Relation $\sim \subseteq K_{\mathcal{L}} * K_{\mathcal{L}}$ ist gegeben durch: $t \sim t' \Leftrightarrow T \vdash t = t'$
$K_{\mathcal{L}}$ = Menge aller konstanten $\mathcal{L}$-Terme

### 3.21 *!Termstruktur (Termmodell)

Die Termstruktur (Termmodell) $\mathcal{A}_T = (A_T; (R_i^{\mathcal{A}_T} : i \in I); (f_j^{\mathcal{A}_T} : j \in J); (c_k^{\mathcal{A}_T} : k \in K))$ von T ist gegeben durch:

- $A_T := K_T = \{\overline{t} : t \in K_{\mathcal{L}}\}$ wobei $\overline{t} = \{t' \in K_{\mathcal{L}} : t' \sim t\}$
- $(\overline{t_1}, ..., \overline{t_{n_i}}) \in R_i^{\mathcal{A}_T} \Leftrightarrow T \vdash R_i(t_1, ..., t_{n_i})$
- $f_j^{\mathcal{A}_T}(\overline{t_1}, ..., \overline{t_{n_i}}) := \overline{f_j^{\mathcal{A}_T}(t_1, ..., t_{n_i})}$
- $c_k^{\mathcal{A}_T} := \overline{c_k}$

### 3.22 Wohldefinierte L-Struktur

Falls Sprache $\mathcal{L}$ zumindest eine Konstante besitzt (d.h. $K \neq \emptyset$), so ist $\mathcal{A}_T$ eine wohldefinierte $\mathcal{L}$-Struktur und es gilt: $\forall t \in K_{\mathcal{L}} : t^{\mathcal{A}_T} = \overline{t}$

### 3.23 Lemma über Termmodelle

Sei $K \neq \emptyset$. Dann gilt für atomare $\mathcal{L}$-Sätze $\sigma$: $\mathcal{A}_T \vDash \sigma \Leftrightarrow T \vdash \sigma$

### 3.24 Syntaktisch Vollständige Theorie

$\mathcal{L}$-Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ ist (syntaktisch) vollständig, falls für jeden $\mathcal{L}$-Satz $\sigma$ gilt: $T \vdash \sigma$ oder $T \vdash \neg\sigma$

- Theorie T ist konsistent und vollständig, dann gilt für jeden $\mathcal{L}$-Satz entweder $T \vdash \sigma$ oder $T \vdash \neg\sigma$
- konsistente vollständige Theorie heißt maximal vollständig

### 3.25 *Henkin-Theorie

$\mathcal{L}$-Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ ist eine Henkin-Theorie, falls es für jeden $\mathcal{L}$-Existenzsatz $\exists x\varphi$ einen konstanten $\mathcal{L}$-Term t gibt mit: $T \vdash \exists x\varphi \rightarrow \varphi[t/x]$

### 3.26 Satz über Termmodelle

Sei $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ konsistent, vollständig und eine Henkin-Theorie. Dann gilt für alle $\mathcal{L}$-Sätze $\sigma$: $\mathcal{A}_T \vDash \sigma \Leftrightarrow T \vdash \sigma$ Insbesondere $\mathcal{A}_T$ ist Modell von T

## 3.27 Satz von Lindenbaum (PL)

Sei $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ eine konsistente Theorie, wobei $\mathcal{L}$ abzählbar ist.
$\Rightarrow$ Es gibt eine vollständige und konsistente $\mathcal{L}$-Theorie $T_V = (\mathcal{L}, \Sigma_V)$ mit $\Sigma \subseteq \Sigma_V$
Definition von $\Sigma_V$ durch Erweiterungen $\Sigma_n$ von $\Sigma$

$$\Sigma_0 := \Sigma$$

$$\Sigma_{n+1} \begin{cases} \Sigma_n & \text{falls } \Sigma_n \vdash \sigma_n \\ \Sigma_n \cup \{\neg\sigma_n\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Sigma_V := \bigcup_{n \geq 0} \Sigma_n$$

## 3.28 *Satz über Henkin-Erweiterungen

Sei $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ Theorie über abzählbarer Sprache $\mathcal{L}$. Es gibt eine Erweiterung $T_H = (\mathcal{L}_H, \Sigma_H)$ von T mit folgenden.
Eigenschaften:

(i) $T_H$ ist eine Henkin-Theorie

(ii) $T_H$ ist eine konservative Erweiterung von T

(iii) $\mathcal{L}_H$ ist abzählbar

## 3.29 Henkin-Erweiterung T-H

1-Schritt der Henkin-Erweiterung $T^* = (\mathcal{L}^*, \Sigma^*)$ ist definiert durch

- $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c_\sigma : \sigma\mathcal{L}\text{-Satz der Gestalt } \sigma \equiv \exists x\varphi\}$
- $\Sigma^* = \Sigma \cup \{\exists x\varphi \to \varphi[c_{\exists x\varphi}/x] : \exists x\varphi\mathcal{L}\text{-Satz}\}$ mit $c_{\exists x\varphi}$ Henkin-Konstante und $\exists x\varphi \to \varphi[c_{\exists x\varphi}/x]$ Henkin-Axiome

$\Rightarrow$ definiere $T_n = (\mathcal{L}_n, \Sigma_n)$ durch Induktion

$$\begin{aligned} T_0 &= (\mathcal{L}_0, \Sigma_0) := T \\ T_{n+1} &= (\mathcal{L}_{n+1}, \Sigma_{n+1}) := (T_n)^* = ((\mathcal{L}_n)^*, (\Sigma_n)^*) \\ \Rightarrow T_H &= (\mathcal{L}_H, \Sigma_H) \text{ mit } \mathcal{L}_H := \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{L}_n \text{ und } \Sigma_H := \bigcup_{n \geq 0} \Sigma_n \end{aligned}$$

## 3.30 Satz von Löwenheim

$T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ erfüllbare Theorie, $\mathcal{L}$ abzählbar
$\Leftrightarrow$ T besitzt ein abzählbares Modell

### 3.31 Satz für endliche Sprachen

$\mathcal{L}$ endliche Sprache $\Rightarrow$ Menge allgemeingültiger $\mathcal{L}$-Formeln auf zählbar

# 4 Theorien und Modelle

## 4.1 Deduktiver Abschluss

Deduktiver Abschluss C(T) einer Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ ist Menge aller aller Folgerungen aus T: $C(T) = \{\sigma : T \vDash \sigma\}$
$T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ deduktiv abgeschlossen, falls $\Sigma = C(T)$

## 4.2 Monotonie des Deduktiven Abschlusses

$T = (\mathcal{L}, \Sigma), T' = (\mathcal{L}, \Sigma')\mathcal{L}$-Theorien. Dann gilt: $\Sigma \subseteq \Sigma' \Rightarrow C(T) \subseteq C(T')$

## 4.3 Eigenschaften über C(T)

$T = (\mathcal{L}, \Sigma)\mathcal{L}$-Theorie. Dann gilt:

(i) $\Sigma \subseteq C(T)$

(ii) C(C(T)) = C(T) (deduktiver Abschluss ist deduktiv abgeschlossen)

(iii) Mod(T) = Mod(C(T))

## 4.4 Äquivalente Theorien

2 $\mathcal{L}$-Theorien T und T' sind gleich/äquivalent ($T \sim T'$) $\Leftrightarrow$ C(T) = C(T') $\Leftrightarrow$ ($\Sigma' \subseteq C(\Sigma)$ und $\Sigma \subseteq C(\Sigma')$) $\Leftrightarrow$ Mod(T) = Mod(T')

## 4.5 Teiltheorie

$T = (\mathcal{L}, \Sigma)$, $T' = (\mathcal{L}, \Sigma')$ Theorien. T ist eine Teiltheorie von:
T' ($T \subseteq T'$) $\Leftrightarrow \Sigma \subseteq \Sigma'$

## 4.6 *Elementare Theorie

Eine Elementare Theorie $Th(\mathcal{A})$ einer Struktur $\mathcal{A}$ ist eine $\mathcal{L}$-Theorie: $Th(\mathcal{A}) = (\mathcal{L}, \Sigma)$ mit $\Sigma = \{\sigma : \mathcal{A} \vDash \sigma\}$

Zusätzlich gilt: Für jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ ist $Th(\mathcal{A})$ erfüllbar und vollständig

## 4.7 *Elementar und Delta Elementar

Klasse $\kappa$ von $\mathcal{L}$-Strukturen ist elementar $\Leftrightarrow \exists$ $\mathcal{L}$-Satz $\sigma : \kappa = Mod(\sigma)$
Klasse $\kappa$ heißt $\Delta$-elementar $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}$-Theorie T: $\kappa = Mod(T)$

## 4.8 *Eigenschaften über Delta-Elementare Strukturen

Klasse $\kappa$ von $\mathcal{L}$-Strukturen $\Delta$-elementar $\Leftrightarrow$ $\kappa$ ist Durchschnitt von elementaren Klassen von $\mathcal{L}$-Strukturen

Familie von $\Delta$-elementaren Strukturklassen gegen beliebige Durchschnitte abgeschlossen. Sind Klassen $\kappa_i (i \in I)$ $\Delta$-elementar $\Rightarrow \kappa = \bigcap\limits_{i \in I} \kappa_i$ $\Delta$-elementar.
Familie $\Delta$-elementaren Klassen von $\mathcal{L}$-Strukturen ist nicht gegen Kompliment abgeschlossen.

## 4.9 *Elementare Eigenschaften

Familie elementarer Klassen von $\mathcal{L}$-Strukturen abgeschlossen gegen:

(i) Vereinigung

(ii) Durchschnitt

(iii) Komplement

## 4.10 Anzahlformeln

$$\varphi_{\geq n} :\equiv \exists x_1, ..., \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j)$$
$$\varphi_{\leq n} :\equiv \exists x_1, ..., \exists x_n \forall x (\bigvee_{1 \leq i \leq n} x = x_i)$$
$$\varphi_{=n} :\equiv \varphi_{\geq n} \wedge \varphi_{\leq n}$$
$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \mathcal{A} \vDash \varphi_{\geq n} \Leftrightarrow |A| \geq n \\ & \mathcal{A} \vDash \varphi_{\leq n} \Leftrightarrow |A| \leq n \\ & \mathcal{A} \vDash \varphi_{=n} \Leftrightarrow |A| = n \end{aligned}$$
$$\begin{array}{lll} \Rightarrow \text{Für Klassen} & \mathcal{M}_n := \{\mathcal{A} : |A| = n\} = \mathrm{Mod}(\varphi_{=n}) & (n \geq 1) \\ & \mathcal{M}_{\geq n} := \{\mathcal{A} : |A| \geq n\} = \mathrm{Mod}(\varphi_{\geq n}) & (n \geq 1) \\ & \mathcal{M}_{\leq n} := \{\mathcal{A} : |A| \leq n\} = \mathrm{Mod}(\varphi_{\leq n}) & (n \geq 1) \\ & \mathcal{M}_{inf} := \{\mathcal{A} : A\} = \mathrm{Mod}(\varphi_{\geq n} : n \geq 1) & \end{array}$$

Es gilt für eine $\mathcal{L}$-Sprache $n \geq 1$, dass die Klassen $\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_{\geq n}, \mathcal{M}_{\leq n}$ elementar sind und $\mathcal{M}_{inf}$ ist $\Delta$-Elementar

## 4.11 Partielle Ordnung

Partielle Ordnung $\mathcal{P} = (P, <^{\mathcal{P}})$ erfüllt:

$\pi_1 \equiv \forall x \neg (x < x)$ Irreflexibilität

$\pi_2 \equiv \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$ Transitivität

$\pi_3 \equiv \forall x \forall y (x < y \to \neg(y < x))$ Antisymmetrie

In linearen/totalen Ordnung gilt zusätzlich:
$\pi_4 \equiv \forall x \forall y (x < y \lor x = y \lor y < x)$ Totalität

$\Rightarrow$ $T_{PO} = (\mathcal{L}, \{\sigma_{PO}\})$ mit $\sigma_{PO} \equiv \pi_1 \land \pi_2 \land \pi_3$. Theorie der partiellen Ordnung
$T_{LO} = (\mathcal{L}, \{\sigma_{LO}\})$ mit $\sigma_{LO} \equiv \pi_1 \land \pi_2 \land \pi_3 \land \pi_4$. Theorie der linearen Ordnung

$\Rightarrow$ $PO := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ ist partielle Ordnung$\} = Mod(T_{PO}) = Mod(\sigma_{PO})$
$LO := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ ist lineare Ordnung$\} = Mod(T_{LO}) = Mod(\sigma_{LO})$

$\Rightarrow$ Klassen sind elementar

## 4.12 *Gruppen- und Körperaxiome

| | |
|---|---|
| $\gamma_1 \equiv \forall x \forall y \forall z ((x + y) + z = x + (y + z))$ | Assoziativität |
| $\gamma_2 \equiv \forall x (0 + x = x)$ | 0 links neutral |
| $\gamma_3 \equiv \forall x \exists y (y + x = 0)$ | Existenz von Links inversen |
| $T_G = (\mathcal{L}, \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\})$ Gruppentheorie | |
| $\Rightarrow$ Klassen G der Gruppen elementar | |
| $\gamma_4 \equiv \forall x \forall y (x + y = y + x)$ | Kommutativität |
| $\Rightarrow$ G Abelsch | |

$\Rightarrow$ G ist Abelsch

Körperaxiome:

Es seien $\gamma_1, ..., \gamma_4$ Gruppenaxiome

$\gamma_1' \equiv \quad \forall x \forall y \forall z ((x * y) * z = x * (y * z))$
$\gamma_2' \equiv \quad \forall x (1 * x = x)$
$\gamma_3' \equiv \quad \forall x \exists y (x \neq 0 \to x * y = 1)$
$\gamma_4' \equiv \quad \forall x \forall y (x * y = y * x)$
$\delta \equiv \quad \forall x \forall y \forall z (x * (y + z) = (x * y) + (x * z))$
$T_K = (\mathcal{L}, \{\gamma_1, ..., \gamma_4, \gamma_1', ..., \gamma_4', \delta\})$

$\Rightarrow$ Klasse der Körper ist elementar

## 4.13 Charakteristik

- $\kappa$ hat die Charakteristik $p \geq 1 \Leftrightarrow \underbrace{1 + ... + 1}_{\text{p-mal}} = 0$ (endlich)
- unendliche Charakteristik/Charakteristik 0 $\Leftrightarrow$ keine endliche Charakteristik

## 4.14 Lemma

(i) $p \geq 1 \Rightarrow$ Klasse $K_p$ der Körper Charakteristik p ist elementar

(ii) Klasse $K_0$ ist $\Delta$-Elementar

## 4.15 Isomorphismen

(a) ($\mathcal{L}$)-Isomorphismus f von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}(f : \mathcal{A} \cong \mathcal{B})$ ist eine bijektive Abbildung $f : A \to B$, die mit den ausgezeichneten Relationen, Funktionen und Konstanten verträglich ist:

- $(a_1, ..., a_{n_i}) \in \mathcal{R}_i^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (f(a_1), ..., f(a_{n_i}) \in \mathcal{R}_i^{\mathcal{B}}$
- $f(f_i^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_{m_j})) = f_i^{\mathcal{B}}(f(a_1), ..., f(a_{m_j})$
- $f(c_k^{\mathcal{A}}) = c_k^{\mathcal{B}}$

(b) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorph $(\mathcal{A} \cong \mathcal{B}) \Leftrightarrow \exists$ Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$

Es gilt zusätzlich: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Rightarrow \forall$ Satz $\sigma : \mathcal{A} \vDash \sigma \Leftrightarrow \mathcal{B} \vDash \sigma$
Weiterhin: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \mathcal{L}$-Strukturen, $f : A \to B$ Isomorphismus, $\tilde{B} : \{x_0, ..., x_n\} \to A$ Belegung. Dann gilt für jeden $\mathcal{L}$-Term t $\equiv t(x_0, ..., x_n)$, jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi \equiv \varphi(x_0, ..., x_n)$:

- $f(t_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{A}}) = t_{f(\tilde{\mathcal{B}})}^{\mathcal{B}}$
- $W_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = W_{f(\tilde{\mathcal{B}})}^{\mathcal{B}}(\varphi)$

## 4.16 !(Elementar) Äquivalent

$\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ elementar äquivalent $(\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}) \Leftrightarrow Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$ ($\forall$-Satz: $\mathcal{A} \vDash \sigma \Leftrightarrow \mathcal{B} \vDash \sigma$)
Für $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind äquivalent

(i) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$

(ii) $B \vDash Th(\mathcal{A})$

Klasse $\kappa$ von $\mathcal{L}$-Strukturen ($\Delta$-)elementar $\Rightarrow \kappa$ gegen elementare Äquivalenz und Isomorphie abgeschlossen
Für eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\{\mathcal{B} : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}\}$ ist $\Delta$-Elementar

(ii) Jede zu $\mathcal{A}$ äquivalente Struktur $\mathcal{B}$ ist zu $\mathcal{A}$ isomorph. D.h. Für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

(iii) Für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

(iv) Für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \vDash Th(\mathcal{A})$

## 4.17 Satz über Existenz unendlicher Modelle

$T = (\mathcal{L}, \Sigma)\mathcal{L}$-Theorie, die für jedes $n \geq 1$ ein Modell mit mindestens n Elementen besitzt. Dann besitzt T ein unendliches Modell

(a) Klasse $M_{fin}$ ist nicht $\Delta$-Elementar

(b) Klasse $M_{inf}$ ist nicht Elementar

## 4.18 Ordnungen und Wohlordnungen

Lineare Ordnung $O = (A, <)$ ist eine Wohlordnung $\Leftrightarrow$ besitzt keine unendlich absteigende Kette, d.h. keine Individuen $a_n \in A$ mit ... $a_2 < a_1 < a_0$ (Wie die Ordnung der natürlichen Zahlen)

Die Klasse der Wohlordnungen ist nicht $\Delta$-Elementar

## 4.19 !Körper und deren Charakteristik

(i) Klasse $\kappa_0$ der Körper mit der Charakteristik 0 ist nicht elementar

(ii) Klasse $\kappa_{fin}$ der Körper endlicher Charakteristik ist nicht $\Delta$-elementar

## 4.20 Satz von Skolem

Es gibt eine $\mathcal{L}(\leq; +, *; 0, 1)$-Struktur $\mathcal{N}^*$, die zur Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}; \leq; +, *; 0, 1)$ der natürlichen Zahlen elementar äquivalent ist, also $\mathcal{N} \vDash Th(\mathcal{N})$ erfüllt, aber nicht zu $\mathcal{N}$ isomorph ist.

Sei im Folgenden $\mathcal{A} = (A; \leq^{\mathcal{A}}; +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}; 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$ ein Nichtstandardmodell der Arithmetik, d.h. ein nicht zu $\mathcal{N}$ isomorphes Modell von $Th(\mathcal{N})$

Ist $(L; \leq)$ eine lineare Ordnung, dann ist $A \subseteq L$:

- Anfangsstück von L $\Leftrightarrow \forall x, y(x \in A \cap y \leq x \rightarrow y \in A)$
- Endstück von L $\Leftrightarrow \forall x, y(x \in A \cap x \leq y \rightarrow y \in A)$
- Intervall von L $\Leftrightarrow \forall x, y, z(x, y \in A \cap x \leq z \leq y \rightarrow z \in A)$

Elemente einer linearen Ordnung bezeichnen wir als Punkte.