0.1 Norm

Definitheit: $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$
absolute Homogenität: $||\alpha x|| = |\alpha| * ||x||$
Dreiecksungleichung: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

0.2 Skalarprodukt

$$\left.\begin{array}{l} < x + y, z >=< x, z > + < y, z > \\ < x, y + z >=< x, y > + < x, z > \\ < \lambda x, y >= \lambda < x, y > \\ < x, \lambda y >= \lambda < x, y > \end{array}\right\} \text{Linearität}$$

$< x, y >=< y, x >$

$$\left.\begin{array}{l} < x, x >\geq 0 \\ < x, x >= 0 \Rightarrow x = 0 \end{array}\right\} positivDefinitheit$$

1 Symmetrische, positiv definite Matrix

positiv definit: $x^t Ax > 0$ (beliebige Matrix)
alle EW > 0 (symmetrische Matrix)

1.1 Natürliche Matrixnorm

$||A||_\infty := \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = \max_{||x||=1} ||Ax||_\infty$
$||A|| = 0 \Rightarrow A = 0$
$||\lambda A|| = |\lambda| * ||A||$
$||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
$||A * B|| \leq ||A|| * ||B||$

1.2 Zeilensummennorm

= natürliche Matrixnorm
$||A||_\infty = \max_{||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

1.3 Spaltensummennorm

$||A||_1 := \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||_1}{||x||_1} = \max_{||x||_1=1} ||Ax||_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

1.4 Spektralnorm

$$\begin{aligned} A||_2 &:= \max_{||x||_2=1} ||Ax||_2 \\ &= \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} \\ &= \max_{||x||_2=1} < Ax, Ax > \\ &= \max_{||x||_2=1} < A^t Ax, x > \\ &= max\sqrt{|\lambda|}, \lambda * EW von A^t A \end{aligned}$$

1.5 Konditionszahl einer Matrix A

$cond(A) = ||A|| * ||A^{-1}||$

1.6 Sonderfall symmetrisch, positiv definite Matrix

$cond(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

1.7 Maschienengenauigkeit eps

$eps = \frac{1}{2} b^{-r+1}, IEEE : eps = \frac{1}{2} * 2^{-52} \approx 10^{-16}$

1.8 Rundungsfehler

$absolut : |x - rd(x)| \leq \frac{1}{2} b^{-r} b^e$
$relativ : |\frac{x-rd(x)}{x}| \leq \frac{1}{2} b^{-r+1} = eps$

1.9 Fehler I

f$\in C^{n+1}$[a, b], $\forall$ x $\in$ [a, b] $\exists \xi_x \in (\overline{x_0, ..., x_n, x})$, wobei das Intervall das kleinst mögliche Intervall, das alle x_i enthällt, s.d.

$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$

1.10 Konditionszahl (relativ)

$k_{ij}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) \frac{\Delta x_j}{x_j}$

$\frac{\Delta y_i}{y_i} = \sum_{j=1}^{m} k_{ij}(x) \frac{\Delta x_j}{x_j}$

$|k_{ij}(x)| >> 1 \Rightarrow$ schlecht konditioniert

$|k_{ij}(x)| << 1 \Rightarrow$ gut konditioniert, ohne Fehlerverstärkung
$|k_{ij}(x)| > 1 \Rightarrow$ Fehlerverstärkung
$|k_{ij}(x)| < 1 \Rightarrow$ Fehlerdämpfung

1.11 Interpolation

Zuordnung von $g \in P$ zu f durch Fixieren von Funktionswerten
$g(x_i) = y_i = f(x_i), i = 0, ..., n$

1.12 Approximation

$g \in P$ beste Darstellung, z.B.
$\max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| minimal$
$(\int\limits_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} minimal$

1.13 Lagransche Darstellung

$p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i L_i^{(n)}(x) \in P_n$ mit $p(x_j) = y_j$
Nachteil: Bei Hinzunahme von (x_{n+1}, y_{n+1}) ändert sich das Basispolynom komplett

1.13.1 Newton-Polynome

Bei Hinzunahme von (x_{n+1}, y_{n+1}) muss nur eine neue Rechnung durchgeführt werden, und nicht das gesamte Polynom neu berechnet werden

1.14 Dividierte Differenzen*

$y[x_i, ..., x_{k+1}] = \frac{y[x_{i+1}, ..., x_{k+1}] - y[x_i, ..., x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$ mit k = 1, ..., j und i = k - j
für beliebige [?] $\sigma : 0, ..., n \to 0, ..., n$ gilt $y[\tilde{x_0}, ..., \tilde{x_n}] = y[x_0, ..., x_n]$