Universität Heidelberg

Analysis 1

Prof. Dr. Peter Albers

Wintersemester 17/18

by Charles Barbret

31 Dezember, 2017

Inhaltsverzeichnis

0.1 Moodle . . . 2
0.2 Übungsbetrieb . . . 2
0.3 Plenarübung . . . 2
0.4 Klausur . . . 2

1 Grundlagen **2**
1.1 Mengen und Aussagen . . . 2

2 Reelle Zahlen **4**

3 Folgen **5**
3.1 Konvergent und Grenzwert . . . 5
3.2 Rechenregeln für Grenzwerte . . . 6
3.3 Häufungspunkt, Cauchy-Folge, Teilfolgen . . . 6
3.4 Limes superior und Limes inferior . . . 7

Ablauf der Vorlesung

0.1 Moodle

Modle passwort: Ableitung

0.2 Übungsbetrieb

Donnerstags kommen die neuen Zettel
Zettel sollen in Zweiergruppen abgegeben werden [1]
Abgabeschluss ist Donnerstags 09:15 im Mathematikon bei den Briefkästen
Das erste Blatt wird spätestenz am 19.10.2017 veröffentlicht

0.3 Plenarübung

Donnerstags 16:00 bis 18:00 im KIP HS1
Erste Plenarübung findet bereits am 19.10.2017

0.4 Klausur

50% der Gesamtpunkte der Aufgabenblätter und einmal vorgerechnet haben.

Klausurtermine: 23.02.2018 09:00 bis 13:00 Uhr und 9.4.2018 09:00 bis 13:00 Uhr

Nicht erscheinen bei der ersten Klausur ohne Abmeldung gilt als 5.0, man kann dann aber immer noch in die Nachklausur.

1 Grundlagen

1.1 Mengen und Aussagen

Definition 1: [2] Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohldefinierten und wohl unterschiedenen Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge.
wohlbestimmt: Von jedem Objekt steht fest, ob es Element der Menge ist oder nicht
wohl unterschieden: Jedes Objekt kommt höchstens einmal in der Menge vor

[1] ist ja knuffig
[2] Cantor 1895

Beschreibung der Menge

a) Durch Aufzählung $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$

b) Durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft in Form einer Aussage, d.h. eines Satzes, von dem eindeutig feststeht, ob er wahr oder falsch ist. Der Wahrheitsgehalt muss zum gegebenen Zeitpunkt nicht bekannt sein. Bsp A(u):= u ist eine Primzahl (D.h. $u \geq 2$)

c) Durch Beschreibung der Elemente

Definition 2:

Es sein M und N Mengen [...]

Bemerkung öder"bedeutet das einschließliche oder, also nicht "entweder ... oder ..."→ Wahrheitstabellen

Seien A und B Aussagen. Wir leiten ab [3]

A	B	A und B	A oder B	"Entweder A oder B"
w	w	w	w	f
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

Implikation zwischen Aussagen

A ⇒ B	steht für: A impliziert B
	Falls A gilt, dann gilt auch B
	A ist hinreichende Bedingung für B
	B ist notwendige Bedingung für A

Formal definieren wir A ⇒ B ist wahr, falls ¬ A oder B

D.h.

A	B	A ⇒ B
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Außerdem kürzen wir ab:

A ⇔ B steht für A ⇒ B ∧ A ⇐ B

Beispiel:

[...]

Bemerkung:

Für alle Mengen M gilt $\emptyset \subset M$

$\forall M : \emptyset \subset M$.

[3] w = wahr, f = falsch

2 Reelle Zahlen

3 Folgen

Definition 1: Eine Folge komplexer Zahlen ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$
$$n \to a(n) = a_n$$

Notation $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Analog: $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, ... = (a_n)_{n \geq n_0}$

Heißt soviel wie, da die Folge von einem Term in Abhängigkeit von n steht, dass man eine Bijektion mit den Natürlichen Zahlen bilden kann.

3.1 Konvergent und Grenzwert

Definition 2: 1) Eine Folge $a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent, falls $a \in \mathbb{C}$ mit filgender Eigenschaft existiert:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

Dann heißt a Grenzwert oder Limes von (a_n).

$$Schreibweise : a_n \to a, a_n \xrightarrow{n \to \infty} a$$
$$\lim a_n = a, \lim_{n \to \infty} a_n = a$$

2) Hat eine Folge keinen Grenzwert, heißt sie divergent.

3) Gilt $a_n \to 0$, so heißt (a_n) Nullfolge.

WICHTIG Die Aussagen "für alle bis auf endlich viele Folgengliederünd "für unendlich viele Folgengliederßind nicht äquivalent.

Lemma 1: a) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

b) Jede konvergente Folge ist beschränkt:

$$\exists s \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq s$$

Satz 3: a) Für $a \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3.2 Rechenregeln für Grenzwerte

Lemma 2: Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann sind $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{C}, (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n * b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und, falls $b \neq 0 : (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Heißt soviel wie, sollten die Folgen jeweils konvergieren, kann man die Grenzwerte miteinander verrechnen.

Lemma 3: Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen. Es gelte $a_n \leq b_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt: $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Hiermit können wir Folgen abschätzen, was manchmal ganz hilfreich sein kann.

Lemma 4: Sandwich-Lemma

Es seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit:

i) (a_n) und (c_n) sind konvergent mit

$$\lim a_n = \lim c_n$$

ii) Für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

Dann ist (b_n) konvergent mit

$$\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n$$

Wenn wir eine Minorante und Majorante finden können, mit dem gleichen Grenzwert, so konvergiert die Folge gegen den selben Grenzwert

3.3 Häufungspunkt, Cauchy-Folge, Teilfolgen

Definition 3: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt monoton wachsend, falls gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$$

Monoton Fallend analog.

Satz 4: Jede beschränkte monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} & \text{falls monoton wachsend} \\ inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Monoton + Beschränkt = Konvergent

Definition 4: Sei (a_n) eine Folge. Dann heißt $a \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt der Folge, falls gilt:

$\forall \epsilon > 0$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$ für unterschiedlich viele $n \in \mathbb{N}$

Heißt soviel wie wenn Teilfolgen konvergieren, sind die Grenzwerte der Teilfolgen die Häufungspunkte der Folge.

Definition 5: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $\forall l \in \mathbb{N} : n_{l+1} > n_l$. Dann heißt $(a_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Lemma 5: $a \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine konvergente Teilfolge $(a_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_l} = a$.

Also genau was ich gemeint hatte.

Satz 5: $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$

Lemma 6: Jede Folge reeller Zahlen besitzt eine monotone Teilfolge.

Heißt, bei jeder Folge reeller Zahlen kann man sich vereinzelnd Elemente raus suchen, welche eine monotone Teilfolge bilden.

Satz 6: (Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{R}$)

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge

Gilt natürlich auch in komplexen Zahlen.

Definition 6: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt Cauchy-Folge, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \epsilon$$

Satz 7: (Cauchy Kriterium)

Die Folge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

Bemerkung Es gibt Cauchy-Folgen (a_n) mit $a_n \in \mathbb{Q} \forall n \in \mathbb{N}$ die nicht gegen eine rationale Zahl konvergieren.

3.4 Limes superior und Limes inferior

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, d.h. $\exists s \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{R} : |a_n| \leq s$.

Beobachtung Sei $B_n := sup\{a_k \geq n\}$

$$b_n := inf\{a_k \geq n\}$$

Dann ist die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Außerdem gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \leq B_n$

TEST