UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Universität Heidelberg

Mathematische Logik

Prof. Dr. Klaus Ambos-Spies

Winter Semester 17/18

von Charles Barbret

23 Oktober, 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Orientierung

Home Page der Vorlesung: http://www.math.uni-heidelberg.de/logic/ws17/mathlogik_ws17.html

1.1 Übungsgruppen

Anwesenheitspflicht, bis zu 2 mal kann gefehlt werden
Fangen am Dienstag den 24.10.2017 an
Das erste Blatt erscheint in der zweiten Woche
Abgabe: Donnerstags vor der Vorlesung.

1.2 Klausur

Kommt sicherlich nochmal
Zu beginn und ende der Vorlesungsfreien Zeit

2 Einführung

2.1 Was ist Logik

[Insert Goethe's Faust Zitate hier]
[Wikipedias Definition von Logik]

2.2 Was ist klassische Logik

In der klassischen Logik geht man davon aus, dass:
1. Jede Aussage Entweder wahr oder falsch ist. (Prinzip des ausgeschlossenen Dritten ("tertium nun datur"), Zweiwertige Logik)
Beispiel dass er genannt hatte: Dass der Wahrheitswert von der Zeit abhängt, wie ob es regnet, sollte es im moment regnen sagt man generell schon, dass es regnet da es in diesem Moment bei einem regnet. Doch generell kann man dem zustand ob es regnet keinen Wahrheitswert zuweisen.
2. Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage eindeutig durch die Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen und die Art, wie diese zusammengesetzt sind, bestimmt ist. (Extensionalitätsprinzip)

In der (mathematischen) Logik werden auch nichtkalssische Logiken untersucht (Mehrwertige Logiken, Modallogiken, Temporallogiken, Probabilischischen Logiken, "fuzzy logic", Intuitionischtischen Logik) Diese basieren

auf der klassischen Logik oder können doch zumindest entsprechend der klassischen Logik entwickelt werden.
In dieser Vorlesung wird nur die klassische Logik betrachtet.

Wenn man eine Logik anwenden kann, kann man gut sich an andere setzen und in andere einsteigen und diese verwenden.

2.3 Ziele der Vorlesung

Wir werden uns mit der (klassischen) mathematischen Logik befassen, wobei die mathematische Logik einmal die Logik ist, welche wir in der Mathe gut verwenden können zum anderen

2.4 Prädikatenlogik

Die Prädikatenlogik steht im Zentrum der Vorlesung

Eine mathematische Struktur ist dabei z.B. die Struktur

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +\mathcal{N}, *\mathcal{N}, 0\mathcal{N}, 1\mathcal{N})$

In der Logik werden wir Grund Objekte definieren (+, *, 0, 1) mit denen wir alle Objekte die wir erreichen wollen beschreiben können, auch wenn wir es nicht direkt Definiert haben.

Wir werden Grundbereiche (aka Universen, dessen Elemente wir als Individuen bezeichnen) erstellen (So wie die Natürlichen Zahlen etc)

2.4.1 Sprache und Sätze

Wir werden (Individuen-)Variablen mit Junktoren verknüpfen können um neue Aussagen treffen zu können.

der Satz $\forall x \exists y(x = y + 1)$ ist in den Natürlichen Zahlen Falsch, jedoch in den Ganzen Zahlen wahr. (Als ein Beispiel direkt aus der Mathematik)

2.4.2 Logische Wahrheit

Ein Satz ist dann logisch wahr(allgemein gültig), wenn er in allen Strukturen gilt, also bei jeder möglichen Interpretation wahr ist.

Zusätzlich gibt es erfüllbare Sätze, die nicht immer wahr sein müssen und Widersprüchliche Sätze, welche nie wahr sein können.

2.4.3 Logischer Folgerungsbegriff

Ein Satz σ folgt (logisch d.h. zwingend) aus einer Menge T von Sätzen, wenn in jeder Struktur in der alle Sätze aus T gelten, (in der Mathe auch Axiome) auch der Satz σ gilt (also jedes Modell von T auch Modell von σ ist).

2.4.4 Wahrheit vs Beweisbarkeit

Man definiert sogenannte Kalküle $\mathcal{K}$. Solch ein Kalkül verfügt über eine Menge von ausgezeichneten Sätzen, den (logischen) Axiomen, sowie einer Menge ausgezeichneter endlicher Folgen von Sätzen $\phi_1, ..., \phi_n, \phi$, den Regeln, wobei die Sätze $\phi_1, ..., \phi_n$ als die Prämissen und der Satz ϕ als die Konklusion der Regel bezeichnet wird.

Ein Beweis eines Satzes σ besteht dann aus einer endlichen Folge von Sätzen $\psi_1 ..., \psi_m$, wobei der letzte Satz ψ_m der zu beweisende Satz σ ist und jeder Satz ψ_i ein Axiom oder die Konklusion des Satzes ist.

2.5 Logische Wahrheit vs Wahrheit in der Mathematik

[meh]

3 Aussagenlogik

3.1 Comming soon in a PDF near you

Teil 1: Syntax der Aussagenlogik
*** Junktoren und Wahrheitsfunktionen**
*** Syntax der Aussagenlogik**
*** Semantik der Aussagenlogik**
*** Boolesche Funktionen, aussagenlogische Formeln und Normalformen**
*** Exkurs: Entscheidbarkeit der Komplexität**
Teil 2: Ein Kalkül der Aussagenlogik
[meh]

3.2 Verknüpfung von Aussagen

Um Aussagen zu verknüpfen verwenden wir Junktoren, die wir aus

	nicht (Negation, $\neg$)
	und (Konjunktion $\wedge$)
der Umgangssprache kennen:	**oder (Disjunktion, $\vee$)**
	wenn - dann (Implikation $\rightarrow$)
	Genau dann wenn (? $\leftrightarrow$)

Für Boolesche Funktionen kürzen wir ab:
WAHR = W = 1 und FALSCH = F = 0

Eine n-stellige Wahrheitsfunktion f ist eine Abbildung
f: $\{F, W\}^n \rightarrow \{F, W\}$

Eine n-stellige Boolschefunktion f ist eine Abbildung
f: $\{1,0\}^n \to \{1,0\}$
Bei Verknüpfung zwei oder mehrere Aussagen, wird der Wahrheitswert durch den Wahrheitswert der Teilaussagen bestimmt.
Negation:

X_0	$f_\neg(x_0)$
0	**1**
1	**0**

In der (Mathematischen-/) Logik verwendet man das inklusive oder:

x_0	x_1	$f_\vee(x_0,x_1)$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**1**

Es gilt also gerade $f_\vee(x_0,x_1) = max(x_0,x_1)$
Konjunktion (und):

x_0	x_1	$f_\wedge(x_0,x_1)$
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

Man darf auch unsinnige Aussagen treffen wie: "Wenn es regnet ist 3 eine Primzahl"
Implikation:

x_0	x_1	$f_\to(x_0,x_1)$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

Äquivalenz:

x_0	x_1	$f_\leftrightarrow(x_0,x_1)$
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

Es gibt 2^{2^n} **verschiedene n-stellige Boolesche Funktionen.**

3.2.1 Beispiel

Die 3-stellige Schwellenfunktion $s_2^3 : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$

x_0	x_1	x_2	$f_{\leftrightarrow}(x_0, x_1)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f_{\vee}(f_{\vee}(f_{\wedge}(x_0, x_1), f_{\wedge}(x_0, x_2)), f_{\wedge}(x_1, x_2))$

3.3 Syntax der Aussagenlogik

Die Grundzeichen (Symbole) der Sprache der Aussagenlogik (AL) sind:
Die Aussagenvariablen (AV): $A_0, A_1, ...$
Die Junktoren:
1-stellig: $\neg$
2-stellig: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
Die Klammersymbole: (und)
Man will zu jedem "Wortëin sinniges erstellen, und ünlogische"terme vermeiden wie: $A_0\neg)\vee$
Die aussagenlogischen (al.) Formeln sind induktiv definiert durch:
(F1) **Jede Aussagenvariable** A_n **(n** $\geq$ **0) ist eine al. Formel**
(F2) **ist** φ **eine al. Formel, so ist auch** $\neg\varphi$ **eine al. Formel**
(F3) **Sind** ϕ_1 **und** ϕ_2 **al. Formeln, so sind auch** $(\varphi_1 \wedge \varphi_2), (\varphi_1 \vee \varphi_2), (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ **und**

NOTATION:	**A, B, C, ...**	**stehen für Aussagenvariablen**
	φ, ψ, **...**	**stehen für [meh]**

3.3.1 Definition

$l(\varphi)$ **= Anzahl der Zeichen in** φ
$lz(\varphi)$ **= Anzahl der Junktoren in** φ
[MER meh]
K1 **Äußere Klammern dürfen weggelassen werden.**
K2 $\vee und \wedge$ **binden stärker als** $\rightarrow und \leftrightarrow$
K3