



UNIVERSITÄT  
HEIDELBERG  
ZUKUNFT  
SEIT 1386

UNIVERSITÄT HEIDELBERG

# Analysis 1

Prof. Dr. Peter Albers

Wintersemester 17/18

*by Charles Barbret*

22 Januar, 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Ablauf der Vorlesung</b>	<b>4</b>
0.1	Moodle . . . . .	4
0.2	Übungsbetrieb . . . . .	4
0.3	Plenarübung . . . . .	4
0.4	Klausur . . . . .	4
<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>4</b>
1.1	Mengen und Aussagen . . . . .	4
	Definition 1.1: . . . . .	4
	Definition 1.2: . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Reelle Zahlen übersprungen</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Folgen</b>	<b>7</b>
	Definition 3.1: Folge komplexer Zahlen . . . . .	7
3.1	Konvergent und Grenzwert . . . . .	7
	Definition 3.2: Konvergente Folgen . . . . .	7
	Lemma 3.1: . . . . .	7
	Satz 3.1: Regeln für n-te Wurzel . . . . .	7
3.2	Rechenregeln für Grenzwerte . . . . .	8
	Lemma 3.2: . . . . .	8
	Lemma 3.3: . . . . .	8
	Lemma 3.4: Sandwich-Lemma . . . . .	8
3.3	Häufungspunkt, Cauchy-Folge, Teilfolgen . . . . .	8
	Definition 3.3: . . . . .	8
	Satz 3.2: Monotoniekriterium . . . . .	8
	Definition 3.4: Häufungspunkte . . . . .	9
	Definition 3.5: Teilfolge . . . . .	9
	Lemma 3.5: Häufungspunkte . . . . .	9
	Satz 3.3: $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ . . . . .	9
	Lemma 3.6: . . . . .	9
	Satz 3.4: Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{R}$ . . . . .	9
	Definition 3.6: Cauchy-Folge . . . . .	9
	Satz 3.5: Cauchy Kriterium . . . . .	10
3.4	Limes superior und Limes inferior . . . . .	10
	Definition 3.7: $\limsup$ und $\liminf$ . . . . .	10
	Definition 3.8: . . . . .	10
	Definition 3.9: Bestimmt Divergent . . . . .	10
	Satz 3.6: . . . . .	11

	Satz 3.7:	11
	Satz 3.8: Charakterisierung von $\limsup$ und $\liminf$	11
<b>4</b>	<b>Stetige Funktionen und die Topologie des <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>12</b>
	Definition 4.1:	12
	Definition 4.2: Endlicher Abstand	12
4.1	Stetigkeit	12
	Definition 4.3: $\epsilon - \delta$ -Kriterium	12
	Satz 4.1: Folgenkriterium	12
	Satz 4.2: Stetige Funktionen verknüpft sind Stetig	13
	Satz 4.3: Komposition stetiger Funktionen sind Stetig	13
	Definition 4.4: Lipschitz-Stetig	13
4.2	Offen und abgeschlossene Mengen	13
	Definition 4.5: Randpunkt von $M$	13
	Definition 4.6: Offene Mengen	13
	Lemma 4.1: Offen	14
	Korollar 4.1: Offene Mengen bestehen aus Offenen Bällen	14
	Lemma 4.2: Abgeschlossen	14
	Satz 4.4:	14
	Definition 4.7: Innen und Abschluss	15
	Lemma 4.3:	15
	Korollar 4.2:	15
	Definition 4.8: Topologie des $\mathbb{R}^n$	15
4.3	Kompaktheit und die Existenz von Extrema	16
	Definition 4.9: Beschränkt und Kompakt	16
	Satz 4.5: Heine-Borel	16
	Satz 4.6:	16
	Satz 4.7:	16
	Korollar 4.3: Existenz von Extrema	16
4.4	Zusammenhang und Zwischenwertsatz	16
	Definition 4.10: Zusammenhängend	16
	Definition 4.11: Wegzusammenhängend	17
	Satz 4.8:	17
	Satz 4.9:	17
	Satz 4.10: Offen und Abgeschlossen	17
	Lemma 4.4:	17
	Lemma 4.5: stetig = Urbild offener Mengen sind offen	17
	Lemma 4.6: Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend	17
	Satz 4.11: Zwischenwertsatz	18
	Korollar 4.4:	18

	Definition 4.12: (Streng-) Monoton Steigend . . . . .	18
	Satz 4.12: . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Differenzialrechnung</b>	<b>19</b>
5.1	Differenzierbarkeit . . . . .	19
	Definition 5.1: Differenzierbar . . . . .	19
	Definition 5.2: Tangente . . . . .	19
	Lemma 5.1: . . . . .	19
	Satz 5.1: Differenzierbar $\Rightarrow$ stetig . . . . .	19
5.2	Differentiationsregeln . . . . .	20
	Satz 5.2: . . . . .	20
	Satz 5.3: Produktregel/Leibniz-Regel . . . . .	20
	Satz 5.4: Quotientenkriterium . . . . .	20
	Satz 5.5: Kettenregel . . . . .	20
	Satz 5.6: . . . . .	20
5.3	Mittelwertsatz und die Existenz von Extrema . . . . .	21

## 0 Ablauf der Vorlesung

### 0.1 Moodle

Modle passwort: Ableitung

### 0.2 Übungsbetrieb

Donnerstags kommen die neuen Zettel

Zettel sollen in Zweiergruppen abgegeben werden

Abgabeschluss ist Donnerstags 09:15 im Mathematikon bei den Briefkästen

Das erste Blatt wird spätestens am 19.10.2017 veröffentlicht

### 0.3 Plenarübung

Donnerstags 16:00 bis 18:00 im KIP HS1

Erste Plenarübung findet bereits am 19.10.2017

### 0.4 Klausur

50% der Gesamtpunkte der Aufgabenblätter und einmal vorgerechnet haben.

Klausurtermine: 23.02.2018 09:00 bis 13:00 Uhr und 9.4.2018 09:00 bis 13:00 Uhr

Nicht erscheinen bei der ersten Klausur ohne Abmeldung gilt als 5.0, man kann dann aber immer noch in die Nachklausur.

## 1 Grundlagen

### 1.1 Mengen und Aussagen

#### Definition 1.1:

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohldefinierten und wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge.

wohlbestimmt: Von jedem Objekt steht fest, ob es Element der Menge ist oder nicht

wohl unterschieden: Jedes Objekt kommt höchstens einmal in der Menge vor

- Beschreibung der Menge
- a) Durch Aufzählung  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
  - b) Durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft in Form einer Aussage, d.h. eines Satzes, von dem eindeutig feststeht, ob er wahr oder falsch ist. Der Wahrheitsgehalt muss zum gegebenen Zeitpunkt nicht bekannt sein. Bsp  $A(u) := u$  ist eine Primzahl (D.h.  $u \geq 2$ )
  - c) Durch Beschreibung der Elemente

### Definition 1.2:

Es sein  $M$  und  $N$  Mengen

[...]

Bemerkung "oder" bedeutet das einschließliche oder, also nicht "entweder ... oder ..."  
 $\rightarrow$  Wahrheitstabellen

Seien  $A$  und  $B$  Aussagen. Wir leiten ab <sup>1</sup>

A	B	A und B	A oder B	"Entweder A oder B"
w	w	w	w	f
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

Implikation zwischen Aussagen

$A \Rightarrow B$  steht für:  $A$  impliziert  $B$

Falls  $A$  gilt, dann gilt auch  $B$

$A$  ist hinreichende Bedingung für  $B$

$B$  ist notwendige Bedingung für  $A$

Formal definieren wir  $A \Rightarrow B$  ist wahr, falls  $\neg A$  oder  $B$

	A	B	$A \Rightarrow B$
	w	w	w
D.h.	w	f	f
	f	w	w
	f	f	w

Außerdem kürzen wir ab:

$A \Leftrightarrow B$  steht für  $A \Rightarrow B \wedge A \Leftarrow B$

Beispiel:

[...]

Bemerkung:

Für alle Mengen  $M$  gilt  $\emptyset \subset M$

$\forall M : \emptyset \subset M$ .

---

<sup>1</sup>w = wahr, f = falsch

## **2 Reelle Zahlen übersprungen**

### 3 Folgen

#### Definition 3.1: Folge komplexer Zahlen

Eine Folge komplexer Zahlen ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{C} \\ n &\rightarrow a(n) = a_n \end{aligned}$$

Notation  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Analog:  $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots = (a_n)_{n \geq n_0}$

Heißt soviel wie, da die Folge von einem Term in Abhängigkeit von  $n$  steht, dass man eine Bijektion mit den Natürlichen Zahlen bilden kann.

#### 3.1 Konvergent und Grenzwert

##### Definition 3.2: Konvergente Folgen

1. Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt konvergent, falls  $a \in \mathbb{C}$  mit folgender Eigenschaft existiert:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

Dann heißt  $a$  Grenzwert oder Limes von  $(a_n)$ .

$$\begin{aligned} \text{Schreibweise: } a_n &\rightarrow a, a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \end{aligned}$$

2. Hat eine Folge keinen Grenzwert, heißt sie divergent.
3. Gilt  $a_n \rightarrow 0$ , so heißt  $(a_n)$  Nullfolge.

WICHTIG Die Aussagen "für alle bis auf endlich viele Folgenglieder und" "für unendlich viele Folgenglieder" sind nicht äquivalent.

##### Lemma 3.1:

- a) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.
- b) Jede konvergente Folge ist beschränkt:  $\exists s \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq s$

##### Satz 3.1: Regeln für n-te Wurzel

- a) Für  $a \in \mathbb{R}^+$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .
- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$



## 3.2 Rechenregeln für Grenzwerte

### Lemma 3.2:

Es seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente Folgen mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ . Dann sind  $(\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_n * b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und, falls  $b \neq 0$  :  $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent.

Heißt soviel wie, sollten die Folgen jeweils konvergieren, kann man die Grenzwerte miteinander verrechnen und skalieren.

### Lemma 3.3:

Es seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente Folgen. Es gelte  $a_n \leq b_n$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt:  $\lim a_n \leq \lim b_n$ .

Hiermit können wir Folgen abschätzen, was manchmal ganz hilfreich sein kann.

### Lemma 3.4: Sandwich-Lemma

Es seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  reelle Folgen mit:

- (i)  $(a_n)$  und  $(c_n)$  sind konvergent mit:  $\lim a_n = \lim c_n$
- (ii) Für alle bis auf endlich viele  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $a_n \leq b_n \leq c_n$

Dann ist  $(b_n)$  konvergent mit:  $\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n$

Wenn wir eine Minorante und Majorante finden können, mit dem gleichen Grenzwert, so konvergiert die Folge gegen den selben Grenzwert

## 3.3 Häufungspunkt, Cauchy-Folge, Teilfolgen

### Definition 3.3:

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen heißt monoton wachsend, falls gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$$

Monoton Fallend analog.

### Satz 3.2: Monotoniekriterium

Jede beschränkte monotone Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} & \text{falls monoton wachsend} \\ \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Monoton + Beschränkt = Konvergent

**Definition 3.4: Häufungspunkte**

Sei  $(a_n)$  eine Folge. Dann heißt  $a \in \mathbb{C}$  Häufungspunkt der Folge, falls gilt:

$\forall \epsilon > 0$  gilt  $|a_n - a| < \epsilon$

für unterschiedlich viele  $n \in \mathbb{N}$

Heißt soviel wie: wenn Teilfolgen konvergieren, sind die Grenzwerte der Teilfolgen die Häufungspunkte der Folge.

**Definition 3.5: Teilfolge**

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge komplexer Zahlen und  $(n_l)_{l \in \mathbb{N}}$  eine Folge natürlicher Zahlen mit  $\forall l \in \mathbb{N} : n_{l+1} > n_l$ . Dann heißt  $(a_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

**Lemma 3.5: Häufungspunkte**

$a \in \mathbb{C}$  ist genau dann ein Häufungspunkt der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn es eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$  gibt mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_l} = a$ .

Also genau was ich gemeint hatte.

**Satz 3.3:  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$** 

$\mathbb{Q}$  liegt dicht in  $\mathbb{R}$

**Lemma 3.6:**

Jede Folge reeller Zahlen besitzt eine monotone Teilfolge.

Heißt, bei jeder Folge reeller Zahlen kann man sich vereinzelt Elemente raus suchen, welche eine monotone Teilfolge bilden.

**Satz 3.4: Bolzano-Weierstraß für  $\mathbb{R}$** 

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge

Gilt natürlich auch in komplexen Zahlen.

**Definition 3.6: Cauchy-Folge**

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  komplexer Zahlen heißt Cauchy-Folge, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \epsilon$$

### Satz 3.5: Cauchy Kriterium

Die Folge  $(a_n)$  ist genau dann konvergent, wenn  $(a_n)$  eine Cauchy-Folge ist.  
Bemerkung Es gibt Cauchy-Folgen  $(a_n)$  mit  $a_n \in \mathbb{Q} \forall n \in \mathbb{N}$  die nicht gegen eine rationale Zahl konvergieren.

Als Beispiel eine Folge die gegen  $e$  konvergiert, da  $e \notin \mathbb{Q}$

### 3.4 Limes superior und Limes inferior

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge, d.h.  $\exists s \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq s$ .

Beobachtung Sei  $B_n := \sup\{a_k | k \geq n\}$   
 $b_n := \inf\{a_k | k \geq n\}$

Dann ist die Folge  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend.

Außerdem gilt:  $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \leq B_n; |b_n|, |B_n| \leq s$

Also konvergieren  $(b_n)$  und  $(B_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$

### Definition 3.7: lim sup und lim inf

Wir definieren:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} := \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \text{ limes superior}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ limes inferior}$$

### Definition 3.8:

Falls es eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  nicht nach oben beschränkt ist, definieren wir  $\sup A := +\infty$ .

Falls es eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  nicht nach unten beschränkt ist, definieren wir  $\inf A := -\infty$ .

Außerdem setzen wir  $\sup \emptyset := -\infty, \inf \emptyset := +\infty$ .

Wir setzen:  $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty \equiv \infty$ .

### Definition 3.9: Bestimmt Divergent

Eine Folge  $(a_n)$  reeller Zahlen heißt bestimmt divergent gegen  $+\infty$ , falls gilt:  
 $\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 = n_0(K) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \geq K$

Eine Folge  $(a_n)$  heißt bestimmt divergent gegen  $-\infty$ , falls  $(-a_n)$  bestimmt divergent gegen  $+\infty$  ist.

**Satz 3.6:**

Die Folge  $(a_n)$  sei bestimmt divergent gegen  $\pm\infty$ . Dann gilt:

- (i)  $a_n \neq 0$  für alle bis auf endlich viele  $n \in \mathbb{N}$
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$

**Satz 3.7:**

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge mit  $a_n > 0$  für alle bis auf endlich viele  $n \in \mathbb{N}$ . Dann divergiert die Folge  $(\frac{1}{a_n})$  bestimmt gegen  $+\infty$ .

Analog für  $a_n < 0$  gegen  $-\infty$

**Satz 3.8: Charakterisierung von limsup und liminf**

Es sei  $(a_n)$  eine Folge reeller Zahlen

1. Es gilt  $\limsup a_n = a \in \mathbb{R}$  genau dann, wenn für alle  $\epsilon > 0$  gilt

- (i)  $a_n < a + \epsilon$  für alle bis auf endlich viele  $n \in \mathbb{N}$
- (ii)  $a_n > a - \epsilon$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$

Heißt das Supremum  $a_n$  ist nur dann kleiner als der Grenzwert, wenn man etwas unendlich kleines an den Grenzwert addiert. Es ist größer als der Grenzwert sobald man etwas vom Grenzwert abzieht.

2. Es gilt  $\liminf a_n = a \in \mathbb{R}$  genau dann, wenn für alle  $\epsilon < 0$  gilt:

- (i)  $a_n > a - \epsilon$  für alle bis auf endlich viele  $n \in \mathbb{N}$
- (ii)  $a_n < a + \epsilon$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$

Ähnliche Erklärung wie oben auch.

3.  $(a_n)$  ist genau dann Konvergent, wenn  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$ . In diesem Fall gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

## 4 Stetige Funktionen und die Topologie des $\mathbb{R}^n$

### Definition 4.1:

Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine nichtleere Teilmenge. Eine reelwertige bzw komplexwertige Funktion auf  $D$  ist eine Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  bzw  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$

Für zwei Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) definieren wir

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in D$$

$$(f - g)(x) := f(x) - g(x) \quad \forall x \in D$$

$$(f * g)(x) := f(x) * g(x) \quad \forall x \in D$$

und falls gilt:  $g(x) \neq 0 \forall x \in D$ ,  $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$

### Definition 4.2: Endlicher Abstand

Der endliche Abstand zweier Punkte  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)$  des  $\mathbb{R}^n$  ist

$$|x - y| := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2)^{\frac{1}{2}}$$

## 4.1 Stetigkeit

### Definition 4.3: $\epsilon - \delta$ -Kriterium

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) heißt stetig in  $x_0 \in D$ , falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0 \in D : |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

$f$  heißt stetig in  $D$ , falls  $f$  in jedem Punkt von  $D$  stetig ist.

Heißt soviel wie für jeden Abstand den 2 Folgenglieder  $[f(x)$  nach  $f(y)]$  von einander haben muss es einen Abstand zwischen  $x$  und  $y$  geben. Was nicht erfüllt werden kann, wenn die Funktion an  $x_0$ /einer Stelle springt.

### Satz 4.1: Folgenkriterium

$f : D \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann stetig in  $x^* \in D$ , wenn für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x^*) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$

**Satz 4.2: Stetige Funktionen verknüpft sind Stetig**

Es seien  $f, g \in D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig in  $x^* \in D$ . Dann sind  $f \pm g, f * g$  und falls  $g(x) \neq 0 \forall x \in D \stackrel{f}{g}$  stetig in  $x^*$ .

**Satz 4.3: Komposition stetiger Funktionen sind Stetig**

Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(D) \subset E$  gegeben. Ist  $f$  stetig in  $x^* \in D$  und  $g$  stetig in  $y^* := f(x^*) \in E$ , so ist auch  $g \circ f$  stetig in  $x^*$

$$\begin{array}{llll} D & \xrightarrow{f} & f(D) \in E & \xrightarrow{g} \mathbb{C} \\ x^* & \rightarrow & f(x^*) = y^* & \rightarrow g(y^*) \end{array}$$

**Definition 4.4: Lipschitz-Stetig**

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt Lipschitz-Stetig mit Lipschitz-Konstante  $L \geq 0$ , falls gilt:  $\forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

**4.2 Offen und abgeschlossene Mengen**

Sei  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $r > 0$ . Dann ist  $B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq r\}$  der (abgeschlossene) Ball um  $a$  mit Radius  $r$ .

Um jede Menge im  $\mathbb{R}^n$  kann man einen Kreis/Ball ziehen mit Radius  $r$  um alle Elemente der Menge  $M$  einzuschließen.

**Definition 4.5: Randpunkt von M**

Es sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Menge. Ein Punkt  $p \in \mathbb{R}^n$  heißt Randpunkt von  $M$ , falls gilt:

$$\forall r > 0 : B_r(p) \cap M \neq \emptyset \neq B_r(p) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M)$$

Ein Punkt  $p$  heißt Randpunkt, wenn man Kreise/Bälle um den Punkt ziehen kann, dass Teil des Kreises/Balls in der Menge liegt

**Definition 4.6: Offene Mengen**

- a) Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt offen, falls  $M \cap \delta M = \emptyset$  gilt.
- b)  $M$  heißt abgeschlossen, falls  $\delta M \subset M$  gilt.

Wobei  $\delta M$  den Rand von  $M$  beschreibt  $\Rightarrow$  Eine Menge ist offen, wenn  $M$  vereinigt mit dem Rand leer ist und abgeschlossen, falls der Rand eine Teilmenge von  $M$  ist

**Lemma 4.1: Offen**

$M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann offen, wenn gilt:

$$\forall p \in M \exists r > 0 : B_r(p) \subset M$$

Heißt  $M$  ist offen, wenn für jeden Punkt aus der Menge einen Kreis/Ball ziehen kann mit einem Radius größer 0, der ganz in der Menge ist - Ginge bei abgeschlossenen Mengen nicht, da wenn man einen Punkt am Rand wählt gibt es kein  $r$  für den der ganze Kreis/Ball in der Menge ist

**Korollar 4.1: Offene Mengen bestehen aus Offenen Bällen**

Jede offene Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist eine Vereinigung offener Bälle.

$$\begin{aligned} \forall p \in M \exists r_p > 0 : \mathring{B}_{r_p}(p) \subset M \\ \Rightarrow M = \bigcup_{p \in M} \mathring{B}_{r_p}(p) =: RHS \end{aligned}$$

Heißt um jeden Punkt zieht man ein Kreis dessen Radius größer 0 ist, nimmt dann alle Elemente in den Kreisen und steckt sie in die Menge  $M$

**Lemma 4.2: Abgeschlossen**

$M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Für alle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in M \forall n \in \mathbb{N}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow a$  gilt mit  $a \in M$

Heißt, die Menge ist abgeschlossen wenn es keine Folge gibt, dessen Grenzwert außerhalb der Menge liegt

**Satz 4.4:**

a) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

Formulierung 1: Es sei  $\mathcal{U} \subset P(\mathbb{R}^n)$  mit  $\forall U \in \mathcal{U} : U$  ist offen  
 $\Rightarrow \bigcup \mathcal{U} := \{x \in \mathbb{R}^n | \exists U \in \mathcal{U} : x \in U\} \subset \mathbb{R}^n$  ist offen

Formulierung 2: Es sei  $I$  eine (Index-)Menge  $\forall i \in I$  sei  $U_i \subset \mathbb{R}^n$  offen  
 $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \subset \mathbb{R}^n$  ist offen

b) Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen

Formulierung 1: Es sei  $\mathcal{A} \subset P(\mathbb{R}^n) : \forall A \in \mathcal{A} : A$  ist abgeschlossen  
 $\Rightarrow \bigcap \mathcal{A} := \{x \in \mathbb{R}^n | \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\}$  ist abgeschlossen

Formulierung 2: Es sei  $I$  eine (Index-)Menge  $\forall i \in I$  sei  $A_i \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen  
 $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \subset \mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen.

**Definition 4.7: Innen und Abschluss**

Das Innere  $\overset{\circ}{M}$  einer Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist  $\overset{\circ}{M} := M \setminus \delta M$ .

Der Abschluss  $\overline{M}$  ist  $\overline{M} := M \cup \delta M$ .

Heißt das Innere einer Menge  $M$  wird beschrieben als  $M$  ohne dem Rand.

Der Abschluss einer Menge ist  $M$  vereinigt mit dem Rand

**Lemma 4.3:**

1.  $\overset{\circ}{M}$  ist die größte offene Teilmenge, die in  $M$  enthalten ist.

$$M \setminus \delta M = \overset{\circ}{M} = \bigcup \{U \mid U \subset M \text{ und } U \text{ offen}\}$$

Dadurch, dass  $\overset{\circ}{M}$  die Menge  $M$  ohne dem Rand ist, ist es die größte offene Teilmenge von  $M$

2.  $\overline{M}$  ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge, die  $M$  enthält.

$$M \cup \delta M = \overline{M} = \bigcap \{A \mid A \supset M \text{ und } A \text{ abgeschlossen}\}$$

Dadurch, dass  $\overline{M}$  die Menge  $M$  mit dem Rand ist, ist es die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $M$

**Korollar 4.2:**

Es sei  $M$  eine Menge. Dann gilt:

- a)  $M$  offen  $\Leftrightarrow M = \overset{\circ}{M}$
- b)  $M$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow M = \overline{M}$

**Definition 4.8: Topologie des  $\mathbb{R}^n$** 

Die Topologie des  $\mathbb{R}^n$  ist das Mengensystem

$$\mathcal{T} := \{U \subset \mathbb{R}^n \mid U \text{ offen}\}$$

die Menge der offenen Mengen



### 4.3 Kompaktheit und die Existenz von Extrema

#### Definition 4.9: Beschränkt und Kompakt

1. Ein  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt beschränkt, wenn gilt:  $\exists s > 0 : M \subset B_s(0)$   
D.h.  $\forall x \in M : |x| \leq s$ .
2. Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt kompakt, falls jede Folge in  $M$  eine konvergente Teilfolge mit Limes in  $M$  besitzt  
 $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in M \forall n \in \mathbb{N} \exists$  Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in M$

#### Satz 4.5: Heine-Borel

Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

#### Satz 4.6:

Sei  $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}$  kompakt. Dann existiert  $\max K$  und  $\min K$ .

#### Satz 4.7:

Das stetige Bild einer kompakten Menge ist kompakt

D.h. Es sei  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) eine stetige Funktion und  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Dann ist  $f(K) \subset \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) kompakt.

#### Korollar 4.3: Existenz von Extrema

Es sei  $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann nimmt  $f$  ein Maximum und ein Minimum an. D.h.

$$\exists x_{\min}, x_{\max} \in K : \min f := f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) =: \max f \forall x \in K$$

### 4.4 Zusammenhang und Zwischenwertsatz

#### Definition 4.10: Zusammenhängend

Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt zusammenhängend, falls es keine offenen Mengen  $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$  gibt mit:

- (i)  $M \cap U_1 \neq \emptyset \neq M \cap U_2$
- (ii)  $M = (M \cap U_1) \cup (M \cap U_2)$
- (iii)  $(M \cap U_1) \cap (M \cap U_2) \neq \emptyset$

**Definition 4.11: Wegzusammenhängend**

Eine Teilmenge  $W \subset \mathbb{R}^n$  heißt wegzusammenhängend, falls es für alle  $x, y \in W$  eine stetige Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt mit  $\gamma([0, 1]) \subset W$  und  $\gamma(0) = x$  sowie  $\gamma(1) = y$ . Die Abbildung  $\gamma$  nennt man in dieser Situation einen Weg von  $x$  nach  $y$  in  $W$ .

**Satz 4.8:**

Es sei  $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

$$M \text{ ist ein Intervall} \Leftrightarrow \forall a, b \in M \text{ mit } a < b : [a, b] \subset M$$

**Satz 4.9:**

Die Zusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind genau die Intervalle:  
 $M \subset \mathbb{R}$  Zusammenhängend  $\Leftrightarrow M$  ist ein Intervall

**Satz 4.10: Offen und Abgeschlossen**

Eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  sei gegeben. Dann heißt  $M \subset D$  offen in  $D$ , falls es eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  mit  $M = D \cap U$  gibt.

Analog mit  $M$  ist abgeschlossen in  $D$ , falls eine abgeschlossene Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  existiert mit  $M = D \cap A$

**Lemma 4.4:**

Die Teilmenge  $M \subset D$  ist genau dann offen in  $D$ , wenn gilt:

$$\forall x \in M \exists r > 0 : B_r(x) \cap D \subset M$$

**Lemma 4.5: stetig = Urbild offener Mengen sind offen**

Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben.

$f$  ist stetig  $\Leftrightarrow \forall U \subset \mathbb{R}$  offen :  $f^{-1}(U) \subset D$  ist offen in  $D$ .

**Lemma 4.6: Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend**

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $D \subset \mathbb{R}^n$  Zusammenhängend

$\Rightarrow f(D) \subset \mathbb{R}$  ist Zusammenhängend.

**Satz 4.11: Zwischenwertsatz**

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann nimmt  $f$  alle Werte zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.

D.h.  $f([a, b]) \supset [f(a), f(b)]$  falls gilt  $f(a) \leq f(b)$

$f([a, b]) \supset [f(b), f(a)]$  falls gilt  $f(b) \leq f(a)$

**Korollar 4.4:**

Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat eine Nullstelle

D.h.  $f(x) = a_n * x^n + \dots + a_1 * x + a_0$  mit  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  und  $a_n \neq 0$  und  $n$  ungerade, dann  $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0$

**Definition 4.12: (Streng-) Monoton Steigend**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (streng) monoton steigend, falls gilt:

$$\forall x, y \in [a, b] : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \text{ bzw. für streng } x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Analog für (streng) monoton fallend

**Satz 4.12:**

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton steigend. Dann ist  $f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$  bijektiv und  $f^{-1}$  ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.

Analog für streng monoton fallend.

## 5 Differenzialrechnung

Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $x_0 \in D$  für eine Funktion  $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  schreiben wir:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \in \mathbb{R}$ , falls gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D \setminus \{x_0\} : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$$

### 5.1 Differenzierbarkeit

#### Definition 5.1: Differenzierbar

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann heißt  $f$  Differenzierbar in  $x_0 \in I$ , falls  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert.

Dann heißt  $f'(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := \frac{d}{dx}f(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  Die Ableitung von  $f$  in  $x_0$ .  $f$  heißt Differenzierbar auf  $I$ , falls  $f$  in jedem Punkt von  $I$  Differenzierbar ist. Die Ableitung von  $f$  ist die Funktion:

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f'(x) \end{aligned}$$

#### Definition 5.2: Tangente

Tangente an (Graphen von)  $f$  in  $x_0$  ist  $x \rightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

#### Lemma 5.1:

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Differenzierbar in  $x_0 \in I$ , falls es eine Funktion  $\Delta : I \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

- a)  $\Delta$  stetig in  $x_0$
- b)  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) * \Delta(x) \quad \forall x \in I$

#### Satz 5.1: Differenzierbar $\Rightarrow$ stetig

Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  Differenzierbar in  $x_0 \in I$ , dann ist  $f$  stetig in  $x_0$

## 5.2 Differentiationsregeln

Im folgenden seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  Differenzierbar in  $x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\Delta_f(x)$$

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)\Delta_g(x)$$

mit  $\Delta_f, \Delta_g$  stetig in  $x_0$

### Satz 5.2:

$\lambda f, \lambda \in \mathbb{R}$ , und  $f \pm g$  sind Differenzierbar in  $x_0$  mit

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

### Satz 5.3: Produktregel/Leibniz-Regel

$f * g$  sind Differenzierbar in  $x_0$  mit

$$(f * g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

### Satz 5.4: Quotientenkriterium

Sei  $g(x_0) \neq 0$ . Dann ist  $g(x) \neq 0$  für alle  $x$  in der Nähe von  $x_0$  und  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ist Differenzierbar mit:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

### Satz 5.5: Kettenregel

Es seien  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen auf den Intervallen  $I, J \subset \mathbb{R}$  mit  $f(I) \subset J$ . Falls  $f$  Differenzierbar in  $x_0$  und  $g$  Differenzierbar in  $y_0$  mit  $y_0 := f(x_0)$  so ist  $g \circ f$  Differenzierbar in  $x_0$  mit:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) * f'(x_0).$$

### Satz 5.6:

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton, stetig und in  $x_0 \in [a, b]$  Differenzierbar mit  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann ist die nach Satz 4.12 wohldefinierte Umkehrabbildung  $f^{-1}$  in  $y_0 := f(x_0)$  Differenzierbar mit:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

### 5.3 Mittelwertsatz und die Existenz von Extrema

$I \subset \mathbb{R}$  Intervall

$$\rightsquigarrow C^0(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

$$C^1(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig Differenzierbar}\}$$

Dabei heißt  $f$  stetig Differenzierbar, falls  $f$  Differenzierbar und  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist.

falls  $f'$  Differenzierbar, so heißt  $f$  2-fach Differenzierbar.

Wir schreiben  $f^{(2)}(x) := f''(x) := (f')'(x)$  2-te Ableitung.

Analog:  $f^{(k+1)}(x) := (f^{(k)})'(x)$  falls diese Ableitung existiert.

$f$  heißt  $k$ -fach stetig Differenzierbar, falls  $f^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}$  existiert und stetig ist.

$$\rightsquigarrow C^k(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ k-fach stetig Differenzierbar}\}$$