Inhaltsverzeichnis

1 Norm und Skalarprodukt

1.1 Norm

Definitheit: $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$
absolute Homogenität: $||\alpha x|| = |\alpha| * ||x||$
Dreiecksungleichung: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

1.2 Skalarprodukt

¡x + y, z¿ = ¡x, z¿ + ¡y, z¿
¡x, y + z¿ = ¡x, y¿ + ¡x, z¿
TODO: Klammer
$< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$
$< x, \lambda y >= \lambda < x, y >$
¡x, y¿ = ¡y, x¿
$< x, x > \geq 0$
$< x, x >= 0 \Rightarrow x = 0$

1.2.1 Vom Skalarprodukt induzierte Norm

$||x|| = \sqrt{< x, x >}$

1.2.2 Cauchy-Schwarzche Ungleichung

$|< x, y >| \leq ||x|| * ||y||$

2 Symmetrische, positiv definite Matrix

TODO: Matrizen
insbesonders: Diagonalmatrizen, Einheitsmatrizen
positiv definit: $x^t Ax > 0$(beliebige Matrix)
alle EW ¿ 0 (symmetrische Matrix)
alle Haupt[TODO: ?] ¿ 0 (symetrische Matrix)
TODO: Matrix ⇒ 3 Hauptminoren[?] = det(a), det(TODO: Matrix), det(TODO: Matrix)

2.1 Cholesky-Zerlegung $A = GG^t$

G unter der Matrix, invertierbar (symmetrische Matrix)

2.2 [?] diagonaldominant und alle $a_{ii} \geq 0$

(symmetrische Matrix)

2.3 Eigenwerte

$det(\lambda En - A) = 0$

2.4 Eigenvektor

$f(v) = \lambda v$

3 Matrixnormen

3.1 Natürliche Matrixnorm

$||A||_\infty := max_{x\neq 0}\frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = max_{||x||=1}||Ax||_\infty$

$||A|| = 0 \Rightarrow A = 0, ||\lambda A|| = |\lambda| * ||A||, ||A+B|| \leq ||A|| + ||B||, ||A*B|| \leq ||A|| * ||B||$

3.2 Verträglichkeit

$||Ax|| \leq ||A|| * ||x||$

3.3 Zeilensummennorm

= natürliche Matrixnorm

$||A||_\infty = max_{||x||_\infty=1}||Ax||_\infty = max_{i=1,\ldots,m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

$A = TODO : Matrix||A||_\infty = max|1|+|-2|+|-3|, |2|+|3|+|-1| = max6, 6 = 6$

3.4 Spaltensummennorm

$||A||_1 := max_{x\neq 0}\frac{||Ax||_1}{||x||_1} = max_{||x||_1=1}||Ax||_1 = max_{j=1,\ldots,n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$

$A = TODO : Matrix||A||_1 = max|1|+|2|, |-2|+|3|, |-3|+|-1| = max3, 5, 4 = 5$

$||A^t||_1 = ||A||_\infty$

3.5 Spektralnorm

$||A||_2 := max_{||x||_2=1}||Ax||_2 = max_{x\neq 0}\frac{||Ax||_2}{||x||_2} = max_{||x||_2=1} < Ax, Ax >= max_{||x||_2=1} < A^tAx, x >= max\sqrt{|\lambda|}, \lambda * EWvonA^tA$

$A = TODO : Matrix, A^tA = TODO : Matrixdet(\mu E_n - A^tA) = 0 \Leftrightarrow \mu_{1,2} = 16, 1$

$||A||_2 = \sqrt{max(\mu_1, \mu_2)} = \sqrt{\mu_1} = \sqrt{16} = 4$

4 Spektralradius, Konditionszahl einer Matrix

4.1 Spektralradius φ

$\varphi(A) = max : 1 \leq i \leq n|\lambda_i(A)|= spr(A)$ der betragsmäßig größte Eigenwert von A

$||A||\geq |\lambda|$ (für jede Matrixnorm, die mit einer Vektornorm verträglich ist)

4.2 Konditionszahl einer Matrix A

$cond(A) = ||A||*||A^{-1}||$

4.3 Sonderfall symmetrisch, positiv definite Matrix

$cond(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

5 Ähnlichkeitstransformation, Invarianz der Eigenwerte

y = Ax

$\bar{x} = Cx, \bar{y} = Cy \qquad (detC \neq 0), C \in GL$

$y = Ax \Rightarrow C^{-1}\bar{y} = AC^{-1}\bar{x} \Rightarrow \bar{y} = CAC^{-1}\bar{x} \Rightarrow \bar{y}\bar{A}\bar{x}$

$\bar{A} = CAC^{-1} \Rightarrow \bar{A} \sim A$

$\lambda EW, vEV zuA$

$\Rightarrow Av = C^{-1}\bar{A}Cv = \lambda v$

$\Rightarrow \bar{A}undA$ haben dieselben Eigenwerte, algebraisch und geometrische Vielfalten stimmen überein (Invarianz der Eigenwerte)

5.1 Reduktionsmethoden

A duch Ähnlichkeitstransformationen

$A = A^{(0)} = T_1^{-1}A^{-1}T_1 = Q... = T_i^{-1}A^{(i)}T_i = ...$

auf Form bringen, für welche EW und EV leicht zu berechnen sind (z.B. Jordan-Normalform)

6 Gleitkommazahlen, Gleitkommagitter, Maschienengenauigkeit, Rundungsfehler