

0.1 Norm

Definitheit: $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

absolute Homogenität: $\|\alpha x\| = |\alpha| * \|x\|$

Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

0.2 Skalarprodukt

$$\left. \begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \langle x, y + z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned} \right\} \text{Linearität}$$
$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$\left. \begin{aligned} \langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle &= 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned} \right\} \text{positiv Definitheit}$$

1 Symmetrische, positiv definite Matrix

positiv definit: $x^t A x > 0$ (beliebige Matrix)

alle EW > 0 (symmetrische Matrix)

1.1 Natürliche Matrixnorm

$$\|A\|_{\infty} := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \max_{\|x\|_{\infty}=1} \|Ax\|_{\infty}$$

$$\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\|\lambda A\| = |\lambda| * \|A\|$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\|A * B\| \leq \|A\| * \|B\|$$

1.2 Zeilensummennorm

= natürliche Matrixnorm

$$\|A\|_{\infty} = \max_{\|x\|_{\infty}=1} \|Ax\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

1.3 Spaltensummennorm

$$\|A\|_1 := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

1.4 Spektralnorm

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &:= \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \\ &= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \\ &= \max_{\|x\|_2=1} \langle Ax, Ax \rangle \\ &= \max_{\|x\|_2=1} \langle A^t A x, x \rangle \\ &= \max \sqrt{|\lambda|}, \lambda * \text{EW von } A^t A \end{aligned}$$

1.5 Konditionszahl einer Matrix A

$$\text{cond}(A) = \|A\| * \|A^{-1}\|$$

1.6 Sonderfall symmetrisch, positiv definite Matrix

$$\text{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

1.7 Gleitkommazahl (normalisiert)

$$b \in \mathbb{N}, b \geq 2, x \in \mathbb{R}$$

$$x = \pm m * b^{\pm e}$$

$$\text{Mantisse: } m = m_1 b^{-1} + m_2 b^{-2} + \dots \in \mathbb{R}$$

$$\text{Exponent: } e = e_{s-1} b^{s-1} + \dots + e_0 b^0 \in \mathbb{N}$$

für $x \neq 0$ eindeutig

1.8 Gleitkommagitter

$$A = A(b, r, s) \text{ größte Darstellbare Zahl: } (1 - b^{-r}) * b^{b^s - 1}$$

mit b als Basis, r als Mantissenlänge, s als Exponentenlänge

1.9 Maschinengenauigkeit eps

$$\text{eps} = \frac{1}{2} b^{-r+1}, IEEE : \text{eps} = \frac{1}{2} * 2^{-52} \approx 10^{-16}$$

1.10 Rundungsfehler

$$\text{absolut : } |x - rd(x)| \leq \frac{1}{2} b^{-r} b^e$$

$$\text{relativ : } \left| \frac{x - rd(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{2} b^{-r+1} = \text{eps}$$

1.11 Fehler I

$f \in C^{n+1}[a, b]$, $\forall x \in [a, b] \exists \xi_x \in (\overline{x_0, \dots, x_n, x})$, wobei das Intervall das kleinst mögliche Intervall, das alle x_i enthält, s.d.

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

1.12 numerische Aufgabe

$x_j \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1, \dots, x_m) \Rightarrow y_i = f_i(x_j)$

fehlerhafte Eingangsgrößen $x_i + \Delta y_i$

$|\Delta y_i|$ ist der absolute Fehler, $|\frac{\Delta y_i}{y_i}|$ ist der relative Fehler

1.13 Konditionszahl (relativ)

$$k_{ij}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \frac{\Delta x_j}{x_j}$$

$$\frac{\Delta y_i}{y_i} = \sum_{j=1}^m k_{ij}(x) \frac{\Delta x_j}{x_j}$$

$|k_{ij}(x)| \gg 1 \Rightarrow$ schlecht konditioniert

$|k_{ij}(x)| \ll 1 \Rightarrow$ gut konditioniert, ohne Fehlerverstärkung

$|k_{ij}(x)| > 1 \Rightarrow$ Fehlerverstärkung

$|k_{ij}(x)| < 1 \Rightarrow$ Fehlerdämpfung

1.14 stabiler Algorithmus

akkumulierte Fehler der Rechnung (Rundungsfehler, Auswertungsfehler, etc.) übersteigen den unvermeidbaren Problemfehler der Konditionierung der Aufgabe nicht. Aka Trotz Ungenauigkeiten bei den Eingabe Variablen erhalten wir fast sehr genaue Ergebnisse.

2 Auslöschung

Verlust von Genauigkeit bei der Subtraktion von Zahlen mit gleichem Vorzeichen

3 Horner-Schema*

Das sogenannte "Horner-Schema"

$b_n = a_n$, $k = n - 1, \dots, 0$ $b_k = a_k + \xi b_{k+1}$ liefert den Funktionswert $p(\xi) = b_0$ des Polynoms

$$p(x) = a_0 + x(\dots + x(a_{n-1} + a_n x)\dots)$$

3.1 Code

def horner(Ac, Ax, n, x):

 y = 0.0

 for i in reversed range(n):

 y = y * (x - Ax[i]) + Ac[i]

 return y

Ac: Vektor mit Koeffizienten, ist ein np Array

Ax: Stützstellen, ist ein np Array

n: Anzahl der Stützstellen, ist ein int

x: Auswertungspunkt, ist ein double

Immer Horner-Schema zur Auswertung von Polynomen verwenden.

3.2 Interpolation

Zuordnung von $g \in P$ zu f durch Fixieren von Funktionswerten

$$g(x_i) = y_i = f(x_i), i = 0, \dots, n$$

3.3 Approximation

$g \in P$ beste Darstellung, z.B.

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| \text{ minimal}$$

$$\left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ minimal}$$

3.4 Lagrangsche Darstellung

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i^{(n)}(x) \in P_n \text{ mit } p(x_j) = y_j$$

Nachteil: Bei Hinzunahme von (x_{n+1}, y_{n+1}) ändert sich das Basispolynom komplett

3.4.1 Newton-Polynome

Bei Hinzunahme von (x_{n+1}, y_{n+1}) muss nur eine neue Rechnung durchgeführt werden, und nicht das gesamte Polynom neu berechnet werden

3.5 Dividierte Differenzen*

$y[x_i, \dots, x_{k+1}] = \frac{y[x_{i+1}, \dots, x_{k+1}] - y[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$ mit $k = 1, \dots, j$ und $i = k - j$
für beliebige $[?] \sigma : 0, \dots, n \rightarrow 0, \dots, n$ gilt $y[\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n] = y[x_0, \dots, x_n]$

3.6 Extrapolationsfehler

$a(n)$ habe die Entwicklung:

$$a(h) = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j h^{jq} + a_{n+1}(h) h^{(n+1)q} \quad \text{mit } q > 0, \text{ Koeffizienten } a_j$$

und $a_{n+1}(h) = a_{n+1} + a(1[????])$

$(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ erfülle:

$$0 \leq \frac{h_{k+1}}{h_k} \leq p < 1 \quad (\Rightarrow h_k \text{ positiv monoton fallend})$$

Dann gilt für $p_1^{(k)} \in P_n$ (in h^q) durch $(h_k^q, a(h_k)), \dots, (h_{k+n}^q, a(h_{k+n}))$

$$a(0) - p_n^{(k)}(0) = O(h_k^{(n+1)q}) \quad (k \rightarrow \infty)$$

3.7 Kubischer Spline

$s_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kubischer Spline bezüglich $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, wenn gilt

1. $s_n \in C^2[a, b]$
2. $S_n|_{I_i} \in P_3$, $i = 1, \dots, n$
natürlicher Spline:
3. $s_n''(a) = s_n''(b) = 0$

4 Gauß-Approximation

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

H Prähilbertraum, $\delta \subset H$ endlich Dimensional

$\exists f \in H$ eindeutig bestimmte "beste Approximation" $g \in S$

$$\|f - g\| = \min_{\varphi \in S} \|f - \varphi\|$$

bes. einfache Lösung, wenn $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ eine ONB ist, d.h.

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{i,j} \Rightarrow \alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow g = \sum_{i=1}^n \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \text{ ist beste Approximation}$$

5 Gram-Schmidt-Algorithmus

$$w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad \tilde{w}_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_{<v_k, w_i>} w_i, \quad w_k := \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|}$$

5.1 Code

```
n = size(v, 1)
k = size(v, 2)
u = np.zeros(n, k)
u[:, 1] = v[:, 1]/sqrt(v[:, 1] * v[:, 1])
for i in range(2, k):
    u[:, i] = v[:, i]
    for j in range(1, i - 1):
        u[:, i] = u[:, i] - (u[:, i] * u[:, j]) / (u[:, j] * u[:, j]) * u[:, j]
    u[:, i] = u[:, i] / sqrt(u[:, i] * u[:, i])
```

5.2 Darstellung des Interpolationsfehler

Sei $f \in C^{n+1}[a, b]$. Dann gibt es zu jedem $x \in [a, b]$ ein $\xi_x \in (x_0, \dots, x_n, x)$, so dass gilt:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

6 Interpolatorische Quadraturformeln

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx I^{(n)}(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

Stützstellen $a \leq a_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ und Gewichte $\alpha_i \in \mathbb{R}$

6.1 Newton-Cotes-Formel*

äquidistante Stützstellen

6.2 Abgeschlossene Formeln

$$H = \frac{b-a}{n}, x_i = a + iH, a = x_0, b = x_n$$

$$\text{Trapezregel: } I^{(1)}(f) = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$\text{Simpsonregel: } I^{(2)}(f) = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

$$\text{3/8 - Regel: } I^{(3)}(f) = \frac{b-a}{8} [f(a) + 3f(a+H) + 3f(b-H) + f(b)]$$

6.3 Offene Formeln

$$(H = \frac{b-a}{n+2}, x_i = a + (i+1)H, a < x_0, x_n < b)$$

$$I^{(0)}(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) \quad \text{Mittelpunktregel}$$

$$I^{(1)}(f) = \frac{(b-a)}{2}(f(a+H) + f(b-H))$$

$$I^{(2)}(f) = \frac{(b-a)}{3}(2f(a+H) - f(\frac{a+b}{2}) + 2f(b-H))$$

6.4 Code

6.5 Abhilfe: Summierte Quadraturformeln *

$$I - n^{(n)}(f) = \sum_{i=1}^{N-1} I_{[x_i, x_{i+1}]}^{(n)}(f) \quad h = \frac{b-a}{N}, x_i = a + iH$$

6.6 Gauß-Quadratur

∃! interpolierte Quadraturformel [?] (n + 1) paarweise verschiedene Stützstellen auf [-1, b] mit Ordnung 2n + 2. Stützstellen = Nullstellen

$$\alpha_i = \int_{-1}^1 \prod_{j=0, j \neq i}^n \left(\frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right)^2 dx > 0^1, \quad i = 0, \dots, n$$

$$f \in C^{2n+2}([-1, 1]) \text{ Restglied :}$$

$$R^{(n)} = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 \prod_{j=0}^n (x - \lambda_j)^2 dx, \quad \xi \in (-1, 1)$$

6.7 Kongruenz der Gauß-Quadraturen

Sei $I^{(n)}(f)$ die (n + 1) punktige [?] Gauß-Formel zu $I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx \forall f \in$

$$C[-1, 1] : I^{(n)}(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(f)$$

7 Legendre Polynome *

Die Legendre Polynome $L_n \in P_n$ bzw, ihre Vielfachen p_n lassen sich auf $[-1, 1]$ in der Form $p_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ schreiben und genügen der rekursiven Bezeichnung

$$p_0(x) \equiv 1, p_1(x) \equiv x$$

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) - \frac{n^2}{4n^2-1} p_{n-1}(x) \text{ für } n \geq 1$$

¹Positivität der Gewichte

8 Ordnung von Quadraturformeln *

Eine Quadraturformel $I^{(n)}(\cdot)$ wird "(mindestens) von der Ordnung m" genannt, wenn durch sie wenigstens alle Polynome aus p_{m-1} exakt integriert werden. Die interpolatorische Quadraturformel $I^{(n)}(\cdot)$ zu $n + 1$ -Stützstellen sind also mindestens von der Ordnung $n + 1$.

8.1 Störungssatz

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär mit $\|\delta A\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, dann gilt für die

8.2 gestörte Matrix

$\tilde{A} = A + \delta A$ ist regulär

Für den relativen Fehler der Lösung gilt mit Konditionszahl von A:

$$\text{cond}(A) = \|A\| * \|A^{-1}\|$$

die Ungleichung:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left[\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right]$$

8.3 Gewichtetes Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx, \quad \omega(x) \geq 0, x \in (a, b)$$

8.4 Kongruenz der Gauß-Quadraturen

Sei $I^{(n)}(f)$ die $(n + 1)$ punktige [?] Gauß-Formel zu $I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx \forall f \in$

$$C[-1, 1] : I^{(n)}(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(f)$$

8.5 Störungssatz

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left[\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right]$$

8.6 Aufwend Vorwärts/Rückwärts einsetzen

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2}{2} + O(n)$$

8.7 Cholesky-Zerlegung

Jede symmetrische positiv definite Matrix A hat eine sogenannte Cholesky - Zerlegung:

$$A = LDL^t = \tilde{L}\tilde{L}^t, \tilde{L} := LD^{\frac{1}{2}}$$

8.8 Aufwand der Cholesky-Zerlegung

$$N_{Cholesky}(n) = \frac{n^3}{6} + O(n^2) \quad (\text{billiger als } A = LR)$$

8.9 Least-Squares-Lösung

Es existiert immer eine "Lösung" $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ mit kleinsten Fehlerquadraten [Editor Note: Least Squares hat den Namen, dass man das A von $A \in \mathbb{R}^{m \times n} Ax = b$ quadriert, um ein $\tilde{A} = AA^t$ hat, von dem man eine Lösung \tilde{x} bestimmen kann]

8.10 Aufwand QR-Zerlegung

Doppelter Aufwand für QR wie für LR

$$N_{QR}(n) = \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$$

8.11 Householder Transformation

$$v \in \mathbb{K}, \|v\|_2 = 1$$

$$H = E_n - 2\frac{vv^t}{v^tv}$$

Spiegelung eines Vektors an einer Hyperebene durch Null im euklidischen Raum $H_{\vec{x}} = x - 2vv^tx$

$$v\bar{v}^t = \begin{pmatrix} v_1\bar{v}_1 & \dots & v_1\bar{v}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n\bar{v}_1 & \dots & v_n\bar{v}_n \end{pmatrix}$$

8.12 Eigenschaften von Householder

Symmetrisch: $H = H^t$

Orthogonal: $H^tH = E_n$

Involutorisch: $H^2 = E_n$

EW: -1 einfach, 1 (n - 1)-fach

Mantisse-Vektor-Multiplikationen mit Householder sind schnell berechenbar

8.13 Householder-Verfahren

Gruppe numerischer Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer skalaren, reellen Funktion

Zur Berechnung der QR-Zerlegung

$S_t A^{(t-1)} = A^{(t)}$, S_t ist Householder-Transformation

8.14 Ergebnis

QR-Zerlegung von A (aber nichteindeutig!)

8.15 Code Intervallschachtelung/Bisektionsverfahren

for k = 0, 1, ... do:

$x[k] = 0.5(a[k] + b[k])$

if $f(a[k])f(x[k]) \leq 0$:

$a[k + 1] = a[k]$

$b[k + 1] = x[k]$

else:

$a[k + 1] = x[k]$

$b[k + 1] = b[k]$

if $\text{abs}(b[k + 1] - a[k + 1]) < \text{TOL}$ $\text{abs}(a[k + 1])$:

Ende Lösung: $0.5(b[k + 1] + a[k + 1])$

9 Konvergenz iterativer Methoden

9.1 Konvergenzordnung

$\alpha > 1$

$$|x_{k+1} - x_*| \leq C|x_k - x_*|^\alpha \quad k = 0, 1, \dots$$

9.2 Lineare Konvergenz

$\alpha = 1 \Rightarrow \text{ClineareKontraktionsrate}$

9.3 Superlineare Konvergenz

$$|x_{k+1} - x_k| \leq C_k |x_k - x_*| \quad \text{mit } c_k \rightarrow 0$$

9.4 Quadratische Konvergenz

$$|x_{k+1} - x_*| \leq C|x_k - x_*| \quad \text{also } \alpha = 2$$

Konvergenz der Ordnung α (quadratische Konvergenz, kubische, etc.) \Rightarrow
superlineare Konvergenz \Rightarrow lineare Konvergenz

10 Newton Verfahren im \mathbb{R}^n

TODO

11 Newton-Kantorisch

11.1 Voraussetzungen

$f : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit f' L-stetig, d.h.

1. $\|j_f(x) - j_f(y)\| \leq L\|x - y\|$
2. $\|j_f^{-1}(x)\| \leq \beta$
3. $x_0 \in D_f(x)$
4. $q := \frac{1}{2}\alpha\beta L$ mit $\alpha = \|j_f^{-1}(x_0)f(x_0)\|$ auf der Niveaumenge $D(x) = \{y \in D \mid \|f(y)\| \leq \|x\|\}$
 \Rightarrow Dann konvergiert (x_k) quadratisch gegen Nullstelle $z \in D$ von f

11.2 Fehlerabschätzung

$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{\alpha}{1-q} q^{(2^k-1)}, \quad k \geq 1$$

12 Sukzessive Approximation *

$x_{t+1} = x_t + C^{-1}f(x_t)$ C reguläre Matrix $\in \mathbb{R}^{n \times n}$
 $x_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} z \Rightarrow z = z + C^{-1}f(z)$ bzw $f(z) = 0 \Rightarrow z$ Fixpunkt der Abbildung
 $g(x) := x + C^{-1}f(x)$

12.1 Fixpunktiteration

für sehr große n ist Gauß-Elimination zu speicherintensiv

$$Ax = b \Leftrightarrow a_{j,j} * x_j + \sum_{k=1}^n a_{j,k} x_k = b_j$$

13 Jacobi *, Gauß-Seidel *, SOR *

13.1 Jacobi-Verfahren

$$B = J = -D^{-1}(L + R) \text{ mit } A = D + L + R$$

13.2 Gauß-Seidel

$$B = H_1 = -(D + L)^{-1}R$$

13.3 SOR

$$H_w = (D + wL)^{-1}((1 - w)D - wR)$$

(für $w = 1$: Gauß-Seidel)

13.4 Konvergenz

für positiv definit symmetrische Matrizen:

(I) starke/strikte Diagonaldominanz \Rightarrow J/G-S konvergiert

(II) diagonaldominanz + irreduzibel² \Rightarrow J/G-S konvergiert

(III) Beachte EW von: $J = -D^{-1}(L + R)$ J konvergiert für $\text{spr}(J) < 1$
 $H = -(D + L)^{-1}R$ G-S konvergiert für $\text{spr}(H) < 1$

13.5 Fehler verringern

Wie viele Iterationsschritte t bis Fehler um 10^k verbessert ist?

$$t \geq -\frac{k}{\log_{10} f} \quad f = \text{spr}(B)$$

14 Jacobi *, Gauß-Seidel *, SOR *

14.1 Jacobi-Verfahren

$$B = J = -D^{-1}(L + R) \text{ mit } A = D + L + R$$

14.2 Gauß-Seidel

$$B = H_1 = -(D + L)^{-1}R$$

²Knotenmodell

14.3 SOR

$$H_w = (D + wL)^{-1}((1 - w)D - wR)$$

(für $w = 1$: Gauß-Seidel)

14.4 Konvergenz

für positiv definit symmetrische Matrizen:

(I) starke/strikte Diagonaldominanz \Rightarrow J/G-S konvergiert

(II) diagonaldominanz + irreduzibel \Rightarrow J/G-S konvergiert

(III) Beachte EW von: $J = -D^{-1}(L + R)$ J konvergiert für $\text{spr}(J) < 1$
 $H = -(D + L)^{-1}R$ G-S konvergiert für $\text{spr}(H) < 1$

14.5 Fehler verringern

Wie viele Iterationsschritte t bis Fehler um 10^k verbessert ist?

$$t \geq -\frac{k}{\log_{10} f} \quad f = \text{spr}(B)$$

15 Allgemeines Abstiegsverfahren

TODO

16 Gradientenverfahren

TODO

17 CG-Verfahren

TODO

18 Vorkonditionierung

TODO

19 Satz von Gerschgorin

Alle EW von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ liegen in der Vereinigung der sogenannten Gerschgorin-Kreise

$$k_j = \zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta * a_{j,j}| \leq \sum_{k=1, k \neq j}^n |a_j k|$$

$$U = \bigcup_{i=1}^m k_{j,i}, \quad V = \bigcup_{j=1}^n k_j \setminus U$$

Sind $U \cup V = \emptyset \Rightarrow m$ EW in U , $n - m$ in V

20 Stabilitätsatz

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit n linear unabhängig EV, $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$\Rightarrow \forall \lambda_B$ EW von $B \exists \lambda_A$ EW von A :

$$|\lambda_A - \lambda_B| \leq \text{cond}_2(W) \|A - B\|_2$$

$W = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ EV von A

21 Potenzmethode *, inverse Iteration *

TODO

22 Hessenberg-Normalform

TODO

23 QR-Verfahren

TODO