Inhaltsverzeichnis

1 Norm und Skalarprodukt **3**
- 1.1 Norm . . . 3
- 1.2 Skalarprodukt . . . 3
  - 1.2.1 Vom Skalarprodukt induzierte Norm . . . 3
  - 1.2.2 Cauchy-Schwarzche Ungleichung . . . 3

2 Symmetrische, positiv definite Matrix **4**
- 2.1 Cholesky-Zerlegung $A = GG^t$ . . . 4
- 2.2 [?] diagonaldominant und alle $a_{ii} \geq 0$ . . . 4
- 2.3 Eigenwerte . . . 4
- 2.4 Eigenvektor . . . 4

3 Matrixnormen **5**
- 3.1 Natürliche Matrixnorm . . . 5
- 3.2 Verträglichkeit . . . 5
- 3.3 Zeilensummennorm . . . 5
- 3.4 Spaltensummennorm . . . 5
- 3.5 Spektralnorm . . . 5

4 Spektralradius, Konditionszahl einer Matrix **6**
- 4.1 Spektralradius φ . . . 6
- 4.2 Konditionszahl einer Matrix A . . . 6
- 4.3 Sonderfall symmetrisch, positiv definite Matrix . . . 6

5 Ähnlichkeitstransformation, Invarianz der Eigenwerte **7**
- 5.1 Reduktionsmethoden . . . 7

6 Gleitkommazahlen **8**
- 6.1 Gleitkommazahl (normalisiert) . . . 8
- 6.2 Gleitkommagitter . . . 8
- 6.3 Maschienengenauigkeit eps . . . 8
- 6.4 Rundungsfehler . . . 8

7 Darstellung des Interpolationsfehlers **9**
- 7.1 Fehler I . . . 9
- 7.2 Fehler II . . . 9

8 Konditionierung einer numerischen Aufgabe, Konditionszahlen k_{ij} **10**
- 8.1 numerische Aufgabe . . . 10

8.2 Konditionszahl (relativ) 10

9 Stabilität eines Algorithmus **11**
9.1 stabiler Algorithmus 11

10 Auslöschung **12**

11 Horner-Schema* **13**
11.1 Code 13
11.2 Auswertung 13

12 Interpolation und Approximation **14**
12.1 Grundproblem 14
12.2 Aufgabenstellung 14
12.3 Interpolation 14
12.4 Approximation 14

13 Lagransche Interpolationsaufgabe **15**
13.1 Aufgabe 15
13.2 Eindeutigkeit + Existenz 15
13.3 Lagransche Basispolynome 15
13.4 Eigenschaften 15
13.5 Lagransche Darstellung 15

14 Newtonsche Basispolynome, dividierte Differenzen **16**
14.1 Newton-Polynome 16
14.1.1 Auswertung 16
14.1.2 Vorteil 16
14.2 Newtonsche Darstellung 16
14.3 Dividierte Differenzen* 16

15 Nevillsche Darstellung **17**
15.1 Schema 17

1 Norm und Skalarprodukt

1.1 Norm

Definitheit: $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$
absolute Homogenität: $||\alpha x|| = |\alpha| * ||x||$
Dreiecksungleichung: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

1.2 Skalarprodukt

¡x + y, z¿ = ¡x, z¿ + ¡y, z¿
¡x, y + z¿ = ¡x, y¿ + ¡x, z¿
TODO: Klammer
$< \lambda x, y > = \lambda < x, y >$
$< x, \lambda y > = \lambda < x, y >$
¡x, y¿ = ¡y, x¿
$< x, x > \geq 0$
$< x, x > = 0 \Rightarrow x = 0$

1.2.1 Vom Skalarprodukt induzierte Norm

$||x|| = \sqrt{< x, x >}$

1.2.2 Cauchy-Schwarzche Ungleichung

$|< x, y >| \leq ||x|| * ||y||$

2 Symmetrische, positiv definite Matrix

TODO: Matrizen
insbesonders: Diagonalmatrizen, Einheitsmatrizen
positiv definit: $x^t Ax > 0$(beliebige Matrix)
alle EW ¿ 0 (symmetrische Matrix)
alle Haupt[TODO: ?] ¿ 0 (symetrische Matrix)
TODO: Matrix ⇒ 3 Hauptminoren[?] = det(a), det(TODO: Matrix), det(TODO: Matrix)

2.1 Cholesky-Zerlegung $A = GG^t$

G unter der Matrix, invertierbar (symmetrische Matrix)

2.2 [?] diagonaldominant und alle $a_{ii} \geq 0$

(symmetrische Matrix)

2.3 Eigenwerte

$det(\lambda En - A) = 0$

2.4 Eigenvektor

$f(v) = \lambda v$

3 Matrixnormen

3.1 Natürliche Matrixnorm

$||A||_\infty := max_{x\neq 0}\frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = max_{||x||=1}||Ax||_\infty$

$||A|| = 0 \Rightarrow A = 0, ||\lambda A|| = |\lambda| * ||A||, ||A+B|| \leq ||A|| + ||B||, ||A*B|| \leq ||A|| * ||B||$

3.2 Verträglichkeit

$||Ax|| \leq ||A|| * ||x||$

3.3 Zeilensummennorm

= natürliche Matrixnorm

$||A||_\infty = max_{||x||_\infty=1}||Ax||_\infty = max_{i=1,\ldots,m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

$A = TODO : Matrix ||A||_\infty = max|1| + |-2| + |-3|, |2| + |3| + |-1| = max 6, 6 = 6$

3.4 Spaltensummennorm

$||A||_1 := max_{x\neq 0}\frac{||Ax||_1}{||x||_1} = max_{||x||_1=1}||Ax||_1 = max_{j=1,\ldots,n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$

$A = TODO : Matrix ||A||_1 = max|1| + |2|, |-2| + |3|, |-3| + |-1| = max 3, 5, 4 = 5$

$||A^t||_1 = ||A||_\infty$

3.5 Spektralnorm

$||A||_2 := max_{||x||_2=1}||Ax||_2 = max_{x\neq 0}\frac{||Ax||_2}{||x||_2} = max_{||x||_2=1} < Ax, Ax >= max_{||x||_2=1} < A^tAx, x >= max\sqrt{|\lambda|}, \lambda * EW von A^tA$

$A = TODO : Matrix, A^tA = TODO : Matrix det(\mu E_n - A^tA) = 0 \Leftrightarrow \mu_{1,2} = 16, 1$

$||A||_2 = \sqrt{max(\mu_1, \mu_2)} = \sqrt{\mu_1} = \sqrt{16} = 4$

4 Spektralradius, Konditionszahl einer Matrix

4.1 Spektralradius φ

$\varphi(A) = max : 1 \leq i \leq n|\lambda_i(A)| = spr(A)$ der betragsmäßig größte Eigenwert von A

$||A|| \geq |\lambda|$ (für jede Matrixnorm, die mit einer Vektornorm verträglich ist)

4.2 Konditionszahl einer Matrix A

$cond(A) = ||A|| * ||A^{-1}||$

4.3 Sonderfall symmetrisch, positiv definite Matrix

$cond(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

5 Ähnlichkeitstransformation, Invarianz der Eigenwerte

y = Ax

$\bar{x} = Cx, \bar{y} = Cy \qquad (detC \neq 0), C \in GL$

$y = Ax \Rightarrow C^{-1}\bar{y} = AC^{-1}\bar{x} \Rightarrow \bar{y} = CAC^{-1}\bar{x} \Rightarrow \bar{y}\bar{A}\bar{x}$

$\bar{A} = CAC^{-1} \Rightarrow \bar{A} \sim A$

$\lambda EW, vEV zuA$

$\Rightarrow Av = C^{-1}\bar{A}Cv = \lambda v$

$\Rightarrow \bar{A} und A$ haben dieselben Eigenwerte, algebraisch und geometrische Vielfalten stimmen überein (Invarianz der Eigenwerte)

5.1 Reduktionsmethoden

A duch Ähnlichkeitstransformationen

$A = A^{(0)} = T_1^{-1}A^{-1}T_1 = Q... = T_i^{-1}A^{(i)}T_i = ...$

auf Form bringen, für welche EW und EV leicht zu berechnen sind (z.B. Jordan-Normalform)

6 Gleitkommazahlen, Gleitkommagitter, Maschienengenauigkeit, Rundungsfehler

6.1 Gleitkommazahl (normalisiert)

$b \in \mathbb{N}, b \geq 2, x \in \mathbb{R}$
$x = \pm m * b^{\pm e}$
Mantisse: $m = m_1 b^{-1} + m_2 b^{-2} + ... \in \mathbb{R}$
Exponent: $e = e_{s-1} b^{s-1} + ... + e_0 b^0 \in \mathbb{N}$
für $x \neq 0$ eindeutig

6.2 Gleitkommagitter

A = A(b[1], r[2], s[3]) größte Darstellbare Zahl: $(1 - b^{-r}) * b^{b^s - 1}$
$(b = 10) : 0,314 * 10^1 = 3,14$
$0,123 * 10^6 = 123.000$
Beispiel: konvertiere von Basis 8 zu Basis 10:
$x = (0,5731 * 10^5)_8 \in A(8,5,1)$
$x = (5 * 8^{-1} + 7 * 8^{-2} + 3 * 8^{-3} + 1 * 8^{-4}) * 8^5$
$x = 5 * 8^4 + 7 * 8^3 + 3 * 8^2 + 1 * 8^1 = 24.264 * 10^0$

6.3 Maschienengenauigkeit eps

$eps = \frac{1}{2} b^{-r+1}, IEEE : eps = \frac{1}{2} * 2^{-52} \approx 10^{-16}$

6.4 Rundungsfehler

$absolut : |x - rd(x)| \leq \frac{1}{2} b^{-r} b^e$
$relativ : |\frac{x - rd(x)}{x}| \leq \frac{1}{2} b^{-r+1} = eps$

[1] Basis
[2] Mantissenlänge
[3] Exponentenlänge

7 Darstellung des Interpolationsfehlers

7.1 Fehler I

$f \in C^{n+1}[a,b], \forall x \in [a,b] \exists \xi_x \in (\overline{x_0,...,x_n,x})^4, s.d.$
$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$

7.2 Fehler II

$f \in C^{n+1}[a,b], \forall x \in [a,b] \setminus x_0,...,x_n gilt:$
$f(x) - p(x) = f[x_0,...,x_n,x] \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$
mit $f[x_i,...,x_{i+k}] = y[x_i,...,x_{i+k}]$
und $f[x_0,...,x_n,x] = \int_0^1 \int_0^{t_1} ... \int_0^{t_n} f^{n+1}(x_0 + t_1(x_1 - x_0) + ... + t_n(x_n - x_{n-1} + t(x - x_n))dtdt_n...dt_1$
für $x_0 = x_1 = ... = x_n:$
$f[x_0,...,x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$
$\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n}(x - x_j) = f(x) - p(x) = f[x_0,...,x_n,x] \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$
$\Rightarrow f[x_0,...,x_n,x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$

[4] kleinstes Intervall, das alle x˙i enthällt

8 Konditionierung einer numerischen Aufgabe, Konditionszahlen k_{ij}

8.1 numerische Aufgabe

$x_j \in \mathbb{R} mit f(x_1, ..., x_m) \Rightarrow y_i = f_i(x_j)$
fehlerhafte Eingangsgrößen $x_i + \Delta y_i$
$|\Delta y_i|$ ist der absolute Fehler, $|\frac{\Delta y_i}{y_i}|$ ist der relative Fehler

8.2 Konditionszahl (relativ)

$k_{ij}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\frac{\Delta x_j}{x_j}$
$\frac{\Delta y_i}{y_i} = \sum_{j=1}^{m} k_{ij}(x)\frac{\Delta x_j}{x_j}$
$|k_{ij}(x)| >> 1 \Rightarrow$ schlecht konditioniert
$|k_{ij}(x)| << 1 \Rightarrow$ gut konditioniert, ohne Fehlerverstärkung
$|k_{ij}(x)| > 1 \Rightarrow$ Fehlerverstärkung
$|k_{ij}(x)| < 1 \Rightarrow$ Fehlerdämpfung

9 Stabilität eines Algorithmus

9.1 stabiler Algorithmus

akkumulierte Fehler der Rechnung (Rundungsfehler, Auswertungsfehler, etc.) übersteigen den unvermeidbaren Problemfehler der Konditionierung der Aufgabe nicht. Aka Trotz Ungenauigkeiten bei den Eingabe Variablen erhalten wir fast sehr genaue Ergebnisse.

10 Auslöschung

Verlust von Genauigkeit bei der Subtraktion von Zahlen mit gleichem Vorzeichen

TODO: bei bedarf ein Beispiel

11 Horner-Schema*

$p(x) = a_0 + x(... + x(a_{n-1} + a_n x)...)$

11.1 Code

```
def horner(Ac[5], Ax[6], n[7], x[8]): // [9]
    y = 0.0
    for i in reversed range(n):
        y = y * (x - Ax[i]) + Ac[i]
    return y
```

Immer Horner-Schema zur Auswertung von Polynomen verwenden.

11.2 Auswertung

TODO: subsection

[5] Vektor mit Koeffizienten
[6] Stützstellen
[7] Anzahl der Stützstellen
[8] Auswertungspunkt
[9] wobei Ac und Ax np Arrays sind, n ein int und x ein double

12 Interpolation und Approximation

12.1 Grundproblem

Darstellung und Auswertung von Funktionen

12.2 Aufgabenstellung

f(x) nur auf Diskreter Menge von Argumenten $x_0, ..., x_n$ bekannt und soll rekonstruiert werden

analytisch gegebene Funktion soll auf Reelwerte dargestellt werden, damit jederzeit Werte zu beliebigen x berechnet werden können.

Einfach konstruierte Funktionen in Klassen P:

Polynome: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

rationale Funktion: $r(x) = \frac{a_0+a_1x+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+...+b_mx^m}$

trigonometrische Funktion: $t(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_kcos(kx) + b_ksin(kx))$

Exponentialsummen: $e(x) = \sum_{k=1}^{n} a_kexp(b_kx)$

12.3 Interpolation

Zuordnung von $g \in P$ zu f durch Fixieren von Funktionswerten

$g(x_i) = y_i = f(x_i), i = 0, ..., n$

12.4 Approximation

$g \in P$ beste Darstellung, z.B.

$max_{a \leq x \leq b}|f(x) - g(x)|minimal$

$(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}}minimal$

13 Lagransche Interpolationsaufgabe

13.1 Aufgabe

Finde zu n + 1 verschiedene Stützstellen/Knoten $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R} und W Erten y_0, ..., y_n \in \mathbb{R} ein Polynom p \in P_n mit p(x_i) = y_i$

13.2 Eindeutigkeit + Existenz

Die Lagransche Interpolationsaufgabe ist eindeutig lösbar

TODO: bei bedarf Beweis rein kopieren den Ich nicht verstanden hab

13.3 Lagransche Basispolynome

$L_i^{(n)}(x) = \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \in P_n, i = 0, ..., n$

13.4 Eigenschaften

ortogonal: es gilt $L_i^{(n)}(x_k) = d_{ik} =$ TODO: split over 2 lines 1, i = k 0, sonst

bilden Basis von P_n

haben Grad n

13.5 Lagransche Darstellung

$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i^{(n)}(x) \in P_n$ mit $p(x_j) = y_j$

Nachteil: Bei Hinzunahme von (x_{n+1}, y_{n+1}) ändert sich das Basispolynom komplett

TODO: Beispiel

14 Newtonsche Basispolynome, dividierte Differenzen

14.1 Newton-Polynome

$N_0(x) = 1, N_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$ mit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i N_i(x)$

14.1.1 Auswertung

$y_0 = p(x_0) = a_0$

$y_1 = p(x_1) = a_0 + a_1 * (x_1 - x_0)$

$\vdots$

$y_n = p(x_n) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + ... + a_n(x_n - x_0) * ... * (x_n - x_{n-1})$

14.1.2 Vorteil

Bei Hinzunahme von (x_{n+1}, y_{n+1}) muss nur eine neue Rechnung durchgeführt werden, und nicht das gesamte Polynom neu berechnet werden

TODO: Beispiel

14.2 Newtonsche Darstellung(stabile Variante)

$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y[x_0, ..., x_i] N_i(x)$

14.3 Dividierte Differenzen*

$y[x_i, ..., x_{k+1}] = \frac{y[x_{i+1},...,x_{k+1}] - y[x_i,...,x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$ mit k = 1, ..., j und i = k - j

für beliebige [?] $\sigma : 0, ..., n \to 0, ..., n$ gilt $y[\tilde{x_0}, ..., \tilde{x_n}] = y[x_0, ..., x_n]$

15 Nevillsche Darstellung

$p_{jj}(x) = y_j \qquad j = 0, ..., n \qquad k = 1, ..., j \qquad i = k - j$
$p_{i,i+k}(x) = p_{i,i+k-1}(x) + (x - x_i)\frac{p_{i+1,i+k}(x) - p_{i,i+k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i}$

15.1 Schema

x k = 0 k = 2 . . . k = n - 1 k = n
x˙0 y˙0 Γ→ $p_{0,1} \ldots p_{0,n-1} p_{0,n}$