Aussagenlogik (AL) :

- Syntax vs. Semantik
- syntaktische und semantische Grundbegriffe der AL (Junktoren, Formeln, Belegungen, Wahrheitsfunktionen (= Boolesche Funktionen))
- zentrale logische Begriffe (Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, Folgerungs- und Äquivalenzbegriff) und Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen
- Zusammenhang Formeln - Boolesche Funktionen: von einer Formel definierte Boolesche Funktion, Verfahren zur Bestimmung der disjunktiven Normalform (DNF) und konjunktiven Normalform (KNF), aussagenlogische vs. Boolesche Formeln, Basen der Booleschen Funktionen.

Kalküle :

- Idee, Anforderungen an und Bestandteile von Kalkülen, Beweise und Beweisbarkeit (aus T), elementare Eigenschaften von Beweisen und Beweisbarkeit, Korrektheit und Vollständigkeit logischer Kalküle, Korrektheitslemma
- Korrektheit (mit Beweisidee) und Vollständigkeit des Shoenfield-Kalküls für AL
- Kompaktheitssatz für AL.

Syntax und Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe :

- syntaktische und semantische Grundbegriffe der PL (Strukturen und deren Signatur, Sprachen und deren Signatur
- Terme, Formeln und Sätze und deren Interpretation in Strukturen
- Theorien, Modellbegriff (Modelle und Modellklassen))
- zentrale logische Begriffe (Erfüllbarkeit (von Formeln und Formelmengen), Allgemeingültigkeit, Folgerungs- und Äquivalenzbegriff, Tautologien = aussagenlogisch gültige Formeln) und Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen.

Der Shoenfield-Kalkül für PL :

- Korrektheitssatz: Beweisidee und Folgerungen (Konsistenzlemma)

- Vollständigkeitssatz: was versteht man unter einer zulässigen Regel bzw. einem zulässigen Axiom?, was besagt das Deduktionstheorem?, Erfüllbarkeitslemma (EL), wie folgt der Vollständigkeitssatz aus dem EL?, Beweisidee des EL (was ist eine Termstruktur?, Lemma und Satz über Termstrukturen, was ist eine Henkin-Theorie?, Aussage der Sätze von Lindenbaum und über Henkin-Erweiterungen)
- Kompaktheitssatz (für Folgerungsbegriff und für die Erfüllbarkeit - mit Beweis).

Definierbarkeit in PL1 :

- Elementare und Δ-elementare Strukturklassen - Eigenschaften hiervon
- Beispiele hierzu (Mengen unterschiedlicher Mächtigkeiten, Ordnungen, Gruppen und Körper; Arithmetik)
- Isomorphie und elementare Äquivalenz
- negative Definierbarkeitsergebnisse: z.B. Nicht-Δ-Ele-mentarität der endlichen Strukturen (Satz über die Existenz unendlicher Modelle), Nicht-Elementarität der unendlichen Strukturen, Nicht-Δ-Elementari-tät der Wohlordnungen, sowie der Satz von Skolem (jeweils mit Beweisideen)
- die Prädikatenlogik 2. Stufe
- Definierbarkeit in PL2 (Endlichkeit und Arithmetik - Beweisidee!)
- warum gibt es keinen Kalkül für PL2 (Begründung)?

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik **7**
1.1 *Sprache der Aussagenlogik . . . 7
1.2 *Formeln . . . 7
1.3 *Prinzip der syntaktischen Induktion . . . 7
1.4 *!Belegung . . . 7
1.5 *Bewertung . . . 8
1.6 *!Koinzidenzlemma . . . 8
1.7 *Zentrale semantische Begriffe . . . 8
1.8 *Boolesche Gesetze . . . 8
1.9 !Einsetzungsregel . . . 8
1.10 !Ersetzungsregel . . . 9
1.11 Substitutionsregel . . . 9
1.12 *!Erfüllbarkeit von Formelmengen . . . 9
1.13 *!Semantischer Folgerungsbegriff . . . 9
1.14 Find A Stupid Name . . . 9
1.15 Monotonie . . . 9
1.16 *!Folgerung vs Erfüllbarkeit . . . 10
1.17 *Erfüllbarkeit vs. Semantische Folgerung . . . 10
1.18 get Fucked . . . 10
1.19 *DNF . . . 10
1.20 *KNF . . . 10
1.21 *Darstellungssatz . . . 11
1.22 Folgerung aus Darstellungssatz . . . 11
1.23 1. Basissatz . . . 11
1.24 2. Basissatz . . . 11
1.25 Normalformsatz . . . 11
1.26 *Kalkül $\mathcal{K}$ . . . 11
1.27 *Beweise und Beweisbarkeit . . . 12
1.28 *Beweisbar . . . 12
1.29 *Konsistent . . . 12
1.30 *Kalkül der Aussagenlogik . . . 13
1.31 *Korrekt und Vollständig . . . 13
1.32 *Korrektheitslemma . . . 13
1.33 Ein/Ersetzungsregel . . . 13
1.34 *Shoenfield . . . 14
1.35 *Korrektheitssatz . . . 14
1.36 *Vollständigkeitssatz . . . 14
1.37 *Zulässige Regeln . . . 14
1.38 Regel Erweiterung . . . 15

1.39 Zulässige Erweiterung 15
1.40 Satz über zulässige Erweiterungen 15
1.41 Zulässige Regeln 15
1.42 Tautologiesatz 15
1.43 *Vollständigkeitssatz für endlich T 15
1.44 Deductionstheorem 15
1.45 Formelmenge Konsistent 16
1.46 Formelmenge Vollständig 16
1.47 Charakterisierungslemma 16
1.48 Endlichkeitslemma für Konsistenz 16
1.49 Lemma über Beweisbarkeit und Konsistenz 16
1.50 *Konsistenzlemma 16
1.51 *Erfüllbarkeitslemma 16
1.52 Adäquatheitssatz für den Folgerungsbegriff 16
1.53 Adäquatheitssatz für den Erfüllbarkeitsbegriff 16
1.54 *Kompaktheitssatz/Endlichkeitssatz für den Folgerungsbegriff 17
1.55 *Kompaktheitssatz/Endlichkeitssatz für den Erfüllbarkeitsbegriff 17

2 Prädikatenlogik **18**
2.1 *Mathematische Struktur 18
2.2 *Signatur 18
2.3 *Sprache 18
2.4 *Terme: Syntax 18
2.5 *Terme: Semantik 18
2.6 (Variablen-)Belegung in $\mathcal{A}$ 19
2.7 Wert von t 19
2.8 *Koinzidenzlemma 19
2.9 *Formeln und Sätze: Syntax 19
2.10 ($\mathcal{L}$-)Satz 19
2.11 *Formeln und Sätze: Semantik 19
2.12 *Koinzidenzlemma (für Formeln) 20
2.13 *Satz ist in Struktur wahr 20
2.14 *Formel ist in Struktur wahr 20
2.15 *Allabschluss mit Formeln 20
2.16 *Relation mit Formeln 20
2.17 *Zentrale semantische Konzepte: Allgemeingültigkeit 21
2.18 *Zentrale semantische Konzepte: Erfüllbarkeit 21
2.19 *Zentrale semantische Konzepte: Folgerungsbegriff 21
2.20 Formel folgt aus Menge 21
2.21 Monotonie des Folgerungsbegriffs 21

2.22 Verträglichkeit von $\models$ und $\rightarrow$ 21
2.23 Erfüllbare Formelmenge 21
2.24 Zusammenhang zwischen Folgerungs- und Erfüllbarkeitsbegriff 22
2.25 *Tautologie 22
2.26 Aussagenlogische Folgerung 22
2.27 Lemma über al Folgerungen 22
2.28 Substitution 22
2.29 !Substituirbarkeitsbedingung 22
2.30 Substitutionslemma 22

3 Ein Adäquater Kalkül der Prädikatenlogik 22
3.1 Axiome 22
3.2 Tautologiesatz 23
3.3 Aussagenlogische Schlüsse 23
3.4 Generalisierung und Distribution 23
3.5 Ersetzung und Substitution I 23
3.6 Umbenennung Gebundener Variablen 24
3.7 Substitution II 24
3.8 Gleichheit 24
3.9 *Deduktionstheorem 24
3.10 Korollar zum Deduktionstheorem 24
3.11 Theorie 24
3.12 Modellklasse 25
3.13 Syntaktischer Deduktiver Abschluss 25
3.14 Äquivalente L-Theorien 25
3.15 Erweiterung und Konservative Erweiterung 25
3.16 Sprachliche Erweiterung 25
3.17 Zusätzliches zu Theorien 26
3.18 Konsistent/Widerspruchsfrei 26
3.19 Charakterisierungslemma für Konsistenz (LCK) 26
3.20 Lemma über Zusammenhang zwischen Beweisbarkeit und Konsistenz (LBK) 26
3.21 *Erfüllbarkeitslemma (Modellexistenzsatz, EL) 26
3.22 *Vollständigkeitssatz (VS) 26
3.23 Relation $\sim$ 26
3.24 *!Termstruktur (Termmodell) 27
3.25 Wohldefinierte L-Struktur 27
3.26 Lemma über Termmodelle 27
3.27 Syntaktisch Vollständige Theorie 27
3.28 *Henkin-Theorie 27
3.29 Satz über Termmodelle 27

3.30 Satz von Lindenbaum (PL) 28
3.31 *Satz über Henkin-Erweiterungen 28
3.32 Henkin-Erweiterung T-H 28
3.33 Adäquatheitssatz 28
3.34 Satz über Konsistenz und Erfüllbarkeit 28
3.35 *Kompaktheitssatz(Endlichkeitssatz) 29
3.36 Satz von Löwenheim 29
3.37 Satz über vollständig erfüllbare Theorien 29
3.38 Satz für endliche Sprachen 29

4 Theorien und Modelle 30
4.1 Deduktiver Abschluss 30
4.2 Monotonie des Deduktiven Abschlusses 30
4.3 Eigenschaften über C(T) 30
4.4 Äquivalente Theorien 30
4.5 Teiltheorie 30
4.6 *Elementare Theorie 30
4.7 *Elementar und Delta Elementar 30
4.8 *Eigenschaften über Delta-Elementare Strukturen 31
4.9 *Elementare Eigenschaften 31
4.10 Anzahlformeln 31
4.11 Partielle Ordnung 31
4.12 *Gruppen- und Körperaxiome 32

1 Aussagenlogik

1.1 *Sprache der Aussagenlogik

Besteht aus 3 Bausteinen:

1) Aussagenvariablen: $A_0, A_1, ...$
2) 1-Stellig: $\neg$
   2-Stellig: $\wedge, \vee, \rightarrow \leftrightarrow$
3) Klammern

Das Alphabet A_{AL} ist die Menge der Symbole

A^* ist die Menge der Wörter (wobei jedes Wort endlich viele Symbole hat) und das leere Wort λ

1.2 *Formeln

(F1) Alle $A_{n>0}$ sind Formeln
(F2) φ al. Formel $\Rightarrow \neg\varphi$ al. Formel
(F3) φ_1, φ_2 al. Formeln $\Rightarrow (\varphi_1 \odot \varphi_2)$ mit $\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow \leftrightarrow\}$ al. Formel

Länge von φ:	$l(\varphi)$:= Anzahl der Zeichen
	$lz(\varphi)$:= Anzahl der Junktoren
Anderes zu φ	$\rho(\varphi)$:= Schachtelungstiefe der Junktoren
	$V(\varphi)$:= Anzahl der Aussagenvariablen
	$TF(\varphi)$:= Anzahl der Teilformeln
	F(V) := $\{\varphi : V(\varphi) \subseteq V\}$ Menge der al. Formeln, die Variablen aus V enthalten

1.3 *Prinzip der syntaktischen Induktion

(i) E Eigenschaft trifft auf jede Aussagenvariable A zu
Heißt wir Zeigen es gilt für Aussagenvariablen

(ii) Trifft E auf al. Formel φ zu $\Rightarrow$ E trifft auf $\neg\varphi$ zu
E gilt für die Formel und dessen Negation

(iii) E trifft auf φ_1, φ_2 zu $\Rightarrow$ E trifft auf $(\varphi_1 \odot \varphi_2)$ mit $\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow \leftrightarrow\}$ zu
Gilt E für φ_1, φ_2 so gilt es auch für deren Verknüpfungen

1.4 *!Belegung

Die Belegung B der Variablenmenge V ist Abbildung $B : V \rightarrow \{0, 1\}$

B(V) Menge aller Belegungen von V

$|B(V)| = 2^{|V|}$

1.5 *Bewertung

Die zur Belegung $B : V \to \{0,1\}$ gehörende Bewertung $\widehat{B}$

1. $\varphi \equiv A : \widehat{B}(A) := B(A)$

2. $\varphi \equiv \neg\psi : \widehat{B}(\neg\psi) := f_{\neg}(\widehat{B}(\psi))$
3. $\varphi \equiv (\varphi_1 \odot \varphi_2) := f_{\widehat{B}}(\widehat{B}(\varphi_1), \widehat{B}(\varphi_2))$

1.6 *!Koinzidenzlemma

Seien $B_i : V_i \to \{0,1\}, i = 0,1$, Belegung, sei φ eine al. Formel deren Aussagenvariable in V_0 und V_1 liegen und stimmen B_0 und B_1 auf den in φ vorkommenden Variablen überein (Was soviel heißt wie jede Variable aus V_0 wird durch B_0 einen Wert zugewiesen, und jede Variable aus V_1 wird durch B_1 einen Wert zugewiesen. Jetzt müssen die Variablen in φ vorkommen in V_0 und V_1 vorkommen und deren Belegungen müssen gleich sein.)

$\Rightarrow \widehat{B}_0(\varphi) = \widehat{B}_1(\varphi)$

1.7 *Zentrale semantische Begriffe

φ allgemeingültig/$ag[\varphi]$	$\Leftrightarrow \forall$ Belegungen B: $V(\varphi) \to \{0,1\}$ gilt $B(\varphi) = 1$
φ erfüllbar/$erfb[\varphi]$	$\Leftrightarrow \exists$ Belegungen B: $V(\varphi) \to \{0,1\}$ mit $B(\varphi) = 1$
φ kontradiktorisch/$kd[\varphi]$	$\Leftrightarrow \forall$ Belegungen B: $V(\varphi) \to \{0,1\}$ gilt $B(\varphi) = 0$

1.8 *Boolesche Gesetze

1.	$A \wedge B$ äq $B \wedge A$ und $A \vee B$ äq $B \vee A$	Kommutativgesetz
2.	$A \wedge (B \wedge C)$ äq $(A \wedge B) \wedge C$	Assoziativgesetz
	$A \vee (B \vee C)$ äq $(A \vee B) \vee C$	
3.	$A \vee A$ äq A äq $A \wedge A$	Idempotenz
4.	$A \wedge (B \vee C)$ äq $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivgesetz
	$A \vee (B \wedge C)$ äq $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
5.	$A \wedge (A \vee B)$ äq A äq $A \vee (A \wedge B)$	Absorptionsgesetz
6.	$\neg(A \wedge B)$ äq $\neg A \vee \neg B$	De Morgan
	$\neg(A \vee B)$ äq $\neg A \wedge \neg B$	

1.9 !Einsetzungsregel

Ist al. Formel φ allgemeingültig, dann auch $\varphi[\psi/A]$, die aus φ durch ersetzen aller vorkommenden A in φ durch ψ

1.10 !Ersetzungsregel

$\varphi \leftrightarrow \psi$ allgemeingültig $\Rightarrow \chi \leftrightarrow \chi(\psi/\varphi)$ allgemeingültig

1.11 Substitutionsregel

$sub(\chi, \varphi, \psi)$ Menge aller Varianten $\chi(\psi/\varphi)$

Ist $\varphi \equiv \chi \Rightarrow sub(\chi, \varphi, \psi) = \{\chi, \psi\}$

sonst	$\chi \equiv A$	$sub(\chi, \varphi, \psi) = \{\chi\}$ (φ keine Teilformel von χ)
	$\chi \equiv \neg\chi_1$	$sub(\chi, \varphi, \psi) = \{\neg\chi_1^* : \chi_1^* \in sub(\chi_1, \varphi, \psi)\}$
	$\chi \equiv \chi_1 \bigodot \chi_2$	$sub(\chi, \varphi, \psi) = \{\chi_1^* \bigodot \chi_2^* : \chi_i \in sub(\chi_1, \varphi, \psi)\}$

1.12 *!Erfüllbarkeit von Formelmengen

$T \neq \emptyset$ nicht leere Menge al. Formeln mit Variablenmenge V(T)

(i) Belegung B: $V(T) \to \{0, 1\}$ macht T wahr ($B \vDash T$), falls B alle $\varphi \in T$ wahr macht, d.h. $\forall\varphi \in T : B(\varphi) = 1$

(ii) T erfüllbar ($erfb[T]$) $\Leftrightarrow \exists B$ von V(T), T wahrmacht

$\Rightarrow erfb[T] \Leftrightarrow \exists B \in B(V(T)) : B \vDash T$

$\Leftrightarrow \exists B \in B(V(T))\forall\varphi \in T : B(\varphi) = 1$

$\Leftrightarrow T = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} : erfb[T] \Leftrightarrow erfb[\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n]$

1.13 *!Semantischer Folgerungsbegriff

Eine al. Formel φ folgt aus einer Menge T von al. Formeln ($T \vDash \varphi$) $\Leftrightarrow$ jede Belegung $B \in V(T) \cup V(\varphi)$, die T wahr macht, macht auch φ wahr, d.h. $\forall B \in B(V(T) \cup V(\varphi)[B \vDash T \Rightarrow B \vDash \varphi]$

1.14 Find A Stupid Name

$T = \{\varphi\}$ Einelementig: $\{\varphi\} \vDash \psi \Leftrightarrow \varphi$ impl. ψ

$\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vDash \psi$ kürzer geschrieben:

$\varphi_1, ..., \varphi_n \vDash \psi : \varphi_1, ..., \varphi_n \vDash \psi \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ impl. ψ

1.15 Monotonie weil keine Besseren Namen

Der semantische Folgerungsbegriff ist monoton, d.h.

$T \subseteq T'$ und $T \vDash \varphi \Rightarrow T' \vDash \varphi$

1.16 *!Folgerung vs Erfüllbarkeit

(i) $T \vDash \varphi \Leftrightarrow$ nicht $erfb[T \cup \{\neg\varphi\}]$
(ii) $T \nvDash \varphi \Leftrightarrow erfb[T \cup \{\neg\varphi\}]$

1.17 *Erfüllbarkeit vs. Semantische Folgerung

Für $T \neq \emptyset$ sind äquivalent:

(i) $erfb[T]$
(ii) $\nexists\varphi[T \vDash \varphi$ und $T \vDash \neg\varphi]$
(iii) $\exists\varphi[T \nvDash \varphi]$

1.18 get Fucked

φ al. Formel mit $V(\varphi) \subseteq \{A_0, ..., A_{n-1}\}$

Die von φ dargestellte n-Stellige Boolesche Funktion $f_{\varphi,n}$ ist definiert durch $f_{\varphi,n}(i_0, ..., i_{n-1}) = \widehat{B}_{i_0,...,i_{n-1}}(\varphi)$

mit $B_{i_0,...,i_{n-1}} : \{A_0, ..., A_{n-1}\} \to \{0, 1\}, B_{i_0,...,i_{n-1}}(A_j) = i_j \ (j = 0, ..., n - 1)$

1.19 *DNF

Eine Boolesche Formel φ ist in disjunktiver Normalform (DNF), wenn φ die endliche Disjunktion von $\wedge$-Klauseln ist: $\varphi \equiv \kappa_1 \vee ... \vee \kappa_m (m \geq 1)$

Allgemeines Verfahren um DNF anzugeben: Tabelle Aufstellen, alle Terme x_0 bis x_n ver-und-en, wobei wenn der Term x_i 0 ist wird die Negation verwendet wird

Beispiel:

x_0	x_1	Formel
0	0	$\neg x_0 \wedge \neg x_1$
0	1	$\neg x_0 \wedge x_1$
1	0	$x_0 \wedge \neg x_1$
1	1	$x_0 \wedge x_1$

1.20 *KNF

Boolesche Formel φ ist in KNF, wenn φ endliche Konjunktion von $\vee$-Klauseln, $\varphi \equiv S_1 \wedge ... \wedge S_m$ mit $m \geq 1$

Im großen und ganzen nur cooles Trivia wissen, man braucht fast immer die DNF

1.21 *Darstellungssatz

Jede n-stellige Boolesche Funktion kann effektiv als eine Formel φ in DNF dargestellt werden.

Heißt man hat eine Funktion, nachdem man die Variablen eingesetzt hat, findet man eine Formel φ in DNF sodass $f_{\varphi,n}(i_0, ..., i_{n-1}) = \widehat{B}_{i_0,...,i_{n-1}}(\varphi)$

Analog KNF

1.22 Folgerung aus Darstellungssatz

Basis der Booleschen Funktionen:
Menge $\{f_1, ..., f_k\}$ von Booleschen Funktionen, sodass sich jede Boolesche Funktion über $f_1, ..., f_k$ definieren lässt.
Basis M ist minimal $\Leftrightarrow$ keine echte Teilmenge von M eine Basis ist

1.23 1. Basissatz

Die Booleschen Funktionen $\{\neg, \wedge, \vee\}$ bilden eine Basis der Booleschen Funktionen

1.24 2. Basissatz

Folgende Mengen sind Basen der Booleschen Funktionen:
i) $\{\neg, \vee\}$
ii) $\{\neg, \wedge\}$
iii) {NOR}
iv) {NAND}

1.25 Normalformsatz

Zu jeder al. Formel φ kann man eine äquivalente Formel φ_{DNF} in DNF , sodass: $V(\varphi) = V(\varphi_{DNF})$

1.26 *Kalkül $\mathcal{K}$

- Sprache von $\mathcal{K}$, vom Alphabet von festgelegt
- Menge der Formeln von $\mathcal{K}$, Teilmenge der Wörter über Alphabet von$\mathcal{K}$
- Menge der Axiome von $\mathcal{K}$, Teilmenge der Menge der Formeln von $\mathcal{K}$

- Menge der Regeln der Gestalt
  (R) $\frac{\varphi_1,...,\varphi_n}{\varphi} n \geq 1, \varphi_1, ..., \varphi_n$ Formeln von $\mathcal{K}$
  $\varphi_1, ..., \varphi_n$ Prämissen, φ Konklusion

1.27 *Beweise und Beweisbarkeit

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül aus T Menge von ($\mathcal{K}$-)Formeln ein ($\mathcal{K}$-)Beweis der ($\mathcal{K}$-)Formel φ aus T ist endliche Folge $\psi_1, ..., \psi_n$ von ($\mathcal{K}$-)Formeln, sodass gilt:

- $\varphi \equiv \psi_n$
- $\forall \psi_m, 1 \leq m \leq n$:
  - ist ($\mathcal{K}$-)Axiom oder
  - Eine Formel aus der Formelmenge T oder
  - Konklusion einer ($\mathcal{K}$-)Regel R, deren Prämissen in $\{\psi_1, ..., \psi_{m-1}\}$ liegen
- n ist die Länge des Beweises $\psi_1, ..., \psi_n$

1.28 *Beweisbar

Eine ($\mathcal{K}$-) Formel φ is ($\mathcal{K}$-) beweisbar aus T, wenn es einen ($\mathcal{K}$-) Beweis von φ aus T gibt.

NB: Jede Formel $\varphi \in T$ ist ein ($\mathcal{K}$-) Beweis (der Länge 1) aus T und damit ($\mathcal{K}$-) beweisbar aus T. $\vDash$ = beweisbar $\Rightarrow$ φ ist ($\mathcal{K}$-) beweisbar aus T $\Leftrightarrow T \vDash K\varphi$

Außerdem gilt:

- Monotonie: Falls $T \subseteq T'$ und $T \vdash \varphi \Rightarrow T' \vdash \varphi$
- Transitivität: Gelte $T \vdash \varphi$ und $T' \vdash \psi \forall \psi \in T \Rightarrow T' \vdash \varphi$
- Endlichkeit: Falls $T \vdash \varphi \Rightarrow \exists$ endliche Teilmenge T_0 von T mit $T_0 \vdash \varphi$

1.29 *Konsistent

Kalkül $\mathcal{K}$ ist Konsistent, falls es eine $\mathcal{K}$-Formel ψ mit $\nvdash \psi$ gibt

1.30 *Kalkül der Aussagenlogik

- Sprache basiert auf Alphabet $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, ..., j_1, ..., j_k, (,)\}$ Junktoren $j_1, .., j_k$ Basis der Booleschen Funktionen
- (F1) Aussagenvariable $A_i (i \geq 0)$ ist eine Formel
  (F2) * 1-Stelliger Junktor, φ Formel $\Rightarrow *\varphi$ ist eine Formel
  (F3) * 2-Stelliger Junktor, φ_1, φ_2 Formeln $\Rightarrow (\varphi_1 * \varphi_2)$ ist eine Formel

1.31 *Korrekt und Vollständig

$\mathcal{K}$ Kalkül der Aussagenlogik

- $\mathcal{K}$ ist korrekt bezüglich der Allgemeingültigkeit, falls jede $\mathcal{K}$-beweisbare Formel φ allgemeingültig ist, d.h. $\vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Rightarrow \models \varphi \forall \mathcal{K}$-Formeln φ
- $\mathcal{K}$ ist korrekt bezüglich Folgerungen, falls $T \vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ für alle $\mathcal{K}$-Formelmengen T und $\mathcal{K}$-Formeln φ
- $\mathcal{K}$ ist vollständig bezüglich der Allgemeingültigkeit, falls $\models \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ für alle $\mathcal{K}$-Formeln φ
- $\mathcal{K}$ ist vollständig bezüglich Folgerungen, falls $\models \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ für alle $\mathcal{K}$-Formelmengen T und $\mathcal{K}$-Formeln φ
- $\mathcal{K}$ ist adäquat, wenn $\mathcal{K}$ korrekt und vollständig ist, d.h. $\vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi$

1.32 *Korrektheitslemma

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül der Aussagenlogik, dessen Axiome allgemeingültig sind und dessen Regeln korrekt bezüglich Folgerungen sind $\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ Korrekt bezüglich Folgerungen

1.33 Ein/Ersetzungsregel

Sei R korrekt bezüglich Folgerungen $\Rightarrow$ R korrekt bezüglich Allgemeingültigkeit

Einsetzungsregel:	(EIN) $\frac{\varphi}{\varphi[\psi/x]}$
Ersetzungsregel:	(ERS) $\frac{\chi}{\chi[\varphi/\psi]}$ falls φ äq ψ

1.34 *Shoenfield

Shoenfield Kalkül S

- Basis: $\{\neg, \vee\}$, $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, ..., \neg, \vee, (,)\}$
- Identitäten:
  (i) $(\varphi \wedge \psi) :\equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
  (ii) $(\varphi \rightarrow \psi) :\equiv (\neg\varphi \vee \psi)$
  (iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi) :\equiv ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$
- Axiom: (Ax) $\neg\varphi \vee \varphi (\equiv \varphi \rightarrow \varphi)$
- Regeln:

  Expansion (E) $\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$

  Assoziativität (A) $\frac{\varphi \vee (\psi \vee \delta)}{(\varphi \vee \psi) \vee \delta}$

  Kürzung (Kü) $\frac{\varphi \vee \varphi}{\varphi}$

  Schnitt (S) $\frac{\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee \delta}{\psi \vee \delta}$

1.35 *Korrektheitssatz

Shoenfield-Kalkül S ist korrekt (bezüglich Folgerungen): $T \vdash_S \varphi \Rightarrow T \vDash \varphi$

1.36 *Vollständigkeitssatz

Shoenfield-Kalkül S ist vollständig (bezüglich Folgerungen): $T \vDash \varphi \Rightarrow T \vdash_S \varphi$

1.37 *Zulässige Regeln

$\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$' Kalküle mit identischen Formelmengen, $\mathcal{K}$' heißt Erweiterung von $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$', wenn alle Axiome und Regeln von $\mathcal{K}$ Axiome und Regeln von $\mathcal{K}$' sind

Eine Erweiterung $\mathcal{K}$' ist konservativ $\Leftrightarrow \forall T \vdash_{\mathcal{K}'} \varphi \Rightarrow T \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$

Für $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}' : T \vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Rightarrow T \vdash_{\mathcal{K}'} \varphi$

Für $\mathcal{K} \subseteq_{\text{konservativ}} \mathcal{K}' : T \vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Leftrightarrow T \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$

1.38 Regel Erweiterung

Eine Regel R $\frac{\varphi_1,...,\varphi_n}{\varphi}$ ist zulässig in dem Kalkül $\mathcal{K}$ (ableitbar in $\mathcal{K}$), falls $\varphi_1,...,\varphi_n \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$
Eine Formel φ ist ein zulässiges Axiom von $\mathcal{K}$ falls $\vdash_{\mathcal{K}} \varphi$

1.39 Zulässige Erweiterung

Eine Erweiterung $\mathcal{K}$' von $\mathcal{K}$ ist eine zulässige Erweiterung, von $\mathcal{K}$ wenn jedes Axiom und jede Regel von $\mathcal{K}$' in $\mathcal{K}$ zulässig ist

1.40 Satz über zulässige Erweiterungen

$\mathcal{K}$' zulässige Erweiterung von $\mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{K}$' ist eine konservative Erweiterung d.h. für jede Formelmenge T und Formel $\varphi : T \vdash_{\mathcal{K}} \varphi \Leftrightarrow \varphi : T \vdash_{\mathcal{K}'} \varphi$

1.41 Zulässige Regeln

Kommutativität (Ko) $\frac{\varphi\vee\psi}{\varphi\vee\psi}$

Modus Ponens (M) $\frac{\varphi;\varphi\rightarrow\psi}{\psi}$

Verallgemeinerter Expansion (VE) $\frac{\varphi_{i_1}\vee...\vee\varphi_{i_m}}{\varphi_1\vee...\vee\varphi_n}; m,n \geq 1; \varphi_{i_1},...,\varphi_{i_m} \in \{\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n\}$

Negationsregeln: (N1) $\frac{\varphi\vee\psi}{\neg\neg\varphi\vee\psi}$

(N2) $\frac{\neg\neg\varphi\vee\psi}{\varphi\vee\psi}$

(N3) $\frac{\varphi\rightarrow\delta,\psi\rightarrow\delta}{(\varphi\vee\psi)\rightarrow\delta}$

1.42 Tautologiesatz

$\models \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$

1.43 *Vollständigkeitssatz für endlich T

Für endliche T gilt: $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

1.44 Deductionstheorem

$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow T \cup \varphi \vdash \psi$

1.45 Formelmenge Konsistent

Eine Formelmenge T ist konsistent, falls Formel φ ex. mit: $T \nvdash \varphi$ Andernfalls ist T inkonsistent

1.46 Formelmenge Vollständig

Eine Formelmenge T ist vollständig, falls für jede Formel φ gilt: $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$

1.47 Charakterisierungslemma

T konsistent $\Leftrightarrow$ Es gibt kein φ mit $T \vdash \varphi$ und $T \vdash \neg\varphi$

1.48 Endlichkeitslemma für Konsistenz

Eine Formelmenge T ist genau dann konsistent, wenn jede endliche Teilmenge T_0 von T konsistent ist

1.49 Lemma über Beweisbarkeit und Konsistenz

$T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$

1.50 *Konsistenzlemma

Jede erfüllbare Formelmenge T ist konsistent

1.51 *Erfüllbarkeitslemma

Jede konsistente Formelmenge T ist erfüllbare

1.52 Adäquatheitssatz für den Folgerungsbegriff

Für jede Formelmenge T und jede Formel φ gilt: $T \vDash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \varphi$

1.53 Adäquatheitssatz für den Erfüllbarkeitsbegriff

Für jede Formelmenge T gilt: T erfüllbar $\Leftrightarrow$ T konsistent

1.54 *Kompaktheitssatz/Endlichkeitssatz für den Folgerungsbegriff

Eine Formel φ folgt genau dann aus einer Formelmenge T, wenn es eine endliche Teilmenge T_0 von T gibt, aus der φ folgt: $T \vDash \varphi \Leftrightarrow$ Es gibt $T_0 \subseteq T$ endlich: $T_0 \vDash \varphi$

1.55 *Kompaktheitssatz/Endlichkeitssatz für den Erfüllbarkeitsbegriff

erfb[T] $\Leftrightarrow$ Für alle $T_0 \subseteq T$ endlich: erfb[T_0]

2 Prädikatenlogik

2.1 *Mathematische Struktur

Struktur $\mathcal{A}$ ist ein 4-Tupel $\mathcal{A} = (A; (R_i^{\mathcal{A}}|i \in I); (f_j^{\mathcal{A}}|j \in J); (c_k^{\mathcal{A}}|k \in K))$
Mit I, J, K beliebige Mengen für die gelten:

- A nichtleer : Universum/Träger/Individuenbereich der Struktur $\mathcal{A}$
- $\forall i \in I : R_i^{\mathcal{A}}$ n_i-stellige Relation auf A: Grundrelationen auf $\mathcal{A}$
- $\forall j \in J : f_j^{\mathcal{A}}$ m_j-stellige Funktion auf A; $f_j^{\mathcal{A}} : A^{m_j} \to A$: Grundfunktionen
- $\forall k \in K : c_k^{\mathcal{A}}$ Element von A, welche die Konstanten von A bilden

2.2 *Signatur

Struktur $\mathcal{A} = (A; (R_i^{\mathcal{A}}|i \in I); (f_j^{\mathcal{A}}|j \in J); (c_k^{\mathcal{A}}|k \in K))$ ist vom Typ / besitzt die Signatur: $\sigma(\mathcal{A}) = ((n_i|i \in I); (m_j|j \in J); K)$
falls $R_i^{\mathcal{A}}$ n_i-stellig, $f_j^{\mathcal{A}}$ m_j-stellig
Sofern die Struktur keine Relation/Funktion hat, kennzeichnet man das in der Signatur mit einem -

2.3 *Sprache

Eine Sprache besteht aus Zeichen die man verwenden kann/muss wie: 1) Aussagenvariablen 2) Junktoren (wie $\neg, \vee$) 3) Existenzquantor 4) Gleichzeichen 5) Komma und Klammersymbole.

2.4 *Terme: Syntax

Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\sigma)$ mit $\sigma = ((n_i|i \in I); (m_j|j \in J); K)$. Menge der ($\mathcal{L}$-)Therme ist Induktiv definiert durch:

(T1) Jede Variable v_n, jede Konstante c_k ist ein Term

(T2) $t_1, ..., t_m \Rightarrow f_j(t_1, ..., t_m)$ ist ein Term

2.5 *Terme: Semantik

Für konstanten $\mathcal{L}$-Term t ist $t^{\mathcal{A}} \in A$ durch Ind(t) definiert:

1. $(c_k)^{\mathcal{A}} := c_k^{\mathcal{A}}$
2. $(f_j(t_1, ..., t_{m_j}))^{\mathcal{A}} := f_j(t_1, ..., t_{m_j})^{\mathcal{A}}$

2.6 (Variablen-)Belegung in $\mathcal{A}$

Sei $V = \{x_1, ..., x_n\}$ Menge von Variablen und $\mathcal{A}$ $\mathcal{L}$-Struktur.
Eine (Variablen-)Belegung B von V in $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $B : V \to \mathcal{A}$

2.7 Wert von t

Sei $t \equiv t(\overrightarrow{x}) \equiv t(x_1, ..., x_n)\mathcal{L}$-Term, in dem höchstens Variablen $x_1, ..., x_n$ vorkommen, $B : \{x_1, ..., x_n\} \to \mathcal{A}$ Belegung der Variablen in $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$, Wert $t_B^{\mathcal{A}} \in A$ von t in $\mathcal{A}$ bezüglich Belegung B ist durch Ind(t) definiert:

1. $(x_i)_B^{\mathcal{A}} := B(x_i), (c_k)_B^{\mathcal{A}} := c_k{}^{\mathcal{A}}$
2. $(f_j(t_1, ..., t_{m_j}))_B^{\mathcal{A}} := f_j^{\mathcal{A}}((t_1)_B^{\mathcal{A}}, ..., (t_{m_j})_B^{\mathcal{A}})$

2.8 *Koinzidenzlemma

$\mathcal{A}\mathcal{L}$-Struktur, t $\mathcal{L}$-Term, $V = \{x_1, ..., x_n\}, V' = \{x'_1, ..., x'_n\}$ Variablenmenge mit $V(t) \subseteq V, V'$ und B, B' Belegungen in $\mathcal{A}$ sodass $B \upharpoonright V(t) = B' \upharpoonright V(t) \Rightarrow t_B^{\mathcal{A}} = t_{B'}^{\mathcal{A}}$

2.9 *Formeln und Sätze: Syntax

Die Menge der ($\mathcal{L}$-)Formeln ist definiert durch:

(F1) (Gleichheitsformel)	a) t_1, t_2 Terme $\Rightarrow t_1 = t_2$ ist eine Formel b) $t_1, ..., t_{n_i}$ Terme $\Rightarrow R_i(t_1, ..., t_{n_i})$ ist eine Formel
(F2) (Negationsformel)	φ Formel $\Rightarrow \neg\varphi$ Formel
(F3) (Disjunktionen)	φ_1, φ_2 Formeln $\Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ Formel
(F4) (Existenzformel)	φ Formel, x Variable $\Rightarrow \exists x\varphi$ Formel

2.10 ($\mathcal{L}$-)Satz

Kommt in ($\mathcal{L}$-)Formel keine Variable frei vor ($FV(\varphi) = \emptyset$), dann ist φ ein ($\mathcal{L}$-)Satz

2.11 *Formeln und Sätze: Semantik

$\mathcal{A}\mathcal{L}$-Struktur, $\varphi \equiv \varphi(x_1, ..., x_n)\mathcal{L}$-Formel mit $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, B Belegung von $\{x_1, ..., x_n\}$
$\Rightarrow$ Wahrheitswert $W_B^{\mathcal{A}}(\varphi) \in \{0, 1\}$ von φ in $\mathcal{A}$ bezüglich B durch $Ind(\varphi)$ definiert:

1. $W_B^{\mathcal{A}}(t_1 = t_2) = 1$ gdw $(t_1)_B^{\mathcal{A}} = (t_2)_B^{\mathcal{A}}$

2. $W_B^{\mathcal{A}}(R_i(t_1, ..., t_{n_i})) = 1$ gdw $((t_1)_B^{\mathcal{A}}, ..., (t_{n_i})_B^{\mathcal{A}}) \in R_i^{\mathcal{A}}$
3. $W_B^{\mathcal{A}}(\neg\psi) = 1 \Leftrightarrow W_B^{\mathcal{A}}(\psi) = 0$
4. $W_B^{\mathcal{A}}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = 1$ gdw $W_B^{\mathcal{A}}(\varphi_1) = 1$ oder $W_B^{\mathcal{A}}(\varphi_2) = 1$
5. $W_B^{\mathcal{A}}(\exists y\psi) = 1$ gdw $\exists B'$ von $\{x_1, ..., x_n, y\}$, die mit B auf $\{x_1, ..., x_n\}\backslash\{y\}$ übereinstimmt und $W_B^{\mathcal{A}}(\psi) = 1$

2.12 *Koinzidenzlemma (für Formeln)

$\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $\varphi\mathcal{L}$-Formel, $V = \{x_1, ..., x_m\}, V' = \{x'_1, ..., x'_m\}$ Variablenmengen mit $FV(\varphi) \subseteq V, V'$ und B, B' Belegungen in $\mathcal{A}$ s.d. $B \restriction FV(\varphi) = B' \restriction FV(\varphi) \Rightarrow W_B^{\mathcal{A}}(\varphi) = W_{B'}^{\mathcal{A}}(\varphi)$

2.13 *Satz ist in Struktur wahr

$\mathcal{L}$-Satz σ ist in $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ wahr, wenn $W_B^{\mathcal{A}}(\sigma) = 1$ für die leere Variablenmenge gilt.

Man sagt für $A \vDash \sigma$, A ist Modell von sigma.

2.14 *Formel ist in Struktur wahr

$\mathcal{L}$-Formel φ ist in $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ wahr, wenn $W_B^{\mathcal{A}}(\varphi) = 1$ für alle Variablenbelegungen B von $FV(\varphi)$ gilt

Man sagt für $A \vDash \varphi$, A ist Modell von phi.

2.15 *Allabschluss mit Formeln

Der Allabschluss $\forall\varphi$ einer Formel φ, mit freien Variablen $x_1, ..., x_n$ ist ein Satz $\forall\varphi := \forall x_1, ..., \forall x_n\varphi$, wobei Variablen $x_1, ..., x_n$ geordnet bezüglich Aufzählung

2.16 *Relation mit Formeln

$\varphi \equiv \varphi(x_1, ..., x_n)\mathcal{L}$-Formel mit $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$. Die von φ auf $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ definierte n-stellige Relation $R_\varphi^{\mathcal{A}}$ ist bestimmt durch: $(a_1, ..., a_n) \in R_\varphi^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$

2.17 *Zentrale semantische Konzepte: Allgemeingültigkeit

$\mathcal{L}$-Formel φ ist (logisch) wahr oder allgemeingültig, wenn alle $\mathcal{L}$-Strukturen Modell von φ sind: Für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$

2.18 *Zentrale semantische Konzepte: Erfüllbarkeit

a) ($\mathcal{L}$-)Formel φ ist erfüllbar, wenn φ ein Modell besitzt: Es gibt eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Andernfalls ist φ unerfüllbar.

b) Menge Φ von $\mathcal{L}$-Formeln ist erfüllbar, wenn es eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ gibt, die Modell aller Formeln in Φ ist

2.19 *Zentrale semantische Konzepte: Folgerungsbegriff

$\mathcal{L}$-Formel φ folgt aus $\mathcal{L}$-Formel $\psi(\psi \vDash \varphi)$, wenn jedes Modell von ψ auch Modell von φ ist.

Für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}\psi \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi$

φ und ψ sind äquivalent (φ äq ψ), wenn φ und ψ die selben Modelle haben

2.20 Formel folgt aus Menge

$\mathcal{L}$-Formel φ folgt aus Menge Φ von ($\mathcal{L}$-)Formeln ($\Phi \vDash \varphi$), wenn jedes Modell von Φ auch Modell von φ ist:

Für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \vDash \Phi \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi$

2.21 Monotonie des Folgerungsbegriffs

$\Phi \subseteq \Psi$ und $\Phi \vDash \varphi \Rightarrow \Psi \vDash \varphi$

2.22 Verträglichkeit von $\vDash$ und $\rightarrow$

$$\begin{aligned} \varphi_1, ..., \varphi_n \vDash \sigma \quad & \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \vDash \sigma \\ & \Leftrightarrow \vDash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow \sigma \end{aligned}$$

2.23 Erfüllbare Formelmenge

$\mathcal{L}$-Formelmenge Φ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ Es gibt keinen $\mathcal{L}$-Satz σ mit: $\Phi \vDash \sigma$ und $\Phi \vDash \neg\sigma$

2.24 Zusammenhang zwischen Folgerungs- und Erfüllbarkeitsbegriff

Für jede $\mathcal{L}$-Formelmenge Φ und jeden $\mathcal{L}$-Satz σ gilt: $\Phi \vDash \sigma \Leftrightarrow \Phi \cup \{\neg\sigma\}$ unerfüllbar

2.25 *Tautologie

Formel φ ist eine Tautologie (aussagenlogisch gültig, $\vDash_{AL} \varphi$), falls $B(\varphi) = 1$ für alle al. Belegungen B

Jede Tautologie ist allgemeingültig: $\vDash_{AL} \varphi \rightarrow \vDash \varphi$

2.26 Aussagenlogische Folgerung

Formen φ ist aussagenlogische Folgerung aus Formeln
$\varphi_1, ..., \varphi_n (\varphi_1, ..., \varphi_n \vDash_{AL} \varphi)$, falls für alle al. Belegungen B gilt:
$B(\varphi_1) = ... = B(\varphi_n) = 1 \Rightarrow B(\varphi) = 1$

2.27 Lemma über al Folgerungen

$\varphi_1, ..., \varphi_n \vDash_{AL} \varphi \Rightarrow \varphi_1, ..., \varphi_n \vDash \varphi$

2.28 Substitution

$\varphi[t/x]$: alle freien vorkommen von x durch Term t ersetzen

2.29 !Substituirbarkeitsbedingung

Term t heißt in Formel φ für Variable x substituierbar, wenn keine in t vorkommende Variable $y \neq x$ in φ gebunden vorkommt

2.30 Substitutionslemma

Sei Term t für Variable x in Formel φ substituierbar

$\Rightarrow \varphi[t/x] \rightarrow \exists x \varphi$ allgemeingültig

3 Ein Adäquater Kalkül der Prädikatenlogik

3.1 Axiome

Substitutionsaxiome:

(S1) $\varphi[t/x] \rightarrow \exists x\varphi$
Gleichheitsaxiome:

(G1) x = x

(G2) $x_1 = y_1 \wedge ... \wedge x_{m_j} = y_{m_j} \rightarrow f(x_1, ..., x_{m_j}) = f(y_1, ..., y_{m_j})$

(G3) $x_1 = y_1 \wedge ... \wedge x_{n_i} = y_{n_i} \rightarrow R(x_1, ..., x_{n_i}) = R(y_1, ..., y_{n_i})$

(G4) $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2$

$\exists$-Einführungsregeln:
(∃1) $\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x\varphi \rightarrow \psi}$
Falls x in ψ nicht frei vorkommt.

3.2 Tautologiesatz

(i) $\models_{AL} \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$

(ii) $\varphi_1, ..., \varphi_n \models_{AL} \varphi \Rightarrow \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$

3.3 Aussagenlogische Schlüsse

(AL) $\psi_1, ..., \psi_n \models_{AL} \varphi$ $(n \neq 0) \Rightarrow \frac{\psi_1, ..., \psi_n}{\varphi}$ in S_{PL} für n = 0 ist (AL) das Axiomenschema (Hierdurch bestimmt man die Regel φ)
(AL) φ (falls $\models_{AL} \varphi$) (Hierdurch bestimmt man das Axiom φ)

3.4 Generalisierung und Distribution

(∀1) $\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x\psi}$

(∀2) $\frac{\varphi}{\forall x\varphi}$

($D_\exists$) $\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi}$

($D_\forall$) $\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi}$

3.5 Ersetzung und Substitution I

(E) $\frac{\psi_1 \leftrightarrow \psi_1', ..., \psi_n \leftrightarrow \psi_n'}{\varphi \leftrightarrow \varphi'}$ falls φ' aus φ durch Ersetzen einzelner Vorkommen der Teilformeln ψ_i durch ψ_i' entsteht (wobei die ersetzten Teilformeln nicht ineinander liegen)

(S2) $\frac{\varphi}{\varphi[t_1/x_1, ..., t_n/x_n]}$ falls t für x_i Substituirbar in p(S)

3.6 Umbenennung Gebundener Variablen

(U) $\varphi \leftrightarrow \varphi^*$
Falls φ^* aus φ durch Umbenennung gebundener Variablen entsteht. Hierbei darf bei Ersetzung einer Teilformel $\exists x\psi$ durch $\exists y\psi[y/x]$ die Variable y nicht in ψ vorkommen.

3.7 Substitution II

($S2_\exists$) $\varphi[t_1/x_1, ..., t_n/x_n] \to \exists x_1...\exists x_n\varphi$ (Falls SB erfüllt)

($S2_\forall$) $\forall x_1...\forall x_n\varphi \to \varphi[t_1/x_1, ..., t_n/x_n]$ (Falls SB erfüllt)

($\forall 3_1$) $\frac{\varphi}{\forall\varphi}$

($\forall 3_2$) $\frac{\forall\varphi}{\varphi}$

3.8 Gleichheit

(G5) s = t → t = s

(G6) $t_1 = t'_1 \wedge ... \wedge t_n = t'_n \to s = s'$
falls s' aus s durch Ersetzen einiger (oder auch aller) Vorkommenden der Terme t_i durch entsprechende Terme t'_i entsteht

(G7) $t_1 = t'_1 \wedge ... \wedge t_n = t'_n \to (\varphi[t_1/x_1, ..., t_n/x_n] \leftrightarrow \varphi[t'_1/x_1, ..., t'_n/x_n])$
falls die Terme t_i und t'_i für x_i in φ Substituirbar sind

3.9 *Deduktionstheorem

Sei Φ Menge von Formeln, ψ Formel σ Satz. Dann gilt:
$\Phi \vdash \sigma \to \psi \Leftrightarrow \Phi \cup \{\sigma\} \vdash \psi$

3.10 Korollar zum Deduktionstheorem

Sei Φ Menge von Formeln, ψ Formel, $\sigma_1, ..., \sigma_n$ Sätze. Dann gilt:
$\Phi \vdash \sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_n \to \psi \Leftrightarrow \Phi \cup \{\sigma_1, ..., \sigma_n\} \vdash \psi$

3.11 Theorie

Eine ($\mathcal{L}$-)Theorie T ist ein Paar T = $(\mathcal{L}, \Sigma)$, wobei:

- $\mathcal{L}$ eine Sprache der Prädikatenlogik: Sprache der Theorie T

- Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Sätzen ist: Axiom von T

T endlich $\Leftrightarrow$ Σ endlich

3.12 Modellklasse

Die Modellklasse Mod(T) einer $\mathcal{L}$-Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ ist die Menge aller $\mathcal{L}$-Strukturen, die Modell der Axiomenmenge Σ von T sind: $Mod(T) = \{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ ist eine $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathcal{A} \vDash \Sigma\}$

- $\mathcal{A}$ Modell von T: $\mathcal{A} \vDash T$
- T erfüllbar $\Leftrightarrow$ Σ erfüllbar, also $Mod(T \neq \emptyset)$

3.13 Syntaktischer Deduktiver Abschluss

Der (syntaktische) deduktive Abschluss von $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ ist:
$C_{\vdash}(T) = \{\sigma : \sigma \text{ist ein } \mathcal{L}\text{-Satz } \text{ und } T \vdash \sigma\}$

Semantischer Abschluss:
$C_{\vDash}(T) = \{\sigma : \sigma \text{ist ein } \mathcal{L}\text{-Satz und } T \vDash \sigma\}$

3.14 Äquivalente L-Theorien

Zwei $\mathcal{L}$-Theorien $T = (\mathcal{L}, \Sigma), T' = (\mathcal{L}, \Sigma')$ sind äquivalent $\Leftrightarrow C_{\vdash}(T) = C_{\vdash}(T')$

3.15 Erweiterung und Konservative Erweiterung

$\mathcal{L}$'-Theorien $T' = (\mathcal{L}', \Sigma')$ ist eine Erweiterung der $\mathcal{L}$-Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)(T \subseteq T')$ falls:

(i) $\mathcal{L}$' Erweiterung von $\mathcal{L}$

(ii) für jede $\mathcal{L}$-Formel φ gilt: $T \vdash \varphi \Rightarrow T' \vdash \varphi$
Gilt außerdem für jede $\mathcal{L}$-Formel φ: $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T' \vdash \varphi$ so heißt T' eine konservative Erweiterung

3.16 Sprachliche Erweiterung

Theorie $T' = (\mathcal{L}', \Sigma')$ heißt sprachliche Erweiterung der Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$, wenn $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ und $\Sigma = \Sigma'$

Außerdem gilt dann noch, dass T' eine konservative Erweiterung von T ist, da: Für alle $\mathcal{L}$-Formeln φ gilt: $T' \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

3.17 Zusätzliches zu Theorien

1. Sei $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ eine $\mathcal{L}$-Theorie, $\mathcal{L}$' eine Erweiterung von $\mathcal{L}$ um die Konstante c, $T' = (\mathcal{L}', \Sigma)$ rein sprachliche Erweiterung von T auf $\mathcal{L}$'. Dann gilt für jede $\mathcal{L}$-Formel φ: $T' \vdash \varphi[c/x] \Leftrightarrow T \vdash \forall x\varphi (\Leftrightarrow T' \vdash \forall x\varphi)$

2. Sei Σ Menge von $\mathcal{L}_0$-Sätzen, $\varphi\mathcal{L}_0$-Formel, c konstante von $\mathcal{L}_0$, die weder in φ noch in Σ vorkommt. Dann gilt: $\Sigma \vdash \forall x\varphi$

3.18 Konsistent/Widerspruchsfrei

Eine Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ ist konsistent oder widerspruchsfrei, falls es einen $\mathcal{L}$-Satz σ gibt mit $T \nvdash \sigma$ Man nennt eine Theorie konsistent, wenn man mindestens einen Satz nicht beweisen kann - man kann nicht alles beweisen, sonst würde etwas vorkommen wie $T \vdash \sigma \wedge T \vdash \neg\sigma$.

3.19 Charakterisierungslemma für Konsistenz (LCK)

Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ ist konsistent $\Leftrightarrow \nexists$ $\mathcal{L}$-Satz $\sigma : T \vdash \sigma$ und $T \vdash \neg\sigma$

3.20 Lemma über Zusammenhang zwischen Beweisbarkeit und Konsistenz (LBK)

(i) $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\forall\varphi\}$ inkonsistent

(ii) $T \nvdash \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\forall\varphi\}$ konsistent

für Satz σ ist Allabschluss $\forall\sigma = \sigma \Rightarrow$ für Sätze gilt: $T \vdash \sigma \Leftrightarrow T \cup \{\neg\sigma\}$ inkonsistent

3.21 *Erfüllbarkeitslemma (Modellexistenzsatz, EL)

Jede konsistente Theorie T ist erfüllbar (d.h. besitzt ein Modell)

3.22 *Vollständigkeitssatz (VS)

Eine Theorie ist Vollständig wenn gilt: $T \models \sigma \Rightarrow T \vdash \sigma$

3.23 Relation ~

Relation $\sim \subseteq K_{\mathcal{L}} * K_{\mathcal{L}}$ ist gegeben durch: $t \sim t' \Leftrightarrow T \vdash t = t'$
$K_{\mathcal{L}}$ = Menge aller konstanten $\mathcal{L}$-Terme

3.24 *!Termstruktur (Termmodell)

Die Termstruktur (Termmodell) $\mathcal{A}_T = (A_T; (R_i^{\mathcal{A}_T} : i \in I); (f_j^{\mathcal{A}_T} : j \in J); (c_k^{\mathcal{A}_T} : k \in K))$ von T ist gegeben durch:

- $A_T := K_T = \{\overline{t} : t \in K_{\mathcal{L}}\}$ wobei $\overline{t} = \{t' \in K_{\mathcal{L}} : t' \sim t\}$
- $(\overline{t_1}, ..., \overline{t_{n_i}}) \in R_i^{\mathcal{A}_T} \Leftrightarrow T \vdash R_i(t_1, ..., t_{n_i})$
- $f_j^{\mathcal{A}_T}(\overline{t_1}, ..., \overline{t_{n_i}}) := \overline{f_j^{\mathcal{A}_T}(t_1, ..., t_{n_i})}$
- $c_k^{\mathcal{A}_T} := \overline{c_k}$

3.25 Wohldefinierte L-Struktur

Falls Sprache $\mathcal{L}$ zumindest eine Konstante besitzt (d.h. $K \neq \emptyset$), so ist $\mathcal{A}_T$ eine wohldefinierte $\mathcal{L}$-Struktur und es gilt: $\forall t \in K_{\mathcal{L}} : t^{\mathcal{A}_T} = \overline{t}$

3.26 Lemma über Termmodelle

Sei $K \neq \emptyset$. Dann gilt für atomare $\mathcal{L}$-Sätze σ: $\mathcal{A}_T \vDash \sigma \Leftrightarrow T \vdash \sigma$

3.27 Syntaktisch Vollständige Theorie

$\mathcal{L}$-Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ ist (syntaktisch) vollständig, falls für jeden $\mathcal{L}$-Satz σ gilt: $T \vdash \sigma$ oder $T \vdash \neg\sigma$

- Theorie T ist konsistent und vollständig, dann gilt für jeden $\mathcal{L}$-Satz entweder $T \vdash \sigma$ oder $T \vdash \neg\sigma$
- konsistente vollständige Theorie heißt maximal vollständig

3.28 *Henkin-Theorie

$\mathcal{L}$-Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ ist eine Henkin-Theorie, falls es für jeden $\mathcal{L}$-Existenzsatz $\exists x\varphi$ einen konstanten $\mathcal{L}$-Term t gibt mit: $T \vdash \exists x\varphi \rightarrow \varphi[t/x]$

3.29 Satz über Termmodelle

Sei $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ konsistent, vollständig und eine Henkin-Theorie. Dann gilt für alle $\mathcal{L}$-Sätze σ: $\mathcal{A}_T \vDash \sigma \Leftrightarrow T \vdash \sigma$ Insbesondere $\mathcal{A}_T$ ist Modell von T

3.30 Satz von Lindenbaum (PL)

Sei $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ eine konsistente Theorie, wobei $\mathcal{L}$ abzählbar ist.
$\Rightarrow$ Es gibt eine vollständige und konsistente $\mathcal{L}$-Theorie $T_V = (\mathcal{L}, \Sigma_V)$ mit $\Sigma \subseteq \Sigma_V$
Definition von Σ_V durch Erweiterungen Σ_n von Σ

$$\Sigma_0 := \Sigma$$
$$\Sigma_{n+1} \begin{cases} \Sigma_n & \text{falls } \Sigma_n \vdash \sigma_n \\ \Sigma_n \cup \{\neg \sigma_n\} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \Sigma_V := \bigcup_{n \geq 0} \Sigma_n$$

3.31 *Satz über Henkin-Erweiterungen

Sei $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ Theorie über abzählbarer Sprache $\mathcal{L}$. Es gibt eine Erweiterung $T_H = (\mathcal{L}_H, \Sigma_H)$ von T mit folgenden.
Eigenschaften:

(i) T_H ist eine Henkin-Theorie

(ii) T_H ist eine konservative Erweiterung von T

(iii) $\mathcal{L}_H$ ist abzählbar

3.32 Henkin-Erweiterung T-H

1-Schritt der Henkin-Erweiterung $T^* = (\mathcal{L}^*, \Sigma^*)$ ist definiert durch

- $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c_\sigma : \sigma \mathcal{L}\text{-Satz der Gestalt } \sigma \equiv \exists x \varphi\}$
- $\Sigma^* = \Sigma \cup \{\exists x \varphi \rightarrow \varphi[c_{\exists x \varphi}/x] : \exists x \varphi \mathcal{L}\text{-Satz}\}$ mit $c_{\exists x \varphi}$ Henkin-Konstante und $\exists x \varphi \rightarrow \varphi[c_{\exists x \varphi}/x]$ Henkin-Axiome

$\Rightarrow$ definiere $T_n = (\mathcal{L}_n, \Sigma_n)$ durch Induktion

$$\begin{aligned} T_0 &= (\mathcal{L}_0, \Sigma_0) := T \\ T_{n+1} &= (\mathcal{L}_{n+1}, \Sigma_{n+1}) := (T_n)^* = ((\mathcal{L}_n)^*, (\Sigma_n)^*) \\ \Rightarrow T_H &= (\mathcal{L}_H, \Sigma_H) \text{ mit } \mathcal{L}_H := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{L}_n \text{ und } \Sigma_H := \bigcup_{n \geq 0} \Sigma_n \end{aligned}$$

3.33 Adäquatheitssatz

$T \models \sigma \Leftrightarrow T \vdash \sigma$

3.34 Satz über Konsistenz und Erfüllbarkeit

T erfüllbar $\Leftrightarrow$ T konsistent

3.35 *Kompaktheitssatz(Endlichkeitssatz)

(i) Theorie T erfüllbar $\Leftrightarrow$ Jede endliche Teilmenge T_0 erfüllbar

(ii) Satz σ folgt aus T $\Leftrightarrow$ $\exists$ endliches T_0 aus der σ folgt

3.36 Satz von Löwenheim

$T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ erfüllbare Theorie, $\mathcal{L}$ abzählbar
$\Leftrightarrow$ T besitzt ein abzählbares Modell

3.37 Satz über vollständig erfüllbare Theorien

T vollständige erfüllbare Theorie
$\Rightarrow \exists$ $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ mit $T = Th(\mathcal{A}) = \{\sigma : \mathcal{A} \vDash \sigma\}$

3.38 Satz für endliche Sprachen

$\mathcal{L}$ endliche Sprache $\Rightarrow$ Menge allgemeingültiger $\mathcal{L}$-Formeln auf zählbar

4 Theorien und Modelle

4.1 Deduktiver Abschluss

Deduktiver Abschluss C(T) einer Theorie $T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ ist Menge aller aller Folgerungen aus T: $C(T) = \{\sigma : T \vDash \sigma\}$
$T = (\mathcal{L}, \Sigma)$ deduktiv abgeschlossen, falls $\Sigma = C(T)$

4.2 Monotonie des Deduktiven Abschlusses

$T = (\mathcal{L}, \Sigma), T' = (\mathcal{L}, \Sigma')\mathcal{L}$-Theorien. Dann gilt: $\Sigma \subseteq \Sigma' \Rightarrow C(T) \subseteq C(T')$

4.3 Eigenschaften über C(T)

$T = (\mathcal{L}, \Sigma)\mathcal{L}$-Theorie. Dann gilt:

(i) $\Sigma \subseteq C(T)$

(ii) C(C(T)) = C(T) (deduktiver Abschluss ist deduktiv abgeschlossen)

(iii) Mod(T) = Mod(C(T))

4.4 Äquivalente Theorien

2 $\mathcal{L}$-Theorien T und T' sind gleich/äquivalent ($T \sim T'$) $\Leftrightarrow$ C(T) = C(T') $\Leftrightarrow$ ($\Sigma' \subseteq C(\Sigma)$ und $\Sigma \subseteq C(\Sigma')$) $\Leftrightarrow$ Mod(T) = Mod(T')

4.5 Teiltheorie

$T = (\mathcal{L}, \Sigma)$, $T' = (\mathcal{L}, \Sigma')$ Theorien. T ist eine Teiltheorie von:
T' ($T \subseteq T'$) $\Leftrightarrow \Sigma \subseteq \Sigma'$

4.6 *Elementare Theorie

Eine Elementare Theorie $Th(\mathcal{A})$ einer Struktur $\mathcal{A}$ ist eine $\mathcal{L}$-Theorie: $Th(\mathcal{A}) = (\mathcal{L}, \Sigma)$ mit $\Sigma = \{\sigma : \mathcal{A} \vDash \sigma\}$

Zusätzlich gilt: Für jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ ist $Th(\mathcal{A})$ erfüllbar und vollständig

4.7 *Elementar und Delta Elementar

Klasse κ von $\mathcal{L}$-Strukturen ist elementar $\Leftrightarrow \exists$ $\mathcal{L}$-Satz $\sigma : \kappa = Mod(\sigma)$
Klasse κ heißt Δ-elementar $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}$-Theorie T: $\kappa = Mod(T)$

4.8 *Eigenschaften über Delta-Elementare Strukturen

Klasse κ von $\mathcal{L}$-Strukturen Δ-elementar $\Leftrightarrow$ κ ist Durchschnitt von elementaren Klassen von $\mathcal{L}$-Strukturen

Familie von Δ-elementaren Strukturklassen gegen beliebige Durchschnitte abgeschlossen. Sind Klassen $\kappa_i (i \in I)$ Δ-elementar $\Rightarrow \kappa = \bigcap\limits_{i \in I} \kappa_i$ Δ-elementar. Familie Δ-elementaren Klassen von $\mathcal{L}$-Strukturen ist nicht gegen Kompliment abgeschlossen.

4.9 *Elementare Eigenschaften

Familie elementarer Klassen von $\mathcal{L}$-Strukturen abgeschlossen gegen:

(i) Vereinigung

(ii) Durchschnitt

(iii) Komplement

4.10 Anzahlformeln

$\varphi_{\geq n} :\equiv \exists x_1, ..., \exists x_n (\bigwedge\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j)$
$\varphi_{\leq n} :\equiv \exists x_1, ..., \exists x_n \forall x (\bigvee\limits_{1 \leq i \leq n} x = x_i)$
$\varphi_{=n} :\equiv \varphi_{\geq n} \wedge \varphi_{\leq n}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \mathcal{A} \vDash \varphi_{\geq n} \Leftrightarrow |A| \geq n \\ & \mathcal{A} \vDash \varphi_{\leq n} \Leftrightarrow |A| \leq n \\ & \mathcal{A} \vDash \varphi_{=n} \Leftrightarrow |A| = n \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow \text{Für Klassen} & \mathcal{M}_n := \{\mathcal{A} : |A| = n\} = \mathrm{Mod}(\varphi_{=n}) & (n \geq 1) \\ & \mathcal{M}_{\geq n} := \{\mathcal{A} : |A| \geq n\} = \mathrm{Mod}(\varphi_{\geq n}) & (n \geq 1) \\ & \mathcal{M}_{\leq n} := \{\mathcal{A} : |A| \leq n\} = \mathrm{Mod}(\varphi_{\leq n}) & (n \geq 1) \\ & \mathcal{M}_{inf} := \{\mathcal{A} : A\} = \mathrm{Mod}(\varphi_{\geq n} : n \geq 1) & \end{array}$$

Es gilt für eine $\mathcal{L}$-Sprache $n \geq 1$, dass die Klassen $\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_{\geq n}, \mathcal{M}_{\leq n}$ elementar sind und $\mathcal{M}_{inf}$ ist Δ-Elementar

4.11 Partielle Ordnung

Partielle Ordnung $\mathcal{P} = (P, <^{\mathcal{P}})$ erfüllt:

$\pi_1 \equiv \forall x \neg (x < x)$ Irreflexibilität

$\pi_2 \equiv \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$ Transitivität

$\pi_3 \equiv \forall x \forall y(x < y \to \neg(y < x))$ Antisymmetrie

In linearen/totalen Ordnung gilt zusätzlich:
$\pi_4 \equiv \forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$ Totalität

$\Rightarrow$ $T_{PO} = (\mathcal{L}, \{\sigma_{PO}\})$ mit $\sigma_{PO} \equiv \pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3$. Theorie der partiellen Ordnung
$T_{LO} = (\mathcal{L}, \{\sigma_{LO}\})$ mit $\sigma_{LO} \equiv \pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4$. Theorie der linearen Ordnung

$\Rightarrow$ $PO := \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist partielle Ordnung}\} = Mod(T_{PO}) = Mod(\sigma_{PO})$
$LO := \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist lineare Ordnung}\} = Mod(T_{LO}) = Mod(\sigma_{LO})$

$\Rightarrow$ Klassen sind elementar

4.12 *Gruppen- und Körperaxiome

$\gamma_1 \equiv \forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z))$ Assoziativität
$\gamma_2 \equiv \forall x(0 + x = x)$ 0 links neutral
$\gamma_3 \equiv \forall x \exists y(y + x = 0)$ Existenz von Links inversen
$T_G = (\mathcal{L}, \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\})$ Gruppentheorie
$\Rightarrow$ Klassen G der Gruppen elementar
$\gamma_4 \equiv \forall x \forall y(x + y = y + x)$ Kommutativität
$\Rightarrow$ G Abelsch
$\Rightarrow$ G ist Abelsch

Körperaxiome:

Es seien $\gamma_1, ..., \gamma_4$ Gruppenaxiome

$\gamma_1' \equiv \forall x \forall y \forall z((x * y) * z = x * (y * z))$
$\gamma_2' \equiv \forall x(1 * x = x)$
$\gamma_3' \equiv \forall x \exists y(x \neq 0 \to x * y = 1)$
$\gamma_4' \equiv \forall x \forall y(x * y = y * x)$
$\delta \equiv \forall x \forall y \forall z(x * (y + z) = (x * y) + (x * z))$
$T_K = (\mathcal{L}, \{\gamma_1, ..., \gamma_4, \gamma_1', ..., \gamma_4', \delta\})$

$\Rightarrow$ Klasse der Körper ist elementar

4.13 Charakteristik

- κ hat die Charakteristik $p \geq 1 \Leftrightarrow \underbrace{1 + ... + 1}_{\text{p-mal}} = 0$ (endlich)
- unendliche Charakteristik/Charakteristik 0 $\Leftrightarrow$ keine endliche Charakteristik

4.14 Lemma

(i) $p \geq 1 \Rightarrow$ Klasse K_p der Körper Charakteristik p ist elementar

(ii) Klasse K_0 ist Δ-Elementar

4.15 Isomorphismen

a) ($\mathcal{L}$)-Isomorphismus f von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}(f : \mathcal{A} \cong \mathcal{B})$ ist eine bijektive Abbildung $f : A \to B$, die mit den ausgezeichneten Relationen, Funktionen und Konstanten verträglich ist:

- $(a_1, ..., a_{n_i}) \in \mathcal{R}_i^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (f(a_1), ..., f(a_{n_i}) \in \mathcal{R}_i^{\mathcal{B}}$
- $f(f_i^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_{m_j})) = f_i^{\mathcal{B}}(f(a_1), ..., f(a_{m_j})$
- $f(c_k^{\mathcal{A}}) = c_k^{\mathcal{B}}$

b) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorph ($\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$) $\Leftrightarrow \exists$ Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$

Es gilt zusätzlich: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Rightarrow \forall$ Satz $\sigma : \mathcal{A} \vDash \sigma \Leftrightarrow \mathcal{B} \vDash \sigma$

Weiterhin: $\mathcal{A}, \mathcal{B}\mathcal{L}$-Strukturen, $f : A \to B$ Isomorphismus, $\tilde{B} : \{x_0, ..., x_n\} \to A$ Belegung. Dann gilt für jeden $\mathcal{L}$-Term $t \equiv t(x_0, ..., x_n)$, jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi \equiv \varphi(x_0, ..., x_n)$:

- $f(t_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{A}}) = t_{f(\tilde{\mathcal{B}})}^{\mathcal{B}}$
- $W_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = W_{f(\tilde{\mathcal{B}})}^{\mathcal{B}}(\varphi)$

4.16 !(Elementar) Äquivalent

$\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ elementar äquivalent ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$) $\Leftrightarrow Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$ ($\forall$-Satz: $\mathcal{A} \vDash \sigma \Leftrightarrow \mathcal{B} \vDash \sigma$)

Für $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind äquivalent

(i) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$

(ii) $B \vDash Th(\mathcal{A})$

Klasse κ von $\mathcal{L}$-Strukturen (Δ-)elementar $\Rightarrow \kappa$ gegen elementare Äquivalenz und Isomorphie abgeschlossen

Für eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\{\mathcal{B} : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}\}$ ist Δ-Elementar

(ii) Jede zu $\mathcal{A}$ äquivalente Struktur $\mathcal{B}$ ist zu $\mathcal{A}$ isomorph. D.h. Für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

(iii) Für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

(iv) Für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \vDash Th(\mathcal{A})$

4.17 Kompaktheitssatz der PL1

a.) Kompaktheitssatz für Folgerungsbegriff T $\mathcal{L}$-Theorie, σ $\mathcal{L}$-Satz mit $T \vDash \sigma$, dann existiert endliche Teiltheorie $T_0 \subseteq T$ mit $T_0 \vDash \sigma$

b.) Kompaktheitssatz für Erfüllbarkeitsbegriff Jede endliche Teiltheorie $T_0 \subseteq T$ mit $T_0 \vDash \sigma$

Klasse κ von $\mathcal{L}$-Strukturen ist elementar $\Leftrightarrow$ Klasse κ und Komplement $\overline{\kappa}\Delta$-elementar

4.18 Satz über Existenz unendlicher Modelle

$T = (\mathcal{L}, \Sigma)\mathcal{L}$-Theorie, die für jedes $n \geq 1$ ein Modell mit mindestens n Elementen besitzt. Dann besitzt T ein unendliches Modell

a) Klasse M_{fin} ist nicht Δ-Elementar

b) Klasse M_{inf} ist nicht Elementar

4.19 Ordnungen und Wohlordnungen

Lineare Ordnung $O = (A, <)$ ist eine Wohlordnung $\Leftrightarrow$ besitzt keine unendlich absteigende Kette, d.h. keine Individuen $a_n \in A$ mit ... $a_2 < a_1 < a_0$ (Wie die Ordnung der natürlichen Zahlen)

Die Klasse der Wohlordnungen ist nicht Δ-Elementar

4.20 !Körper und deren Charakteristik

(i) Klasse κ_0 der Körper mit der Charakteristik 0 ist nicht elementar

(ii) Klasse κ_{fin} der Körper endlicher Charakteristik ist nicht Δ-elementar

4.21 Satz von Skolem

Es gibt eine $\mathcal{L}(\leq; +, *; 0, 1)$-Struktur $\mathcal{N}^*$, die zur Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}; \leq; +, *; 0, 1)$ der natürlichen Zahlen elementar äquivalent ist, also $\mathcal{N} \vDash Th(\mathcal{N})$ erfüllt, aber nicht zu $\mathcal{N}$ isomorph ist.

Sei im Folgenden $\mathcal{A} = (A; \leq^{\mathcal{A}}; +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}; 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$ ein Nichtstandardmodell der Arithmetik, d.h. ein nicht zu $\mathcal{N}$ isomorphes Modell von $Th(\mathcal{N})$

Ist $(L; \leq)$ eine lineare Ordnung, dann ist $A \subseteq L$:

- Anfangsstück von L $\Leftrightarrow \forall x, y(x \in A \cap y \leq x \rightarrow y \in A)$

- Endstück von L $\Leftrightarrow \forall x, y(x \in A \cap x \leq y \rightarrow y \in A)$
- Intervall von L $\Leftrightarrow \forall x, y, z(x, y \in A \cap x \leq z \leq y \rightarrow z \in A)$

Elemente einer linearen Ordnung bezeichnen wir als Punkte.