7. INDUZIONE STRUTTURALE

Dovendo provare proprietà di oggetti ***definiti ricorsivamente*** può essere utile la ***induzione strutturale***.

Sia A = un insieme di ***elementi definiti ricorsivamente*** e P = ***proprietà*** avente come oggetto gli elementi di A, si vuole provare che $\forall x \in A$ P(x), con l'***induzione strutturale*** basta provare che:

Base: Mostrare che l'enunciato P è vero per tutti gli elementi nell'insieme specificati dal passo Base della definizione ricorsiva di A.

Passo Ricorsivo: Mostrare che:
- Se l'enunciato P è vero per ciascuno degli elementi già in A, cioè gli elementi usati per costruire nuovi elementi nel Passo Ricorsivo della definizione di A
- Allora l'enunciato P è vero per questi nuovi elementi.

Esempio 0: Sia A l'insieme costituito dagli elementi definiti ricorsivamente come segue:

Passo base: $1 \in A$
Passo ricorsivo: se $x \in A$ allora $x + 2 \in A$

Provare che A è costituito dagli interi dispari positivi

Dim.

Sia D l'insieme di tutti gli interi dispari positivi cioè
$D=\{y \in Z^+ \mid \exists k \ (k \geq 0 \wedge y=2k+1)\}$

Dobbiamo provare che D = A

Proveremo quindi che $D \subseteq A$ e $A \subseteq D$

Dim. Proviamo prima che $D \subseteq A$

Procediamo usando l'induzione matematica
P(k): $2k+1 \in A \quad \forall k \geq 0$

Base: proviamo che P(0) è vera

$2 \bullet 0+1 = 1 \in A$

Ipotesi induttiva: assumiamo che P(k) è vera

Passo di induzione: proviamo che P(k+1) è vera

$2 \bullet (k+1) + 1 = (2 \bullet k+ 1) +2 \in A$

ipotesi induttiva — definizione ricorsiva

Dim. Ora proviamo che $A \subseteq D$

Procediamo usando l'induzione strutturale
P(x): x = 2k+1 per qualche intero $k \geq 0$ $\quad \forall x \in A$

Usiamo la definizione ricorsiva di A

Base: Da passo base della definizione ricorsiva sappiamo che $1 \in A$,
poichè $1 = 2 \bullet 0 +1$ => P(1) è vera

Passo di ricorsione: usiamo la seconda parte della definizione ricorsiva di A, e consideriamo un $x+2 \in A$
- assumiamo che P(x) è vera
- proviamo che P(x+2) è vera

x=2k+1 per qualche intero $k \geq 0$

$x+2 = 2k+1 + 2 = 2 (k+1) +1 \in D$

Esempio 1: Sia A un insieme definito nel modo seguente:

Passo base: $3 \in A$
Passo ricorsivo: se $x \in A$ e $y \in A$ allora $x+y \in A$

Provare che A è costituito dagli interi positivi multipli di 3

Dim.

Sia M l'insieme di tutti i multipli di 3, cioè
$M=\{y \in Z^+ \mid \exists k \ (k \in Z^+ \wedge y=3k)\}$

Dobbiamo provare che M = A

Proveremo quindi che $M \subseteq A$ e $A \subseteq M$

Dim. Proviamo prima che $M \subseteq A$

Procediamo usando l'induzione matematica
P(k): $3k \in A \quad \forall k \geq 1$

Base: proviamo che P(1) è vera

$3 \bullet 1 = 3 \in A$

Ipotesi induttiva: assumiamo che P(k) è vera

Passo di induzione: proviamo che P(k+1) è vera

$3 \bullet (k+1) = 3 \bullet k+ 3 \in A$

ipotesi induttiva — definizione ricorsiva

Dim. Ora proviamo che $A \subseteq M$

Procediamo usando l'induzione strutturale
P(x): x = 3k per qualche intero $k \geq 1$ $\quad \forall x \in A$

Usiamo la definizione ricorsiva di A

Base: Dalla base della definizione ricorsiva sappiamo che $3 \in A$,
poichè $3 = 3 \bullet 1$ => P(3) è vera

Passo di ricorsione: usiamo la seconda parte della definizione ricorsiva di A, e consideriamo un $x+y \in A$
- assumiamo che P(x) e P(y) è vera
- proviamo che P(x+y) è vera

x=3k e y= 3h per qualche intero $k \geq 1$ e $h \geq 1$

$x+y = 3k + 3h = 3 (h+k) \in M$

Esempio 2: Siano u e w due stringhe appartenenti a Σ^*.
Provare che $\ell(u\ w) = \ell(u) + \ell(w)$

Dim.

Costruiamo la dimostrazione sulla
"definizione ricorsiva della stringa $w \in \Sigma^*$" (ricordiamola)

Passo base: $\lambda \in \Sigma^*$
Passo ricorsivo: Se $w \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$ allora $wx \in \Sigma^*$

Ricordiamo la "definizione ricorsiva di lunghezza della stringa $w \in \Sigma^*$"

Passo base: $\lambda \in \Sigma^*$
Passo ricorsivo: Se $w \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$ allora $wx \in \Sigma^*$

Dobbiamo provare che $\forall w \in \Sigma^*$ P(w)

dove P(w): $\ell(u\ w) = \ell(u) + \ell(w)$ per ogni $u \in \Sigma^*$
P(w): $\ell(u\ w) = \ell(u) + \ell(w)$ per ogni $u \in \Sigma^*$

Base: dobbiamo mostrare che $P(\lambda)$ è vera

$\ell(u\ \lambda) = \ell(u) = \ell(u) + 0 = \ell(u) + \ell(\lambda)$

Passo di ricorsione: - assumiamo che P(w) sia vera

- proviamo che P(wx) è vera per ogni $x \in \Sigma$

$\ell(u\ wx) = \ell(u\ w) + 1 = \ell(u) + \ell(w) +1 = \ell(u) + \ell(wx)$

def. ricorsiva di ℓ — ipotesi induttiva — def. ricorsiva di ℓ

Ricordiamo alcune definizioni ricorsive date per gli alberi. Per semplicità limitiamoci a considerare ***alberi binari pieni***.

Il numero di nodi con due figli $d(\mathrm{T})$ di un albero binario pieno T è definita

Passo base $d(\mathrm{T}) = 0$ se T consiste della sola radice r

Passo ricorsivo $d(\mathrm{T}) = 1 + d(\mathrm{T}_1) + d(\mathrm{T}_2)$ se T_1 e T_2 sono i sottoalberi destro e sinistro di T

Il numero di foglie $f(\mathrm{T})$ di una albero binario pieno T è definito

Passo base $f(\mathrm{T}) = 1$ se T consiste della sola radice r

Passo ricorsivo $f(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T}_1) + f(\mathrm{T}_2)$ se T_1 e T_2 sono i sottoalberi destro e sinistro di T

L'altezza $h(\mathrm{T})$ di una albero binario pieno T è definita

Passo base $h(\mathrm{T}) = 0$ se T consiste della sola radice r

Passo ricorsivo $h(\mathrm{T}) = 1 + \max\{h(\mathrm{T}_1), h(\mathrm{T}_2)\}$ se T_1 e T_2 sono i sottoalberi destro e sinistro di T

Il numero di vertici $n(\mathrm{T})$ di una albero binario pieno T è definito

Passo base $n(\mathrm{T}) = 1$ se T consiste della sola radice r

Passo ricorsivo $n(\mathrm{T}) = 1 + n(\mathrm{T}_1) + n(\mathrm{T}_2)$ se T_1 e T_2 sono i sottoalberi destro e sinistro di T

<u>Esempio 3</u>: Se T è un albero binario pieno, sia

$d(\mathrm{T})$ = il numero di vertici di T con due figli

$f(\mathrm{T})$ = il numero di foglie di T

allora $f(\mathrm{T}) \le d(\mathrm{T}) + 1$

<u>Dim.</u> Usiamo l'induzione strutturale ("definizione ricorsiva di T").

P(T): $f(\mathrm{T}) \le d(\mathrm{T}) + 1$ per ogni albero binario pieno T

Base: dobbiamo mostrare che se T è l'albero costituito dalla sola radice allora P(T) è vera

Sia T è l'albero costituito dalla sola radice: dalla definizione di d e di di f si ha

$d(\mathrm{T}) = 0$ e $f(\mathrm{T}) = 1$

Quindi $f(\mathrm{T}) = 1 = 0+1 = d(\mathrm{T}) + 1$

Passo di ricorsione:

Sia T un albero binario pieno costituito da più di un vertice

Siano T_1 e T_2 i sottoalberi destro e sinistro di T

- assumiamo che P(T_1) e che P(T_2) siano vere:

$f(\mathrm{T}_1) \le d(\mathrm{T}_1) + 1$

$f(\mathrm{T}_2) \le d(\mathrm{T}_2) + 1$

- proviamo che P(T) è vera: $f(\mathrm{T}) \le d(\mathrm{T}) + 1$

Ricordando che

$f(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T}_1) + f(\mathrm{T}_2)$

$d(\mathrm{T}) = 1 + d(\mathrm{T}_1) + d(\mathrm{T}_2)$

Quindi $f(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T}_1) + f(\mathrm{T}_2)$ — def. ricorsiva di f

$\le (d(\mathrm{T}_1) + 1) + (1 + d(\mathrm{T}_2))$ — ipotesi induttiva su T_1 e T_2

$= (1 + d(\mathrm{T}_1) + d(\mathrm{T}_2)) + 1 = d(\mathrm{T}) + 1$ — def. ricorsiva di d

<u>Esempio 3</u>: Se T è un albero binario pieno, allora

$n(\mathrm{T}) \le 2^{h(\mathrm{T})+1} - 1$

<u>Dim.</u> Usiamo l'induzione strutturale (definizione ricorsiva di T).

P(T): $n(\mathrm{T}) \le 2^{h(\mathrm{T})+1} - 1$ per ogni albero binario pieno T

Base: dobbiamo mostrare che se T è l'albero costituito dalla sola radice allora P(T) è vera

Sia T è l'albero costituito dalla sola radice

Dalla definizione di h si ha $h(\mathrm{T}) = 0$

Dalla definizione di n si ha $n(\mathrm{T}) = 1$

Quindi $n(\mathrm{T}) = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^{h(\mathrm{T})+1} - 1$

Passo di ricorsione:

Sia T un albero binario pieno costituito da più di un vertice

Siano T_1 e T_2 i sottoalberi destro e sinistro di T

- assumiamo che P(T_1) e che P(T_2) siano vere:

$n(\mathrm{T}_1) \le 2^{h(\mathrm{T}1)+1} - 1$

$n(\mathrm{T}_2) \le 2^{h(\mathrm{T}2)+1} - 1$

- proviamo che P(T) è vera: $n(\mathrm{T}) \le 2^{h(\mathrm{T})+1} - 1$

$n(\mathrm{T}) = 1 + n(\mathrm{T}_1) + n(\mathrm{T}_2)$ — def. ricorsiva di n

$\le 1 + (2^{h(\mathrm{T}1)+1} - 1) + (2^{h(\mathrm{T}2)+1} - 1)$ — ipotesi induttiva

$= 2^{h(\mathrm{T}1)+1} + 2^{h(\mathrm{T}2)+1} - 1$

$\le 2 \max\{2^{h(\mathrm{T}1)+1}, 2^{h(\mathrm{T}2)+1}\} - 1$

$\le 2\, 2^{\max\{h(\mathrm{T}1),\, h(\mathrm{T}2)\}+1} - 1$

$\le 2\, 2^{h(\mathrm{T})} - 1 = 2^{h(\mathrm{T})+1} - 1$ — def. ricorsiva di h