4. INDUZIONE

È una tecnica che può essere applicata per provare asserzioni generali per insiemi di interi positivi, per sequenze associate ad interi.

Usata per provare asserzioni con ***dominio Z^+*** della forma: ***$\forall n\ P(n)$***

Consiste di due passi:

1. ***Base***: La proposizione P(1) è vera;
2. ***Passo di induzione***: fissato un intero positivo n, l'implicazione $P(n) \rightarrow P(n+1)$ è vera. (L'assunzione P(n) è chiamata ***ipotesi induttiva***)

Si conclude perciò che $\forall n\ P(n)$.

Nota:

- Dalla Base so che P(1) è vera;
- Dal Passo di induzione so che $P(1) \rightarrow P(2)$ è vera (perché P(1) è vera)
- Dal Passo di induzione so che $P(2) \rightarrow P(3)$ è vera (perché P(2) è vera)
- ...

Quindi P(n) è vera $\forall n \in Z^+$

Esempio:

Provare che la somma dei primi n interi positivi dispari è n^2, cioè $1+3+5+7+....+(2n-1) = n^2$

In questo caso P(n): $1+3+5+7+....+(2n-1) = n^2$

Base:

Mostrare che P(1) è vera: Banale: $1=1^2$

Passo Induttivo:

Mostrare che ***se*** P(n) è vera ***allora*** P(n+1) è vera, per un qualunque fissato n

Supponiamo che P(n) è vera: $1+3+5+7+....+(2n-1) = n^2$

Mostriamo che P(n+1) è vera: $\underbrace{1+3+5+7+....+(2n-1)}_{n^2}+(2n+1) = (n+1)^2$

$n^2 +(2n+1) = (n+1)^2$

4.1 CORRETTEZZA DELL'INDUZIONE MATEMATICA

Supponiamo che P(1) è vera, allora $P(n) \rightarrow P(n+1)$ è vera per tutti gli interi positivi, quindi vogliamo provare che $\forall n\ P(n)$ è vera.

Per ***contraddizione***, assumiamo che c'è almeno un intero positivo ***m*** tale che ***P(m) è falsa***.

S = insieme di tutti gli interi positivi n per i quali P(n) è falsa.

Così $S \neq \emptyset$

Proprietà del buon-ordinamento: ogni insieme non vuoto di interi positivi ha almeno un elemento.

S ha almeno un elemento, diciamo k, con $k > 1$. (Nota che $k \neq 1$ poichè P(1) è vera)

Sia k il più piccolo intero in S tale che P(k) è falsa

Questo implica che $k - 1 > 0$ e $P(k - 1)$ è vera

Ma $P(k - 1) \rightarrow P(k)$ è vera, per ipotesi

Siamo arrivati ad una contraddizione $\rightarrow \forall n\ P(n)$ è vera

Esempio1:

Proviamo che $n < 2^n$ per tutti gli interi positivi n

Dim. P(n): $n < 2^n$ per ogni intero $n \geq 1$

- Base: P(1): $1 < 2^1$ (ovvio)
- Passo di induzione: Mostrare che

  se P(n) è vera allora P(n+1) è vera per tutti gli n

  - Supponiamo P(n): $n < 2^n$ è vera
  - Mostriamo che P(n+1): $n+1 < 2^{n+1}$ è vera
  - $n + 1 < 2^n + 1$ (per ipotesi induttiva)

    $< 2^n + 2^n$

    $= 2\ 2^n = 2^{n+1}$

Esempio2:

Proviamo che $n^3 - n$ è divisibile per 3, per ogni intero positivo n

Dim. P(n): $n^3 - n$ è divisibile per 3 per ogni intero $n \geq 1$

- Base: P(1): $1^3 - 1 = 0$ è divisibile per 3 (ovvio)
- Passo di induzione: Mostrare che

  se P(n) è vera allora P(n+1) è vera per tutti gli n

  - Supponiamo P(n): $n^3 - n$ è divisibile per 3 (ipotesi induttiva)
  - Mostriamo che P(n+1): $(n+1)^3 - (n+1)$ è divisibile per 3
  - $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$
  - $(n^3 - n) + 3n^2 + 3n = \underbrace{(n^3 - n)}_{\text{divisibile per 3 (ipotesi induttiva)}} + \underbrace{3(n^2 + n)}_{\text{divisibile per 3}}$ □

4.2 INDUZIONE MATEMATICA (GENERALIZZAZIONE)

Si può usare l'induzione matematica anche quando si vuole provare che ***P(n)*** è vera n = ***b, b+1, b+2, …*** dove ***b è un intero***.

I due passi dell'induzione diventano:

- ***Base***: La proposizione P(b) è vera.
- ***Passo di induzione***: fissato un intero $n \geq b$, l'implicazione $P(n) \rightarrow P(n+1)$ è vera.

Nota che ***b*** può essere negativo, zero o positivo.

Esempio1:

Proviamo che $n^2 < 2^n$ per tutti gli interi $n \geq 5$

Dim. P(n): $n^2 < 2^n$ per ogni intero $n \geq 5$

- Base: P(5) è vera , infatti $25 = 5^2 < 2^5 = 32$ (ovvio)
- Passo di induzione: Mostrare che

  se P(n) è vera allora P(n+1) è vera per $n \geq 5$

  - Supponiamo P(n): $n^2 < 2^n$ è vera ipotesi induttiva
  - Mostriamo che P(n+1): $(n+1)^2 < 2^{n+1}$ è vera
  - $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 2n + n$ (perché $n \geq 5 > 1$)

    $= n^2 + 3n < n^2 + n\,n = n^2 + n^2$ (perché $n \geq 5 > 3$)

    $= 2\,n^2 < 2\;2^n = 2^{n+1}$ (per ipotesi induttiva)

Esempio2:

Provare per induzione che per gli interi non negativi

$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Dim. P(n): $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ per ogni intero $n \geq 0$

- Base: P(0): $2^0 = 1 = 2^1 - 1$
- Passo di induzione: Supponiamo che P(n) è vera (ipotesi induttiva)
  - Mostriamo che P(n+1) è vera:

  $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} =$

  $= (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1}$

  $= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$ (per ipotesi induttiva)

  $= 2\;2^{n+1} - 1$

  $= 2^{n+2} - 1$

Esempio3:

Provare per induzione che un insieme con n elementi ha 2^n sottoinsiemi

Dim. P(n): "un insieme con n elementi ha 2^n sottinsiemi"

- Base: Proviamo P(0)
  - Se un insieme ha 0 elementi allora esso è l'insieme vuoto
  - L'insieme vuoto ha $1 = 2^0$ sottinsiemi (solo se stesso)
- Passo di induzione: Supponiamo che P(n) è vera (ipotesi induttiva).
  - Mostriamo che P(n+1) è vera:
  - Sia T un insieme con n+1 elementi
  - Sia a un qualunque elemento di T => $T = S \cup \{a\}$ dove $|S|=n$
  - I sottinsiemi di T possono essere ottenuti in questo modo:
    * Per ogni sottinsieme X di S, ci sono 2 sottinsiemi di T, cioè X e $X \cup \{a\}$
    * Tali insiemi sono tutti distinti
    * Quindi ci sono 2 sottinsiemi di T per ogni sottinsieme di S
    * Il numero di sottinsiemi di T = 2 (il numero di sottinsiemi di S)

      $= 2\;2^n$

      $= 2^{n+1}$

INDUZIONE FORTE		INDUZIONE REGOLARE	
1. Passo base:	P(1)	1. Passo base:	P(1)
2. Passo di induzione:	$[P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(n)] \rightarrow P(n+1)$	2. Passo di induzione:	$P(n) \rightarrow P(n+1)$

Esempio1:

Mostriamo che un intero positivo più grande di 1 è un primo o può essere scritto come il prodotto di primi.

P(n): un intero positivo n > 1 o è primo o può essere scritto come il prodotto di primi.

Dim.

- Base: P(2) è vera, infatti 2 = 2 (ovvio)
- Passo di induzione: Assumiamo vere P(2), ……, P(n) (ipotesi induttiva)

  Dimostriamo che P(n+1) è anch'essa vera

  Distinguiamo 2 casi:

  1. Se n+1 è esso stesso un numero primo allora P(n+1) è banalmente vera
  2. Se n+1 è un numero composto allora n+1 = a * b

  Dall'ipotesi induttiva P(a) e P(b) sono vere

  Così n+1 può essere scritto come il prodotto di primi

Esempio2:

P(n): con n cerini per ciascuna delle due scatole, il giocatore che gioca per secondo può vincere.

Dim.

- Base: n=1
  - il primo giocatore ha una sola scelta: togliere l'unico cerino da una delle due scatole
  - il secondo giocatore vince togliendo l'unico ed ultimo cerino dalla seconda scatola
- Passo di induzione: Assumiamo che P(j) è vera $\forall$ j con $1 \leq j \leq n$

  Dimostriamo che P(n+1) è anch'essa vera

  Supponiamo, allora, che ci sono n+1 cerini in ciascuna delle due scatole all'inizio del gioco

  Sia x il numero di cerini che il primo giocatore elimina da una delle due scatole => in tale scatola rimangono n+1−x cerini

  Se il secondo giocatore elimina esattamente x cerini dall'altra scatola => nell'altra scatola rimangono n+1−x cerini

  → Ci ritroviamo con due scatole ciascuna avente n+1−x cerini
  Per ipotesi induttiva P(n+1−x) è vera, cioè il giocatore che gioca per secondo può vincere → P(n+1) è vera

4.4 SCHEMA PER LE DIMOSTRAZIONI PER INDUZIONE

Formula un predicato che descrive il problema in funzione di un intero ***n***:	individua ***P(n)***
Esprimi ciò che deve essere provato come $\forall n \geq b$, P(n):	individuare sempre il ***b*** più adatto al problema

Suddividi la dimostrazione in:

BASE	IPOTESI	PASSO DI INDUZIONE
Mostrare che P(b) è vera	Esprimi in modo chiaro: "Assumiamo che P(n) è vera per un arbitrario $n \geq b$".	Affermare ciò che si deve provare, scrivendo in maniera esplicita che cosa dice P(n+1). Provare P(n+1) facendo uso dell'ipotesi induttiva P(n).

Nota: Le dimostrazioni per induzione nascono da situazioni che non riflettono esattamente lo schema dato precedentemente, 2 cose sono sicure:

1. P(n+1) deve essere provata vera, usando il fatto che P(m) è vera per un qualunque insieme di interi $m \leq n$;
2. La base deve provare la veridicità di P(.) per il più piccolo (talvolta più di uno) valore consentito ad n.