0. NOTAZIONI

0.1 INSIEMI

Un ***insieme*** è una collezione non ordinata di oggetti o elementi. Gli insiemi sono scritti tra { }, ed i suoi elementi inseriti tra esse.

Per ogni insieme S, $w \in S$ indica che w è un ***elemento*** di S.

Nota: Notazione di insiemi per specificare un' insieme: $A = \{x|x \in R, f(x) = 0\}$, R è l'insieme dei numeri reali, f è una qualche funzione.

Ordine e ***ridondanza*** non contano:

- {a, b, c} ha elementi a, b, c;
- {a, b, c} e {b, a, b, c, c} sono lo stesso insieme;
- {a} ed a sono cose diverse;
- {a} insieme che contiene solo elemento a.

Esempio:

- L'insieme dei numeri naturali è N = {0, 1, 2, 3, 4, ...}.
- L' insieme dei numeri pari è {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...} = {2n | n = 0, 1, 2, 3, ...} = {2n | $n \in N$}.
- L' insieme dei pari positivi è {2, 4, 6, 8, 10, 12, ...} = {2n | n = 1, 2, 3, ...} = {2n | $n \in N+$ }.
- L' insieme dei numeri dispari è {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...} = {2n+1 | n = 0, 1, 2, ...} = {2n+1 | $n \in N$}.
- Se A = {2n | $n \in N$}, allora $4 \in A$, ma $5 \notin A$.

La ***cardinalità*** |S| di S è il numero di elementi in S.

Esempio:

- Se S = {ab, bb} allora |S| = 2
- Se T = {an | n > 1}, allora $|T| = \infty$
- Se $T = \emptyset$, allora |T| = 0

Un insieme S è ***finito*** se $|S| < \infty$. Se S non è finito, allora è detto ***infinito***.

Esempio:

- Se S = {ab, bb} allora |S| = 2 e S è finito.
- Se T = {an | n > 1}, allora $|T| = \infty$ e T è infinito.

0.2 ALFABETO E STRINGHE

Un ***alfabeto*** è un insieme finito di elementi fondamentali (chiamati ***lettere*** o ***simboli***).

Esempio:

- L' alfabeto delle lettere romane minuscole è Σ = {a, b, c, ..., z}.
- L' alfabeto delle cifre arabe è Σ = {0, 1, . . . , 9}.
- L' alfabeto binario è Σ = {0, 1}

Una ***stringa*** su un *alfabeto* è una sequenza finita di simboli dell'alfabeto.

Esempio:

- cat, food, c, babbz sono stringhe sull' alfabeto A = {a, b, c, ..., z}.
- 0131 è una stringa sull' alfabeto B = {0, 1, 2, ..., 9}.
- 0101 è una stringa sull' alfabeto B = {0, 1, }.

Data una stringa s, la ***lunghezza*** di s è il numero di simboli in s. La lunghezza di s è denotata con ***lunghezza(s)*** o ***|s|.***

Esempio:

lunghezza(mom) = |mom| = 3.

Nota. La ***stringa vuota ε*** è la stringa contenente nessun simbolo, **|ε|** = 0.

Dato alfabeto Σ, la ***chiusura di Kleene*** di Σ è Σ^*: l' insieme di tutte le possibili stringhe su Σ.

Esempio:

Σ = {a, b}, allora Σ^* = { ε, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, ...}

Date due stringhe ***u*** e ***v***, la ***concatenazione*** di ***u*** e ***v*** è la stringa ***uv.***

Esempio:

- u = abb e v = ab, allora uv = abbab e vu = ababb
- u = ε e v = ab, allora uv = ab
- u = bb e v = ε, allora uv = bb
- u = ε e v = ε , allora uv = ε; cioè εε = ε

Per una stringa ***w***, definiamo w^n per $n \geq 0$ induttivamente:
$w^0 = \varepsilon$
$w^{n+1} = w^n w$, per ogni $n \geq 1$

Esempio:

- Se w = cat, allora $w^0 = ε$,
  w^1 = cat,
  w^2 = catcat,
  w^3 = catcatcat,
  ...
- Dato simbolo a, allora $a^0 = ε$ e a^3 = aaa.

Data stringa s, una ***sottostringa*** di s è una qualsiasi parte di simboli consecutivi della stringa s cioè, w è una sottostringa di s se esistono stringhe x e y (eventualmente vuote) tali che: ***s = xwy***.

Esempio:

- 567 è sottostringa di 56789
- 567 è sottostringa di 45678
- 567 è sottostringa di 34567
- Stringa 472 ha sottostringhe ε , 4, 7, 2, 47, 72, 472, ma 42 non è sottostringa di 472.

0.3 LINGUAGGI

Un ***Linguaggio formale*** (Linguaggio) è un insieme di stringhe su un alfabeto.

Esempio:

Linguaggi per computer, quali C, C ++ o Java, sono linguaggi formali con alfabeto:
{a, b, ..., z, A, B, ..., Z , 0, 1, 2, ..., 9, >, <, =, +, −, ∗, /, (,), · · · }

Le ***regole della sintassi*** definiscono le regole del linguaggio. L'insieme di nomi validi di variabili è un linguaggio formale.

Nota: I linguaggi non sono insiemi finiti.

Esempio:

- Alfabeto A = {x}.
  Linguaggio L = { ε, x, xx, xxx, xxxx, ...} = $\{x^n \mid n = 0, 1, 2, 3...\}$.
  Nota: x 0 = ε, quindi stringa vuota in L.
- Alfabeto A = {x}.
  Linguaggio L = {x, xxx, xxxxx, ...} = $\{x^{2n+1} \mid n = 0, 1, 2, 3...\}$.
- Alfabeto A = {0, 1, 2, ..., 9}. Linguaggio L = {qualsiasi stringa che non inizia con 0} = { ε, 1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, ...}
- Sia A = {a, b}, definiamo Linguaggio L formato da tutte le stringhe che iniziano con a seguita da 0 o più b.

Cioè L = {a, ab, abb, abbb, ...} = $\{ab^n \mid n \geq 0\}$

Nota. ***L'insieme vuoto*** ∅ è l' insieme che non contiene alcun elemento.

∅ = {ε}, poichè ∅ non ha elementi. In generale, ε ∉ ∅.

0.4 INSIEMI: RELAZIONI ED OPERAZIONI

Siano S e T insiemi. Diciamo che ***S ⊆ T*** (S ***sottoinsieme*** di T) se w ∈ S implica w ∈ T. Cioè ogni elemento di S è anche un elemento T.

Esempio:

- S = {ab, ba} e T = {ab, ba, aaa} allora S ⊆ T ma T ⊈ S.
- S = {ba, ab} e T = {aa, ba} allora S ⊈ T e T ⊈ S.

Insiemi S e T sono ***uguali*** (S = T) ***se S ⊆ T e T ⊆ S***.

Esempio:

- Siano S = {ab, ba} e T = {ba, ab}, allora S ⊆ T e T ⊆ S; quindi S = T .
- Siano S = {ab, ba} e T = {ba, ab, aaa},allora S ⊆ T ma T ⊈ S; quindi S ≠ T .

Dati due insiemi S e T , la loro ***unione*** S ∪ T = {w | w ∈ S oppure w ∈ T }.
S ∪ T contiene tutti gli elementi contenuti in S oppure in T (o in entrambi).

Esempio:

- S = {ab, bb} e T = {aa, bb, a} allora S ∪ T = {ab, bb, aa, a}
- S = {a, ba} e T = ∅, allora S ∪ T = S.
- S = {a, ba} e T = { ε } allora S ∪ T = { ε, a, ba}

Dati due insiemi S e T , la loro ***intersezione S ∩ T = {w | w ∈ S e w ∈ T }.*** S ∩ T contiene tutti gli elementi comuni ad S e T.

Insiemi S e T si dicono ***disgiunti*** se S ∩ T = ∅

Esempio:

- Sia S = {ab, bb} e T = {aa, bb, a} allora S ∩ T = {bb}.
- Sia S = {ab, bb} e T = {aa, ba, a} allora S ∩ T = ∅, quindi S e T sono disgiunti.

Lemma. Se S e T sono disgiunti (cioè $S \cap T = \emptyset$), allora $|S \cup T| = |S| + |T|$.
Lemma. Se S e T sono tali che $S \cap T < \infty$, allora $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$.

Dati due insiemi S e T, $S - T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \notin T\}$.

Esempio:
- Sia S = {a, b, bb, bbb} e T = {a, bb, bab}, allora S − T = {b, bbb}.
- Sia S = {ab, ba} e T = {ab, ba} allora $S - T = \emptyset$

Dato un insieme universale U, il ***complemento*** di un insieme $S \subseteq U$ è $C(S) = \{w \mid w \in U, w \notin S\}$.
C(S) è l' insieme di tutti gli elementi considerati (elementi di U) che non sono in S (quindi C (S) = U − S).

Esempio:
- U: insieme delle stringhe su alfabeto {a, b}.
  S: insieme delle stringhe su alfabeto {a, b} che iniziano con b.
  C (S): insieme delle stringhe su alfabeto {a, b} che non iniziano con b.

N.B.: NON insieme stringhe che iniziano con a (es. stringa vuota ε)

Dati 2 insiemi S e T di stringhe, la ***concatenazione*** (o ***prodotto***) di S e T è $ST = \{uv \mid u \in S, v \in T\}$
ST è l' insieme di stringhe che possono essere divise in 2 parti: la prima parte coincide con una stringa in S la seconda parte coincide con una stringa in T .

Esempio:
- Se S = {a, aa} e T = {ϱ , a, ba}, allora ST = {a, aa, aba, aaa, aaba}, TS = {a, aa, aaa, baa, baaa}
- $aba \in ST$, ma $aba \notin TS$. Quindi $ST \neq TS$

0.5 SEQUENZE E TUPLE

Una ***sequenza*** di oggetti è una lista di questi oggetti in qualche ordine.

Ordine e ridondanza sono importanti in una sequenza (non in un insieme).

Sequenze finite sono dette tuple. Una k-tupla ha k elementi nella sequenza.

Esempio:
- (4, 2, 7) é una 3-tupla o tripla
- (9, 23) é una 2-tupla o coppia

0.6 PRODOTTO CATESIANO

Dati due insiemi A e B, il ***prodotto Cartesiano*** $A \times B$ é insieme di coppie: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Esempio:
Siano A = {a, ba, bb} e B = { ε, ba}, allora:
A × B = {(a, ε), (a, ba), (ba, ε), (ba, ba), (bb, ε), (bb, ba)}
B × A = {(ε, a), (ε, ba), (ε, bb), (ba, a), (ba, ba), (ba, bb)}.

Nota. $(ba, a) \in B \times A$, ma $(ba, a) \notin A \times B$, quindi B × A 6 = A × B.
Nota. Il prodotto Cartesiano è diverso dalla Concatenazione AB = {a, aba, ba, baba, bb, bbba} = A × B.
Nota. $|A \times B| = |A||B|$, possiamo anche definire prodotto cartesiano di più di 2 insiemi. $A1 \times \ldots \times Ak$ è l insieme di k–tuple:
$A1 \times \ldots \times Ak = \{(x1, \ldots, xk) \mid x1 \in Ai, 1 \leq i \leq k\}$

Esempio:
- Siano A_1 = {ab, ba, bbb}, A_2 = {a, bb}, A_3 = {ab, b}, allora:
  $A_1 \times A_2 \times A_3$ = { (ab, a, ab), (ab, a, b), (ab, bb, ab), (ab, bb, b),
  (ba, a, ab), (ba, a, b), (ba, bb, ab), (ba, bb, b),
  (bbb, a, ab), (bbb, a, b), (bbb, bb, ab), (bbb, bb, b)}

0.7 INSIEME POTENZA

Per ogni insieme S, l' ***insieme potenza*** P(S) è $P(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$, cioè l' insieme di tutti possibili sottoinsiemi di S (inclusi ∅ e S stesso).

Esempio:
Se S = {a, bb}, allora P(S) = {∅, {a}, {bb}, {a, bb}}

Lemma. Se $|S| < \infty$, allora $|P(S)| = 2^{|S|}$. Cioè , ci sono $2^{|S|}$ differenti sottoinsiemi di S.

0.8 CHIUSURA O KLEENE STAR

Dato insieme S di stringhe, sia

$S^0 = \{\varepsilon\}$,

$S^k = \{w_1, w_2 \dots w_k \mid w_i \in S, i = 1, 2, \dots, k\} = SS\dots S, k > 1$.
concatenazione di S con se stesso per k volte.

Nota. S^k è insieme di stringhe ottenute concatenando k stringhe di S, con possibili ripetizioni. In particolare, $S^1 = S$.

Esempio:

Se $S = \{a, bb\}$, allora

$S_0 = \{\varepsilon\}$,

$S_1 = \{a, bb\}$,

$S_2 = \{aa, abb, bba, bbbb\}$,

$S_3 = \{aaa, aabb, abba, abbbb, bbaa, bbabb, bbbba, bbbbbb\}$.

La ***Chiusura*** (o ***Kleene star***) di un insieme di stringhe S è $S^* = S0 \cup S1 \cup S2 \cup S3 \cup \dots$

Nota. S^* è l' insieme di tutte le stringhe ottenute concatenando zero o più stringhe di S, potendo usare la stessa stringa più volte.

$S^* = \{w_1, w_2 \dots w_k \mid k \geq 0, w_i \in S, i = 1, 2, \dots, k\}$, dove per k = 0, la stringa $w_1, w_2 \dots w_k = \varepsilon$ è la stringa vuota.

Esempio:

- Se $S = \{ba, a\}$, allora $S^* = \{\varepsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, \dots\}$
- Se $A = \{a, b\}$, allora $A^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, \dots\}$, tutte le possibili stringhe su alfabeto A.
- Se $S = \emptyset$, allora $S^* = \{\varepsilon\}$.
- Se $S = \{\varepsilon\}$, allora $S^* = \{\varepsilon\}$.

0.9 ALTRE PROPRIETÀ UTILI

$S^{**} = (S^*)^*$ è l' insieme di stringhe formate concatenando stringhe di S^*.

Nota. $S^* = S^*$ per ogni insieme S di stringhe.

S^+ è l' insieme di stringhe formate concatenando una o più stringhe di S.

Esempio:

Se $S = \{x\}$, allora $S^+ = \{x, xx, xxx, xxxx, \dots\}$

Per ogni stringa w, ***l'inverso di w***, scritto ***reverse(w) o w^R*** , è la stessa stringa di simboli scritta in ordine inverso .
Se $w = w_1, w_2, \dots w_n$, dove ogni w_i è un simbolo, allora $w^R = w_n w_{n-1} \dots w_1$.

Esempio:

- $(cat)^R = tac$
- $\varepsilon^R = \varepsilon$.