1. AUTOMI

Linguaggio delle soluzioni:

Un ***cammino*** è rappresentato da qualche $x \in \{l,p,c,n\}^*$.

{x∈ {l,p,c,n}* | iniziando in stato start e seguendo transizioni di x, terminano nello stato finale}
Nota. Il linguaggio delle soluzioni è infinito.

Da un ***Problema*** possiamo ricavarne un ***Linguaggio***:

- ***Problema***: trovare sequenza di mosse che permette di trasportare capra, cavolo e lupo;
- ***Linguaggio***: insieme delle stringhe sull'alfabeto {l,p,c,n}. Le stringhe corrispondono a sequenze di mosse. Tra esse cerchiamo una stringa che corrisponde ad una soluzione del problema.

Un ***Automa Completamente Specificato***, fornisce una procedura computazionale per decidere se una stringa è una soluzione o meno:

- Si parte dallo ***stato start***;
- Si segue una ***transizione*** per ogni simbolo di input;
- Se alla fine si arriva in uno ***stato obiettivo*** (accettante) accetta, altrimenti rifiuta l'input.

1.1 AUTOMI FINITI

Modello semplice di calcolatore avente una quantità finita di memoria. È noto come ***macchina a stati finiti*** o ***automa finito***.

Idea di base del funzionamento:

- Input= stringa w su un alfabeto Σ;
- Legge i simboli di w da sinistra a destra;
- Dopo aver letto l'ultimo simbolo, l'automa indica se accetta o rifiuta la stringa input w.

1.1.1 AUTOMA FINITO DETERMINISTICO (DFA)

Sia ***A*** un ***automa finito deterministico*** (***DFA***) è 5-tupla, M = (Q, Σ, f, q_1, F), dove:
1. Q è ***insieme finito*** di stati.
2. Σ è ***alfabeto***, e il DFA processa stringhe su Σ.
3. f: Q × Σ -> Q è la ***funzione di transizione***.
4. $q_1 \in Q$ è lo ***stato start (o iniziale)***.
5. F (sottoinsieme di Q) è l'insieme di ***stati accettanti*** (o ***finali***).

Nota. DFA è chiamato anche automa finito (FA).

Funzione di transizione f: Q × Σ -> Q :

Definisce le regole per il cambio di stato. Se l'automa finito ha un arco da uno stato q_1 a uno stato q_2, etichettato col simbolo di input b, questo significa che se l'automa è nello stato q_1 e legge una b, allora si muove nello stato q_2.

Possiamo indicare la stessa cosa con la funzione di transizione, dicendo che $f(q_1, b) = q_2$, dove $q_1 \in Q$ ed $b \in \Sigma$.

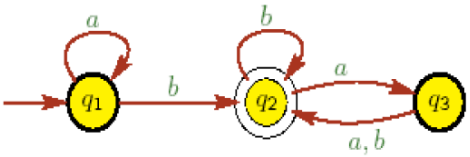
Se esiste almeno un arco uscente da q_1 con label b, allora la macchina è ***deterministica***, ovvero una macchina è deterministica se il suo comportamento è specificatamente definito.

Esempio:

Possiamo descrivere M_1 formalmente ponendo M_1 = (Q, Σ, f, q_1, F), dove:

1. $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$;
2. $\Sigma = \{a, b\}$
3. f è descritto come segue:

	a	b
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2



4. q_1 è lo stato start(ha freccia entrante da esterno);
5. F = $\{q_2\}$ (doppio cerchio)

DFA con alfabeto Σ ={a, b}:

- Stringa arriva in input
- DFA legge 1 simbolo alla volta dal primo all'ultimo
- DFA accetta o rifiuta la stringa

a	b	b	a	a	
q1	q1	q2	q2	q3	q2

Esempi di input: la stringa abaa è accettata se e solo se esiste una sequenza di stati q1, q1, q2, q3, q2.

Definizione formale del funzionamento di un automa:

Sia $M = (Q, \Sigma, f, q_0, F)$, consideriamo la stringa $w = w_1 w_2 \dots w_n$ **su** Σ, dove ogni w_i in Σ.
Allora ***M accetta w*** se esiste una ***sequenza di stati*** $r_0, r_1, \dots, r_n$ in Q con tre condizioni:
1. $r_0 = q_0$ (primo stato della sequenza è quello iniziale)
2. $r_n \in F$ (ultimo stato in sequenza è uno stato accettante)
3. $f(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$, **per ogni** $i = 0,1,2,\dots,n-1$ (sequenza di stati corrisponde a transizioni valide per la stringa w).

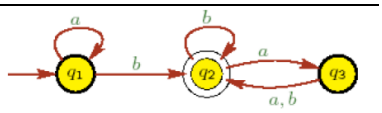
Verificate le tre condizioni, si può affermare che M ***riconosce il linguaggio*** A, se A = {w | M accetta w}.

Linguaggio della Macchina*:*

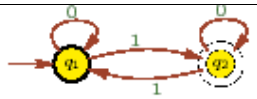
Se L è l'insieme di tutte le stringhe che la macchina M accetta, allora si dice che L è il ***linguaggio della macchina M*** e scriviamo ***L(M)=A***, e diciamo che ***M riconosce L***.

Un linguaggio è chiamato un ***linguaggio regolare*** se un automa finito DFA lo riconosce.

Esempio1:
L(M) è l'insieme di tutte le stringhe sull'alfabeto {a,b} della forma: {a}*{b}{b,aa,ab}*



Esempio2:
Si consideri il seguente DFA M_1 con alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$:
Osservazione: $L(M_1)$ è il Linguaggio di stringhe su Σ in cui il numero totale di 1 è dispari.



Esempio3:
DFA M_2 con alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$:
Nota: $L(M_2)$ è Linguaggio su A che ha lunghezza 1, cioè $L(M_2) = \{w \text{ in } A^* \mid |w| = 1\}$
Si ricordi che $C(L(M_2))$, il complemento di $L(M_2)$, è l'insieme di stringhe su A che non sono in $L(M_2)$.

Esempio3.1:
Si consideri il seguente DFA M_3 con alfabeto A= {0, 1}
$L(M_3)$ è il Linguaggio su Σ che ***non*** ha lunghezza 1, più di uno stato accetta, stato start anche stato accetta.
DFA accetta ε se e solo se lo stato start è anche lo stato accetta.

Funzione di transizione estesa*:*

La ***funzione di transizione f*** può essere ***estesa*** ad f* che opera su stati e *stringhe* (invece che su stati e simboli). In generale, è possibile definirla induttivamente:
$f^*(q, \varepsilon) = q$
$f^*(q, xa) = f(f^*(q, x), a)$
Il linguaggio accettato da M è quindi: **$L(M) = \{w: f^*(q_0, w) \in F\}$**

Informalmente, la funzione di transizione estesa dà come risultato lo stato dell'automa dopo aver letto tutti i simboli di una stringa, partendo da un dato stato dell'automa.

Esempio:

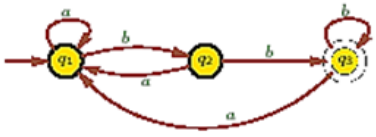
Si consideri il DFA M1 precedentemente definito. La funzione di transizione estesa f* è:
- $f^*(q_1, \varepsilon) = q_1$;
- $f^*(q_1, 001) = f(f^*(q_1, 00), 1) = f(q_1, 1) = q_2$; // si è proceduto a ritroso
- $f^*(q_1, 00) = f(f^*(q_1, 0), 0) = f(q_1, 0) = q_1$; // si è proceduto a ritroso
- $f^*(q_1, 0) = f(f^*(q_1, \varepsilon), 0) = f(q_1, 0) = q_1$.

1.1.2 COMPLEMENTO DFA

In generale, dato un DFA M per Linguaggio L, possiamo costruire un DFA M' per C(L) da M:
- rendendo tutti gli stati accetta in M non-accetta in M';
- rendendo tutti stati non-accetta in M stati accetta in M'.

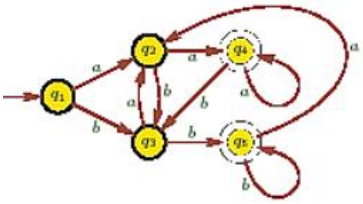
Se si ha il linguaggio L su alfabeto Σ, ha un DFA $M= (Q, \Sigma, f, q_1, F)$, allora il DFA per il ***complemento*** di C(L) è: ***$M'=(Q, \Sigma, f, q_1, Q-F)$.***

Esempio1:
Si consideri il DFA M_4 con alfabeto $\Sigma=\{a, b\}$:



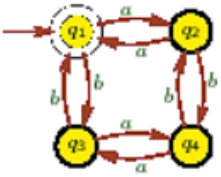
$L(M_4)$: Linguaggio di stringhe su Σ che terminano con *bb*, sarà:
$L(M_4) = \{w \text{ in } \Sigma^* \mid w = \boldsymbol{s}bb \text{ per qualche stringa } \boldsymbol{s}\}$

Esempio2:
Si consideri il DFA M_5 con alfabeto $\Sigma =\{a, b\}$:



$L(M_5) = \{w \mid w=saa \text{ o } w=sbb \text{ per una stringa } s\}$

Esempio3:
Si consideri il DFA M_8 con alfabeto $\Sigma=\{a, b\}$:



Ogni a muove verso destra o sinistra.
Ogni b muove verso l'alto o il basso

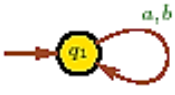
DFA riconosce il Linguaggio di stringhe su Σ con numero pari di a e numero pari di b.

Particolari casi di automi:

Si consideri il seguente DFA M_6 con alfabeto $\Sigma =\{a,b\}$:

Accetta tutte le possibili stringhe su Σ, cioè $L(M_6) = \Sigma^*$
In generale, ogni DFA in cui tutti gli stati sono stati accetta allora riconosce il linguaggio Σ^*.

Si consideri il seguente DFA M_6 con alfabeto $\Sigma =\{a,b\}$:



DFA non accetta stringhe su Σ, cioè $L(M_7) = \emptyset$
In generale, un DFA può non avere stati accetta.

1.2 OPERAZIONI REGOLARI (SU LINGUAGGI)

Siano A e B linguaggi:
- ***Unione***: $A \cup B = \{w \mid w \in A \text{ o } w \in B\}$
- ***Concatenazione***: $AB = \{vw \mid v \in A, w \in B\}$
- ***Kleene star***: $A^* = \{w_1 w_2 \cdots w_k \mid k \geq 0 \text{ e ogni } w_i \in A\}$

Nota: Una collezione S di oggetti è ***chiusa*** per un'operazione f se applicando f a membri di S, f restituisce oggetto in S.

Esempio:

N = {0, 1, 2, . . .} chiuso per addizione (1+2= 3∈N), non per sottrazione (1-2= -1∉N)

TEOREMA:

L' insieme dei linguaggi regolari è ***chiuso*** per l'operazione di ***complemento***.

Abbiamo visto che dati DFA M_1 per Linguaggio L, possiamo costruire DFA M_2 per Linguaggio complemento L':

- Rendi tutti stati accetta in M_1 in non-accetta in M_2.
- Rendi tutti stati non-accetta in M_1 in accetta in M_2.

Quindi L regolare → C(L) regolare.

TEOREMA:

La classe dei ***linguaggi regolari*** è ***chiusa*** per ***l'unione***, cioè, se L_1 e L_2 sono linguaggi regolari, allora lo è anche $L_1 \cup L_2$.

Idea:

- L_1 ha DFA M_1
- L_2 ha DFA M_2

Una stringa *w* è in $L_1 \cup L_2$ sse w è accettata da M_1 oppure M_2. Serve DFA M_3 che accetta w sse w accettata da M_1 o M_2. Costruiamo M_3 tale:

- Accetti un input esattamente quando M_1 o M_2 lo accetterebbero;
- Deve tener traccia di dove l'input si trovi contemporaneamente in M_1 ed in M_2.

Dimostrazione:

Supponiamo che M_1 riconosca L_1, dove $M_1 = (Q_1, \sum, f_1, q_1, F_1)$ ed M_2 riconosca L_2, dove $M_2 = (Q_2, \sum, f_2, q_2, F_2)$.

Costruiamo M_3 che riconosce $L_1 \cup L_2$, dove $M_3 = (Q_3, \sum, f_3, q_3, F_3)$:

1. $Q_3 = Q_1 \times Q_2 = \{(x, y) \mid x \in Q_1, y \in Q_2\}$; (*Prodotto cartesiano di Q_1 e Q_2*)
2. Alfabeto di M_3 è $\sum$, ovvero lo stesso di M_1 ed M_2. (*Se gli alfabeti sono diversi, era: $\sum = \sum_1 \cup \sum_2$*)
3. M_3 ha funzione di transizione $f_3: Q_3 \times \sum \rightarrow Q_3$, tale che per ogni x in Q_1 e y in Q_2, a in $\sum$: $f_3((x, y), a) = (f_1(x, a), f_2(y, a))$;
4. Lo stato start di M_3 è $q_3 = (q_1, q_2)$ in Q_3.
5. L' insieme di stati accetta di M_3 è $F_3 = \{(x, y)$ in $Q_3 \mid x$ in F_1 o y in $F_2\}$

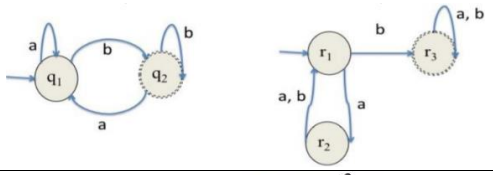
Poiché $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, il numero di stati in M_3 è $|Q_3| = |Q_1| \cdot |Q_2|$.

Quindi, $|Q_3|$ è finito poiché $|Q_1|$ e $|Q_2|$ sono finiti.

Esempio:

Si considerino i seguenti DFA e linguaggi su $\sum = \{a, b\}$:

- DFA M_1 riconosce linguaggio $A_1 = L(M_1)$
- DFA M_2 riconosce linguaggio $A_2 = L(M_2)$



Il seguente è un DFA per l'unione di A_1 e A_2. In particolare, si procede nel seguente modo.

1. Otteniamo gli stati dal prodotto cartesiano di Q_1 e Q_2.

In particolare, lo stato iniziale è la coppia costituita dagli stati iniziali dei due automi;

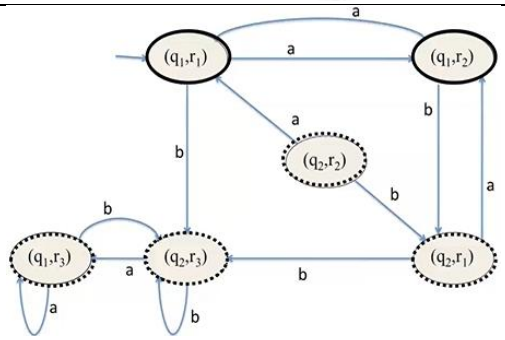
2a. Se ci si trova nello stato (q_1, r_1) e si legge a, allora si nota che il primo automa resta nello stato q_1, mentre il secondo automa passa allo stato r_2, quindi il risultato della funzione di transizione è lo stato (q_1, r_2) ed il nuovo automa passa in quest'ultimo stato;

2b. se ci si trova nello stato (q_1, r_1) e si legge b, allora si nota che il primo automa passa allo stato q_2, mentre il secondo automa passa allo stato r_3, quindi il risultato della funzione di transizione è lo stato (q_2, r_3) ed il nuovo automa passa in quest'ultimo stato;

...

3. Otteniamo gli stati finali come coppie dove è presente o lo stato finale dell'automa A o lo stato finale dell'automa B (o entrambi).

In questo esempio, gli stati finali sono: (q_2, r_1), (q_2, r_2), (q_2, r_3), (q_1, r_3).



Nota: Lo stato (q_2, r_2) non è mai raggiungibile da alcuno stato dell'automa (compreso lo stato iniziale), per cui è possibile ometterlo.

TEOREMA:

La classe dei linguaggi regolari è ***chiusa*** per ***l'intersezione***. Cioè, se L_1 e L_2 sono **linguaggi regolari**, allora lo ***è $L_1 \cap L_2$***.

Idea:

- L_1 ha DFA M_1
- L_2 ha DFA M_2

Una stringa *w* è in $L_1 \cap L_2$ sse w è accettata sia da M_1 che M_2. Serve un DFA M_3 che accetta w sse w è accettata da M_1 e M_2: deve sapere se ambedue gli automi accettano la stringa w in input, e per ottenere ciò è possibile porre ***in parallelo*** M_1 e M_2. Costruiamo M_3 tale:

- Accetti un input esattamente quando M_1 e M_2 lo accetterebbero;
- Deve tener traccia di dove l'input si trovi contemporaneamente in M_1 ed in M_2.

Dimostrazione:

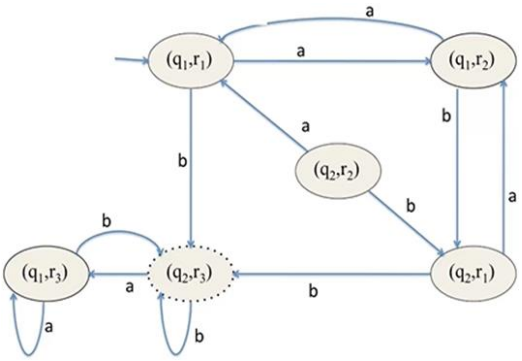
A tal punto, siano L_1 e L_2 definiti su uno stesso alfabeto Σ. Supponiamo che il DFA M_1 riconosce L_1, dove $M_1 = (Q_1, \Sigma, f_1, q_1, F_1)$, e che il DFA M_2 riconosce L_2, dove $M_2 = (Q_2, \Sigma, f_2, q_2, F_2)$. Costruiamo il DFA $M_3 = (Q_3, \Sigma, f_3, q_3, F_3)$ in questo modo:

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2 = \{(x, y) \mid x$ in Q_1, y in $Q_2\}$;
- l'alfabeto di M_3 è Σ;
- M_3 ha $f_3 : Q_3 \times \Sigma \rightarrow Q_3$ tale che per ogni x in Q_1, y in Q_2, a in Σ: $f_3((x, y), a) = (f_1(x, a), f_2(y, a))$;
- lo stato iniziale di M_3 è $q_3 = (q_1, q_2)$ in Q_3;
- l'insieme di stati accetta di M_3 è $F_3 = \{(x, y)$ in $Q_3 \mid x$ in F_1 e y in $F_2\}$.

M_3 è un DFA che riconosce l'intersezione. Poiché $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, allora il numero di stati in M_3 è $|Q_3| = |Q_1| \cdot |Q_2|$. Quindi, $|Q_3|$ è finito poiché $|Q_1|$ e $|Q_2|$ sono finiti.

Esempio:

Presi gli stessi automi, linguaggi ed alfabeto dall' esempio mostrato in precedenza, si nota che un automa che riconosce l'**intersezione** di A_1 e A_2 cambia soltanto gli stati finali rispetto all'unione. Bisogna, cioè, ottenere un automa che accetti stringhe che verrebbero accettate sia da M_1 sia da M_2: quindi, gli stati finali sono le coppie dov'è presente sia lo stato finale di A_1 sia lo stato finale di A_2; lo stato finale è, in questo caso, (q_2, r_3).



TEOREMA:

La classe dei linguaggi regolari è ***chiusa*** per la ***concatenazione***. Cioè, se A_1 e A_2 sono linguaggi regolari, allora lo è anche A_1A_2.

Per costruire un DFA che accetti la concatenazione di stringhe appartenenti ad automi diversi, lo si fa con un nuovo tipo di macchina, ovvero:

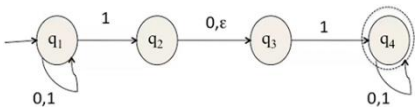
1.3 AUTOMI FINITI NON DETERMINISTICI

Il ***non determinismo è una generalizzazione del determinismo***, quindi ogni automa finito deterministico è automaticamente un automa finito non deterministico.

In un DFA, lo stato successivo occupato in corrispondenza di un dato input è unicamente determinato: quindi, le macchine sono deterministiche. La funzione di transizione in un DFA è f: $Q \times \Sigma \rightarrow Q$, che restituisce sempre un singolo stato.

Gli automi finiti non deterministici (NFA) permettono più scelte per il prossimo stato per un dato input. Per uno stato q, l'NFA può:

- avere più archi uscenti da q labellati con lo stesso simbolo a, per i vari $a \in \Sigma$;
- prendere ε-edge senza leggere simboli in input.



La ***differenza*** tra un automa deterministico e non è che:

- Lo stato q_1 ha un arco uscente per 0, ma ne ha 2 per 1;
- Lo stato q_2 ha un arco per 0 ma non è ha alcuno per 1;

Gli Automi finiti non deterministici hanno uno stato che può avere 0 o più archi uscenti per ogni simbolo dell'alfabeto.

Questo NFA ha un arco con etichetta ε. In generale, un NFA può avere archi etichettati con elementi dell'alfabeto o ε. Zero, uno, o più archi possono uscire da ciascuno stato con l'etichetta ε.

Osservazione:

Se NFA è in stato con più scelte, allora la macchina si divide in più copie di sé stessa, ognuna di essa continua una computazione in maniera indipendente dalle altre.

NFA può essere un insieme di stati, invece di un singolo stato. NFA segue ogni possibile computazione in parallelo e al termine dell'input:

- se una copia giunge in stato accetta, NFA accetta la stringa;
- se nessun cammino giunge in stato accetta, allora NFA non accetta la stringa input.

Se in stato con ε -transition, senza leggere input,

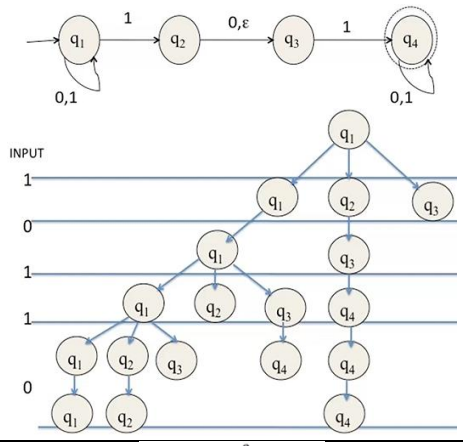
- NFA si divide in più copie, ognuna segue una possibile transizione,
- ogni copia continua indipendentemente da altre copie,
- NFA segue ogni possibile cammino in parallelo.
- NFA continua non deterministicamente come prima

Esempio1:

Sia definito il seguente NFA N_1 con alfabeto A = {0, 1}.

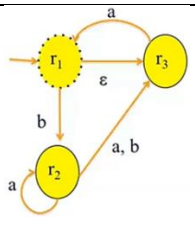
Si nota subito che lo stato iniziale q_1, quando riceve in input il simbolo 1, può sia restare nello stato q_1 che passare agli stati q_2 e q_3: questo perché quando l'automa è nello stato q_2 è possibile che venga ricevuta in input una ε vuota (una tale transizione prende il nome di epsilon-transition), di conseguenza si passa direttamente anche allo stato q_3. Inoltre, può capitare che in uno stato l'automa non possa accettare un simbolo dell'alfabeto (in questo caso, nello stato q_3 non è possibile ricevere una label 0).

Se si riceve in input 10110, questa è la computazione che l'automa effettua →



Esempio2:

Dato l'NFA posto a lato, è possibile notare che esso accetta stringhe ε, a, aa, baa, baba, …; non accetta, invece, stringhe b, ba, bb, …

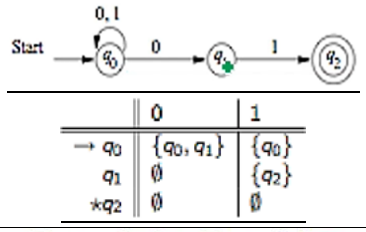


Per alfabeto $\sum$, sia Σ_ε ottenuto da $\sum$ ***aggiungendo*** ε. Cioè, $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

Un automa finito non-deterministico NFA A è una 5-tupla M= (Q, $\sum$, f, q_0, F), con
1. Q è l'insieme finiti di stati
2. $\sum$ è un alfabeto, e il DFA processa stringhe su Σ;
3. f: Q × $\sum_\varepsilon$ -> P(Q) funzione di transizione, dove P(Q) è l'insieme di tutti i sottoinsiemi possibili di Q;
4. $q_0 \in Q$ è stato start
5. $F \subseteq Q$ è insieme di stati accettanti.

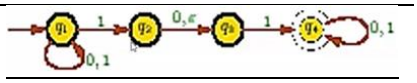
Nota. La differenza tra DFA e NFA è nella funzione di transizione f, la quale:
- ammette mosse tipo ε
- restituisce ***insieme*** di stati invece di un solo stato.

Esempio1:
Sia definito l'NFA N = ({q_0, q_1, q_2}, {0, 1}, δ, q_0, {q_2}), posto di seguito, dove δ è la funzione di transizione descritta nella tabella a lato.



	0	1
→ q_0	{q_0, q_1}	{q_0}
q_1	∅	{q_2}
*q_2	∅	∅

Esempio2:
Sia definito l'NFA N_2 = ({q_1, q_2, q_3, q_4}, {0, 1}, δ, q_1, {q_4}), posto di seguito, dove δ è la funzione di transizione descritta nella tabella a lato.



	0	1	ε
q_1	{q_1}	{q_1, q_2}	∅
q_2	{q_3}	∅	{q_3}
q_3	∅	{q_4}	∅
q_4	{q_4}	{q_4}	∅

Nota: Si ricordi che, una volta che l'automa è nello stato q_2, esso può passare allo stato q_3 in quanto è presente una ε-transition in tale stato.

Computazione di NFA:
Sia N = (Q, $\sum$, f, q_0, F) un NFA e sia *w* una stringa sull'alfabeto $\sum$, allora N ***accetta*** *w* se possiamo scrivere *w* come *w* = y_1, y_2, …, y_m, dove ogni y_i è un elemento di $\sum\varepsilon$ ed esiste una sequenza di stati r_0, r_1, ..., r_m in Q con tre condizioni:

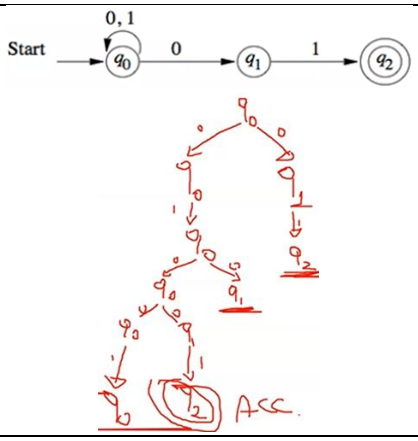
1. $r_0 = q_0$ (La macchina inizia nello stato iniziale)
2. r_{i+1} in f(r_i, y_{i+1}) per ogni i=0, 1, 2, …, m-1 (Lo stato r_{i+1} è uno dei possibili stati successivi quando N è nello stato r_i e sta leggendo y_{i+1})
3. r_m in F (La macchina accetta il suo input se l'ultimo stato è uno stato accettante)

Informalmente, vuol dire che N accetta w se esiste una possibile computazione che porta allo stato di accettazione. Si noti che la stringa generica y_i non appartiene a Σ, bensì appartiene a Σε in quanto è possibile che essa sia un ε per effettuare una epsilon-transition; è questa l'unica differenza tra la computazione di un DFA e la computazione di un NFA.

L'insieme di stringhe accettate da NFA N è il linguaggio ***riconosciuto*** da N ed è denotato con L(N).

Nota: Ogni DFA è anche un NFA. Infatti, vedremo che è possibile esprimere un NFA attraverso un corrispondente DFA, e che i primi sono semplicemente un modo più compatto per descrivere i secondi.

Sia definito l'NFA N posto a lato. Allora esso accetta il linguaggio {x01 | x ∈ Σ*}.
Ad esempio, se l'input è 01001 abbiamo il seguente albero di computazione:
- 0, da q_0 si passa sia a q_0 che a q_1;
- 1, da q_0 si passa nuovamente a q_0, e da q_1 si passa a q_2 (in quest'ultimo stato, la computazione si arresta);
- 0, da q_0 si passa sia a q_0 che a q_1;
- 0, da q_0 si passa sia a q_0 che a q_1, e da q_1 con 0 si arresta la computazione;
- 1, da q_0 si passa a q_0 e da q_1 si passa a q_2, e in quest'ultimo stato la stringa viene accettata.



1.3.1 EQUIVALENZE DI DFA E NFA

Due macchine sono ***equivalenti*** se ***riconoscono lo stesso linguaggio***.

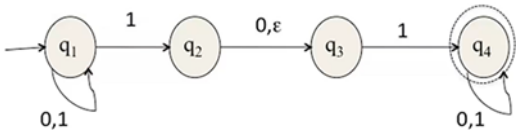
TEOREMA: Per ogni automa finito non deterministico NFA esiste un automa finito deterministico DFA ***equivalente***.
Ogni NFA N ha un equivalente DFA M, cioè se N è un NFA, allora esiste DFA M t.c. ***L(M) = L(N).***

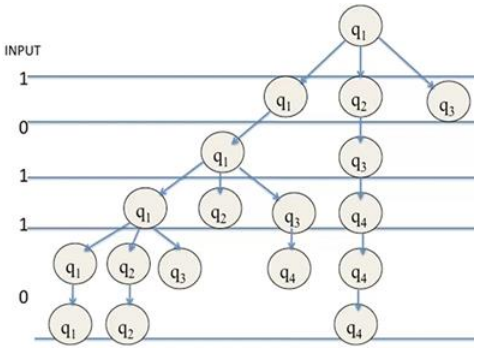
Idea:
Trasformare un NFA in un DFA equivalente che simula il NFA. Si dovrà capire quali saranno lo stato iniziale e quelli accettanti del DFA e la sua funzione di transizione.

Nota: *Se k è il numero degli stati dell'NFA, esso avrà 2^k sottoinsiemi di stati. Ogni sottoinsieme corrisponde ad una delle possibilità che il DFA deve ricordare, quindi il DFA che simula l'NFA avrà 2^k stati.*

Dimostrazione*:*

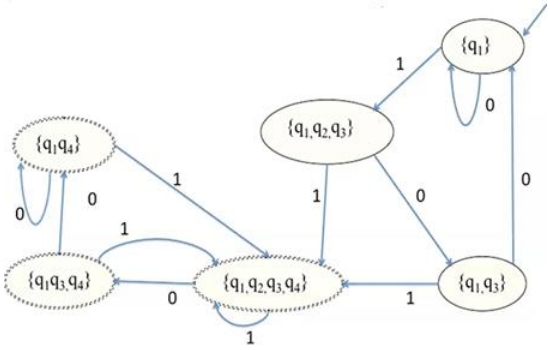
Costruiamo, a partire da N, il DFA M equivalente. L'idea è simile a quella usata per costruire l'automa che riconosce l'unione di due linguaggi: simuliamo tutte le computazioni fatte dal NFA in parallelo. Consideriamo il seguente automa.





L'automa deterministico dovrà, partendo dallo stato iniziale in presenza di input 1, ricordare all'interno dello stato che andrà ad occupare che l'automa non deterministico può essere in ognuno degli stati q_1, q_2 e q_3: è possibile ottenere ciò andando a considerare uno stato che è dato dall'insieme degli stati $\{q_1, q_2, q_3\}$. Allo stesso modo, in presenza di input 0, seguendo la prima computazione allora si passa da q_1 a q_1, mentre per la seconda si passa da q_2 a q_3, e la terza computazione si arresta: questo si può considerare nell'automa deterministico come uno stato dato dall'insieme degli stati $\{q_1, q_3\}$. Si procede in questo modo per ogni possibile computazione. Otteniamo, quindi, il seguente DFA.

Si osservi che dallo stato $\{q_1, q_2, q_3\}$, in presenza di input 0, si passa allo stato $\{q_1, q_3\}$. Gli stati finali del DFA saranno tutti quelli in cui compare *almeno uno* tra gli stati finali del NFA: in questo caso, solo gli stati in cui compare q_4.



Formalizzando, sia L = L(N) per un NFA N = (Q_N, Σ, f_N, q_N, F_N); allora, costruiamo un DFA D = (Q_D, Σ, f_D, q_D, F_D).

Partiamo da un automa D' che non considera le ε-transition, dove, per ogni r ∈ Q e a ∈ Σ:

- Q = P(Q_N), ossia ogni stato in D' sarà un sottoinsieme dell'insieme potenza degli stati del NFA N;
- $f(r, a) = \bigcup_{r \in R} f_N(r, a)$, ossia la funzione di transizione darà come risultato l'unione dei risultati (per ogni elemento r dell'insieme R), della funzione di transizione $f_N(r, a)$;
- q = {q_N}, ossia lo stato iniziale sarà l'insieme in cui compare lo stato iniziale del NFA N;
- f = {r ∈ Q | r ∩ F_N ≠ ∅}, ossia gli stati finali saranno tutti quegli stati che contengono al loro interno uno stato finale del NFA N.

Per ogni stato in f_N, se vi è una ε-transition allora dobbiamo considerarla. A tale scopo, definiamo l'insieme **E(r)** = r ∪ {q | q è raggiungibile da uno stato in r con 1 o più archi labellati ε}, cioè l'insieme che considera l'unione tra uno stato di D' (in quanto r ∈ Q) e l'insieme degli stati raggiungibili da uno stato in r che ammettono almeno una ε-transition.

Per la funzione di transizione estesa si ha che $f^*_N(q_1, 10110) = \{q_1, q_2, q_4\}$.

Formalmente, si ha che:

- $f_N^*(q_N, \varepsilon) = E(\{q_N\})$, quindi non ci sono lettere lette ed applichiamo la sola epsilon-transition;
- $f_N^*(q_N, xa) = \bigcup_{r \in f_N^*(q_N, x)} E(f_N(r, a))$, quindi si prendono tutti gli stati in cui potrebbe trovarsi l'automa dopo aver letto la stringa x ∈ Σ*, e per ognuno di questi stati applichiamo la funzione di transizione del NFA, applichiamo poi la funzione E, facciamo l'unione di ciò che abbiamo ottenuto ed otteniamo l'insieme di stati raggiungibili quando l'input è la stringa xa.

Risulta, per ogni x ∈ Σ*, $f_D^*(q_D, x) = f_N^*(q_N, x)$, cioè che le funzioni di transizione estese del NFA e del DFA corrispondente coincidono (ciò significa che i due automi accettano le stesse stringhe); questo risultato si può dimostrare induttivamente.

Quindi, sappiamo che D simula N su ogni input x. Inoltre, D accetta x se e solo se N accetta x. Infine, il linguaggio L = L(N) = L(D). Ciò significa che D e N sono equivalenti.

Dimostrazione:

Mostriamo per induzione su |w|, ponendo $q_0 = q_N$, che $f_D^*(\{q_0\}, w) = f_N^*(q_0, w)$.

Base: w = ε. L'enunciato segue dalla definizione.

Passo: Supponiamo che l'uguaglianza è vera per una certa stringa x, e consideriamo una stringa xa:

$f_D^*(\{q_0\}, xa) = f_D(f_D^*(\{q_0\}, x), a)$ (per definizione)
$f_D^*(\{q_0\}, xa) = f_D(f_N^*(q_0, x), a)$ (per ipotesi induttiva)
$f_D^*(\{q_0\}, xa) = \bigcup_{r \in f_N^*(q_0, x)} E(f_N(r, a))$ (per definizione)
$f_D^*(\{q_0\}, xa) = f_N^*(q_0, xa)$.

Esempio1:

Considerando l'esempio precedente, si ha ad esempio che $E(\{q_1\}) = \{q_1\}$, e $E(\{q_2\}) = \{q_2, q_3\}$: questo perché q_1 non accetta epsilon-transition, a differenza di q_2. Quindi, avremo il DFA D:

- Q_D = P(Q_N), che coincide con quanto definito per D';
- $f_D(r, a) = \bigcup_{r \in R} E(f_N(r, a))$, ossia la funzione di transizione darà come risultato l'unione dei risultati (per ogni elemento r dell'insieme R), della E della funzione di transizione $f_N(r, a)$;
- q_D = E({q_N}), ossia lo stato iniziale sarà la E dell'insieme in cui compare lo stato iniziale del NFA N;
- F_D = {r ∈ Q_D | r ∩ F_N ≠ ∅}, che coincide con quanto definito per D'.

Considerando l'esempio precedente, si ha ad esempio che $f_N(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$ se non consideriamo le ε-transition.

Se consideriamo le ε-transition, invece, si ha che $E(f_N(q_1, 1)) = \{q_1, q_2, q_3\}$.

Esempio2:

Considerando l'automa posto a lato, otteniamo che il suo stato iniziale sarà E({r_1}) = {r_1, r_3}.

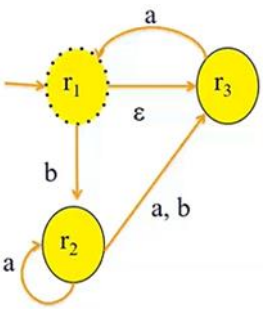
Abbiamo, inoltre, il suo DFA equivalente:

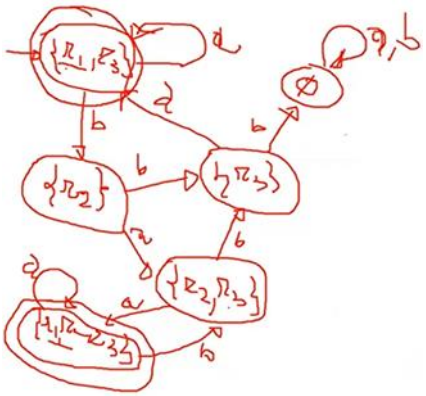
- {r_1, r_3}, con input 'a' si ha che da r_1 non si passa ad alcuno stato, mentre da r_3 si passa allo stato r_1. A questo punto, si applica nuovamente la funzione E (in quanto r_1 accetta una ε-transition) e si passa ancora dallo stato r_1 allo stato r_3. Il prossimo stato sarà, quindi, ancora {r_1, r_3};
- {r_1, r_3}, con input 'b' si ha che da r_1 si passa a r_2, mentre da r_3 non si passa ad alcuno stato. Lo stato r_2 non ammette ε-transition, quindi il nuovo stato sarà {r_2};
- {r_2}, con input 'a' si ha che da r_2 si passa ad r_2 e da r_2 si passa ad r_3, quindi il nuovo stato sarà {r_2, r_3};
- {r_2}, con input 'b' si ha che da r_2 si passa ad r_3, quindi il nuovo stato sarà {r_3};
- {r_2, r_3}, con input 'a' da r_2 vale il punto precedente, mentre da r_3 si passa ad r_1, ma in quest'ultimo caso applicando la E otteniamo che si passa anche da r_1 a r_3.

Di conseguenza, il nuovo stato sarà {r_1, r_2, r_3};

- {r_2, r_3}, con input 'b' da r_2 vale il punto precedente, mentre da r_3 non c'è nessuna transizione. Di conseguenza, il nuovo stato sarà {r_3};
- {r_3}, con input 'a' da r_3 si passa a r_1, ma applicando la E otteniamo che si passa anche da r_1 a r_3. Il nuovo stato sarà, quindi, lo stato iniziale {r_1, r_3};
- {r_3}, con input 'b' non si passa ad alcuno stato. Tuttavia, l'automa è deterministico per cui non possiamo ignorare un eventuale input, per cui si passa allo stato vuoto;
- considerando lo stato vuoto, per ogni input si passa nuovamente allo stato vuoto;
- {r_1, r_2, r_3}, con input 'a' ogni stato passa a quello successivo, per cui il nuovo stato sarà ancora {r_1, r_2, r_3};
- {r_1, r_2, r_3}, con input 'b' si ha che da r_1 si passa ad r_2, da r_2 si passa ad r_3, mentre da r_3 non si passa ad alcuno stato. Quindi, il nuovo stato sarà {r_1, r_3}.

Ora, bisogna identificare gli stati finali: sono tutti quegli stati al cui interno è presente lo stato r_1. L'automa deterministico corrispondente avrà, quindi, come stati finali {r_1, r_3} e {r_1, r_2, r_3}.





Nota: f*N(q_N, x) = insieme di stati raggiungibili da q_N su input x. Ciò vuol dire che la funzione estesa di un automa non deterministico può dare come risultato più stati, in quanto è possibile avere diverse copie di computazione.

Corollario:

Un ***linguaggio è regolare*** se e solo se qualche ***automa finito non deterministico lo riconosce***.

Dimostrazione*:*

Se L è regolare, allora esiste un DFA che lo riconosce; ma ogni DFA è anche un NFA, quindi esiste un NFA per L.

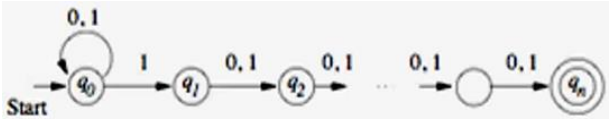
Dal teorema precedente, ogni NFA ha un equivalente DFA. Quindi, se esiste un NFA che riconosce L, allora esiste un DFA che riconosce L.

Formalmente: L = L(N) = L(D) ⇒ ∃ D: L(D) = L(N) = L; quindi, L è un linguaggio regolare.

Si osservi che, sebbene sia possibile ottenere un DFA equivalente da un determinato NFA, è bene (spesso) utilizzare questi ultimi perché sono più facili da rappresentare.

Nota. Esiste un NFA N con n+1 stati che non ha nessun DFA equivalente con meno di 2^n stati.

Il linguaggio dell'automa a dx è L(N) = {$x1c_2c_3 \cdots$ | $x \in \{0, 1\}^*$, $c_i \in \{0, 1\}$}.



Questo automa è simile all'automa che riconosce tutte le stringhe che terminano con 01, ma è costruito in modo tale che lo stato iniziale cicli sia con 0 che con 1, dopodiché ha una transizione con 1 da q_0 a q_1 (quindi si ha uno sdoppiamento della computazione); inoltre, dallo stato q_1 allo stato q_n si avanza con qualsiasi simbolo che riceve in input. Quindi, una stringa per essere accettata deve avere qualunque simbolo all'inizio, un 1 e poi n-1 simboli qualsiasi.

In sintesi, mentre un NFA può sdoppiarsi ad ogni stato ed avere più computazioni, un DFA deve necessariamente rappresentare gli stati in modo tale che possa ricordare gli ultimi n simboli che ha letto. Questo non è semplice da realizzare, in quanto ci sono 2^n sequenze di bit (da rappresentare con opportuni stati) $a_1a_2 \cdots a_n$ da ricordare.

1.4 OPERAZIONI REGOLARI CON GLI AUTOMI

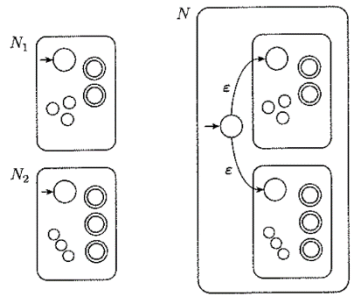
Lo scopo delle operazioni regolari è quello di provare che ***unione***, ***concatenazione*** e ***kleene star*** di linguaggi regolari sono ancora regolari.
L'uso del non determinismo rende le prove molto più semplici.

1.4.1 OPERAZIONE DI UNIONE PER GLI AUTOMI

TEOREMA:

La classe dei ***linguaggi regolari*** è chiusa rispetto all'operazione di ***unione***.

Idea:
Dati due linguaggi regolari A_1 e A_2 riconosciuti da N_1 e N_2, vogliamo provare che ***$A_1 \cup A_2$ è regolare*** componendo un nuovo NFA N.
La macchina N deve accettare il suo input se N_1 o N_2 accetta questo input. La nuova macchina ha un nuovo stato iniziale che si dirama negli stati iniziali delle vecchie macchine con ε-archi. In questo modo, la nuova macchina ipotizza non deterministicamente quale delle due macchine accetta l'input. Se una di essi accetta, allora anche N lo accetterà.



Dimostrazione:
Sia $N_1 = (Q_1, \sum, f_1, q_1, F_1)$ che riconosce A_1 ed $N_2 = (Q_2, \sum, f_2, q_2, F_2)$ che riconosce A_2.
Costruiamo $N = (Q, \sum, f, q, F)$ per $A_1 \cup A_2$:

1. $Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$
   Gli stati di N sono tutti gli stati di N_1 ed N_2, con l'aggiunta di un nuovo stato iniziale q_0.
2. Lo stato q_0 è lo stato iniziale di N.
3. L'insieme degli stati accettanti $F = F_1 \cup F_2$
   Gli stati accettanti di N sono tutti gli stati accettanti di N_1 ed N_2. In questo modo, N accetta se N_1 accetta o N_2 accetta.
4. Definiamo f in modo che per ogni *q* in *Q* e ogni *a* in $\sum_\varepsilon$:

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & q = q_0 \text{ e } a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_0 \text{ e } a \neq \varepsilon. \end{cases}$$

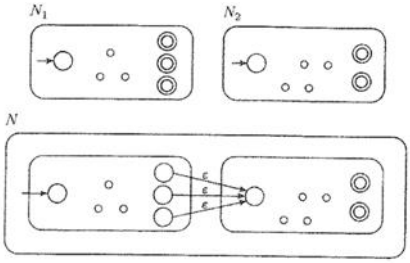
1.4.2 OPERAZIONE DI CONCATENAZIONE PER GLI AUTOMI

Si ricordi che, dati due linguaggi A, B regolari, la concatenazione è l'insieme AB = {vw | v ∈ A, w ∈ B}.

TEOREMA:

La classe dei ***linguaggi regolari*** è chiusa rispetto all'operazione di ***concatenazione***.

Idea:
Dati due linguaggi regolari A_1 e A_2 riconosciuti da N_1 e N_2, vogliamo provare che ***A_1 o A_2 è regolare*** componendo un nuovo NFA N.
Poniamo come stato iniziale di N, lo stato iniziale di N_1.
Gli stati accettanti di N_1 hanno degli ulteriori ε-archi che non deterministicamente permettono di diramarsi in N_2 ogni volta che N_1 è in uno stato accettante, indicando che ha trovato un pezzo iniziale dell'input che costituisce una stringa in A_1.
Gli stati accettanti di N sono solo gli stati accettanti di N_2. Quindi, esso accetta quando l'input può essere diviso in due parti, la prima accettata da N_1 e la seconda da N_2. Possiamo pensare che N non deterministicamente ipotizza dove effettuare la divisione.



Dimostrazione:
Sia $N_1 = (Q_1, \sum, f_1, q_1, F_1)$ che riconosce A_1 ed $N_2 = (Q_2, \sum, f_2, q_2, F_2)$ che riconosce A_2.
Costruiamo $N = (Q, \sum, f, q, F)$ per A_1 o A_2:

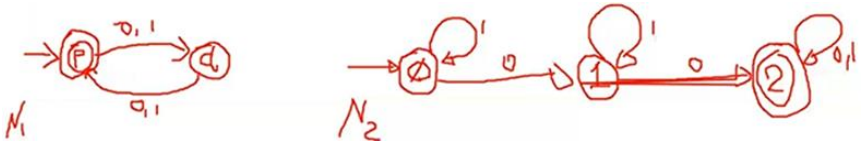
1. $Q = Q_1 \cup Q_2$
   Gli stati di N sono tutti gli stati di N_1 ed N_2.
2. L'alfabeto $\sum$ è lo stesso dei due linguaggi L_1 ed L_2.
3. Lo stato q_0 è uguale allo stato iniziale di N_1.
4. Gli stati accettanti F_2 sono uguali agli stati accettanti di N_2.
5. Definiamo f in modo che per ogni *q* in *Q* e ogni *a* in $\sum_\varepsilon$:

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & q \in F_1 \text{ e } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_2\} & q \in F_1 \text{ e } a = \varepsilon \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2. \end{cases}$$

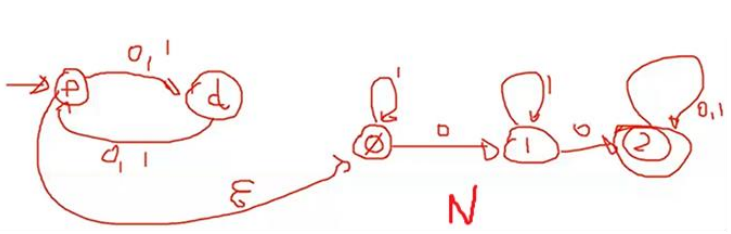
La funzione di transizione *δ(q, a)*, dato un generico stato *q* ed una stringa *a*:
- se *q* è uno stato non finale del primo automa, allora la transizione è quella specificata dal primo automa;
- se *q* è uno stato finale del primo automa e *a* è diversa da epsilon, allora la transizione è quella specificata dal primo automa;
- se *q* è uno stato finale del primo automa e *a* è ε, allora alle transizioni che già si avevano per il primo automa vanno aggiunte anche le ε-transition verso lo stato iniziale del secondo automa;
- se *q* è uno stato del secondo automa, allora le transizioni sono quelle specificate dal secondo automa.

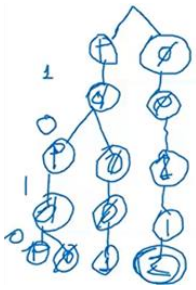
Analogamente, supponiamo di avere una stringa w = uv, non appartenente a L_1L_2: questo significa che u ∉ L_1 OR v ∉ L_2. Accadrà, quindi, che la stringa non verrà accettata da (almeno) uno dei sottoautomi, di conseguenza w non verrà accettata dall'automa N.
La concatenazione è stata definita per due linguaggi, ma in realtà è possibile iterare ed andare a concatenare più di due linguaggi: per concatenare L_1, L_2, L_3, ad esempio, si può prima concatenare L_1 ed L_2 per poi procedere con la concatenazione di L_3. In generale, questo risultato si può estendere alla **Kleene-star**: **$L^* = \{x_1x_2 \cdots x_k \mid k \geq 0, x_i \in L, i = 1, 2, \ldots, k\}$**.

Esempio1:
Siano L_1 = {w | |w| è pari} e L_2 = {w | w contiene almeno due 0}. Vogliamo costruire gli automi per questi due linguaggi, e a partire da questi ultimi un automa per la loro concatenazione L_1L_2. A tal scopo, sia N_1 l'automa per L_1, e sia N_2 l'automa per L_2. Otteniamo il seguente risultato.

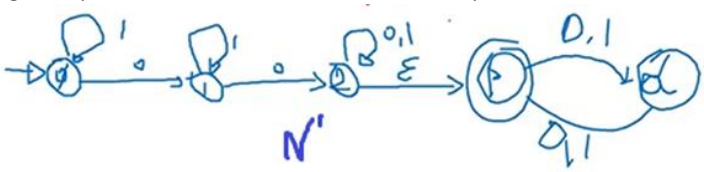


Quindi, sia L(N) = L_1L_2. Dall'idea dimostrativa del teorema precedente, otteniamo il seguente automa N.
Notiamo che, ad esempio, la stringa 10100 è accettata da N, dato che è gestibile come stringa costituita dalle sottostringhe 10 ∈ L_1 e 100 ∈ L_2. Questa stringa è gestita dall'automa come descritto dall'albero a destra.

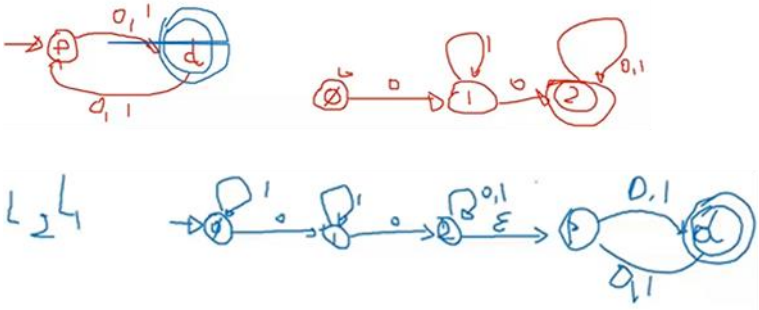


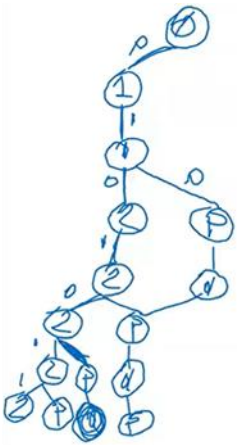


Esempio2:
Dati i linguaggi L_1 ed L_2 precedenti, vogliamo costruire un automa per la loro concatenazione L_2L_1. A tal scopo, sia N_1 l'automa per L_1, e sia N_2 l'automa per L_2. Quindi, sia L(N') = L_2L_1. Le stringhe accettate devono, quindi, essere costituite da una sottostringa contenente due o più 0, e da una sottostringa ad essa concatenata di lunghezza pari. Dall'idea dimostrativa del teorema precedente, otteniamo il seguente automa N'.



Esempio3:
Siano L_1 = {w | |w| è dispari} e L_2 = {w | w contiene almeno due 0}. Vogliamo costruire gli automi per questi due linguaggi, e a partire da questi ultimi un automa per la loro concatenazione L_1L_2. A tal scopo, sia N_1 l'automa per L_1, e sia N_2 l'automa per L_2. Otteniamo il risultato sottostante. Ad esempio, la stringa 1010111 (gestibile come 1010 ∈ L_2 e 111 ∈ L_1) viene accettata. La 0101011 (gestibile come 0101 ∈ L_2 e 011 ∈ L_1) segue l'albero computazionale di cui a destra.



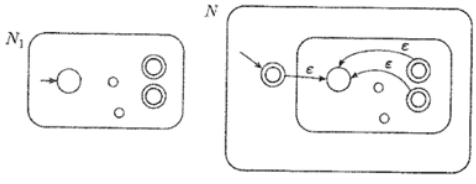


1.4.3 OPERAZIONE STAR PER GLI AUTOMI

TEOREMA:

La classe dei ***linguaggi regolari*** è chiusa rispetto all'operazione ***star***.

Idea:
Dato un linguaggio regolare A_1 e vogliamo provare che anche A_1^* è regolare.
Prendiamo un NFA N_1 per A_1 e lo modifichiamo per riconoscere A_1^*. L'NFA N risultante accetterà il suo input quando esso può essere diviso in varie parti ed N_1 accetta ogni parte. Possiamo costruire N come N_1 con ε-archi supplementari che dagli stati accettanti ritornano allo stato iniziale. In questo modo, quando l'elaborazione giunge alla fine di una parte che N_1 accetta, la macchina N ha la scelta di tornare indietro allo stato iniziale per provare a leggere un'altra parte che N_1 accetta. Inoltre, si aggiunge un nuovo stato iniziale, che è anche uno stato accettante, e che ha un ε-arco entrante nel vecchio stato iniziale.



Dimostrazione:
Sia $N_1 = (Q_1, \sum, f_1, q_1, F_1)$ che riconosce A_1.
Costruiamo N = $(Q, \sum, f, q_0, F)$ per A_1^*:

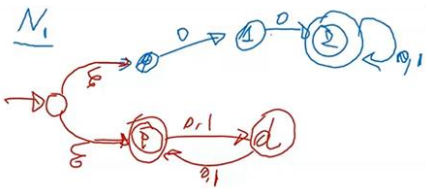
1. $Q = \{q_0\} \cup Q_1$
   Gli stati di N sono tutti gli stati di N_1 più un nuovo stato iniziale.
2. Lo stato q_0 è il nuovo stato iniziale.
3. $F = \{q_0\} \cup F_1$
   Gli stati accettanti sono i vecchi stati accettanti più il nuovo stato iniziale.
4. Definiamo f in modo che per ogni *q* in *Q* e ogni *a* in $\sum_\varepsilon$:

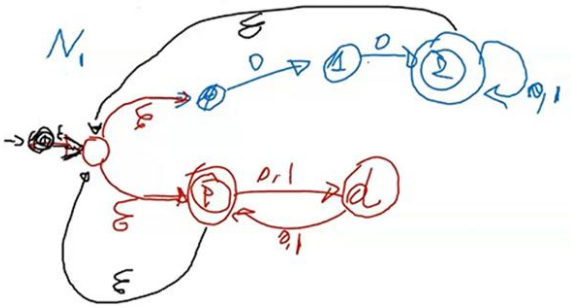
$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & q \in F_1 \text{ e } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_1\} & q \in F_1 \text{ e } a = \varepsilon \\ \{q_1\} & q = q_0 \text{ e } a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_0 \text{ e } a \neq \varepsilon. \end{cases}$$

Esempio1:

Sia L = {w | |w| è pari OR w = 00x}. Un automa non deterministico che riconosca L è il seguente (N_1, a sinistra), dove in rosso è posto il sottoautoma che accetta le stringhe pari, e in blu è posto l'automa che riconosce le stringhe che iniziano con 00.

Notiamo che l'OR, in un automa non deterministico, è semplicemente rappresentabile aggiungendo uno stato iniziale generico collegato con una ε-transition agli "ex stati iniziali" dei sottoautomi. Questo è possibile in quanto, con i NFA, la computazione si sdoppia direttamente all'inizio e prosegue nei due sottoautomi. A destra, invece, è posto l'automa N che riconosce la Kleene-star di L, cioè L* = L(N).





Ad esempio, la stringa 0011 (considerabile come unica stringa che inizia con due 0, oppure come stringa costituita da $x_1 = 00$ concatenata con $x_2 = 11$) viene accettata.

Più in generale, per la costruzione dell'OR (**unione**) supponiamo di avere due linguaggi, L_1 ed L_2, riconosciuti rispettivamente da due automi N_1 e N_2. Per costruire l'automa N, che riconosce il linguaggio $L_1 \cup L_2$:

1. si crea un nuovo stato, che sarà lo stato iniziale dell'automa N;
2. colleghiamo lo stato iniziale di N con i due stati iniziali di N_1 e N_2.

In questo modo, abbiamo un NFA che riconosce tutte le stringhe dell'unione, in quanto (per ogni stringa) la computazione si sdoppia ed avremo due rami computazionali: uno eseguito da N_1 e uno eseguito da N_2. Ora:

- se la stringa appartiene all'unione, allora essa o arriva in uno stato finale di N_1 o arriva in uno stato finale di N_2 (o in entrambi), e viene accettata dall'automa N;
- se la stringa non appartiene all'unione, allora essa non arriva in alcuno stato finale di N_1 o N_2, e non viene accettata dall'automa N.