LOGICA PROPOSIZIONALE

Una ***proposizione*** è una frase che dichiara un fatto e che può essere ***vera*** o ***falsa***, ma non entrambe.
Una ***proposizione più complessa*** può essere costruita attraverso proposizioni elementari connesse attraverso ***connettivi logici***.

CONNETTIVI LOGICI:

Negazione	È la proposizione “non è vero che p”, ed ha valore opposto a p, denotata con $\neg p$
Congiunzione	È la proposizione “p e q”, denotata con $p \land q$
Disgiunzione	È la proposizione “p o q”, denotata con $p \lor q$
Disgiunzione esclusiva	È denotato con $p \oplus q$
Implicazione	È la proposizione “p(*ipotesi*) implica q(*conclusione*)”, denotata con $p \rightarrow q$ Può essere letta come: *se… allora…, …solo se…, …è sufficiente/necessario per…, …ogniqualvolta…*
Inverso (Implicazione)	Denotata con $q \rightarrow p$
Opposto (implicazione)	Denotata con $\neg p \rightarrow \neg q$
Contronominale (implicazione)	Denotata con $\neg q \rightarrow \neg p$, ed ha gli stessi valori di $p \rightarrow q$
Bicondizione (equivalenza)	È la proposizione “p se e solo se q”, denotata con $p \leftrightarrow q$, ed ha gli stessi valori di $(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$ Può essere letta come: *se… allora… e viceversa, …iff…, …è necessario e sufficiente per…*

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \land q$	$p \lor q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	F	T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	F	F	F	T	T	T	T	T

Tautologia	È una proposizione composta che è ***sempre vera*** per tutti i possibili valori delle proposizioni elementari che la compongono
Contraddizione	È una proposizione composta che è ***sempre falsa*** per tutti i possibili valori delle proposizioni elementari che la compongono
Contingenza	È una proposizione composta che non è né una ***tautologia*** né una ***contraddizione***

EQUIVALENZE LOGICHE:

Le proposizioni p e q sono ***logicamente equivalenti*** se hanno gli stessi valori di verità, denotata con **$p \equiv q$.**

IDENTITÀ:
- $p \land T \equiv p$
- $p \lor F \equiv p$

DOMINAZIONE:
- $p \lor T \equiv T$
- $p \land F \equiv F$

IDEMPOTENZA:
- $p \lor p \equiv p$
- $p \land p \equiv p$

DOPPIA NEGAZIONE:
- $\neg(\neg p) \equiv p$

COMMUTATIVA:
- $p \land q \equiv q \land p$
- $p \lor q \equiv q \lor p$

ASSOCIATIVA:
- $(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$
- $(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$

DISTRIBUTIVA:
- $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$
- $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$

ALTRE UTILI EQUIVALENZA:
- $p \lor \neg p \equiv T$
- $p \land \neg p \equiv F$
- $p \oplus q \equiv (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)$
- $p \rightarrow q \equiv (\neg p \lor q)$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$

operatore	precedenza
$\neg$	1
$\land$	2
$\lor$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

LOGICA PREDICATIVA

Rimedia alle limitazioni della ***logica proposizionale***, ovvero modella in modo esplicito gli ***oggetti*** e le loro ***proprietà*** (chiamati ***predicati***) e permette di costruire asserzioni con ***costanti*** (specifico oggetto), ***variabili*** (oggetto di un certo tipo) e ***quantificatori*** (proprietà di un oggetto).

PREDICATI:

Un predicato ***P(x)*** assume un valore ***T*** o ***F in dipendenza*** dal fatto che la ***proprietà P*** vale o meno per ***x*** (***oggetto*** preso dall'***universo del discorso***).
La ***quantificazione*** converte una ***funzione proposizionale*** (***predicato P(x)***) in una ***proposizione*** poiché fissa un valore ben definito per la variabile.
NOTA: ***P(x) NON è una proposizione*** perché può essere applicata a più oggetti ed assumere valori diversi.
NOTA: **Importante *definire esattamente il dominio* (universo del discorso)**

LOGICA PROPOSIZIONALE	LOGICA PREDICATIVA
Utilizza asserzioni che descrivono proprietà di oggetti ben definiti (***proposizioni***)	Consente di utilizzare asserzioni valide per più oggetti (***predicati***) Permette di quantificare le asserzioni, consente di fare asserzioni riguardanti gruppi di oggetti (***quantificatori***)

QUANTIFICATORI:

Universale	P(x) è vera per tutti i valori di x nel dominio (***universo del discorso***), denotata con **$\forall x\, P(x)$**, esse sono legate alle ***implicazioni***. Per provare che $\forall x\, P(x)$ è falsa, basta trovare un ***controesempio***, ovvero *c'è una x per il quale P(x) è falsa*. Se si suppone che gli elementi possano essere enumerati, allora **$\forall x\, P(x)$ è vera se $P(x_1) \land P(x_2) \land \ldots \land P(x_n)$ è vera**. La ***negazione*** di $\forall x\, P(x)$ è: $\neg \forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$.
Esistenziale	P(x) è vera se esiste un elemento x del dominio che soddisfa la proprietà, denotata con **$\exists x\, P(x)$**, sono legate alle ***congiunzioni***. Se si suppone che gli elementi possano essere enumerati, allora **$\exists x\, P(x)$ è vera se $P(x_1) \lor P(x_2) \lor \ldots \lor P(x_n)$ è vera**. Per provare che $\exists x\, P(x)$ è falsa si deve provare che *P(x) è falsa per tutte le x*. La ***negazione*** di $\exists x\, P(x)$ è: $\neg \exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$.

INSIEMISTICA

Un ***insieme*** è una ***collezione non ordinata di oggetti (elementi*** dell'insieme***)***.

Numeri naturali: → N = {0,1,2,3, …}
Interi: → Z = {…, −2,−1,0,1,2, …}
Interi positivi: → Z^+ = {1,2, 3, …}
Numeri razionali: → Q = {p/q | p∈Z, q∈Z, q≠0}
Numeri reali: → R
Insieme universale → U
Insieme Vuoto → ∅

Uguaglianza	Due insiemi sono uguali se e solo se sono costituiti dagli stessi elementi, **A = B è ∀x (x∈A) ↔ (x∈B)**.
Sottoinsieme	A è sottoinsieme di B se e solo se ogni elemento di A è anche un elemento di B, **A ⊆ B è ∀x (x∈A) → (x∈B)**. **Nota**: ∅ è sottoinsieme di qualsiasi elemento.
Sottoinsieme proprio	A è sottoinsieme proprio di B se e solo se A ⊆ B e A ≠ B.
Cardinalità	Se ci sono esattamente n distinti elementi di S, diciamo che n è la cardinalità di S, denotata con |S|.
Insieme potenza	È l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S, denotata con P(S), se |S| = n allora |P(S)| = 2^n.
n-pla	È una collezione ordinata che ha x_1 come primo elemento, x_2 come secondo, …, x_n come n-simo elemento, con n≥2.
Prodotto cartesiano	È l'insieme di tutte le coppie ordinate (s,t) dove s∈S e t∈T, denotata con SxT. **Nota**: SxT ≠ TxS e la cardinalità di SxT è |SxT|=|S|*|T|.

OPERAZIONI SUGLI INSIEMI:

Unione	È l'insieme che contiene gli elementi in A o quelli in B, denotata con **A U B = { x | x∈A V x∈B }**.
Intersezione	È l'insieme che contiene gli elementi in A e quelli in B, denotata con **A ∩ B = { x | x∈A Λ x∈B }**. Due insiemi, si dicono ***disgiunti*** se la loro intersezione è vuota, cioè A ∩ B = ∅. La cardinalità dell'insieme unione è |A ⋃ B| = |A| + |B| − |A ∩ B|, se la loro intersezione non è vuota.
Differenza	È l'insieme che contiene quegli elementi che sono in A ma non sono in B, denotata con **A – B = { x | x∈A Λ x∉B }**.
Complemento	È l'insieme di tutti gli elementi di U che non appartengono ad A, denotata con **$\overline{A}$ = { x | x∈U Λ x∉A }**.

IDENTITÀ:
- A U ∅ = A
- A ∩ U = A

DOMINAZIONE:
- A U U = U
- A ∩ ∅ = ∅

IDEMPOTENZA:
- A U A = A
- A ∩ A = A

DOPPIA NEGAZIONE:
- $\overline{\overline{A}}$ = A

COMMUTATIVA:
- A U B = B U A
- A ∩ B = B ∩ A

ASSOCIATIVA:
- (A U B) U C = A U (B U C)
- (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)

DISTIBUTIVA:
- A U (B ∩ C) = (A U B) ∩ (A U C)
- A ∩ (B U C) = (A ∩ B) U (A ∩ C)

DE MORGAN:
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

LEGGE DELL'ASSORBIMENTO:
- A U (A ∩ B) = A
- A ∩ (A U B) = A

LEGGE DEL COMPLEMENTO:
- A U $\overline{A}$ = U
- A ∩ $\overline{A}$ = ∅

FUNZIONI:

Iniettiva	Una funzione è detta ***iniettiva*** se e solo se ***f(x) = f(y) => x =y*** per ogni x ed y nel dominio di f. Alternativamente, ***x ≠ y => f(x) ≠ f(y).***
Surriettiva	Una funzione da A a B è detta ***suriettiva*** se e solo se ∀b∈B ∃a∈A tale che ***f(a) = b***. Alternativamente, ***f(A)=B.***
Biettiva	Una funzione è detta ***biettiva*** se è sia ***iniettiva*** che ***suriettiva***.

DIMOSTRAZIONI

Una ***dimostrazione*** è un ragionamento corretto che stabilisce la verità di un'asserzione matematica.

Diretta	p → q viene dimostrata mostrando che "se p è T allora q è T".
Contrapposizione	p → q viene dimostrata mostrando che "se (¬q è T) allora (p è F)" / "se (¬q è T) allora (¬p è T)". **Nota**: ¬q → ¬p ≡ p → q ***contronominale.***
Contraddizione (assurdo)	p → q viene dimostrata mostrando che "se [(p è T) e (¬q è T)] allora F ".
Equivalenza	p ⟷ q è dimostrata con (p → q) Λ (q → p).
Banale	Se la conclusione q è sempre vera, allora p → q è banalmente vera.
Vuota	Se l'ipotesi p è sempre falsa allora p → q è banalmente vera.
Analisi dei casi	Vogliamo provare che (p_1 V p_2 V … V p_n) → q è equivalente a (p_1 → q) Λ (p_2 → q) Λ … Λ (p_n → q)
Esaustiva	Provati esaminando un numero relativamente piccolo di esempi.
Con Qualificatori	La ***dimostrazione esistenziale ∃x P(x)*** può essere provata in due modi, ovvero trovando un esempio che mostri che l'asserzione vale, oppure se non si trova un esempio, dimostrarlo per assurdo con ∀x ¬P(x), arrivando all'assurdo. La ***dimostrazione universale ∀x P(x)*** può essere provata che la proprietà vale per qualsiasi valore nel dominio, utilizzando l'analisi dei casi, oppure trovando un elemento per il quale la proprietà è falsa.