1. LOGICA PROPOSIZIONALE

Nel linguaggio comune si utilizzano spesso frasi imprecise o ambigue.

Esempio:

"Un americano muore di melanoma ogni ora"

Assurdo: significa che c'è un americano (sfortunato) che ogni ora muore di melanoma.

Corretta: Ogni ora, un americano muore di melanoma.

Il linguaggio matematico richiede ***certezze nelle affermazioni***, ossia determinare che sia ***vera*** o ***falsa***.

1.1. PROPOSIZIONE:

Una proposizione è una frase che dichiara un fatto e che può essere vera (T) o può essere falsa (F) ma non può essere entrambe

Esempi:

- Come stai? → Una domanda non una proposizione
- x+5 =3 → x non è specificato => non è né T né F
- 2 è un numero primo → T
- Lei ha molto talento → Lei non è specificato => non è né T né F
- Ci sono altre forme di vita su altri pianeti dell'universo → Può essere T o F

Le seguenti frasi **NON** sono proposizioni:

- Il tuo cinismo mi addolora. → esprime un sentimento
- Toccare ferro porta fortuna → è una credenza
- Hai superato l'esame per la patente guida? → è una domanda
- Correre in bicicletta mi diverte molto. → esprime una sensazione
- Smettila d'essere maleducato! → è un ordine
- Come fa freddo oggi! → è un'esclamazione

1.2. PROPOSIZIONI COMPOSTE:

Una proposizione più complessa può essere costruita attraverso proposizioni elementari connesse attraverso ***connettivi logici***.

Esempio:

Proposizione A: Fuori piove

Proposizione B : Vedremo un film

Una nuova *proposizione composta*:

Se fuori piove allora vedremo un film.

2. CONNETTIVI LOGICI

2.1. NEGAZIONE:

Sia p una proposizione. La frase " *non è vero che p* " è un'altra proposizione, chiamata la *negazione di p*.

La negazione di p è denotata con *¬p* e si legge *non p*.

p	¬p
T	F
F	T

Il valore della negazione di p , cioè di ¬p , è l'opposto del valore di p.

Esempio1:

Se abbiamo una proposizione "*Salerno è una città della Campania*" allora due possibili negazioni sono:

- **Non è vero** che Salerno è una città della Campania
- Salerno **non è** una città della Campania

Se abbiamo la proposizione "*L'auto di Giovanni ha almeno tre anni di vita*" allora tre possibili negazioni sono:

- **Non è vero** che l'auto di Giovanni ha almeno tre anni di vita
- L'auto di Giovanni **non** ha almeno tre anni di vita
- L'auto di Giovanni ha **meno** di tre anni di vita

Esempio2:

- $2+5 \neq 3$
- 10 **non è** un numero primo
- **Non è vero** che l'autobus 31 passa ogni 10 minuti

2.2. CONGIUNZIONE:

Siano p e q proposizioni. La frase " p e q " è una proposizione detta *congiunzione di p e q*.
La congiunzione di p e q è denotata con p ∧ q.
p ∧ q è vera se entrambe p e q sono vere, altrimenti è falsa.

p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Il valore della congiunzione p ∧ q è vero se entrambe p e q sono vere, altrimenti è falso.

Esempi:

- Salerno è una città della Campania **e** 5+2=8.
- Oggi piove **e** 2+5 ≠ 3.
- 10 è un numero primo **e** 5+2=7.
- Oggi piove **e** l'autobus 31 passa ogni 10 minuti.

2.3. DISGIUNZIONE:

Siano p e q proposizioni. La frase " p o q " è detta *disgiunzione di p e q*.
La disgiunzione di p e q è denotata con p ∨ q.
p ∨ q è falsa se entrambe p e q sono false, altrimenti è vera.

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Il valore della disgiunzione p ∨ q è vero se o p o q o entrambe sono vere.

Esempi:

- Salerno è una città della Campania **o** 5+2=8.
- Oggi piove **o** 2+5 ≠ 3.
- 10 è un numero primo **o** 5+2=7.
- Oggi piove **o** l'autobus 31 passa ogni 10 minuti.

2.4. DISGIUNZIONE ESCLUSIVA:

Siano p e q proposizioni. L'*or esclusivo di p e q* è denotato con p ⊕ q.
p ⊕ q è vero quando esattamente uno tra p e q sono veri, altrimenti è falso.

p	q	p ⊕ q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Il valore dell' or esclusivo p ⊕ q è vero se esattamente una tra p e q è vera.

Esempio:

Nel menù a prezzo fisso di un ristorante: Frutta o formaggio

2.5. IMPLICAZIONE:

Siano p e q proposizioni. La proposizione " p implica q " è chiamata *implicazione*.
Essa è denotata con p →q (talvolta anche con p => q) p → q è falsa quando p è vera e q è falsa, altrimenti è vera. p è chiamata *ipotesi* e q è chiamata *conclusione*.

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Il valore dell'implicazione **p → q** è falsa solamente se la verità di p implica la falsità di q.

condizione sufficiente → condizione necessaria

La proposizione **p → q** può essere letta in molti modi equivalenti:

- se **p** allora **q**
- **p** solo se **q**
- **p** è sufficiente per **q**
- **q** è necessaria per **p**
- **q** ogniqualvolta **p**

Esempio:

Consideriamo la proposizione "*Se ho la febbre allora sono ammalato*", tutte le situazioni che si possono presentare sono:

- Se ho la febbre allora sono ammalato → si può verificare
- Se ho la febbre allora non sono ammalato → non si può verificare
- Se non ho la febbre allora sono ammalato → si può verificare
- Se non ho la febbre allora non sono ammalato → si può verificare

Consideriamo la proposizione "*Se è una carta di cuori allora è una regina*", consideriamo i seguenti casi:

- Se è una carta di cuori ed è una regina
- Se è una carta di cuori ed è un re → solo qui abbiamo mentito
- Se è una carta di picche ed è una regina
- Se è una carta di picche ed è un re

NOTA: L'implicazione p → q non presuppone vi sia una qualche relazione tra p e q.

Esempio1:

Se Giulio Cesare è morto allora 2 * 3 = 6

- Giulio Cesare è morto → T
- 2 * 3 = 6 → T

Se T allora T → T

Esempio2:

Se la Salernitana vince lo scudetto nel 2013 allora 2 è un numero primo

- p = la Salernitana vince lo scudetto nel 2013
- q = 2 è un numero primo

Se F allora T → T

2.5.1. PROPOSIZIONI CONDIZIONALI DERIVANTI DALL'IMPLICAZIONE

L'INVERSO di p → q è q → p

p	q	p → q	q → p
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

Esempio:

Se nevica allora le auto procedono lentamente

- p = nevica
- q = le auto procedono lentamente
- p → q

L'inverso : Se le auto procedono lentamente allora nevica

- q → p

L'OPPOSTO di p → q è ¬p → ¬q

p	q	p → q	¬p	¬q	¬p → ¬q
T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T

Esempio:

Se nevica allora le auto procedono lentamente

- p = nevica
- q = le auto procedono lentamente
- p → q

L'opposto : Se non nevica allora le auto procedono velocemente

- ¬p → ¬q

Il CONTRONOMINALE di p → q è ¬ q → ¬ p

p	q	p → q	¬q	¬p	¬q → ¬p
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

¬q → ¬ p ha gli stessi valori di verità di p → q

Esempio:

Se nevica allora le auto procedono lentamente

- p = nevica
- q = le auto procedono lentamente
- p → q

Il ***contronominale***: Se le auto procedono velocemente allora non nevica

- ¬q → ¬p

2.6. BICONDIZIONE (O EQUIVALENZA):

Siano p e q proposizioni.
La proposizione "*p se e solo se q*" è chiamata bicondizione (o equivalenza).
Essa è denotata con *p* ⟷*q* (talvolta anche con *p* <=> *q*).
p ⟷ q è vera quando p e q hanno lo stesso valore di verità, altrimenti è falsa.

p	q	p ⟷ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

La proposizione **p ⟷ q** può essere letta in molti modi equivalenti:

- Se **p** allora **q** e viceversa
- **p** iff **q**
- **p** è necessaria e sufficiente per **q**

Esempio:

Puoi prendere l'aereo se e solo se hai comprato il biglietto:

- **Vera** se sono entrambe vere oppure entrambe false
  - ✓ Se puoi prendere l'aereo e hai comprato il biglietto
  - ✓ Se non puoi prendere l'aereo e non hai comprato il biglietto
- **Falsa** se hanno valori opposti
  - × Se puoi prendere l'aereo e non hai comprato il biglietto
  - × Se non puoi prendere l'aereo e hai comprato il biglietto

p	q	p → q	q → p	p ⟷ q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

p ⟷ q ha gli stessi valori di verità di (p → q) ∧ (q → p)

ESEMPIO RIEPILOGATIVO

p = 2 è un numero primo = T
q = 6 è un numero primo = F

* $\neg p = F$
* $\neg q = T$
* $p \wedge q = F$
* $p \wedge \neg q = T$
* $p \vee q = T$
* $p \oplus q = T$
* $p \rightarrow q = F$
* $q \rightarrow p = T$
* $p \leftrightarrow q = F$

Costruire una tabella di verità per proposizioni composte per l'espressione **$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$**

p	q	¬p	p → q	¬p ↔ q	(p → q) ∧ (¬p ↔ q)
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

proposizioni
elementari

p	q	¬p	p → q	¬p ↔ q	(p → q) ∧ (¬p ↔ q)
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

proposizioni
composte ausiliarie

p	q	¬p	p → q	¬p ↔ q	(p → q) ∧ (¬p ↔ q)
T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F

2. APPLICAZIONE DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Traduzione di frasi di un linguaggio comune in proposizioni logiche

Supponiamo di avere la frase seguente: "*Se hai più di 12 anni o sei accompagnato dai tuoi genitori allora puoi salire su quella giostra*."

Analisi:

Se (hai più di 12 anni o sei accompagnato dai tuoi genitori) allora (puoi salire su quella giostra)

Proposizioni elementari:

a = hai più di 12 anni

b = sei accompagnato dai tuoi genitori

c = puoi salire su quella giostra

Traduzione:

$(a \lor b) \rightarrow c$

REGOLA GENERALE:

Individua nella frase le parole chiave che corrispondono ai connettivi logici ed usa essi per identificare le proposizioni elementari.

Esempio:

$\underbrace{\text{Puoi avere caffè gratis}}_{a}$ se $\underbrace{\text{sei maggiorenne}}_{b}$ ed $\underbrace{\text{è martedì}}_{c}$

- Passo 1: individua i connettivi logici
- Passo 2: identifica le proposizioni elementari
- Passo 3: riscrivi la frase come una proposizione logica

$(b \land c) \rightarrow a$

Si assuma di avere le seguenti proposizioni elementari: p = Tu guidi a più di 130 km/h q = Prendi la multa

Traduci ciascuna delle seguenti frasi:

- Tu *non* guidi a più di 130 km/h → $(\neg p)$
- Tu guidi a più di 130 km/h, *ma non* prendi la multa → $(p \land \neg q)$
- *Se non* guidi a più di 130 km/h *allora non* prendi la multa → $(\neg p \rightarrow \neg q)$
- Guidare a più di 130 km/h *è sufficiente per* prendere una multa → $(p \rightarrow q)$
- Prendi la multa, *ma non* guidi a più di 130 km/h → $(q \land \neg p)$

3. EQUIVALENZE PROPOSIZIONALI

Nel ragionamento matematico riveste un ruolo importante la possibilità di sostituire una asserzione (proposizione) con un'altra avente gli stessi valori di verità.

Alcune proposizioni sono interessanti poiché i loro valori nella tabella di verità sono sempre gli stessi.

3.1. TAUTOLOGIA:

Una tautologia è una proposizione composta che è sempre vera per tutti i possibili valori delle proposizioni elementari che la compongono.

p	**¬p**	**p ∨ ¬p**
T	F	T
F	T	T

Esempio:

$p \lor \neg p$ è una tautologia

3.2. CONTRADDIZIONE:

Una contraddizione è una proposizione composta che è sempre falsa per tutti i possibili valori delle proposizioni elementari che la compongono

p	**¬p**	**p ∧ ¬p**
T	F	F
F	T	F

Esempio:

$p \land \neg p$ è una contraddizione

3.3. CONTINGENZA:

Una contingenza è una proposizione composta che non è né una tautologia né una contraddizione

3.4. EQUIVALENZA LOGICA:

Le proposizioni p e q sono dette logicamente equivalenti se hanno gli stessi valori di verità (o equivalentemente se $p \leftrightarrow q$ è una tautologia).
La notazione $p \equiv q$ denota che p e q sono logicamente equivalenti.

p	q	¬q	¬p	p → q	¬q → ¬p
T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T

<u>*Esempio*</u>:

$p \rightarrow q$ è equivalente a $\neg q \rightarrow \neg p$ (contronominale)

Le equivalenze logiche sono proposizioni composte logicamente equivalenti ed hanno lo stesso valore di verità per tutti i possibili casi.
È così possibile:

- Sostituire l'una con l'altra
- Utilizzare una qualunque di esse in un ragionamento logico
- Ottenere nuove proposizioni

Per verificare l'equivalenza si usa la tabella di verità.

3.5. IMPORTANTI EQUIVALENZE LOGICHE

LEGGI DI DE MORGAN:

- $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$
- $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$

<u>*Esempio*</u>:
La negazione della frase "*L'estate in Messico è calda ed assolata*", usando le leggi di De Morgan "*L'estate in Messico non è calda o non è assolata*".

p	q	¬q	¬p	¬(p ∨ q)	¬p ∧¬q
T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

IDENTITÀ:

- $p \land T \equiv p$
- $p \lor F \equiv p$

DOMINAZIONE:

- $p \lor T \equiv T$
- $p \land F \equiv F$

IDEMPOTENZA:

- $p \lor p \equiv p$
- $p \land p \equiv p$

DOPPIA NEGAZIONE:

- $\neg(\neg p) \equiv p$

COMMUTATIVA:

- $p \land q \equiv q \land p$
- $p \lor q \equiv q \lor p$

ASSOCIATIVA:

- $(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$
- $(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$

DISTRIBUTIVA:

- $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$
- $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$

ALTRE UTILI EQUIVALENZA:

- $p \lor \neg p \equiv T$
- $p \land \neg p \equiv F$
- $p \oplus q \equiv (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)$
- $p \rightarrow q \equiv (\neg p \lor q)$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$

Le equivalenze possono essere usate per trasformare proposizioni o parti di esse per poter ottenere un qualche risultato.
<u>*Esempio*</u>:

Mostrare che **$(p \land q) \rightarrow p$ è una tautologia**

Dim.1: dobbiamo mostrare che $((p \land q) \rightarrow p) \equiv T$

$$
\begin{aligned}
(p \land q) \rightarrow p &\equiv \neg(p \land q) \lor p \\
&\equiv (\neg p \lor \neg q) \lor p && \text{DeMorgan} \\
&\equiv (\neg q \lor \neg p) \lor p && \text{commutativa} \\
&\equiv \neg q \lor (\neg p \lor p) && \text{associativa} \\
&\equiv \neg q \lor T \\
&\equiv T && \text{dominazione}
\end{aligned}
$$

Dim.2: usiamo la tavola di verità

p	q	p ∧ q	(p ∧ q)→p
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

3.6. REGOLE DI PRECEDENZA DEGLI OPERATORI

L'uso di parentesi specifica l'ordine in cui gli operatori logici vanno applicati.

Per ridurre il numero di parentesi si stabilisce una convenzione sulla ***precedenza degli operatori***.

Esempio:

(p ∨ q) ∧ (¬r) può essere scritta anche (p ∨ q) ∧ ¬r

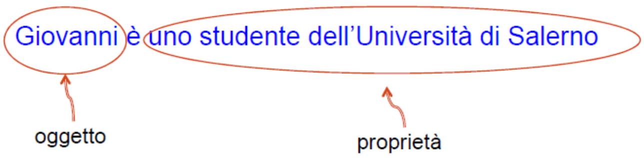
(p ∧ q) ∨ (¬r) può essere scritta senza ambiguità p ∧ q ∨ ¬r

operatore	precedenza
¬	1
∧	2
∨	3
→	4
↔	5

4. PREDICATI E QUANTIFICATORI

4.1. LIMITAZIONI DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Abbiamo visto nella ***logica proposizionale*** che il mondo è descritto attraverso proposizioni elementari e le loro combinazioni logiche. I singoli oggetti cui si riferiscono le proposizioni o le proprietà di tali oggetti enunciati nelle proposizioni NON hanno identificazione nella logica proposizionale.



Le asserzioni devono essere ripetute per oggetti diversi

Nella logica proposizionale ciascuna delle proposizioni deve essere ripetuta esaustivamente.

Esempio:

"Se Giovanni è laureato in Informatica allora ha sostenuto l'esame di MMI"

Traduzione: Giovanni è laureato in Informatica → ha sostenuto l'esame di MMI

Assumendo di avere altri laureati:

Anna è laureata in Informatica → ha sostenuto l'esame di MMI

Nicola è laureato in Informatica → ha sostenuto l'esame di MMI

Da questo esempio ricaviamo che il ***problema*** è quello di ***snellire la ripetizione esaustiva***.

La ***soluzione*** a questo problema è di ***costruite le proposizioni con le variabili***.

x è laureato in Informatica → ***x*** ha sostenuto l'esame di MMI

Esempio:

"Tutte le auto nuove devono essere immatricolate"

"Qualche laureato in Informatica si laurea con lode"

Qui il ***problema*** è *esprimere le proprietà di gruppo*.

La soluzione è *utilizzare i* ***quantificatori*****.** Ne esistono di due tipi:

1. **Quantificatori universali**: la proprietà è soddisfatta per tutti i membri del gruppo.
2. **Quantificatori esistenziali**: almeno un membro del gruppo soddisfa la proprietà.

4.2. LOGICA PREDICATIVA

Rimedia alle limitazioni della logica proposizionale:

- Modella in maniera esplicita gli oggetti e le loro proprietà (chiamate ***predicati***)
- Permette di costruire asserzioni con variabili e quantificatori

Gli elementi fondamentali della logica predicativa:

- **costante**: modella uno specifico oggetto.
  Esempi:
  Giovanni, Salerno, 7.
- **variabile**: rappresenta un oggetto di un tipo specificato (il tipo è definito stabilendo un universo del discorso).
  Esempi:
  x, y (universo del discorso può essere persone, studenti, numeri).
- **predicato**: rappresenta la proprietà o le relazioni tra gli oggetti.
  Esempio:
  x è più grande di 3
  P = è più grande di 3 → predicato
  x è più grande di 3 → è denotata con ***P(x)***
  Può essere relativo ad uno, due o più oggetti (studente(x), sposati(Giovanni, Maria)).

4.3. PREDICATI

Un predicato ***P(x)*** assume un valore Vero o Falso in dipendenza del fatto che la proprietà P vale o meno per x.

La variabile ***x*** è un oggetto preso dall'***universo del discorso***.

Esempio1:

Consideriamo il predicato ***Studenti(x)*** dove l'universo del discorso sono le persone.

- Studente(Giovanni) = **T** → se Giovanni è uno studente
- Studente(Anna) = **T** → se Anna è uno studente
- Studente(Nicola) = **F** → se Nicola non è uno studente

Esempio2:

Sia ***P(x)*** un predicato che rappresenta l'asserzione: ***x è un numero primo***

Quali sono i valori di verità di:

- P(2) T
- P(3) T
- P(4) F
- P(5) T
- P(6) F
- P(7) T

Tutte le asserzioni P(2), P(3), P(4), P(5), P(6), P(7) sono ***proposizioni***.

È P(x) una proposizione? No, perché P(x) può essere applicata a più oggetti ed assumere valori diversi

I predicati possono avere **più argomenti**. Il predicato rappresenta la **relazione tra gli argomenti (oggetti).**

Esempio1:

Piu_vecchio(Giovanni, Pietro), denota l'asserzione ***Giovanni è più vecchio di Pietro*** (È una proposizione perché è vera o falsa).

Piu_vecchio(x, y), denota l'asserzione ***x è più vecchio di y*** (Non è una proposizione, ma la diventa dopo aver sostituto alle variabili i valori).

Esempio2:

Q(x, y), denota x+5 > y

- Q(x,y) è una proposizione? ***NO***
- Q(3,7) è una proposizione? ***SI***

  Quali sono i valori di verità di:

  - Q(3,7) → ***T***
  - Q(1,6) → ***F***
- Q(3,y) è una proposizione? ***NO***. Non possiamo dire se è vera o falsa

4.4. ASSERZIONI COMPOSTE NELLA LOGICA PREDICATIVA

Le asserzioni composte sono ottenute attraverso connettivi logici.

Esempi:

Studente(Giovanni) ∧ Studente(Anna)

- ***Traduzione***: Sia Giovanni che Anna sono studenti
- ***Proposizione***: SI

Città(Arno) ∨ Fiume(Arno)

- ***Traduzione***: L'Arno è un fiume o una città
- ***Proposizione***: SI

MMI(x) → Matricola(x)

- ***Traduzione***: Se x segue il corso di MMI allora x è una matricola
- ***Proposizione***: NO

LOGICA PROPOSIZIONALE	LOGICA PREDICATIVA
▪ Utilizza asserzioni che descrivono proprietà di **oggetti ben definiti** (proposizioni)	▪ Consente di utilizzare asserzioni valide per più oggetti (predicati) ▪ Permette di quantificare le asserzioni, consente di fare asserzioni riguardanti gruppi di oggetti (quantificatori)

4.5. ASSERZIONI QUANTIFICATE

La logica predicativa consente di fare asserzioni riguardanti gruppi di oggetti. Vengono utilizzate asserzioni quantificate:

- **Universale:**

<u>Esempio</u>:

Tutti gli studenti di MMI sono iscritti ad Informatica → L'asserzione è vera per ***tutti*** gli studenti di MMI

- **Esistenziale:**

<u>Esempio</u>:

Alcuni studenti di Informatica si laureano con lode → L'asserzione è vera per ***alcuni*** studenti di Informatica

4.5.1. QUANTIFICATORE UNIVERSALE

La quantificazione universale di P(x) è l'asserzione: P(x) è vera per tutti i valori di x nel dominio (universo del discorso).
La notazione ∀x P(x) denota la quantificazione universale di P(x), ed è espressa dicendo per ogni x P(x) è vera

<u>Esempio1</u>:

Supponiamo che P(x) denoti x > x – 1. Quale è il valore di verità di ∀x P(x)?

Assumiamo che il dominio sia l'insieme di tutti i *numeri reali R*.

Risposta: poiché il numero reale x è più grande di sé stesso diminuito di 1, abbiamo ∀x P(x) è vera.

<u>Esempio2</u>:

MMI(x) → Matricola(x)

- ***Traduzione***: Se x segue il corso di MMI allora x è una matricola
- ***Proposizione***: NO

∀x (MMI(x) → Matricola(x))

- ***Dominio***: persone
- ***Traduzione***: Se una persona segue il corso di MMI allora è una matricola
- ***Proposizione***: SI

La ***quantificazione*** converte ***una funzione proposizionale (predicato) P(x)*** in ***una proposizione*** poiché fissa il valore di P(x) per variabili prese da un insieme ben definito.

<u>Esempio</u>:

Supponiamo che P(x) denoti x ≥ 0:

- P(x) è una proposizione? ***NO***. Può assumere molti valori diversi
- ∀x P(x) è una proposizione? ***SI***. Il valore di x P(x) è ben definito: è ***vero*** se P(x) è vero per ogni x nel dominio, ed è ***falso*** se esiste un valore di x per cui P(x) risulta falso.

Nell'utilizzo del quantificatore è ***importante definire esattamente il dominio*** (l'universo del discorso).

<u>Esempio</u>:

Supponiamo che P(x) denoti x ≥ 0. Quale è il valore di ∀x P(x)?

Assumiamo che il dominio sia l'insieme dei numeri interi (ricordate Z = { ..., −1, 0, 1, 2, ... }):

∀x∈Z P(x) → ***Falso***. Poiché per x=−1 abbiamo x<0

Assumiamo che il dominio sia l'insieme dei numeri naturali (ricordate N = { 0, 1, 2, ... }):

∀x∈N P(x) → ***Vero***.

Un elemento x del dominio per il quale P(x) è falsa è detto ***controesempio*** di ∀x P(x). Per provare che una asserzione che utilizza un quantificatore universale è falsa basta individuare un ***controesempio***.

<u>Esempio</u>:

Con P(x) che denota x ≥ 0 e con dominio l'insieme dei numeri interi Z, si ha che ∀x P(x) è Falso. La prova è data dall'esistenza di un intero come x=−1 per il quale P(x) è falso. Cioè x=−1 è un ***controesempio*** per ∀x P(x).

4.5.2. QUANTIFICATORE ESISTENZIALE

La quantificazione esistenziale di P(x) è l'asserzione: Esiste un elemento x del dominio (universo del discorso) per il quale P(x) è vera.
La notazione ∃x P(x) denota la quantificazione esistenziale di P(x), ed è espressa dicendo esiste un x tale che P(x) è vera.

<u>Esempio1</u>:

Supponiamo che P(x) denoti x > 5. ***Dominio***: insieme dei numeri reali R.

Quale è il valore di verità di ∃x P(x) ?

Risposta: poiché è possibile trovare un numero reale maggiore di 5, per esempio 10 > 5, abbiamo ∃x P(x) è ***vera***.

Esempio2:

Supponiamo che Q(x) denoti x = x+2. ***Dominio***: insieme dei numeri reali R.

Quale è il valore di verità di ∃x Q(x) ?

Risposta: poiché nessun numero reale è uguale a sé stesso aumentato di 2, abbiamo ∃x P(x) è ***falsa***.

Esempio3:

Laureato_Inf(x) ∧ Lode(x)

- ***Traduzione***: x è un laureato in Informatica e x si è laureato con lode
- ***Proposizione***: NO

∃x Laureato_Inf(x) ∧ Lode(x)

- ***Dominio***: persone
- ***Traduzione***: C'è una persona che è un laureato in Informatica e che si è anche laureato con lode
- ***Proposizione***: SI

Asserzione	Quando è vera?	Quando è falsa?
∀x P(x)	P(x) è vera per tutti gli x	C'è un x per il quale P(x) è falsa
∃x P(x)	C'è qualche x per il quale P(x) è vera	P(x) è falsa per tutti gli x

Supponiamo che gli elementi del dominio possano essere enumerati, cioè essi siano $x_1, x_2, \dots, x_N$ allora

- ∀x P(x) è vera se $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_N)$ è vera
- ∃x P(x) è vera se $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_N)$ è vera

Esempio1:

Supponiamo che P(x) denoti $x^2 > 10$. ***Dominio***: {1,2,3,4}.

Quale è il valore di verità di ∃x P(x) ?

Risposta: il valore di ∃x P(x) è lo stesso della disgiunzione P(1) ∨ P(2) ∨ P(3) ∨ P(4), poiché, P(4)= 16 > 10, abbiamo ∃x P(x) è T.

Esempio2:

Supponiamo che P(x) denoti x2 > 10. ***Dominio***: {1,2,3,4}.

Quale è il valore di verità di ∀x P(x) ?

Risposta: il valore di ∀x P(x) è lo stesso della disgiunzione P(1) ∧ P(2) ∧ P(3) ∧ P(4), poiché , P(1)= 1 < 10, abbiamo ∀x P(x) è F.

4.6. TRADUZIONI DI FRASI UTILIZZANDO I QUANTIFICATORI

La formulazione di un asserzione nella logica predicativa dipende dal dominio.

Esempio1:

"Tutti gli studenti di Informatica sono simpatici."

- ***Dominio***: studenti di Informatica — ***Traduzione***: ∀x Simpatici(x)
- ***Dominio***: studenti — ***Traduzione***: ∀x (Inf(x) → Simpatici(x))
- ***Dominio***: persone — ***Traduzione***: ∀x ((Stud(x) ∧ Inf(x)) → Simpatici(x))

Esempio2:

"Qualche studente di Ingegneria è simpatico."

- ***Dominio***: studenti di Ingegneria — ***Traduzione***: ∃x Simpatico(x)
- ***Dominio***: studenti — ***Traduzione***: ∃x (Ing(x) ∧ Simpatico(x))

Tipicamente, date due qualunque predicati S(x) e P(x): ***Le "asserzioni universali" sono legate alle "implicazioni"***

Tutti S(x) sono P(x): ∀x (S(x) → P(x))

Nessun S(x) è P(x): ∀x (S(x) → ¬P(x))

Esempio:

"Tutti gli italiani mangiano la pasta"

- ***Dominio***: italiani — ***Traduzione***: ∀x Mangia_pasta(x)
- ***Dominio***: persone — ***Traduzione***: ∀x (Italiano(x) → Mangia_pasta(x))

Tipicamente, date due qualunque predicati S(x) e P(x): ***Le "asserzioni esistenziali" sono legate alle "congiunzioni"***

Qualche S(x) è P(x): $\exists x\ (S(x) \land P(x))$

Qualche S(x) non è P(x): $\exists x\ (\ S(x) \land \neg P(x)\ )$

<u>Esempio</u>:

"Qualche italiano è vegano"

Dominio: italiani — ***Traduzione***: $\exists x$ Vegano(x)

Dominio: persone — ***Traduzione***: $\exists x$ (Italiano(x) $\land$ Vegano(x))

4.7. ASSERZIONI MATEMATICHE QUANTIFICATE

La maggioranza dei teoremi ed asserzioni matematiche esprimono l'***esistenza*** di un oggetto con una qualche proprietà o una proprietà valida ***per tutti*** gli oggetti.

<u>Esempio1</u>:

"$x^2+2x+1=0$ ha una radice reale"

La natura esistenziale di questa asserzione è più esplicita se la si esprime come: ***Esiste un numero reale x tale che $x^2+2x+1=0$***.

Considerando l'insieme dei numeri reali R come dominio, simbolicamente può essere espressa come: $\exists x\ (x^2+2x+1=0)$.

<u>Esempio2</u>:

"$\sqrt{2}$ è un numero irrazionale"

La natura esistenziale di questa asserzione è più esplicita se si esprime come: ***Non esistono due interi p e q tale che $\sqrt{2}$ = p/q***.

Simbolicamente può essere espressa come: $\neg(\ \exists p \in Z\ \ \exists q \in Z\ (\ \sqrt{2} = p/q\ )\ )$.

<u>Esempio3</u>:

"Il quadrato di un qualunque numero reale è maggiore o uguale a zero"

La natura universale di questa asserzione è più esplicita se la si esprime come: ***Ogni numero reale ha il quadrato maggiore o uguale a zero.***

Considerando l'insieme dei numeri reali R come dominio, simbolicamente può essere espressa come: $\forall x\ (x^2 \geq 0)$.

4.8. QUANTIFICATORI INNESTATI

Più di un quantificatore può essere necessario per rappresentare una qualche asserzione.

<u>Esempio1</u>:

"Ogni numero reale ha un corrispondente negativo"

Assumiamo che:

- il dominio sia l'insieme dei numeri reali R
- P(x,y) sia "x+y=0"

Traduzione: $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$.

<u>Esempio2</u>:

"C'è una persona che ama tutti gli altri"

Assumiamo che:

- il dominio sia l'insieme delle persone
- A(x,y) sia "x ama y"

Traduzione: $\exists x\ \forall y$ Ama(x,y)

Invertendo i quantificatori le asserzioni potrebbero avere un significato completamente differente. ***L'ordine dei quantificatori innestati è importante.***

<u>Esempio1</u>:

"Un americano muore di melanoma ogni ora"

Muore(x,h) sia "x muore nell'ora h" allora così come è scritta l'asserzione precedente è: $\exists$***x*** $\forall$***h Muore(x,h).***

Mentre noi avevamo in mente: $\forall$***h*** $\exists$***x Muore(x,h).***

<u>Esempio2</u>:

"$\forall x\ \exists y$ Ama(x,y) è diverso da $\exists y\ \forall x$ Ama(x,y)"

Infatti, se come prima A(x,y) è "x ama y", allora:

$\forall x\ \exists y$ Ama(x,y) significa: Ognuno ama qualcun altro

$\exists y\ \forall x$ Ama(x,y) significa: C'è una persona che è amato da tutti gli altri

Esempio3:

"*Per tutte le x e le y, se x è un genitore di y allora y è figlio di x*"

Consideriamo: Genitore(x,y) è "x è genitore di y" e Figlio(y,x) è "y è figlio di x"

L'asserzione può essere rappresentata in due modi equivalenti:

- $\forall x \forall y$ Genitore(x,y) → Figlio(y,x)
- $\forall y \forall x$ Genitore(x,y) → Figlio(y,x)

4.9. NEGAZIONE DI QUANTIFICATORI

Esempio1:

"*Niente è perfetto*"

Traduzione: $\neg$ ($\exists x$ Perfect(x))

Un altro modo per esprimere l'asserzione precedente è: "*Ogni cosa è imperfetta*"

Traduzione: $\forall x \neg$Perfect(x)

Un altro modo per esprimere l'asserzione precedente è: "*Ogni cosa è imperfetta*"

Conclusione: $\neg$ ($\exists x$ Perfect(x)) è equivalente a $\forall x \neg$Perfect(x)

Esempio2:

"*Non è vero che tutti gli italiani mangiano la pasta*"

Traduzione: $\neg \forall x$ (Italiano(x) → Mangia_pasta(x))

Un altro modo per esprimere l'asserzione precedente è: "*C'è qualche italiano che non mangia la pasta*"

Traduzione: $\exists x$ (Italiano(x) $\land \neg$Mangia_pasta(x))

Logicamente equivalente a: $\exists x \neg$(Italiano(x) → Mangia_pasta(x))

Conclusione: $\neg$ ($\forall x$ P(x)) è *equivalente* a $\exists x \neg$P (x)

4.10. LEGGI DI DE MORGAN PER QUANTIFICATORI:

Negazione	Asserzione equivalente
$\neg\forall x$ P(x)	$\exists x \neg$P(x)
$\neg\exists x$ P(x)	$\forall x \neg$P(x)

Proviamo che $\neg \forall x$ P(x) è equivalente a $\exists x \neg$P (x)

Dim.

Dobbiamo provare che $\neg \forall x$ P(x) → $\exists x \neg$P (x)

Cominciamo col provare che $\neg \forall x$ P(x) → $\exists x \neg$P (x)

Se $\neg$ ($\forall x$ P(x)) è vera => ($\forall x$ P(x)) è falsa

=> $\exists x$ per il quale P(x) è falsa, cioè

$\exists x$ per il quale $\neg$P (x) è vera, cioè $\exists x \neg$P (x)

Proviamo che $\neg \forall x$ P(x) è equivalente a $\exists x \neg$P (x)

Dim.

Dobbiamo provare che $\neg \forall x$ P(x) ← $\exists x \neg$P (x)

Ci rimane da provare che $\exists x \neg$P (x) → $\neg \forall x$ P(x)

Se $\exists x \neg$P (x) è vera => $\exists x$ per cui P(x) è falsa

=> non è vero che $\forall x$ P(x) è vera, cioè

$\neg$ ($\forall x$ P(x))

4.11. RAPPORTI TRA QUANTIFICATORI E CONNETTIVI LOGICI

Può accadere che: $\exists x$ [P(x) $\land$ D(x)] NON è lo stesso di $\exists x$ P(x) $\land$ $\exists x$ D(x).

Esempio:

Consideriamo come dominio N P(x) = x è pari D(x) = x è dispari

$\exists x$ [P(x) $\land$ D(x)] è Falsa

$\exists x$ P(x) $\land$ $\exists x$ D(x) è Vera

Portare il quantificatore esistenziale davanti a ciascun predicato può portare ad asserzioni completamente diverse
Se in una espressione logica compaiono due espressioni logiche con quantificatori connesse con connettivi logici, è possibile muovere un quantificatore solo se la variabile legata al connettivo logico non appare nell'altra espressione logica

$\forall x$[(F(x) $\lor$ P(x)) → $\exists y$ E(x,y)] è equivalente a $\forall x \exists y$ [(F(x) $\lor$ P(x)) → E(x,y)]