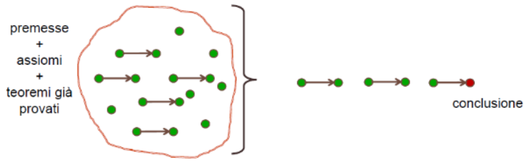
2. DIMOSTRAZIONI

Una ***dimostrazione*** è un ragionamento corretto che stabilisce la verità di un asserzione matematica.

Attraverso l'uso di altre asserzioni vere:

- *ipotesi del teorema;*
- *assiomi che si assumono essere veri;*
- *teoremi dimostrati precedentemente.*



Un problema importante di una dimostrazione si ha quando comprendere se un ragionamento è corretto, e quale metodo usare.

Consideriamo il caso p → q = T, quindi:

- Se p è F allora indipendentemente dal valore di q abbiamo p → q è T;
- Se p è T allora dobbiamo provare anche q è T per avere p → q è T.

2.1 TEOREMI

Un ***teorema*** è una asserzione che si può dimostrare essere vera.

Tipicamente un teorema lo si può vedere in questo modo:

$$\underbrace{(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n)}_{\text{Premesse (ipotesi)}} \rightarrow \underbrace{q}_{\text{conclusione}}$$

<u>Esempio</u>: Teorema di Fermat

Premesse (ipotesi)

Se *p* è un primo ed *a* è un numero non divisibile per *p*

allora $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ conclusione

Ci sono diversi <u>*metodi di base*</u> per provare teoremi.

> NOTA: Non tutti i metodi di dimostrazione vanno bene in tutti i casi, infatti può accadere che un metodo dimostrativo si rivela più semplice di altri.
> Può essere perciò necessario tentare più di un approccio.
> Inoltre, alcune dimostrazioni possono richiedere l'utilizzo di più di un tipo di dimostrazione.

2.2 DIMOSTRAZIONE DIRETTA

> **p → q viene dimostrata mostrando che "*se p è T allora q è T*".**

In maniera diretta:

- si parte dal fatto che p è ***T***;
- si fanno una serie di deduzioni, usando assiomi, definizioni e teoremi precedentemente provati per arrivare a dire che anche q è ***T***.

<u>*Esempio1*</u>:

Sia n un intero. Provare che "*Se n è dispari, allora* n^2 *è dispari.*"

Dim:

- Assumiamo che l'ipotesi sia vera, cioè n è dispari;
- Allora n = 2k + 1, dove k è un qualunque intero;
- $n^2 = (2k + 1)^2$
  $= 4k^2 + 4k + 1$
  $= 2(2k^2 + 2k) + 1$
- Perciò, n^2 è dispari.

<u>*Esempio2*</u>:

Siano n ed m interi. Provare che "*Se n ed m sono dispari, allora n+m è pari.*"

Dim:

- Assumiamo che l'ipotesi sia vera, cioè n ed m siano dispari;
- Allora n = 2k + 1 e m = 2h + 1 dove k ed h sono due qualunque interi;
- n+m = (2k + 1) + (2h + 1)
  = 2k + 2h + 2
- Perciò, n+m è pari.

2.3 DIMOSTRAZIONE PER CONTRAPPOSIZIONE

> **p → q viene dimostrata mostrando che "*se (¬q è T) allora (p è F)*" / "*se (¬q è T) allora (¬p è T)*".**
> **NOTA: Ciò che si dimostra è che " se ¬q è T allora ¬p è T ".**
> **Si ricordi che: ¬q → ¬p ≡ p → q** ***contronominale***

<u>*Esempio*</u>:

Provare che "*Se 3n +2 è dispari, allora n è dispari.*"

Dim:

- Assumiamo al contrario che *n è pari*, cioè n=2k, dove k è un intero
- 3n + 2 = 3(2k) + 2
  = 6k + 2
  = 2(3k + 1)
- Così *3n +2 è pari* . Quindi *3n +2 è dispari ≡ F*

2.4 DIMOSTRAZIONE PER CONTRADDIZIONE (ASSURDO)

$p \rightarrow q$ viene dimostrata mostrando che "*se [(p è T) e (¬q è T)] allora F*"

cioè: si parte dal fatto che

- ¬q è T
- p è T

Si fanno una serie di deduzioni, usando assiomi, definizioni e teoremi precedentemente provati per arrivare ad una asserzione ***F***.

L'approccio è corretto perché: $(p \land \neg q) \rightarrow \mathbf{F} \equiv \neg(p \land \neg q) \lor \mathbf{F}$

$$\equiv \neg(p \land \neg q)$$
$$\equiv \neg p \lor q$$
$$\equiv p \rightarrow q$$

Esempio1:

Provare che "*Se 3n +2 è dispari, allora n è dispari.*"

Dim:

- Assumiamo al contrario che n è pari, cioè n=2k, dove k è un intero;
- Per ipotesi sappiamo che 3n +2 è dispari, cioè 3n+2 =2h+1, dove h è un intero;
- 2h+1 = 3n + 2
  = 3(2k) + 2
  = 6k + 2 che è ovviamente pari
- Ma questo è F (è assurdo) poiché 2h+1 è dispari

Esempio2:

Siano x e y due numeri reali. Provare che "*Se 5x + 25y = 1723, allora x o y non sono interi.*"

Dim:

- Assumiamo al contrario che x e y sono interi
- 5x + 25y = 1723
  5(x + 5y) = 1723
  x + 5y = 1723/5
  ma 1723 non è divisibile per 5 => x + 5y non è un intero
- Ma questo è F (è assurdo) poiché sappiamo che x e y sono interi

2.5 DIMOSTRAZIONE DI EQUIVALENZA

$p \leftrightarrow q$ è dimostrata con $(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$

Esempio1:

"*n è dispari se e solo se n^2 è dispari*"

Dim. di ***p → q***:

- Dobbiamo provare che: Se n è dispari allora n^2 è dispari
- Usiamo la ***dimostrazione diretta***
- Supponiamo che n sia dispari. Allora n = 2k + 1, dove k è un intero
- $n^2 = (2k + 1)^2$
  $= 4k^2 + 4k + 1$
  $= 2(2k^2 + 2k) + 1$
- Perciò, n^2 è dispari.

Dim. di ***q → p***:

- Dobbiamo provare che: Se n^2 è dispari allora n è dispari
- Usiamo la ***dimostrazione indiretta***, cioè proviamo ($\neg p \rightarrow \neg q$)
- Supponiamo che n sia pari. Allora n = 2k, dove k è un intero
- $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$
- Perciò, n^2 è pari.

Poiché entrambe (p → q) e (q → p) sono vere, l'equivalenza è vera

A volte i teoremi affermano che più proposizioni sono equivalenti:

- Vogliamo provare che $p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots\dots \leftrightarrow p_n$
- Tutte le proposizioni p_1 , p_2 , …… , p_n hanno lo stesso valore di verità
- Un modo per provarlo è provare la seguente proposizione equivalente $(p_1 \rightarrow p2)$ $(p_2 \rightarrow p_3)$ …… $(p_n \rightarrow p_1)$

Esempio2:

Mostrare che le seguenti asserzioni sono equivalenti.

p_1 : n è pari p_2 : n−1 è dispari p_3 : n^2 è pari

Dim: Proveremo che $p_1 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_3$, $p_3 \rightarrow p_1$,

$p_1 \rightarrow p_2$

- Se n è pari, allora n = 2k, dove k è un intero
- n − 1 = 2k – 1 = 2(k − 1) + 1 che è un intero dispari

$p_2 \rightarrow p_3$

- Se n−1 è dispari, allora n − 1 = 2k + 1, dove k è un intero
- $n^2 = (2k +2)^2 =4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k +2)$ che è un intero pari

$p_3 \rightarrow p_1$

- Per contrapposizione supponiamo che n sia dispari, cioè n = 2k + 1, dove k è un intero
- $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ che è un intero dispari

2.6 DIMOSTRAZIONE BANALE

Vogliamo provare che p → q. Se la conclusione *q è sempre vera*, allora *p → q* è banalmente *vera*.

Esempio1:

Sia P(n): "se a ≥ b allora $a^n \geq b^n$ ". Mostrare che P(n) → P(0).

Dim:

- $a^0 >= b^0$ è 1=1 che è banalmente vera indipendentemente da n.

Esempio2:

Proviamo che *'Se x>0 allora $(x+1)^2 - 2x \geq x^2$'*

Dim:

- $(x+1)^2 - 2x = (x^2 + 2x + 1) - 2x$
  $= x^2 + 1 \geq x^2$

Siamo giunti alla conclusione senza usare l'ipotesi

2.7 DIMOSTRAZIONE VUOTA

Vogliamo provare che p → q. Se l'ipotesi p è *sempre falsa* allora p → q è banalmente *vera*.
F → q è sempre T, sia che q sia True o False.

Esempio:

Sia P(n): "*se n ≥ 1 allora $n^2 \geq 1$* ". Mostrare che (se n=0) → P(0)

Dim:

- Per n=0 l'ipotesi di P(n) è falsa.
- Così P(0) è sempre vera.

2.8 DIMOSTRAZIONE PER ANALISI DEI CASI

Vogliamo provare che $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q$
È equivalente a $(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)$

Questo perché:

$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q \equiv$

$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \vee q \equiv$ (applichiamo De Morgan)

$(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n) \vee q \equiv$ (applichiamo distributiva)

$(\neg p_1 \vee q) \wedge (\neg p_2 \vee q) \wedge \ldots \wedge (\neg p_n \vee q) \equiv$

$(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)$

Quindi si prova la verità di tutti i casi, uno per uno…

Esempio1:

Mostrare che |x||y|=|xy| per x ed y reali

Dim:

Consideriamo i possibili valori di x e y. Sono possibili 4 casi:

1. $x \geq 0, y \geq 0$ => $xy \geq 0$ e $|xy| = xy = |x||y|$
2. $x \geq 0, y < 0$ => $xy \leq 0$ e $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$
3. $x < 0, y \geq 0$ => $xy \leq 0$ e $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$
4. $x < 0, y < 0$ => $xy > 0$ e $|xy| = (-x)(-y) = |x||y|$

Tutti i casi sono provati…

Esempio2:

Sia n ∈ Z. Provare che 9n2+3n−2 è pari.

Dim:

Per prima cosa consideriamo che $9n^2+3n-2=(3n+2)(3n-1)$

Poiché n è un intero, allora (3n+2)(3n-1) è il prodotto di due interi. Consideriamo 2 casi:

1. Assumiamo 3n+2 è pari:
   $9n^2+3n-2$ è banalmente pari perché è il prodotto di due interi di cui uno pari
2. Assumiamo 3n+2 è dispari:
   3n+2−3 è pari → 3n−1 è pari → $9n^2+3n-2$ è pari perché uno dei suoi fattori è pari

Tutti i casi sono provati…

2.8.1 DIMOSTRAZINE ESAUSTIVA

Alcuni teoremi possono essere provati esaminando un numero relativamente piccolo di esempi.

- È un ***tipo speciale di dimostrazione per casi***
- Ogni caso consiste nel controllare un singolo esempio

Esempio:

$(n+1)^3 \geq 3^n$ se n è un intero positivo con n ≤ 4

Dim:

Bisogna verificare $(n+1)^3 \geq 3^n$ solo nei casi n=1,2,3,4

- n=1 $(n+1)^3 = (1+1)^3 = 8$ $3^n = 3^1 = 3$
- n=2 $(n+1)^3 = (2+1)^3 = 27$ $3^n = 3^2 = 9$
- n=3 ………
- n=4 ………

2.9 DIMOSTRAZIONE CON QUANTIFICATORI

Asserzioni espresse con un quantificatore esistenziale – dimostrazioni di esistenza
- Vogliamo provare che $\exists x\ P(x)$

Costruttiva:

- Trovare un esempio che mostri che l'asserzione vale

Esempio:

Esiste un intero che può essere scritto in due diversi modi come la somma di cubi di interi positivi.

Dim:

$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$

Non-costruttiva:

- Se non si trova un esempio calzante, si opta per una dimostrazione per assurdo in cui si nega l'asserzione esistenziale e si mostra che ciò implica una contraddizione:

- Si assume che vale $\exists x\ P(x) \equiv \forall x\ \neg P(x)$
- Poi si arriva ad una contraddizione

Esempio: (Pigeon Hole Principle)

Se n+1 oggetti sono distribuiti in n scatole allora qualche scatola deve contenere almeno 2 oggetti.

Dim:

- Assumiamo di avere n+1 oggetti, e n scatole identificate con $B_1, B_2, \ldots, B_n$
- Per contrapposizione supponiamo che ***nessuna*** scatola contiene più di 1 oggetto
  k_i = il numero di oggetti posti nella scatola B_i , per i=1,…, n
  $k_i \le 1$
  Allora $k_1 + k_2 + \ldots\ldots + k_n \le 1+1+\ldots\ldots+1 = n$
- Ma questo contraddice l'ipotesi $k_1 + k_2 + \ldots\ldots + k_n = n + 1$.

Asserzioni espresse con una *negazione* di un quantificatore *esistenziale*.
- Vogliamo provare che $\neg\exists x\ P(x) \equiv \forall x\ \neg P(x)$

Lo si prova:

- rapportandolo al quantificatore universale, oppure
- si procede per assurdo ipotizzando l'esistenza di un elemento x che soddisfa P(x) e arrivando ad una contraddizione

Esempio:

Il numero √2 è un irrazionale

- Si ricordi che l'asserzione: Il numero √2 è un irrazionale
  è equivalente a: Non esistono due interi p e q tale che √2 = p/q
  simbolicamente può essere espressa come: $\neg(\exists p \in Z\ \ \exists q \in Z\ (\sqrt{2} = p/q))$
- In questo caso l'ipotesi non è specificata, abbiamo solo la tesi.

Dim:

- Assumiamo ***per contraddizione*** che √2 è un razionale, cioè √2 = p/q, dove ***p e q sono due numeri naturali che non hanno fattori comuni***.
- $2 = p^2/q^2$
  $2q^2 = p^2$
  p^2 è pari
  p è pari (infatti dispari^2 = dispari),c'è un intero r : p = 2r
  $2q^2 = p^2 = 4r^2$
  $q^2 = 2r^2$
  q è pari
  p e q hanno il fattore 2 in comune
- Questa è una contraddizione. Perciò √2 è un irrazionale

Asserzioni espresse con un quantificatore *universale*: Vogliamo provare che $\forall x\ P(x)$

Provare che la proprietà vale per tutti i valori nel dominio (può essere complicato), si può utilizzare la dimostrazione per analisi dei casi (con suddivisione della dimostrazione per sottogruppi).

Esempio:

Siano n ed m interi. Provare che "*Se n ed m sono dispari, allora n+m è pari.*"

Dim:

- Assumiamo che l'ipotesi sia vera, cioè n ed m siano dispari;
- Allora n = 2k + 1 e m = 2h + 1 dove k ed h sono due qualunque interi;
- n+m = (2k + 1) + (2h + 1)
  = 2k + 2h + 2
- Perciò, n+m è pari.

In questa dimostrazione non viene fatta alcuna restrizione sugli interi n ed m se non l'ipotesi dell'implicazione: *n ed m sono interi arbitrari*. Quindi la dim precedente prova anche ***$\forall n \in Z\ \ \forall m \in Z$*** (Se ***n ed m sono dispari***, allora ***n+m è pari***).

Asserzioni espresse con una *negazione* di un quantificatore *universale*: Vogliamo provare che $\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$

Controesempi: Simile alla dimostrazione costruttiva di esistenzialità.