3. INSIEMI

L'***insieme*** è una struttura discreta utilizzata per rappresentare oggetti discreti.
Molte strutture discrete sono costruite a partire dagli insiemi:

- Combinazioni (insiemi usati nel conteggio)
- Relazioni (insiemi che rappresentano le relazioni tra gli oggetti)
- Grafi (insiemi di vertici e archi)
- …

Un ***insieme*** è una collezione non ordinata di oggetti, chiamati ***elementi*** dell'insieme.

Esempio:

- Insieme delle vocali: $V = \{a, e, i, o, u\}$
- Insieme dei primi 7 numeri primi: $P = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

Un insieme può essere rappresentato attraverso:

1. La ***lista*** (l'enumerazione) degli elementi che lo costituiscono: $E= \{50, 52, 54, 56, 58, 60, 62\}$
2. La definizione della ***proprietà*** che caratterizza i suoi elementi: $E= \{ x \mid x$ è un intero pari e $50 \leq x \leq 63 \}$

Se gli elementi dell'insieme sono molti si utilizza l'ellissi (…) nella rappresentazione dell'insieme attraverso l'enumerazione.

Esempio:

"insieme degli interi compresi tra 1 e 100" → $A= \{1, 2, \dots, 100\}$ ***("…" sono chiamati ellissi)***

INSIEMI IMPORTANTI

Numeri naturali:	→	$N = \{0,1,2,3, \dots\}$
Interi:	→	$Z = \{\dots, -2,-1,0,1,2, \dots\}$
Interi positivi:	→	$Z^+ = \{1,2, 3, \dots\}$
Numeri razionali:	→	$Q = \{p/q \mid p\in Z, q\in Z, q\neq 0\}$
Numeri reali:	→	R

Esempio:

L' insieme dei numeri *pari* è $\{ 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots \}= \{ 2n \mid n\in N \}$
L' insieme dei numeri *dispari* è $\{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots \}= \{ 2n+1 \mid n\in N \}$
Es: Se $P = \{ 2n \mid n\in N \}$ allora $4\in P$, ma $5\notin P$.

3.1 UGUAGLIANZA TRA INSIEMI

Due insiemi sono ***uguali*** se e solo se sono costituiti dagli stessi elementi.
Scriveremo ***a∈A*** per indicare che a è un elemento di A.

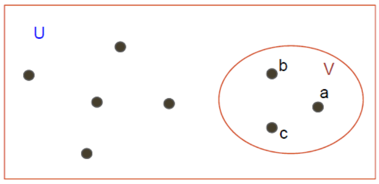
Un ***modo alternativo*** per dire che ***A = B è*** $\forall x\ (x\in A) \leftrightarrow (x\in B)$

Esempio:

- $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$
- Avere elementi duplicati in un insieme non dice nulla di più sull'insieme
- Avere elementi in un ordine diverso non dice nulla di più sull'insieme
- Sono $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\{1, 2, 2, 3\}$ insiemi uguali? ***NO***

3.2 INSIEMI SPECIALI

L'***insieme universale*** è denotato con ***U***, è l'insieme costituito da tutti gli elementi che si stanno considerando.
L'***insieme vuoto*** è denotato con $\emptyset$, non contiene alcun elemento.



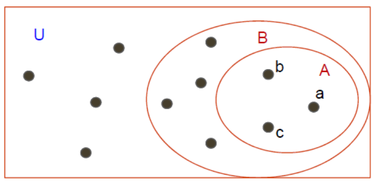
Un insieme può essere rappresentato visivamente usando i ***diagrammi di Venn***.

$V = \{a, b, c\}$

3.3 SOTTOINSIEMI

Un insieme A è detto un ***sottoinsieme*** di un insieme B se e solo se ogni elemento di A è anche un elemento di B.
Usiamo ***A ⊆ B*** per indicare che A è un sottoinsieme di B.

Un ***modo alternativo*** per dire che ***A⊆B è*** $\forall x\ (x\in A) \rightarrow (x\in B)$



PROPRIETÀ DEI SOTTOINSIEMI:

Teorema. *$\emptyset \subseteq S$ cioè l'insieme vuoto è sottoinsieme di qualunque insieme.*

Dim:

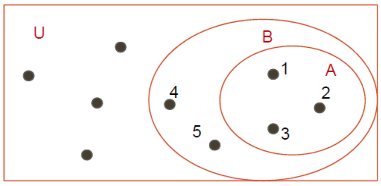
Dobbiamo far vedere che $\forall x\ (x\in\emptyset) \rightarrow (x\in S)$
Poiché $\emptyset$ non contiene alcun elemento allora $x\in\emptyset$ è sempre ***falsa***
Ma una implicazione → è sempre ***vera*** se l'ipotesi è ***falsa***, quindi $\forall x\ (x\in\emptyset) \rightarrow (x\in S)$ è ***vera***

3.3.1 SOTTOINSIEMI PROPRI

Un insieme A è detto un ***sottoinsieme proprio*** di un insieme B se e solo se ***A⊆B* e *A ≠B***.
Usiamo ***A⊂B*** per indicare che A è un sottoinsieme proprio di B.

<u>*Esempio*</u>:

A={1,2,3} B ={1,2,3,4,5}
A⊂B? SI



3.4 CARDINALITÀ

Sia S un insieme e sia n un intero non negativo. Se ci sono esattamente n distinti elementi in S, diciamo che n è la ***cardinalità*** di S.
La cardinalità di S è denotata con ***|S|***.

<u>*Esempio*</u>:

- A={1,2,3} → |A| = 3
- B ={1,2,3,…., 20} → |B| = 20
- |∅| = 0

Un insieme ***infinito*** è un insieme non finito.

<u>*Esempio*</u>:

- L'insieme dei numeri naturali è infinito: N={0, 1, 2, …} (***N è numerabile***)
- L'insieme dei numeri reali R è infinito (***R non è numerabile***)

3.5 INSIEME POTENZA

Dato un insieme S, l'***insieme potenza*** di S è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S.
L'insieme potenza di S è denotato con ***P(S)***.

Osservazione: Se S è un insieme con |S|=n allora |P(S)| = 2^n.

<u>*Esempi*</u>:

- Consideriamo l'insieme vuoto, **∅**
- Quale è l'insieme potenza di ∅? P(∅) = {∅}
- Quale è la cardinalità di P(∅)? |P(∅)| = 1

- Consideriamo l'insieme **{1}**
- Quale è l'insieme potenza di {1} ? P({1}) = {∅, {1}}
- Quale è la cardinalità di P({1}) ? |P({1})| = 2

- Consideriamo l'insieme **{1,2}**
- Quale è l'insieme potenza di {1,2} ? P({1,2}) = { ∅, {1}, {2}, {1,2}}
- Quale è la cardinalità di P({1,2}) ? |P({1,2})| = 4

- Consideriamo l'insieme **{1,2,3}**
- Quale è l'insieme potenza di {1,2,3}? P({1,2,3}) = { , {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}}
- Quale è la cardinalità di P({1,2,3})? |P({1,2,3})| = 8

3.6 N-PLE (ENNUPLE)

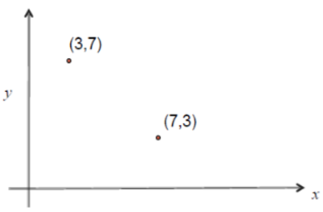
Un insieme è usato per rappresentare una collezione non ordinata di oggetti.
Una ***n-pla*** è usata per rappresentare una ***collezione ordinata*** di oggetti.

Una ***n-pla*** *ordinata* (x_1, x_2, …, x_n) è una collezione ordinata che ha x_1 come primo elemento, x_2 come secondo elemento, …, x_n come n-simo elemento, con ***n ≥ 2***.

Nota: In una n-pla l'ordine della collezione è importante.

<u>*Esempio*</u>:

Coordinate di un punto nel piano:



3.7 PRODOTTO CARTESIANO

Siano S e T due insiemi. Il ***prodotto cartesiano di S e T*** denotato con ***S x T***, è l'insieme di tutte le coppie ordinate (s,t) dove s∈S e t∈T.
Quindi, S x T = { (s,t) | s∈S e t∈T}.

<u>*Esempio*</u>:

S = {1,2} and T = {a,b,c}
S x T = { (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c) }
T x S = { (a,1), (a, 2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2) }

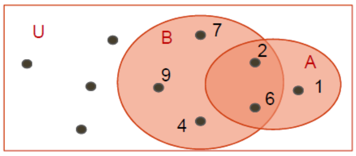
Nota: S x T ≠ T x S

Nota: La cardinalità di S x T è |S x T| = |S| * |T|

3.8 OPERAZIONI SUGLI INSIEMI

3.8.1 UNIONE

Siano A e B due insiemi. L'***unione*** di A e B, denotata con ***A ∪ B***, è l'insieme che contiene gli elementi in A o quelli in B.
Quindi ***A∪B = { x | x∈A ∨ x∈B }.***



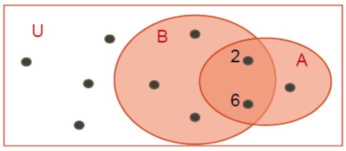
Esempio:

A = {1,2,6}   B = { 2,4,6,7,9}

A ∪ B = { 1,2,4,6,7,9 }

3.8.2 INTERSEZIONE

Siano A e B due insiemi. L'***intersezione*** di A e B, denotata con ***A ∩ B***, è l'insieme che contiene gli elementi in A e quelli in B.
Quindi ***A ∩ B = { x | x∈A ∧ x∈B }.***

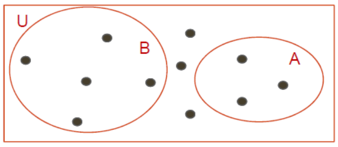


Esempio:

A = {1,2,6}   B = { 2,4,6,7,9}

A ∩ B = {2,6}

Due insiemi, si dicono ***disgiunti*** se la loro intersezione è vuota, cioè ***A ∩ B = ∅.***



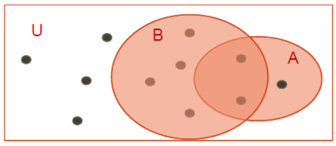
Esempio:

A = {1,2,6}   B = { 0,5,3,8}

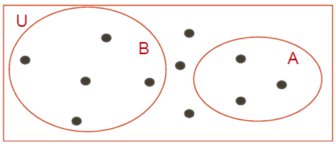
A ∩ B = ∅

Cardinalità dell'insieme unione:

La cardinalità dell'insieme unione è ***|A ∪ B| = |A| + |B| − |A ∩ B|.***
Se si considera |A| + |B| allora si conta |A ∩ B| due volte.
Vale il ***Principio di inclusione ed esclusione.***

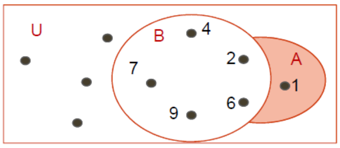


Se A e B sono disgiunti allora la cardinalità dell'insieme unione è ***|A ∪ B| = |A| + |B|.***



3.8.3 DIFFERENZA

Siano A e B due insiemi. La ***differenza*** tra A e B, denotata con ***A − B***, è l'insieme che contiene quegli elementi che sono in A ma non sono in B.
Quindi ***A − B = { x | x∈A ∧ x∉B }.***



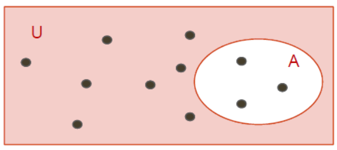
Esempio:

A = {1,2,6}   B = { 2,4,6,7,9}

A − B = { 1 }

3.8.4 COMPLEMENTO

Sia U insieme universale ed A un insieme. Il ***complemento di A***, denotato con ***$\overline{A}$***, è l'insieme di tutti gli elementi di U che non appartengono ad A.
Quindi ***$\overline{A}$ = { x | x∈U ∧ x∉A }.***



Esempio:

U={1,2,3,4,5,6,7,8} A ={1,3,5,7}

$\overline{A}$ = {2,4,6,8}

Esempio:

A = { 2n | n N }

$\overline{A}$ = { 2n+1 | n N } = insieme dei numeri dispari

3.8.5 OPERAZIONI ED IDENTITÀ

A = B   ∀x (x ∈ A) ↔ (x ∈ B)

A ⊆ B   ∀x (x ∈ A) → (x ∈ B)

A ∪ B = { x | x ∈ A ∨ x ∈ B }

A ∩ B = { x | x ∈ A ∧ x ∈ B }

A − B = { x | x ∈ A ∧ x ∉ B }

$\overline{A}$ = { x | x ∈ U ∧ x ∉ A }

Identità
- A ∪ ∅ = A
- A ∩ U = A

Dominazione
- A ∪ U = U
- A ∩ ∅ = ∅

Idempotenza
- A ∪ A = A
- A ∩ A = A

Doppio complemento
- $\overline{\overline{A}}$ = A

Commutativa
- A ∪ B = B ∪ A
- A ∩ B = B ∩ A

Associativa
- (A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C)
- (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)

Distributiva
- A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)
- A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)

De Morgan
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Leggi dell'assorbimento
- A ∪ (A ∩ B) = A
- A ∩ (A ∪ B) = A

Leggi del complemento
- A ∪ $\overline{A}$ = U
- A ∩ $\overline{A}$ = ∅

Le identità tra insiemi possono essere provate utilizzando le ***tavole di appartenenza***.

- Elencare gli insiemi che costituiscono l'identità.
- Elencare le diverse combinazioni di appartenenza degli elementi agli insiemi.
- Assegna 1 se un elemento appartiene all'insieme, 0 altrimenti.

Altrimenti possono essere utilizzate le ***equivalenze logiche***.

Provare che $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1

$\overline{A \cap B} = \{ x \mid x \notin A \cap B \}$ def di complemento

$= \{ x \mid \neg(x \in A \cap B) \}$ def di non appartenenza

$= \{ x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B) \}$ def di intersezione

$= \{ x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \}$ da Legge di DeMorgan

$= \{ x \mid x \notin A \vee x \notin B \}$ def di non appartenenza

$= \{ x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \}$ def di complemento

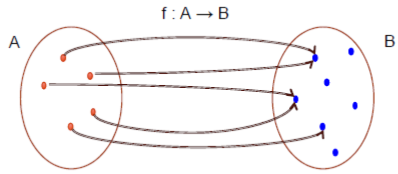
$= \{ x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B} \}$ def di unione

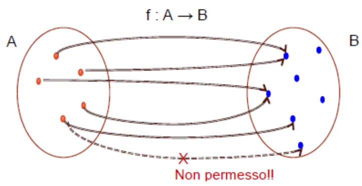
$= \overline{A} \cup \overline{B}$

3.9 FUNZIONI

Una ***funzione*** mette in relazione oggetti appartenenti ad un insieme con oggetti appartenenti ad un altro insieme (non necessariamente diverso dal primo).

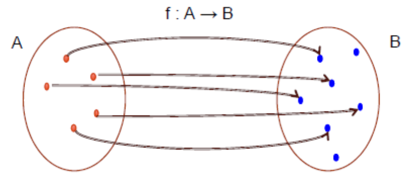
Siano A e B due insiemi. Una ***funzione*** da A in B, denotata f : A → B , associa ciascun elemento di A ad esattamente un elemento di B.





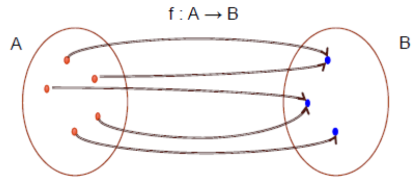
3.9.1 FUNZIONE INIETTIVA

Una funzione è detta ***iniettiva*** se e solo se ***f(x) = f(y) => x =y*** per ogni x ed y nel dominio di f.
Alternativamente, ***x ≠ y => f(x) ≠ f(y).***



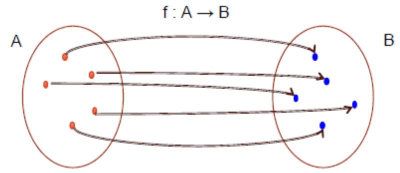
3.9.2 FUNZIONE SURIETTIVA

Una funzione da A a B è detta ***suriettiva*** se e solo se ∀*b*∈B ∃*a*∈A tale che ***f(a) = b.***
Alternativamente, ***f(A)=B***.



3.9.3 FUNZIONE BIETTIVA

Una funzione è detta ***biettiva*** se è sia ***iniettiva*** che ***suriettiva***.



3.9.4 CARDINALITÀ

Sia S un insieme e sia n un intero non negativo. Se ci sono esattamente n distinti elementi in S, diciamo che n è la ***cardinalità*** di S.
La cardinalità di S è denotata con ***|S|.***

Definizione alternativa di cardinalità di un insieme:

Due insiemi A e B hanno la *stessa* ***cardinalità*** se esiste una corrispondenza uno-a-uno tra gli elementi di A e quelli di B.
Alternativamente se esiste una ***biezione*** tra A e B

Esempio:

A={a,b,c} B={α,β,γ}

Consideriamo la funzione f definita come:

- a → α
- b → β
- c → γ

f definisce una biezione, quindi A e B hanno la stessa cardinalità, cioè |A| = |B| = 3.

3.10 INSIEMI NUMERABILI

Un insieme che è ***finito*** o ha la ***stessa cardinalità di*** $\boldsymbol{Z^+}$ è detto ***numerabile***.
Cioè i suoi elementi possono essere enumerati.

Dimostrazione:

A={0,2,4,6, ...} cioè A è l'insieme dei numeri pari. Dimostriamo che *A è numerabile*:

Dalla definizione dovremmo far vedere che c'è una funzione ***biettiva*** f: $Z^+ \rightarrow A$. Ricordiamo che $Z^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Definiamo la funzione f: $x \in Z^+ \rightarrow 2x-2 \in A$

- $1 \rightarrow 2*1-2 = 0$
- $2 \rightarrow 2*2-2 = 2$
- $3 \rightarrow 2*3-2 = 4$ ...

f è ***iniettiva*** perché: $f(x) = f(y)$ => $2x-2 = 2y-2$ => $x=y$

f è ***suriettiva*** perché: $\forall a \in A\ \exists x \in Z^+\ a = 2x-2$ => $(a+2)/2$ è un intero positivo

Perciò $|A| = |Z^+|$

Teorema: L'insieme degli interi Z è numerabile

Dimostrazione:

Dalla definizione dovremmo far vedere che c'è una funzione biettiva f: $Z^+ \rightarrow Z$. Ricordiamo che $Z^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Definiamo la funzione:

$$f: x \in \mathbf{Z}^+ \rightarrow \begin{cases} x/2 & \text{se x è pari} \\ -(x-1)/2 & \text{se x è dispari} \end{cases}$$

f è ***iniettiva*** perché:

$f(x) = f(y) \Rightarrow x/2 = y/2 \Rightarrow x=y$ (se x e y sono ***pari***)

$f(x) = f(y) \Rightarrow -(x-1)/2 = -(y-1)/2 \Rightarrow x=y$ (se x e y sono ***dispari***)

f è ***suriettiva*** perché:

$\forall z \in Z$ 2z è un intero pari positivo se z=***positivo***

$-2z+1$ è un intero dispari positivo se z=***negativo***

Perciò $|Z| = |Z^+|$

Teorema: I numeri razionali positivi sono numerabili

Dimostrazione:

Vedremo che è possibile formare una sequenza con tutti i p/q

Disponiamo p/q per riga,

- nella 1a riga i p/q con q=1
- nella 2a i p/q con q= 2, etc.

Notate che tutti i p/q lungo la medesima "diagonale" hanno p+q dello stesso valore.

Mettiamo in una lista i p/q

- prima i p/q con p+q=2 (cioè il solo 1/1)
- poi i p/q con p+q=3 (cioè 1/2 e 2/1)
- etc.

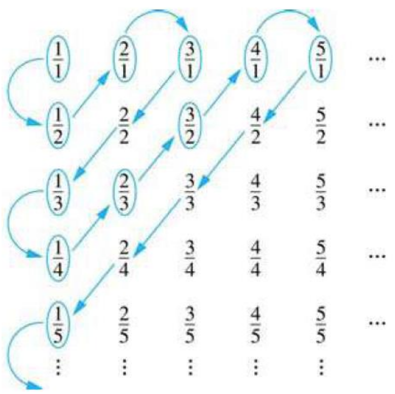
Ogni volta che si incontra un p/q già incontrato non lo si inserisce

- (per esempio 2/2=1/1, 2/4=1/2, …)

Siccome

- ogni numero razionale è stato inserito esattamente una volta nella lista
- gli elementi di una lista possono essere contati

=> I numeri razionali positivi sono numerabili



Teorema: L'insieme dei numeri reali R non è numerabile