8. RELAZIONI DI RICORRENZA

Una ***definizione ricorsiva di una sequenza*** è uguale ad una ***relazione di ricorrenza***.

> Data una sequenza $a_0, a_1, \dots, a_n$, una ***relazione di ricorrenza*** esprime a_n in termini di uno o più dei termini precedenti della sequenza, cioè di $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, per tutti gli interi non negativi $n \geq 0$.

Affinché la relazione di ricorrenza definisca univocamente la sequenza devono essere definite le ***condizioni iniziali***.

Esempio:

Consideriamo la sequenza geometrica: $b, br, br_2, br_3, \dots, br_n, \dots$

Definizione ricorsiva della sequenza

$a_n = a_{n-1}\, r \qquad n \geq 1$ (relazione di ricorrenza)

$a_0 = b$ (condizione iniziale)

Nelle lezioni precedenti abbiamo visto come dare una definizione ricorsiva alle sequenze. Ora ci poniamo il problema inverso:
Data una relazione di ricorrenza, unitamente alle condizioni iniziali, l'obiettivo è di ***risolvere la relazione di ricorrenza*** cioè trovare una ***formula chiusa*** per l'n-simo termine della sequenza (formula esplicita in n che non dipende più dai termini precedenti).

Esempio: Data la relazione di ricorrenza e la sua condizione iniziale

$a_n = a_{n-1}\, r$ (relazione di ricorrenza)

$a_0 = b$ (condizione iniziale)

La sua soluzione è: $a_n = br^n$

> D'ora in avanti useremo T(n) per indicare l'n-simo termine a_n della sequenza

In informatica, l'interesse per le soluzioni delle relazioni di ricorrenza risiede nel fatto che esse nascono dall'analisi di algoritmi ricorsivi.
Gli algoritmi ricorsivi hanno un passo base e un passo ricorsivo.

Esempio: calcolo del fattoriale

```
procedure fattoriale(n)
if n=1 then return 1
      else return n• fattoriale(n−1)
```

La complessità asintotica di un algoritmo ricorsivo si esprime attraverso una relazione di ricorrenza.

Esempio: complessità asintotica della procedure fattoriale(n) può essere descritta dalla relazione di ricorrenza

$T(n) = T(n-1) + b$

$T(1) = a$

dove a = costo per effettuare *return* 1
b = costo per effettuare il prodotto n• fattoriale(n−1)

8.1 METODI PER LA RISOLUZIONE DI RELAZIONI DI RICORRENZA

Esistono alcuni metodi utili per risolvere le equazioni di ricorrenza. Noi analizzeremo:

- **Metodo di sostituzione**
- **Metodo di iterazione**

Illustreremo tali metodi, utilizzandoli per determinare ***soluzioni esatte***, ***limiti superiori*** o ***limiti inferiori*** alle relazioni di ricorrenza

METODO DELLA SOSTITUZIONE:

Idea: "*indovinare*" una soluzione, e verificare che essa "funziona", il metodo consiste nei passi seguenti:

- si ipotizza una soluzione per l'equazione di ricorrenza data
- si usa l'induzione (matematica o forte) per provare che la soluzione dell'equazione di ricorrenza è effettivamente quella intuita

Esempio: $T(n) = T(n-1) + a$

$T(1) = b$

- ipotizziamo che la soluzione sia $T(n) \leq c\,n$ per una costante c opportuna (che deve essere ancora determinata),
- verifichiamolo con l'induzione

Base: $T(1) = b \leq c \cdot 1$ per ogni $c \geq b$

Ipotesi induttiva: supponiamo che $T(n-1) \leq c\,(n-1)$

Passo induttivo: $T(n) = T(n-1) + a \leq c\,(n-1) + a = c\,n + (a-c)$

ma $c\,n + (a-c) \leq c\,n$ per $a - c \leq 0$

quindi $T(n) \leq c\,n$ per $c \geq a$ e $c \geq b$

abbiamo determinato un limite superiore per T(n):
$T(n) \leq c\,n$ per $c \geq a$ e $c \geq b$

Possiamo però volere anche un limite inferiore per T(n).

- ipotizziamo che $T(n) \geq h\,n$ una costante h opportuna (che deve essere ancora determinata),
- verifichiamolo con l'induzione

Base: $T(1) = b \geq h \cdot 1$ per ogni $h \leq b$

Ipotesi induttiva: supponiamo che $T(n-1) \geq h\,(n-1)$

Passo induttivo: $T(n) = T(n-1) + a \geq h\,(n-1) + a = h\,n - h + a$

ma $h\,n + (a-h) \geq h\,n$ per $a - h \geq 0$

quindi $T(n) \geq h\,n$ per $h \leq a$ e $h \leq b$

abbiamo determinato un limite inferiore per T(n):
$T(n) \geq h\,n$ per $h \leq a$ e $h \leq b$

Possiamo però essere più precisi.

- ipotizziamo che la soluzione sia $T(n) = a\,(n-1) + b$,
- verifichiamolo con l'induzione

Base: $T(1) = b = a \cdot 0 + b$

Ipotesi induttiva: supponiamo che $T(n-1) = a\,(n-2) + b$

Passo induttivo: $T(n) = T(n-1) + a = (a\,(n-2) + b) + a = a\,(n-1) + b$

quindi $T(n) = a\,(n-1) + b$

Esempio: $n=2^k$ $T(n) = n + T(n/2)$

$T(1)=1$

- ipotizziamo che la soluzione sia $T(n) \le c\,n$ per una costante c opportuna,
- verifichiamo con l'induzione

Base: $T(1)=1 \le c \cdot 1$ per ogni $c \ge 1$

Ipotesi induttiva: supponiamo che $T(n/2) \le c\,(n/2)$

Passo induttivo: $T(n) = n + T(n/2) \le n + c\,(n/2) = (c/2+1)\,n$

ma $(c/2+1)\,n \le c\,n$ per $c \ge 2$

quindi $T(n) \le c\,n$ per $c \ge 2$

Esempio: $n=2^k$ $T(n) = 1 + T(n/2)$

$T(2)=1$

- ipotizziamo che la soluzione sia $T(n) \le c \log_2 n$ per una costante c opportuna,
- verifichiamo con l'induzione

Base: $T(2)=1 \le c \cdot 1 = c \log_2 2$ per ogni $c \ge 1$

Ipotesi induttiva: supponiamo che $T(n/2) \le c \log_2(n/2)$

Passo induttivo: $T(n) = 1 + T(n/2) \le 1 + c \log_2(n/2)$

$= 1 + c\,(\log_2 n - 1)$

$= 1 - c + c \log_2 n$

ma $1 - c + c \log_2 n \le c \log_2 n$ per $c \ge 1$

quindi $T(n) \le c \log_2 n$ per $c \ge 1$

Esempio: $n=2^k$ $T(n) = 1 + T(n/2)$

$T(1)=1$

- ipotizziamo che la soluzione sia $T(n) \le c\,(\log_2 n + 1)$ per una costante c opportuna,
- verifichiamo con l'induzione

Base: $T(1)=1 \le c \cdot 1 = c\,(\log_2 1 + 1)$ per ogni $c \ge 1$

Ipotesi induttiva: supponiamo che $T(n/2) \le c\,(\log_2(n/2) + 1)$

Passo induttivo: $T(n) = 1 + T(n/2) \le 1 + c\,(\log_2(n/2) + 1)$

$= 1 + c\,(\log_2 n - 1 + 1)$

$= 1 + c \log_2 n$

ma $1 + c \log_2 n \le c\,(\log_2 n + 1)$ per $c \ge 1$

quindi $T(n) \le c\,(\log_2 n + 1)$ per $c \ge 1$

Esempio: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n^2$

$T(1) = 1$

- ipotizziamo che la soluzione sia $T(n) \le c\,n^2$ per una costante c opportuna,
- verifichiamo con l'induzione

Base: $T(1)=1 \le c \cdot 1$ per ogni $c \ge 1$

Ipotesi induttiva: supponiamo che $T(n/2) \le c\,(n/2)^2$

$T(2n/3) \le c\,(2n/3)^2$

Passo induttivo: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n^2$

$\le c\,(\lfloor n/2 \rfloor)^2 + c\,(\lfloor 2n/3 \rfloor)^2 + n^2$

$< c\,(n/2)^2 + c\,(2n/3)^2 + n^2$

$= n^2\,(c/4 + 4c/9 + 1)$

ma $n^2\,(c/4 + 4c/9 + 1) \le c\,n^2$ per $c \ge c/4 + 4c/9 + 1$

quindi $T(n) \le c\,n^2$ per $c \ge 11/36$

METODO DI ITERAZIONE:

Idea: "*srotolare*" l'equazione di ricorrenza ed esprimerla come somma di termini dipendenti da n e dalla condizione iniziale.

Esempio: $T(n) = T(n-1) + a$

$T(1) = b$

$T(n) = T(n-1) + a$ — ma $T(n-1) = T(n-2) + a$

$= T(n-2) + a + a$ — ma $T(n-2) = T(n-3) + a$

$= T(n-3) + a + a + a$

………

proseguendo in questo modo dopo k iterazioni avremo

$= T(n-k) + \underbrace{a + a + \dots + a}_{k}$

le iterazioni si fermano quando si arriva alla condizione iniziale $n-k=1$

………

$= T(1) + \underbrace{a + \dots + a}_{n-1}$ — $T(1) = b$

$= b + (n-1)a$

Esempio: Sia n pari $T(n) = 2\,T(n-2) + 3$

$T(0) = 1$

$T(n) = 2\,T(n-2) + 3$ — ma $T(n-2) = 2T(n-4) + 3$

$= 2\,(2\,T(n-4) + 3) + 3$

$= 2^2\,T(n-4) + 2 \cdot 3 + 3$ — ma $T(n-4) = 2T(n-6) + 3$

$= 2^2\,(2T(n-6) + 3) + 2 \cdot 3 + 3$

$= 2^3\,T(n-6) + 2^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3$

………

proseguendo in questo modo dopo k iterazioni avremo

$= 2^k\,T(n - 2 \cdot k) + 2^{k-1} \cdot 3 + 2^{k-2} \cdot 3 + \dots + 3$

………

le iterazioni si fermano quando si arriva alla condizione iniziale $n-2k=0 \Rightarrow k=n/2$

$= 2^{n/2}\,T(0) + 2^{n/2-1} \cdot 3 + 2^{n/2-2} \cdot 3 + \dots + 3$

$= 2^{n/2} + 3\,\Sigma_{i=0,\dots,n/2-1}\,2^i$

$= 2^{n/2} + 3\,(2^{n/2-1+1} - 1) = 4 \cdot 2^{n/2} - 3$

$\boxed{\text{Quindi } T(n) = 4 \cdot 2^{n/2} - 3}$

Esempio: Sia $n=2^k$ $T(n) = T(n/2) + 1$

$T(1) = 1$

$T(n) = T(n/2) + 1$ — ma $T(n/2) = T(n/2^2) + 1$

$= (T(n/2^2) + 1) + 1$

$= T(n/2^2) + 2$ — ma $T(n/2^2) = T(n/2^3) + 1$

$= (T(n/2^3) + 1) + 2$

$= T(n/2^3) + 3$

proseguendo in questo modo dopo k iterazioni avremo

………

$= T(n/2^k) + k$

$= T(1) + k$ — ma $T(1)=1$ e $k = \log_2 n$

$= 1 + k = \log_2 n + 1$

$\boxed{\text{Quindi } T(n) = \log_2 n + 1}$

Esempio: Sia $n=2^k$ $T(n) = 8\,T(n/2) + n$

$T(1) = 2$

$T(n) = 8\,T(n/2) + n$ ma $T(n/2) = 8T(n/2^2) + n/2$

$= 8\,(8T(n/2^2) + n/2\,) + n$

$= 8^2\,T(n/2^2) + 8 \cdot n/2 + n$

$= 8^2\,T(n/2^2) + 4 \cdot n + n$ ma $T(n/2^2) = 8T(n/2^3) + n/2^2$

$= 8^2\,(8T(n/2^3) + n/2^2) + 4 \cdot n + n$

$= 8^3\,T(n/2^3) + 8^2 \cdot n/2^2 + 4 \cdot n + n$

$= 8^3\,T(n/2^3) + 4^2 \cdot n + 4 \cdot n + n$

………

$T(n) = 8^3\,T(n/2^3) + 4^2 \cdot n + 4 \cdot n + n$

………

proseguendo in questo modo dopo k iterazioni avremo

$= 8^k\,T(n/2^k) + 4^{k-1} \cdot n + 4^{k-2} \cdot n + \ldots + n$

$= 8^k\,T(n/2^k) + n\,\Sigma_{i=0,\ldots,k-1}\,4^i$

$= 8^k\,T(n/2^k) + n\,(4^{k-1+1} - 1)/3$

$= 8^k\,T(n/2^k) + n\,(4^k - 1)/3$

$= (2^k)^3\,T(n/2^k) + n\,((2^k)^2 - 1)/3$ ma $T(1)=2$ e $n = 2^k$

$= n^3 \cdot T(1) + n\,(n^2 - 1)/3$

$= n^3 \cdot 2 + n\,(n^2 - 1)/3$

$= (7\,n^3 + n)/3$ Quindi $T(n) = (7\,n^3 + n)/3$

Esempio: $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ (sequenza di Fibonacci)

$T(2) = 1$

$T(1) = 1$

Risolvere questa relazione di ricorrenza con il metodo iterativo è molto complesso.

Proviamo però a limitarla

1. $T(n) = T(n-1) + T(n-2) \le 2\,T(n-1)$

e

2. $T(n) = T(n-1) + T(n-2) \ge 2\,T(n-2)$

Applichiamo il metodo di iterazione alla 1.

cioè risolviamo

$T(n) \le 2\,T(n-1)$

$T(n) \le 2\,T(n-1)$

$\le 2 \cdot 2\,T(n-2)$

$\le 2 \cdot 2 \cdot 2T(n-3) = 2^3T(n-3)$

…..

$\le 2^kT(n-k)$ ci fermeremo quando $n-k=1 \Rightarrow k=n-1$

…..

$\le 2^{n-1}T(1) = 2^{n-1}$ Quindi $T(n) \le 2^{n-1}$

Applichiamo il metodo di iterazione alla 2.

cioè risolviamo

$T(n) \ge 2\,T(n-2)$

$T(n) \ge 2\,T(n-2)$

$\ge 2 \cdot 2\,T(n-2-2)$

$\ge 2 \cdot 2 \cdot 2\,T(n-2-2-2)$

$= 2^3\,T(n-3 \cdot 2)$ proseguendo in questo modo dopo k iterazioni avremo

…..

$\ge 2^k\,T(n-k \cdot 2)$ ci fermeremo quando $n-k \cdot 2=2 \Rightarrow k=(n-2)/2$

…..

$\ge 2^{(n-2)/2}\,T(2) = 2^{(n-2)/2}$ Quindi $T(n) \ge 2^{(n-2)/2}$

Esercizi Risolvere la seguente relazione di ricorrenza utilizzando il metodo iterativo

1. Sia n dispari,

   $T(n) = 2\,T(n-2) + 3$

   $T(1) = 1$

2. $T(n) = n + T(n-1)$

   $T(1) = 1$

3. Sia $n=3^k$

   $T(n) = 9\,T(n/3) + n$

   $T(1) = 1$