**LOGICA PROPOSIZIONALE**

|  |
| --- |
| Una ***proposizione*** è una frase che dichiara un fatto e che può essere ***vera*** o ***falsa***, ma non entrambe.  Una ***proposizione più complessa*** può essere costruita attraverso proposizioni elementari connesse attraverso ***connettivi logici***. |

***CONNETTIVI LOGICI:***

|  |  |
| --- | --- |
| **Negazione** | È la proposizione “non è vero che p”, ed ha valore opposto a p, denotata con ¬p |
| **Congiunzione** | È la proposizione “p e q”, denotata con p ∧ q |
| **Disgiunzione** | È la proposizione “p o q”, denotata con p V q |
| **Disgiunzione esclusiva** | È denotato con p ⊕ q |
| **Implicazione** | È la proposizione “p(*ipotesi*) implica q(*conclusione*)”, denotata con p 🡪 q  Può essere letta come: *se… allora…, …solo se…, …è sufficiente/necessario per…, …ogniqualvolta…* |
| **Inverso (Implicazione)** | Denotata con q 🡪 p |
| **Opposto (implicazione)** | Denotata con ¬p 🡪 ¬q |
| **Contronominale (implicazione)** | Denotata con ¬q 🡪 ¬p, ed ha gli stessi valori di p 🡪 q |
| **Bicondizione (equivalenza)** | È la proposizione “p se e solo se q”, denotata con p ↔ q, ed ha gli stessi valori di (p → q) ∧ (q → p)  Può essere letta come: *se… allora… e viceversa, …iff…, …è necessario e sufficiente per…* |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | ¬p | ¬q | p ∧ q | p V q | p ⊕ q | p🡪q | q🡪p | ¬p🡪¬q | ¬q🡪¬p | p↔q |
| T  T  F  F | T  F  T  F | F  F  T  T | F  T  F  T | T  F  F  F | T  T  T  F | F  T  T  F | T  F  T  T | T  T  F  T | T  T  F  T | T  F  T  T | T  F  F  T |

|  |  |
| --- | --- |
| **Tautologia** | È una proposizione composta che è ***sempre vera*** per tutti i possibili valori delle proposizioni elementari che la compongono |
| **Contraddizione** | È una proposizione composta che è ***sempre falsa*** per tutti i possibili valori delle proposizioni elementari che la compongono |
| **Contingenza** | È una proposizione composta che non è né una ***tautologia*** né una ***contraddizione*** |

***EQUIVALENZE LOGICHE***:

|  |
| --- |
| Le proposizioni p e q sono ***logicamente equivalenti*** se hanno gli stessi valori di verità, denotata con **p≡q.** |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **IDENTITÀ:**   * p ∧ T ≡ p * p ∨ F ≡ p   **DOMINAZIONE**:   * p ∨ T ≡ T * p ∧ F ≡ F   **IDEMPOTENZA:**   * p ∨ p ≡ p * p ∧ p ≡ p   **DOPPIA NEGAZIONE:**   * ¬(¬p) ≡ p | **COMMUTATIVA:**   * p ∧ q ≡ q ∧ p * p ∨ q ≡ q ∨ p   **ASSOCIATIVA:**   * (p ∨ q) ∨ r ≡ p ∨ (q ∨ r) * (p ∧ q) ∧ r ≡ p ∧ (q ∧ r)   **DISTRIBUTIVA:**   * p ∨ (q ∧ r) ≡ (p ∨ q) ∧ (p ∨ r) * p ∧ (q ∨ r) ≡ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r) | **ALTRE UTILI EQUIVALENZA:**   * p ∨ ¬p ≡ T * p ∧ ¬p ≡ F * p ⨁ q ≡ (p ∧ ¬q) ∨ (¬p ∧ q) * p → q ≡ (¬p ∨ q) * p **⟷** q ≡ (p → q) ∧ (q → p)  |  |  | | --- | --- | | **operatore** | **precedenza** | | ¬  ∧  ∨  🡪  ⟷ | 1  2  3  4  5 | |

**LOGICA PREDICATIVA**

|  |
| --- |
| Rimedia alle limitazioni della ***logica proposizionale***, ovvero modella in modo esplicito gli ***oggetti*** e le loro ***proprietà*** (chiamati ***predicati***) e permette di costruire asserzioni con ***costanti*** (specifico oggetto), ***variabili*** (oggetto di un certo tipo) e ***quantificatori*** (proprietà di un oggetto). |

***PREDICATI***:

|  |
| --- |
| Un predicato ***P(x)*** assume un valore ***T*** o ***F*** ***in dipendenza*** dal fatto che la ***proprietà P*** vale o meno per ***x*** (***oggetto*** preso dall’***universo del discorso***).  La ***quantificazione*** converte una ***funzione proposizionale*** (***predicato P(x)***) in una ***proposizione*** poiché fissa un valore ben definito per la variabile.  **NOTA**: ***P(x) NON è una proposizione*** perché può essere applicata a più oggetti ed assumere valori diversi.  **NOTA**: **Importante *definire esattamente il dominio* (universo del discorso)** |

|  |  |
| --- | --- |
| **LOGICA PROPOSIZIONALE** | **LOGICA PREDICATIVA** |
| Utilizza asserzioni che descrivono proprietà di oggetti ben definiti (***proposizioni***) | Consente di utilizzare asserzioni valide per più oggetti (***predicati***)  Permette di quantificare le asserzioni, consente di fare asserzioni riguardanti gruppi di oggetti (***quantificatori***) |

***QUANTIFICATORI***:

|  |  |
| --- | --- |
| **Universale** | P(x) è vera per tutti i valori di x nel dominio (***universo del discorso***), denotata con **∀x P(x)**, esse sono legate alle ***implicazioni***.  Per provare che ∀x P(x) è falsa, basta trovare un ***controesempio***, ovvero *c’è una x per il quale P(x) è falsa*.  Se si suppone che gli elementi possano essere enumerati, allora **∀x P(x) è vera se P(x1) ∧ P(x2) ∧… ∧ P(xn) è vera**.  La ***negazione*** di ∀x P(x) è: ¬∀x P(x) ≡ ∃x ¬P(x). |
| **Esistenziale** | P(x) è vera se esiste un elemento x del dominio che soddisfa la proprietà, denotata con **∃x P(x)**, sono legate alle ***congiunzioni***.  Se si suppone che gli elementi possano essere enumerati, allora **∃x P(x) è vera se P(x1) V P(x2) V… V P(xn) è vera**.  Per provare che ∃x P(x) è falsa si deve provare che *P(x) è falsa per tutte le x*.  La ***negazione*** di ∃x P(x) è: ¬∃x P(x) ≡ ∀x ¬P(x). |

**INSIEMISTICA**

|  |
| --- |
| Un ***insieme*** è una ***collezione non ordinata di oggetti (elementi*** dell’insieme***)***.  Numeri naturali: 🡪 N = {0,1,2,3, …}  Interi: 🡪 Z = {…, −2,−1,0,1,2, …}  Interi positivi: 🡪 Z+ = {1,2, 3, …}  Numeri razionali: 🡪 Q = {p/q | p∈Z, q∈Z, q≠0}  Numeri reali: 🡪 R  Insieme universale 🡪 U  Insieme Vuoto 🡪 ∅ |

|  |  |
| --- | --- |
| **Uguaglianza** | Due insiemi sono uguali se e solo se sono costituiti dagli stessi elementi, **A = B è ∀x (x∈A) ↔ (x∈B)**. |
| **Sottoinsieme** | A è sottoinsieme di B se e solo se ogni elemento di A è anche un elemento di B, **A ⊆ B è ∀x (x∈A) 🡪 (x∈B)**.  **Nota**: ∅ è sottoinsieme di qualsiasi elemento. |
| **Sottoinsieme proprio** | A è sottoinsieme proprio di B se e solo se A ⊆ B e A ≠ B. |
| **Cardinalità** | Se ci sono esattamente n distinti elementi di S, diciamo che n è la cardinalità di S, denotata con |S|. |
| **Insieme potenza** | È l’insieme di tutti i sottoinsiemi di S, denotata con P(S), se |S| = n allora |P(S)| = 2n. |
| **n-pla** | È una collezione ordinata che ha x1 come primo elemento, x2 come secondo, …, xn come n-simo elemento, con n≥2. |
| **Prodotto cartesiano** | È l’insieme di tutte le coppie ordinate (s,t) dove s∈S e t∈T, denotata con SxT.  **Nota**: SxT ≠ TxS e la cardinalità di SxT è |SxT|=|S|\*|T|. |

***OPERAZIONI SUGLI INSIEMI***:

|  |  |
| --- | --- |
| **Unione** | È l’insieme che contiene gli elementi in A o quelli in B, denotata con **A ∪ B = { x | x∈A ∨ x∈B }**. |
| **Intersezione** | È l’insieme che contiene gli elementi in A e quelli in B, denotata con **A ∩ B = { x | x∈A ∧ x∈B }**.  Due insiemi, si dicono ***disgiunti*** se la loro intersezione è vuota, cioè A ∩ B = ∅.  La cardinalità dell’insieme unione è |A ⋃ B| = |A| + |B| − |A ∩ B|, se la loro intersezione non è vuota. |
| **Differenza** | È l’insieme che contiene quegli elementi che sono in A ma non sono in B, denotata con **A − B = { x | x∈A ∧ x∉B }**. |
| **Complemento** | È l’insieme di tutti gli elementi di U che non appartengono ad A, denotata con **A = { x | x∈U ∧ x∉A }**. |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | **IDENTITÀ:**   * A U ∅ = A * A **∩** U = A   **DOMINAZIONE:**   * A U U = U * A **∩** ∅ = ∅   **IDEMPOTENZA**:   * A U A = A * A **∩** A = A   **DOPPIA NEGAZIONE**:   * A = A | **COMMUTATIVA:**   * A U B = B U A * A **∩** B = B **∩** A   **ASSOCIATIVA**:   * (A U B) U C = A U (B U C) * (A **∩** B) **∩** C = A **∩** (B **∩** C)   **DISTIBUTIVA**:   * A U (B **∩** C) = (A U B) ∩ (A U C) * A ∩ (B U C) = (A ∩ B) U (A ∩ C) | **DE MORGAN**:   * A U B = A ∩ B * A ∩ B = A U B   **LEGGE DELL’ASSORBIMENTO**:   * A U (A ∩ B) = A * A ∩ (A U B) = A   **LEGGE DEL COMPLEMENTO**:   * A U A = U * A ∩ A = ∅ | | |

***FUNZIONI*:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Iniettiva** | Una funzione è detta ***iniettiva*** se e solo se ***f(x) = f(y) => x =y*** per ogni x ed y nel dominio di f.  Alternativamente, ***x ≠ y => f(x) ≠ f(y).*** |
| **Surriettiva** | Una funzione da A a B è detta ***suriettiva*** se e solo se ∀b∈B ∃a∈A tale che ***f(a) = b***.  Alternativamente, ***f(A)=B.*** |
| **Biettiva** | Una funzione è detta ***biettiva*** se è sia ***iniettiva*** che ***suriettiva***. |

**DIMOSTRAZIONI**

|  |
| --- |
| Una ***dimostrazione*** è un ragionamento corretto che stabilisce la verità di un’asserzione matematica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Diretta** | p → q viene dimostrata mostrando che “se p è T allora q è T”. |
| **Contrapposizione** | p → q viene dimostrata mostrando che “se (¬q è T) allora (p è F)” / “se (¬q è T) allora (¬p è T)”.  **Nota**: ¬q → ¬p ≡ p → q ***contronominale.*** |
| **Contraddizione (assurdo)** | p → q viene dimostrata mostrando che “se [(p è T) e (¬q è T) ] allora F ”. |
| **Equivalenza** | p ⟷ q è dimostrata con (p → q) ∧ (q → p). |
| **Banale** | Se la conclusione q è sempre vera, allora p → q è banalmente vera. |
| **Vuota** | Se l’ipotesi p è sempre falsa allora p → q è banalmente vera. |
| **Analisi dei casi** | Vogliamo provare che (p1 ∨ p2 ∨ … ∨ pn) → q è equivalente a (p1 → q) ∧ (p2 → q) ∧ … ∧ (pn → q) |
| **Esaustiva** | Provati esaminando un numero relativamente piccolo di esempi. |
| **Con Qualificatori** | La ***dimostrazione esistenziale* ∃*x P(x)*** può essere provata in due modi, ovvero trovando un esempio che mostri che l’asserzione vale, oppure se non si trova un esempio, dimostrarlo per assurdo con ∀x ¬P(x), arrivando all’assurdo.  La ***dimostrazione universale* ∀*x P(x)*** può essere provata che la proprietà vale per qualsiasi valore nel dominio, utilizzando l’analisi dei casi, oppure trovando un elemento per il quale la proprietà è falsa. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | 2.  3. |
|  | |  |
|  | |  |
|  | |  |
|  |  | |