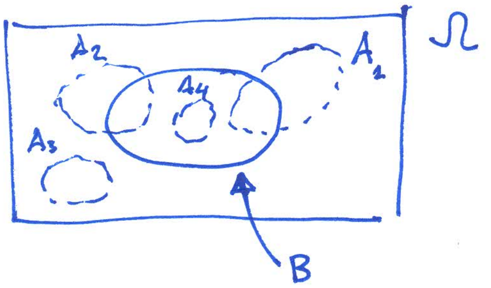
DEFINIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità. Siano $A, B \in \mathcal{A}$ con $P(B) \neq 0$. Allora si definisce "probabilità condizionata di A dato B" (oppure sapendo che si è verificato l'evento B) la seguente quantità:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

MOTIVAZIONE



Nel voler definire $P(A|B)$ è naturale considerare una quantità che dipende da $P(A\cap B)$ proporzionalmente, con una costante di proporzionalità che non dipende da A (e che dipenderà da B):

$$P(A|B) = c_B \cdot P(A\cap B)$$

Inoltre si vuole fare in modo che $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot|B))$ sia uno spazio di probabilità. Quindi per $A = \Omega$ si ha

$$\underbrace{P(\Omega|B)}_{=1} = c_B \underbrace{P(\Omega\cap B)}_{=P(B)} \Longrightarrow c_B = \frac{1}{P(B)} \Longrightarrow P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

COMMENTO

La costruzione fatta nella "motivazione" consente di trovare un valore per c_B solo se $P(B) \neq 0$; infatti, se fosse $P(B) = 0$, si avrebbe $1 = c_B \cdot 0$.

Quindi si riesce a dare significato alla probabilità condizionata per $P(B) \neq 0$ ma questa restrizione non è grave.

~~COMMENTO Se $P(B)$~~