Ora dobbiamo calcolare $\mathbb{E}[Y]$ e $Var[Y]$ quando $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Ricordiamo che $Y = \sigma X + \mu$ con $X \sim N(0,1)$. Teniamo conto di alcune proprietà di $\mathbb{E}[\cdot]$ e $Var[\cdot]$. Si ha:

linearità

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sigma X + \mu] = \sigma \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=0} + \mu = \mu$$

calcolato prima

e

$$Var[Y] = Var[\sigma X + \mu] = Var[\sigma X] = \sigma^2 \underbrace{Var[X]}_{=1} = \sigma^2$$

calcolato prima

proprietà della varianza viste in passato

CORREZIONE DOPO LEZIONE Y AL POSTO DI X

ESERCIZIO / ESEMPIO 3

CORREZIONI DOPO LEZIONE
r al posto di h

$X \sim U(a,b)$ per $0<a<b$

Sia $Y = X^r$ per $r>0$.

Allora $\mathbb{E}[Y] = \int_a^b x^r \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^r\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_{x=a}^{x=b} = \boxed{\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)(r+1)}}$

Non ci serve conoscere f_Y. Comunque si ha $P(a^r \le Y \le b^r) = 1$, $y^{1/r} \in (a,b)$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \le a^r \\ (*) & \text{per } a^r < y < b^r \\ 1 & \text{per } y \ge b^r \end{cases}$$

$$(*) = P(X^r \le y) = P(X \le y^{1/r}) = \int_a^{y^{1/r}} \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_{x=a}^{x=y^{1/r}} = \frac{y^{1/r}-a}{b-a}$$

da cui segue

$f_Y(y) = \frac{1}{r}\,\frac{y^{\frac{1}{r}-1}}{b-a}\,1_{(a^r,b^r)}(y)$, e quindi $\mathbb{E}[Y] = \int_{a^r}^{b^r} y\,\frac{1}{r}\,\frac{y^{\frac{1}{r}-1}}{b-a}\,dy = \frac{1}{r(b-a)}\int_{a^r}^{b^r} y^{\frac{1}{r}}\,dr =$

$$= \frac{1}{r(b-a)}\left[\frac{y^{\frac{1}{r}+1}}{\frac{1}{r}+1}\right]_{y=a^r}^{y=b^r} = \frac{(b^r)^{\frac{1}{r}+1}-(a^r)^{\frac{1}{r}+1}}{r(b-a)\left(\frac{1}{r}+1\right)} = \boxed{\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)(r+1)}}.$$