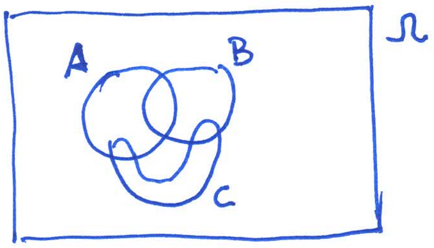
COMMENTI

→ La misura di probabilità $P: \mathcal{A} \to [0,\infty)$ in realtà assume valori in $[0,1]$; questo sarà chiaro successivamente.

→ La richiesta $A_m \cap A_n = \emptyset$ per $m \neq n$, cioè "insiemi disgiunti a due a due", è più forte della condizione $\bigcap_{n\geq 1} A_n = \emptyset$. Per fissare le idee consideriamo una famiglia di 3 insiemi A, B, C; allora in questo caso



$A\cap B \neq \emptyset$

$A\cap C \neq \emptyset$

$B\cap C \neq \emptyset$

$A\cap B\cap C = \emptyset$.

CONSEGUENZE DELLA DEFINIZIONE DI MISURA DI PROBABILITÀ

1) $P(\emptyset)=0$

Infatti, se consideriamo $A_n=\emptyset$ $\forall n\geq 1$, si ha $A_m \cap A_n = \emptyset$ per $m\neq n$ (anche per $m=n$) da cui segue

$$\begin{cases} P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n\geq 1} \emptyset\right) = P(\emptyset) \\ \sum_{n\geq 1} P(A_n) = \sum_{n\geq 1} P(\emptyset) \end{cases} \Rightarrow P(\emptyset) = \sum_{n\geq 1} P(\emptyset)$$

Questa condizione non può essere vera se $P(\emptyset)>0$; infatti il 2° membro sarebbe infinito (e il 1° membro è finito). Quindi si deve avere $P(\emptyset)=0$ e l'uguaglianza vale come $0=0$.

~~2) Sia $m\geq 1$ (finito) e $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}$ con $B_m \cap B_n = \emptyset$ per $m \neq n$. Allora $P\left(\bigcup_{n=1}^{m} B_n\right) = \sum_{n=1}^{m} P(B_n)$. Infatti basta~~