PROPOSIZIONE

Siano $A, B \in \mathcal{A}$ con $P(B) \neq 0$. Allora

A e B sono indipendenti $\iff P(A|B) = P(A)$.

DIMOSTRAZIONE

Si ha

si divide per $P(B)$

A e B indipendenti $\overset{\text{def.}}{\iff} P(A \cap B) = P(A)P(B) \iff \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}}$

$\iff P(A|B) = P(A)$. $\square$

def. di prob. condizionata.

Per quanto osservato prima sulla simmetria tra A e B nella definizione di indipendenza, si ha anche la seguente proposizione che si dimostra in maniera analoga.

PROPOSIZIONE

Siano $A, B \in \mathcal{A}$ con $P(A) \neq 0$. Allora

A e B sono indipendenti $\iff P(B|A) = P(B)$.

CONSEGUENZE

1) Se un evento ha probabilità zero, allora è indipendente da qualunque altro. Infatti, se ~~prendiamo~~ prendiamo $A, B \in \mathcal{A}$ con $P(A) = 0$, si ha

$$\begin{cases} \underset{\text{ovvio}}{0 \leq} P(A \cap B) \underset{A \cap B \subset A}{\leq} P(A) = 0 \implies P(A \cap B) = 0 \\ P(A)P(B) = 0 \cdot P(B) = 0 \end{cases}$$

e quindi $\underbrace{P(A \cap B)}_{=0} = \underbrace{P(A)P(B)}_{=0}$