

2) Supponiamo che A e B siano indipendenti.

Allora, se uno dei due eventi, o entrambi, vengono complementati, allora abbiamo ancora eventi indipendenti:

A^c, B sono indipendenti

A, B^c sono indipendenti

A^c, B^c sono indipendenti.

~~Infatti supponiamo~~ Iniziamo verificando la ^{relazione} prima.

• Si ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ per ipotesi.

Allora

$$\begin{aligned} \boxed{P(A^c \cap B)} &= P(B) - P(A \cap B) \stackrel{\text{ipotesi}}{=} P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(B) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= P(B)P(A^c) \\ &= \boxed{P(A^c)P(B)} \end{aligned}$$

• L'uguaglianza $P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$

si dimostra in maniera analoga (del resto dato che si può scambiare il ruolo di A e B per simmetria nella definizione, quel che accade solo il primo evento vale anche complementando il secondo evento).

• Infine

A e B sono indipendenti $\Leftrightarrow A$ e B^c sono indipendenti

$\Rightarrow A^c$ e B^c sono indipendenti.

3) Mettendo insieme 1) e 2) si ha che

Se un evento ha probabilità 1, allora è indipendente da qualunque altro. Del resto abbiamo già visto in passato

che $\boxed{P(B) = 1 \Rightarrow P(A|B) = P(A)}$.