ESERCIZIO

Siano X_1 e X_2 due v.a. Normali standard indipendenti.

Calcolare $P(X_1-X_2 \geq 0)$ e $P(X_1-X_2 > \frac{1}{2})$.

SVOLGIMENTO

Si ha che $X_1 - X_2 \sim N(\underbrace{1\cdot 0 + (-1)\cdot 0}_{=0-0=0}, \underbrace{1^2\cdot 1 + (-1)^2\cdot 1}_{=1+1=2})$.

Allora

$$P(X_1-X_2>0) = P\left((X_1-X_2)^* > \frac{0-0}{\sqrt{2}}\right) = P\left((X_1-X_2)^* > 0\right) \overset{!}{=} \frac{1}{2}$$

$(X_1-X_2)^* \sim N(0,1)$

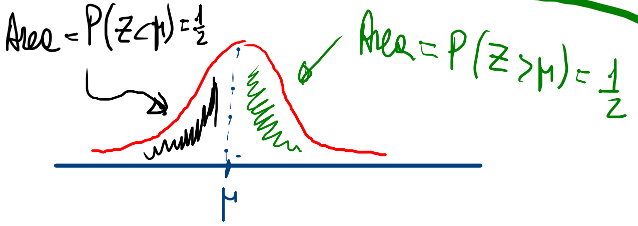
$$P(X_1-X_2>\tfrac{1}{2}) = P\left((X_1-X_2)^* > \frac{\frac{1}{2}-0}{\sqrt{2}}\right) = P\left((X_1-X_2)^* > \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 1-\Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

$(X_1-X_2)^* \sim N(0,1)$

OSS. Il risultato ottenuto nella risposta alla prima domanda è esatto (cioè non approssimato) e si poteva dedurre senza usare le Tavole.
Infatti, data $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, in generale (qualunque sia σ) si ha
$P(Z>\mu) = \frac{1}{2}$
(e anche $P(Z<\mu)=\frac{1}{2}$).
Nel nostro caso si ha
$Z = X_1 - X_2$ e $\mu = 0$.

AGGIUNTA DOPO LEZIONE:

Non c'è bisogno di considerare $Z^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$



Allora

$$P_Y(k) = P(k \le X < k+1) = \int_k^{k+1} f_X(x)\,dx =$$

$$= \begin{cases} \text{per } k=0,1,2,3 & \frac{8}{81}\int_k^{k+1} x\,dx = \frac{8}{81}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=k}^{x=k+1} = \frac{8}{81}\,\frac{(k+1)^2-k^2}{2} = \dots = \frac{8}{81}\,\frac{2k+1}{2} = \frac{4}{81}(2k+1) \\ \text{per } k=4 & \frac{8}{81}\int_4^{9/2} x\,dx = \frac{8}{81}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=4}^{x=9/2} = \frac{8}{81}\,\frac{\frac{81}{4}-16}{2} = \dots = \frac{81-64}{81} = \frac{17}{81} \\ \text{altrimenti} & 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4/81 & \text{per } k=0 \\ 12/81 & \text{per } k=1 \\ 20/81 & \text{per } k=2 \\ 28/81 & \text{per } k=3 \\ 17/81 & \text{per } k=4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

SOMMA = 1

OK

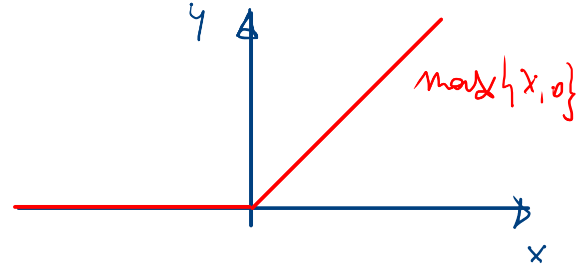
AGGIUNTA DOPO LEZIONE

ESERCIZIO (esempio di v.a. né discreta, né continua).

Sia $X \sim U(-1,1)$. Poi sia $Y = \max\{X, 0\}$ (quindi Y è la "parte positiva" di X).

Trovare la funzione di distribuzione di Y.

Grafico della parte positiva



RISPOSTA

Si ha $P(Y \geq 0) = 1$ e quindi $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ (*) & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$.

Poi si ha

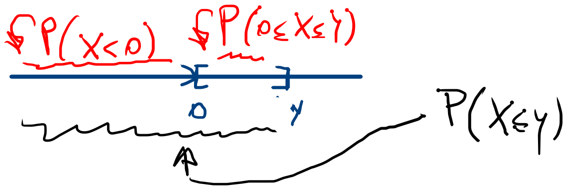
$\boxed{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \text{ con } A = \{Y \leq y\} \text{ e } B = \{X \geq 0\}}$

$$(*) = P(Y \leq y) = P(\{Y \leq y\} \cap \{X \geq 0\}) + P(\{Y \leq y\} \cap \{X < 0\}) =$$

$$= P(\{X \leq y\} \cap \{X \geq 0\}) + P(\underbrace{\{0 \leq y\}}_{= \Omega} \cap \{X < 0\}) =$$

perché si ha un evento deterministico sempre verificato

$$= P(0 \leq X \leq y) + P(X < 0) = P(X \leq y).$$



AGGIUNTA DOPO LEZIONE