ESERCIZIO

Un'urna ha 2 palline rosse e 4 nere.
Si estraggono a caso palline, una alla volta e senza reinserimento, fino a svuotare l'urna.

1) Calcolare la probabilità che l'ultima pallina estratta sia rossa
2) Calcolare la probabilità che l'ultima pallina estratta sia rossa sapendo che la prima estratta è rossa.
3) Calcolare la probabilità che prima e ultima estratte siano rosse.

SVOLGIMENTO

Conviene fare riferimento al seguente spazio di prob. uniforme discreto

$$\Omega = D_{6,6} = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_6) : \omega_1, \dots, \omega_6 \in \{1, \dots, 6\} \text{ con } \omega_i \neq \omega_j \text{ per } i \neq j\}$$

Con $P(\{\omega\}) = \frac{1}{\# D_{6,6}} = \frac{1}{6!}$

La convenzione è la seguente: $\begin{cases} 1, 2 \longleftrightarrow \text{palline rosse} \\ 3, 4, 5, 6 \longleftrightarrow \text{palline nere.} \end{cases}$

1) $P(\{\omega \in \Omega : \omega_6 = 1\} \cup \{\omega \in \Omega : \omega_6 = 2\}) \overset{\text{unione disgiunta}}{=}$

$= P(\{\omega \in \Omega : \omega_6 = 1\}) + P(\{\omega \in \Omega : \omega_6 = 2\}) = \frac{5!}{6!} + \frac{5!}{6!} = \frac{\cancel{5!}}{6 \cdot \cancel{5!}} + \frac{\cancel{5!}}{6 \cdot \cancel{5!}} =$

(nel 1° addendo $(\underbrace{-,-,-,-,-}_{\text{permutazioni di } 2,3,4,5,6},1)$; nel 2° addendo $(\underbrace{-,-,-,-,-}_{\text{permutazioni di } 1,3,4,5,6},2)$) $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

$= \frac{1}{3}$

OSSERVAZIONE

La probabilità che abbiamo ottenuto coincide con la probabilità che la 1ª estratta sia rossa e cioè $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

In generale si può dimostrare che la probabilità che la i-sima estratta sia rossa è sempre la stessa, cioè $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.