

Si considera il lancio di due dadi ^{equi} (due volte lo stesso dado, o anche due dadi diversi; non c'è differenza).

- 1) Calcolare la probabilità di ottenere due numeri minori o uguali a 4.
- 2) Calcolare la probabilità dello stesso evento della domanda ~~precedente~~ precedente sapendo che la somma dei due numeri ottenuti è uguale a 7.

SOLUZIONE

- 1) ~~Sappiamo che~~ In questi casi gli eventi ~~di~~ lanci di dadi diversi sono indipendenti. In generale per $(w_1, w_2) \in \Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$ si ha

$P(\{w\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$; quindi, essendo $\#\Omega = 36$, si ha uno spazio di probabilità uniforme discreto.

Quindi $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\{(i,j): i,j \in \{1, \dots, 4\}\}}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

$(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)$
 $(2,1), (2,2), (2,3), (2,4)$
 $(3,1), (3,2), (3,3), (3,4)$
 $(4,1), (4,2), (4,3), (4,4)$

oss. Possiamo anche ragionare così: Consideriamo gli eventi

$$A_k = \{\text{si ha } \leq 4 \text{ nel lancio del } k^{\circ} \text{ dado}\} \quad k=1,2.$$

Allora $A = A_1 \cap A_2$, con A_1 e A_2 indipendenti; quindi

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

- 2) Sia $E = \{\text{la somma dei due valori ottenuti è } 7\}$. Allora

$$P(A|E) = \frac{\#(A \cap E)}{\#E} = \frac{\#\{(3,4), (4,3)\}}{\#\{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

oss. Sappiamo che A_1 e A_2 sono indipendenti. Ci si chiede se lo sono anche sotto l'evento E , cioè $P(A_1 \cap A_2 | E) = P(A_1 | E)P(A_2 | E)$?

Abbiamo appena visto che $P(A|E) = P(A_1 \cap A_2 | E) = \frac{1}{3}$. Inoltre

$$P(A_1 | E) = \frac{\#(A_1 \cap E)}{\#E} = \frac{\#\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3)\}}{\#\{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (4,3), (3,4)\}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_2 | E) = \frac{\#(A_2 \cap E)}{\#E} = \frac{\#\{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4)\}}{\#\{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (4,3), (3,4)\}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_1 | E)P(A_2 | E) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \neq \frac{1}{3}. \quad \text{Quindi la risposta è NO. 4}$$