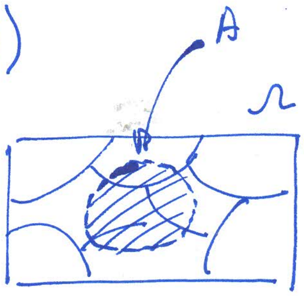
Allora

$A = A \cap \Omega$ — proprietà distributiva

$$P(A) \overset{!}{=} P(A\cap\Omega) = P\Big(A\cap\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big)\Big) \overset{D}{=} P\Big(\bigcup_{i\in I}(A\cap E_i)\Big)$$

$$= \sum_{i\in I} P(A\cap E_i)$$

$(A\cap E_i)\cap(A\cap E_j)=\emptyset$ per $i\neq j$



Ora per ciascun addendo per cui $P(E_i)\neq 0$ si ha

$$P(A\cap E_i) = P(A|E_i)\,P(E_i)$$

Oss.
In ogni caso, se fosse $P(E_i)=0$, si avrebbe $P(A\cap E_i)=0$ e vale l'uguaglianza anche se $P(A|E_i)$ non è ben definita

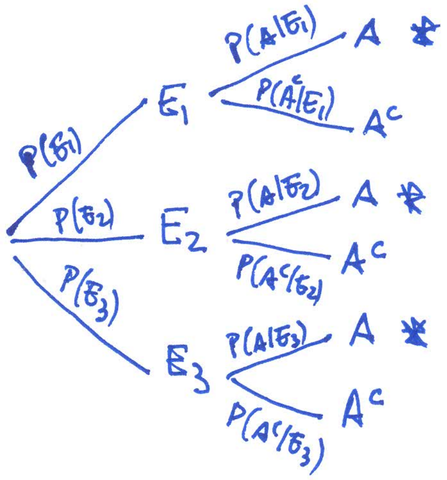
In conclusione

$$\boxed{P(A) = \sum_{i\in I} P(A|E_i)\,P(E_i)}$$

Un caso particolare è quello in cui la partizione è costituita da due eventi: $\begin{cases} E_1 = E \\ E_2 = E^c \end{cases}$. Allora $P(A) = P(A|E)P(E) + P(A|E^c)P(E^c)$.

DIAGRAMMA AD ALBERO ASSOCIATO ALLA FORMULA DELLE PROB. TOTALI

Si può costruire un diagramma ad albero associato dove ogni diramazione fa riferimento ad una partizione (ogni diramazione considera tutti i casi possibili). Ad ogni arco si associa una probabilità. Per fissare le idee consideriamo il caso $I=\{1,2,3\}$



Siamo interessati a tutte le foglie che finiscono con A indicate da un asterisco $*$.

Si deve considerare la somma dei pesi dei cammini che finiscono con A ottenuti con i prodotti dei pesi dei rami

$$P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + P(A|E_3)P(E_3).$$