IV appello 26/9/22 — Geometria e Algebra per Informatica
Prof. F. Bracci — A.A. 2021-22

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature*. Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, munito di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $L : V \to V$ una applicazione lineare. Siano v, u due vettori non nulli di V.

(a) Se $\{L(v), L(u)\}$ sono linearmente dipendenti, allora $\{v, u\}$ sono linearmente dipendenti.
(b) Se $\{v, u\}$ sono linearmente indipendenti e $\{L(v), L(u)\}$ sono linearmente dipendenti, allora L non è suriettiva.
(c) Se $L(v), L(u)$ non sono nulli e $\langle L(v), L(u) \rangle = 0$ allora v, u sono linearmente indipendenti.
(d) Se $\langle v, u \rangle = 0$ allora $L(v), L(u)$ linearmente indipendenti.

Q2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Siano

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ \tan 45 & 1 & 0 \\ -25\pi & \sqrt{1456} & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è invertibile per $\alpha \neq 0$.
(b) Il rango di $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è sempre 2.
(c) Per $\beta = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ non è invertibile.
(d) Se $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è diagonalizzabile, allora $\alpha \neq 1$.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali, $\dim V = n$ e $\dim W = m$, con $n, m \geq 1$. Sia $T : V \to W$ un operatore lineare.

(a) Se per ogni $v \in V$ esiste un unico $w \in W$ tale che $T(v) = w$ allora T è iniettiva.
(b) Se T è iniettiva, allora $n \leq m$.
(c) Se $n < m$ allora T non è suriettiva.
(d) Se T è iniettiva allora T è un isomorfismo.

Q4) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare e sia $\underline{0}$ il vettore nullo di V.

(a) Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Se T è diagonalizzabile allora per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$ esiste $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tale che $T(v_j) = \lambda_j v_j$.
(b) Se $v \neq \underline{0}$ è un autovettore di T, allora T non è invertibile.
(c) Se T è un isomorfismo allora $\underline{0}$ è un autovettore.
(d) Se 0 è un autovalore di T allora T non è suriettivo.

Q5) Siano A, B, C matrici $n \times n$.

(a) Se $AB = C$ e C è invertibile, allora $\det A \neq 0$.
(b) Se $AB = I$ allora $ACB = C$.
(c) Se il rango di A è $m < n$ e $A = BC$, allora il rango di B e di C è $< m$.
(d) Se C è invertibile, allora $\operatorname{rank}(ACB) = \operatorname{rank}(AB)$.

Q6) Sia , $n \geq 1$. Sia A una matrice $m \times n$, $n > m$, e sia $b \in \mathbb{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna b alla matrice A.

(a) Il sistema $Ax = b$ ammette sempre soluzioni.
(b) Il rango della matrice A' è sempre uguale al rango di A.
(c) Se non esistono soluzioni al sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$ allora il rango di A è minore del rango di A'.
(d) Se il sistema $Ax = 0$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette infinite soluzioni, allora il sistema $Ax = b$ ammette soluzione.

Q7) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia S l'insieme definito da $x = 2 + \lambda, y = 2 + \lambda, z = \lambda - \mu$ al variare di $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

(a) S contiene il punto $(\sqrt{2021}, \sqrt{2021}, \sqrt{2021})$.
(b) lo spazio ortogonale a TS è generato dal vettore $(1, 1, -1)$.
(c) Il piano $y = 2$ è ortogonale a S.
(d) L'equazione cartesiana di S é $x - y = 0$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortogonale con coordinate affini (x, y). Sia r_a la retta $x - y = a$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(a) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che r_a è ortogonale alla retta $2x + y = 2$.
(b) Lo spazio tangente ad r_a non dipende da $a \in \mathbb{R}$.
(c) Non esistono valori di a per cui $(0, 0) \in r_a$.
(d) lo spazio ortogonale ad r_a è generato dal vettore $(1, -1 + a)$.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Sia $V = Pol_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 con coefficienti reali. Sia $L : V \to V$ l'applicazione data da

$$L(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 - a_1 - 2a_2) + (a_1 + a_2)x + 2a_2x^2.$$

(1) Verificare che L è lineare e determinare la matrice associata a L nella base $\{1, x, x^2\}$ di V.
(2) Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di L e trovare una base dell'immagine di L.
(3) Trovare gli autovalori e gli autospazi di L e dire se L è diagonalizzabile.
(4) Trovare la matrice associata a L nella base $\{1, 2 - x, 1 + x - x^2\}$.

Soluzione:

(1) Per verificare che L è lineare occorre provare che
 (a) $L(p(x) + q(x)) = L(p(x)) + L(q(x))$ per ogni $p(x), q(x) \in V$,
 (b) $L(\lambda p(x)) = \lambda L(p(x))$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p(x) \in V$.

Per verificare (a), scriviamo $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Dunque

$$\begin{aligned} L(p(x) + q(x)) &= L((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) \\ &= (a_0 + b_0 - (a_1 + b_1) - 2(a_2 + b_2)) + (a_1 + b_1 + a_2 + b_2)x + 2(a_2 + b_2)x^2 \\ &= (a_0 - a_1 - 2a_2) + (a_1 + a_2)x + 2a_2x^2 + (b_0 - b_1 - 2b_2) + (b_1 + b_2)x + 2b_2x^2 = L(p(x)) + L(q(x)). \end{aligned}$$

Per verificare (b),

$$\begin{aligned} L(\lambda p(x)) &= L(\lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2) = (\lambda a_0 - \lambda a_1 - 2\lambda a_2) + (\lambda a_1 + \lambda a_2)x + 2\lambda a_2x^2 \\ &= \lambda[(a_0 - a_1 - 2a_2) + (a_1 + a_2)x + 2a_2x^2] = \lambda L(p(x)). \end{aligned}$$

Fissiamo ora la base $\{1, x, x^2\}$ di V. La matrice associata a L in tale base (in partenza e in arrivo) si ottiene tramite $L(1) = 1$, $L(x) = -1 + x$, $L(x^2) = -2 + x + x^2$. Dunque la matrice associata è

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) Essendo A una matrice triangolare superiore, gli elementi della diagonale principale sono gli autovalori di L. Essendo tutti diversi da 0, ne segue che il nucleo di L ha dimensione 0. L'immagine di L ha dunque dimensione 3 e coincide con V. Pertanto qualunque base di V è una base dell'immagine di L.

(3) Dal punto precedente segue che gli autovalori di L sono $1, 2$, con 1 che ha molteplicità algebrica 2 e 2 che ha molteplicità algebrica (e quindi geometrica) 1. Per calcolare V_1, l'autospazio relativo a 1, occorre risolvere il sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

La soluzione è $a_1 = a_2 = 0$. Pertanto V_1 ha dimensione 1 ed è generato dal polinomio $p(x) = 1$. Dunque la molteplicità algebrica dell'autovalore 1 è 2 e la sua molteplicità geometrica è 1, ne segue che L non è diagonalizzabile.

Per calcolare l'autospazio V_2 occorre risolvere il sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

La soluzione è $a_0 = -3a_2$, $a_1 = a_2$. Una base di V_2 è dunque data da $-3 + x + x^2$.

(4) La matrice di cambiamento di base dalla base $\{1, 2 - x, 1 + x - x^2\}$ alla base $\{1, x, x^2\}$ è

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dunque la matrice associata a L nella base $\{1, 2 - x, 1 + x - x^2\}$ è data da $C^{-1}AC$, ovvero

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$