V appello 17/1/23 — Geometria e Algebra per Informatica
Prof. F. Bracci — A.A. 2021-22

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, munito di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $L : V \to V$ una applicazione lineare. Sia v un vettore non nullo di V.

- L'applicazione $V \ni w \mapsto \langle w, v \rangle$ è lineare.
- Sia $w \in V$. Se $\langle L(v), L(w) \rangle \neq 0$ allora $w \notin \ker L$.
- Sia $w \in V$ un vettore non nullo e $n = 2$. Se $\{L(v), L(w)\}$ non è una base di V, allora v, w sono linearmente dipendenti.
- Sia $w \in V$ un vettore non nullo. Se $\langle v, w \rangle = 0$ allora $\langle L(v), L(w) \rangle = 0$.

Q2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Siano

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ \tan 45 & -51 & 0 \\ -25\pi & \sqrt{1456} & -3 \end{pmatrix}.$$

- La matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è invertibile per $\alpha \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$.
- Il rango di $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è ≥ 2.
- Per $\beta = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ non è diagonalizzabile.
- Se $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è invertibile, allora $\alpha \neq \beta$.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali, $\dim V = n$ e $\dim W = m$, con $n, m \geq 1$. Sia $T : V \to W$ un operatore lineare.

- Se per ogni $w \in W$ esiste $v \in V$ tale che $T(v) = w$ allora T è iniettiva.
- Se T è biunivoca, allora $n = m$.
- Se $n > m$ allora T non è suriettiva.
- Se T è suriettiva e $\ker T = \{\underline{0}\}$ allora $n = m$.

Q4) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare e sia $\underline{0}$ il vettore nullo di V.

- Se T è diagonalizzabile allora esistono una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V e $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(v_j) = \lambda v_j$ per $j = 1, \ldots, n$.
- Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di T, allora l'operatore lineare $T - \lambda \mathsf{Id}$ non è invertibile.
- Se T non è un isomorfismo allora $\underline{0}$ è un autovettore di T.
- Se 0 è un autovalore di T allora T non è biunivoco.

Q5) Siano A, B, C matrici $n \times n$.

- Se $AB = C$ e $\det C = 0$ e $\det A \neq 0$ allora $\det B = 0$.
- Se il rango di C è n e $A = BC$, allora il rango di A è n.
- Se $C = AB$ e C è diagonalizzabile, allora A e B sono diagonalizzabili.
- Se $ABC = I$ allora A è invertibile.

Q6) Sia $n \geq 1$. Sia A una matrice $m \times n$, $n \leq m$, e sia $b \in \mathbb{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna b alla matrice A.

- Il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette sempre infinite soluzioni.
- Il rango della matrice A' è sempre uguale al rango di A.
- Se $n < m$, esiste $b \in \mathbb{R}^m$ tale che il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, non ammette soluzione.
- Se esiste $b \in \mathbb{R}^m$ tale che il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette una unica soluzione, allora $n = m$.

Q7) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia S l'insieme definito da $x = 2 + \lambda, y = 2 + \mu, z = \lambda - \mu$ al variare di $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

- S contiene il punto $(0, 0, 0)$.
- lo spazio ortogonale a TS è generato dai vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$.
- La retta $z = 0$, $x = y$ è contenuta in S.
- L'equazione cartesiana di S è $x = 0$, $z = 0$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortogonale con coordinate affini (x, y). Sia r_a la retta $ax - y = 1$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

- Per ogni retta s in $\mathbb{A}^2$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che r_a è ortogonale a s.
- Lo spazio tangente ad r_a non dipende da $a \in \mathbb{R}$.
- Non esistono valori di a per cui $(0, 0) \in r_a$.
- lo spazio tangente ad r_a è generato dal vettore $(1, a)$.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Per $\alpha \in \mathbb{R}$ sia A_α la matrice definita da

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha+2 & \alpha & 2\alpha & -4\alpha-3 \\ -\alpha & -\alpha+2 & -2\alpha & 4\alpha+3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Determinare per quali valori di α la matrice A_α è invertibile.
(2) Determinare per quali valori di α la matrice A_α è diagonalizzabile.
(3) Per i valori α per cui A_α è diagonalizzabile, determinare la matrice di cambiamento di coordinate che rende A_α diagonale.

Soluzione: Parte II:

(1) Calcolando il determinante di A_α (ad esempio usando il metodo di Laplace rispetto alla quarta riga), si ottiene $\det A_\alpha = -8$. Pertanto A_α è invertibile per ogni α.

(2) calcolando il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ di A_α si ottiene

$$p(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I) = (2-\lambda)^3(-1-\lambda).$$

Pertanto gli autovalori sono $-1, 2$ per ogni α. La molteplicità algebrica dell'autovalore -1 è 1 (e dunque coincide con la molteplicità geometrica). Dunque A_α è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità algebrica dell'autovalore 2 (che è 3) coincide con la sua molteplicità geometrica. Quest'ultima è pari a $4 - \text{rango}(A_\alpha - 2\mathsf{Id})$. Ora, la matrice $A_\alpha - 2\mathsf{Id}$ ha rango 2 se $\alpha \neq 0$ e ha rango 1 se $\alpha = 0$. Pertanto, A_α è diagonalizzabile solo per $\alpha = 0$.

(3) Poniamo $\alpha = 0$. Il sistema $A_0\underline{x} = -\underline{x}$ ha come base delle sue soluzioni il vettore $(-1, 1, -2, -1)$. Il sistema $A_0\underline{x} = 2\underline{x}$ ha come base delle sue soluzioni i vettori $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$. Pertanto, posta

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

risulta $C^{-1}A_0C$ diagonale.