COMMENTI AGGIUNTIVI ALL'ESERCIZIO FINALE IN PRESA DIRETTA

Abbiamo ottenuto $f_Y(y) = \frac{6}{y} \log y \,(-1-\log y)\, \mathbb{1}_{(e^{-1},1)}(y)$.

1 In effetti questa è una funzione non negativa perché, per $y \in (e^{-1},1)$, si ha $\underbrace{\frac{6}{y}}_{>0} \underbrace{\log y}_{\leq 0} (\underbrace{-1-\log y}_{\leq 0})$

Del resto $\log y \in (-1,0)$ e quindi $-\log y \in (0,1)$, da cui segue

$-1-\log y \in (-1,0)$.

2 In effetti $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1$, cioè $\int_{e^{-1}}^{1} \frac{6}{y} \cdot \log y\,(-1-\log y)\,dy = 1$.

Consideriamo il cambio di variabile $\log y = r \Rightarrow y = e^r \Rightarrow dy = e^r dr$.

Allora $\int_{e^{-1}}^{1} \frac{6}{y} \log y\,(-1-\log y)\,dy = \int_{-1}^{0} \frac{6}{\cancel{e^r}}\, r(-1-r)\, \cancel{e^r}\, dr = \boxed{\int_{-1}^{0} -6r(r+1)\,dr} =$

$= \int_{-1}^{0} -6\,(r^2+r)\,dr = -6\left[\frac{r^3}{3}+\frac{r^2}{2}\right]_{r=-1}^{r=0} = -6\left(0^3+0^2-\left(\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}\right)\right) = 6\left(\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}\right) = 6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) =$

$= 6\,\frac{3-2}{6} = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1.$

OSS. L'integrale può essere interpretato come l'area