I appello 22/6/22 — Geometria e Algebra per Informatica
Prof. F. Bracci — A.A. 2021-22

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) In $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard, siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 10^2 \\ 10^3 \\ 10^4 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10^{10} \\ 10^{100} \end{pmatrix}$.

(a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
(b) $\dim(\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}) = 2$.
(c) L'ortogonale a $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ ha dimensione 2.
(d) $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente dipendenti.

Q2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Siano

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ -1 & \log 156 & 0 \\ 34\pi & \frac{113}{\sqrt{4509}} & -7 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è invertibile per ogni valore di α, β.
(b) Il rango di $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è 2 per $\alpha = \beta = 0$.
(c) Per $\alpha \cdot \beta \neq 0$ il sistema lineare omogeneo $(C^{-1}A_{\alpha,\beta}C)\underline{x} = \underline{0}$ ammette solo la soluzione nulla.
(d) Per $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ la matrice C è l'inversa di $A_{\alpha,\beta}$.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali, $\dim V = n$ e $\dim W = m$, con $n, m \geq 1$. Sia $T : V \to W$ un operatore lineare.

(a) Se T è iniettivo allora per ogni $v \in V$ esiste un unico $w \in W$ tale che $w = T(v)$.
(b) Se per ogni $w \in W$ esiste un unico $v \in V$ tale che $T(v) = w$ allora T è un isomorfismo.
(c) Se $n > m$ allora T non è iniettivo.
(d) Se T è suriettivo allora $n \geq m$.

Q4) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare.

(a) Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Se 0 è un autovalore di T allora $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ sono linearmente dipendenti.
(b) Se $\dim \ker T \geq 1$ allora T non è suriettivo.
(c) Se T è un isomorfismo allora $\dim \ker T = \dim \mathsf{Im}\, T$.
(d) Se $\dim \ker T \leq \dim \mathsf{Im}\, T$ allora T è iniettivo.

Q5) Sia A una matrice 3×3 con entrate reali.

(a) Se A ha determinante non nullo allora ogni minore 2×2 di A ha determinante non nullo.
(b) Se esiste una matrice 3×3, B, tale che $BA = I$ allora il rango di A è 3.
(c) Se $A \cdot A = O$ (O è la matrice nulla) allora $A = O$.
(d) Se $\det A = 0$ allora 0 è una autovalore di A.

Q6) Siano $1 \leq m \leq n$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $b \in \mathbb{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna b alla matrice A.

(a) Se non esistono soluzioni al sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, allora $m = n$ e il rango di A è n.
(b) Se il rango della matrice A è m, allora il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette soluzione.
(c) Il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, non ammette mai una unica soluzione per ogni $1 \leq m \leq n$.
(d) Se il sistema sistema $Ax = 0$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette soluzione, allora il sistema $Ax = b$ ammette soluzione.

Q7) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia S l'insieme definito da $x = \lambda - \mu, y = 0, z = \lambda - \mu$ al variare di $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

(a) S è un piano affine di equazione $x = z$.
(b) lo spazio tangente TS è generato dal vettore $(1, 0, 1)$.
(c) Il punto $(0, 0, 0)$ appartiene ad S.
(d) S è contenuto nel piano $x + y - z = 0$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortogonale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta parallela alla retta $x = 2$ e passante per $(1, -1)$.

(a) La distanza di r da $(0, 0)$ è 1.
(b) l'equazione parametrica di r è $x = \lambda, y = -1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(c) Siano A, B due punti distinti di r e sia $P_\mu = (0, \mu)$ al variare di $\mu \in \mathbb{R}$. L'area del triangolo di vertici A, B, P_μ non dipende da μ.
(d) lo spazio tangente Tr è generato dal vettore $(1, -1)$.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortogonale $\mathcal{R}$ con coordinate (x, y, z).

(1) Determinare l'equazione parametrica e l'equazione cartesiana della retta r passante per i punti $(0, 0, -1)$ e $(-1, 1, 1)$.
(2) Determinare l'equazione parametrica e cartesiana del piano π ortogonale a r e contenente l'origine.
(3) Calcolare la distanza tra π e il punto $A := (1, 0, 1)$.
(4) Sia $B = (2, -1, 2)$. Determinare il punto $C \in r$ tale che il triangolo ABC ha area minima tra tutti i triangoli di vertice A, B e terzo vertice su r.

Soluzioni:
Q1) b, d
Q2) b, c
Q3) b,c,d
Q4) a,b
Q5) b,d
Q6) b
Q7) b,c, d
Q8) a,c

Parte II

(1) $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è tale che $\operatorname{span}\{\underline{v}\} = Tr$

pertanto

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{eq. parametrica}$$

per trovare l'equazione cartesiana, poniamo $\lambda = x$ e si ha

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z = -1 \end{cases}$$

(2) poiché π è ortogonale a r, e $\underline{v}$ è tangente a r, ne segue che $\underline{v}$ è ortogonale a $T\pi$. Dunque

π : $x - y - 2z = \delta$

imponendo il passaggio per $(0,0,0)$ si ha $\delta = 0$, ovvero

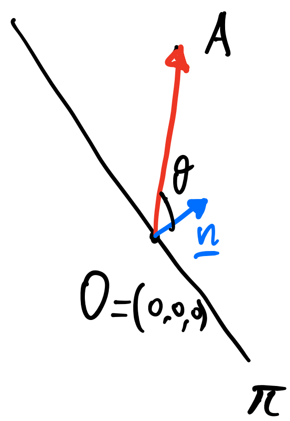
$\pi : \quad x - y - 2z = 0$ eq. cartesiana

ponendo $y = \lambda$, $z = \mu$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ si ha

$$\begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \text{eq. parametrica}$$

(3) Sia $\underline{n} = \dfrac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$ $\qquad \|\underline{v}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$



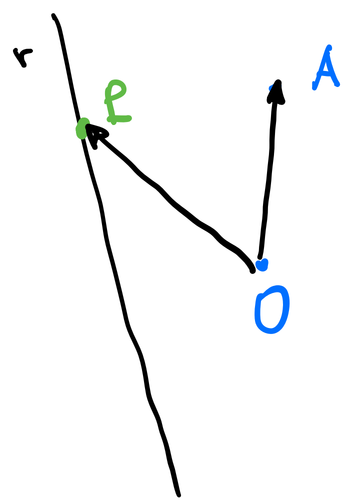
Sia $\underline{w} = A - O = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

la distanza tra A e O (si veda figura sopra) è

$$\left| \|\underline{w}\| \cdot \cos\theta \right| = \left| \langle \underline{w}, \underline{n} \rangle \right| = \left| \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\rangle \right| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

(4) un generico punto P di r è dato da

$P = (\lambda, -\lambda, -1-2\lambda)$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$



pertanto, l'area del triangolo APO è

$$\frac{1}{2} \| (P-O) \wedge (A-O) \| =$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ -1-2\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ -1-2\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \lambda & -\lambda & -1-2\lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda \underline{e}_1 + (-1-3\lambda)\underline{e}_2 + \lambda \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} -\lambda \\ -1-3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

e

$$\left\| \begin{pmatrix} -\lambda \\ -1-3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \right\|^2 = \lambda^2 + (1+3\lambda)^2 + \lambda^2 =$$

$$= 11\lambda^2 + 6\lambda + 1 =: f(\lambda)$$

il minimo di tale valore si ottiene per $f'(\lambda) = 0$, ovvero $22\lambda + 6 = 0$ $\quad 11\lambda + 3 = 0$ $\quad \lambda = -3/11$.

Sostituendo, si trova che

$$B = \begin{pmatrix} 3/11 \\ -2/11 \\ -3/11 \end{pmatrix}.$$