ESERCIZIO

Abbiamo 3 urne inizialmente vuote e n palline.
Ogni pallina sceglie a caso una delle tre urne dove andare, ognuna indipendentemente dalle altre.
Calcolare la probabilità che almeno un'urna resti vuota (dopo che tutte le palline hanno scelto l'urna dove andare).

SVOLGIMENTO

Consideriamo i seguenti eventi

$$E_k = \{ \text{l'urna } k \text{ resta vuota} \} \quad \text{per } k = 1,2,3.$$

Viene chiesta $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ e si ha

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3).$$

Osserviamo che:

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \underbrace{\frac{2}{3} \cdots\cdots \frac{2}{3}}_{n \text{ volte}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \cap E_3) = P(E_2 \cap E_3) = \underbrace{\frac{1}{3} \cdots \frac{1}{3}}_{n \text{ volte}} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0 \quad (\text{evento vuoto; non può accadere che tutte le urne restino vuote})$$

Allora $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n + 0$

$$= 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right].$$

OSSERVAZIONE

Il risultato dipende da n come è giusto che sia.
Ad esempio, anche senza fare calcoli, già sappiamo che certamente si ha un'urna vuota per $n=1$ e per $n=2$. In effetti possiamo verificare questo risultato usando la formula ottenuta:

$$\text{per } n=1 \longrightarrow 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^1 - \left(\frac{1}{3}\right)^1\right] = 3\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right] = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\text{per } n=2 \longrightarrow 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = 3\left[\frac{4}{9} - \frac{1}{9}\right] = 3 \cdot \frac{3}{9} = 1$$