ESERCIZIO

Un'urna contiene n palline numerate da 1 a n, con $n \geq 2$. Si estraggono a caso due palline, una alla volta e senza reinserimento.

Calcolare la probabilità di estrarre due numeri consecutivi.

SVOLGIMENTO

Propongo due modi per risolvere l'esercizio. Indico con E l'evento di interesse.

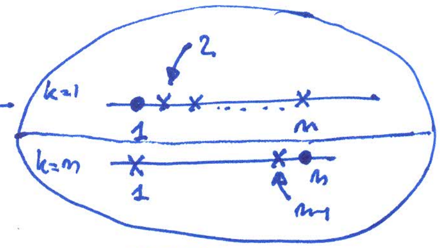
<u>1° modo</u>

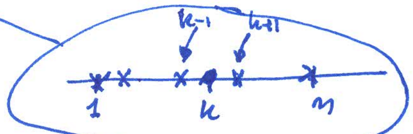
Consideriamo la seguente partizione: $\{E_1, \ldots, E_n\}$ dove

$$E_k = \{\text{il 1° numero estratto è } k\} \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Allora $P(E_1) = \ldots = P(E_n) = \frac{1}{n}$. Inoltre

$$P(E \mid E_k) = \begin{cases} \text{per } k=1 \text{ e } k=n & \frac{1}{n-1} \\ \text{per } k=2, \ldots, k=n-1 & \frac{2}{n-1} \end{cases}$$





Quindi per la formula delle prob. totali si ha

$$P(E) = \sum_{k=1}^{n} P(E \mid E_k) \cdot P(E_k) = \sum_{k=1}^{n} P(E \mid E_k) \cdot \frac{1}{n} =$$

$\frac{1}{n}$ esce fuori dalla sommatoria

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n-1} + \underbrace{\frac{2}{n-1} + \ldots\ldots + \frac{2}{n-1}}_{n-2 \text{ volte}} + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{2(n-2)+1+1}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{2(n-2)+2}{n(n-1)} = \frac{2(n-2+1)}{n(n-1)} = \frac{2\cancel{(n-1)}}{n\cancel{(n-1)}} = \frac{2}{n}.$$

<u>2° modo</u>

Tutte le sequenze ordinate di elementi di $1, \ldots, n$ senza ripetizioni sono $n(n-1)$ e tutte equiprobabili (spazio uniforme discreto....). Quindi

$$P(E) = \frac{\# E}{n(n-1)} = \frac{\# \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2), \ldots, (n-1,n),(n,n-1)\}}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{2\cancel{(n-1)}}{n\cancel{(n-1)}} = \frac{2}{n}.$$