Alla fine della lezione ho detto a voce qualcosa che voglio precisare (può essere utile).

Supponiamo di avere

$$p_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_m) = c\, f_1(x_1) \cdots f_m(x_m) \qquad \forall (x_1, \dots, x_m) \in \underbrace{I_1 \times \dots \times I_m}_{\text{un certo prodotto cartesiano}}$$

per una costante $c > 0$ (potrebbe essere $c = 1$)

e certe funzioni non negative $f_1, \dots, f_m$.

Allora $X_1, \dots, X_m$ sono indipendenti.

Infatti si può dimostrare che, per certe costanti $c_1, \dots, c_m$, si ha:

$$f_1(x_1) = c_1\, p_{X_1}(x_1), \dots, f_m(x_m) = c_m\, p_{X_m}(x_m)$$

dove

$$c_1 \cdots c_m = \frac{1}{c}.$$

Quindi si avrebbe $p_{\underline{X}}(\underline{x}) = \underbrace{c\, c_1 \cdots c_m}_{=1}\, p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_m}(x_m)$ da cui segue l'indipendenza.