Logica e Reti Logiche

Esercitazione

Francesco Pasquale

27 aprile 2023

Esercizio 1. Siete su un'isola in cui gli abitanti sono o di tipo `True` (dicono sempre la verità) o di tipo `False` (mentono sempre). Assumendo che tutti gli abitanti siano dello stesso tipo, cosa si può dedurre, sul tipo degli abitanti e se siano fumatori o meno, in ognuno dei seguenti casi?
Se ognuno degli abitanti dice:

1. "Se io sono un fumatore, allora siamo tutti fumatori";
2. "Se qualcuno è un fumatore, allora io sono un fumatore";
3. "Alcuni qui sono fumatori, ma non io".

Esercizio 2. A tre delle sei affermazioni seguenti $(1-6)$ espresse in linguaggio naturale corrispondono tre delle sei formule $(I-VI)$ in logica del primo ordine (interpretando opportunamente i simboli per i predicati[1]).
Associare tre delle affermazioni alle tre formule corrispondenti. Scrivere delle formule appropriate per le tre affermazioni che restano non associate. Scrivere delle affermazioni appropriate per le tre formule che restano non associate.

1. Chi non studia non passa l'esame;
2. C'è qualcuno che studia e non passa l'esame;
3. Qualcuno passa l'esame;
4. Tutti quelli che passano l'esame o studiano o sono dei geni;
5. I geni non esistono;
6. Tutti i geni studiano.

I. $\forall x[P(x) \to Q(x) \vee R(x)]$
II. $\exists x[\neg Q(x) \wedge \neg R(x) \wedge \neg P(x)]$
III. $\forall x[R(x) \to Q(x)]$
IV. $\forall x[Q(x) \wedge R(x) \to P(x)]$
V. $\exists x P(x)$
VI. $\exists x[R(x) \to P(x)]$

[1] Qui e negli esercizi che seguono usiamo, come da notazione standard, le ultime lettere dell'alfabeto, x, y, z, per le variabili, le prime lettere dell'alfabeto, a, b, c, per le costanti, e le lettere P, Q, R, maiuscole, per i predicati

Esercizio 3. Alcune delle affermazioni in (1) $-$ (6) hanno una formula corrispondente in $(a) - (f)$. Associare, dove possibile, le affermazioni alle formule, specificando l'interpretazione data alle lettere predicative P, Q e R. Per ogni affermazione che non ha una formula corrispondente scrivere una formula appropriata. Per ogni formula che non ha un'affermazione corrispondente scrivere un'affermazione appropriata.

1. Chi lavora ha uno stipendio
2. Se c'è qualcuno che studia e lavora allora c'è qualcuno che ha uno stipendio
3. Se tutti studiano e lavorano, allora c'è qualcuno che lavora e non ha uno stipendio
4. C'è qualcuno che studia, lavora e ha uno stipendio
5. Tutti quelli che hanno uno stipendio lavorano o studiano
6. C'è qualcuno che studia e non lavora.

I. $\exists x[P(x) \wedge \neg Q(x)]$

II. $\forall x Q(x) \to \forall x R(x)$

III. $\forall x\,[Q(x) \to R(x)]$

IV. $\exists x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$

V. $\forall x \neg Q(x) \to [\forall x \neg R(x) \wedge \exists x P(x)]$

VI. $\exists x\,[P(x) \wedge Q(x)] \to \exists x R(x)$

Esercizio 4. Sia $\mathcal{F}$ la formula seguente

$$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \to \forall x\,[P(x) \vee Q(x)]$$

1. Dare un'interpretazione in cui $\mathcal{F}$ è falsa;
2. Scrivere una formula equivalente a $\mathcal{F}$ che non contenga il connettivo $\to$ e il quantificatore $\exists$;
3. Scrivere una formula equivalente a $\neg\mathcal{F}$ che non contenga il connetivo $\to$ e il quantificatore $\forall$.

Esercizio 5. Usando il metodo dei *tableaux* verificare che le seguenti formule sono valide

1. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \to \forall x[P(x) \vee Q(x)]$
2. $\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)$
3. $\forall x P(x) \to [\exists x Q(x) \to \forall x P(x)]$
4. $\exists y \forall x P(x,y) \to \forall x \exists y P(x,y)$

Esercizio 6. Dire quali delle formule dell'esercizio precedente sono tautologie. Motivare la risposta.

Esercizio 7. Una delle due formule seguenti è valida, l'altra no:

1. $\forall x\,[P(x) \vee Q(x)] \to \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
2. $\forall x\,[P(x) \vee Q(x)] \to \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Per la formula valida dare una dimostrazione usando il metodo dei *tableaux*; per quella non valida esibire un'interpretazione che la rende falsa.

Esercizio 8. Per ognuna delle seguenti formule dire se è valida oppure no. In caso affermativo dare una dimostrazione (usando il metodo dei *tableaux*), in caso negativo esibire una interpretazione in cui è falsa.

1. $\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x P(x)$
2. $\exists x\, [P(x) \rightarrow \forall y P(y)]$
3. $\forall x[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
4. $\forall x \forall y \forall z[P(x,x) \wedge [P(x,z) \rightarrow P(x,y) \vee P(y,z)]] \rightarrow \exists y \forall z P(y,z)$
5. $\forall x \exists y P(x,y) \wedge \exists x \forall y Q(x,y) \rightarrow \exists x \exists y\, [P(x,y) \wedge Q(x,y)]$
6. $\exists x \forall y P(x,y) \wedge \exists x \forall y Q(x,y) \rightarrow \forall y\, (\exists x P(x,y) \wedge \exists x Q(x,y))$

Esercizio 9. Per ognuna delle seguenti formule esibire un'interpretazione in cui la formula è vera e un'interpretazione in cui è falsa.

1. $\forall x \forall y[P(x,y) \rightarrow P(y,x)]$
2. $\forall x \exists y P(x,y)$
3. $\exists x[P(x) \wedge \neg Q(x)] \wedge \forall y[P(y) \vee Q(y)]$

Esercizio 10. Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ le formule

$$\mathcal{A}:\ \forall x \exists y P(x,y) \qquad\qquad \mathcal{B}:\ \exists y \forall x P(x,y)$$

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se è corretta oppure no, motivando adeguatamente la risposta

1. $\mathcal{A}$ implica logicamente $\mathcal{B}$
2. $\mathcal{B}$ implica logicamente $\mathcal{A}$
3. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono equivalenti
4. Nessuna delle precedenti è corretta

Esercizio 11. Si considerino le due formule

$$\mathcal{A}:\ \forall x\, (\exists y P(x,y) \wedge \exists y Q(x,y)) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B}:\ \forall x \exists y\, (P(x,y) \wedge Q(x,y))\,.$$

Per ognuna delle quattro affermazioni seguenti, dire se l'affermazione è vera oppure no, motivando opportunamente la risposta:

1. $\mathcal{A}$ è una formula valida;
2. $\mathcal{A}$ è una formula soddisfacibile;
3. $\mathcal{A}$ implica logicamente $\mathcal{B}$;
4. $\mathcal{B}$ implica logicamente $\mathcal{A}$.