2) Sia $h \geq 1$ intero e $B_1, \dots, B_h \in \mathcal{A}$ con $B_m \cap B_n = \emptyset$ per $m \neq n$ ($m, n \in \{1, \dots, h\}$).

Allora $P\left(\bigcup_{n=1}^{h} B_n\right) = \sum_{n=1}^{h} P(B_n)$.

Infatti basta fare riferimento alla condizione ii) nella definizione con

$$A_1 = B_1,\ A_2 = B_2,\ \dots,\ A_h = B_h,\ A_{h+1} = A_{h+2} = A_{h+3} = \dots = \emptyset.$$

Infatti, con queste scelte (e per le ipotesi), si ha $A_m \cap A_n = \emptyset$ per $m \neq n$ e si ha

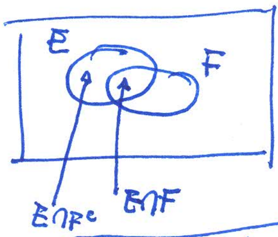
$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} P(A_n) \quad \text{da cui segue:}$$

$$\begin{cases} \bigcup_{n\geq1} A_n = B_1 \cup \dots \cup B_h \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \dots = \bigcup_{n=1}^{h} B_n \Rightarrow P\left(\bigcup_{n\geq1} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{h} B_n\right) \\ \sum_{n\geq1} P(A_n) = P(B_1) + \dots + P(B_h) + \underbrace{P(\emptyset)}_{=0} + \dots + \underbrace{P(\emptyset)}_{=0} + \dots = \sum_{n=1}^{h} P(B_n) \end{cases}$$

e quindi si ottiene $P\left(\bigcup_{n=1}^{h} B_n\right) = \sum_{n=1}^{h} P(B_n)$.

3) Specializziamo l'uguaglianza appena verificata prendendo $E, F \in \mathcal{A}$, $h = 2$, $B_1 = E \cap F$, $B_2 = E \cap F^c$. Allora

$$\underbrace{P((E\cap F) \cup (E \cap F^c))}_{= P(E)} = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$$



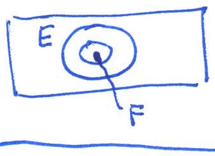
$(E \cap F) \cup (E \cap F^c) = E$

$$\Rightarrow \boxed{P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)}$$

3.1) (con $E = \Omega$)

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 = P(F) + P(F^c) \quad \forall F \in \mathcal{A} \\ \text{e quindi } \begin{cases} P(F) = 1 - P(F^c) \\ P(F^c) = 1 - P(F) \end{cases} \end{array}}$$

3.2) (con $F \subset E$) $\to E \cap F = F$



$$\Rightarrow P(E) = P(F) + \underbrace{P(E \cap F^c)}_{\geq 0} \geq P(F)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(E) \geq P(F)}$$

Da questo segue che $P(A) \leq P(\Omega) = 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}$