2) Abbiamo una probabilità condizionata

evento intersezione

$$P(\text{ultime rosse} \mid 1^a \text{ rossa}) = \frac{P(\{1^a \text{ e ultime rosse}\})}{P(1^a \text{ rossa})} = \frac{P(\{1^a \text{ e ultime rosse}\})}{1\cancel{2}/\cancel{6}_3}.$$

$$P(\{1^a \text{ e ultima rosse}\}) = P(\{\omega \in \Omega : \omega_1 = 1 \text{ e } \omega_6 = 2\} \cup \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 2 \text{ e } \omega_6 = 1\})$$

$$= P(\{\omega \in \Omega : \omega_1 = 1 \text{ e } \omega_6 = 2\}) + P(\{\omega \in \Omega : \omega_1 = 2 \text{ e } \omega_6 = 1\}) =$$

unione disgiunta

nel 1° addendo $(1, \underbrace{-,-,-,-}_{\text{permutazioni di } 3,4,5,6}, 2)$ | nel 2° addendo $(2, \underbrace{-,-,-,-}_{\text{permutazioni di } 3,4,5,6}, 1)$

$$= \frac{4!}{6!} + \frac{4!}{6!} = \frac{\cancel{4!}^{\,1}}{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}} + \frac{\cancel{4!}^{\,1}}{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}$$

$$= \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Quindi si ha

$$P(\text{ultima rossa} \mid 1^a \text{ rossa}) = \frac{1/15}{1/3} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

OSSERVAZIONE

Il valore ottenuto può essere interpretato come segue: estratta la 1^a rossa, resta 1 pallina rossa su 5 totali e quindi, tenendo conto quanto abbiamo osservato dopo la risposta precedente, è naturale aspettarsi che venga $\frac{1}{5}$.

3) La prob. richiesta è stata calcolata durante la risposta alla domanda precedente e si ha

$$P(\{1^a \text{ e ultima rosse}\}) = \frac{1}{15}.$$

OSSERVAZIONE

Il valore ottenuto può essere interpretato come segue: tutte le possibili posizioni delle due palline rosse sono date dai sottoinsiemi di 2 elementi dell'insieme $\{1, \dots, 6\}$; il loro numero è $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2\cdot \cancel{4!}} = 15$ e tutti questi insiemi sono equiprobabili; e noi abbiamo il sottoinsieme $\{1, 6\}$ e quindi si ha la probabilità $\frac{1}{15}$.