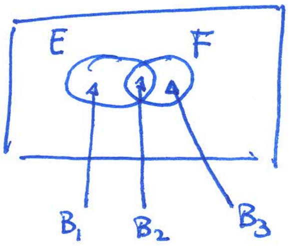
3.3) Specializziamo la formula al punto 2) con $E, F \in \mathcal{A}$, $h=3$, $B_1 = E\cap F^c$, $B_2 = E\cap F$, $B_3 = F \cap E^c$



Ovviamente $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = E \cup F$, e quindi

$$
\begin{aligned}
P(E\cup F) &= P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)\\
&= P(E\cap F^c)+P(E\cap F)+P(F\cap E^c)\\
&= \underbrace{P(E\cap F^c)+P(E\cap F)}_{=P(E)}+\underbrace{P(F\cap E^c)+P(E\cap F)}_{=P(F)}-P(E\cap F)
\end{aligned}
$$

si somma e si sottrae la stessa quantità

$$
\Longrightarrow \boxed{P(E\cup F) = P(E)+P(F)-P(E\cap F)}
$$

OSSERVAZIONE: L'uguaglianza ottenuta ha una interpretazione naturale. Prendendo $P(E)+P(F)$, si ha che $P(E\cap F)$ viene "presa due volte" e quindi dobbiamo sottrarre questa quantità. Se $E\cap F=\emptyset$ ritroviamo la 2) con $h=2$, $B_1=E$ e $B_2=F$.

La formula ottenuta nella 3.3) si estende al caso di più di due eventi (IDENTITÀ DI BONFERRONI). Qui richiamo quella per $n=3$: $\forall E,F,G \in \mathcal{A}$

$$
P(E\cup F\cup G) = P(E)+P(F)+P(G)-P(E\cap F)-P(E\cap G)-P(F\cap G)+P(E\cap F\cap G).
$$

COMMENTO GENERALE

Le proprietà della misura di probabilità sono svincolate dalla costruzione del modello, e quindi da come si definisce la misura di probabilità in questione per descrivere il fenomeno aleatorio (tale definizione può dipendere dallo stato di conoscenza dell'osservatore).