Logica e Reti Logiche
(Episodio 8: Il metodo dei *tableaux* per la Logica del Primo Ordine)

Francesco Pasquale

17 aprile 2023

Nell'Episodio 4 abbiamo introdotto il metodo dei *tableaux* per la logica proposizionale e nell'Episodio 5 abbiamo dimostrato che il metodo è *corretto* e *completo* (tutte e sole le formule della logica proposizionale dimostrabili con il metodo dei *tableaux* sono le tautologie).

Qui vediamo come il metodo dei *tableaux* si può facilmente estendere alla logica del primo ordine. Per seguire questo episodio è necessario aver familiarizzato con il metodo dei *tableaux* per la logica proposizionale (Episodio 4) e aver assimilato sintassi e semantica della logica del primo ordine (Episodio 7).

1 Le regole per i quantificatori

Abbiamo visto che possiamo classificare essenzialmente tutte le formule della logica proposizionale in due tipi: α-formule (quelle di tipo AND) e β-formule (quelle di tipo OR)

α	α_1	α_2
$X \wedge Y$	X	Y
$\neg(X \vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$\neg(X \to Y)$	X	$\neg Y$

β	β_1	β_2
$X \vee Y$	X	Y
$\neg(X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$X \to Y$	$\neg X$	Y

Ad ogni formula corrisponde una regola di estensione nei *tableaux*

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}} \qquad \begin{array}{ccc} & \beta & \\ \swarrow & & \searrow \\ \beta_1 & & \beta_2 \end{array}$$

Nella logica del primo ordine, in aggiunta alle α-formule e β-formule, abbiamo anche le formule che coinvolgono i quantificatori: per esempio, $\forall x P(x)$ e $\exists x P(x)$. Quali saranno le regole di estensione dei *tableaux* per questi tipi di formule? Vediamo.

$$\frac{\forall x P(x)}{P(a)} \qquad \frac{\exists x P(x)}{P(a)}$$

Un momento... la stessa regola per entrambi? Non può essere... infatti manca ancora qualcosa, ma prima di andare a vedere cosa manca riflettiamo un attimo sul significato delle due regole qui sopra. La prima traduce il ragionamento seguente: se è vero che la proprietà P vale per ogni elemento del dominio [ossia, $\forall x P(x)$] allora prendiamo un elemento a per cui la proprietà P vale [ossia, $P(a)$]. La seconda, questo: se è vero che deve esistere un elemento del dominio per cui vale la proprietà P [ossia, $\exists x P(x)$], allora prendiamo un elemento a per cui la proprietà P vale [ossia, $P(a)$]. Entrambi i ragionamenti sembrano corretti. Allora, cos'è che manca?

Quando incontriamo per la prima volta una formula del tipo $\exists x P(x)$ e aggiungiamo $P(a)$ al nostro *tableau*, questo è perfettamente legittimo, per il ragionamento che abbiamo fatto sopra. Ma immaginate che poi nel nostro percorso di scomposizione troviamo un'altra formula del tipo $\exists x Q(x)$. È legittimo aggiungere al nostro *tableau* $Q(a)$? Beh, riflettete un attimo sul fatto che la risposta è no, non è legittimo: perché anche se esiste un elemento del dominio per cui vale la proprietà Q, questo elemento non è necessariamente lo stesso per cui vale la proprietà P. Quindi in questo caso dobbiamo istanziare la proprietà Q su un altro elemento, diciamo b.

E se dopo aver esteso $\exists x P(x)$ con $P(a)$ incontriamo una formula del tipo $\forall x Q(x)$? Abbiamo lo stesso problema? Beh, no, perché siccome Q vale per tutti gli elementi del dominio, varrà anche per l'elemento a per cui vale la proprietà P.

Quindi, possiamo completare le nostre regole in questo modo

$\dfrac{\forall x P(x)}{P(a)}$	$\dfrac{\exists x P(x)}{P(a)}$
dove a è un parametro qualunque	dove a è un parametro mai usato prima

Oltre a quelle qui sopra, dobbiamo stabilire altre due regole: una per $\neg\exists x P(x)$ l'altra per $\neg\forall x P(x)$.

Esercizio 1. Prima di procedere è utile fermarsi un attimo e ragionare intuitivamente su quali dovrebbero essere le regole per $\neg\exists x P(x)$ e $\neg\forall x P(x)$.

Osservate che le formule $\forall x P(x)$ e $\neg\exists x P(x)$ sono di tipo *universale*, cioè si riferiscono a *tutti* gli elementi del dominio. Invece le formule $\exists x P(x)$ e $\neg\forall x P(x)$ sono di tipo *esistenziale*, cioè si riferiscono ad *almeno uno* degli elementi del dominio.

In analogia con quanto fatto per le formule della logica proposizionale, possiamo quindi classificare le formule della logica del primo ordine che coinvolgono i quantificatori in due categorie: le γ-formule (quelle di tipo UNIVERSALE) e le δ-formule (quelle di tipo ESISTENZIALE) con le relative regole di estensione dei *tableaux*.

Universali	Esistenziali
$\dfrac{\gamma}{\gamma(a)}$	$\dfrac{\delta}{\delta(a)}$
dove a è un parametro qualunque	dove a è un parametro mai usato prima

(1)

γ	$\gamma(a)$
$\forall x P(x)$	$P(a)$
$\neg\exists x P(x)$	$\neg P(a)$

δ	$\delta(a)$
$\exists x P(x)$	$P(a)$
$\neg\forall x P(x)$	$\neg P(a)$

Come nel caso della logica proposizionale, diciamo che un ramo di un *tableau* è chiuso se sul ramo c'è sia una formula che la sua negata. Diciamo che un *tableau* è chiuso se tutti i suoi rami sono chiusi e diciamo che una formula $\mathcal{F}$ è dimostrabile col metodo dei *tableaux* se partendo da $\neg\mathcal{F}$ e applicando le regole per le α, β, γ e δ formule riusciamo a ottenere un *tableau* chiuso.

2 Esempi

Esempio. Consideriamo la formula

$$\forall x P(x) \to \exists x P(x)$$

Nell'episodio precedente, ragionando intuitivamente abbiamo osservato che è impossibile trovare una interpretazione che la rende falsa, quindi la formula è valida. Facciamo vedere che è dimostrabile col metodo dei tableaux

$$\begin{array}{cc}
\neg\left[\forall x P(x) \to \exists x P(x)\right] & (1)\\
\forall x P(x) & (2)\\
\neg\exists x P(x) & (3)\\
P(a) & (4)\\
\neg P(a) & (5)
\end{array}$$

Le formule (2) e (3) vengono dalla (1) applicando la regola α, la (4) viene dalla (2) tramite la regola γ e la (5) dalla (3) sempre tramite la regola γ. La (4) e la (5) sono in coddraddizione quindi il *tableau*, che ha un unico ramo, è chiuso.

Esempio. Consideriamo un'altra formula che abbiamo già incontrato

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

Se avete svolto l'Esercizio 4 dell'episodio precedente, dovreste già avere un'idea intuitiva del perché questa formula deve essere valida. Qui vediamo che è dimostrabile col metodo dei *tableaux*.

$$
\begin{array}{cr}
\neg\,[\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)] & (1) \\
\exists x(P(x) \wedge Q(x)) & (2) \\
\neg[\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)] & (3) \\
P(a) \wedge Q(a) & (4) \\
P(a) & (5) \\
Q(a) & (6) \\
\swarrow \quad \searrow &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
(7) & \neg\exists x P(x) & \neg\exists x Q(x) & (8) \\
(9) & \neg P(a) & \neg Q(a) & (10)
\end{array}
$$

Le formule (2) e (3) vengono da (1) (regola α), la (4) dalla (2) (regola δ), (5) e (6) da (4) (regola α), (7) e (8) da (3) (regola β), infine (9) e (10) da (7) e (8) rispettivamente (entrambe regole γ). Le formule (9) e (5) sono in contraddizione, così come le formule (10) e (6). Quindi entrambi i rami sono chiusi. La formula è dimostrata.

Esercizio 2. Se avete svolto l'Esercizio 4 dell'episodio precedente, saprete che l'implicazione inversa

$$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

invece non è valida (se non l'avete già fatto, trovate una interpretazione in cui è falsa). Provate ad applicare il metodo dei *tableaux* a questa formula e vedrete che non riuscite a chiudere tutti i rami (se ci riuscite, state sbagliando ad applicare qualcuna delle regole. . .)

Le formule di tipo UNIVERSALE in un *tableau* possono essere estese più volte. E questo talvolta è necessario per ottenere un *tableau* chiuso.

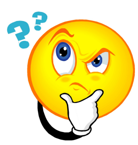
Esempio. Consideriamo la formula

$$\exists y[P(y) \to \forall x P(x)]$$

Pensate che sia valida oppure no? Intanto vediamo che è dimostrabile

$$
\begin{array}{cr}
\neg\exists y[P(y) \to \forall x P(x)] & (1) \\
\neg[P(a) \to \forall x P(x)] & (2) \\
P(a) & (3) \\
\neg\forall x P(x) & (4) \\
\neg P(b) & (5)
\end{array}
$$

La (2) viene dalla (1) (regola γ), (3) e (4) vengono dalla (2) (regola α). La (5) viene dalla (4) (regola δ), ma osservate che non ho potuto mettere $\neg P(a)$ e trovare una contraddizione con la (3), perché la (4) è di tipo ESISTENZIALE, quindi devo usare un parametro che non ho già usato prima. Quindi? Il *tableau* non si chiude e la formula non è dimostrabile?



. . . .

La formula (1) è di tipo UNIVERSALE, quindi posso *riusarla* con un altro parametro!

$$
\begin{array}{cc}
\neg\exists y[P(y) \to \forall x P(x)] & (1) \\
\neg[P(a) \to \forall x P(x)] & (2) \\
P(a) & (3) \\
\neg\forall x P(x) & (4) \\
\neg P(b) & (5) \\
 & \\
\neg[P(b) \to \forall x P(x)] & (6) \\
P(b) & (7) \\
\neg\forall x P(x) & (8)
\end{array}
$$

La (6) viene dalla (1), la (7) e la (8) vengono dalla (6) e non c'è bisogno di proseguire sviluppando la (8) perché la (7) e la (5) sono in contraddizione e il *tableau* è chiuso.

Esercizio 3. Date tre interpretazioni diverse della formula $\exists y[P(y) \to \forall x P(x)]$. Verificate che in tutte le interpretazioni la formula è `T` e cercate una spiegazione intuitiva del perché la formula non può essere `F`.

Esercizio 4. Tornate alla formula $\mathcal{F}$ dell'Esercizio 2 e osservate che non importa quante volte riusate le formule di tipo universale nello sviluppo del *tableau* che parte da $\neg\mathcal{F}$, lì non riuscite mai a ottenere una contraddizione.

Esercizio 5. Dimostrare col metodo dei *tableaux* le formule seguenti

1. $\forall y[\forall x P(x) \to P(y)]$
2. $\neg\exists y P(y) \to \forall y[\exists x P(x) \to P(y)]$
3. $\forall x[P(x) \land Q(x)] \equiv \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$
4. $\exists x[P(x) \lor Q(x)] \equiv \exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$

Esercizio 6. Considerate le due formule seguenti

$$\mathcal{F} : \forall x \exists y P(x,y) \qquad\qquad \mathcal{G} : \exists y \forall x P(x,y)$$

Scegliete almeno una delle opzioni seguenti:

1. $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è valida
2. $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ è valida
3. Nessuna delle due precedenti

- Se avete scelto solo 1, provate a trovare un *tableau* chiuso partendo da $\neg(\mathcal{F} \to \mathcal{G})$ e a dare una interpretazione in cui $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ è falsa.
- Se avete scelto solo 2, provate a trovare un *tableau* chiuso partendo da $\neg(\mathcal{G} \to \mathcal{F})$ e a dare una interpretazione in cui $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è falsa.
- Se avete scelto 3, provate a dare una interpretazione in cui $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è falsa e una in cui $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ è falsa.
- Se avete scelto 1 e 2, provate a trovare un *tableau* chiuso partendo da $\neg(\mathcal{F} \equiv \mathcal{G})$.
- Se avete scelto 1 e 3, oppure 2 e 3, oppure 1, 2 e 3, beh… forse è il caso di andare a dormire e tornare a fare questo esercizio domani.

3 Conclusioni

In questo episodio abbiamo visto come si estende il metodo dei *tableaux* alla logica del primo ordine.

Sono sicuro che sapete già cosa ci aspetta nel prossimo episodio... Dobbiamo dimostrare che il metodo è *corretto* (ogni formula dimostrabile col metodo dei *tableaux* è valida) e *completo* (ogni formula valida è dimostrabile col metodo dei *tableaux*).