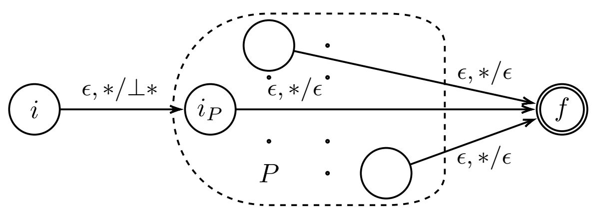
Linguaggi di programmazione - Principi e paradigmi 2/ed
Maurizio Gabbrielli, Simone Martini
Copyright © 2011 - The McGraw-Hill Companies srl

Approfondimento 4.1

Dimostrazione del Teorema 4.6

Per (i), sia $P = (\Sigma, Q, \Gamma, \delta, i_P, \perp, F)$ un PDA che riconosce L per pila vuota. Definiamo $P' = (\Sigma, Q \cup \{i, f\}, \Gamma \cup \{*\}, \delta', i, *, \{f\})$. Il nuovo automa P' si ottiene aggiungendo agli stati di P due nuovi stati i (stato iniziale) e f (unico stato finale di P'). Estendiamo anche l'alfabeto della pila, con un nuovo simbolo di fondo pila, $*$. La funzione di transizione δ' per prima cosa inserisce, senza consumare input, il fondo pila di P ($\perp$) sopra $*$; in seguito P' si comporta come P. Se P si trovava in una configurazione con pila vuota, P' adesso è in una configurazione con $*$ come unico simbolo sulla pila. In δ' aggiungiamo quindi anche le transizioni con etichetta $\epsilon, */\epsilon$ da *ogni* stato (originariamente) di P a f. La costruzione è esemplificata dalla figura:



Formalmente,

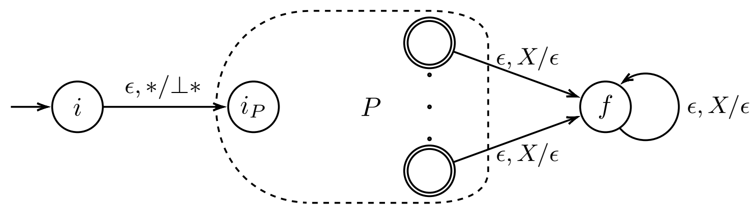
$$
\begin{aligned}
&\delta'(i, \epsilon, *) = \{(i, \perp *)\}, \\
&\delta'(q, a, X) = \delta(q, a, X), \quad \forall q \in Q \; \forall a \in \Sigma \cup \{\epsilon\} \; \forall X \in \Gamma \\
&\delta'(q, \epsilon, *) = \{(f, \epsilon)\}, \quad \forall q \in Q.
\end{aligned}
$$

Se P ha un cammino accettante per pila vuota, allora in P' lo stesso cammino, esteso con la prima transizione da i a i_P raggiunge lo stesso stato con $*$ sulla pila. La nuova transizione permette di raggiungere f senza consumare l'input, e dunque di accettare. Inversamente, per ogni computazione accettante in P', la penultima configurazione deve necessariamente avere la pila con $*$ sulla cima, ovvero, per costruzione, come unico simbolo. Ma questa computazione corrisponde, in P, ad una computazione che terminava con pila vuota, dunque accettante. Abbiamo dunque dimostrato che $\mathcal{N}[P] = \mathcal{L}[P']$.

Per (ii), sia $P = (\Sigma, Q, \Gamma, \delta, i_P, \perp, F)$ un PDA che riconosce L per stato finale. Definiamo $P' = (\Sigma, Q \cup \{i, f\}, \Gamma \cup \{*\}, \delta', i, *, \emptyset)$. La costruzione di

Linguaggi di programmazione - Principi e paradigmi 2/ed
Maurizio Gabbrielli, Simone Martini
Copyright © 2011 - The McGraw-Hill Companies srl

questo caso è esemplificata dalla figura:



Analogamente al caso precedente aggiungiamo un nuovo simbolo di fondo pila, ma δ', oltre a simulare δ e a inserire in pila il fondo pila di P, ha transizioni etichettate $\epsilon, X/\epsilon$ da ogni stato finale di P al nuovo stato f. Una volta su f l'automa cicla, finché può, con transizioni $\epsilon, X/\epsilon$, cioè svuota la pila senza consumare input. Formalmente,

$$\begin{array}{l}
\delta'(i, \epsilon, *) = \{(i, \bot *)\}, \\
\delta'(q, a, X) = \delta(q, a, X), \quad \forall q \in Q \; \forall a \in \Sigma \cup \{\epsilon\} \; \forall X \in \Gamma \\
\delta'(q, \epsilon, X) = \{(f, \epsilon)\}, \quad \forall q \in F \; \forall X \in \Gamma \cup \{*\} \\
\delta'(f, \epsilon, X) = \{(f, \epsilon)\}, \quad \forall X \in \Gamma \cup \{*\}.
\end{array}$$

Si osservi che il nuovo simbolo di fondo pila impedisce a P' di accettare (per pila vuota) se P si portava in una configurazione con pila vuota ma stato non finale. Come prima, non è difficile mostrare che $\mathcal{L}[P] = \mathcal{N}[P']$. $\square$