Approfondimento 3.9

Dimostrazione del Teorema 3.32

L'algoritmo non prende mai in considerazione due volte una stessa coppia: dunque termina sempre.

Dimostriamo prima che se p e q sono distinguibili, allora (p, q) (o (q, p): non distinguiremo ulteriormente questo caso nella dimostrazione) è marcata X. Sia w una delle stringhe più corte che distinguono p da q. Dimostriamo per induzione sulla lunghezza di w che (p, q) è marcata. Se $w = \epsilon$, siccome p e q sono distinguibili, uno dei due deve essere finale, e l'altro non finale. Ma allora (p, q) riceve X al punto 1. Per il passo, sia w di lunghezza $i \geq 1$ e supponiamo (ipotesi induttiva) che se due stati sono distinti da una stringa v con $|v| < i$, allora la loro casella è marcata X. Sia dunque $w = av$, per $a \in \Sigma$ e siano $r = \delta(p, a)$ e $s = \delta(q, a)$. Siccome w distingue p da q ed è di lunghezza minima, $r \neq s$ e r e s sono distinti da v. Ma allora, per ipotesi induttiva, la casella (r, s) viene marcata. Questa marcatura può avvenire prima o dopo che (p, q) venga elaborata dall'algoritmo. Se avviene prima dell'elaborazione di (p, q), allora (p, q) riceve subito X al passo 2a. Se, invece, viene prima elaborata (p, q), questa coppia viene messa nella lista di (r, s) al passo 2. Quando (r, s) riceverà la sua marca, la sua lista verrà considerata al passo 2b, e (p, q) sarà marcata. In ogni caso, dunque, se p e q sono distinguibili, (p, q) viene prima o poi marcata con X.

Dimostriamo ora che se (p, q) è marcata al termine dell'algoritmo, allora p e q sono distinguibili. Lo dimostriamo per induzione sul numero di coppie marcate. Se una sola coppia è marcata, questo può essere avvenuto solo al passo 1 e dunque i due stati sono distinti da ϵ. Supponiamo adesso che siano state marcate $n + 1$ coppie e che la tesi valga per n coppie. La $(n + 1)$-esima coppia (r, s) può essere marcata: (i) al passo 1, e allora r e s sono distinti da ϵ; (ii) al passo 2a, nel qual caso $(\delta(r, a), \delta(s, a))$ era già marcata e dunque, applicando l'ipotesi induttiva, $\delta(r, a)$ e $\delta(s, a)$ sono distinguibili e di conseguenza anche r e s lo sono; (iii) al passo 2b, nel qual caso (r, s) era nella lista di una coppia (p, q) (ovvero $p = \delta(r, b)$ e $q = \delta(s, b)$ per qualche $b \in \Sigma$) che è stata appena marcata e dunque, applicando l'ipotesi induttiva, p e q sono distinguibili; da cui segue che r e s sono distinguibili. □