Approfondimento 4.2

Dimostrazione del Teorema 4.8
Dimostremo separatamente le due implicazioni, espresse come segue:
(i) Se L è libero, allora esiste un PDA P tale che $L = \mathcal{N}[P]$.
(ii) Se $L = \mathcal{L}[P]$ per un PDA P, allora L è libero da contesto.

Iniziamo con (i). Se L è libero, sia $G = (NT, T, R, S)$ una grammatica che lo genera. Definiamo $P = (T, \{q\}, T \cup NT, \delta, q, S, \emptyset)$: ha un solo stato q; l'alfabeto dell'input coincide (ovviamente) con l'insieme dei terminali, mentre sulla pila possiamo mettere sia terminali che non terminali. Il simbolo di fondo pila è il simbolo iniziale della grammatica. La funzione di transizione simula la costruzione di una derivazione sinistra (meglio: tenta non deterministicamente di simulare le derivazioni sinistre il cui prefisso coincide con la porzione di input già consumata):

$$\begin{aligned}&\delta(q, \epsilon, A) = \{(q, \beta) \mid A \to \beta \in R\},\\ &\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}, \quad \forall a \in T.\end{aligned}$$

Ogni volta che P ha un non terminale A sulla pila, sceglie non deterministicamente una produzione che abbia A come testa, senza consumare input. Se invece sulla pila c'è un terminale a, se l'input presenta a, questo viene consumato e si ritorna in q, altrimenti (cioè l'input presenta $b \neq a$) questa computazione si blocca (ma non deterministicamente ce ne potranno essere altre con b in cima alla pila...).

La conclusione e l'implicazione (ii) sono lasciate per esercizio.