Approfondimento 3.3

Dimostrazione del Teorema 3.18
Sia $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ un NFA e sia $M_N = (\Sigma, \mathcal{T}, \Delta, \epsilon\text{-}clos(q_0), \mathcal{F})$ l'automa ottenuto da N con la costruzione per sottinsiemi. Osserviamo in primo luogo che M_N è un automa finito deterministico. Infatti, la costruzione per sottinsiemi ci assicura che $\Delta(S, a)$ è definita per ogni coppia (S, a) con $S \in \mathcal{T}$ e $a \in \Sigma$. Inoltre $\Delta(S, a)$ è certo un elemento di $\mathcal{T}$, ancora per costruzione. Dunque l'unica cosa da dimostrare è che $\mathcal{L}[N] = \mathcal{L}[M_N]$.

Prima di iniziare la dimostrazione, osserviamo che la nozione di ϵ-chiusura si riduce all'indentità nel caso di un qualsiasi DFA (che, per definizione, non possiede ϵ-transizioni): per ogni insieme di stati R di un DFA, $\epsilon\text{-}clos(R) = R$.

Useremo la funzione estesa $\hat{\delta}$. In particolare, detto $i_M = \epsilon\text{-}clos(q_0)$ lo stato iniziale di M_N, ci basterà mostrare che per ogni stringa $w \in \Sigma^*$ si ha $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\Delta}(i_M, w)$. Lo facciamo per induzione sulla lunghezza di w.

Base: $|w| = 0$, cioè $w = \epsilon$. Per definizione di $\hat{\delta}$, si ha $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-}clos(q_0) = i_M$. D'altra parte, $\hat{\Delta}(i_M, \epsilon) = \epsilon\text{-}clos(i_M) = i_M$, perché in un DFA la ϵ-chiusura è l'identità.

Passo: $w = xa$, con $a \in \Sigma$ e $x \in \Sigma^*$; per ipotesi induttiva, supponiamo che $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\Delta}(i_M, x) = \{p_1, \ldots, p_k\}$ e dobbiamo dimostrare che $\hat{\delta}(q_0, xa) = \hat{\Delta}(i_M, xa)$. Per definizione di $\hat{\delta}$, si ha

$$\hat{\delta}(q_0, xa) = \epsilon\text{-}clos(\cup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)).$$

Allo stesso modo con $\hat{\Delta}$, per definizione, sfruttando l'ipotesi induttiva e trascurando la ϵ-chiusura, si ha

$$\hat{\Delta}(i_M, xa) = \Delta(\{p_1, \ldots, p_k\}, a).$$

Prendiamo ora in considerazione la definizione di Δ che si ottiene con la costruzione per sottinsiemi. L'algoritmo dà, sfruttando la definizione di *mossa*:

$$\Delta(\{p_1, \ldots, p_k\}, a) = \epsilon\text{-}clos(mossa(\{p_1, \ldots, p_k\}, a)) = \epsilon\text{-}clos(\cup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)).$$

□