Corso di Laurea in Ingegneria Informatica - Politecnico di Torino
Anno Accademico 2023-2024

CONTROLLI AUTOMATICI (18AKSOA)

D. Regruto

Esercitazione di laboratorio - Lab 3

Obiettivi principali

Conclusa l'esercitazione, lo studente dovrà essere in grado di:

1. Calcolare i punti di equilibrio di un sistema dinamico nonlineare e studiarne la stabilità.
2. Linearizzare un sistema dinamico nonlineare nell'intorno di un punto di equilibrio.
3. Comparare il comportamento di un sistema nonlineare e del corrispondente sistema linearizzato mediante simulazione numerica in Simulink.
4. Progettare un sistema di controllo in retroazione statica dallo stato.

Problema 1

Si consideri il modello nonlineare della dinamica glucosio-insulina denominato "Bergmann's minimal model" descritto dalle seguenti equazioni di ingresso-stato-uscita:

$$\dot{G}(t) = -p_1(G(t) - G_b) - \beta(t)G(t) + \Gamma(t)/V_G \quad (1)$$
$$\dot{I}(t) = -nI(t) + r(t)/V_1 \quad (2)$$
$$\dot{\beta}(t) = -p_2\beta(t) + p3(I(t) - I_b) \quad (3)$$

in cui:

- $G(t)$ è la concentrazione di glucosio nel plasma espressa in [mg/dl];
- $I(t)$ è la concentrazione di insulina nel plasma espressa in [mU/l];
- $\beta(t)$ misura l'effetto dell'insulina sulla riduzione netta di glucosio nel sangue nell'unità di tempo ed è espressa in [min^{-1}];
- G_b è il livello basale della concentrazione di glucosio nel plasma;
- I_b è il livello basale della concentrazione di insulina nel plasma;
- $\Gamma(t)$ è il tasso di assorbimento del glucosio nell'apparato digerente a fronte di un pasto. Espressa in mg/min.
- $r(t)$ è la velocità di infusione di insulina dall'esterno. Espressa in mU/min.

Valori ragionevoli dei parametri del modello di Bergmann per un paziente affetto da una forma grave di Diabete di tipo I sono i seguenti:

- $p1 = 0.003$ min^{-1}
- $p2 = 0.025$ min^{-1}
- $p3 = 0.000013$ (l/mU)min^2
- $V_1 = 12$ l
- $V_G = 126$ dl
- $n = 5/54$ min^{-1}
- $G_b = 81$ mg/dl
- $I_b = 15$ mU/l

Le variabili di stato, gli ingressi e le uscite del sistema sono rispettivamente $x = [G\ I\ \beta]^T$, $u = [r(t)\ \Gamma(t)]^T$ e $y = G$.

1. Assumere come ingressi del sistema $r(t) = \overline{r} = 16.66667$ mU/min e $\Gamma(t) = \overline{\Gamma} = 0$ e determinare l'insieme $\overline{x}$ di tutti gli stati di equilibrio corrispondenti a tale ingresso verificando, in particolare, che risulta

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 81 & 15 & 0 \end{bmatrix}^T \in \overline{X} \tag{4}$$

2. Determinare la rappresentazione in variabili di stato:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = \tilde{A}\delta x(t) + \tilde{B}\delta u(t) \\ \\ \delta y(t) = \tilde{C}\delta x(t) + \tilde{D}\delta u(t) \end{cases} \tag{5}$$

del sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio $(\overline{x}, \overline{u})$.

3. Studiare la stabilità del punto di equilibrio $(\overline{x}, \overline{u})$.

4. Costruire uno schema SIMULINK idoneo a simulare, nel dominio del tempo, il modello di Bergmann e simularlo in presenza dell'ingresso $u(t) = \overline{u}$ e condizioni iniziali nulle. Verificare che, trascorso un tempo sufficientemente lungo, il sistema raggiunge lo stato di equilibrio $x(t) = \overline{x}$.

5. Costruire uno schema SIMULINK idoneo a simulare, nel dominio del tempo, il sistema linearizzato e simularlo in presenza dell'ingresso $\delta u(t) = [\delta r(t)\delta\Gamma(t)]^T$ con $\delta r(t) = 0$ e assumendo per $\delta\Gamma(t)$ il profilo di tasso di assorbimento del glucosio corrispondente ad un pasto contenente 50 g di glucosio (file `Sim_pasto_50g.mdl`) e condizioni iniziali $\delta x(0) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

6. Costruire uno schema SIMULINK che, in presenza dell'ingresso $u(t) = \overline{u} + \delta u(t)$ con $\delta u(t)$ come al punto precedente, permetta di confrontare il comportamento del sistema non lineare, partendo dalla condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 9 + 81 & 15 & 0 \end{bmatrix}^T$, con quello del sistema linearizzato a fronte dell'ingresso $\delta u(t)$ e condizioni iniziali $\delta x(0) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

7. Analizzare le proprietà di raggiungibilità/controllabilità del sistema linearizzato.

8. Progettare (se possibile) una legge di controllo in retroazione statica dallo stato (assumendo che le variabili di stato siano tutte misurabili). Analizzare il comportamento del sistema corrispondente a diverse scelte degli autovalori.