Soluzione all'esercizio del 2022-05-06 creato per luigi.miazzo

Abbiamo in un piccolo contenitore, un moscerino della frutta, la cui durata di vita (in settimane) può essere descritta da una variabile aleatoria X con densità di probabilità

$$f_X(x) = c\lambda x e^{-\lambda x^2} \quad \lambda, x > 0$$

con $\lambda = 1.53$. Il contenitore è monitorato attraverso un sensore, la cui durata (sempre in settimane) può essere descritta da una variabile aleatoria Y di densità

$$f_Y(y) = \alpha e^{-\alpha y} \quad y \geq 0$$

con $\alpha = 0.81$.

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Determinare c affinché f_X sia una densità di probabilità.

Osserviamo che $-2\lambda x = \frac{d}{dx}(-\lambda x^2)$, allora

$$F_X(t) = \int_0^t c\lambda x e^{-\lambda x^2} dx = -\frac{c}{2}\int_0^t -2\lambda x e^{-\lambda x^2} dx = -\frac{c}{2}\left[e^{-\lambda x^2}\right]_0^t = \frac{c}{2} - \frac{c}{2}e^{-\lambda t^2}.$$

Per $t \to +\infty$ deve essere uguale a 1, quindi $c = 2$. Abbiamo anche già la funzione di ripartizione di X, che ci verrà comoda a breve.

- La risposta corretta è: 2
- La risposta inserita è: 2

Quesito 2

Calcolare $P(X \in [0.29, 1.88])$.

Avendo la funzione di ripartizione, ci basta calcolarla in 0.29 e sottrarre questo valore a quello di F_X calcolata in 1.88. (NB: stiamo sfruttando che la funzione di ripartizione è continua.)

- La risposta corretta è: 0.8747792
- La risposta inserita è: 0.8747792

Quesito 3

Calcolare il momento primo (o momento di ordine 1) di Y.

Il momento primo, noto anche come valore atteso o speranza, si calcola per le variabili aleatorie continue nel modo seguente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} y \cdot \alpha e^{-\alpha y} dy = \frac{1}{\alpha}$$

usando l'integrazione per parti.

- La risposta corretta è: 1.2345679
- La risposta inserita è: 1.234568

Quesito 4

Calcolare il momento secondo di Y.

Il momento secondo (che non è necessariamente la varianza, ad esempio, non lo è in questo caso) si ottiene in modo analogo al momento primo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} y^2 \cdot \alpha e^{-\alpha y} dy = \frac{2}{\alpha^2}$$

usando due volte l'integrazione per parti.

- La risposta corretta è: 3.0483158
- La risposta inserita è: 3.048316

Quesito 5

Calcolare la probabilità che il moscerino sopravviva al più 0.48 settimane e il sensore duri al più 1.01 settimane.

Le due variabili aleatorie sono indipendenti, quindi possiamo calcolarne la funzione di ripartizione congiunta semplicemente moltiplicando le funzioni di ripartizione. Abbiamo già F_X e dobbiamo solo ricavare F_Y:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(\eta) d\eta = \int_0^y \alpha e^{-\alpha\eta} d\eta = 1 - e^{-\alpha y}.$$

Ora $F_{X,Y}(0.48, 1.01) = F_X(0.48) \cdot F_Y(1.01)$.

- La risposta corretta è: 0.1659876
- La risposta inserita è: 0.1659876