Soluzione all'esercizio del 2022-05-26 creato per luigi.miazzo

Sia $(X_1, \ldots, X_n)$ un campione casuale da una distribuzione ignota di cui sappiamo che il valore medio è $w = -4.45$ e la varianza è pari a $w^2 = 19.8025$ (i.e. le X_i sono indipendenti ed identicamente distribuite).

Si considerino i seguenti stimatori della media

$$T_1 = \frac{10X_1 + 2X_2 + 9X_3}{21}, \quad T_2 = \frac{10X_1 + 9X_3}{19}.$$

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Calcolare la distorsione degli stimatori T_1, T_2.

Inserire la risposta come un array `c(stima_2, stima_2)`.

Per calcolare la distorsione di uno stimatore T, $\mathbb{E}(T-\mu)$, dobbiamo innanzitutto calcolarne il valore atteso.

$$\mathbb{E}(T_1) = \frac{10\mathbb{E}(X) + 2\mathbb{E}(X) + 9\mathbb{E}(X)}{21} = \mathbb{E}(X) = w$$
$$\mathbb{E}(T_2) = \frac{10\mathbb{E}(X) + 9\mathbb{E}(X)}{19} = \mathbb{E}(X) = w$$

Per cui entrambi gli stimatori sono non distorti.

- La risposta corretta è: 0, 0
- La risposta inserita è: c(0, 0)

Quesito 2.

Calcolare la varianza degli stimatori T_1, T_2.

Inserire la risposta come un array `c(stima_2, stima_2)`.

La varianza di uno stimatore T è, da definizione

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(T) = \mathbb{E}\left(T - (\mathbb{E}(T))^2\right).$$

Ricordiamo inoltre che la varianza per trasformazioni lineari di variabili casuali ($n = 2$) soddisfa:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(aX + bY + c) = a^2\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + b^2\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + 2ab\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$$
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(T_1) = \frac{100\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + 4\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + 81\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}{441} = \frac{185}{441}w^2$$
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(T_2) = \frac{100\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + 81\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}{361} = \frac{181}{361}w^2$$

- La risposta corretta è: 8.30717120181406, 9.92867728531856
- La risposta inserita è: c(8.307171, 9.928677)

Quesito 3.

Calcolare l'errore quadratico medio degli stimatori T_1, T_2.

Inserire la risposta come un array `c(stima_2, stima_2)`.

A questo punto abbiamo già tutto quello che ci serve, poiché l'errore quadratico medio (mean square error, MSE) di uno stimatore T è: $\mathrm{MSE}(T, \mu) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(T) + (\mathbb{E}(T-\mu))^2$.

Per cui

$$\mathrm{MSE}(T_1, \mu) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(T_1), \qquad \mathrm{MSE}(T_2, \mu) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(T_2)$$

- La risposta corretta è: 8.30717120181406, 9.92867728531856
- La risposta inserita è: c(8.307171, 9.928677)