Soluzioni all'esercizio del 2022-04-07 creato per luigi.miazzo

In questo esperimento casuale abbiamo due sacchetti A e B e una moneta non equilibrata di parità $p = 0.4$ (probabilità che esca testa): il sacchetto A contiene 10 biglie rosse R_A e 4 nere N_A, il sacchetto B contiene 6 biglie rosse R_B e 8 nere N_B.

Vogliamo fare due estrazioni. Prima di pescare, lanciamo la moneta per decidere da quale sacchetto pescare. Se esce testa "T" peschiamo dal sacchetto A, se esce croce "C" peschiamo da B. Quando peschiamo una biglia la reimmettiamo nel sacchetto prima di lanciare nuovamente la moneta e procedere alla seconda estrazione.

Quesiti e soluzioni

Osservazioni:

- In questo esperimento ci sono due fasi: prima il lancio della moneta per decidere da quale sacchetto pescare e poi l'estrazione della biglia colorata.
- È importante tener conto del reinserimento della biglia nel sacchetto dopo la prima estrazione.

Abbiamo due lanci di moneta. Gli esiti dell'esperimento sono

$$(T,T,R_A,R_A),(T,T,R_A,N_A),(T,T,N_A,R_A),(T,T,N_A,N_A) \qquad (T,C,R_A,R_B),(T,C,R_A,N_B),(T,C,N_A,R_B),(T,C,N_A,N_B)\ (C,C,R_B,R_B),(C,C,R_B,N_B),(C,C,N_B,R_B),(C,C,N_B,N_B) \qquad (C,T,R_B,R_A),(C,T,R_B,N_A),(C,T,N_B,R_A),(C,T,N_B,N_A)$$

La moneta non è equilibrata, quindi $P(T) = 0.4$ e $P(C) = 1 - 0.4$. La probabilità di estrarre una biglia rossa (risp. nera) dal sacchetto A è $\frac{10}{14} = 0.7142857$ (risp. $\frac{4}{14} = 0.2857143$). Lo stesso vale per il sacchetto B considerando i corrispondenti numeri di biglie rosse e nere in B.

Quesito 1

Qual è la probabilità di pescare entrambe le volte da B e che entrambe le biglie pescate siano nere?

Pescare due volte da B significa che abbiamo ottenuto (C,C) dai lanci della moneta, evento la cui probabilità è $P(C,C) = 0.6^2$. Allora, indicando con NN l'evento in cui abbiamo estratto due biglie nere, abbiamo

$$P((C,C),NN)) = P(NN \cap (C,C))) = P(NN|(C,C))P(C,C) = 0.5714286 \cdot 0.5714286 \cdot 0.6^2 = 0.117551.$$

- La risposta corretta è: 0.117551
- La risposta inserita è: 144/1225

Quesito 2

Qual è la probabilità di pescare una volta da A e una volta da B e di estrarre due biglie nere?

Se peschiamo una volta da A e una volta da B, vuol dire nei due lanci della moneta abbiamo ottenuto (T,C) o (C,T). Sia $H = \{(T,C),(C,T)\}$ l'evento in questione: ha probabilità $P(H) = P(T,C) + P(C,T) = 2p(1-p)$. Allora, considerando come prima l'evento NN, abbiamo

$$P(H,NN) = P(NN \cap H) = P(NN|H)P(H) = 0.2857143 \cdot 0.5714286 \cdot 2 \cdot 0.4(1-0.4) = 0.0783673.$$

- La risposta corretta è: 0.0783673
- La risposta inserita è: 96/1225

Quesito 3

Qual è la probabilità di aver estratto almeno una biglia rossa da B?

Qui possiamo ottenere "almeno una R_B" in tre modi, mutualmente esclusivi

1. Lanciamo la moneta due volte e otteniamo (T,C) o (C,T) e poi estraiamo una biglia rossa da B. Questo evento ha probabilità $2p(1-p) \cdot P(R_B)$.
2. Lanciamo la moneta due volte e otteniamo (C,C) e poi estraiamo una sola biglia rossa da B. Questo evento ha probabilità $0.6^2 \cdot 2 \cdot P(R_B) \cdot (1 - P(R_B))$.
3. Lanciamo la moneta due volte e otteniamo (C,C) e poi estraiamo due biglie rosse da B. questo evento ha probabilità $0.6^2(P(R_B))^2$

Sia F l'evento "estraiamo almeno una biglia R_B ". Allora

$$P(F) = P(\text{una } R_B|H)P(H) + P(\text{almeno una } R_B|(C,C))P((C,C)) \qquad = 2p(1-p) \cdot P(R_B) + 0.6^2 \cdot (P(R_B)^2 + 2 \cdot P(R_B)(1 - P(R_B))) \ = 0.4481633.$$

Possiamo anche ottenere la risposta passando dal complementare, ossia calcolando la probabilità che "non otteniamo alcuna R_B" e sottraendola a 1. Il risultato è chiaramente lo stesso.

Una terza possibilità è la seguente: consideriamo i due eventi complementari "esce una R_B alla prima estrazione" e "esce una R_B alla seconda estrazione, dopo che alla prima non è uscita R_B". In questo caso le probabilità sono scritte $P(F) = P(R_B) + (1 - P(R_B)) \cdot P(R_B)$ ma il risultato è il medesimo.

- La risposta corretta è: 0.4481633
- La risposta inserita è: 549/1225