Esercizio del 2022-05-05 creato per luigi.miazzo

Consideriamo la seguente funzione, $f(x,y) = k \cdot (7x + 10y)$ per $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ e nulla altrove.

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Per quale valore di k, $f(x,y)$ è una densità di probabilità?

Affinchè $f(x,y)$ sia una densità di probabilità, deve valere $f(x,y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$ e il suo integrale su $\mathbb{R}^2$ deve essere uguale a 1. Dobbiamo quindi determinare k per cui entrambe queste proprietà sono verificate.

Deve valere:

$$1 = \int\int_{\mathbb{R}^2} k \cdot (7x + 10y) dx dy = k \cdot \int_0^1 \int_0^1 (7x + 10y) dx dy = k \cdot \left(\frac{7+10}{2}\right),$$

da cui $k = \frac{2}{7+10}$.

- La risposta corretta è: 0.1176471
- La risposta inserita è: 2/17
- che corrisponde a 0.1176471

Quesito 2

Siano X, Y variabili aleatorie con la densità congiunta $f_{X,Y}(x,y) = f(x,y)$ determinata nel quesito 1. Indichiamo con f_X (f_Y) la densità marginale di X (Y) e con F_X (F_Y) la rispettiva funzione di distribuzione (o ripartizione).

Quanto valgono $F_X(0.2)$ e $F_Y(0.65)$? Inserire i due valori come vettore `c(valore1, valore2)`.

Determiniamo la densità marginale di X. Per $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy = \frac{2}{7+10} \int_0^1 (7x + 10y) dy \\ &= \frac{2}{7+10} \left(7x + \frac{10}{2}\right), \end{aligned}$$

e nulla altrove.

Analogamente, per $y \in [0,1]$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx = \frac{2}{7+10} \cdot \left(\frac{7}{2} + 10y\right)$$

e nulla altrove.

Ora, non ci resta che calcolare i rispettivi integrali $F_X(0.2) = \int_{-\infty}^{0.2} f_X(x) dx$ e $F_Y(0.65) = \int_{-\infty}^{0.2} f_y(y) dy$.

$F_X(0.2) = \frac{2}{7+10} \left(7 \frac{0.2^2}{2} + \frac{100.2}{2}\right) = 0.1341176$ e analoamente $F_Y(0.65) = 0.5161765$

- La risposta inserita è: c(0.1341176, 0.5161764)

Quesito 3

Qual è il valore atteso di $XY + 0.334$?

Si osservi che, dato il vettore aleatorio bivariato (X,Y), possiamo scrivere $Z = g(X,Y) = XY$ e il valore atteso $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(g(X,Y)) = \int g(x,y) f(x,y) dx\, dy$. Dopodiché prestate attenzione alla domanda!

Come prima cosa, osserviamo che per linearità $E[0.334 + XY] = 0.334 + E[XY]$. Possiamo quindi calcolarci $E[XY]$ e andarlo poi a sommare a 0.334.

Qui abbiamo un vettore aleatorio (X,Y) e $Z = g(X,Y) = XY$ per cui il valore atteso è

$$E[Z] = \int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y) dx dy = \frac{2}{7+10} \cdot \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot (7x + 10y) dx dy \qquad = \frac{2}{7+10} \cdot \left(\frac{7+10}{6}\right) = \frac{1}{3}.$$

Per concludere, come detto, basta aggiungere al valore ottenuto 0.334.

- La risposta corretta è: 0.6673333
- La risposta inserita è: 0.6673333
- che corrisponde a 0.5161764