2022-06-01
2022-05-31
2022-05-30
2022-05-27
2022-05-26
2022-05-25
2022-05-24
2022-05-23
2022-05-20
2022-05-19
2022-05-18
2022-05-17
2022-05-16
2022-05-13
2022-05-12
2022-05-11
2022-05-10
2022-05-09
2022-05-06
2022-05-05
2022-05-04
2022-05-03
2022-05-02
2022-04-29
2022-04-28
2022-04-27
2022-04-26
2022-04-22
2022-04-21
2022-04-20
2022-04-19
2022-04-15
2022-04-14
2022-04-13
2022-04-12
2022-04-11
2022-04-08
2022-04-07
2022-04-06
2022-04-05
2022-04-04
2022-04-01
2022-03-31
2022-03-30
2022-03-29
2022-03-28
2022-03-24

Soluzione all' esercizio del 2022-05-18 creato per luigi.miazzo

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti di legge esponenziale di parametri $\lambda_1 = 0.8$ e $\lambda_2 = 1.9$ rispettivamente.

Sia $U := \min\{X, Y\}$.

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Qual è la distribuzione di U?

Determinare la funzione di ripartizione F_U e implementarla in R, inserendola come una funzione ad un parametro, del tipo: `function(x) {...}` .

Fate attenzione al supporto della variabile U, cioè l'insieme su cui U è definita, diversa da zero.

Ricordate che la funzione deve essere vettorializzata, e quindi usate `ifelse()` al posto di `if...else...` . Attenzione a **non** inserire il `return` negli argomenti `yes` / `no` della funzione `ifelse` , poiché questo causa l'uscita automatica dalla funzione `ifelse` al primo `return` (indipendentemente dal fatto che la condizione `test` sia soddisfatta o meno).

Cominciamo dal suggerimento riguardo al supporto di U: X e Y sono definite su $(0, +\infty)$, per cui anche il loro minimo avrà valori da 0 a $+\infty$, estremi esclusi.

Dobbiamo trovare $F_U(u) = P(U \leq u) = 1 - P(U > u)$. In questo caso la seconda caratterizzazione ci è più utile. Osserviamo infatti che, affinché $\min\{X, Y\} > u$, entrambe le variabili devono soddisfare $X > u$, $Y > u$, da cui

$$\begin{aligned} P(U > u) &= P(\min\{X, Y\} > u) \\ &= P(X > u, Y > u) \\ &= P(X > u)P(Y > u) \\ &= \exp\{-\lambda_1 u\} \exp\{-\lambda_2 u\} \\ &= \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2)u\}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ricavato che $F_U(u) = 1 - \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2)u\}$, per cui $U \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Chiamiamo $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

In R:

```
function(u) {ifelse(u >= 0, 1 - exp(-lambda * u), 0)}
```

Si noti che la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria esponenziale si annulla in 0, per cui le condizioni `u >= 0` e `u > 0,` portano allo stesso risultato.

- La risposta inserita è: function(x){ifelse(x >= 0, 1-exp(-2.7*x), 0)}

Quesito 2

Quanto vale $P(U > 0.914 | Y > 0.432)$?

Notazione: usiamo u e y generici per la spiegazione della soluzione, in questo modo possiamo avere un'unica spiegazione per entrambi i quesiti.

$$\begin{aligned} P(U > u | Y > y) &= \frac{P(U>u, Y>y)}{P(Y>y)} \\ &= \frac{P(\min\{X,Y\}>u, Y>y)}{P(Y>y)} \\ &= \frac{P(X>u, Y>u, Y>y)}{P(Y>y)}. \end{aligned}$$

Consideriamo, ora, l'intersezione $\{Y > u\} \cap \{Y > y\}$, essa corrisponde all'insieme $\{Y > \max\{u, y\}\}$, da cui

$$\begin{aligned} P(U > u | Y > y) &= \frac{P(X>u, Y>u, Y>y)}{P(Y>y)} \\ &= \frac{P(X>u, Y>\max\{u,y\})}{P(Y>y)} \\ &= \frac{P(X>u)P(Y>\max\{u,y\})}{P(Y>y)} \end{aligned}$$

ove abbiamo usato il fatto che X e Y sono indipendenti.

- La risposta corretta è: 0.1926269
- La risposta inserita è: 0.1926269
- che corrisponde a 0.1926269

Quesito 3

Quanto vale $P(U > 0.432 | Y > 0.914)$?

Possiamo usare l'argomento visto per il quesito 2 e sostituire i valori assegnati in questo quesito per avere la risposta.

- Risposta corretta: 0.7077955
- Risposta inserita: 0.7077955
- che corrisponde a 0.7077955

Quesito 4

Qual è il valore atteso di XY, $\mathbb{E}(XY)$?

Le due variabili sono indipendenti, quindi $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda_1}\frac{1}{\lambda_2}$.

- Risposta corretta: 0.6578947
- Risposta inserita: 0.6578947
- che corrisponde a 0.6578947