Soluzioni all'esercizio del 2022-04-04 creato per luigi.miazzo

Si consideri il lancio di una moneta, di cui non si sa se sia equilibrata o truccata. Ci viene detto che, lanciando la moneta due volte, la probabilità di ottenere esattamente una testa "T" e una croce "C" (non necessariamente in questo ordine) è 0.455.

N.B. Dire che la moneta è equilibrata significa che testa e croce sono equiprobabili.

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

La moneta è equilibrata?

L'evento in questione è $H = \{(T,C),(C,T)\} = \{(T,C)\} \cup \{(C,T)\}$. Possiamo vederlo come evento in uno spazio prodotto, quindi, in termini di lanci di una moneta, come $(\{T\} \times \{C\}) \cup (\{C\} \times \{T\})$.

Se la moneta fosse equilibrata avremmo

$$P(H) = P(\{T\} \times \{C\}) + P(\{C\} \times \{T\}) = 2 \cdot P_m(T) \cdot P_m(C) = \frac{1}{2},$$

dove con P_m indichiamo la probabilità relativa al lancio di una sola moneta. Basta quindi confrontare 0.455 con ½.

- La risposta corretta è: FALSE
- La risposta inserita è: FALSE

Quesito 2

Ora che sappiamo cosa aspettarci, giochiamo. Supponiamo che la probabilità di fare croce $P_m(C)$ sia minore o uguale della probabilità $P_m(T)$ di fare testa. Tiriamo la moneta ed esce T. Qual è la probabilità di ottenere nuovamente T rilanciando la moneta?

Sappiamo che $2 \cdot P_m(T) \cdot P_m(C) = 0.455$, quindi, siccome $P_m(T) = 1 - P_m(C)$, $2 \cdot P_m(C)^2 - 2 \cdot P_m(C) + 0.455 = 0$, le cui due radici sono $P_1 = 0.35$ e $P_2 = 0.65$. Una di queste è $P_m(C)$ e l'altra è (per simmetria) $P_m(T)$, ma dal momento che abbiamo assunto che $P_m(C) \leq P_m(T)$, deve essere $P_m(C) = 0.35$ e dunque $P_m(T) = 0.65$. Per concludere dobbiamo solo ricordare che il secondo lancio della moneta è indipendente dal primo.

- La risposta corretta è: 0.65
- La risposta inserita è: 0.65

Quesito 3

Giochiamo ancora e questa volta lanciamo la moneta tre volte. Ci dicono che almeno due su tre sono T. Qual è la probabilità che i primi esiti due siano T (non escludendo la possibilità che lo sia anche il terzo)?

L'evento accaduto è

$$H = \{\{T,T,C\},\{C,T,T\},\{T,C,T\},\{T,T,T\}\}$$

La probabilità che i primi due esiti siano T è $P(T)^2$, perciò

$$P\left(\text{primi due sono } T | P(H)\right) = \frac{P(T)^2}{P(T)^3 + 3 \cdot P(T)^2 \cdot P(C)}$$

- La risposta corretta è: 0.5882353
- La risposta inserita è: 10/17