Soluzione all' esercizio del 2022-05-16 creato per luigi.miazzo

Nella pavimentazione di una stanza vengono adoperati listelli di legno di lunghezza media 16.5 cm. Dai macchinari per la produzione, si sa che le lunghezze di tali listelli seguono una legge normale con deviazione standard uguale a $\sigma = 0.22$ cm.

Per ricoprire il buco lasciato dai lavori per inserire un tubo, bisogna creare una striscia larga quanto un listello e lunga 493.1322661 cm, con un opportuno numero n di listelli.

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Qual è la probabilità che servano più di $n = 30$ listelli per creare una striscia lunga 493.1322661 cm?

Innanzitutto, sia X_i la v.a. che indica la lunghezza dell'i-esimo listello. Allora, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, con $\mu = 16.5$ cm e $\sigma = 0.22$ cm.

Sia poi S_n la v. a. che indica la lunghezza della striscia formata da n listelli. Allora,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Poiché le X_i sono indipendenti tra di loro, si ha che $S_n \sim \mathcal{N}(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma)$ dal momento che la distribuzione Gaussiana è riproducibile.

Ora, servono più di 30 listelli per una striscia lunga 493.1322661 cm se $S_{30} < 493.1322661$. Dobbiamo calcolare quindi la $P(S_{30} < 493.1322661)$.

Ricordiamo che se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, allora $P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, dove $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Quindi nel nostro caso abbiamo

$$P(S_{30} < 493.1322661) = P\left(Z < \frac{493.1322661 - 30 \cdot 16.5}{0.22 \cdot \sqrt{30}}\right)$$

Possiamo allora usare la funzione di R `pnorm(x)` . Alternativamente, avremmo potuto guardare le tavole della normale standard.

Notiamo che la funzione `pnorm` è la cdf di una normale standard, tuttavia se non ci fossimo ricondotti ad una normale standard avremmo potuto comunque usare `pnorm(x, mean = 30*16.5, sd =sqrt(30)*0.22 )` , passando quindi in input i valori della media e della deviazione standard della nostra v.a. gaussiana di partenza S_{30}.

- Risposta corretta: 0.0605708
- Risposta inserita: 0.06057076

Quesito 2.

Qual è la probabilità che servano meno di $n = 30$ listelli per creare una striscia lunga 493.1322661 cm?

Servono meno di 30 listelli per una striscia lunga 493.1322661 cm se $S_{30} > 493.1322661$. Dobbiamo calcolare quindi la $P(S_{30} > 493.1322661)$.

Basta quindi calcolarsi 1- `pnorm(x)` , sfruttando il fatto che la Gaussiana è una distribuzione continua.

- Risposta corretta: 0.9394292
- Risposta inserita: 0.9394292

Quesito 3.

Quanto dovrebbe essere lunga la striscia affinché 30 listelli siano sufficienti per ricoprirla con una probabilità maggiore o uguale al 65.674%?

Dobbiamo trovare quel valore L della lunghezza della striscia per cui valga

$$P(S_{30} \geq L) \geq 0.65674.$$

Sia $L^* = \frac{L - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$, con $n = 30$, $\mu = 16.5$ e $\sigma = 0.22$, allora

$$P(S_n \geq L) = P(Z \geq L^*) = 1 - \Phi(L^*) \geq p,$$

dove $p = 0.65674$, da cui

$$L = \sqrt{n}\sigma \cdot \Phi^{-1}(1-p) + n\mu.$$

$\Phi^{-1}(1-p)$ può essere calcolato con `qnorm(1-p)` .

- Risposta corretta: 494.5136877
- Risposta inserita: 494.5137