- 2022-06-01
- 2022-05-31
- 2022-05-30
- 2022-05-27
- 2022-05-26
- 2022-05-25
- 2022-05-24
- 2022-05-23
- 2022-05-20
- 2022-05-19
- 2022-05-18
- 2022-05-17
- 2022-05-16
- 2022-05-13
- 2022-05-12
- 2022-05-11
- 2022-05-10
- 2022-05-09
- 2022-05-06
- 2022-05-05
- 2022-05-04
- 2022-05-03
- 2022-05-02
- 2022-04-29
- 2022-04-28
- 2022-04-27
- 2022-04-26
- 2022-04-22
- 2022-04-21
- 2022-04-20
- 2022-04-19
- 2022-04-15
- 2022-04-14
- 2022-04-13
- 2022-04-12
- 2022-04-11
- 2022-04-08
- 2022-04-07
- 2022-04-06
- 2022-04-05
- 2022-04-04
- 2022-04-01
- 2022-03-31
- 2022-03-30
- 2022-03-29
- 2022-03-28
- 2022-03-24

Soluzione all'esercizio del 2022-05-30 creato per luigi.miazzo

Sia $(X_1, \dots, X_n)$ un campione casuale (i.e. le X_i sono indipendenti ed identicamente distribuite) da una distribuzione binomiale di parametri $m = 13$, numero di prove, e θ, probabilità di successo.

Sia inoltre dato il seguente campione estratto

$$(6, 8, 7, 8, 5, 7, 6, 7, 6, 2).$$

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Usando il metodo dei momenti, si trovi uno stimatore di θ e se ne calcoli la stima per il campione estratto (inserire solo la stima, come risposta).

$X_i \sim \text{bin}(m, \theta)$ per $i = 1, 2, \dots, n$, con $m = 13$ noto e θ ignota.

Per il metodo dei momenti dobbiamo trovare, se esiste, una soluzione in θ all'equazione "momento teorico = momento empirico" in questo caso per l'ordine 1. Indichiamo, come al solito, con $\bar{X}_n$ la media campionaria (mom. empirico di ordine 1), mentre indichiamo con $\mu(\theta)$ il valore atteso, in funzione del parametro che vogliamo stimare

$$\begin{aligned} \mu(\theta) &= \mathbb{E}(X_i) = \bar{X}_n \\ m\theta &= \bar{X}_n \end{aligned}$$

da cui $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}_n}{m}$. Per ottenere la stima richiesta calcoliamo $\frac{\bar{x}_n}{13}$.

- La risposta corretta è: 0.4769231
- La risposta inserita è: 0.476923076923
- che corrisponde a 0.4769231

Quesito 2.

Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ. Coincide con quello trovato nel quesito 1? Rispondere `TRUE` o `FALSE`.

Per trovare lo stimatore di massima verosimiglianza, partiamo con lo scrivere la funzione di verosimiglianza

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n; \theta) = P_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n P_{X_i}(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i} \theta^{x_i} (1-\theta)^{m - x_i} \\ &= \left[\prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i} \right] \theta^{\sum_i x_i} (1-\theta)^{nm - \sum_i x_i} \end{aligned}$$

ove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la commutatività del prodotto. Si osservi inoltre che $\left[\prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i}\right] = C$ è una costante, non dipende da θ.

Prendiamo il log della verosimiglianza

$$\ell(x_1, \dots, x_n; \theta) = \log C + \sum_i x_i \log \theta + (nm - \sum_i x_i) \log (1 - \theta)$$

e deriviamo rispetto a θ, ponendo la derivata uguale a zero

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta} \ell(x_1, \dots, x_n; \theta) = \frac{\sum_i x_i}{\theta} + (-1) \frac{nm - \sum_i x_i}{1 - \theta}$$

$$0 = (1 - \theta) \sum_i x_i - \theta \left(nm - \sum_i x_i \right) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_i x_i}{nm} = \frac{\bar{X}_n}{m}.$$

I due stimatori coincidono.

- La risposta corretta è: TRUE
- La risposta inserita è: TRUE

Quesito 3.

Calcolare l'intervallo di confidenza per θ "alla Wald" a livello di confidenza del 90%, per il campione estratto. Inserire la risposta come `c(estremo_inf, estremo_sup)`.

Suggerimento, usare `qnorm()` per trovare i quantili del tipo $z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

$X_i \sim bin(m, \theta)$, $\mathbb{E}(X_i) = m\theta$ e $\mathbb{V}\text{ar}(X_i) = m\theta(1-\theta)$.

Abbiamo lo stimatore $\hat{\theta} = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n X_i$, di cui sappiamo anche

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\theta}) &= \theta \\ \mathbb{V}\text{ar}(\hat{\theta}) &= \frac{\theta(1-\theta)}{nm} \end{aligned}$$

Inoltre, possiamo assumere che $Z_n = \frac{(\hat{\theta} - \theta)\sqrt{nm}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \sim_a \mathcal{N}(0, 1)$ per il teorema centrale del limite (infatti potremmo anche vedere le nostre n variabili binomiali come nm variabili Bernoulliane indipendenti e $nm \gg 1$).

Ci chiediamo per quale quantili

$$1 - \alpha \approx P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\hat{\theta} - \theta)\sqrt{nm}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right).$$

"Alla Wald" abbiamo

$$\begin{aligned} 1 - \alpha \approx & P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\hat{\theta} - \theta)\sqrt{nm}}{\sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = \\ &= P\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{nm}} \leq \frac{(\hat{\theta} - \theta)}{\sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}} \leq \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{nm}} \right) \\ &= P\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{nm}} \sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})} \leq (\hat{\theta} - \theta) \leq \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{nm}} \sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})} \right) \\ &= P\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{nm}} \sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})} - \hat{\theta} \leq -\theta \leq \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{nm}} \sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})} - \hat{\theta} \right) \\ &= P\left(\hat{\theta} - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{nm}} \sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})} \leq \theta \leq \hat{\theta} - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{nm}} \sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})} \right) \\ &= P\left(\hat{\theta} - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{nm}} \sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})} \leq \theta \leq \hat{\theta} - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{nm}} \sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})} \right) \end{aligned}$$

Da cui, ricordando che $-z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, ricaviamo: $\hat{\theta} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{nm}}$.

- La risposta corretta è: $(0.404868341234689, 0.548977812611465)$
- La risposta inserita è: c(0.4048683, 0.5489778)