2022-06-01
2022-05-31
2022-05-30
2022-05-27
2022-05-26
2022-05-25
2022-05-24
2022-05-23
2022-05-20
2022-05-19
2022-05-18
2022-05-17
2022-05-16
2022-05-13
2022-05-12
2022-05-11
2022-05-10
2022-05-09
2022-05-06
2022-05-05
2022-05-04
2022-05-03
2022-05-02
2022-04-29
2022-04-28
2022-04-27
2022-04-26
2022-04-22
2022-04-21
2022-04-20
2022-04-19
2022-04-15
2022-04-14
2022-04-13
2022-04-12
2022-04-11
2022-04-08
2022-04-07
2022-04-06
2022-04-05
2022-04-04
2022-04-01
2022-03-31
2022-03-30
2022-03-29
2022-03-28
2022-03-24

Soluzione all'esercizio del 2022-05-31 creato per luigi.miazzo

Sia $(X_1,\dots,X_n)$ un campione casuale (i.e. le X_i sono indipendenti ed identicamente distribuite) da una distribuzione esponenziale di parametro θ.

Sia inoltre dato il seguente campione estratto

$$(1.34, 0.99, 0.1, 0.89, 0.07, 0.14, 0.14, 0.09, 0.04, 0.21, 0.14, 1.62, 1.32).$$

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

$X_i \sim \mathcal{E}(\theta)$ per $i=1,2,\dots,n$.

Scriviamo la funzione di verosimiglianza per il campione $(x_1,\dots,x_n)$

$$\begin{aligned} L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta) &= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i;\theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta x_i} \\ &= \theta^n e^{-\theta\sum_{k=1}^n x_i}. \end{aligned}$$

Prendiamo il log della verosimiglianza

$$\ell(x_1,\dots,x_n;\theta) = n\log\theta - \sum_{k=1}^n x_i.$$

Infine deriviamo e poniamo la derivata uguale a zero, così facendo troviamo:

$$\hat\theta_{ML} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n x_i}$$

ossia, lo stimatore di massima verosimiglianza per il parametro dell'esponenziale è dato dal reciproco della media campionaria $\hat\theta_{ML} = (\bar X_n)^{-1}$.

- La risposta corretta è: 1.8335684
- La risposta inserita è: 1.833568
- che corrisponde a 1.833568

Quesito 2.

Stimare la media (valore atteso) della popolazione, utilizzando il campione estratto e lo stimatore del quesito 1.

Sappiamo che il valore atteso di una v.a. esponenziale di parametro θ è $\frac{1}{\theta}$, quindi ci basta prendere il reciproco della stima precedente, ossia, la media campionaria.

- La risposta corretta è: 0.5453846
- La risposta inserita è: 0.5453846
- che corrisponde a 0.5453846

Quesito 3.

Usando il teorema centrale del limite, calcolare l'intervallo di confidenza (approssimato) “alla Wald” per θ a livello di confidenza del 96%, dato il campione estratto. Inserire la risposta come `c(estremo_inf, estremo_sup)`.

Suggerimento, usare `qnorm()` per trovare i quantili del tipo $z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

$X_i \sim \mathcal{E}(\theta)$. $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{\theta}$ e $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) = \frac{1}{\theta^2}$.

Usando il TCL abbiamo che $Z_n = \frac{\left(\bar X_n - \frac{1}{\theta}\right)}{\frac{1}{\theta}}\sqrt{n} \to \mathcal{N}(0,1)$ in distribuzione.

Possiamo quindi utilizzare la distribuzione normale standard per stimare gli estremi dell'intervallo di confidenza, in particolare:

$$\begin{aligned} 1-\alpha \approx & P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\left(\bar X_n - \frac{1}{\theta}\right)}{\frac{1}{\theta}}\sqrt{n} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \\ &= P\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \le \frac{\left(\frac{1}{\hat\theta} - \frac{1}{\theta}\right)}{\frac{1}{\theta}} \le \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \le \frac{\theta-\hat\theta}{\hat\theta\theta}\theta \le \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \le \frac{\theta}{\hat\theta} - 1 \le \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(1+\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \le \frac{\theta}{\hat\theta} \le 1+\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\hat\theta\left(1+\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) \le \theta \le \hat\theta\left(1+\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)\right) \end{aligned}$$

Da cui, ricordando che $z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, ricaviamo: $\hat\theta\left(1 \pm \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$.

- La risposta corretta è: $(0.789154160195861, 2.87798265221599)$
- La risposta inserita è: c(0.7891542, 2.877983)