

DoExercises:

Esercizi per il corso di Probabilità e Statistica



Esercizi Soluzioni Riepilogo Voti

2022-06-01 2022-05-31 2022-05-30 2022-05-27 2022-05-26 2022-05-25 2022-05-24 2022-05-23 2022-05-20 2022-05-19 2022-05-18 2022-05-17 da cui 2022-05-16 2022-05-13 2022-05-12 2022-05-11 2022-05-10 2022-05-09 2022-05-06 2022-05-05 2022-05-04 2022-05-03 2022-05-02 2022-04-29 2022-04-28 2022-04-27 2022-04-26 2022-04-22 2022-04-21 2022-04-20 2022-04-19 2022-04-15 2022-04-14 2022-04-13 2022-04-12 2022-04-11 2022-04-08 2022-04-07 2022-04-06 2022-04-05 2022-04-04 2022-04-01 2022-03-31 2022-03-30 2022-03-29 2022-03-28

2022-03-24

Soluzioni all'esercizio del 2022-05-10 creato per luigi.miazzo

Consideriamo il seguente esperimento casuale: lanciamo un dado (equilibrato) a 7 facce finché non esce 7 ci fermiamo. Sia N la variabile aleatoria che rappresenta il numero di lanci e sia X la v.a. che conta quante volte è uscita la faccia con il numero 3.

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Qual è la varianza di X condizionato a N=11, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X|N=11]$?

Sapendo che ci sono stati 11 lanci, questo vuol dire che l'ultimo è stato un 7, mentre nei precedenti 10 lanci abbiamo ottenuto valori diversi da 7. Tra questi, solo la faccia con il numero 3 costituisce un successo, e ha probabilità $p=\frac{1}{6}=0.166667$.

La v. a. X|N=11 è quindi una binomiale di parametri n=10 e p=0.1666667, di cui conosciamo valore atteso e varianza, che sono rispettivamente $np=10\frac{1}{6}$ e $np(1-p)=10\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)$.

- La risposta corretta è: 1.3888889
- La risposta inserita è: 1.3888889
- che corrisponde a 1.3888889

Quesito 2

Quanto vale $\mathbb{E}[X^2|N=10]$?

Conosciamo sia il valore atteso sia la varianza della v.a. X | N = 10, possiamo quindi usarli assieme alla "formula" per scomporre la varianza

$$np(1-p) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X|N=10) = \mathbb{E}(X^2|N=10) - (\mathbb{E}(X|N=10))^2$$

$$\mathbb{E}(X^2|N=10) = np(1-p) + (np)^2.$$

- La risposta corretta è: 4.1666667
- La risposta inserita è: 4.1666667
- che corrisponde a 4.1666667

Quesito 3

Scrivere una funzione ad un parametro del tipo function(x) {...} che implementi P(z(N)=x) ove $z(n)=\mathbb{E}(X|N=n)$ $\forall n\in R_N$ è, come visto a lezione, una trasformazione della variabile N.

Sappiamo, dai precedenti quesiti, che $z(n)=\mathbb{E}(X|N=n)=(n-1)rac{1}{6}$ per cui possiamo riscrivere la v.a. $z(N)=\mathbb{E}(X|N)$ come trasformazione (affine) della variabile N

$$z(N)=(N-1)\frac{1}{6}.$$

Ora N conta il numero di prove per avere un successo: è quindi una v.a. geometrica di parametro $p^*=rac{1}{7}$ (poiché il dado è equilibrato) e sappiamo che

$$P(N=k) = p^*(1-p^*)^{k-1}$$

per $k \in R_N = \{1, 2, \ldots\}$, mentre è nulla altrimenti.

Il supporto di
$$z(N)$$
 è quindi $R_{z(N)} = \left\{ rac{k-1}{6} : k \in R_N
ight\}$ e

$$P\left(\left\{z(N)=x
ight\}
ight)=P\left(\left\{(N-1)rac{1}{6}=x
ight\}
ight)=P\left(N=1+xigg(rac{1}{6}igg)^{-1}
ight)$$

per $x \in R_{z(N)}$ o, alternativamente per $1+x\Big(rac{1}{6}\Big)^{-1} \in R_N$, e nulla altrimenti.

A questo punto abbiamo due possibilità di implementazione (di seguito indichiamo con p $p=rac{1}{6}$ e con p_star $p^*=rac{1}{7}$):

1. usare dgeom, ricordando che questa è implementata come $p(x) = p(1-p)^x$ e quindi dobbiamo togliere 1 al valore in input alla dgeom:

function(x) {dgeom(x=x/p, p_star)}

2. ri-scrivere la funzione di probabilità della geometrica, prestando attenzione al supporto

function(x) {ifelse((1+x/p)%1==0 & (1+x/p)>0, $(1-p_star)^{x/p}*p_star$, 0)}

La risposta inserita è: function(x) {dgeom(x/(1/6), 1/7)}