Soluzioni all'esercizio del 2022-05-12 creato per luigi.miazzo

Consideriamo la seguente funzione, $f(x,y) = \epsilon x^2 y$ per $(x,y) \in [0, 2.39] \times [0, 2.39]$ e nulla altrove.

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Per quale valore di ϵ, $f(x,y)$ è una densità di probabilità?

Affinché $f(x,y)$ sia una densità di probabilità, deve valere $f(x,y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$ e il suo integrale su $\mathbb{R}^2$ deve essere uguale a 1.

Indichiamo con $K = 2.39$. La prima condizione è soddisfatta sul rettangolo $[0,K] \times [0,K]$ se $\epsilon > 0$.

Inoltre deve valere:

$$1 = \int\int_{\mathbb{R}^2} \epsilon x^2 y \, dx \, dy = \int_0^K \left(\epsilon \, y \int_0^K x^2 \, dx \right) dy = \epsilon \frac{1}{3} K^3 \int_0^K y \, dy = \frac{\epsilon}{6} K^5$$

da cui $\epsilon = \frac{6}{K^5} = \frac{6}{2.39^5}$.

- La risposta corretta è: 0.0769417
- La risposta inserita è: 482264/6267915
- che corrisponde a 0.0769417

Quesito 2

Siano X, Y variabili aleatorie con la densità congiunta $f_{X,Y}(x,y)$ determinata nel quesito 1.

Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti? (Rispondere `TRUE` o `FALSE`).

Riocrdiamo che due variabili X, Y continue, con densità congiunta $f_{X,Y}(x,y)$, sono stocasticamente indipendenti se e solo se

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

per ogni $(x,y) \in R_X \times R_Y$.

Calcoliamo quindi le rispettive densità marginali f_X e f_Y e vediamo se il loro prodotto è uguale alla densità congiunta. Di nuovo, indichiamo con $K = 2.39$. Per $x \in [0,K]$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^K \epsilon x^2 y \, dy = \frac{\epsilon}{2} K^2 x^2$$

e nulla altrove. Analogamente, per $y \in [0,K]$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^K \epsilon x^2 y \, dx = \frac{\epsilon}{3} K^3 y$$

e nulla altrove.

Ora $f_X(x) f_Y(y) = \frac{\epsilon^2}{6} K^5 x^2 y$ e, ricordando che $\epsilon = \frac{6}{K^5}$, vediamo che il prodotto delle marginali è uguale alla densità congiunta e quindi X e Y sono indipendenti.

- La risposta corretta è: TRUE
- La risposta inserita è: TRUE

Quesito 3

Quanto vale la somma del valore atteso di X e quello di Y?

Dobbiamo calcolare i due integrali $x \cdot f_X(x)$ e $y \cdot f_Y(y)$. Indichiamo con $K = 2.39$ e con $\epsilon = 0.0769417$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^K \frac{\epsilon}{2} K^2 x^3 dx = \frac{\epsilon}{8} K^6$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) dy = \int_0^K \frac{\epsilon}{3} K^3 y^2 dy = \frac{\epsilon}{9} K^6$$

da cui

$$\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \frac{\epsilon}{72} K^6.$$

- La risposta corretta è: 3.3858333
- La risposta inserita è: 4063/1200
- che corrisponde a 3.3858333

Quesito 4

Quanto vale $\mathbb{E}(XY)$?

Poiché X e Y sono indipendenti $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

- La risposta corretta è: 2.85605
- La risposta inserita è: 57121/20000
- che corrisponde a 2.85605