



Soluzioni all'esercizio del 2022-04-27 creato per luigi.miazzo

In un test online, le domande vengono proposte ai partecipanti una per volta. Ogni partecipante continua a ricevere domande finché non sbaglia un certo numero prefissato 5 di risposte. Le domande sono infinite, di difficoltà costante e si stima che la probabilità di un partecipante di rispondere correttamente a una domanda sia uguale a 44.8%.

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Se Andrea fa questo test, con che probabilità non risponderà correttamente ad alcuna domanda?

Cerchiamo di capire quale distribuzione si presta al nostro esperimento. Abbiamo una successione di prove indipendenti (le domande), ciascuna delle quali riceve una risposta corretta con probabilità 0.448 e riceve una risposta sbagliata con probabilità 0.552. Abbiamo un limite al numero di tentativi, dato dal primo istante in cui viene data la risposta sbagliata numero 5. Ci viene quindi da pensare a una binomiale negativa, in cui però “successo” è “sbagliare una risposta” e “insuccesso” è darla correttamente. Allora ogni prova ha “successo” con probabilità $p = 0.552$, e la variabile aleatoria binomiale negativa di parametri $n = 5$ e p conta il numero di “insuccessi”. La probabilità di vedere k “insuccessi” è la densità discreta calcolata in k ,

$$\varphi_X(k) = \binom{n+k-1}{n-1} \cdot p^n \cdot (1-p)^k,$$

che in questo caso ($k = 0$ perché vogliamo la probabilità che Andrea non abbia alcun insuccesso nello sbagliare risposta, cioè che le sbagli tutte) diventa

$$\varphi_X(0) = \binom{5-1}{5-1} \cdot 0.552^5 \cdot (1-0.552)^0 = 0.552^5,$$

che in R possiamo calcolare come `dnbinom`, passando come parametri `x=0`, `size= 5` e `prob= 0.552`.

Per questo quesito avremmo anche potuto non pensare alla binomiale negativa, infatti abbiamo bisogno di esattamente 5 “successi” in 5 tentativi, quindi possiamo anche usare una distribuzione binomiale di parametri $n = 5$ e $p = 0.552$, calcolandone la densità discreta in 5, eventualmente con la funzione R `dbinom`. Tuttavia usare la binomiale non ci sarà di aiuto nei prossimi quesiti.

- La risposta corretta è: 0.0512502
- La risposta inserita è: 0.05125018
- che corrisponde a: 0.0512502

Quesito 2

Qual è invece la probabilità che risponda in tutto a esattamente 12 domande?

In questo caso abbiamo bisogno di pensare bene alla definizione di variabile aleatoria binomiale negativa. Essa conta il numero di “insuccessi” (risposte giuste) prima di arrivare all' n -simo “successo” (risposta sbagliata). Se in tutto dobbiamo fare 12 tentativi e di questi 5 sono “successi” (in particolare è un successo il tentativo 12), vuol dire che abbiamo 7 “insuccessi”. Vogliamo quindi calcolare la densità discreta φ_X nel punto $k = 7$, in R `dnbinom` con parametri `x = 7`, `size= 5` e `prob= 0.552`.

- La risposta corretta è: 0.061257
- La risposta inserita è: 0.06125696
- che corrisponde a: 0.061257

Quesito 3

A causa di un recente problema al sistema informatico, le domande sono in numero molto ridotto: in tutto ce ne sono 15. Se per caso dovessero finire le domande, il test si conclude. Qual è la probabilità che Andrea veda tutte le domande preparate per il test?

Per vedere tutte le domande, Andrea deve fallire nello sbagliare almeno 10 risposte (ossia deve avere almeno 10 “insuccessi”). Ci chiediamo quindi quale sia la probabilità $P(X \geq 10)$. Possiamo scriverla in termini della funzione di ripartizione di X calcolata in 9 come $P(X \geq 10) = 1 - F_X(9)$, quindi in R possiamo usare la funzione `pnbinom` con parametri `q= 9`, `size= 5` e `prob= 0.552` con `lower.tail = FALSE`, oppure sommare la funzione `dnbinom` tra 0 e 9 e sottrarre il risultato da 1 (oppure sommarla per tutti i valori tra 10 e $+\infty$, cosa che R non ci lascia fare, tuttavia con qualche esperimento si nota che se sommiamo da 10 fino a un numero abbastanza grande, la differenza non è più significativa, perché le probabilità nei punti diventano via via sempre più piccole e trascurabili.

- La risposta corretta è: 0.0412515
- La risposta inserita è: 0.04125148
- che corrisponde a: 0.0412515

2022-06-01
2022-05-31
2022-05-30
2022-05-27
2022-05-26
2022-05-25
2022-05-24
2022-05-23
2022-05-20
2022-05-19
2022-05-18
2022-05-17
2022-05-16
2022-05-13
2022-05-12
2022-05-11
2022-05-10
2022-05-09
2022-05-06
2022-05-05
2022-05-04
2022-05-03
2022-05-02
2022-04-29
2022-04-28
2022-04-27
2022-04-26
2022-04-22
2022-04-21
2022-04-20
2022-04-19
2022-04-15
2022-04-14
2022-04-13
2022-04-12
2022-04-11
2022-04-08
2022-04-07
2022-04-06
2022-04-05
2022-04-04
2022-04-01
2022-03-31
2022-03-30
2022-03-29
2022-03-28
2022-03-24