Soluzioni all'esercizio del 2022-04-05 creato per luigi.miazzo

Un'urna contiene 27 palline, numerate da 1 a 27. Si estraggono due palline con reimmissione.

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Qual è la probabilità che almeno una delle due palline pescate sia etichettata con un numero strettamente maggiore di 25?

Sia $I_{27} = \{r \in \mathbb{N} | r \leq 27\}$, lo spazio campionario è $\Omega = I_{27} \times I_{27}$ e rappresenta le possibili coppie di risultati delle estrazioni. $A = I_{27} \setminus I_{25} = \{k+1, \ldots, n\}$ corrisponde all'evento "una pallina estratta ha numero maggiore di k". Siano $A_1 = A \times I_{27}$ e $A_2 = I_{27} \times A$ gli eventi per cui la prima pallina estratta o, rispettivamente, la seconda, abbia un numero strettamente maggiore di 25.

Dobbiamo calcolare la probabilità di $A_1 \cup A_2$. Notiamo che A_1 e A_2 non sono disgiunti e, contando gli elementi, abbiamo

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{2 \cdot 27}{27 \cdot 27} = \frac{2}{27}, \qquad P(A_1 \cap A_2) = \frac{2 \cdot 2}{27 \cdot 27} = \frac{2^2}{27^2}$$

Da cui ricaviamo:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{2 \cdot 2}{27} - \frac{25^2}{2^2}.$$

- La risposta corretta è: 0.1426612
- La risposta inserita è: 104/729

Quesito 2

Qual è la probabilità che la somma dei numeri sulle due palline sia pari sapendo che almeno una delle due palline pescate è etichettata con un numero strettamente maggiore di 25?

Sia S l'evento in cui la somma dei numeri sulle due palline è pari.

Notiamo che la somma di due numeri è pari se entrambi gli addendi sono pari o se entrambi sono dispari. Allora contiamo il numero di possibili coppie di palline con numeri della stessa parità.

Vale in generale che l'insieme I_n contiene $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ numeri pari e $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ numeri dispari.

Il numero di possibili coppie di palline estratte entrambe etichettate con numero pari in A_1 è: $\lfloor \frac{2}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{27}{2} \rfloor$

Il numero di possibili coppie di palline estratte entrambe etichettate con numero dispari in A_1 è: $(2 - \lfloor \frac{2}{2} \rfloor) \cdot \left(27 - \lfloor \frac{27}{2} \rfloor\right)$.

Per evidenti ragioni di simmetria, gli stessi risutati valgono per A_2.

Ci viene chiesto di calcolare $P(S | A_1 \cup A_2)$. Abbiamo

$$P(S | A_1 \cup A_2) = \frac{P(S \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P((S \cap A_1) \cup (S \cap A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(S \cap A_1) + P(S \cap A_2) - P(S \cap A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)}.$$

dove

$$P(S \cap A_1) + P(S \cap A_2) = \frac{2\left(\lfloor \frac{2}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{27}{2} \rfloor + (2 - \lfloor \frac{2}{2} \rfloor) \cdot \left(27 - \lfloor \frac{27}{2} \rfloor\right)\right)}{27^2},$$

e inoltre

$$P(S \cap A_1 \cap A_2) = \frac{\left(\lfloor \frac{2}{2} \rfloor^2 + (2 - \lfloor \frac{2}{2} \rfloor)^2\right)}{27^2}.$$

Quindi

$$P(S | A_1 \cup A_2) = 0.5$$

- La risposta corretta è: 0.5
- La risposta inserita è: 52/104