- 2022-06-01
- 2022-05-31
- 2022-05-30
- 2022-05-27
- 2022-05-26
- 2022-05-25
- 2022-05-24
- 2022-05-23
- 2022-05-20
- 2022-05-19
- 2022-05-18
- 2022-05-17
- 2022-05-16
- 2022-05-13
- 2022-05-12
- 2022-05-11
- 2022-05-10
- 2022-05-09
- 2022-05-06
- 2022-05-05
- 2022-05-04
- 2022-05-03
- 2022-05-02
- 2022-04-29
- 2022-04-28
- 2022-04-27
- 2022-04-26
- 2022-04-22
- 2022-04-21
- 2022-04-20
- 2022-04-19
- 2022-04-15
- 2022-04-14
- 2022-04-13
- 2022-04-12
- 2022-04-11
- 2022-04-08
- 2022-04-07
- 2022-04-06
- 2022-04-05
- 2022-04-04
- 2022-04-01
- 2022-03-31
- 2022-03-30
- 2022-03-29
- 2022-03-28
- 2022-03-24

Soluzione all'esercizio del 2022-06-01 creato per luigi.miazzo

Sia $(X_1, \dots, X_n)$ un campione casuale (i.e. le X_i sono indipendenti ed identicamente distribuite) da una distribuzione Poissoniana θ.

Sia inoltre dato il seguente campione estratto

$$(4, 2, 0, 4, 2, 2, 1, 3, 4, 5).$$

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ e calcolarne la stima per il campione estratto (inserire solo la stima, come risposta).

$X_i \sim \mathcal{P}(\theta)$ per $i = 1, 2, \dots, n$.

Scriviamo la funzione di verosimiglianza per il campione $(x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \theta^{x_i} e^{-\theta} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \right) \theta^{\sum_i x_i} e^{-n\theta} \end{aligned}$$

dove possiamo chiamare $C := \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \right)$ la costante che non dipende da θ.

Prendiamo il log della verosimiglianza

$$\ell(x_1, \dots, x_n; \theta) = \log C + \sum_{k=1}^{n} x_i \log \theta - n\theta.$$

Infine deriviamo e poniamo la derivata uguale a zero

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta} \ell(x_1, \dots, x_n; \theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{n} x_i - n$$

e così facendo troviamo:

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_i$$

ossia, lo stimatore di massima verosimiglianza per il parametro della distribuzione di Poisson è dato della media campionaria $\hat{\theta}_{ML} = \bar{X}_n$.

- La risposta corretta è: 2.7
- La risposta inserita è: 2.7
- che corrisponde a 2.7

Quesito 2.

$X_i \sim \mathcal{P}(\theta)$ per $i = 1, 2, \dots, n$ di cui sappiamo che $\mathbb{E}(X_i) = \theta$ e $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) = \theta$.

Usando il TCL abbiamo che $Z_n = \frac{(\bar{X}_n - \theta)}{\sqrt{\theta}} \sqrt{n} \to \mathcal{N}(0, 1)$ in distribuzione.

Possiamo quindi utilizzare la distribuzione normale standard per stimare gli estremi dell'intervallo di confidenza, sostituendo (alla "Wald") il fattore $\sqrt{\theta}$ a denominatore con $\sqrt{\hat{\theta}}$

$$\begin{aligned} 1 - \alpha \approx & P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(\bar{X}_n - \theta)}{\sqrt{\theta}} \sqrt{n} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = \\ &= P\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \le \frac{(\hat{\theta} - \theta)}{\sqrt{\hat{\theta}}} \le \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right) \\ &= P\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{\theta}} \le (\hat{\theta} - \theta) \le \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{\theta}} \right) \\ &= P\left(\hat{\theta} - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{\theta}} \le \theta \le \hat{\theta} - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{\theta}} \right) \end{aligned}$$

Da cui, ricordando che $z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, ricaviamo gli estremi $\hat{\theta} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\theta}}{n}}$.

- La risposta corretta è: $(1.57238796270216, 3.82761203729784)$
- La risposta inserita è: c(1.572388, 3.827612)

Quesito 3.

Qual è l'ampiezza dell'intervallo di confidenza stimato?

$\hat{\theta} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\theta}}{n}} - \left(\hat{\theta} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\theta}}{n}} \right) = \sqrt{\frac{\hat{\theta}}{n}} \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} - z_{\frac{\alpha}{2}} \right).$

- La risposta corretta è: 2.2552241
- La risposta inserita è: 2.255224