# Soluzioni all'esercizio del 2022-05-13 creato per luigi.miazzo

Siano $X, Y$ variabili aleatorie con densità congiunta $f(x, y) = 0.14$ per $0 < x < 3.7796447$, $0 < y < x$ e nulla altrove.

## Quesiti e soluzioni

### Quesito 1

Qual è la probabilità $P(X < 3.51)$?

Osserviamo che il supporto del vettore bivariato $(X, Y)$ è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 3.7796447)$ e $(3.7796447, 3.7796447)$ e che la distribuzione è quindi uniforme su questo triangolo. Infatti, chiamando $T = 3.7796447$ l'area del triangolo (indicato semplicemente con $\Delta$) è $A(\Delta) = \frac{T^2}{2} = 7.1428571$ e quindi la densità uniforme sul triangolo è $\frac{1}{A(\Delta)} = 0.14$.

Inoltre, $P(X < 3.51) = P(X < 3.51, Y \in \mathbb{R})$, per cui possiamo ricavare la probabilità richiesta usando "solo" la geometria. L'evento $\{X < 3.51\}$ determina un triangolo di base e altezza $x = 3.51$, la cui area è $\frac{x^2}{2} = 6.16005$, che va moltiplicata per la densità costante 0.14.

Altrimenti, seguendo le definizioni:

$$\begin{aligned} P(X < 3.51) = F_X(3.51) &= \int_{-\infty}^{3.51} f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{3.51}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy\, dx = P(X < 3.51, Y \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

E vediamo che i ragionamenti sono equivalenti. Svolgendo i calcoli:

$$\int_{-\infty}^{3.51}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dydx = \int_0^{3.51}\int_0^x 0.14dydx = \int_0^{3.51} 0.14xdx = \frac{0.14}{2}3.51^2.$$

- La risposta corretta è: 0.862407
- La risposta inserita è: 7302/8467
- che corrisponde a 0.862407

### Quesito 2

Le variabili aleatorie $X$ e $Y$ sono (stocasticamente) indipendenti? (Rispondere `TRUE` o `FALSE` ).

La risposta è no, poiché il supporto di una variabile dipende dal valore dell'altra (il supporto non è un rettangolo). Si può verificare anche usando la definizione di indipendenza stocastica.

- La risposta corretta è: FALSE
- La risposta inserita è: FALSE

### Quesito 3

Quanto $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y|X = 3.51)$?

Dobbiamo calcolare i due integrali $x \cdot f_X(x)$ e $y \cdot f_{Y|X}(y|3.51)$.

Dal quesito 1 abbiamo che $f_X(x) = 0.14x$ da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^{3.7796447} 0.14x^2dx = \frac{0.143.7796447^3}{3} = \frac{2}{3}T.$$

La densità condizionale è $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{k}{kx} = \frac{1}{x}$ per $0 < x < 3.7796447$, $0 < y < x$ e nulla altrove.

$$z(x) = \mathbb{E}(Y|X = x) = \int_0^x \frac{y}{x}dy = \frac{x}{2}$$

da cui $z(3.51) = 1.755$.

- La risposta corretta è: 0.7647632
- La risposta inserita è: 41675/54494
- che corrisponde a 0.7647631

### Quesito 4

Quanto vale $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y|X)\right)$?

Ricordiamo che $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y|X)\right) = \mathbb{E}(X)$.

- La risposta corretta è: 2.5197632
- La risposta inserita è: 50840/13451
- che corrisponde a 3.7796446