2022-06-01
2022-05-31
2022-05-30
2022-05-27
2022-05-26
2022-05-25
2022-05-24
2022-05-23
2022-05-20
2022-05-19
2022-05-18
2022-05-17
2022-05-16
2022-05-13
2022-05-12
2022-05-11
2022-05-10
2022-05-09
2022-05-06
2022-05-05
2022-05-04
2022-05-03
2022-05-02
2022-04-29
2022-04-28
2022-04-27
2022-04-26
2022-04-22
2022-04-21
2022-04-20
2022-04-19
2022-04-15
2022-04-14
2022-04-13
2022-04-12
2022-04-11
2022-04-08
2022-04-07
2022-04-06
2022-04-05
2022-04-04
2022-04-01
2022-03-31
2022-03-30
2022-03-29
2022-03-28
2022-03-24

Soluzioni all'esercizio del 2022-05-02 creato per luigi.miazzo

È stato osservato che il tempo trascorso tra il passaggio di due veicoli successivi sotto una videocamera del traffico ha una distribuzione esponenziale di media 8 minuti. Chiamiamo T la corrispondente variabile aleatoria.

Quesiti e soluzioni

Data una variable aleatoria esponenziale $T \sim \exp(\lambda)$, sappiamo che la sua media è $\frac{1}{\lambda}$.

Detto questo, è immediato ricavare che nel nostro caso $\lambda = \frac{1}{8} = 0.125$.

Quesito 1

Qual è la probabilità che il tempo trascorso tra il passaggio di due veicoli successivi sia minore di 5.2 minuti?

La probabilità richiesta è

$$P(T < 5.2) = \int_0^{5.2} 0.125 e^{-0.125t} dt = 1 - e^{-0.125 \cdot 5.2}.$$

Possiamo anche calcolarla con la funzione `pexp`.

- La risposta corretta è: 0.4779542
- La risposta inserita è: 0.573623
- che corrisponde a 0.573623

Quesito 2

Qual è l'intervallo di tempo t (in minuti) tale per cui siamo certi al 86% che il tempo trascorso tra il passaggio di due veicoli sia maggiore di t minuti?

In questo caso ci viene data la probabilità e dobbiamo determinare t, cioè siamo interessati a 1 meno la funzione quantile calcolata in 0.86:

$$P(T > t) = \int_t^{+\infty} 0.125 e^{-0.125t} dt = e^{-0.125t} = 0.86,$$

da cui $-\frac{\log(0.86)}{0.125} = t$.

In alternativa possiamo usare la funzione quantile `qexp`, ricordandoci di usare il parametro `lower.tail = FALSE`.

- La risposta corretta è: 1.2065831
- La risposta inserita è: 0.5
- che corrisponde a 0.5

Quesito 3

Sapendo che sono già trascorsi 5.7 minuti dal passaggio dell'ultimo veicolo, qual è la probabilità che si debba attendere al più altri 5 minuti per il passaggio del veicolo successivo?

La distribuzione esponenziale, come la geometrica, gode della proprietà di assenza di memoria, quindi

$$P(T < 5.7 + 5 | T > 5.7) = P(T < 5).$$

(Nota bene: abbiamo enunciato l'assenza di memoria in una forma leggermente diversa, con la prima disuguaglianza di segno opposto, ma questo non fa alcuna differenza, come mai?)

- La risposta corretta è: 0.4647386
- La risposta inserita è: 0.5
- che corrisponde a 0.5

Quesito 4

Si consideri ora la variabile casuale $U = \sqrt{T}$. Qual è la funzione di densità di U?

(Si risponda con una funzione ad un parametro, del tipo `function(x)`.)

Si può usare il teorema sulla trasformazione di variabili aleatorie. In questo caso la funzione $g(t) = \sqrt{t}$ è continua e strettamente crescente sulla semiretta $t > 0$, con inversa $t = g^{-1}(u) = u^2$. Inoltre $\frac{d}{dt} g(t) = -\frac{1}{2} t^{-½}$.

Allora

$$f_U(u) = \frac{f_T(u^2)}{|\frac{1}{2}(\sqrt{u^2})^{-1}|} = 2\lambda u e^{-\lambda u^2}.$$

In alternativa si può passare dalla funzione di ripartizione, per $u > 0$:

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(T \leq u^2) = F_T(u^2) = 1 - e^{-\lambda u^2},$$

sfruttando il fatto che $u > 0$. A questo punto basta derivare in u per avere la densità.

Possiamo scrivere questa funzione in R come:

```
f_U <- function(u) {
  ifelse(u > 0, (2 * u * lambda) * exp(- lambda * (u ^ 2)), 0)
}
```

- La risposta inserita è: function(x){ ifelse(x > 0, (2 * x * 0.2)* exp(- 0.2 * (x^2)), 0) }