Soluzione all'esercizio del 2022-05-11 creato per luigi.miazzo

Sia X una variabile aleatoria Poissoniana di parametro λ_X. Sappiamo che $P(X=8)=P(X=9)$.

Sia inoltre Y un'altra variabile aleatoria Poissoniana, indipendente da X, di media (valore atteso) 1.

Sia infine $Z=X+Y$ la somma delle due variabili aleatorie precedenti, che è nota essere anch'essa una variabile di Poisson con media $\lambda_X+\lambda_Y$.

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Qual è il valore di λ_X?

Scriviamo la funzione di densità discreta per generici k e $k+1$

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{\lambda_X^k e^{-\lambda_X}}{k!} \\ P(X=k+1) &= \frac{\lambda_X^{k+1} e^{-\lambda_X}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

Ora, la condizione $P(X=k)=P(X=k+1)$ equivale a

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_X^k e^{-\lambda_X}}{k!} &= \frac{\lambda_X^{k+1} e^{-\lambda_X}}{(k+1)!} \\ \frac{\lambda_X^k}{k!} &= \frac{\lambda_X \cdot \lambda_X^k}{(k+1)\cdot k!} \\ 1 &= \frac{\lambda_X}{(k+1)} \end{aligned}$$

da cui $\lambda_X = k+1$.

- La risposta corretta è: 9
- La risposta inserita è: 9
- che corrisponde a 9

Quesito 2

Qual è la probabilità $P(X=7|Z=8)$?

Suggerimento: scrivere la funzione di densità discreta condizionata in modo astratto, con parametri generici (cioè $P(X=k|Z=n)$ e, nelle densità, usare i parametri generici λ_X e $\lambda_X+\lambda_Y$)... ricorda qualcosa?

La media di $Y\sim \mathrm{Pois}(\lambda_Y)$ è λ_Y, quindi $Y\sim \mathrm{Pois}(\lambda_Y=1)$.

Per la proprietà di riproducibilità delle Poissoniane, sappiamo anche che $Z\sim \mathrm{Pois}(10)$.

Con parametri generici k e n, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P(X=k|Z=n) &= \frac{P(X=k, Z=n)}{P(Z=n)} \\ &= \frac{P(X=k, X+Y=n)}{P(Z=n)} \\ &= \frac{P(X=k, Y=n-k)}{P(Z=n)} \\ &= \frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(Z=n)} \end{aligned}$$

in cui abbiamo usato la definizione di probabilità condizionata (nella prima uguaglianza), la definizione di $Z=X+Y$ nella seconda, l'osservazione che l'unione di eventi $(X=k, Y=n-k)$ si può avere solo se $Y=n-k$ e infine l'indipendenza di X e Y.

Possiamo sviluppare ulteriormente questa identità, seguendo il suggerimento:

$$\begin{aligned} P(X=k|Z=n) &= \frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(Z=n)} \\ &= \frac{\lambda_X^k e^{-\lambda_X}}{k!}\frac{\lambda_Y^{n-k} e^{-\lambda_Y}}{(n-k)!}\frac{n!}{(\lambda_X+\lambda_Y)^n e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}} \\ &= \binom{n}{k}\frac{\lambda_X^k\lambda_Y^{n-k}}{(\lambda_X+\lambda_Y)^{k+n-k}} \\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^k\left(\frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

Inserendo i valori assegnati per i parametri, abbiamo la risposta.

- La risposta corretta è: 0.3826375
- La risposta inserita è: 0.3826375
- che corrisponde a 0.3826375

Quesito 3

Qual è la varianza condizionata $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X|Z=8)$?

Qui torna utile l'espressione derivata sopra: osserviamo che la funzione di probabilità condizionata è una legge binomiale con parametri n e $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$ per cui sappiamo immediatamente che la varianza di $X|Z=n$ è $n\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\left(1-\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)$.

Sostituendo i valori dei parametri, abbiamo la risposta.

- La risposta corretta è: 0.72
- La risposta inserita è: 0.72
- che corrisponde a 0.72