Soluzioni all'esercizio del 2022-05-17 creato per luigi.miazzo

Abbiamo due variabili aleatorie binomiali indipendenti X e Y, di parametri rispettivamente $(n=8, p=0.252)$ e $(n=5, p=0.252)$. Prendiamone anche la somma $S=X+Y$, che, come è noto, è distribuita come una binomiale di parametri $(n=13, p=0.252)$.

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Qual è la probabilità che S sia compresa nell'intervallo $[11, 12)$?

Sappiamo che S è binomiale di parametri $(n=8+5, p=0.252)$.

Pertanto possiamo usare le funzioni `pbinom` o `dbinom` per risolvere il problema, ad esempio calcolando la prima in $11-1$ e $12-1$ e sottraendo il primo valore dal secondo.

- La risposta corretta è: 0.0000114
- La risposta inserita è: 0.0000113

Quesito 2

Se sappiamo che $S=5$, qual è la probabilità che $X=3$?

Stiamo cercando quale sia la densità discreta di $X|S$. Per farlo, partiamo dalla definizione

$$\begin{aligned}\varphi_{X|S}(k|5) &= \frac{\varphi_X(k)\cdot\varphi_Y(5-k)}{\varphi_S(5)}\\ &= \frac{\binom{8}{k}p^k(1-p)^{8-k}\cdot\binom{5}{5-k}p^{5-k}(1-p)^{5-5+k}}{\binom{8+5}{5}p^5(1-p)^{8+5-5}}\\ &= \frac{\binom{8}{k}\binom{5}{5-k}}{\binom{8+5}{5}},\end{aligned}$$

in cui abbiamo usato l'indipendenza di X e Y e la forma della densità discreta determinata nel primo quesito

Quella scritta nell'ultima riga è la densità discreta di una variabile aleatoria ipergeometrica. In altre parole, $X|S$ ha legge ipergeometrica di parametri $(8, 5, 5)$. Dobbiamo allora calcolare il valore della densità discreta di una tale ipergeometrica in $k=3$, cosa che possiamo fare con l'ausilio della funzione R `dhyper`.

- La risposta corretta è: 0.4351204
- La risposta inserita è: 0.4351204

Quesito 3

Se sappiamo che $S=5$, qual è la probabilità che $Y\in[2,4]$?

In questo caso ci occorre la legge di $Y|S$, ma essa è, come abbiamo visto nella soluzione del Quesito 2 (scambiando i ruoli di X e Y)

$$\varphi_{Y|S}(k|5) = \frac{\binom{5}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{5+8}{5}},$$

cioè un'ipergeometrica di parametri $(5, 8, 5)$. Dobbiamo sommare i valori della sua densità discreta per tutti i k tra 2 e 4, oppure possiamo fare la differenza tra la funzione di ripartizione, che in R si calcola con la funzione `phyper` nel caso dell'ipergeometrica, valutata nei punti 4 e $2-1$.

- La risposta corretta è: 0.6837607
- La risposta inserita è: 0.6837606