- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x_0) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x_0) = 0$

nel caso di una variabile casuale discreta si aggiungono le proprietà:

- continua da destra $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi $\lim_{x \to x_0+} F_X(x) = F_X(x_0)$
- $\lim_{x \to x_0-} F_X(x) \neq F_X(x_0)$

Inoltre:

$P_r((a,b]) = F(b^+) - F(a^+)$

$P_r([a,b)) = F(b^-) - F(a^-)$

$P_r((a,b)) = F(b^-) - F(a^+)$

$P_r([a,b]) = F(b^+) - F(a^-)$

$P_r(X = x) = P_r((x,x]) = \lim_{x \to x_0+} F_X(x) - \lim_{x \to x_0-} F_X(x)$

VALORE ATTESO (momento non centrato)

$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot p_X(x) = \int_{R_X} x \cdot f_X(x)\,dx$

$\mathbb{E}(XY) = \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot p_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

$\mathbb{E}(X|Y=y) = \sum_x x \cdot p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{E}(X|Y=y) = \int_{R_X} x \cdot f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_{R_X} x \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx$

MOMENTO DI ORDINE r

$\mathbb{E}(X^r) = \sum_x x^r \cdot p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot f_X(x)\,dx$

VARIANZA

$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$Var(X|Y=y) = \sum_x (x - \mathbb{E}(X|Y=y))^2 \cdot p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{E}(X^2|Y=y) - (\mathbb{E}(X|Y=y))^2$

COVARIANZA

$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$

INDICE DI PEARSON

$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$

FUNZIONE DI PROBABILITÀ DISCRETA

- $P_r(X \in (a,b]) = P_r(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$
- $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
- $P_r(X = x) = 0$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \int_0^t f(s)\,ds & 0 \leq t < n \\ 1 & \text{per } t \geq n \end{cases}$

VARIABILI ALEATORIE DOPPIE CONTINUE

- $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$
- $P(X \in [a,b] \cap X \in [a,b]) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$
- $f_X(x) = \int_{R_Y} f_{X,Y}(x,y)\,dy$
- $f_Y(y) = \int_{R_X} f_{X,Y}(x,y)\,dx$

VARIABILI ALEATORIE DOPPIE DISCRETE

- $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$
- $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y) = 1$
- $f_{X,Y}(x,y) = P(X = x \cap Y = y)$
- $f_X(x) = P(X = x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)$
- $f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y)$

DISTRIBUZIONI CONDIZIONALI E INDIPENDENZA

VARIABILI DISCRETE

Due v.a. discrete X e Y sono stocasticamente indipendenti se (e solo se)

$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

questo implica che

$p_{X,Y}(x,y) = p_{X|Y}(X=x|Y=y) \cdot p_Y(y) = p_{Y|X}(Y=y|X=x) \cdot p_X(x)$

$\mathbb{E}(X) = n \cdot p \quad Var(X) = n \cdot p\,(1-p)$

In R:

dbinom(K, n, p) con $P(X = x)$

pbinom(K, n, p) con $P(X \leq x)$

pbinom(K, n, p) con $P(X > x)$ $\to$ FALSE

POISSON

$P_r(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad x = 0, 1, \ldots$

$\mathbb{E}(X) = Var(X) = \lambda$

In R:

dpois(x, lambda) con $P(X = x)$

ppois(x, lambda) con $P(X \leq x)$

ppois(x, lambda, FALSE) con $P(X > x)$

Se Y_1 e Y_2 sono due v.a. indipendenti con distribuzioni Poisson di parametri λ_1 e λ_2 rispettivamente, allora:

- la loro somma $Y = Y_1 + Y_2$ segue ancora una distribuzione di Poisson, di parametro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$;
- la distribuzione di Y_1 condizionata da $Y = n$ è la distribuzione binomiale di parametri n e $\frac{\lambda_1}{\lambda}$

GEOMETRICA

$P_r(X = x) = p(1-p)^{k-1} \quad x = 1, 2, \ldots \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

In R:

dgeom(x, prob) con $P(X = x)$

pgeom(x, prob) con $P(X \leq x)$

pgeom(x, prob, FALSE) con $P(X > x)$

NORMALE

$N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \quad \mathbb{E}(X) = \mu \quad Var(X) = \sigma^2$

In R:

dnorm(x, mean = 0, sd = 1) con $f(X = x)$, mean $= \mu$, sd $= \sigma$

pnorm(x, mean = 0, sd = 1) con integrale da 0 a x

qnorm(x, mean = 0, sd = 1) con integrale da 0 a $K = p$

ESPONENZIALE

$Exp(\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0 \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$

In R:

dexp(x, lambda) con $f(X = x)$

pexp(x, lambda) con integrale da 0 a x

qexp(p, lambda) con integrale da 0 a $K = p$