Soluzioni all'esercizio del 2022-04-26 creato per luigi.miazzo

Abbiamo un dado a 6 facce non equilibrato. In particolare per ogni faccia del dado, la probabilità che essa esca è

```
##    1    2    3    4    5    6
## 0.23 0.14 0.21 0.08 0.20 0.14
```

Vinciamo se esce 4 o 2. Se esce uno degli altri numeri, perdiamo.

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Consideriamo $n = 23$ lanci del dado. Qual è la probabilità che otteniamo almeno 10 successi?

Possiamo descrivere l'esito del singolo lancio del dado come una variabile aleatoria X bernoulliana ($X = 1$ se esce 4 o 2, $X = 0$ altrimenti) di parametro p, pari alla probabilità di successo.

Per rispondere al quesito calcoliamo innanzitutto tale parametro p:

$$p = P(\{4\} \cup \{2\}) = P(\{4\}) + (\{2\}) = 0.22.$$

Osserviamo poi che se consideriamo più lanci del dado, questo esperimento può essere descritto da una variabile binomiale Y di parametri $n = 23$ e $p = 0.22$

Avere **almeno** 10 successi, vuol dire che ne otteniamo 10 o più. Quindi vogliamo calcolare $P(Y \geq 10)$. Per calcolare questa probabilità possiamo procedere in (almeno) due modi. In un caso iniziamo osservando che $P(Y \geq 10) = 1 - F_Y(9)$, sfruttando il fatto che Y è una variabile aleatoria discreta. A questo punto

$$P(Y \geq 10) = 1 - F_Y(9) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \varphi_Y(k),$$

dove φ_Y è la funzione di densità discreta di Y. Nell'altro caso andiamo a sommare direttamente le probabilità dei casi favorevoli:

$$P(Y \geq 10) = \sum_{k=10}^{23} \varphi_Y(k).$$

Possiamo ottenere lo stesso risultato anche con la funzione `pbinom`, in particolare chiamando `pbinom(q, prob, size, lower.tail = FALSE)` con $q = 9$, `prob` $= 0.22$ e `size` $= 23$.

- La risposta corretta è: 0.0174916
- La risposta inserita è: 0.01749158
- che corrisponde a: 0.0174916

Quesito 2

Ora, invece, lanciamo il dado finché non otteniamo un successo. Qual è la probabilità che otteniamo il primo successo esattamente al lancio numero $m = 2$ del dado?

Sia T la variabile aleatoria che rappresenta il "primo tempo di successo" in una famiglia di prove ripetute e indipendenti con probabilità $p = 0.22$. Allora T è legata alla distribuzione geometrica di parametro p.

In particolare, T ha come funzione di densità discreta:

$$\varphi_T(m) = p(1-p)^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

e nulla altrimenti, perché la probabilità di avere il primo successo al tentativo m è quella dell'evento in cui $m - 1$ insuccessi sono seguiti da un successo. Per avere la risposta ci basta allora calcolare questa densità discreta in $m = 2$.

Per calcolarla, possiamo usare la funzione R `dgeom`, ricordando però che conta il numero di insuccessi prima del primo successo (e non il numero totale di tentativi). Dobbiamo quindi calcolarla in $m - 1$.

- La risposta corretta è: 0.1716
- La risposta inserita è: 0.1716
- che corrisponde a: 0.1716

Quesito 3.

Qual è la probabilità che ci occorrano più di $m = 2$ lanci per ottenere il primo successo?

La variabile aleatoria T è tale che

$$P(T > m) = (1-p)^m, \quad m \in \mathbb{N},$$

perché dire che abbiamo il primo successo dopo l'istante m equivale a dire che nei primi m tentativi abbiamo avuto solo insuccessi.

Alternativamente, possiamo calcolare la probabilità richiesta in modo più canonico come

$$1 - P(T \leq 2) = 1 - F_T(2) = 1 - \sum_{k=1}^{2} \varphi_T(k),$$

che possiamo calcolare, con le attenzioni viste sopra, usando nuovamente la funzione `dgeom` o la funzione `pgeom`.

- La risposta corretta è: 0.6084
- La risposta inserita è: 0.6084
- che corrisponde a: 0.6084