Soluzioni all'esercizio del 2022-05-10 creato per luigi.miazzo

Consideriamo il seguente esperimento casuale: lanciamo un dado (equilibrato) a 7 facce finché non esce 7; quando esce 7 ci fermiamo. Sia N la variabile aleatoria che rappresenta il numero di lanci e sia X la v.a. che conta quante volte è uscita la faccia con il numero 3.

Quesiti e soluzioni

Quesito 1

Qual è la varianza di X condizionato a $N = 11$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X|N = 11]$?

Sapendo che ci sono stati 11 lanci, questo vuol dire che l'ultimo è stato un 7, mentre nei precedenti 10 lanci abbiamo ottenuto valori diversi da 7. Tra questi, solo la faccia con il numero 3 costituisce un successo, e ha probabilità $p = \frac{1}{6} = 0.1666667$.

La v. a. $X|N = 11$ è quindi una binomiale di parametri $n = 10$ e $p = 0.1666667$, di cui conosciamo valore atteso e varianza, che sono rispettivamente $np = 10\frac{1}{6}$ e $np(1-p) = 10\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)$.

- La risposta corretta è: 1.3888889
- La risposta inserita è: 1.3888889
- che corrisponde a 1.3888889

Quesito 2

Quanto vale $\mathbb{E}[X^2|N = 10]$?

Conosciamo sia il valore atteso sia la varianza della v.a. X | N = 10, possiamo quindi usarli assieme alla "formula" per scomporre la varianza

$$np(1-p) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X|N = 10) = \mathbb{E}(X^2|N = 10) - (\mathbb{E}(X|N = 10))^2$$

da cui

$$\mathbb{E}(X^2|N = 10) = np(1-p) + (np)^2.$$

- La risposta corretta è: 4.1666667
- La risposta inserita è: 4.1666667
- che corrisponde a 4.1666667

Quesito 3

Scrivere una funzione ad un parametro del tipo `function(x) {...}` che implementi $P(z(N) = x)$ ove $z(n) = \mathbb{E}(X|N = n)\ \forall n \in R_N$ è, come visto a lezione, una trasformazione della variabile N.

Sappiamo, dai precedenti quesiti, che $z(n) = \mathbb{E}(X|N = n) = (n-1)\frac{1}{6}$ per cui possiamo riscrivere la v.a. $z(N) = \mathbb{E}(X|N)$ come trasformazione (affine) della variabile N

$$z(N) = (N-1)\frac{1}{6}.$$

Ora N conta il numero di prove per avere un successo: è quindi una v.a. geometrica di parametro $p^* = \frac{1}{7}$ (poiché il dado è equilibrato) e sappiamo che

$$P(N = k) = p^*(1-p^*)^{k-1}$$

per $k \in R_N = \{1, 2, \ldots\}$, mentre è nulla altrimenti.

Il supporto di $z(N)$ è quindi $R_{z(N)} = \left\{\frac{k-1}{6} : k \in R_N\right\}$ e

$$P\left(\{z(N) = x\}\right) = P\left(\left\{(N-1)\frac{1}{6} = x\right\}\right) = P\left(N = 1 + x\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}\right)$$

per $x \in R_{z(N)}$ o, alternativamente per $1 + x\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} \in R_N$, e nulla altrimenti.

A questo punto abbiamo due possibilità di implementazione (di seguito indichiamo con `p` $p = \frac{1}{6}$ e con `p_star` $p^* = \frac{1}{7}$):

1. usare `dgeom`, ricordando che questa è implementata come `p(x) = p (1-p)^x` e quindi dobbiamo togliere 1 al valore in input alla `dgeom`:

```
function(x) {dgeom(x=x/p, p_star)}
```

2. ri-scrivere la funzione di probabilità della geometrica, prestando attenzione al supporto

```
function(x) {ifelse((1+x/p)%%1==0 & (1+x/p)>0, (1-p_star)^{x/p}*p_star, 0)}
```

- La risposta inserita è: function(x) {dgeom(x/(1/6), 1/7)}