Derivación e Integración numérica

Dinámica de Sistemas Mecánicos

2024-20

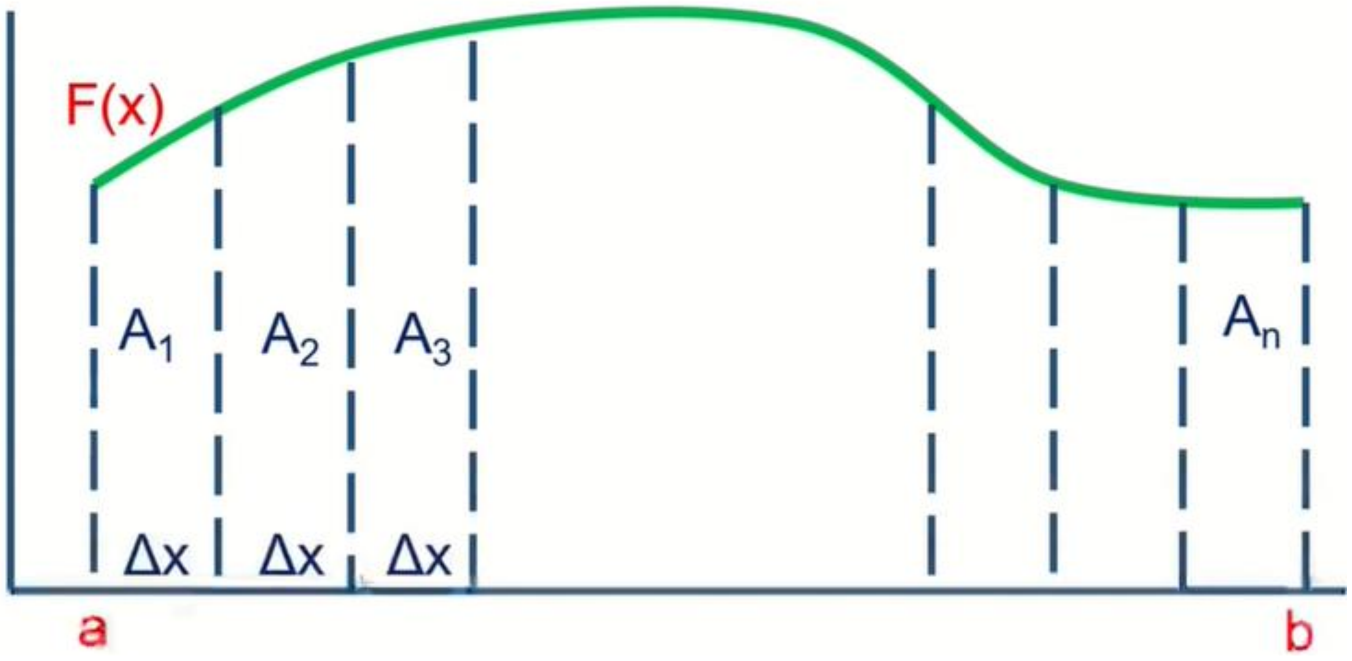
Universidad de los Andes
Colombia
Facultad de Ingeniería

¿En qué se usan?

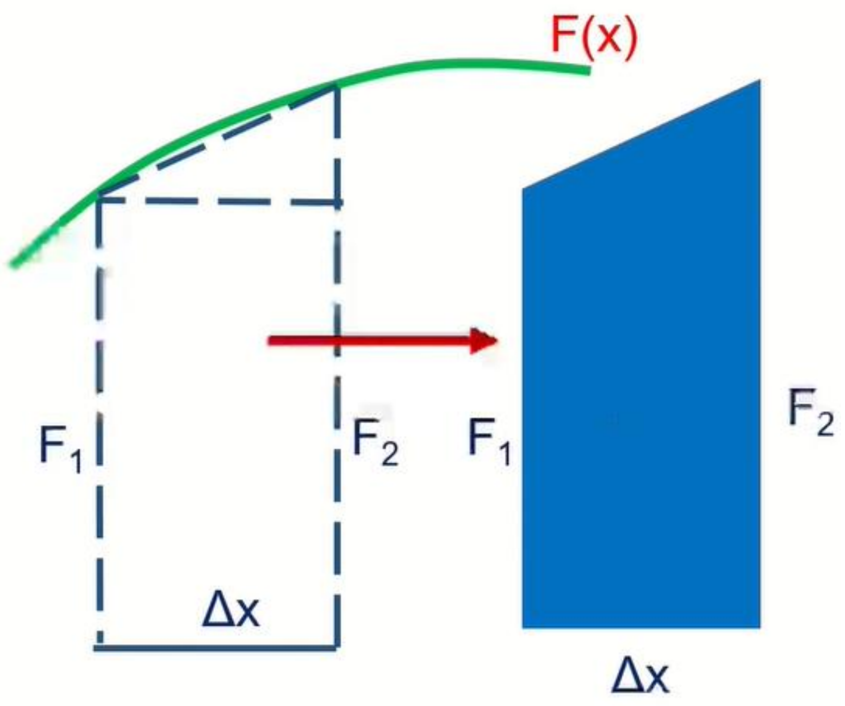
- Se aplican en diferentes áreas de la ingeniería como la simulación y el modelado de sistemas y fenómenos.
- Son menos precisos de la resolución analítica pero no necesitan la resolución de integrales y derivadas.
- En este curso, la utilizaremos para el análisis de datos experimentales

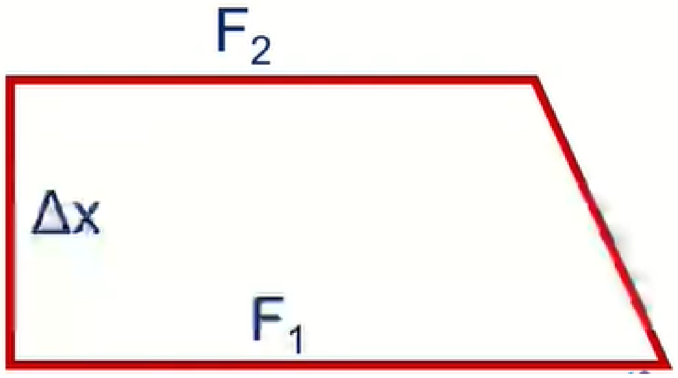
Integración numérica

Método del trapecio



Área bajo la curva = $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n$





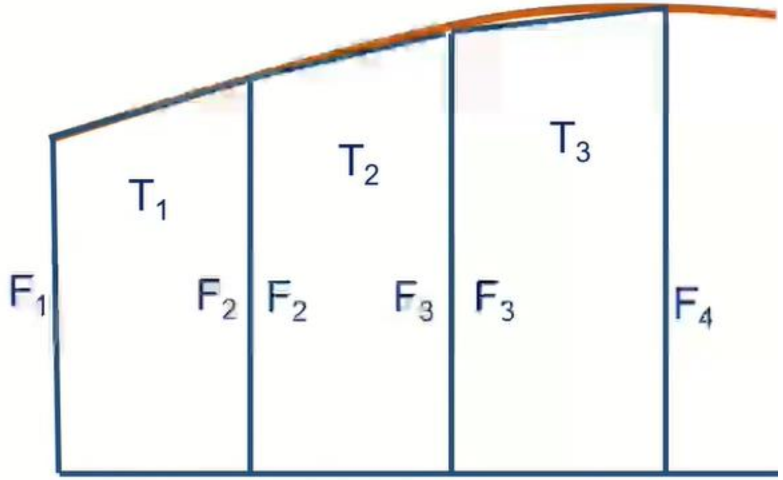
$$A = \frac{\left(F_1 + F_2\right)\Delta x}{2}$$

$$A = \frac{\Delta x}{2}\left(F_1 + F_2\right)$$

$$A_1 = \frac{\Delta x}{2}\left(F_1 + F_2\right)$$

$$A_2 = \frac{\Delta x}{2}\left(F_2 + F_3\right)$$

$$A_3 = \frac{\Delta x}{2}\left(F_3 + F_4\right)$$



$$A_T = \frac{\Delta x}{2}\left(F_1 + F_2\right) + \frac{\Delta x}{2}\left(F_2 + F_3\right) + \frac{\Delta x}{2}\left(F_3 + F_4\right)$$

$$A_T = \frac{\Delta x}{2}\left[F_1 + F_2 + F_2 + F_3 + F_3 + F_4\right]$$

$$A_T = \frac{\Delta x}{2}\left[F_1 + F_4 + 2F_2 + 2F_3\right]$$

Si *f(x)* es continua en [a, b], entonces

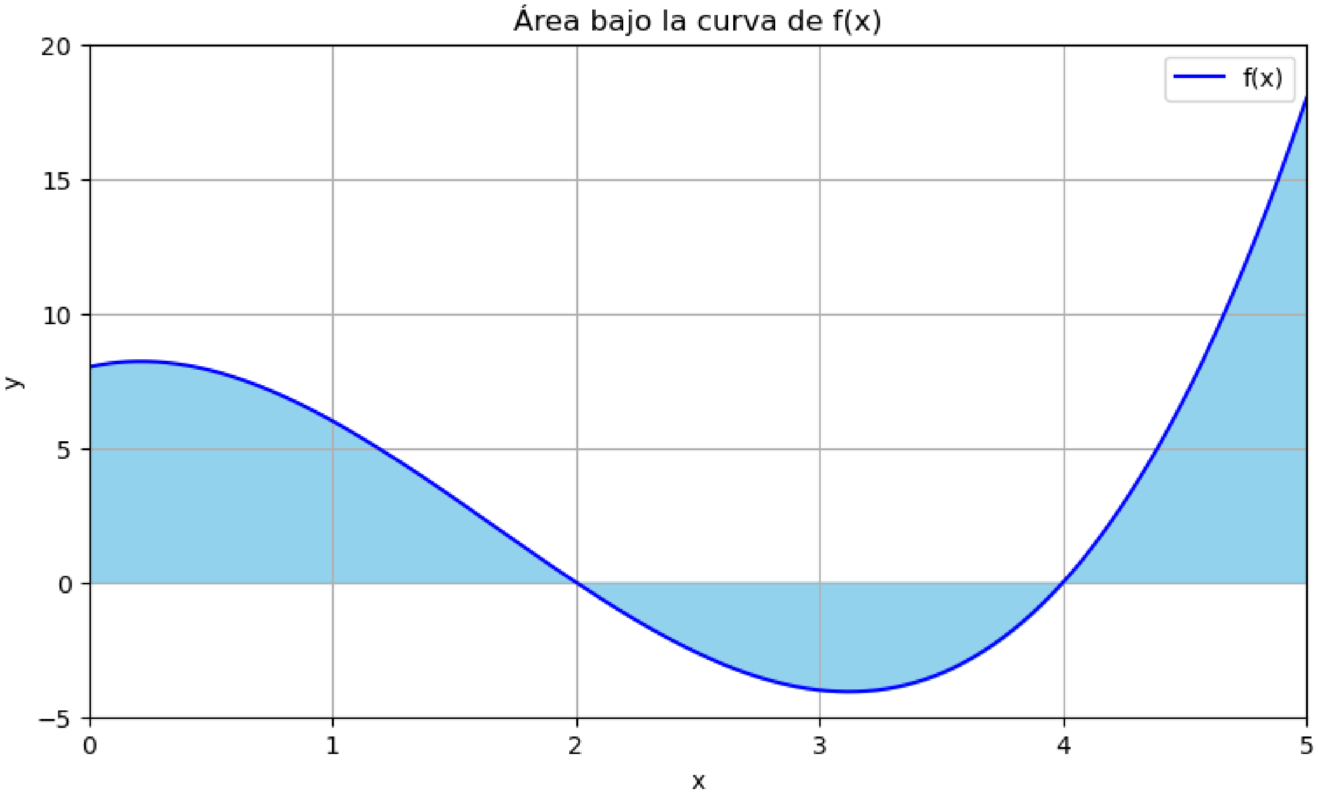
$$A = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{n=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ $\qquad x_i = a + n\Delta x$

a es el límite inferior, b es el límite superior y n es el número de trapecios que deseas emplear en el calculo

Calcula la siguiente integral con el método del trapecio:

$$\int_{0}^{5} (x^3 - 5x^2 + 2x + 8)\, dx$$



Cálculo de Δx

$$\int_0^5 (x^3 - 5x^2 + 2x + 8)\, dx$$

Consideramos 10 trapecios

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \Delta x = \frac{5-0}{10}$$

Cálculo de $\mathbf{x_i}$

$$x_i = a + n\Delta x$$

n	$X_i = a + n\Delta x$
0	0 + 0(0.5)=0
1	0 + 1 (0.5)= 0.5
2	0 + 2(0.5)=1
3	0 + 3(0.5)=1.5
4	0 + 4(0.5)=2
5	0 +5(0.5)=2.5
6	0 + 6(0.5)=3
7	0 + 7(0.5)=3.5
8	0 + 8(0.5)=4
9	0 + 9(0.5)=4.5
10	0 + 10(0.5)=5

Cálculo de $\mathbf{f(x_i)}$

n	X_i	F(x)
0	0	8
1	0.5	7.875
2	1	6
3	1.5	3.125
4	2	0
5	2.5	-2.625
6	3	-4
7	3.5	-3.375
8	4	0
9	4.5	6.875
10	5	18

$F(x_0) = 8$

$\Sigma f(x_i) = 13.875$

$F(x_n) = 18$

$$A = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{n=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

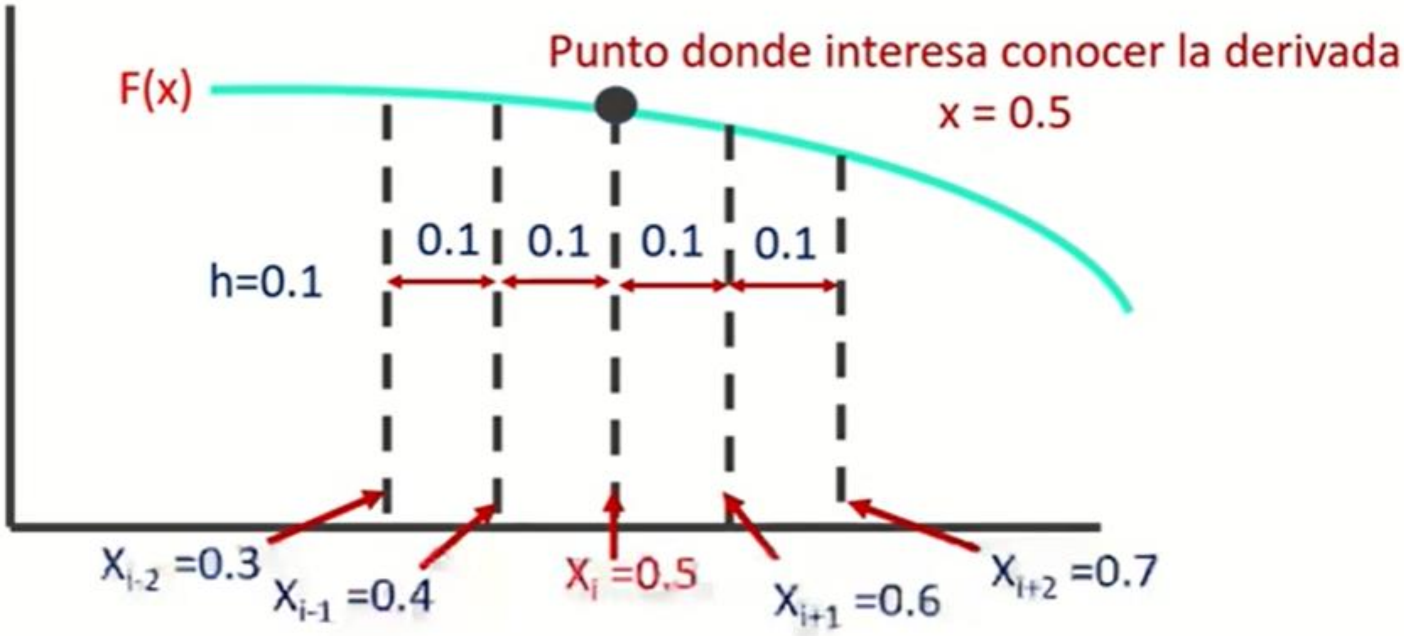
$$A = \frac{0.5}{2}\left[8 + 18 + 2(13.875)\right]$$

$$A = 13.4375$$

Derivación numérica

Paso

El paso se define con la letra h



Paso

Reglas empíricas

x=valores en el orden de 0.001 h =0.001
x=valores en el orden de 0.01 h =0.01
x=valores entre 0.1 y 999 h =0.1
x=valores mayores de 1000 h =1

Ejemplo

x=0.005 h =0.001
x=0.09 h =0.01
x=0.7 h =0.1
x=1700 h =1
x=10 h =0.1
x=25,000 h =1

Modelos matemáticos

Primera derivada

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$$

Segunda derivada

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$$

Las formulas derivan de la expansión de la serie de Taylor

Determina la primera y segunda derivada del siguiente polinomio en el punto x=0.5:

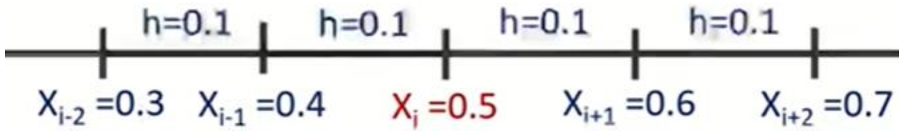
$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

A partir de las reglas que vimos
podemos considerar el paso h=0.1

Universidad de los Andes
Colombia
Facultad de Ingeniería

Determina la primera y segunda derivada del siguiente polinomio en el punto x=0.5:

Las derivada tercera y cuarta requieren conocer el valor de la función hasta dos pasos antes y después del valor de interés:



	x	F(x)
X_{i-2}	0.3	$f(x)=-0.1(0.3)^4-0.15(0.3)^3-0.5(0.3)^2-0.25(0.3)+1.2=1.07514$
X_{i-1}	0.4	$f(x)=-0.1(0.4)^4-0.15(0.4)^3-0.5(0.4)^2-0.25(0.4)+1.2=1.00784$
X_i	0.5	$f(x)=-0.1(0.5)^4-0.15(0.5)^3-0.5(0.5)^2-0.25(0.5)+1.2=0.925$
X_{i+1}	0.6	$f(x)=-0.1(0.6)^4-0.15(0.6)^3-0.5(0.6)^2-0.25(0.6)+1.2=0.82464$

Primera derivada

	x	F(x)
X_{i-2}	0.3	1.07514
X_{i-1}	0.4	1.00784
X_i	0.5	0.925
X_{i+1}	0.6	0.82464
X_{i+2}	0.7	0.70454

Primera derivada

$$\boxed{f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}}$$

$$\downarrow$$

$$f'(0.5) = \frac{-0.70454 + 8(0.82464) - 8f(1.00784) + f(1.07514)}{12(0.1)}$$

$$\downarrow$$

$$f'(0.5) = -0.9125$$

Segunda derivada

	x	F(x)
X_{i-2}	0.3	1.07514
X_{i-1}	0.4	1.00784
X_i	0.5	0.925
X_{i+1}	0.6	0.82464
X_{i+2}	0.7	0.70454

Segunda derivada

$$\boxed{f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}}$$

$$\downarrow$$

$$f''(0.5) = \frac{-0.70454 + 16(0.82464) - 30(0.925) + 16(1.00784) - 1.07514}{12 * (0.1)^2}$$

$$\downarrow$$

$$f''(0.5) = -1.75$$