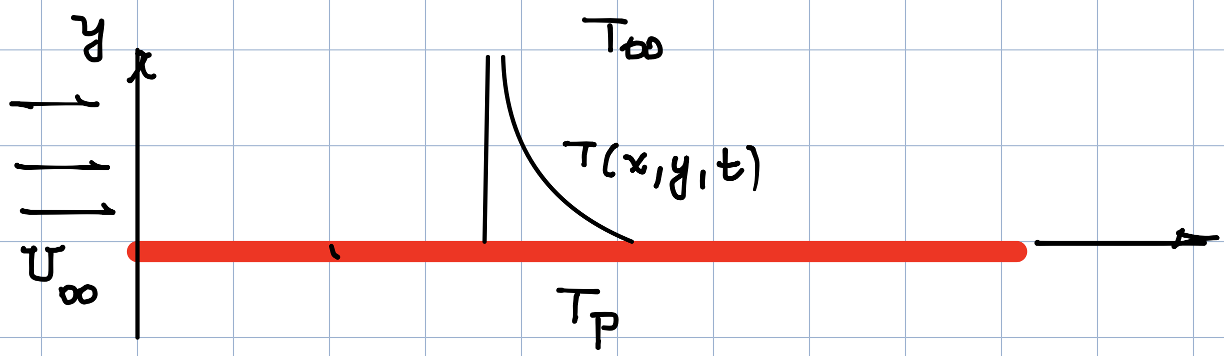
PROYECTO FINAL 25.2 jrt

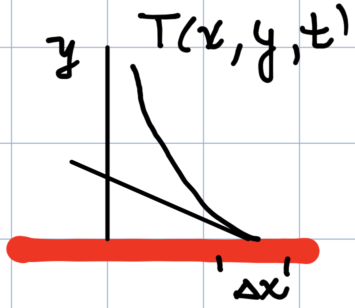
Dic 3. Grupos de 3.

Convección sobre placas planas



El objetivo de este proyecto es comprender los mecanismo de convección forzada sobre una placa plana a temperatura T_p, sujeta a una corriente de fluido con velocidad U_∞ y temperatura $T_\infty < T_p$.

En particular debemos: a) definir el coeficiente de conveccion h en términos de las variable primitivas que son $T(x,y,t)$, U, k_f (conductividad fluido).
b) Intentar calcular $h = h(T, U, k)$



Definición de h:

La cantidad de calor que entra al fluido desde la placa caliente a traves de un segmento Δx es:

$$\Delta Q = -k \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} \Delta x \equiv h(T_p - T_\infty)\Delta x$$

Esto define h como:

(1) $$h \equiv \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}}{T_p - T_\infty}$$

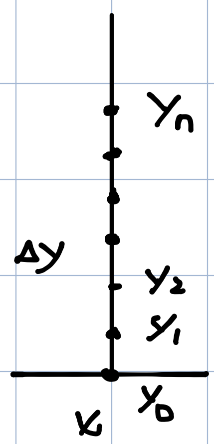
Por lo tanto el objetivo de la simulación que harán es determinar $h(x, t; U_\infty, k_f)$ del perfil $T(x,y,t)$, lo cual será función de los parametros U_∞, T_∞ y k_f.

Difución pura (solo conducción)

La ecuación del calor en 1D (y en este caso) es:

(2) $$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad \frac{k}{\rho c_p} = \alpha = \text{difusión térmica}$$

Primero simularán la difusión transitoria en un medio semiinfinito $(y>0)$ sobre una placa con temperatura T_p y el medio $T_\infty = 0$.



Para resolver ② numericamente van discretizar y en puntos $y_0 = 0, y_1, y_2, \ldots y_n \ldots$ distanciados Δy. Los tiempos los van a discretizar como $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots t_k$ separados Δt. La temperatura $T(y,t)$ la denotamos $T(n\Delta y, k\Delta t) = T_n^k$:

- $\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ en ② la podemos discretizar como.

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{y_n, t_k} = \frac{T_{n-1}^k + T_{n+1}^k - 2T_n^k}{\Delta y^2}$$

(explicación en clase).

- $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ en ② los discretizamos como

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{y_n, t_k} = \frac{T_n^k - T_n^{k-1}}{\Delta t}$$

Con esto la ecuación de difusión se reduce a:

$$\frac{T_n^k - T_n^{k-1}}{\Delta t} = \alpha \, \frac{T_{n-1}^{k-1} + T_{n+1}^{k-1} - 2T_n^{k-1}}{\Delta y^2}$$

o

$$③ \qquad T_n^k = T_n^{k-1} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2}\left(T_{n-1}^{k-1} + T_{n+1}^{k-1} - 2T_n^{k-1}\right)$$

Esta ecuación permite recursivamente obtener T_n^k para todo $k = 1, 2, \dots$ si se conoce la temperatura inicial T_n^0.

Conocido T_n^0 se puede aproximar $\left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0}$ para cada tiempo $k\Delta t$

como $\left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} = \left(-\frac{3}{2} T_0^k + 2T_1^k - \frac{1}{2} T_2^k\right) / \Delta y$

(explicación en clase)

1. a) Con condición inicial $T_n^0 = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$

calcule T_n^k usando los siguientes parametros: $\Delta y = 1$, $\Delta x = 0.1$, $\alpha = 1$, $n = (0, \dots, 40)$, $k = (0, \dots 40)$

b) Calcule para cada K (tiempo)

$\left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0}$ y h de la ecuación (1)

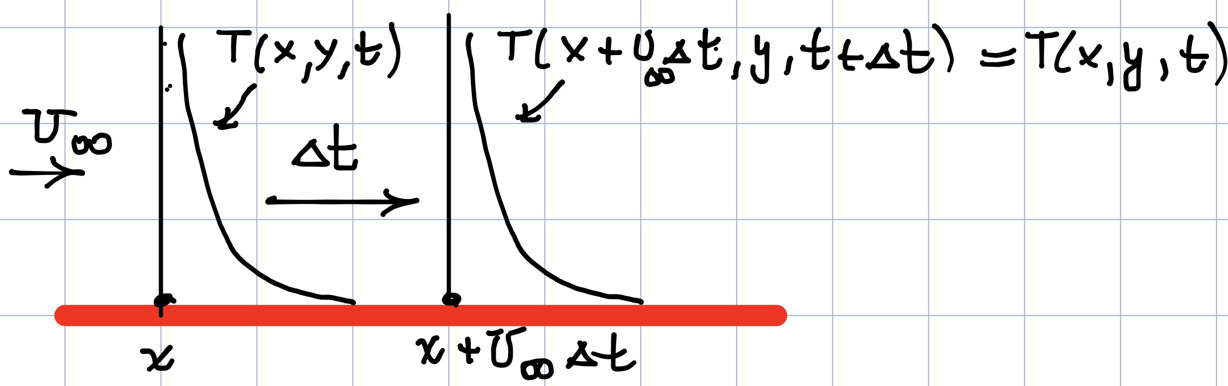
con $T_p = 1$ y $T_\infty = 0$

conducción $k_f = \alpha$ ($\rho C_p = 1$)

Grafique h vs Tiempo (parametro K).

Convección = Conducción + Transporte

El siguiente es un modelo simplificado de convección pero suficiente para entender lo que pasa físicamente.



El "transporte" de energia causado por el flujo U_∞ es escencialmente lo que se adiciona a la conducción para obtener la convección: Transporte del perfil de temperatura en y hacia adelante en x durante un tiempo Δt

Esto se traduce en la siguiente ecuación

(4) $T(x + U_\infty \Delta t, y, t+\Delta t) = T(x, y, t)$.

La conducción (sección anterior) y el transporte ocurren simultaneamente sin embargo en una simulación para tiempos cortos se puede considerar que operan secuencialmente

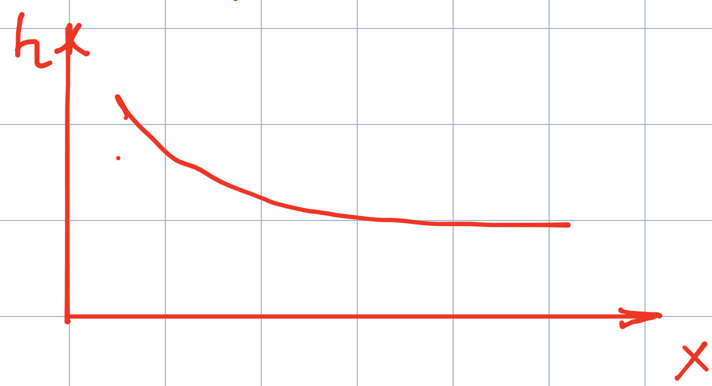
Por lo tanto la evolución dada por la ecuación (3) debe acompañarse por un segundo paso para cada Δt que implemente (4)

2. Para los mismos parámetros del numeral 1. escoja adicionalmente $U_\infty = 1$. Construya una formula en términos de T^k_{ni} que implemente la ecuación 4.

Construya un programa que implemente conducción y transporte, secuencialmente para $k = 1, \dots 50$ $(t_{final} = 50\Delta t)$

3. Para $k = 50$ (equilibrio esperado) calcule:

$$h = \frac{-\left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0}}{T_p - T_\infty} \quad \text{vs} \quad x \quad (x = k\,\Delta x,\ \Delta x = U_\infty \Delta t).$$



Grafique h vs $1/\sqrt{x}$. De esta gráfica debería poder estimar una relación simple entre h y x.

(Esta curva no se va a portar "bien" para $x \to 0$. Ignore puntos con k bajo)

Compare el h obtenido acá con el obtenido para solo conducción.

4. Defina el espesor de la capa Límite $\delta(x,t)$ para cada x y t como el valor de y para el cual:

$$T(x,y,t) - T_\infty = 0.05\,(T_p - T_\infty).$$

En nuestro caso $T_p = 1$ y $T_\infty = 0$.

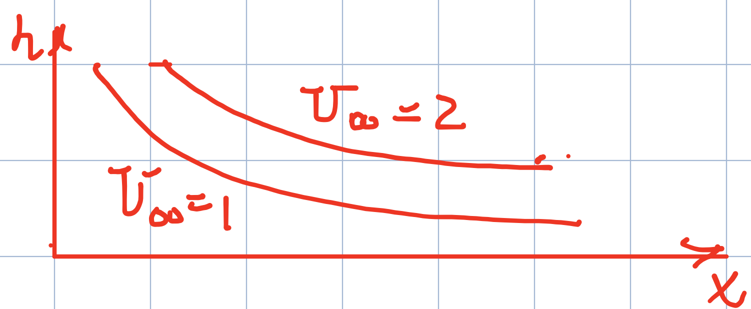
Para el tiempo final $t_{final} = 50\Delta t$ calcule $\delta(x, t_{final})$ para $x = k u_\infty \Delta t$, $k = (1, \dots, 50)$.

Grafique δ vs x

Grafique δ vs $\sqrt{x}$ para estimar una relación entre δ y x

Grafique $\delta * h$ vs x para concluir una relación entre h y δ.

5. <u>Efecto de U_∞</u> : ud puede tener una primera aproximación al efecto de U_∞ repitiendo los cálculos para $U_\infty = 1, 2, 3$. Sin embargo de los procedimientos anteriores ud debe notar que U_∞ <u>solo entra en la manera de calcular la coordenada</u> $x = k U_\infty \Delta t$. Con esta observación ud debe poder volver a dibujar h vs x para $U_\infty = 2$ y 3 con los mismo datos de U_∞. Elabore esas gráficas:



¿Cual es entonces la fórmula $h = h(x, U_\infty)$?

6. Haga las mismas consideraciones para calcular $\delta = \delta(x, v_\infty)$

7. <u>Última Consideración: Dependencia de k_f</u>

Esta es un poco más difícil. Es el premio mayor. Note que en su algoritmo la dependencia de y esta en la formula conducción ③

$$T_n^k = T_n^{k-1} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2}\left(\frac{T_{n-1}^{k-1} + T_{n+1}^{k-1} - 2T_n^{k-1}}{\Delta y^2}\right)$$

Luego el parámetro determinante en la evolución en y es $\frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2}$ (si $\rho c_p = 1$ $\alpha = k$)

Luego modificar los cálculos para $\alpha \rightarrow 2\alpha$ $\left(\frac{2\alpha \Delta t}{\Delta y^2}\right)$ es equivalente a los cálculos originales con $\Delta y \rightarrow \Delta y' = \frac{\Delta y}{\sqrt{2}}$

$$\left(\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y')^2} = \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta y^2}\right)$$

Esta equivalencia debe servirle para determinar como depende h de k_f ($K_f = \alpha$

8. Con todo lo anterior debe poder escribir finalmente cómo es la dependencia $h = h(k_f, v_\infty, x)$

Defina $N_u = \frac{h x}{k_f}$ N_u = Número de Nusselt

¿Cuál sería la fórmula N_u ?