Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências, Tecnologias e Saúde
Coordenadoria Especial de Física, Química e Matemática

# Atividade Avaliativa - Semana 03

## Cálculo III

16 de Setembro de 2020

Orientações:
1: A atividade deve ser manuscrita (não aceitarei trabalhos digitados);
2: As fotos devem ser tiradas na vertical. Você pode tirar foto na horizontal, desde que a escrita também esteja na horizontal;
3: Não aceito tarefas enviadas por email. Apenas via moodle, no link da atividade;
4: O nome do arquivo deve seguir o padrão **A03-C3-SeuNomeCompleto.pdf**;
5: O prazo de entrega é de 24h. Dentro deste prazo, está previsto o tempo de realização da atividade, bem como a "burocracia" de criar o PDF e postar no Moodle e, **inclusive**, eventuais instabilidades do sistema ou problemas de conexão. Deixar a tarefa para os últimos minutos é arriscado e responsabilidade de cada um! Aconselho a fazer com antecedência, para evitar problemas na postagem, pois não será concedido tempo superior a 24h.
6: O prazo expira às 20h do dia 17/09.

**A03**

**Realize seus cálculos de forma organizada, explicando todos os passos desenvolvidos. Organização e clareza serão levados em conta durante a correção.**

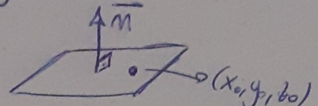
Uma curva $C$ é dada por $\overrightarrow{f}(t) = e^t \cos(t)\hat{\imath} + e^t \sin(t)\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, onde $t \in R$.

(a) (60%) Um plano normal a uma curva num ponto contém os vetores normal $\overrightarrow{N}$ e binormal $\overrightarrow{B}$ neste ponto. Determine o plano normal da curva $C$ no ponto $P = (\frac{1}{2}e^{\pi/3}, \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/3}, 2)$.

(b) (40%) Considere $t \geq 0$, reparametrize a curva $C$ pelo comprimento de arco.

# A03 - CÁLCULO III

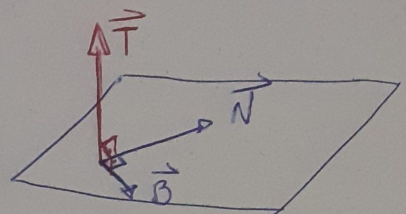
**Plano**: $ax + by + cz + d = 0$ ou $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$




$(a, b, c) \equiv \vec{m}$ → vetor normal ao plano

$(x_0, y_0, z_0) \equiv$ ponto que faz parte do plano.

a) O "plano normal" à curva contém $\vec{N}$ e $\vec{B}$:




$\vec{N} \perp \vec{B}$

**Mas**, $\vec{T}$ é ortogonal a $\vec{N}$ e $\vec{B}$ ao mesmo tempo. Logo, $\vec{T}$ é normal ao plano.

Portanto:

$$\vec{m} = \vec{T} = \frac{\vec{f'}}{|\vec{f'}|}$$

$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{2}e^{\pi/3}, \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/3}, 2\right) \longrightarrow t = \pi/3$. Precisamos achar $\vec{T}(\pi/3)$.

Vejamos: $\vec{f}(t) = e^t \cos t\, \hat{i} + e^t \operatorname{sen} t\, \hat{j} + 2\hat{k}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\vec{f'}(t) = (e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)\hat{i} + (e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)\hat{j} + 0\hat{k}$$
$$\vec{f'}(t) = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)\hat{i} + e^t(\operatorname{sen} t + \cos t)\hat{j}$$
$$\vec{f'}(\pi/3) = e^{\pi/3}(\cos \pi/3 - \operatorname{sen} \pi/3)\hat{i} + e^{\pi/3}(\operatorname{sen} \pi/3 + \cos \pi/3)\hat{j}$$
$$= e^{\pi/3}\left(1/2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\hat{i} + e^{\pi/3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\hat{j}$$

O vetor $\vec{m}$ não precisa ser unitário, então, ao invés de usar $\vec{T}(\pi/3)$, usarei $\vec{f'}(\pi/3)$.

$$\vec{n} = \left(e^{\pi/3}\left(1/2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), e^{\pi/3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1/2\right), 0\right)$$

Inclusive, posso pegar este vetor e dividi-lo por $e^{\pi/3}$ e multiplicá-lo por 2. O que importa é ser normal ao plano que procuramos:

$$\vec{n} = \left(\overset{a}{(1 - \sqrt{3})}, \overset{b}{(\sqrt{3} + 1)}, \overset{c}{0}\right)$$

$$P = \left(\overset{x_0}{\frac{1}{2}e^{\pi/3}}, \overset{y_0}{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/3}}, \overset{z_0}{2}\right)$$

Plano normal à Curva em P:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\underbrace{(1-\sqrt{3})}_{a}\left(x - \underbrace{1/2\, e^{\pi/3}}_{x_0}\right) + \underbrace{(\sqrt{3}+1)}_{b}\left(y - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/3}}_{y_0}\right) + \underbrace{0}_{c} = 0$$

↳ Não tem o que simplificar. Pode deixar assim.

b) $S(t) = \int_0^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$

$x'(t) = e^t(\cos t - \text{sen}\, t)$ , $y'(t) = e^t(\text{sen}\, t + \cos t)$ , $z'(t) = 0$

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - \cancel{2\,\text{sen}\, t \cos t} + \text{sen}^2 t) + e^{2t}(\text{sen}^2 t + \cancel{2\,\text{sen}\, t \cos t} + \cos^2 t)}\, dt$$

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{2e^{2t}}\, dt = \sqrt{2}\int_0^t e^t\, dt = \sqrt{2}(e^t - 1)$$

↳ já coloquei os limites Superior e Inf.

1º Passo: Encontrar $S(t)$: OK!

2º Passo: Inverter $S(t)$ e escrever $t(s)$.

$$s = \sqrt{2}(e^t - 1) \rightarrow \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 = e^t$$

$$\boxed{t = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1\right)}$$ ok!

3º Passo: Escrever $\vec{f}(t(s))$:

$$x(t(s)) = e^{\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}s+1)} \cos\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1\right)\right)$$

$$y(t(s)) = e^{\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}s+1)} \text{sen}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1\right)\right)$$

$$z(t(s)) = 2$$

Obs.: $e^{\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}s+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}s + 1$

Desde que $\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1 > 0$ ↳ o logaritmo não pode ser negativo, nem zero

$s > -\frac{2}{\sqrt{2}}$

$\boxed{s > -\sqrt{2}}$

Logo:

$$\vec{f}(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1\right)\cos\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s+1\right)\right)\hat{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}s+1\right)\text{sen}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s+1\right)\right)\hat{j} + 2\hat{k}$$

Com $s > -\sqrt{2}$