Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências, Tecnologias e Saúde
Coord. Esp. de Física, Química e Matemática

CÁLCULO III

Lista 1 – Funções Vetoriais, Limites e Parametrização

Referências: M. Gonçalves e D. Flemming, Cálculo B. (impressão mais escura, fazer os circulados em vermelho)
Anton, Bivens e Davis, Cálculo, vol. 2, 10ª ed. (impressão mais clara: fazer todos)

2.8 Exercícios

1. A posição de uma partícula no plano xy, no tempo t, é dada por $x(t) = e^t$, $y(t) = te^t$.
   a) Escrever a função vetorial $\vec{f}(t)$ que descreve o movimento dessa partícula.
   b) Onde se encontrará a partícula em $t = 0$ e em $t = 2$?

2. O movimento de um besouro que desliza sobre a superfície de uma lagoa pode ser expresso pela função vetorial

$$\vec{r}(t) = \frac{1 - \cos t}{m}\vec{i} + \left(2t + \frac{t - \operatorname{sen} t}{m}\right)\vec{j},$$

onde m é a massa do besouro. Determinar a posição do besouro no instante $t = 0$ e $t = \pi$.

3. Esboçar a trajetória de uma partícula P, sabendo que o movimento é descrito por:
   a) $\vec{f}(t) = t\vec{i} + (2t^2 - 1)\vec{j}$
   b) $\vec{g}(t) = \frac{2}{t}\vec{i} + \frac{2}{t+1}\vec{j},\ t > 0$
   c) $\vec{h}(t) = t\vec{i} + \vec{j} + 4t^2\vec{k}$
   d) $\vec{v}(t) = \ln t\,\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k},\ t > 0$
   e) $\vec{w}(t) = 3\cos t\,\vec{i} + 3\operatorname{sen} t\,\vec{j} + (9 - 3\operatorname{sen} t)\vec{k}$; $t \in [0, 2\pi]$
   f) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + (9 - t)\vec{j} + t^2\vec{k},\ t > 0$
   g) $\vec{\ell}(t) = t\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j} + 2\vec{k}$
   h) $\vec{r}(t) = (8 - 4\operatorname{sen} t)\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + 4\operatorname{sen} t\,\vec{k}$.

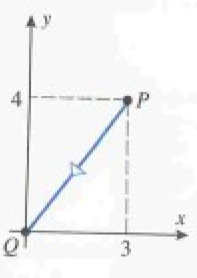
4. Sejam $\vec{f}(t) = \vec{a}t + \vec{b}t^2$ e $\vec{g}(t) = t\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$, com $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $0 \le t \le 2\pi$.
   Calcular:
   a) $\vec{f}(t) + \vec{g}(t)$
   b) $\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$
   c) $\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$
   d) $\vec{a} \cdot \vec{f}(t) + \vec{b} \cdot \vec{g}(t)$
   e) $\vec{f}(t - 1) + \vec{g}(t + 1)$.

5. Uma partícula se desloca no espaço. Em cada instante t o seu vetor posição é dado por

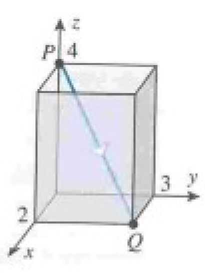
$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{1}{t-2}\vec{j} + \vec{k}.$$

19-20 Escreva uma equação vetorial para o segmento de reta de P a Q.

19.



20.



31-34 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta.

31. O domínio natural de uma função vetorial é a união dos domínios de suas funções componentes.

32. Se $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ for uma função vetorial no espaço bidimensional, então o gráfico de $\mathbf{r}(t)$ será uma superfície no espaço tridimensional.

33. Se $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}_1$ forem vetores do espaço tridimensional, então o gráfico da função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad (0 \le t \le 1)$$

será o segmento de reta que liga os pontos finais de $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}_1$.

9-14 Descreva o gráfico da equação.

9. $\mathbf{r} = (3 - 2t)\mathbf{i} + 5t\mathbf{j}$ **10.** $\mathbf{r} = 2 \operatorname{sen} 3t\,\mathbf{i} - 2 \cos 3t\,\mathbf{j}$

11. $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + (1 + 3t)\,\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r} = 2 \cos t\mathbf{i} - 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

14. $\mathbf{r} = -3\mathbf{i} + (1 - t^2)\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

15. (a) Obtenha a inclinação da reta no espaço bidimensional que está representada pela equação vetorial $\mathbf{r} = (1 - 2t)\,\mathbf{i} - (2 - 3t)\,\mathbf{j}$.

(b) Obtenha as coordenadas do ponto em que a reta

$$\mathbf{r} = (2 + t)\mathbf{i} + (1 - 2t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$$

intersecta o plano xz.

16. (a) Obtenha o corte com o eixo y da reta no espaço bidimensional que está representada pela equação vetorial $\mathbf{r} = (3 + 2t)\,\mathbf{i} + 5t\mathbf{j}$.

(b) Obtenha as coordenadas do ponto em que a reta

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (1 + 2t)\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$$

intersecta o plano $3x - y - z = 2$.

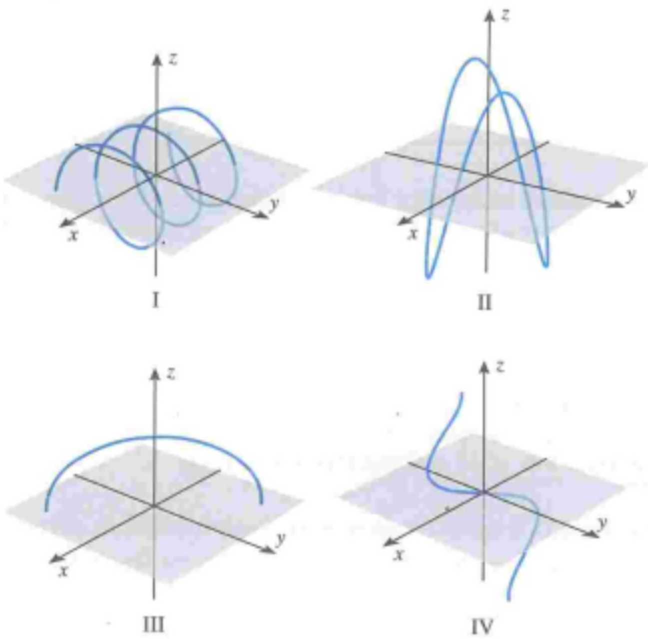
47. Em cada parte, associe a equação vetorial com um dos gráficos abaixo e explique seu raciocínio.

(a) $\mathbf{r} = t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + \sqrt{2 - t^2}\,\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{r} = \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{r} = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \operatorname{sen} 2t\mathbf{k}$

(d) $\mathbf{r} = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + \cos 3t\mathbf{j} + \operatorname{sen} 3t\mathbf{k}$



em $t = 0$ e $t = 3$.

6. Sejam $\vec{f}(t) = t\,\vec{i} + 2t^2\,\vec{j} + 3t^3\vec{k}$ e

$$\vec{g}(t) = 2t\,\vec{i} + \vec{j} - 3t^2\vec{k},\ t \geq 0.$$

Calcular:

a) $\lim\limits_{t \to 1}\left[\vec{f}(t) + \vec{g}(t)\right]$ b) $\lim\limits_{t \to 1}\left[\vec{f}(t) - \vec{g}(t)\right]$

c) $\lim\limits_{t \to 1}\left[3\vec{f}(t) - \frac{1}{2}\vec{g}(t)\right]$ d) $\lim\limits_{t \to 1}\left[\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)\right]$

e) $\lim\limits_{t \to 1}\left[\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)\right]$ f) $\lim\limits_{t \to 1}\left[(t + 1)\,\vec{f}(t)\right]$

g) $\lim\limits_{t \to 0}\left[\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)\right]$.

7. Seja $\vec{f}(t) = \operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + 2\vec{k}$ e $h(t) = 1/t$. Calcular, se existir, cada um dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{t \to 0} \vec{f}(t)$ b) $\lim\limits_{t \to 0}\left[h(t) \cdot \vec{f}(t)\right]$.

8. Calcular os seguintes limites de funções vetoriais de uma variável.

a) $\lim\limits_{t \to \pi}\left(\cos t\,\vec{i} + t^2\vec{j} - 5\vec{k}\right)$

b) $\lim\limits_{t \to -2}\left(\dfrac{t^3 + 4t^2 + 4t}{(t + 2)(t - 3)}\,\vec{i} + \vec{j}\right)$

c) $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{1}{t - 2}\left[(t^2 - 4)\,\vec{i} + (t - 2)\,\vec{j}\right]$

d) $\lim\limits_{t \to 1}\left[\dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}\vec{i} + (t - 1)\,\vec{j} + (t + 1)\,\vec{k}\right]$

e) $\lim\limits_{t \to 0}\left[\dfrac{2^t - 1}{t}\vec{i} + (2^t - 1)\,\vec{j} + t\vec{k}\right]$.

b) $\vec{f}(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \dfrac{1}{t}\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}, & t \neq 0 \\ j, & t = 0 \end{cases}$

em $t = 0$

c) $\vec{f}(t) = \begin{cases} t\,\vec{i} + \dfrac{\sqrt{t + 2} - \sqrt{2}}{t}\,\vec{j}, & t \neq 0 \\ \sqrt{2}\,\vec{j}, & t = 0 \end{cases}$

em $t = 0$

d) $\vec{f}(t) = \operatorname{sen} t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$
em $t = 0$

e)

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t - 1}\,\vec{i} + \dfrac{4}{t - 2}\,\vec{j} - 5\vec{k}, & t \neq 1 \text{ e } t \neq 2 \\ \vec{0}, & t = 1 \text{ e } t = 2 \end{cases}$$

em $t = 1$ e $t = 2$.

12. Indicar os intervalos de continuidade das seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{f}(t) = \vec{a} \operatorname{sen} t + \vec{b} \cos t$ em $[0, 2\pi]$ onde $\vec{a} = \vec{i}$ e $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$

b) $\vec{g}(t) = \dfrac{1}{t}\vec{i} + (t^2 - 1)\,\vec{j} + e^t\vec{k}$

c) $\vec{h}(t) = e^{-t}\,\vec{i} + \ln t\,\vec{j} + \cos 2t\,\vec{k}$

d) $\vec{v}(t) = \left(\ln (t + 1), \dfrac{1}{t}, t\right)$

e) $\vec{w}(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{tg} t, e^t)$

15. Esboçar o gráfico da curva descrita por um ponto móvel $P(x, y)$, quando o parâmetro t varia no intervalo dado. Determinar a equação cartesiana da curva em cada um dos itens:

a) $x = 2 \cos t$

$y = 2 \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

b) $x = 4 \cos t$

$y = 4 \operatorname{sen} t$

$z = 2, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

c) $x = 2 + 4 \operatorname{sen} t$

$y = 3 - 2 \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$

d) $x = t + 1$

$y = t^2 + 4$

$z = 2, \qquad -\infty < t < +\infty.$

16. Obter a equação cartesiana das seguintes curvas:

a) $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t, 3t + 5\right)$

b) $\vec{r}(t) = (t - 1, t^2 - 2t + 2)$

c) $\vec{r}(t) = (s^2 - 1, s^2 + 1, 2).$

17. Determinar o centro e o raio das seguintes circunferências e depois escrever uma equação vetorial para cada uma.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 3 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

c) $x^2 + y^2 + 5y - 2 = 0$

a) $A\left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$

b) $A(0, 2)$ e $\vec{b} = 5\vec{i} - \vec{j}$

c) $A(-1, 2, 0)$ e $\vec{b} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$

d) $A(\sqrt{2}, 2, \sqrt{3})$ e $\vec{b} = 5\vec{i} - 3\vec{k}.$

21. Determinar uma representação paramétrica da reta que passa pelos pontos A e B, sendo:

a) $A(2, 0, 1)$ e $B(-3, 4, 0)$

b) $A(5, -1, -2)$ e $B(0, 0, 2)$

c) $A\left(\sqrt{2}, 1, \frac{1}{3}\right)$ e $B(-7, 2, 9)$

d) $A\left(\pi, \frac{\pi}{2}, 3\right)$ e $B(\pi, -1, 2)$

22. Determinar uma representação paramétrica da reta representada por:

a) $y = 5x - 1, \ z = 2$

b) $2x - 5y + 4z = 1, \ 3x - 2y - 5z = 1$

c) $2x - 5y + z = 4, \ y - x = 4.$

23. Encontrar uma equação vetorial das seguintes curvas:

a) $x^2 + y^2 = 4, \ z = 4$

b) $y = 2x^2, \ z = x^3$

c) $2(x + 1)^2 + y^2 = 10, \ z = 2$

d) $y = x^{1/2}, \ z = 2$

e) $x = e^y, \ z = e^x$