CÁLCULO III – Engenharia de Energia
Lista 3 – M. Gonçalves e D. Flemming, Cálculo B.

1. Determinar a derivada das seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{f}(t) = \cos^3 t\,\vec{i} + \text{tg}\,t\,\vec{j} + \text{sen}^2 t\,\vec{k}$

b) $\vec{g}(t) = \text{sen}\,t \cos t\,\vec{i} + e^{-2t}\vec{j}$

c) $\vec{h}(t) = (2-t)\,\vec{i} + t^3\vec{j} - \frac{1}{t}\vec{k}$

d) $\vec{f}(t) = e^{-t}\vec{i} + e^{-2t}\vec{j} + \vec{k}$

e) $\vec{g}(t) = \ln t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$

f) $\vec{h}(t) = \dfrac{5t-2}{2t+1}\vec{i} + \ln(1-t^2)\,\vec{j} + 5\vec{k}.$

2. Determinar um vetor tangente à curva definida pela função dada no ponto indicado.

a) $\vec{f}(t) = (t, t^2, t^3), P(-1, 1, -1)$

b) $\vec{g}(t) = (t, e^t), P(1, e)$

c) $\vec{h}(t) = (\text{sen}\,t, \cos t, t), P(1, 0, \pi/2)$

d) $\vec{p}(t) = \left(1-t, \dfrac{1}{1-t}\right), P(-1, -1)$

e) $\vec{r}(t) = (2t, \ln t, 2), P(2, 0, 2)$

3. Mostrar que a curva definida por

$$\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{2}\,\text{sen}\,t, \frac{1}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

está sobre a esfera unitária com centro na origem.

Determinar um vetor tangente a essa curva no ponto $P\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Determinar dois vetores unitários, tangentes à curva definida pela função dada, no ponto indicado.

a) $\vec{f}(t) = (e^t, e^{-t}, t^2+1); P(1, 1, 1)$

b) $\vec{g}(t) = (4 + 2\cos t, 2 + 2\,\text{sen}\,t, 1); P(4, 4, 1)$

c) $\vec{h}(t) = \left(\frac{1}{2}t, \sqrt{t+1}, t+1\right); P(1, \sqrt{3}, 3)$

d) $\vec{r}(t) = (t\cos t, t\,\text{sen}\,t, t); P(0, \pi/2, \pi/2)$

5. Determinar os vetores velocidade e aceleração para qualquer instante t. Determinar, ainda, o módulo desses vetores no instante dado.

a) $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 5\,\text{sen}\,t\,\vec{j} + 3\vec{k}; t = \pi/4$

b) $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + e^{-2t}\vec{j}; t = \ln 2$

c) $\vec{r}(t) = \cosh t\,\vec{i} + 3\,\text{senh}\,t\,\vec{j};\ t = 0.$

6. A posição de uma partícula em movimento no plano, no tempo t, é dada por

$$x(t) = \frac{1}{2}(t-1)$$

$$y(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 2t + 1).$$

a) Escrever a função vetorial $\vec{f}(t)$ que descreve o movimento dessa partícula.

b) Determinar o vetor velocidade e o vetor aceleração.

c) Esboçar a trajetória da partícula e os vetores velocidade e aceleração no instante $t = 5$.

b) $\vec{r}(t) = \dfrac{1}{1+t}\vec{i} + t\,\vec{j}; t = 1; 2$

c) $\vec{r}(t) = t^2\vec{j} + t^6\vec{k}; t = 0; 1$

d) $\vec{r}(t) = (1-t)\,\vec{i} + (1+t)\,\vec{j}; t = 1; 2$

9. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores constantes. Determinar o vetor velocidade da partícula cujo movimento é descrito por:

a) $\vec{r}_1(t) = \vec{a} + t\vec{b}$

b) $\vec{r}_2(t) = \vec{a}t^2 + \vec{b}t.$

10. Se $\vec{r}(t)$ é o vetor posição de uma partícula em movimento, mostrar que o vetor velocidade da partícula é perpendicular a $\vec{r}(t)$.

a) $\vec{r}(t) = (\cos t, \text{sen}\,t)$

b) $\vec{r}(t) = (\cos 3t, \text{sen}\,3t)$

11. Em cada um dos itens do exercício anterior, mostrar que o vetor aceleração tem o sentido oposto ao do vetor posição.

12. Mostrar que, quando uma partícula se move com velocidade constante, os vetores velocidade e aceleração são ortogonais.

13. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores constantes não nulos. Seja $\vec{r}(t) = e^{2t}\vec{a} + e^{-2t}\vec{b}$. Mostrar que $\vec{r}''(t)$ tem o mesmo sentido que $\vec{r}(t)$.

14. Seja $\vec{r}(t) = 2\cos wt\,\vec{i} + 4\,\text{sen}\,wt\,\vec{j}$, onde w é uma

7. No instante t, a posição de uma partícula no espaço é dada por

$$x(t) = t^2, y(t) = 2\sqrt{t}, z(t) = 4\sqrt{t^3}.$$

a) Escrever a função vetorial que nos dá a trajetória da partícula.

b) Determinar um vetor tangente à trajetória da partícula no ponto $P(1, 2, 4)$.

c) Determinar a posição, a velocidade e a aceleração da partícula para $t = 4$.

8. Uma partícula se move no espaço com vetor posição $\vec{r}(t)$. Determinar a velocidade e a aceleração da partícula em um instante t qualquer. Esboçar a trajetória da partícula e os vetores velocidade e aceleração para os valores indicados de t.

a) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + 4\vec{j} + (4 - t^2)\vec{k}; t = 0; 2$

constante não nula. Mostrar que

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2\vec{r}.$$

15. Dados $\vec{f}(t) = t\vec{j} + t^2\vec{k}$ e $\vec{g}(t) = t^2\vec{j} - t\vec{k}$, determinar:

a) $(\vec{f}(t) \times \vec{g}(t))'$

b) $(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))'$

c) $(\vec{f}(t) \times \vec{f}(t))'$

d) $(\vec{g}(t) \cdot \vec{g}(t))'$.

16. Se $f(t) = \dfrac{1}{t-1}$ e $\vec{f}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, determinar

$$(f(t)\vec{f}(t))'.$$