A 10

Carlos Luisquer Almeida Santos

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2+3^k k}$ a_k $\qquad \frac{4}{2+3^k k} < \frac{4}{3^k}$

$b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^k} \rightarrow \frac{4}{3^1} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} \rightarrow$ série geométrica

$r = \frac{4/3^2}{4/3} = \frac{4}{3^2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$

$|r| < 1 \rightarrow$ converge

Assim, analisando a série a_k e b_k

$$\frac{4}{2+3^k k} < \frac{4}{3^k}$$

↳ esse termo garante que a série a_k será menor do que b_k.

Assim, $\sum b_k$ ("maior") converge, então a série $\sum a_k$ ("menor") também convergirá.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}\ln k}{k^3+1} \Rightarrow$ converge.

$b_k = \frac{\sqrt{k}}{k^3} = \frac{1}{k^{5/2}}$ $\qquad p = 5/2 > 1 \rightarrow$ converge

Assim, pelo teste da integral

$f(x) = \frac{1}{x^{5/2}} \rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^{5/2}}\,dx \Rightarrow \int_1^b x^{-5/2}\,dx \Rightarrow \left[\frac{-2}{3x^{3/2}}\right]_1^b$

$\Rightarrow \lim_{b\to+\infty} -\frac{2}{3}\left[\frac{1}{b^{3/2}} - \frac{1}{1^{3/2}}\right] \Rightarrow -\frac{2}{3}\lim_{b\to+\infty}\left[\cancel{\frac{1}{b^{3/2}}}^{\,0} - 1\right] \Rightarrow -\frac{2}{3}[-1] \Rightarrow \boxed{2/3} \rightarrow$ converge.

Assim

$\frac{\sqrt{k}\ln k}{k^3+1} < \frac{1}{k^{5/2}}$ → o denominador em a_k garante que $\sum a_k$ será menor do que $\sum b_k$. Logo $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}\ln k}{k^3+1}$ converge.