CÁLCULO III – Engenharia de Energia
Lista 4 – M. Gonçalves e D. Flemming, Cálculo B.

17. Sejam $f(t)$ uma função real duas vezes derivável e $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores constantes. Mostrar que se $\vec{g}(t) = \vec{a} + \vec{b} f(t)$, então $\vec{g}'(t) \times \vec{g}''(t) = \vec{0}$.

18. Se $\vec{f}$ é uma função vetorial derivável e

$$h(t) = |\vec{f}(t)|,$$

mostrar que

$$\vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) = h(t)h'(t).$$

19. Esboçar as curvas seguintes, representando o sentido positivo de percurso. Obter uma parametrização da curva dada, orientada no sentido contrário.

a) $\vec{r}(t) = (2 + 3\cos t, 1 + 4\,\mathrm{sen}\,t),\ t \in [0, 2\pi]$

b) $\vec{r}(t) = (t, t + 2, 2t + 1),\ t \in [0, 1]$

c) $\vec{r}(t) = (2t - 1, 2t + 1, 4 - 2t),\ t \in [1, 2]$

d) $\vec{r}(t) = (t - 1, t^2 - 2t + 1),\ t \in [-1, 2]$

e) $\vec{r}(t) = (t - \mathrm{sen}\,t, 1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$

f) $\vec{r}(t) = (1 + \cos t, 1 + \mathrm{sen}\,t, 2t),\ t \in [0, 4\pi]$

g) $\vec{r}(t) = (2\cos^3 t, 2\,\mathrm{sen}^3 t),\ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

23. Verificar que as equações vetoriais

$r(w) = (w, w^2),\ 2 \le w \le 3$ e $\vec{r}(t) = (\sqrt{t}, t)$, $4 \le t \le 9$ representam a mesma curva.

24. Determinar o comprimento de arco das seguintes curvas:

a) $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \mathrm{sen}\,t, e^t),\ 0 \le t \le 1$

b) $\vec{r}(t) = (2t^3, 2t, \sqrt{6}\,t^2),\ 0 \le t \le 3$

c) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \mathrm{sen}\,t\,\vec{j} + (1 + \cos t)\vec{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

d) $y = x^{3/2}, z = 0$ de $P_0(0, 0, 0)$ a $P_1(4, 8, 0)$

e) $x = t^3, y = t^2, 1 \le t \le 3$

f) hélice circular $\vec{r}(t) = (2\cos t, 4t, 2\,\mathrm{sen}\,t)$ de $P_0(2, 0, 0)$ a $P_1(0, 2\pi, 2)$

g) um arco da ciclóide
$\vec{r}(t) = 2(t - \mathrm{sen}\,t)\,\vec{i} + 2(1 - \cos t)\,\vec{j}$

h) $\vec{r}(t) = (-\mathrm{sen}\,t, \cos t, 2)$ para $t \in [0, 2\pi]$

i) $\vec{r}(t) = (t\,\mathrm{sen}\,t, t\cos t)$ para $t \in [0, \pi]$

j) $\vec{r}(t) = (3t + 1)\,\vec{i} + (t + 2)\,\vec{j}$ para $t \in [0, 2]$

k) $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}),\ t \in [0, 1]$.

20. Se $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ para todos os reais t, determinar todos os pontos da curva descrita por $\vec{r}(t)$ nos quais o vetor tangente é paralelo ao vetor $(4, 4, 3)$. Existem alguns pontos nos quais a tangente é perpendicular a $(4, 4, 3)$?

21. Verificar que a curva

$$\vec{r}(t) = t\cos t\,\vec{i} + t\,\mathrm{sen}\,t\,\vec{j} + t\vec{k},\ t \ge 0$$

está sobre um cone.

22. Verificar quais das seguintes curvas são suaves:

a) $\vec{r}(t) = t^3\vec{i} + t^2\vec{j},\ t \in [-1, 1]$

b) $\vec{r}(t) = t^3\vec{i} + t^2\vec{j},\ t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

c) $\vec{r}(t) = 2(t - \mathrm{sen}\,t)\vec{i} + 2(1 - \cos t)\vec{j}$, $t \in [\pi, 3\pi]$

d) $\vec{r}(t) = (3\cos^3 t, 3\,\mathrm{sen}^3 t),\ t \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$

e) $\vec{r}(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\,t),\ t \in [0, 2\pi]$.

25. Escrever a função comprimento de arco de:

a) $\vec{r}(t) = \left(\mathrm{sen}\,\dfrac{t}{2}, \cos\dfrac{t}{2}, 2t\right)$

b) $\vec{r}(t) = (\cos 2t, \mathrm{sen}\,2t, 4)$

c) $\vec{r}(t) = (t, t^2)$

d) $\vec{r}(t) = \left(\cos^3 t, \mathrm{sen}^3 t, \dfrac{3}{4}\cos 2t\right)$

e) $\vec{r}(t) = (\cos 2t, \mathrm{sen}\,2t),\ t \in [0, \pi]$

f) hipociclóide $\vec{r}(t) = (a\cos^3 t, a\,\mathrm{sen}^3 t)$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

26. Reparametrizar pelo comprimento de arco as seguintes curvas:

a) $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t),\ t \in [0, 2\pi]$

b) $\vec{r}(t) = (3t - 1, t + 2)$

c) $\vec{r}(t) = (\cos 2t, \mathrm{sen}\,2t, 2t)$

d) $\vec{r}(t) = \left(2t, \dfrac{2}{3}\sqrt{8t^3}, t^2\right),\ t \in [0, 3]$

e) $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t)$

f) $\vec{r}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

g) hipociclóide $\vec{r}(t) = (a \cos^3 t, a \operatorname{sen}^3 t)$,
$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

h) hélice circular $x = 2 \cos t$, $y = 4t$, $z = 2 \operatorname{sen} t$,
$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

i) $x = 1 - t$, $y = 2 + 2t$, $z = 3t$, $t \in [0, 1]$.