I Prova de Cálculo III

Carlos Luiguer Almeida Santos

Questão 1.

a) $\vec{f}(t) = (t+1)^2\,\hat{i} + (2t^2+4t)\,\hat{j}\,,\ t \in \mathbb{R}$ (Falsa)

$$\begin{cases} x(t) = (t+1)^2 & \text{I)} \\ y(t) = 2t^2 + 4t & \text{II)} \end{cases} \rightarrow \quad \text{I): } \sqrt{x} = t+1 \qquad t = \sqrt{x} - 1$$

II):

$y = 2(\sqrt{x}-1)^2 + 4(\sqrt{x}-1)$

$y = 2(x - 2\sqrt{x} + 1) + 4\sqrt{x} - 4$

$y = 2x - 4\sqrt{x} + 2 + 4\sqrt{x} - 4$

$\boxed{y = 2x - 2} \rightarrow$ reta

Logo, como a equação cartesiana é de uma reta a $\vec{f}(t)$ não representa uma parábola.

b) $\vec{f}(s) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{14}}s,\ \frac{-2}{\sqrt{14}}s,\ 3 + \frac{3}{\sqrt{14}}s\right);\ A = (-1, 4, -3),\ B = (3, -4, 9)$

Como a equação da reta pode ser definida por: $\qquad \hat{u} = \dfrac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$

$$\vec{r}(t) = a + t\vec{v}$$

a: ponto $\in \vec{r}$

$\vec{v}$: vetor diretor da reta

Assim a orientação em questão é: $\vec{AB}$ (de A para B) $= B - A$

$\vec{AB} = (4, -8, 12) \div 4 \rightarrow (1, -2, 3)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

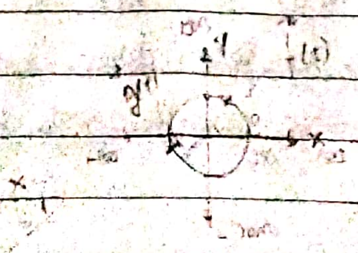
$\hat{u} = \dfrac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \rightarrow \hat{u} = \dfrac{(1, -2, 3)}{\sqrt{14}}$

Assim, a afirmação é verdadeira, visto que foi possível determinar um vetor unitário que é múltiplo de $\vec{AB}$.

c) $\vec{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t);\qquad t \in [0, 2\pi]$

$\vec{g}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$

Ambos representam uma circunferência no plano xy (Verdadeiro)



Carlos Luiz

d) $y^2 - ax^3 = 0 \; ; \; a > 0$ (Falsa).

Isolando 'y':

$y^2 = ax^3$

$y = \pm\sqrt{ax^3}$

$\begin{cases} x = t \\ y = \pm\sqrt{at^3} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

P/ $a = 1 \rightarrow f(t) = (t, \pm\sqrt{t^3})$

$f'(t) = (1, \pm 3/2 \sqrt{t})$

I) $\lim_{t \to t_0} f'(t) = f'(t_0)$.

$f'(t_0) = (1, \pm 3/2 \sqrt{t_0}) \rightarrow$ é contínua

II) $f'(t) \neq \vec{0} \; \forall t \in I$

$f'(0) = (1, 0)$

$\hookrightarrow$ nunca será $\vec{0}$: suave.

Logo, como é contínua e suave, mas pode ser parametrizada então a afirmação é falsa.

e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$P = (1,1,1)$

$\vec{v} = (2, 2, 2)$

Como pela Teoria de gradiente, o $\vec{\nabla} f(P)$ é normal à superfície, assim:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} f = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} f(P) = 2(1)\hat{i} + 2(1)\hat{j} + 2(1)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} f(P) = (2, 2, 2) = \vec{v}$$

Portanto $\vec{v}$ é normal à superfície (Verdadeiro).

f) (Falsa)

De acordo com a definição de campo conservativo, se $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ existe uma função potencial ∇V associada à $\vec{F}(x,y,z)$ que pode ser obtida. Além disso, o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z)$ deve ser definido num domínio simplesmente conexo (I) assim ele será conservativo.

tilibra

Carlos Luiquer

g) Segundo a definição de divergência, o função deve ser um campo vetorial que resulta em uma função escalar. Logo a afirmação é falsa.

2. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$

. Assumindo: $a = 4^{3/2}$ para simplificar nos cálculos.

$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(y/a\right)^{2/3} = 1$ → Hipocicloide de 4 cúspides

Pela propriedade trigonométrica, $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$

. Como é no primeiro quadrante

$(\cos^2 t)^{3/2} = [(x/a)^{2/3}]^{3/2}$

$(\operatorname{sen}^2 t)^{3/2} = [(y/a)^{2/3}]^{3/2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le \pi/2$

Assim:

$\vec{f}(t) = (a\cos^3 t, a\operatorname{sen}^3 t), \; 0 \le t \le \pi/2$

Sabe-se que a reparametrização pelo comprimento de arco pode ser obtida por:

$$s(t) = \int_a^t |f'(t)|\,dt$$

$f'(t) = (3a\cos^2 t \cdot -\operatorname{sen} t, 3a\operatorname{sen}^2 t\cos t)$

$|f'(t)| = \sqrt{(-3a\cos^2 t\operatorname{sen} t)^2 + (3a\operatorname{sen}^2 t\cos t)^2}$

$\quad '' = \sqrt{9a^2\cos^4 t\operatorname{sen}^2 t + 9a^2\operatorname{sen}^4 t\cos^2 t}$

$\quad '' = \sqrt{9a^2\cos^2 t\operatorname{sen}^2 t(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}$

$\quad '' = \sqrt{9a^2\cos^2 t\operatorname{sen}^2 t}$

$|f'(t)| = 3a\cos t\operatorname{sen} T$

Assim:

$$s(t) = \int_0^t 3a\cos t\operatorname{sen} t\,dt$$

$u = \operatorname{sen} t$

$du = \cos t\,dt$

$s(t) = 3a\int u\,du$

$s(t) = 3a\,[u^2/2]$

$s(t) = 3a\left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]\Big|_0^t$

$s(t) = 3a\left[\frac{(\operatorname{sen}^2 t)}{2} - \frac{(\operatorname{sen}^2 0)}{2}\right]$

$s(t) = \frac{3a\operatorname{sen}^2 t}{2}$

Obtendo a inversa,

$s = \frac{3a\operatorname{sen}^2 t}{2}$

$\operatorname{sen}^2 t = \frac{2s}{3a}$

$t = \operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{2s}{3a}}\right)$

tilibra

Carlos Luitgum

Como

$0 \le t \le \pi/2$

$S(0) = \frac{3a}{2} \operatorname{sen}^2(0) = 0$

$S(\pi/2) = \frac{3a}{2} \operatorname{sen}^2(\pi/2) = \frac{3a}{2}$

$S \in [0, \frac{3a}{2}]$

Logo:

$\vec{f}(t) = (a \cos^3 t, a \operatorname{sen}^3 t)$

$$\vec{f}(t(s)) = \left[a \cos^3\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{2s}{3a}}\right)\right), a \operatorname{sen}^3\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{2s}{3a}}\right)\right)\right]$$

mas

$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x$

$\cos(\operatorname{sen}^{-1}) = \sqrt{1-x^2}$

Portanto: $a = 4^{2/3}$

$$\vec{f}(s) = \left[a\left(1 - \frac{2s}{3a}\right)^{3/2}, a\left(\frac{2s}{3a}\right)^{3/2}\right]$$

$s \in [0, 3a/2]$

3. $\vec{F}(x,y) = -k(x,y),\ k>0$

Para um campo ser considerado conservativo existe uma ∇V (função potencial) associada e o $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

Atribuindo $k=1$

$\vec{F}(x,y) = (-x, -y)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$\therefore = (0-0)\hat{i} + (0-0)\hat{j} + (0-0)\hat{k}$

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

Carlos Luilquer

Assim $\vec{F} = \vec{\nabla} V$

$(-x, -y) = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j}$

$$\begin{cases} \text{I)} \; \partial V/\partial x = -x \\ \text{II)} \; \frac{\partial V}{\partial y} = -y \end{cases}$$

I) $\int \partial V = \int -x \, \partial x$

$V = -x^2/2 + h(y)$

Em II)

$\frac{\partial V}{\partial y} = -y$

$\frac{\partial(-x^2/2 + h(y))}{\partial y} = 0 + \frac{\partial h}{\partial y}$

$\frac{dh}{dy} = -y$

II) $\int dh = \int -y \, dy$

$h = -y^2/2 + C$

Logo, a função potencial V será:

$V = -x^2/2 - y^2/2 + C$

Como $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ e $\vec{F} = \vec{\nabla} V$ (função potencial) então é conservativo.

4.

$\vec{r} = (x, y, z)$

$|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\cdot\frac{r}{|\vec{r}|} \Rightarrow \vec{E} = KQ \cdot \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^2} \cdot \frac{(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \Rightarrow \vec{E} = KQ \frac{(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

$$\vec{E} = KQ\left[\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right), \left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right), \left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\right]$$

a) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$= \left[\frac{-3zy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \left(\frac{-3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)\right]\hat{i} + \ldots$$

$$+ \left[\frac{-3zx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \left(\frac{-3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)\right]\hat{j} + \left[\frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \left(\frac{-3yx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)\right]$$

Carlos Luilquer

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = KQ\left[(0-0)\hat{i}+(0-0)\hat{j}+(0-0)\hat{k}\right]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0} \rightarrow \text{irrotacional}$$

b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$, para todo $\vec{n} \neq \vec{0}$

$$\vec{E} = KQ\left[\underbrace{\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)}_{f_1},\underbrace{\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)}_{f_2},\underbrace{\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)}_{f_3}\right]$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

. Em x:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}: \left[(x)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right]' = (1)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + (x)(-3/2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2x)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

. Em y:

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}: \left[(y)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right]' = (1)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + (y)(-3/2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2y)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

. Em z:

$$\frac{\partial f_3}{\partial z}: \left[(z)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right]' = (1)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + (z)(-3/2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2z)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = KQ\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left[\left(1-\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)}\right),\left(1-\frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)}\right),\left(1-\frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)}\right)\right]$$

Para $\vec{n}=(1,1,1)$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = KQ\frac{1}{(3)^{3/2}}\left[\left(1-\frac{3}{(3)}\right),\left(1-\frac{3}{3}\right),\left(1-\frac{3}{3}\right)\right] = 0$$

Para $\vec{n}=(-1,-1,-1)$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = KQ\frac{1}{(3)^{3/2}}\left[\left(1-\frac{3}{3}\right),\left(1-\frac{3}{3}\right),\left(1-\frac{3}{3}\right)\right] = 0$$

. Logo $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \rightarrow$ incompressível

Carlos Luilquer

Questão 5. Determine a equação do plano osculador da curva de interseção C: $\vec{f}(t) = (t, t^2, \frac{1}{2}\sqrt{16-t^2-4t^4})$ das superfícies, $y = x^2$ (cilindro parabólico) e $x^2+4y^2+\ldots$ $\ldots + 4z^2 = 16$ (elipsoide), considere apenas a parte superior do elipsoide, no ponto $P = (0,0,2)$. $t \in \mathbb{R}$.

Como a curva de interseção entre as superfícies no ponto é:

$$\vec{f}(t) = (t, t^2, \tfrac{1}{2}\sqrt{16-t^2-4t^4}) = P(0,0,2)$$

$$\boxed{t_0 = 0}$$

Assim, um plano osculador possui o vetor binormal que pode ser dito por:

$$\vec{B} = \vec{f}'(t_0) \times \vec{f}''(t_0)$$

derivando $\vec{f}(t) = (t, t^2, \frac{1}{2}\sqrt{16-t^2-4t^4})$:

$x'(t) = 1$; $y'(t) = 2t$; $z'(t) = (1/2)(16-t^2-4t^4)^{1/2}$

$$z'(t) = (1/2)(1/2)(16-t^2-4t^4)^{-1/2} \cdot (-2t-16t^3)$$

$$z'(t) = \frac{1}{4}\frac{(-2t-16t^3)}{\sqrt{16-t^2-4t^4}} = \frac{-t-8t^3}{2\sqrt{16-t^2-4t^4}}$$

Substituindo t_0 em $f'(t)$:

$$f'(t_0) = (1, 0, 0)$$

Por outro lado o $f''(t)$ será:

$x''(t) = 0$; $y''(t) = 2$; $z''(t) = (-1/2)(8t^3+t)(16-t^2-4t^4)^{-1/2}$

$$= (-1/2)\left[(24t^2+1)(16-t^2-4t^4)^{-1/2} + (8t^3+t)(-1/2)(16-t^2-4t^4)\right] \cdot$$
$$\cdot (-2t-16t^3)$$

$$z''(t) = \frac{(-16t^3-2t)(8t^3+t)}{4(-4t^4-t^2+16)^{3/2}} - \frac{(24t^2+1)}{2(-4t^4-t^2+16)^{1/2}}$$

Substituindo t_0 em $f''(t)$:

$$f''(t_0) = (0, 2, -1/8)$$

Assim $\vec{B} = f'(t_0) \times f''(t_0)$:

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1/8 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 0\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k} \\ -0\hat{i} + 1/8\hat{j} - 0\hat{k} \end{matrix}$$

$$\vec{B} = (0, 1/8, 2)$$

Logo a equação do plano osculador será:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

onde:

a, b e c → são componentes do vetor binormal, $\vec{B}=(0, 1/8, 2)$

x_0, y_0 e z_0 → componentes do ponto $P=(0,0,2)$

Substituindo:

$$0(x-0)+1/8(y-0)+2(z-2)=0$$

$$1/8\,y+2z-4=0$$

$$\therefore 1/8\,y+2z=4$$