LISTA 14 – Curvas Coordenadas e Planos Tangentes

M. B. Gonçalves e D. M. Flemming – Cálculo B

1. Determinar as curvas coordenadas das superfícies dadas, nos pontos indicados:

a) Esfera

$$\vec{r}(u, v) = (\cos u \cos v, \operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} v)$$

$0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ no ponto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) Parabolóide $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u^2)$
$0 \leq v \leq 2\pi, 0 \leq u \leq 2; P(1, 1, 2)$.

c) Parabolóide $\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$; $P(1, 1, 2)$.

d) Hemisfério $\vec{r}(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$; $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Parametrizar as seguintes superfícies, determinando as curvas coordenadas, nos pontos indicados:

a) Plano $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1$; $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

b) Cilindro $x^2 + y^2 = 9$; $P(3, 0, 4)$

c) Cone $x^2 + z^2 - y^2 = 0$; $y \geq 0$; $P(2, \sqrt{13}, 3)$.

3. Seja S uma superfície descrita pela equação $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, 2u^2, u \operatorname{sen} v)$, onde $0 \leq u \leq 2$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

a) Representar graficamente a superfície S.

b) Encontrar as curvas coordenadas no ponto $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e representá-las graficamente.

c) Determinar os vetores

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(P), \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(P), \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(P) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(P)$$

e representá-los graficamente.

4. Dada a superfície parametrizada

$$S: \vec{r}(u, v) = (2 \cos u \cos v, 2 \operatorname{sen} u \cos v, 2 \operatorname{sen} v)$$

onde $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$:

a) Representar S graficamente.

b) Esboçar u-curva correspondente a $v = \frac{\pi}{3}$ e a v-curva correspondente a $u = \frac{\pi}{4}$.

c) Determinar os valores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ para $u = \frac{\pi}{4}$ e $v = \frac{\pi}{3}$, representado-os no ponto correspondente sobre o gráfico de S.

d) Determinar as equações da reta normal e do plano tangente à superfície S, no ponto em que $u = \frac{\pi}{4}$ e $v = \frac{\pi}{3}$.

5. Determinar uma equação vetorial da reta normal às seguintes superfícies nos pontos indicados.

a) $\vec{r}(u, v) = (u^2 + v^2 - 1, u, v)$; $P(4, 1, 2)$

b) $\vec{r}(u, v) = (u^2 - 1, u \cos v, u \operatorname{sen} v)$; $P(4, 1, 2)$

c) $\vec{r}(u, v) = (u^2 - 1, u, v)$; $P(3, 2, 4)$

d) $\vec{r}(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$; $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

e) $\vec{r}(u, v) = (u, v, -u^2 - v^2)$; $P(1, 1, -2)$

f) $\vec{r}(u, v) = (u, v, \sqrt{4 - u^2 - v^2})$; $P(1, 1, \sqrt{2})$

g) $\vec{r}(u, v) = \left(u, v, \frac{5v + 2u - 10}{3}\right)$; $P\left(1, 2, \frac{2}{3}\right)$.

6. Escrever uma equação vetorial para a superfície dada e determinar as equação do plano tangente e da reta normal, nos pontos indicados:

a) $z = 3x^2y$; $P_0(1, 1, 3)$; $P_1(-1, 1, 3)$

b) $z = x^2 + y^2$; $P_0(0, 1, 1)$; $P_1(-1, -1, 2)$

c) $z = xy$; $P_0\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $P_1(0, \sqrt{2}, 0)$

d) $x + 2y + z = 4$; $P_0\left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$; $P_1(0, 1, 2)$

e) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $P_0(3, 0, 0)$; $P_1(0, 3, 0)$; $P_2(0, 0, 3)$; $P_3(1, 2, 2)$

f) $x^2 + y^2 = 4$; $P_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$; $P_1(0, 2, 2)$.

7. Determinar a equação do plano tangente à superfície S dada, no ponto indicado:

a) $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, -2u^2)$; $P(1, 1, -4)$.

b) $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 + 2v^2)\vec{k}$; $P(0, 1, 2)$.

8. Encontrar a equação de uma reta que passa na origem e é normal à superfície $x + 2y + z = 4$.

9. Determinar um campo normal unitário do parabolóide

$$\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u^2 - 1)$$

representando-o graficamente sobre a superfície.

10. Determinar um campo normal unitário do plano que passa nos pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, usando as seguintes parametrizações:

a) $\vec{r}(u, v) = (u + v)\vec{i} + (u - v)\vec{j} + (1 - 2u)\vec{k}$

b) $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (1 - u - v)\vec{k}$.

Representar geometricamente, comparando os resultados.