LISTA 11 – INTEGRAIS CURVILINEAS

M. B. Gonçalves e D. M. Flemming – Cálculo B

1. Calcular o trabalho realizado pela força

$$\vec{f} = \left(\frac{1}{x+2}, \frac{1}{y+3}\right)$$

para deslocar uma partícula em linha reta do ponto $P(3, 4)$ até $Q(-1, 0)$.

2. Determinar o trabalho realizado pela força

$$\vec{f}(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

para deslocar uma partícula ao longo da curva $y = 1/x$ do ponto $(1, 1)$ ao ponto $(2, 1/2)$.

3. Determinar o trabalho realizado pela força

$$\vec{f}(x, y, z) = (x, 0, 2z)$$

para deslocar uma partícula ao longo da poligonal que une os pontos $A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 1, 1)$ e $D(1, 1, 1)$ no sentido de A para D.

4. Determinar o trabalho realizado pela força constante $\vec{f} = \vec{i} + \vec{j}$ para deslocar uma partícula ao longo da reta $x + y = 1$ do ponto $A(0, 1)$ a $B(1, 0)$.

5. Calcular o trabalho realizado pela força $\vec{f} = (y, z, x)$ para deslocar uma partícula ao longo da hélice $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2t)$ de $t = 0$ a $t = 2\pi$.

7. Determinar o trabalho realizado pela força $\vec{f}(x, y, z) = (y, x, z^2)$ para deslocar uma partícula ao longo da hélice dada por $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \text{ sen } t, 2t)$ do ponto $A(2, 0, 0)$ ao ponto $B(2, 0, 4\pi)$.

8. Um campo de forças é dado por

$$\vec{f}(x, y) = \frac{-\vec{r}}{|\vec{r}|^3},$$

onde $\vec{r} = (x, y)$. Sob a ação desse campo, uma partícula desloca-se sobre a curva $x^2 + 4y^2 = 16$, no sentido anti-horário, do ponto $A(4, 0)$ ao ponto $B(0, 2)$. Determinar o trabalho realizado por $\vec{f}$ nesse deslocamento.

9. Um campo é formado por uma força $\vec{f}$, de módulo igual a 4 unidades de força, que tem a direção do semi-eixo positivo dos x. Encontrar o trabalho desse campo, quando um ponto material descreve, no sentido horário, a quarta parte do círculo $x^2 + y^2 = 4$, que está no 1º quadrante.

10. Encontrar o trabalho de uma força variável, dirigida à origem das coordenadas, cuja grandeza é proporcional ao afastamento do ponto em relação à origem das coordenadas, se o ponto de aplicação dessa força descreve, no sentido anti-horário, a parte da elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ no 1º quadrante.

Nos exercícios 11 a 17, determinar a integral curvilínea do campo vetorial $\vec{f}$, ao longo da curva C dada.

11. $\vec{f}(x, y) = (|x|, y)$; C é o quadrado de vértices $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ no sentido anti-horário.

12. $\vec{f}(x, y, z) = (x^2, 1/y, xz)$; C é o segmento de reta que une o ponto $A(2, 1, 0)$ ao ponto $B(0, 2, 2)$.

15. $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$; C é a intersecção das superfícies $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e $z = y$ orientada no sentido anti-horário.

16. $\vec{f}(x, y) = (|x|, |y|)$; C é a curva dada por $\vec{r}(t) = t^2 i + t^3 j, t \in [-1, 1]$.

17. $\vec{f}(x, y, z) = (-yz, xz, xy)$; C é a elipse $x^2 + 9y^2 = 36$ no ponto $z = 2$, orientada no sentido anti-horário.

Nos exercícios 18 a 25, calcular as integrais curvilíneas dadas:

18. $\int_C [x dx + y dy]$, onde C é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$ no sentido anti-horário.

19. $\int_C |x| dy$, onde C é o segmento de reta $x = 2y - 1$ do ponto $A(-3, -1)$ ao ponto $B(1, 1)$.

20. $\int_C [x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz]$, onde C é o arco de hélice circular dado por $\vec{r}(t) = (4 \cos t, 4 \operatorname{sen} t, 8t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

21. $\int_C [z dx + y dy - x dz]$, onde C é a intersecção das superfícies $y + z = 8$ e $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$. Considerar os dois possíveis sentidos de percurso.

22. $\int_C [dx + dy + dz]$, onde C é a intersecção das superfícies $y + z = 5$ e $z = 4 - x^2$ do ponto $A(2, 5, 0)$ ao ponto $B(-2, 5, 0)$.

23. $\int_C [x dx + y dy + x dz]$, onde C é a intersecção das superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x = 2$ do ponto $A(2, -\sqrt{12}, 4)$ ao ponto $B(2, \sqrt{12}, 4)$.

24. $\int_C [y dx + z dy - xy dz]$, onde C é dado por $y = \operatorname{sen} x$; $z = 4$; $x \in [0, 2\pi]$.

25. $\int_C y e^{xy} dx$, onde C é dado por $y = x^2$, $x \in [-1, 0]$.

27. Calcular a integral do campo vetorial $\vec{f} = (2xy, x^2, 3z)$, do ponto $A(0, 0, 0)$ ao ponto $B(1, 1, 2)$, ao longo dos seguintes caminhos:

a) segmento de reta que une os pontos dados;

b) intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $x = y$;

c) poligonal $A\,C\,B$, onde $C = (3, 3, 1)$.

28. Resolver o Exercício 27 para $\vec{f} = (3xz, 4yz, 2xy)$.

29. Calcular a integral do campo vetorial $\vec{f} = (-y, x)$ ao longo dos seguintes caminhos fechados, no sentido anti-horário:

a) circunferência de centro na origem e raio 2;

b) elipse $x^2 + 36y^2 = 36$;

c) triângulo de vértices $(1, 1)$, $(-1, 1)$ e $(0, -1)$.

30. Resolver o Exercício 29 para $\vec{f} = (xy^2, x^2y)$.

1. Verificar se o campo de forças $\vec{f}$ é conservativo. Em caso afirmativo, determinar uma função potencial para esse campo e calcular o trabalho que ele faz sobre uma partícula que se desloca de $A(1, -1, 0)$ a $B(2, 3, 1)$.

a) $\vec{f} = (2y^2x^2z, 3y^2x^2z, y^3x^2 + y)$

b) $\vec{f} = (y\cos xy + ye^{xy})\,\vec{i} + (x\cos xy + xe^{xy})\,\vec{j} + \vec{k}$

c) $\vec{f} = (yz + \cos x)\,\vec{i} + (xz - \operatorname{sen} y)\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$.

2. Verificar se o campo vetorial dado é conservativo. Em caso positivo, determinar uma função potencial para $\vec{f}$ e o valor da integral $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) $\vec{f}(x, y, z) = (yz, xz + 8y, xy)$

b) $\vec{f}(x, y, z) = ((x + y + z)^{4/3}, (x + y + z)^{4/3}, (x + y + z)^{4/3})$

c) $\vec{f}(x, y, z) = (3x^2 + y, 4y^2 + 2x, 8xy)$

d) $\vec{f}(x, y, z) = (e^x(\cos y + \operatorname{sen} z), -e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos z)$

e) $\vec{f}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$.

3. Calcular a integral $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f}$ é o campo vetorial dado, ao longo de qualquer caminho que une o ponto $A(1, 1, 0)$ a $B(1, 2, -1)$.

a) $\vec{f} = (\operatorname{sen} x + 2y)\vec{i} + (2x + \cos z)\vec{j}$

$(z - y \operatorname{sen} z)\vec{k}$

b) $\vec{f} = (e^x + e^{z^2})\vec{i} + (e^y + z)\vec{j} +$

$(2xze^{z^2} + y)\vec{k}$

c) $\vec{f} = (2x^2y + y^2 + z)\vec{i} +$

$\left(\frac{2}{3}x^3 + 2xy + z^2\right)\vec{j} + (x + 2yz)\vec{k}$

4. Verificar que as integrais são independentes do caminho de integração e determinar seus valores.

a) $\int_{(1,1)}^{(5,3)} (xdx + ydy)$

b) $\int_{(0,0)}^{(2,1)} (-e^x \cos y\, dx + e^x \operatorname{sen} y\, dy)$

c) $\int_{(0,1,1)}^{(1,0,1)} (2xydx + x^2dy + 2dz)$

d) $\int_{(-1,0,0)}^{(2,2,3)} (dy + dz)$

e) $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} [2x \operatorname{sen} z\, dx + (z^3 - e^y)dy +$

$(x^2 \cos z + 3yz^2)dz]$

f) $\int_{(-1,0,0)}^{(1,1,1)} [e^y dx + (xe^y + e^z)\, dy +$

$(ye^z - 2e^{-2z})\, dz]$

g) $\int_{(0,0)}^{(\pi,1)} (e^y \cos x\, dx + e^y \operatorname{sen} x\, dy)$.

6. Calcular $\int_C [(2xz + y^2)dx + 2xydy + x^2dz]$, onde C é a intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $x + y = 2$ do ponto $A(2, 0, 4)$ a $B(0, 2, 4)$.

7. Determinar o trabalho realizado pela força conservativa $\vec{f} = (yz, xz, xy + 1)$ nos seguintes deslocamentos:

a) ao longo da elipse $x^2 + y^2/4 = 9$, no sentido anti-horário, do ponto $A(3, 0)$ a $B(0, 6)$;

b) ao longo do arco de parábola $x = y^2 - 1$, $z = 2$, do ponto $A(-1, 0, 2)$ ao ponto $B(3, -2, 2)$;

c) ao longo do caminho fechado formado pelas curvas $y = x^2$ e $x = y^2$, no sentido anti-horário.

8. Calcular $\int_C \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}dy\right]$, ao longo dos seguintes caminhos:

a) circunferência de centro $(2, 0)$ e raio 1 no sentido anti-horário;

b) $\vec{r}(t) = (t, 1/t)$, $t \in [1, 4]$;

9. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, $\vec{r} = (x, y, z)$,

ao longo dos seguintes caminhos:

a) elipse $x^2/4 + y^2 = 4$, $z = 2$, uma volta completa no sentido anti-horário;

b) quadrado $|x| + |y| = 1$, $z = 0$, no sentido anti-horário;

c) segmento de reta que une o ponto $A(0, 1, 0)$ ao ponto $B(1, 0, \sqrt{3})$;

d) intersecção das superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = 2$, do ponto $A(2, 0, 2)$ a $B(2, 4, 2\sqrt{5})$.

10. Uma partícula de massa m move-se no plano xy sob a influência da força gravitacional $\vec{F} = -mg\vec{j}$. Se a partícula move-se de $(0, 0)$ a $(-2, 1)$ ao longo de um caminho C, mostrar que o trabalho realizado por $\vec{F}$ é $w = -mg$ e é independente do caminho.

11. Determinar as seguintes integrais ao longo dos caminhos fechados:

a) $\oint_C [(2xy + 4)dx + (x^2 + z^2)dy + 2zydz]$

$C: \vec{r}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, \pi)$, $t \in [0, 2\pi]$

b) $\oint_C [(xy + z)dx + (x - y)dy + 4zdz]$

$C: \vec{r}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, \pi)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Nos exercícios 1 a 11, calcular as integrais curvilíneas dadas usando o teorema de Green.

1. $\oint_C [x^2\,dx + (4x + y)\,dy]$, ao longo do triângulo de vértices (0, 0), (1, 2) e (2, 0), no sentido anti-horário.

2. $\oint_C [(\ln x - 2y)\,dx + (2x + e^y)\,dy]$ ao longo da elipse $x^2 + y^2/9 = 1$, no sentido horário.

3. $\oint_C [(y^2 + \sqrt{4 - x^2})\,dx + (\ln y - 4x)]\,dx$ ao longo do retângulo de vértices (0, 0), (3, 0), (3, 2) e (0, 2), no sentido anti-horário.

4. $\oint_C (-2x^2y\,dx + \sqrt{8 - \ln(y + 2)}\,dy)$ ao longo do paralelogramo de vértices $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(3, 2)$ e $D(1, 2)$, no sentido horário.

5. $\oint_C (x\,dx + xy\,dy)$, ao longo do paralelogramo de vértices $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(4, 4)$ e $D(2, 3)$, no sentido anti-horário.

6. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f} = (-3x^2y, 3xy^2)$ e C é a circunferência $x^2 + y^2 + 4y = 0$, no sentido anti-horário.

7. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f} = (y, 0)$ e C é o triângulo de vértices $A(0, 1)$, $B(3, 1)$ e $C(2, 2)$, no sentido horário.

8. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f} = (x^2 + 4xy, 2x^2 + 2x + y^2)$ e C é a elipse $x^2 + 4y^2 = 16$, no sentido anti-horário.

9. $\oint_C (\sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy)$, onde C é o contorno formado pelas retas $y = 0$, $x = 1$ e a parábola $y = x^2$, no sentido anti-horário.

10. $\oint_C [e^x\,dx + (e^y + 1)\,dy]$, onde C é o triângulo de vértices $A(-1, 2)$, $B(-3, 1)$ e $C(1, 0)$, no sentido anti-horário.

11. $\oint_C [(e^{x^3} + y^2)\,dx + (x + \sqrt{1 + y^2})\,dy]$, onde C é o quadrado de vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1) e (0, 1), no sentido horário.

12. Calcular a área da elipse $x = 6\cos\theta$, $y = 2\,\text{sen}\,\theta$.

13. Calcular a área da Figura 9.56.

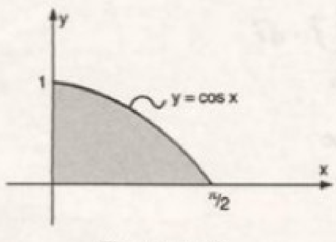

Figura 9.56

14. Determinar a área entre as elipses:
   a) $4x^2 + y^2 = 4$ e $x^2/9 + y^2/4 = 1$
   b) $x^2 + 9y^2 - 2x - 18y + 1 = 0$ e $x^2 - 2x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$.

15. Dado o campo vetorial $\vec{f} = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$, mostrar que $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva fechada simples C, suave por partes, que circunda a origem.

16. Dado o campo vetorial $\vec{f} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{-x}{x^2 + y^2}\right)$, mostrar que $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = -2\pi$ para toda curva fechada simples, suave por partes, orientada no sentido anti-horário que circunda a origem.

17. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{f} = ((x^3 + 2)\sqrt{x^4 + 8x} + y, 4x^2y)$$

e C é a poligonal de vértices $A(1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(0, 2)$, $D(0, 0)$, de A para D.

18. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{f} = (2xy + xe^{3x^2+2}, 4x^2 + \ln(y^2 + 4y + 2))$$

e C é a poligonal de vértices $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 2)$ e $D(-1, 0)$, de A para D.