CÁLCULO III
Lista 8 – Divergente e Rotacional

1. Dado o campo vetorial $\vec{f}$, calcular div $\vec{f}$.

a) $\vec{f}(x, y) = 2x^4\vec{i} + e^{xy}\vec{j}$

b) $\vec{f}(x, y) = \operatorname{sen}^2 x\vec{i} + 2\cos x\vec{j}$

c) $\vec{f}(x, y, z) = 2x^2y^2\vec{i} + 3xyz\vec{j} + y^2z\vec{k}$

d) $\vec{f}(x, y, z) = \ln xy\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$.

2. Um fluido escoa em movimento uniforme com velocidade $\vec{v}$ dada. Verificar se $\vec{v}$ representa um possível fluxo incompressível.

a) $\vec{v} = z^2\vec{i} + x\vec{j} + y^2\vec{k}$

b) $\vec{v} = 2\vec{i} + x\vec{j} - \vec{k}$

c) $\vec{v} = 2xy\vec{i} + x\vec{j}$.

3. Provar a propriedade (a) da Subseção 6.7.3.

4. Encontrar a divergência e o rotacional do campo vetorial dado.

a) $\vec{f}(x, y, z) = (2x + 4z,\ y - z,\ 3x - yz)$

b) $\vec{f}(x, y) = (x^2 + y^2,\ x^2 - y^2)$

c) $\vec{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$

d) $\vec{f}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$

e) $\vec{f}(x, y, z) = (xyz^3, 2xy^3, -x^2yz)$

f) $\vec{f}(x, y) = \left(\dfrac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$, $(x, y) \neq (0, 0)$

7. Sejam $\vec{f} = (xz, zy, xy)$ e $\vec{g} = (x^2, y^2, z^2)$. Determinar:

a) $\nabla \cdot \vec{f}$

b) $\nabla \cdot \vec{g}$

c) $\nabla \times \vec{f}$

d) $\nabla \times \vec{g}$

e) $\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g})$

f) $(\nabla \times \vec{f}) \times \vec{g}$

g) $(\nabla \times \vec{f}) \cdot (\nabla \times \vec{g})$.

8. Seja $\vec{u} = (x^2 - y^2) \cdot \nabla f$. Calcular div $\vec{u}$ no ponto $P(1, 2, 3)$ sendo:

a) $f = \operatorname{sen} xy + x$

b) $f = xyz + 2xy$.

9. Se $f = 2x^3yz$ e $v = x^3\vec{i} + xz\vec{j} + \operatorname{sen} x\vec{k}$, calcular:

a) $(\nabla f) + \operatorname{rot} \vec{v}$

b) div $(f\vec{v})$

c) rot $(f\vec{v})$.

10. Sendo $\vec{u} = 2xz\vec{i} + (x^2 - z^2)\vec{j} + (x^2 + 2z)\vec{k}$, calcular rot (rot $\vec{u}$).

11. Supondo que $\vec{v}$ representa a velocidade de um fluido

14. Verificar se o campo dado é irrotacional.

a) $\vec{f}(x, y, z) = (yz,\ xz,\ xy)$

b) $\vec{f}(x, y, z) = (xyz, 2x - 1, x^2z)$

c) $\vec{f}(x, y, z) = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz})$

d) $\vec{f}(x, y, z) = (2x + \cos yz, -xz \operatorname{sen} yz, -xy \operatorname{sen} yz)$

e) $\vec{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

15. Um escoamento é representado pelo campo de velocidade

$$\vec{v} = (y^2 + z^2)\vec{i} + xz\vec{j} + 2x^2y^2\vec{k}.$$

Verificar se o escoamento é:

a) um possível escoamento incompressível;

b) irrotacional.

**19.** Verificar se os seguintes campos vetoriais são conservativos em algum domínio. Em caso afirmativo, encontrar uma função potencial.

a) $\vec{f} = 2x\vec{i} + 5yz\vec{j} + x^2y^2z^2\vec{k}$

b) $\vec{f} = (1 + y \operatorname{sen} x)\vec{i} + (1 - \cos x)\vec{j}$

c) $\vec{f} = \ln xy\vec{i} + \ln yz\vec{j} + \ln zx\vec{k}$

d) $\vec{f} = \left(y^2 - 3 - \dfrac{y}{x^2 + xy}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{1}{x + y} + 2xy + 2y\right)\vec{j}$

e) $\vec{f} = (10xz + y \operatorname{sen} xy)\vec{i} + x \operatorname{sen} xy\vec{j} + 5x^2\vec{k}$

f) $\vec{f} = e^x\vec{i} + 2e^y\vec{j} + 3e^z\vec{k}$.

**20.** Encontrar uma função potencial para o campo $\vec{f}$, no domínio especificado:

a) $\vec{f}(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$

em qualquer domínio simplesmente conexo que não contém a origem.

b) $\vec{f}(x, y, z) = \left(\dfrac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \dfrac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}, \dfrac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$

em qualquer domínio simplesmente conexo que não contém a origem.

c) $\vec{f}(x, y, z) = (ye^z, xe^z, xye^z)$ em $\mathbb{R}^3$.