Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências, Tecnologias e Saúde
Coordenadoria Especial de Física, Química e Matemática

Atividade Avaliativa 07 - Semana 8

Cálculo III

21 de Setembro de 2020

Orientações:
1: A atividade deve ser manuscrita (não aceitarei trabalhos digitados);
2: As fotos devem ser tiradas na vertical. Você pode tirar foto na horizontal, desde que a escrita também esteja na horizontal;
3: Postar arquivo único, via link no Moodle;
4: O nome do arquivo deve seguir o padrão **A07-CIII-SeuNomeCompleto.pdf**;
5: O prazo de entrega é de 40h. O prazo expira às 10h do dia 23/10.

A07

Realize seus cálculos de forma organizada, explicando todos os passos desenvolvidos. Organização e clareza serão levados em conta durante a correção.

Considere o campo vetorial $\overrightarrow{F} = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}\left(2xy\hat{\imath} + (y^2-x^2)\hat{\jmath}\right)$.

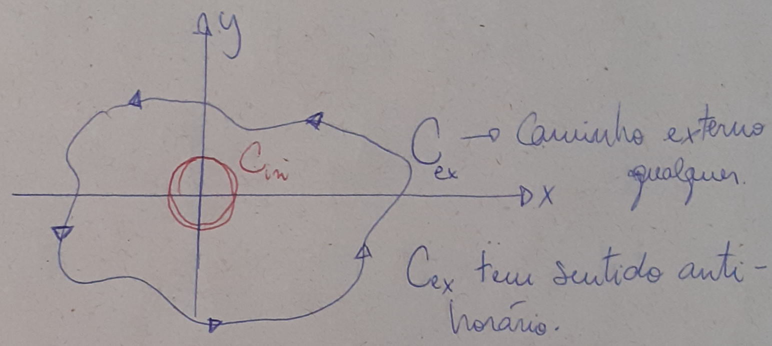
Mostre que $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = 0$ para qualquer caminho C que envolva a origem.

A07 - CÁLCULO 3

$\vec{F} = (x^2+y^2)^{-2}\,(2xy\,\hat{i} + (y^2-x^2)\,\hat{j})$

Mostrar que $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ p/ qualquer C que envolva a origem
↳ usa-se o teorema de Green.

Como $\vec{F}$ não é definida na origem, o teorema de Green deve ser adaptado para um região multiplamente conexa, que exclui a origem:



C_{in} → envolve a origem. Pode ser uma circunferência de raio 1, centrada em (0,0).

C_{in} tem sentido horário

Teorema de Green adaptado:

$$\underbrace{\iint_R}_{\text{região entre } C_{ex} \text{ e } C_{in}} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy = \underbrace{\oint_{C_{ex}}}_{\text{Sentido anti-horário}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \underbrace{\oint_{C_{in}}}_{\text{Sentido horário}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

ou

$$\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint_{C_{ex}} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \oint_{-C_{in}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Agora, ambos estão no sentido anti-horário.

Ou seja:

$$\boxed{\oint_{C_{ex}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy + \oint_{-C_{in}} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

1º: Calcular $\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy$:

$$\vec{F} = \underbrace{(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2xy}_{f}\,\hat{i} + \underbrace{(x^2+y^2)^{-2}(y^2-x^2)}_{g}\,\hat{j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2(x^2+y^2)^{-3}(2y)\cdot 2xy + (x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x$$

$$= \frac{-8xy^2 + 2x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-8xy^2+2x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

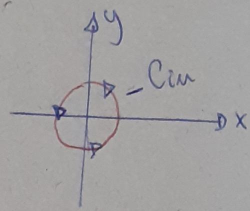
$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2(x^2+y^2)^{-3}(2x)(y^2-x^2) + (x^2+y^2)^{-2}(-2x)$$

$$= \frac{-4xy^2+4x^3-2x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-4xy^2+4x^3-2x^3-2xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

Ou seja, $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, logo $\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$

2º: Calcular $\oint_{-C_{in}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$



$$-C_{in}: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\oint_{-C_{in}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{-C_{in}} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\hat{i} + \operatorname{sen} t\,\hat{j} \longrightarrow \vec{r}\,'(t) = -\operatorname{sen} t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \frac{1}{\underbrace{(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)^2}_{1}}\left(2\cos t \operatorname{sen} t\,\hat{i} + (\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t)\,\hat{j}\right)$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t) &= -2\cos t \operatorname{sen}^2 t + \cos t \operatorname{sen}^2 t - \cos^3 t \\
&= -\cos t \operatorname{sen}^2 t - \cos t (1 - \operatorname{sen}^2 t) \\
&= \underline{\underline{-\cos t}}
\end{aligned}$$

Integrando:

$$\oint_{-C_{in}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} -\cos t\, dt = -\operatorname{sen} t \Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}}$$

Portanto:

$$\oint_{C_{ex}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \cancelto{0}{\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy} + \cancelto{0}{\oint_{-C_{in}} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$