CÁLCULO III – Engenharia de Energia
Lista 6 – M. Gonçalves e D. Flemming, Cálculo B.

1. Calcular, usando a definição, a derivada direcional do campo escalar $f(x, y)$ no ponto indicado e na direção $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

a) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2$ em $P(1, 1)$.

b) $f(x, y) = 2x + y$ em $P(-1, 2)$.

c) $f(x, y) = e^{x+y}$ em $P(0, 1)$.

Nos exercícios 2 a 6, calcular, usando a definição, a derivada direcional no ponto e direção indicados:

2. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $P(1, 2)$, na direção de $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

3. $f(x, y, z) = xy + z$, $P(2, 1, 0)$, na direção do eixo positivo dos z.

4. $f(x, y) = 2x + 3y$, $P(-1, 2)$, na direção da reta $y = 2x$.

5. $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$, $P(1, 1)$, na direção do vetor tangente unitário à curva $C : \vec{r}(t) = (t, t^2)$ em $P(1, 1)$.

6. $f(x, y, z) = 2x + 3y - z$, $P(1, 1, -1)$, na direção do eixo positivo dos y.

Nos exercícios 7 a 17, calcular o gradiente do campo escalar dado.

7. $f(x, y, z) = xy + xz + yz$.

8. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$.

9. $f(x, y) = 3xy^3 - 2y$.

10. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$.

11. $f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$.

12. $f(x, y) = e^{2x^2+y}$.

13. $f(x, y) = \text{arc tg}\, xy$.

14. $f(x, y) = \dfrac{2x}{x - y}$.

15. $f(x, y, z) = 2xy + yz^2 + \ln z$.

16. $f(x, y, z) = \sqrt{\dfrac{x + y}{z}}$.

17. $f(x, y, z) = ze^{x^2-y}$.

Nos exercícios 18 a 24, representar geometricamente o campo gradiente definido pela função dada:

18. $u(x, y, z) = -\dfrac{1}{6}(x^2 + y^2 + z^2)$.

19. $u(x, y) = 2x + 4y$.

20. $u(x, y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$.

21. $u(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2$.

22. $u(x, y) = x^2 + y^2$.

23. $u(x, y) = 2x - y$.

24. $u(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$.

25. Seja $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$. Representar geometricamente $\nabla f(x_0, y_0)$, sendo (x_0, y_0) dado por

a) $(1, 1)$ b $(-1, 1)$

c) $\left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$.

26. Dados $A\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$ e $B\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ e a função $f(x, y) = \ln xy$, determinar o ângulo formado pelos vetores $\nabla f(A)$ e $\nabla f(B)$.

27. Provar as propriedades (a), (b) e (d) da Subseção 6.4.3.

28. Determinar e representar graficamente um vetor normal à curva dada no ponto indicado:

a) $2x^2 + 3y^2 = 8$; $P(1, \sqrt{2})$

b) $y = 2x^2$; $P(-1, 2)$

c) $x^2 + y^2 = 8$; $P(2, 2)$

d) $y = 5x - 2$; $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

29. Determinar um vetor normal à superfície dada no ponto indicado e representá-lo geometricamente:

a) $2x + 5y + 3z = 10$; $P\left(1, 2, \dfrac{-2}{3}\right)$

b) $z = 2x^2 + 4y^2$; $P(0, 0, 0)$

c) $2z = x^2 + y^2$; $P(1, 1, 1)$.

30. Traçar as curvas de nível de $f(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}y^2$ que passem pelos pontos $(1, 1)$, $(1, -2)$ e $(-2, -1)$.

60. Suponha que $T(x, y) = 4 - 2x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Determinar uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir de $(1, 2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento de temperatura.

61. A Figura 6.24 mostra uma plataforma retangular cuja temperatura em cada ponto é dada por $T(x, y) = 2x + y$. Um indivíduo encontra-se no ponto P_0 dessa plataforma e necessita esquentar-se o mais rápido possível. Determinar a trajetória (obter uma equação) que o indivíduo deve seguir, esboçando-a sobre a plataforma.

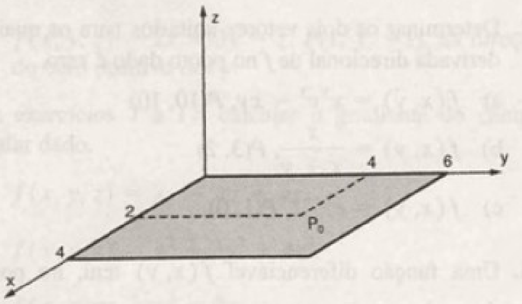

Figura 6.24

62. Uma plataforma retangular é representada no plano xy por

$$0 \leq x \leq 15 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 10$$

63. Resolver o Exercício 62 supondo que a temperatura seja dada por

$$T(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 100.$$

64. A densidade de uma distribuição de massa varia em relação a uma origem dada segundo a fórmula

$$\rho = \frac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2}}.$$

Encontrar a razão de variação da densidade no ponto $(1, 2)$ na direção que forma um ângulo de 45°, no sentido anti-horário, com o eixo positivo dos x. Em que direção a razão de variação é máxima?

65. Usando o gradiente, encontrar uma equação para a reta tangente à curva $x^2 - y^2 = 1$, no ponto $(\sqrt{2}, 1)$.

66. Encontrar o vetor intensidade elétrica $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$ a partir da função potencial V, no ponto indicado.

a) $V = 2x^2 + 2y^2 - z^2$; $P(2, 2, 2)$

b) $V = e^y \cos x$; $P\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$

c) $V = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, $P(1, 2, -2)$.

67. Um potencial elétrico é dado por $V = \frac{10}{x^2 + y^2 + z^2}$. Determinar o campo elétrico, representando-o graficamente.

Traçar os vetores $\nabla f(1, 1)$, $\nabla f(1, -2)$ e $\nabla f(-2, -1)$.

Nos exercícios 31 a 35, determinar uma equação para a reta normal à curva dada, nos pontos indicados:

$y = x^2$; $P_0(1, 1)$, $P_1(2, 4)$.

$x^2 - y^2 = 1$; $P_0(\sqrt{2}, 1)$.

$x - y^2 = -4$; $P_0(-3, 1)$.

$x + y = 4$; $P_0(3, 1)$.

$x^2 + y^2 = 4$; $P_0(2, 0)$.

Nos exercícios 36 a 40, determinar uma equação vetorial da reta normal à superfície dada, nos pontos indicados:

$z = x^2 + y^2 - 1$, $P_0(1, 1, 1)$.

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $P_0(1, 1, \sqrt{2})$, $P_1(1, 1, -\sqrt{2})$.

$x^2 + y^2 = z^2$, $P_0(3, 4, 5)$.

$x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1$, $P_0(1, 2, -3)$.

$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$, $P_0\left(0, \frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Calcular $\frac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0)$ na direção $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$:

a) $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$; $(x_0, y_0) = (1, 2)$

b) $f(x, y) = e^{xy}$; $(x_0, y_0) = (-1, 2)$

46. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, na direção de máximo decrescimento de f.

47. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, na direção do vetor $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

48. A derivada direcional da função $w = f(x, y)$ em $P_0(1, 1)$ na direção do vetor $\overrightarrow{P_0P_1}$, $P_1(1, 2)$, é 2, e na direção do vetor $\overrightarrow{P_0P_2}$, $P_2(2, 0)$, é 4. Quanto vale $\frac{\partial w}{\partial s}$ em P_0 na direção do vetor $\overrightarrow{P_0 0}$, onde 0 é a origem?

49. Em que direção devemos nos deslocar partindo de $Q(1, 1, 0)$ para obter a taxa de maior decréscimo da função $f(x, y) = (2x + y - 2)^2 + (5x - 2y)^2$?

50. Em que direção a derivada direcional de $f(x, y) = 2xy - x^2$ no ponto $(1, 1)$ é nula?

51. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? Em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

a) $f(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$ em $(1, 1)$

b) $f(x, y) = e^{xy}$ em $(2, -1)$.

52. Determinar os dois vetores unitários para os quais a derivada direcional de f no ponto dado é zero.

a) $f(x, y) = x^3y^3 - xy$, $P(10, 10)$

b) $f(x, y) = \frac{x}{x + y}$, $P(3, 2)$