UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Centro de Ciências, Tecnologias e Saúde - Campus Araranguá
Coord. Especial de Física, Química e Matemática

I Prova de Cálculo III - Engenharia de Computação e Engenharia de Energia - 30/09/2020

Orientações:
1: A prova deve ser manuscrita (não aceitarei provas digitadas);
2: As fotos devem ser tiradas na vertical. Você pode tirar foto na horizontal, desde que a escrita também esteja na horizontal;
3: A prova deve ser enviada via moodle, no link correspondente. Não considerarei nada enviado por email;
4: O nome do arquivo deve seguir o padrão **P1-CI-SeuNomeCompleto.pdf**;
5: Você terá 72h para fazer a prova. Dentro deste prazo, está previsto o tempo de realização da atividade, bem como a "burocracia" de criar o PDF e postar no Moodle e, **inclusive**, eventuais instabilidades do sistema ou problemas de conexão. Deixar a tarefa para os últimos minutos é arriscado e responsabilidade de cada um! Aconselho a fazer com antecedência, para evitar problemas na postagem, pois não será concedido tempo superior a 72h.
6: A prova inicia às 18h do dia 30/09 e o prazo para postagem expira às 18h do dia 03/10.

Realize seus cálculos de forma organizada, explicando todos os passos desenvolvidos. Organização e clareza serão levados em conta durante a correção. Justifique todas as suas respostas. Respostas sem justificativa adequada serão desconsideradas.

Questão 1. Indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique suas respostas detalhadamente. Tudo que estiver sendo afirmado nas sentenças abaixo, seja verdadeiro ou falso, deve ser verificado com cálculos, gráficos ou outros recursos que achar conveniente.

(a) (0,5 pt) A função $\overrightarrow{f}(t) = (t+1)^2\hat{\imath} + (2t^2+4t)\hat{\jmath}$, com $t \in R$, representa uma parábola, pois se trata de uma parametrização quadrática, típico de parábolas.

(b) (0,5 pt) A função $\overrightarrow{f}(s) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{14}}s\right)\hat{\imath} - \left(\frac{2}{\sqrt{14}}s\right)\hat{\jmath} + \left(3 + \frac{3}{\sqrt{14}}s\right)\hat{k}$ representa uma reta que passa pelos pontos $A = (-1, 4, -3)$ e $B = (3, -4, 9)$, com orientação positiva no sentido de A para B.

(c) (0,5 pt) As funções $\overrightarrow{f}(t) = \cos(t)\hat{\imath} + \operatorname{sen}(t)\hat{\jmath}$ e $\overrightarrow{g}(t) = \operatorname{sen}(t)\hat{\imath} + \cos(t)\hat{\jmath}$, ambas com $t \in [0, 2\pi]$, representam a mesma coisa.

(d) (0,5 pt) A equação $y^2 - ax^3 = 0$, com $a > 0$, é contínua e suave, mas não pode ser parametrizada, pois não define uma função.

(e) (0,5 pt) O vetor $\overrightarrow{v} = (2,2,2)$ é um vetor normal à superfície $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ no ponto $P = (1,1,1)$.

(f) (0,5 pt) $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ é um campo vetorial. Sendo $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, então automaticamente $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ é um campo conservativo.

(g) (0,5 pt) $f(x,y,z)$ é um campo escalar. Supondo que este campo esteja associado a um fluido, então, se seu divergente for zero, este fluido é chamado de incompressível.

Questão 2. (1,5 pt) Considere a curva dada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ (limite sua análise apenas no primeiro quadrante). Parametrize esta curva pelo comprimento de arco, redefinindo o intervalo do parâmetro s associado. (obs.: Problema de reparametrização, em que você muda do parâmetro t para o parâmetro s. Primeiro, você vai precisar das equações paramétricas em t.)

Questão 3. (1,0 pt) Mostre que o campo $\overrightarrow{F}(x,y) = -k\overrightarrow{r}$, onde $k > 0$ e $\overrightarrow{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, é um campo conservativo.

Questão 4. Seja uma partícula de carga elétrica $Q > 0$ localizada na origem do sistema de coordenadas. Então, a intensidade de campo elétrico em $\overrightarrow{r} = (x,y,z)$ é $\overrightarrow{E} = K\dfrac{Q}{r^2}\hat{e}_r$, sendo $\hat{e}_r$ o versor de $\overrightarrow{r}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e K uma constante que depende do meio onde a partícula está localizada. Verifique que:

(a) (1,0 pt) $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$

(b) (1,0 pt) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = 0$ para todo $\overrightarrow{r} \neq \overrightarrow{0}$.

Questão 5. (2,0 pts) Elabore uma questão (e resolva-a) que envolva os seguintes conceitos: plano osculador e intersecção de superfícies (escolha duas: elipsoide, cilindro parabólico, hiperboloide de duas folhas, plano paralelo ao eixo x). O exercício deve envolver os conceitos em um só problema. Seja claro no enunciado do problema e na sua resolução.

$1^{\underline{a}}$ Prova - Cálculo 3 — 2020.1

Q(1) a) $\vec{f}(t) = (t+1)^2\,\hat{i} + (2t^2+4t)\,\hat{j}, \quad t \in \mathbb{R}$

$x = (t+1)^2 = t^2 + 2t + 1 \longrightarrow x - 1 = t^2 + 2t$

FALSA

$y = 2(t^2+2t) \longrightarrow \boxed{y = 2(x-1)}$ É UMA RETA.

---

b) $\vec{f}(s) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{14}}s\right)\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}s\,\hat{j} + \left(3 + \frac{3}{\sqrt{14}}s\right)\hat{k}$

$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{14}}s$

$y = \frac{-2}{\sqrt{14}}s$

$z = 3 + \frac{3}{\sqrt{14}}s$

$\boxed{A = (-1,4,-3)}$

$x = -1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{14}}s \longrightarrow s = -2\sqrt{14}$ ✓

$y = 4 = \frac{-2s}{\sqrt{14}} \longrightarrow s = -2\sqrt{14}$ ✓

$z = -3 = 3 + \frac{3}{\sqrt{14}}s \longrightarrow s = -2\sqrt{14}$ ✓

$A = (-1,4,-3)$ FAZ PARTE DE $\vec{f}(s)$.

$\boxed{B = (3,-4,9)}$

$x = 3 = 1 + \frac{1}{\sqrt{14}}s \longrightarrow s = 2\sqrt{14}$ ✓

$y = -4 = \frac{-2}{\sqrt{14}}s \longrightarrow s = 2\sqrt{14}$ ✓

$z = 9 = 3 + \frac{3}{\sqrt{14}}s \longrightarrow s = 2\sqrt{14}$ ✓

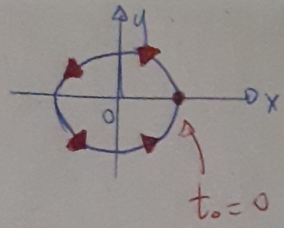
$B = (3,-4,9)$ FAZ PARTE DE $\vec{f}(s)$.

VERDADEIRA

ORIENTAÇÃO?

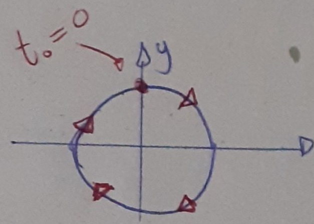
Positiva: sentido de crescimento de s. Em A, $s = -2\sqrt{14}$, enquanto em B, $s = 2\sqrt{14}$. Ou seja, o parâmetro cresceu de A para B, logo, a orientação positiva é de $A \rightarrow B$.

c) $\vec{f}(t) = \cos(t)\,\hat{i} + \operatorname{sen}(t)\,\hat{j}$, $t \in [0, 2\pi]$



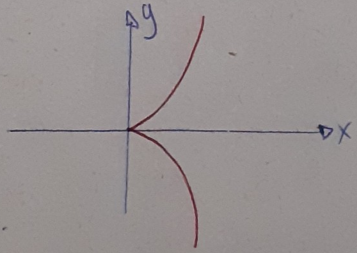
Circunf. centrada em (0,0), com orientação positiva no sentido anti-horário.

$\vec{g}(t) = \operatorname{Sen}(t)\,\hat{i} + \cos(t)\,\hat{j}$



Circunf. centrada em (0,0), com orientação positiva no sentido Horário. Portanto, FALSA.

d) $y^2 - ax^3 = 0$ É UMA PARÁBOLA SEMI-CÚBICA.



$y = \pm\sqrt{ax^3}$

Se $x = t^2$, $y = \sqrt{a}\,t^3$.

FALSA por 2 motivos: ela pode ser parametrizada e ela não é suave em (0,0).

e) " $\vec{v} = (2,2,2)$ é normal à superfície $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ em $P = (1,1,1)$ ".

FALSA. $f(x,y,z)$ não é uma superfície. $f(x,y,z) = K$ seria uma superfície de nível para um K específico. Então, a afirmação seria correta se fosse:

" $\vec{N} = (2,2,2)$ é normal às superfícies de NÍVEL de $f(x,y,z)$ ..... "

↳ Conceito de gradiente normal à superfície de nível.

Portanto, FALSA.

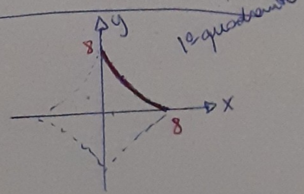
---

f) Se $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, então $\vec{F}$ será conservativo SE o domínio for uma região conexa (sem buracos). Ou seja, não é automático. FALSA.

---

g) Se $f(x,y,t)$ é um campo escalar, é impossível definir um divergente para ele, pois divergente é um conceito que envolve campo vetorial. Se no lugar de $f(x,y,z)$, tivéssemos $\vec{F}(x,y,z)$, a afirmação seria verdadeira.

FALSA.



(Q2) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ → HIPOCICLÓIDE

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

$a^{2/3} = 4 \rightarrow a = 4^{3/2} \rightarrow a = 8$

Eq. Param.: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \, \hat{i} \\ y = a\,\text{sen}^3 t \, \hat{j} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 8\cos^3 t \, \hat{i} \\ y = 8\,\text{sen}^3 t \, \hat{j} \end{cases}$, $\underbrace{t \in [0, \pi/2]}_{1º \text{ quadrante}}$

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

$x'(t) = 8 \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\text{sen}\, t) \rightarrow x'(t) = -24\, \text{sen}\, t \cos^2 t$

$y'(t) = 8 \cdot 3\, \text{sen}^2 t \cdot \cos t \rightarrow y'(t) = 24 \cos t\, \text{sen}^2 t$

Então:

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{(24)^2 \text{sen}^2 t \cos^4 t + (24)^2 \cos^2 t\, \text{sen}^4 t}\; dt$$

$$S(t) = \int_0^t 24 \sqrt{\text{sen}^2 t \cos^2 t \underbrace{(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)}_{1}}\; dt$$

$$S(t) = \int_0^t 24\, \text{sen}\, t \cos t\, dt \qquad u = \text{sen}\, t \rightarrow du = \cos t\, dt$$

$$S = \int 24\, u\, du \rightarrow S = \frac{\cancel{24}^{12} u^2}{\cancel{2}_1} \rightarrow S = 12\, \text{sen}^2 t \Big|_0^t$$

$$\boxed{S = 12\, \text{sen}^2 t}$$

$\text{sen}^2 t = S/12 \rightarrow \text{sen}\, t = (S/12)^{1/2}$

$\cos^2 t = 1 - \text{sen}^2 t$

$\cos^2 t = 1 - S/12 \rightarrow \cos t = (1 - S/12)^{1/2}$

Então:

$\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \rightarrow x = 8 \cos t \cos^2 t \rightarrow \\ y = 8\, \text{sen}^3 t \rightarrow y = 8\, \text{sen}\, t\, \text{sen}^2 t \rightarrow \end{cases}$

$t \in [0, \pi/2]$ $\therefore S = 12\, \text{sen}^2 t$

$$\boxed{x = 8 (1 - S/12)^{3/2}}$$
$$\boxed{y = 8 (S/12)^{3/2}}$$
$S \in [0, 12]$

↳ REPARAMETRIZAÇÃO EM S.

Quando $t = 0 \rightarrow S = 0$

$t = \pi/2 \rightarrow S = 12$

"

Q3 $\vec{F}(x,y) = -K\vec{r} = -Kx\hat{i} - Ky\hat{j}$

Se conseguirmos mostrar que existe um ϕ tal que:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$$

então $\vec{F}$ será conservativo.

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \boxed{\frac{\partial\phi}{\partial y}}\hat{j}$$

$$\vec{F} = -Kx\hat{i} \boxed{-Ky}\hat{j}$$

Temos:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -Kx \quad e \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -Ky$$

$$\int \partial\phi = \int -Kx\,\partial x$$

$$\boxed{\phi = \frac{-Kx^2}{2} + C(y)}$$

Derivando em y

$$\frac{d\phi}{dy} = \frac{dC}{dy}$$

$$\frac{d\phi}{dy} = \frac{dC}{dy}$$

e

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -Ky$$

Igualando: $\frac{dC}{dy} = -Ky$

$$\int dC = -Ky\,dy$$

$$\boxed{C = \frac{-Ky^2}{2} + K_1}$$

Então:

$$\phi(x,y) = \frac{-kx^2}{2} + C(y)$$

$$\boxed{\phi(x,y) = \frac{-kx^2}{2} - \frac{ky^2}{2} + K}$$

↳ este "K" é diferente dos demais

Se fizermos $\vec{\nabla}\phi$, veremos que $\vec{\nabla}\phi = \vec{F}$. Portanto, $\vec{F}$ é conservativo.

Obs.: Este $\vec{F}$ é tipo uma Força de um sistema massa-mola bidimensional, com x e y "desacoplados".

Q4) $\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{e}_r$; $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$r^2 = \vec{r}\cdot\vec{r} = x^2+y^2+z^2$

$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\downarrow$$

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{E} = \frac{kQ(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \underbrace{\frac{kQ\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}_{E_x}\hat{i} + \underbrace{\frac{kQ\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}_{E_y}\hat{j} + \underbrace{\frac{kQ\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}_{E_z}\hat{k}$$

(o x faz parte)

a) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = ?$$

Pág 7

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$E_x = \frac{KQx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad E_y = \frac{KQy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad E_z = \frac{KQz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = KQz\left(\frac{-3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2y) = -3KQyz(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = KQy\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2z) = -3KQyz(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = KQx\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2z) = -3KQxz(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = KQz\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2x) = -3KQxz(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = KQy\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2x) = -3KQxy(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = KQx\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2y) = -3KQxy(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

Portanto: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$

Obs.: Em situações em que você tem campos induzidos ($\vec{E}$ e $\vec{B}$), a equação fica:
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
que é a Lei de Faraday-Lenz.

b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\left.\begin{aligned} E_x &= KQx\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\ E_y &= KQy\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\ E_z &= KQz\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \end{aligned}\right\} \text{Aplica-se a regra do produto.}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = KQ(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + KQx\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\cdot(2x)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = KQ\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right]$$

— // —

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = KQ(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + KQy\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2y)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = KQ\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right]$$

— // —

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = KQ\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + KQz\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2z)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = KQ\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right]$$

— // —

Quando somarmos, teremos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = KQ\left[\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\cancel{5/2}\,3/2}}\right]$$

$$\underline{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0}$$

Obs.: Quando você tem um campo $\vec{E}$ gerado por um sólido carregado, observa-se que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ para a região que contém carga. É a Lei de Gauss na forma diferencial.

A integral que me refiro aqui será vista na Unidade II.

Obs ②: Para uma carga pontual, igual a que temos, a Lei de Gauss no formato diferencial é adaptada, pois o campo $\vec{E}$ não é definido exatamente onde está a carga. Costuma-se usar a Lei de Gauss na forma integral.