Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências, Tecnologias e Saúde
Coordenadoria Especial de Física, Química e Matemática

Atividade Avaliativa 06 - Semana 07

Cálculo III

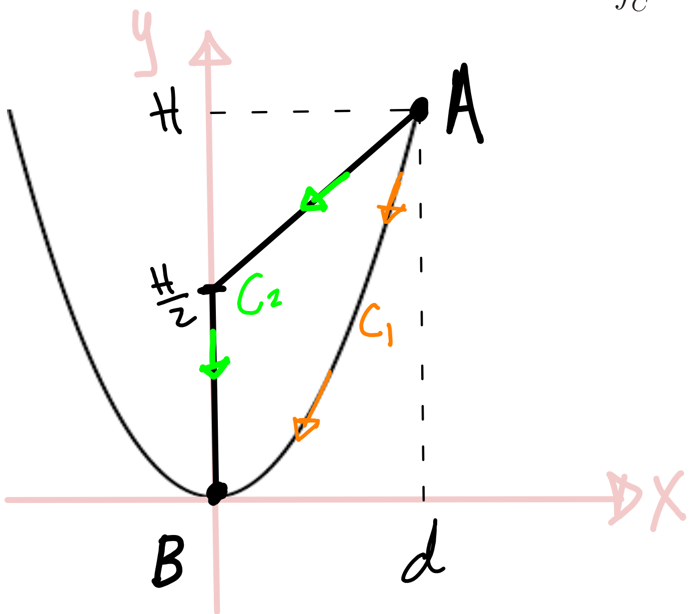
14 de Setembro de 2020

<u>Orientações:</u>
1: A atividade deve ser manuscrita (não aceitarei trabalhos digitados);
2: As fotos devem ser tiradas na vertical. Você pode tirar foto na horizontal, desde que a escrita também esteja na horizontal;
3: Postar arquivo único, via link no Moodle;
4: O nome do arquivo deve seguir o padrão **A06-CIII-SeuNomeCompleto.pdf**;
5: O prazo de entrega é de 40h. O prazo expira às 10h do dia 16/10.

A06

Realize seus cálculos de forma organizada, explicando todos os passos desenvolvidos. Organização e clareza serão levados em conta durante a correção.

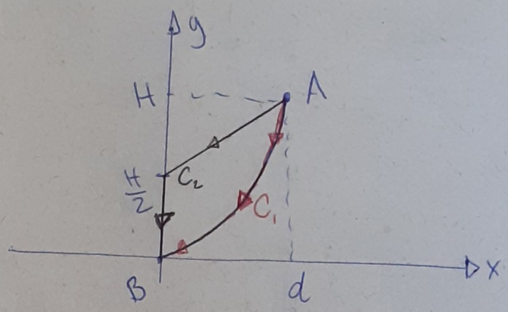
Considere uma partícula de massa m, se deslocando do ponto $A = (d, H)$ para o ponto $B = (0, 0)$ (figura abaixo), através de dois possíveis caminhos: C_1 e C_2. A força agindo sobre a partícula é a força peso, $\overrightarrow{F} = -mg\hat{j}$, onde g é o módulo da aceleração gravitacional (constante). (a) (60%) Calcule o trabalho realizado por esta força peso sobre a partícula neste deslocamento de A até B sobre o caminho C_1 e sobre o caminho C_2 (calcule as duas integrais). (b) (40%) Escolha um caminho fechado (diferente deste desenhado na figura) que contenha o ponto A para verificar que $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$.



Obs. ①: C_1 É UM PEDAÇO DE PARÁBOLA, DE A ATÉ B, CUJO VÉRTICE É O PRÓPRIO PONTO B.

Obs. ② C_2 É UM CAMINHO FORMADO POR DOIS PEDAÇOS DE RETA, CONFORME FIGURA.

AO6 – CÁLCULO III



$A=(d,H)$, $B=(0,0)$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

a) C_1 $\quad y=ax^2 \longrightarrow a=?$

$$H=ad^2, \quad a=H/d^2 \quad \Big\} \quad y=\frac{H}{d^2}x^2 \longrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=\frac{H}{d^2}t^2 \end{cases} \quad 0\le t\le d$$

Para obter o sentido de $A\to B$:

$$t \longrightarrow 0+d-t$$

C_1
$$\begin{cases} x=d-t \\ y=\frac{H}{d^2}(d-t)^2 \end{cases} \quad 0\le t\le d$$

$$\vec{r}(t)=(d-t)\hat{i}+\frac{H}{d^2}(d-t)^2\hat{j} \longrightarrow \vec{r}\,'(t)=-\hat{i}+\frac{2H}{d^2}(d-t)(-1)\hat{j}$$

$$\vec{r}\,'(t)=-\hat{i}-\frac{2H}{d^2}(d-t)\hat{j}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t) = -mg\hat{j}\cdot\left(-\hat{i}-\frac{2H}{d^2}(d-t)\hat{j}\right)$$

$$=\frac{2mgH}{d^2}(d-t)$$

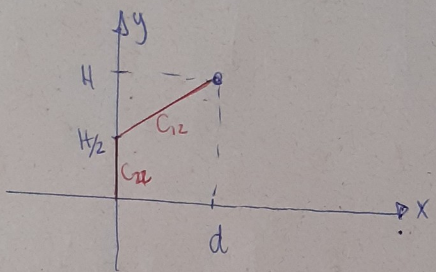
$$W=\int_C \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$W = \int_0^d \frac{2mgH}{d^2}(d-t)\,dt = \frac{2mgH}{d^2}\left(dt - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^d$$

$$= \frac{2mgH}{d^2}\left(d^2 - \frac{d^2}{2}\right) = \frac{\cancel{2}mgH}{\cancel{d^2}}\left(\frac{\cancel{d^2}}{\cancel{2}}\right)$$

$$\boxed{W = mgH} \longrightarrow \text{RESULTADO JÁ CONHECIDO NA FÍSICA!}$$

C_2



$$C_2 \longrightarrow C_{12} + C_{22}$$

$$\int_{C_2} \cdots = \int_{C_{12}} \cdots + \int_{C_{22}} \cdots$$

C_{12}: reta entre (d, H) e $(0, H/2)$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad , \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{H - H/2}{d - 0} = \frac{H}{2d}$$

$$y - H = \frac{H}{2d}(x - d)$$

$$y = \frac{H}{2d}x - \frac{H}{2} + H \longrightarrow \boxed{y = \frac{H}{2d}x + \frac{H}{2}} \longrightarrow C_{12}$$

$$C_{12}: \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{H}{2d}t + \dfrac{H}{2} \end{cases} \quad 0 \le t \le d$$

De $A \to B$: $t \to 0 + d - t$

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{H}{2d}t + \dfrac{H}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = d - t \\ y = \dfrac{H}{2d}(d-t) + \dfrac{H}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = d - t \\ y = H - \dfrac{H}{2d}t \end{cases} \quad 0 \le t \le d$$

$$\int_{C_{12}} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

$$\vec{r}(t) = (d-t)\hat{i} + \left(H - \frac{H}{2d}t\right)\hat{j} \rightarrow \vec{r}\,'(t) = -\hat{i} - \frac{H}{2d}\hat{j}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = -mg\hat{j} \cdot \left(-\hat{i} - \frac{H}{2d}\hat{j}\right) = \underline{\underline{\frac{mgH}{2d}}}$$

$$= \int_0^d \frac{mgH}{2d}\, dt = \frac{mgH}{2d}\, t \Big|_0^d \rightarrow \int_{C_{12}} \dots = \underline{\underline{\frac{mgH}{2}}}$$

$\underline{\underline{C_{22}}}$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$ $0 \leq t \leq H/2$ Invertendo a orientação: $t \rightarrow 0 + H/2 - t$

$$\underline{\underline{\begin{cases} x = 0 \\ y = H/2 - t \end{cases}}} \quad 0 \leq t \leq H/2$$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{H}{2} - t\right)\hat{j} \rightarrow \vec{r}\,'(t) = -\hat{j} \quad , \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = mg$$

$$= \int_0^{H/2} mg\, dt = \frac{mgH}{2} \rightarrow \int_{C_{22}} \dots = \frac{mgH}{2}$$

Logo:

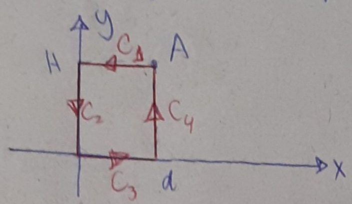
$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_{22}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{mgH}{2} + \frac{mgH}{2}$$

$$\boxed{\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = mgH}$$

→ Deve dar o mesmo resultado do anterior, pois $\vec{F} = -mg\hat{j}$ é conservativo e W_F independe do caminho.

b) $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

↳ é verdade p/ qualquer C, pois $\vec{F} = -mg\hat{j}$ é conservativo.



Você pode escolher qualquer caminho fechado que passe por A. Eu escolhi o retângulo da figura, no sentido anti-horário.

$$C \to C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \cancel{\int_{C_1}\dots}^{\,0} + \int_{C_2}\dots + \cancel{\int_{C_3}\dots}^{\,0} + \int_{C_4}\dots$$

$\int_{C_1}\dots$ e $\int_{C_3}\dots$ DÃO ZERO, pois $\vec{F}$ e $d\vec{r}$ são ortogonais!

$$C_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = H - t \end{cases} \quad 0 \le t \le H$$ (já está no sentido correto)

$\int_{C_2}\dots = ?$

$\vec{r}(t) = (H-t)\hat{j} \to \vec{r}\,'(t) = -\hat{j}$

$\vec{F}\cdot\vec{r}\,' = mg$

$$\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^H mg\,dt = \underline{\underline{mgH}}$$

$$C_4: \begin{cases} x = d \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le H$$ (já no sentido correto)

$\vec{r}(t) = d\hat{i} + t\hat{j} \to \vec{r}\,'(t) = \hat{j}$

$\vec{F}\cdot\vec{r}\,' = -mg$

$\int_{C_4}\dots = ?$

$$\int_{C_4} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^H -mg = \underline{\underline{-mgH}}$$

$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \dots$

Somando:

$= mgH - mgH$

$= \underline{\underline{0}}$