Carlos Luilguer Almeida Santos
20150465

/ /

Solução em série de potências de EDO's de 2ª ordem em torno de pontos ordinários

Uma função $f(x)$ é dita analítica no ponto $x = x_0$ se ela pode ser desenvolvida numa série de Taylor relativa a esse ponto que tenha raio de convergência positivo. Considere a EDO linear de 2ª ordem:

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y(x) = 0$$

que pode ser escrita na forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y(x) = 0$$

com $p(x) = B(x)/A(x)$ e $q(x) = C(x)/A(x)$. Dizemos que $x = x_0$ é um ponto ordinário, ou não-singular, dessa EDO se, nesse ponto, $p(x)$ e $q(x)$ ou suas extensões contínuas são funções (uma função $f(x)$ definida num ponto $x = x_0$ é dita contínua nesse ponto se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$). A extensão contínua de uma função $f(x)$ num ponto $x = x_0$ em que ela não é definida, mas tem limite finito, é a função $g(x)$ que é igual a $f(x)$ se $x \neq x_0$ e, naquele ponto, é dada por $g(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Por exemplo, a extensão contínua da função $(\operatorname{sen}(x))/x$ em $x = 0$ é a função $g(x)$ igual a $(\operatorname{sen} x)/x$ se $x \neq 0$ e com $g(0) = \lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)/x = 1$. Analíticos, um ponto que não é ordinário é dito um ponto singular, ou uma singularidade, da EDO. Exemplos: i) $y'' + (\ln x)y(x) = 0$: $x = 0$ é ponto singular, pois $f(x) = \ln x$ não é analítica nesse ponto (não existindo $f(0)$, $f'(0)$, etc, $f(x)$ não pode ser desenvolvida numa série de Taylor em torno de $x = 0$). ii) $y'' + (x-1)^{5/3}y' + y = 0$: $x = 1$ é ponto singular, pois $(x-1)^{5/3}$ não pode ser expandida em potências de $(x-1)$ [a segunda derivada de $(x-1)^{5/3}$, igual a $(10/9)(x-1)^{-1/3}$, é infinita em $x = 1$]. iii) $xy'' + (\operatorname{sen} x)y' + (1 - \cos x)y(x) = 0$ $\Rightarrow$ $y'' + \operatorname{sen} x/x \, y' + 1 - \cos x/x \, y(x) = 0$. Essa EDO não tem pontos singulares, isto é, todos pontos de $\mathbb{R}$ são ordinários, inclusive $x = 0$. De fato, como: $\frac{1}{x}\operatorname{sen} x = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$

$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

$$\frac{1}{x}(1-\cos x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \dots\right) =$$

$$= \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} - \frac{x^7}{8!}$$

São as séries de Taylor relativa a $x = 0$ das extensões contínuas de $p(x)$ e $q(x)$ nesse ponto, a analiticidade em $x = 0$ está verificada. IV) $(x^2+1)y'' + xy' - y(x) = 0 \Rightarrow y'' + x/x^2+1 \, y' - 1/x^2+1 \, y(x) = 0$. Os pontos singulares dessa EDO são as raízes de $x^2+1 = 0$, a saber, $x = \pm i$, nos quais $x/(x^2+1)$ e $1/(x^2+1)$ não admitem extensão contínua, pois apresentam limites infinitos nesses pontos. Esse exemplo ilustra que pontos singulares não são necessariamente reais.

Percebe-se que a caracterização de pontos ordinários e singulares com base no conceito de analiticidade pode complicar, às vezes, a determinação deles. Ora, o conceito de função analítica é pormenorizadamente estudado num curso de funções complexas, e é exatamente a falta desse estudo que nos traz dificuldades aqui. Mas não precisamos de muita teoria para prosseguir, uma vez que estaremos, na maioria das vezes, preocupados apenas com EDO's cujos coeficientes são polinômios. Nesse caso, fornecemos a seguinte receita: A EDO (2.6) - no caso em que $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ são polinômios sem fator comum - tem, em $x = x_0$ (real ou imaginário), um ponto ordinário se $A(x_0) \neq 0$, singular se $A(x_0) = 0$. Por exemplo: i) $(x^2-1)y'' + 2xy' + 6y(x) = 0$: os pontos singulares são as raízes de $x^2 - 1 = 0$, isto é, $x = \pm 1$. Todos os outros pontos são ordinários. ii) $(x-1)^2 y'' + (x^2-1)y' + (x-1)^2 y(x) = 0 \Rightarrow (x-1)y'' + (x+1)y' + (x-1)y(x) = 0$: ponto singular em $x = 1$. iii) $(x-1)y'' + (x^2-1)y' + (x-1)^2 y(x) = 0 \Rightarrow y'' + (x+1)y' + (x-1)y(x) = 0$: não tem ponto singular (todos pontos de $\mathbb{R}$ são ordinários). iv) $x^2y'' + x^2y' + x(x-1)y(x) = 0 \Rightarrow xy'' + xy' + (x-1)y(x) = 0$: ponto singular em $x = 0$. v) $(x^2+1)y'' + y(x) = 0$: pontos singulares em $x = \pm i$. Se $x = x_0$ for um ponto ordinário da EDO (2.6), podemos encontrar sempre duas soluções linearmente independentes na forma da série de potências $\sum a_n(x-x_0)^n$, convergindo cada série, pelo menos, no intervalo (x_0-R, x_0+R), em que R é a distância do ponto x_0 ao ponto singular (real ou não) mais próximo. Por exemplo, a solução da EDO $(x-1)y''+xy'+y=0$ na forma $\sum^{\infty} a_n(x-4)^n$, isto é, na forma de uma série de potências em torno do ponto ordinário $x=4$, é convergente para $(4-3, 4+3)=(1,7)$, pois, nesse caso, a distância R do ponto $x=4$ ao ponto singular mais próximo, que é o ponto $x=1$, é $R=|4-1|=3$. Outro exemplo: a solução da EDO $(x^2+9)y''+xy'+y=0$ na forma $\sum_n a_n(x-4)^n$, isto é, na forma de uma série de potências em torno do ponto ordinário $x=4$, é convergente para $(4-5, 4+5)=(-1,9)$, pois, nesse caso, a distância R do ponto $x=4$ (do eixo das abscissas, que também é o ponto $z_1=4$ do plano complexo) ao ponto singular mais próximo, que são os pontos $z_2=\pm 3i$ do plano complexo, é $R=|z_1-z_2^{\pm}| = |4-3i| = |4+3i| = \sqrt{4^2+3^2}=5$, intervalo $(-1,9)$ é a parte do eixo real que fica no interior da circunferência de raio $R=5$ centrada no ponto $x=4$ desse eixo. Aqui, por questão de simplicidade, supomos que a origem $x=0$ seja sempre o ponto ordinário em torno do qual se deseja obter a solução da EDO na forma de uma série de potências, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ no caso, isso não significa perda de generalidade, pois, mediante a mudança para a variável $t=x-x_0$, sempre podemos transformar uma EDO ~~como~~ com ponto ordinário em $x=x_0$ noutra com ponto ordinário em $t=0$. Por exemplo, $y''-2xy=0$, como não há pontos singulares, a solução em série obtida abrange é convergente para todo x real.

$$0 = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=3}^{\infty} 2a_{n-3}x^{n-2} = \underset{0}{2a_2} + \sum_{n=3}^{\infty}[n(n-1)a_n - 2a_{n-3}]\, x^{n-2} \Rightarrow a_2 = 0 \text{ e } a_n\Big|_{n\geq 3} = \frac{2a_{n-3}}{n(n-1)}$$

Como $a_2=0$, temos que $a_5 = a_8 = \ldots = a_{3k+2}\Big|_{k\geq 0} = 0$.

O coeficiente a_0 permanece arbitrário, dele dependendo os coeficientes $a_{3k}|_{k\geq 1}$

$$a_3 = \frac{2a_0}{(3)(2)} = \frac{a_0}{3}$$

$$a_6 = \frac{2a_3}{(6)(5)} = \frac{1}{15}\frac{a_0}{3} = \frac{a_0}{45}$$

$$a_9 = \frac{2a_6}{(9)(8)} = \frac{1}{36}\frac{a_0}{45} = \frac{a_0}{1620}$$

Recorde-se de que a distância entre dois pontos z_1 e z_2 do plano complexo é dada por $|z_1 - z_2|$, e que o módulo de um número complexo $z = a + bi$ é $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Por exemplo, a distância entre os pontos $6+13i$ e $1+i$ é $|6+13i-(1+i)| = |5+12i| = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$.

O coeficiente a_1 também permanece arbitrário, dele dependendo os coeficientes $a_{3k+1}|_{k\geq 1}$:

$$a_4 = \frac{2a_1}{(4)(3)} = \frac{a_1}{6}$$

$$a_7 = \frac{2a_4}{(7)(6)} = \frac{1}{21}\frac{a_6}{6} = \frac{a_1}{126}$$

$$a_{10} = \frac{2a_7}{(10)(9)} = \frac{1}{45}\frac{a_1}{126} = \frac{a_1}{5670}$$

Logo, $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10} + \ldots = a_0\left(1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{45} + \frac{x^9}{1620} + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{6} + \frac{x^7}{126} + \frac{x^{10}}{5670} + \ldots\right)$ é a solução desejada, sendo as séries entre parênteses duas soluções linearmente independentes da EDO. Considere os dois PVIs seguintes, formados com a EDO já resolvida anteriormente acima e diferindo apenas quanto ao ponto do domínio no qual as condições iniciais são definidas:

$y'' - 2xy = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 5$

$y'' - 2xy = 0$, $y(3) = -2$, $y'(3) = 5$

Como já temos a solução geral da EDO, dada por:

$$y(x) = a_0\left(1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{45} + \frac{x^9}{1620} + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{6} + \frac{x^7}{126} + \frac{x^{10}}{5670} + \ldots\right),$$

falta, para completar a resolução dos PVIs, determinar as constantes a_0 e a_1 a partir das condições iniciais, o que exige a expressão da derivada de $y(x)$:

$$y'(x) = a_0\left(x^2 + \frac{6x^5}{45} + \frac{9x^8}{1620} + \dots\right) + a_1 \dots$$

$$\left(1 + \frac{4x^3}{6} + \frac{7x^6}{126} + \frac{10x^9}{5670} + \dots\right).$$ No caso do primeiro PVI, as condições iniciais fornecem diretamente $y(0) = a_0 = -2$ e $y'(0) = a_1 = 5$. Mas, no segundo PVI, temos complicações: as condições iniciais fornecem:

$$y(3) = a_0\left(1 + \frac{3^3}{3} + \frac{3^6}{45} + \frac{3^9}{1620} + \dots\right) + a_1\left(3 + \frac{3^4}{6} + \frac{3^7}{126} + \frac{3^{10}}{5670} + \dots\right)$$

$$= -2 \quad e$$

$$y'(3) = a_0\left(3^2 + \frac{6 \cdot 3^5}{45} + \frac{9 \cdot 3^8}{1620} + \dots\right) + a_1\left(1 + \frac{4 \cdot 3^3}{6} + \frac{7 \cdot 3^6}{126} + \frac{10 \cdot 3^9}{5670} + \dots\right) = 5$$

Essas duas equações formam um sistema algébrico com as duas incógnitas a_0 e a_1, o qual, para ser resolvido, é necessário, antes, executar a difícil tarefa de calcular os somos dos termos resultantes. Vê-se, assim, que a determinação das constantes arbitrárias na solução geral $y(x)$ torna-se complicada quando $y(x)$ não é uma série centrada no mesmo ponto do domínio no qual são definidos as condições iniciais. Assim, concluímos o seguinte: Ao resolver-se por série o problema de valor inicial formado por uma EDO $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y(x) = 0$ e condições iniciais dados pelos valores conhecidos de $y(x_0)$ e $y'(x_0)$, se x_0 for um ponto ordinário da EDO, é vantagem obter a solução geral como uma série centrada nesse ponto, isto é, $y(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$, pois as constantes arbitrárias a_0 e a_1 podem ser determinados com simplicidade, sendo iguais a $y(x_0)$ e $y'(x_0)$, respectivamente. De fato, observe:

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \sum_{n=2} a_n (x - x_0)^n \Rightarrow y(x_0) = a_0$$

$$y'(x) = a_1 + \sum_{n=2} n a_n (x - x_0)^{n-1} \Rightarrow y'(x_0) = a_1$$

Vamos, então, resolver o segundo PVI acima. Segundo a conclusão acima, convém primeiramente obter a solução como uma série centrada em $x = 3$. Isso será menos trabalhoso se fizermos a mudança de variável $t = x - 3$. As transformações correspondentes das derivadas de y são obtidos pela regra da cadeia. Após isso, tendo em conta que $y(x) = y(x(t)) = Y(t)$, a EDO $y'' - 2xy(x) = 0$ toma a forma $Y'' - 2(t-3)Y(t) = 0$.