Carlos Luilguer Almeida Santos
20150465

Paridade de Funções e Séries de Senos e Cossenos

Função par: uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita par se $f(x) = f(-x)$, $\forall x$ no domínio de f. Geometricamente, se f é par seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y. Observa-se que $f(a) = f(-a)$, $f(b) = f(-b)$. Alguns exemplos de funções pares são $f(x) = c$ (função constante), $f(x) = |x|$ (função modular), $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^n$ para n par. Um outro exemplo importante de função par é $f(x) = \cos x$.

Função ímpar: uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita ímpar se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x$ no domínio f. Geometricamente, se f é ímpar seu gráfico é simétrico em relação à origem. Observa-se que $f(-a) = -f(a)$, $f(-b) = -f(b)$. Alguns exemplos de funções ímpares são $f(x) = x^3$, $f(x) = x^n$ para n ímpar. Um outro exemplo importante de função par é $f(x) = \text{sen}(x)$. Assim, algumas observações são destacadas: i) A única função que é simultaneamente par e ímpar é a função identicamente nula $f(x) = 0$, ou seja, a função cuja imagem é zero para todo o domínio; ii) se f é uma função ímpar que contenha 0 (zero) no domínio, então obrigatoriamente teremos $f(0) = 0$; iii) a grande maioria das funções que elevam não são ~~na~~ nem pares nem ímpares. Estamos particularmente interessados nas funções pares e ímpares pois suas representações em séries de Fourier aparecem na resolução de equações diferenciais parciais importantes da Física-Matemática e Engenharia. A soma e diferença, assim como o produto (quociente) de funções pares e ímpares possuem propriedades importantes, as quais listaremos a seguir. Tais propriedades simplificarão bastante nosso trabalho na ~~ap~~ representação em Séries de Fourier de funções pares e ímpares.

A soma (diferença) de duas funções pares é par; a soma (diferença) de duas funções ímpares é ímpar; a soma (diferença) de uma função par e uma função ímpar não é nem par nem ímpar.

O produto (quociente) de duas funções pares é par. O produto (quociente) de duas funções ímpares é par. O produto (quociente) de uma função par e uma função ímpar é ímpar. Prova de P4: Sejam $I_1, I_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções ímpares, isto é $I_1(-x) = -I_1(x)$ e $I_2(-x) = -I_2(x)$. Defina o produto $P(x) = I_1(x) I_2(x)$; logo temos:

$$P(-x) = I_1(-x) I_2(-x) = [-I_1(x)][-I_2(x)] = I_1(x) I_2(x) = P(x)$$

isto é, com a hipótese que I_1 e I_2 são ímpares, mostramos que o produto $P(x) = I_1(x) I_2(x)$ satisfaz $P(x) = P(-x)$, logo este produto é par. Defina o quociente $Q(x) = I_1(x) / I_2(x)$ logo temos:

$$Q(-x) = \frac{I_1(-x)}{I_2(-x)} = \frac{-I_1(x)}{-I_2(x)} = \frac{I_1(x)}{I_2(x)} = Q(x),$$

isto é, com a hipótese que I_1 e I_2 são ímpares, mostramos que o quociente $Q(x) = I_1(x)/I_2(x)$ satisfaz $Q(x) = Q(-x)$, logo este quociente é par. Se f é uma função par integrável no intervalo $[-L, L]$ então:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

Geometricamente a proposição é óbvia, uma vez que sendo f par a área sob a curva no intervalo $[-L, 0]$ é igual à área sob a curva no intervalo $[0, L]$. Formalmente temos:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\,dx;$$

fazendo $x = -t$ na primeira integral do membro direito, temos $dx = -dt$, logo:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = -\int_{L}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{L} f(x)\,dx = \int_{0}^{L} f(t)\,dt + \ldots$$

$$\ldots + \int_{0}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx.$$

Se f é uma função ímpar integrável no intervalo $[-L, L]$ então

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$$

Geometricamente a ~~prop~~ proposição é óbvia, uma vez que sendo f ímpar a área sob a curva no intervalo $[-L, 0]$ é igual à área sob a curva no intervalo $[0, L]$, porém como tais áreas têm sinais contráríos a soma se cancela; Finalmente Temos:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx;$$

fazendo $x = -t$ na primeira integral do membro direito, Temos $dx = -dt$; logo: $\int_{-L}^{L} f(x)dx = -\int_{L}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{L} f(x)dx = -\int_{0}^{L} f(t)dt + \int_{0}^{L} f(x)dx = 0$

A Série de Fourier de uma função f, par, periódica de período T e frequência fundamental $w_0 = 2\pi/T$, é uma série de cossenos, isto é

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n w_0 x)$$

Para a verificação desta proposição suponhamos que f é par e periódica de período $T = 2L$, onde L é o meio período. Calculando a_0,

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{4}{T}\int_0^L f(x)dx$$

uma vez que o integrando é par e pela Proposição anterior, podemos substituir a integral no intervalo $[-L, L]$ por duas vezes a integral no intervalo $[0, L]$. Assim, para a_n:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n w_0 x)dx = \frac{4}{T}\int_0^L f(x)\cos(n w_0 x)dx$$

uma vez que pela ~~provid~~ propriedade P_1 o integrando $f(x)\cos(n w_0 x)$ é par e pela Proposição, podemos substituir a integral no intervalo $[-L, L]$ por duas vezes a integral no intervalo $[0, L]$. Calculando b_n, equação, obtemos:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\text{sen}(n w_0 x)dx = \frac{2}{T}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}(n w_0 x)dx = 0$$

Pela propriedade e proposição, a integral se anula. Logo, se f é par e periódica de período T, sua expansão em Série de Fourier é da forma da onda triangular.) A série de Fourier de uma função f, ímpar, periódica de período T e frequência fundamental $w_0 = 2\pi/T$, é uma série de senos, isto é:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}(n w_0 x)$$

Para a verificação desta proposição suponhamos que f é ímpar e periódica

/ /

de período $T=2L$, onde L é o meio período. Calculando a_0, obtemos:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{2}{T}\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

uma vez que o integrando é ímpar e pela Proposição a integral se anula. Para o a_n, obtemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega_0 x)dx = \frac{2}{T}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\omega_0 x)dx = 0$$

uma vez que pela a propriedade P_3 o integrando $f(x)\cos(n\omega_0 x)$ é ímpar e pela Proposição a integral se anula. Por fim, em b_n:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\text{sen}(n\omega_0 x)dx = \frac{4}{T}\int_0^L f(x)\,\text{sen}(n\omega_0 x)dx,$$

uma vez que pela propriedade P_2 o integrando $f(x)\,\text{sen}(n\omega_0 x)$ é par e pela Proposição podemos substituir a integral no intervalo $[-L,L]$ por duas vezes a integral no intervalo $[0,L]$. Logo, se f é ímpar e periódica de período T, sua expansão em Série de Fourier é da forma da onda quadrada. Exemplo: Determine a expansão em Série de Fourier da função periódica: $f(x)=x^2$; $-1\leq x<1$, $f(x)=f(x+2)$. O período da onda é $T=2$ e sua frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/T = \pi$. Neste caso, como a onda apresenta simetria par temos $b_n=0$ e devemos determinar apenas a_0 e a_n. Cálculo de a_0: substituindo $T=2$, $L=1$ e $\omega_0=\pi$, obtemos:

$$a_0 = \frac{4}{2}\int_0^1 x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Cálculo de a_n: substituindo $T=2$, $L=1$ e $\omega_0=\pi$ na equação, obtemos

$$a_n = \frac{4}{2}\int_0^1 x^2\cos(n\pi x)dx$$

$$a_n = \frac{4}{2}\left[\frac{x^2}{n\pi}\,\text{sen}(n\pi x) + \frac{2x}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) - \frac{2}{n^3\pi^3}\,\text{sen}(n\pi x)\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{2}\left[\frac{1}{n\pi}\,\text{sen}(n\pi) + \frac{2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) - \frac{2}{n^3\pi^3}\,\text{sen}(n\pi) - 0 - 0 - \frac{2}{n^3\pi^3}\,\text{sen}(0)\right]$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)$$

Assim, substituindo na equação: $\omega_0 = \pi$, a representação em Série de Fourier da função fica:

$$f(x) \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2} \cos(n\pi x),$$

ou, usando a equação:

$$f(x) \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x).$$

Determinando a representação em Série de Fourier da onda dente de serra mostrada na Figura 1.11 (livro). O período da onda é $T = 2\pi$ e sua frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/T = 1$. Sua forma analítica pode ser dada por: $f(x) = x$, se $-\pi \leq x < \pi$ e $f(x) = f(x + 2\pi)$. Neste caso, como a onda apresenta simetria ímpar temos $a_0 = a_n = 0$ e devemos determinar apenas b_n. Substituindo $T = 2\pi$, $L = \pi$ e $\omega_0 = 1$:

$$b_n = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)\,dx$$

e pela equação:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx) \right] \Bigg|_0^{\pi} = -\frac{2}{n} \cos(n\pi).$$

Usando a equação, b_n pode ser reescrito como:

$$b_n = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

Assim, pela equação com $\omega_0 = 1$, a representação em Série de Fourier da onda dente de serra fica:

$$f(x) \sim -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen}(nx);$$

ou na forma expandida:

$$f(x) \sim \frac{2}{1} \operatorname{sen}(x) - \frac{2}{2} \operatorname{sen}(2x) + \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x) - \frac{2}{4} \operatorname{sen}(4x) + \frac{2}{5} \operatorname{sen}(5x) - \ldots$$

Nas expansões em meio período (par ou ímpar) só necessitamos conhecer a definição da função em meio período, ou seja, no intervalo $[0, a]$, uma vez que o cálculo dos coeficientes de uma série de cossenos ou de uma série de senos empregam integração em apenas meio período, conforme observamos nas equações anteriores.