Carlos Luiguer Almeida Santos
20180465

Equações exatas

Qualquer equação de primeira ordem pode ser escrita em forma diferencial:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

esta forma é semelhante à expressão da diferencial de uma função de duas variáveis, como mostrado abaixo:

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Assim, esta equação sugere-nos admitir que existe uma função $F(x,y)$ cujas derivadas parciais são iguais a $M(x,y)$ e $N(x,y)$. No entanto, a segunda derivada parcial de F seria como:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}y = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Assim, para que a conjetura da existência da função $F(x,y)$ seja consistente, é necessário que as funções M e N verifiquem a seguinte condição.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Para esse caso, diz-se que a equação exata definida e pode ser escrita como:

$$dF(x,y) = 0$$

sendo sua solução geral:

$$F(x,y) = C$$

A função F calcula-se encontrando a função cujas derivadas parciais sejam iguais a $M(x,y)$ e $N(x,y)$.

Em resumo, podemos afirmar o seguinte:

Considere uma equação diferencial da forma: $M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$, onde $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções definidas e continuamente diferenciáveis em um retângulo $R = \{(x,y);\ a<x<b,\ c<y<d\}$. Se a condição de Euler:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

for satisfeita em todo R, então existe uma função $\varphi(x,y)$ definida em R, duas vezes continuamente diferenciável tal que as soluções $y=y(x)$ da equação diferencial são dadas implicitamente pela relação $\varphi(x,y)=c$, para quaisquer constantes c.

Equações homogêneas

Uma equação de primeira ordem diz-se homogênea se tiver a seguinte forma geral:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

para resolver este tipo de equação usa-se a substituição

$$v = y/x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

a qual transforma a equação numa equação de variável separável. Para reconhecer facilmente se uma função racional é da forma $f(y/x)$ observam-se os expoentes de cada termo no numerador e denominador (soma do expoente de x mais o expoente de y) os graus deverão ser iguais. Por exemplo das duas funções seguintes a primeira tem a forma $f(y/x)$ mas a segunda não

$$\frac{xy^2 - x^3}{yx^2} \neq \frac{xy+y}{2+x}$$

Existem outras equações que podem ser reduzidas a equações homogêneas. Como:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r}\right)$$

onde a, b, c, p, q e r são dadas. Se as constantes c e r fossem nulas, a equação seria homogênea; definimos um novo sistema de coordenadas (u, v) para substituir (x, y), de forma a obter:

$$ax + by + c = au + bv$$
$$px + qy + r = pu + qv$$

ou de forma equivalente:

$$a(x-u) + b(y-v) = -c$$
$$p(x-u) + q(y-v) = -r$$

a solução deste sistema de equações lineares pode ser obtida por meio da regra de Cramer

$$x - u = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -r & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}} \qquad y - v = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ p & -r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}}$$

Como os lados direitos das equações são constantes, também temos que $dx = du$, $dy = dv$ e a equação diferencial transforma-se numa equação homogênea:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{pu + qv}\right)$$

Equações lineares e fatores integrantes

As equações lineares são as que podem ser escritas na forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

Para resolver este tipo de equação podemos tentar transformá-la na forma simples estudada na seção anterior. No caso particular em que a função p for uma constante a, o lado esquerdo será semelhante à seguinte derivada:

$$\frac{d}{dx}(ye^{ax}) = e^{ax}(y' + ay)$$

consequentemente, podemos multiplicar os dois lados da equação diferencial por $\exp(ax)$ e obtermos:

$$\frac{d}{dx}(ye^{ax}) = e^{ax}f(x)$$

$$ye^{ax} = \int e^{ax}f(x)\,dx + C$$

No caso geral em que p depende de x, usamos a ~~primeira~~ primitiva de $p(x)$ em vez de ax e o fator integrante pelo qual devemos multiplicar a equação será:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

multiplicando os dois lados da equação diferencial por μ obtém-se

$$\frac{d}{dx}\left(y\,\mu(x)\right) = \mu(x) f(x)$$

$$y\mu = \int \mu(x) f(x)\,dx + C$$

Por exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y^3 - 2x} \quad ; \quad y(0) = 1$$

A equação não é de variáveis separáveis, nem linear, mas se invertermos a equação obtemos:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^3 - 2x}{y}$$

a qual é uma equação linear. Escrita na forma padrão

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y}x = y^2$$

vemos que o fator integrante é

$$\mu = e^{\int \frac{2}{y}\,dy} = y^2$$

multiplicando os dois lados da equação por μ, obtemos:

$$\frac{d}{dy}\left(y^2 x\right) = y^4$$

$$y^2 x = \frac{y^5}{5} + C$$

Para calcular o valor da constante de integração, substituímos a condição inicial

$$2 = \frac{1}{5} + C \rightarrow C = \frac{9}{5}$$

$$\therefore\ 5y^2x = y^5 + 9 \quad \text{(a solução de forma implícita)}$$

Assim, as equações lineares de primeira ordem pode ser também apresentada da seguinte forma:

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

sendo linear em x e dx/dt, temos uma equação do tipo: $dx/dt + p(t)x = g(t)$.

No caso particular em que $g(t) = 0$, temos simplesmente: $dx/dt = -p(t)x$, que pode ser resolvida via separação de variáveis, dando: $x(t) = \pm e^{-\int^t p}$ onde $\int^t p$ é uma primitiva qualquer de p. De maneira mais explícita, podemos escrever:

$$x(t) = Ce^{-\int_0^t p(s)ds}$$

para uma constante real C, o que inclui a solução trivial identicamente igual a zero. Por outro lado, observe que, quando $g(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)e^{\int_0^t p(s)ds}\right) = \left(\frac{dx(t)}{dt} + p(t)x(t)\right)e^{\int_0^t p(s)ds} = 0$$

de onde tiramos que: $x(t)e^{\int_0^t p(s)ds} = C$, para alguma constante C, conforme obtido via separação de variáveis. Para $g(t) \neq 0$, podemos utilizar a relação:

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)e^{\int_0^t p(s)ds}\right) = \left(\frac{dx(t)}{dt} + p(t)x(t)\right)e^{\int_0^t p(s)ds}$$

obtida acima, para reescrever a equação: $dx/dt + p(t)x = g(t)$ na forma equivalente:

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)e^{\int_0^t p(s)ds}\right) = g(t)e^{\int_0^t p(s)ds}$$

Esta última equação pode ser resolvida explicitamente via integração direta:

$$x(t)e^{\int_0^t p(s)ds} = C_0 + \int_0^t g(s)e^{\int_0^s p(r)dr} ds$$

Assim, a solução toma a forma:

$$x(t) = C_1 e^{-\int_0^t p(s)ds} + \int_0^t e^{-\int_s^t p(r)dr} \cdot g(s)ds$$

A solução, pode ser colocada no contexto de fatores de integração. De fato, a equação: $dx/dt + p(t)x = g(t)$, não é exata, mas multiplicando por $e^{\int p(t)}$, temos: $(p(t)x - g(t))e^{\int p(t)} + e^{\int p(t)} dx/dt = 0)$, em caso, a condição de Euler é satisfeita.