Carlos Luilquer Almeida Santos
20150465

/ /

Equação do calor e equação da onda

Se $T(t,x)$ representa a temperatura num instante t, na posição x sobre uma barra, a equação de transferência de calor em dimensão é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

onde a é constante. A função T é a variável dependente, e t e x são as variáveis independentes. Uma das EDP's clássica da Física - Matemática é a equação diferencial parcial que descreve o fluxo de calor em um corpo sólido. E uma aplicação mais recente é a que descreve a dissipação de calor gerado pelo atrito em vôos espaciais na re-entrada na atmosfera terrestre. Considere uma barra com seção uniforme de um material homogêneo. Seja $u(x,t)$ a temperatura localizada em x no tempo t. Desejamos desenvolver um modelo para determinar o fluxo de calor através da barra. Para isto devemos seguir alguns princípios básicos da física: A. a quantidade de calor fluindo através da barra é proporcional a $\partial u/\partial x$ multiplicado por uma constante de proporcionalidade $K(x)$ chamada a condutividade térmica do material. B. o fluxo de calor é sempre no sentido desde um ponto de maior temperatura a pontos de menor temperatura. C. a quantidade de calor necessário para atingir a temperatura de um corpo de massa m em uma quantidade Δu é "$m\,c(x)\,\Delta u$", onde $c(x)$ é chamada de calor específico do material. Assim, para determinar a quantidade de calor que flui através de uma seção de superfície A em um tempo Δt está dado pela fórmula:

$$H(x) = -K(x)\,(\text{área de } A)\,\Delta t\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

Analogamente, no ponto $x+\Delta x$, temos: $H(x+\Delta x) = -K(x+\Delta x)(\text{área de } B)\,\Delta t\,\frac{\partial u}{\partial t}(x+\Delta x, t)$. Se no intervalo $[x, x+\Delta x]$, no tempo Δt, existe alguma outra fonte de calor adicional, como por exemplo reações químicas, aquecimento ou correntes elétricas com densidade de energia $Q(x,t)$, a variação total de calor ΔE está dada pela fórmula: ΔE = entrada de calor A − saída de calor B + calor gerado. Com $\Delta E = c(x)\, m \Delta u$, onde $m = \rho(x)\Delta V$, dividindo por $(\Delta x)(\Delta t)$, e tomando limites com Δx, e $\Delta t \to 0$, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[K(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] + Q(x,t) = c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

Assumindo que K, c, ρ são constantes, temos: $\frac{\partial u}{\partial t} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P(x,t)$

Outro ponto, são dados condições iniciais e de fronteira para $u(x,t)$. Consideramos um modelo matemático para barra condutora de calor isolada termicamente, sem fontes ou sumidouros com condições de fronteira homogêneas e com uma distribuição inicial de temperatura dada por $f(x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\quad 0<x<L,\ t>0,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,\quad t>0$$

$$u(x,0) = f(x)\quad 0<x<L$$

Propomos uma solução da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Substituindo na equação obtemos:

$$X(x)T'(t) = \beta X''(x)T(t),\quad 0<x<L,\ t>0$$

Que conduz à seguinte equação:

$$\frac{T'(t)}{\beta T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = K.\quad T'(t) - \beta K T(t) = 0 \text{ e } X''(x) - KX(x) = 0$$

Se estamos interessados na solução não trivial $X(x)$, que satisfaz:

$$X''(x) - KX(x) = 0$$

$$X(0) = X(L) = 0$$

Podemos considerar três casos: $K=0$, $K>0$ e $K<0$. Caso (i): $K=0$. Neste caso temos $X(x)=0$, a solução trivial. Caso (ii): $K>0$. Seja $K=\lambda^2$, então substituindo temos $X'' - \lambda^2 X = 0$. O conjunto fundamental de soluções é: $\{e^{\lambda x}, e^{-\lambda x}\}$. E a solução geral está dada por: $X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$, $X(L) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\lambda L} + c_2 e^{-\lambda L} = 0$, assim $c_1(e^{2\lambda L} - 1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ e $c_2 = 0$. Mais uma vez obtemos a solução trivial $X(x) = 0$. Caso (iii) quando $K<0$. Novamente começamos com

$\kappa = -\lambda^2$, $\lambda > 0$. $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$, cuja equação característica é $r^2 + \lambda^2 = 0$, ou $r = \pm \lambda i$. A solução geral: $X(x) = C_1 e^{i\lambda x} + C_2 e^{-i\lambda x}$ ou:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \operatorname{sen} \lambda x.$$

Aplicando as condições de fronteira temos $X(0) = X(L) = 0$ que implica que: $C_1 = 0$ e $C_2 \operatorname{sen}(\lambda L) \neq 0$, para que isto aconteça deve ser $\lambda L = n\pi$, i.é. $\lambda = n\pi/L$ ou $\kappa = -(n\pi/L)^2$. Assim, $X_n(x) = a_n \operatorname{sen}(n\pi/L)x$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Para $T'(t) - \beta \kappa T(t) = 0$, $\kappa = -\lambda^2$. Re-escrevendo esta equação como: $T' + \beta \lambda^2 T = 0$ ou $T' = -\beta \lambda^2 T$. Vemos que as soluções são da forma:

$$T_n(t) = b_n e^{-\beta (n\pi/L) t}$$

$$u(x,t) = \Sigma u_n(x,t), \text{ para todo } n.$$

Mais precisamente,

$$u(x,t) = \sum_1^{\infty} C_n e^{-\beta (n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}(n\pi/L)x$$

$$u(x,0) = \sum_1^{\infty} C_n \operatorname{sen}(n\pi/L)x = f(x).$$

Isto conduz novamente à questão se é possível representar a $f(x)$ por uma série de Fourier em senos.

Uma função de onda, em duas dimensões é uma função $f(x,y,t)$ solução da equação:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

onde v é uma constante (velocidade de propagação). Neste caso, existem 3 variáveis independentes, nomeadamente, as duas coordenadas espaciais x e y, e o tempo t. Por corda entende-se um fio fino e flexível. Supondo que, em estado de equilíbrio, a corda coincida com o eixo-x, nosso estudo limitar-se-á ao caso de pequenas oscilações transversais. Por transversal designa-se a oscilação que se realiza em um plano que contém o eixo-x e no qual cada elemento da corda se desloca perpendicularmente eixo-x. Representaremos por $u(x,t)$ o deslocamento transversal de cada ponto x da corda no instante t a partir da sua posição de equilíbrio. As seguintes hipóteses são necessárias para a fundamentação das considerações pre-

/ / Termos; Todas as forças de atrito, tanto internas quanto externas, não serão considerados. A força gravitacional é pequena quando comparada com as tensões na corda. As amplitudes $u(x,t)$ das oscilações e suas derivadas são pequenas, de modo que seus quadrados e produtos serão desprezados nos cálculos quando comparados com a unidade. Por último, o modelo matemático aparecerá. Iremos todas as forças atuando numa pequena seção da corda num certo instante T. Suponha que o perfil da corda no instante t seja dado pela figura abaixo, então o segmento $[x, x+\Delta x]$ se deformou no arco de curva M_1M_2. O comprimento do arco, no instante t é dado por:

$$S = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx$$

$$S \approx \Delta x$$

Desse modo quando se estuda pequenas oscilações não há variação no comprimento do segmento $[x, x+\Delta x]$. De modo que, pela Lei de Hooke, pode-se concluir que a intensidade da tensão, T, em cada ponto, não varia com o tempo, ou seja, que a variação da tensão durante o movimento não é levada em conta em relação à tensão de equilíbrio T_0. Aqui T_0 é a tensão a qual está submetido o segmento $[x, x+\Delta x]$ na posição de equilíbrio. É possível mostrar que a tensão T pode ser tomada como independente de x, isto é, pode-se considerá-la igual a tensão T_0. Daí, as forças que atuam sobre o arco M_1M_2 são as seguintes: As tensões $T(x)$, $T(x+\Delta x)$ tangenciais a corda. As forças externas: uma força externa poderia ser aplicada a qualquer ponto da corda em qualquer instante; alguns exemplos seriam: gravidade $F(x,t) = -mg$. Impulsos ao longo da corda em diferentes instantes de tempo. Assim como as forças de inércia: forças de atrito: $F(x,t) = -\beta u_t(x,t)$, $\beta > 0$. Forças restauradoras: $F(x,t) = -\gamma u(x,t)$ $\gamma > 0$, peso do segmento $[x, x+\Delta x]$: $F(x,t) = -Peso = -ma = -\rho(x)\Delta x\, u_{tt}(x,t)$. Como, por hipótese, o movimento é na direção perpendicular ao eixo-x e as forças externas e de inércia também tem direção perpendicular a esse eixo, deduz-se que o arco M_1M_2 não possui aceleração na direção do eixo-x, isto é, a resultante das forças na direção do eixo-x é nula. Então, representando por θ o ângulo agudo que a direção de T faz com o eixo-x no instante t, tem-se que:

$$T(x+\Delta x)\cos\theta(x+\Delta x) - T(x)\cos(x) = 0$$

Da hipótese de serem pequenas as oscilações obtem-se que

$$\cos\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\theta(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+(u_x)^2}} \cong 1$$

Resultando que

$$T(x+\Delta x) \cong T(x).$$

quaisquer que sejam os pontos da corda. Assim T não depende de x e será identificada com T_0 para todo x e todo t. Assim, pelo princípio de D'Alembert: "Num sistema material em movimento as forças nele aplicadas e as forças de inércia se equilibram". A equação diferencial para pequenas oscilações de uma corda será deduzida mediante a aplicação desse princípio. Para tanto serão explicitadas as forças que atuam na corda. Viu-se que, devido as condições impostas, as forças responsáveis pelo movimento são as componentes das tensões nas direções dos deslocamentos perpendiculares, as forças externas e as forças de inércia. Analisando essas forças obtem-se: 1. A resultante das tensões na direção perpendicular, no instante t, é dada por:

$$F_1 = T_0[\operatorname{sen}\theta(x+\Delta x) - \operatorname{sen}\theta(x)]$$

Sendo que

$$\operatorname{sen}\theta(x) = \frac{tg\,\theta(x)}{\sqrt{1+tg^2\theta(x)}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+(u_x)^2}} \cong u_x$$

$$F = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] = T_0\int_x^{x+\Delta x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx$$

A resultante das forças externas na direção perpendicular, no instante t, é dada por:

$$F_2 = \int_x^{x+\Delta x} p(x,t)\,dx.$$