Carlos Guilherme Almeida Santos
20150465

/ /

Números Complexos

Um número complexo pode ser representado por uma expressão da forma $a + bi$, onde a e b são números reais e i é um símbolo com a propriedade de que $i^2 = -1$. Além disso, o número complexo $a + bi$ também pode ser representado pelo par ordenado (a, b) e desenhado como ponto em um plano (chamado de plano de Argand). Assim, o número complexo $i = 0 + 1 \cdot i$ é identificado com o ponto $(0, 1)$.

A parte real do número complexo $a + bi$ é o número real a e a parte imaginária é o número real b. Desse modo, a parte real de $4 - 3i$ é 4 e a parte imaginária é -3.

Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ são iguais se $a = c$ e $b = d$, isto é, se suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais. No plano de Argand, o eixo horizontal é denominado eixo real, ao passo que o eixo vertical é chamado de eixo imaginário.

A soma e a diferença de dois números complexos são definidas pela soma ou subtração de suas partes reais e imaginárias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por exemplo:

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i$$
$$(1 - i) + (4 + 7i) = 5 + 6i$$

O produto de dois números complexos é definido de forma que as propriedades comutativa e distributiva usuais sejam válidas:

$$(a+bi)(c+di) = a(c+di) + (bi)(c+di)$$
$$= ac + adi + bci + bdi^2$$

Uma vez que $i^2 = -1$, isso se torna:

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Abaixo segue um exemplo:

$$(-1+3i)(2-5i) = (-1)(2-5i) + 3i(2-5i)$$
$$= (-2+5i+6i-15(-1)) = 13+11i$$

A divisão entre números complexos se parece muito com a racionalização do denominador de uma expressão racional. Para um número complexo $z = a+bi$, definimos seu complexo conjugado como $\bar{z} = a-bi$. Para encontrarmos o quociente de dois números complexos multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador:

$$\frac{-1+3i}{2+5i} = \frac{-1+3i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{13+11i}{2^2+5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$

Forma Polar

Qualquer número complexo $z = a+bi$ pode ser considerado como um ponto (a,b) e que esse ponto pode ser representado em coordenadas polares (r,θ) com $r \geq 0$. De fato,

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\,\text{sen}\,\theta$$
$$z = a+bi = (r\cos\theta) + (r\,\text{sen}\,\theta)i$$

Assim:

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

onde

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{e} \quad \text{tg}\,\theta = b/a$$

EDO's de 1ª ordem

As equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são da forma $F(x, y, y') = 0$, mas geralmente por meio de simples manipulação algébrica conseguem-se re-escrever na forma de uma ou mais equações:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

A chamada forma inversa da equação é:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$$

Qualquer solução implícita de uma das equações é solução da outra, se a inversa de uma solução explícita $y(x)$ da primeira equação existir, será solução $(x(y))$ da equação inversa. A equação pode ser também escrita na chamada forma diferencial.

$$f(x,y)\,dx - dy = 0$$

Existem em geral muitas soluções de uma equação diferencial de primeira ordem. Dado um valor inicial $y(x_0) = y_0$, é possível calcular a derivada y' no ponto x_0 (igual a $f(x_0, y_0)$ segundo a equação diferencial), e geralmente é possível encontrar uma curva (curva integral) que passe pelo ponto (x_0, y_0) e com derivada igual a $f(x,y)$ em cada ponto.

O problema de valores iniciais:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0$$

consiste em encontrar a curva integral (ou curvas integrais) que passa pelo ponto (x_0, y_0).

Existência e unicidade da solução

Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0$$

se a função e a derivada parcial de f em função de y são contínuas numa vizinhança do ponto (x_0, y_0), existe uma solução única $y = g(x)$ em certa vizinhança do ponto (x_0, y_0) que verifica a condição inicial $g(x_0) = y_0$.

O intervalo onde existe a solução única pode ser maior que o intervalo onde a função f e a sua derivada parcial $\partial f / \partial y$ são contínuas (o teorema não permite determinar o tamanho do intervalo).

As condições do teorema de Picard são condições suficientes, mas não necessárias para a existência de solução única. Quando f ou a sua derivada parcial $\partial f/\partial y$ não sejam contínuas, o teorema não nos permite concluir nada: provavelmente existe solução única a pesar das duas condições não se verificam.

EDO's de 1ª Ordem de Variáveis Separáveis

Uma equação é designada de variáveis separáveis, se poder ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Para resolver este tipo de equação primeiro observemos que a primitiva da função g(y) pode ser calculada da seguinte forma:

$$\int g(y)\,dy = \int g(y(x))\frac{dy}{dx}\,dx$$

A equação diferencial pode ser escrita como:

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

e a primitiva em ordem a x do lado esquerdo é igual à primitiva em ordem a y de g(y) como abaixo:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + C$$

As equações do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+C)$$

onde a e b são constantes, não são equações de variáveis separáveis mas podem ser reduzidas à elas por meio da seguinte substituição

$$v = ax+by+C \Rightarrow \frac{dv}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

O nome separável vem do fato de que a expressão do lado direito pode ser "separada" em uma função de x e uma função de y. Da mesma forma, se $f(y) \neq 0$, podemos escrever com forma separável.

Por exemplo:

$$y^2 dy = x^2 dx$$
$$\int y^2 dy = \int x^2 dx$$
$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C$$

onde C é uma constante qualquer (Poderíamos ter usado uma constante C_1 no lado esquerdo e outra constante C_2 no lado direito. Mas decidimos combiná-las em uma só constante no lado direito, fazendo $C = C_2 - C_1$).

Resolvendo para y, obtemos:

$$y = \sqrt[3]{x^3+K}$$

onde $K = 3C$. (Pois C é uma constante qualquer e o mesmo ocorre com K). Para $x=0$, temos $y(0) = \sqrt[3]{K}$. Para satisfazer a condição inicial $y(0)=2$, deve-se fazer $\sqrt[3]{K} = 2$ e assim $K = 8$. Portanto a solução final é:

$$y = \sqrt[3]{x^3+8}.$$