Carlos Luiz Guerra Almeida Santos
20150465

/ /

Equações Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes (2ª ordem)

Vimos que a equação linear de primeira ordem $dy/dx + ay = 0$ em que a é uma constante, possui a solução exponencial $y = c_1 e^{-ax}$ em $(-\infty, \infty)$. Portanto, é natural procurar determinar se soluções exponenciais existem em $(-\infty, \infty)$ para equações de ordem maior como:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

em que os a_i, $i = 0, 1, \ldots n$ são constantes. O fato surpreendente é que todas as soluções para: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ são funções exponenciais ou construídas a partir de funções exponenciais. Começamos considerando o caso especial da equação de segunda ordem:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Se tentarmos uma solução da forma $y = e^{mx}$, então $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2 e^{mx}$; assim a equação: $ay'' + by' + cy = 0$ torna-se:

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \text{ ou } e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

Como e^{mx} nunca se anula para valores reais de x, então a única maneira de fazer essa função exponencial satisfazer a equação diferencial é escolher m de tal forma que ele seja raiz da equação quadrática:

$$am^2 + bm + c = 0$$

Essa última equação é chamada de equação auxiliar ou equação característica da equação diferencial: $ay'' + by' + cy = 0$. Consideramos três casos, a saber: as soluções para a equação auxiliar correspondem a raízes reais distintas, raízes reais iguais e raízes complexas conjugadas.

Caso 1: Raízes Reais Distintas. Com a hipótese de que a equação auxiliar: $am^2 + bm + c = 0$ possui duas raízes reais distintas m_1 e m_2, encontramos duas soluções: $y_1 = e^{m_1 x}$ e $y_2 = e^{m_2 x}$.

Vimos que essas funções são linearmente independentes em $(-\infty, \infty)$ e portanto formam um conjunto fundamental. Segue-se que a solução geral para $ay'' + by' + cy = 0$ nesse intervalo é:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

Caso II: Raízes Reais Iguais. Quando $m_1 = m_2$, obtemos somente uma solução exponencial $y_1 = e^{m_1 x}$. Porém, segue-se imediatamente da discussão da Seção 4.2 que uma segunda solução é:

$$y_2 = e^{m_1 x}\int \frac{e^{-(b/a)x}}{e^{2m_1 x}}\,dx$$

Mas, da forma quadrática, temos que $m_1 = -b/2a$, pois a única maneira de ter $m_1 = m_2$ é ter $b^2 - 4ac = 0$. Em vista do fato de que $2m_1 = -b/a$, torna-se:

$$y_2 = e^{m_1 x}\int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}}\,dx = e^{m_1 x}\int dx = x\,e^{m_1 x}$$

A solução geral para: $ay'' + by' + cy = 0$ é então:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$$

Caso III: Raízes Complexas Conjugadas. Se m_1, m_2 são complexos, então podemos escrever: $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$.

Em que α e $\beta > 0$ são reais e $i^2 = -1$. Formalmente, não há diferença entre este caso e o Caso I, em que: $y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$.

Porém, na prática, preferimos trabalhar com funções reais em vez de exponenciais complexas. Para este fim, usamos a fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta.$$

em que θ é qualquer número real. Segue-se desta fórmula que:

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\,\text{sen}\,\beta x \quad e \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\,\text{sen}\,\beta x$$

em que usamos $\cos(-\beta x) = \cos\beta x$ e $\text{sen}(-\beta x) = -\text{sen}\,\beta x$. Note que somando e depois subtraindo as duas equações em: $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\,\text{sen}\,x\beta$ e $e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\,\text{sen}\,\beta x$, obtemos, respectivamente

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x \quad e \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i\,\text{sen}\,\beta x.$$

Como $y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$ é uma solução para (2) para qualquer escolha das constantes C_1 e C_2, fazendo $C_1 = C_2 = 1$ e $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, temos, nesta ordem, duas soluções:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} + e^{(\alpha - i\beta)x} \quad e \quad y_2 = e^{(\alpha + i\beta)x} - e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

mas,

$$y_1 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x \quad e$$

$$y_2 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2i\,e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x.$$

Portanto, pelo corolário (A) e o teorema 4.3, os dois últimos resultados mostram que as funções formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial em $(-\infty, \infty)$. Pelo princípio de superposição, a solução geral é: $y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x = e^{\alpha x}($...

... $C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$.

Equações Lineares de ordem 2

Uma equação diferencial linear de ordem n tem a forma geral:

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = g(x)$$

onde a_0 é diferente de zero (se não fosse, teríamos uma equação de ordem $n-1$). Por simplicidade estudaremos a equação de ordem 2, mas os resultados obtidos serão facilmente generalizados ao caso de ordem n. Dividindo os dois lados da equação linear de segunda ordem por a_0, obtém-se a forma padrão:

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x)$$

Se as funções $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$ são contínuas num intervalo (a, b), existe uma única solução da equação linear: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ no intervalo (a, b), que verifica as condições iniciais $y(c) = A$; $y'(c) = B$, para quaisquer números A, B e c (c dentro do intervalo (a, b)). Em contraste com o teorema de Picard para equações de primeira ordem, o intervalo onde se verificam as condições de existência e unicidade é exatamente o mesmo intervalo onde a solução é válida; portanto, neste caso as condições do teorema de existência e unicidade são condições suficientes e necessárias. No caso geral de ordem n, as condições iniciais serão o valor da função e das primeiras $n-1$ derivadas num ponto c, e as condições de existência e unicidade serão a continuidade das $n+1$ funções que aparecem na forma padrão da equação.

Dadas duas soluções particulares da equação linear, a diferença entre elas é solução da equação homogênea associada:

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$$

De maneira recíproca, qualquer soma de uma solução da equação linear mais uma solução da equação homogênea associada, é também solução da equação linear. Assim a solução geral pode ser obtida a partir de uma única solução particular, y_p, da equação mais a solução geral da equação homogênea associada, y_h: $y_g = y_p + y_h$. Para resolver uma equação linear começamos por resolver a equação linear homogênea associada e depois encontramos uma solução particular y_p.

/ /

A forma geral da equação linear homogênea de segunda ordem é: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Dadas duas soluções particulares y_1 e y_2, qualquer combinação linear das duas soluções: $C_1y + C_2y$ é também solução. Consequentemente as soluções da equação formam um espaço vetorial. Para determinar a solução geral bastará com determinar uma base do espaço vetorial, ou seja um conjunto com o número máximo possível de soluções particulares linearmente independentes. A continuação veremos como determinar se duas soluções são linearmente independentes.

Wronskiano

Diz-se que duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são linearmente dependentes se existem duas constantes C_1 e C_2 (pelo menos uma de elas diferente de zero) tal que:

$$C_1f + C_2g = 0$$

para qualquer valor de x. A derivada da expressão anterior é

$$C_1f' + C_2g' = 0$$

Para cada valor de x, as duas últimas equações são um sistema linear. O determinante do sistema é:

$$W[f, g] = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$$

e designa-se Wronskiano das funções f e g. Se o Wronskiano for diferente de zero num intervalo, as duas constantes serão nulas e as funções linearmente independentes no intervalo. Realmente também existem casos em que as funções linearmente independentes e o Wronskiano é nulo em alguns pontos isolados, mas esses casos não aparecem no estudo das soluções das equações lineares, como veremos na seguinte seção.

Se y_1 e y_2 são duas soluções particulares da equação linear homogênea:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

num intervalo (a, b), e se num ponto x_0 dentro do intervalo o Wronskiano das duas soluções é diferente de zero, então o Wronskiano será diferente de zero em qualquer outro ponto no intervalo (a, b) e as soluções serão linearmente independentes no intervalo.

Uma combinação linear das duas soluções é também solução; as condições iniciais para essa solução serão: $C_1y_1(c) + C_2y_2(c) = A$ e $C_1y_1'(c) + \ldots$

credeal

$\dots + C_2 y'_2(t_0) = B$, para quaisquer valores iniciais A e B existe sempre solução única C_1 e C_2, já que o determinante deste sistema linear é exatamente o Wronskiano das duas soluções, o qual é diferente de zero. Qualquer solução particular pode ser obtida a partir de uma combinação linear das duas soluções $y_g = C_1 y_1 + C_2 y_2$, sendo esta a solução geral.

Fórmula de Abel

Dada uma solução não-trivial da EDO: $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ em $\alpha < t < \beta$. Tem-se que $W[y_1, y_2](t) = C e^{-\int p(t)dt}$ onde C é uma constante conveniente. A fórmula de Abel permite obter a solução geral. De fato, se $y_1 \neq 0$ é uma solução de: $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, então toda solução $y_2(t)$ de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ deve satisfazer a equação dada pela fórmula de Abel

$$W[y_1, y_2](t) = C e^{-\int p(t)dt}, C \neq 0$$

onde: $y_1(t)y'_2(t) - y'_1(t)y_2(t) = C e^{-\int p(t)dt} \Rightarrow y'_2(t) - y'_1(t)/y_1(t) \cdot y_2(t) = C/y_1(t) \dots$ $\dots e^{-\int p(t)dt}$, então $\mu(t) = e^{-\int \frac{y'_1(t)}{y_1(t)} dt} = e^{-\int dt (\log|y_1(t)|)} = 1/|y_1(t)| \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mu(t) y_2(t)) = C/ \dots$ $\dots C/y_1^2(t)\, e^{-\int p(t)dt}$, onde obtem-se que: $y_2(t) = C y_1(t) \int^t e^{-\int p(s)ds} / y_1^2(s) ds + C_1 y_1(t)$, $C, C_1 \in \mathbb{R}$. Teorema: Se $y_1(t)$ é uma solução não-trivial de: $y'' + p(t)y' + \dots$ $\dots + q(t)y = 0$, então: $y_2(t) = y_1(t) \int^t e^{-\int p(s)ds} / y_1^2(s) ds$ é solução de $y'' + p(t)y' + \dots$ $\dots + q(t)y = 0$ em qualquer intervalo onde $y_1(t) \neq 0$. Além disso, $y_2(t)$ é L.I. de $y_1(t)$ e, portanto, a solução geral é dada por:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \; C_i \in \mathbb{R}$$

Exemplo: Dada a EDO: $t^2 y'' + t^3 y' - 2(1+t^2)y = 0$, $0 < t < +\infty$. Obtenha a solução geral. Tem-se que os coeficientes são polinomiais. Portanto, vamos tentar uma solução "compatível" com os, ou seja polinomial da forma (mais simples possível). $y(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Tomando $n = 0$; obtem-se que, $t^2(0) + t^3(0) - 2(1+t^2)(1) = \dots -2(1+t^2) \neq 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$. De modo que, $y_1 = 1$ não é solução da EDO. Tomando $n = 1$; obtem-se que $t^2(0) + t^3(1) - 2(1+t^2)(t) = -2t - t^3 = 0 \rightarrow t(2 + \dots + t^2) = 0 \rightarrow t = 0$!? Tomando $n = 2$; obtem-se que, $t^2(2) + t^3(2t) - 2(1+t^2)(t^2) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Logo, $y_1(t) = t^2$ é uma solução não-trivial da EDO. Colocando a EDO na forma que se pode aplicar a fórmula de Abel, o que é possível pois $t > 0$, ou seja na forma em que se pode determinar o coeficiente $p(t)$: $y'' + ty' - 2(1+t^2)/t^2 \, y = 0$, $0 < t < +\infty$, obtem-se que $y_2(t) = t^2 \int^t e^{-\int s\, ds} / (s^2)^2 ds = t^2 \int^t s^{-4} e^{-s^2/2} ds$, é solução L.I. com $y_1(t) = t^2$.