Carlos Luilguer Almeida Santos
20150465

EDO's lineares de 2ª ordem não homogêneas

Vimos, anteriormente, como resolver uma certa classe de equações de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes. Vamos considerar, agora, o caso não-homogêneo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = g(t)$$

O termo $g(t)$ pode representar alguma influência externa sazonal no sistema, como a radiação solar, que varia conforme o dia e a hora, ou um campo magnético, ou alguma ação mecânica. Veremos, primeiro, como resolver algumas situações abstratas. Em seguida, aplicaremos as idéias desenvolvidas para estudar um exemplo clássico de ressonância em sistemas mecânicos. A idéia da resolução da equação não-homogênea passa pelo princípio de superposição para equações homogêneas. Considere a equação não-homogênea:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = g(t)$$

e suponha que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam duas soluções desta equação. Defina $x_h(t) = x_2(t) - x_1(t)$. Então, $d^2x_h/dt^2 + b\,dx_h/dt + cx_h = d^2(x_2-x_1)/dt^2 + b\,d(x_2-x_1)/dt + c(x_2-x_1) = d^2x_2/dt^2 - d^2x_1/dt^2 + b\,dx_1/dt + cx_2 - cx_1 = g(t) - g(t) = 0$. Assim, temos que a diferença $y(t)$ entre duas soluções da equação não-homogênea satisfaz a equação homogênea: $\frac{d^2x_h}{dt^2} + b\frac{dx_h}{dt} + cx_h = 0$.

Agora, podemos reescrever a relação $x_h(t) = x_2(t) - x_1(t)$ na forma $x_2(t) = x_h(t) + x_1(t)$. Já vimos como achar a solução geral da equação homogênea. A relação acima nos diz, então, que para acharmos todas as soluções da equação não-homogênea basta acharmos apenas uma solução, digamos $x_1(t)$, e somar a ela a solução geral da equação homogênea, dando todas as possíveis soluções da não-homogênea.

Uma notação particular tradicional é $x_p(t)$ da equação não-homogênea, de forma que a solução geral da equação não-homogênea pode ser escrita como $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, onde $x_h(t)$ é a solução geral da equação homogênea associada. Mas isso não resolve de todo o problema, pois ainda não sabemos como achar a solução particular. A ideia acima diz que basta acharmos uma para termos todas, mas ainda precisamos de um método para acharmos pelo menos uma. A ideia para acharmos uma solução particular é procurar a solução de uma forma apropriada, dependendo do tipo do termo não-homogêneo. Por exemplo, se o termo não-homogêneo for uma exponencial, vamos procurar uma solução particular da forma exponencial. Se ele for uma combinação de senos e cossenos. Se ele for um polinômio, procuramos um outro polinômio como solução particular. E assim por diante. Mas isso não é tão arbitrário assim. Por exemplo, se o termo não-homogêneo for apenas um seno, não teríamos sucesso garantido procurando uma solução da forma seno. A razão por trás disso é que o "espaço de senos" não é invariante por derivação, a derivada de um seno é um cosseno. O mais garantido é procurar uma solução como combinação de senos e cossenos, que é invariante por derivação. Da mesma forma, o espaço de polinômios e o espaço de exponenciais também são invariantes por derivação. Vamos resolver essas situações caso a caso. Vamos considerar o problema: $x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}$. Como $g(t) = 2e^{3t}$ é do tipo exponencial, vamos procurar uma solução também da forma exponencial: $x_p(t) = Ae^{3t}$.

Nesta busca, mantivemos o coeficiente 3 na potência, pois esta potência não será alterada ao derivarmos essa função. Já o termo A será determinado pela equação. A ideia é determinar A para o qual $x_p(t)$ é solução da equação não-homogênea. Para isso, vamos substituir x por x_p no lado direito da equação, o que nos dá:

$$x_p'' - 3x_p' + 2x_p = 9Ae^{3t} - 9Ae^{3t} + 2Ae^{3t} - 2Ae^{3t}.$$

Observe que o resultado é uma exponencial, apenas ~~como~~ com coeficiente multiplicativo diferente. Agora igualamos esse resultado ao lado direito da equação: $x_p'' - 3x_p' + 2x_p = 2Ae^{3t} = 2e^{3t}$.

Desta forma, vemos que x_p é solução da equação não-homogênea no caso que $A = 1$. Portanto, $x_p(t) = e^{3t}$ é solução particular.

da equação não-homogênea. Para escrevermos a solução geral, devemos resolver o problema homogêneo. A equação característica é $r^2 - 3r + 2r$, que tem como raízes $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$. Logo, a solução geral da equação homogênea é: $x_h(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$. Então a solução geral da equação não-homogênea é:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + e^{3t}$$, onde C_1 e C_2 são parâmetros reais arbitrários.

Método dos coeficientes indeterminados

Consideramos as equações diferenciais lineares de coeficientes constantes:

$$y'' + by' + cy = f(x)$$

Para algumas funções $f(x)$ é fácil descobrir uma solução particular da equação; vamos considerar alguns casos e depois generalizaremos o método. Por exemplo a equação: $y'' + 3y' + 2y = 2e^{3x}$. Como as derivadas da função exponencial são múltiplos da própria função, esperamos que existam soluções particulares da forma: $y = Ae^{3x}$ onde A é um coeficiente a ser determinado. As derivadas da função são: $y' = 3Ae^{3x}$, $y'' = 9Ae^{3x}$ e substituindo na equação diferencial: $y'' + 3y' + 2y = 20Ae^{3x}$ e para que a função seja solução da equação, A deverá ser igual a $0,1$. Consideremos agora uma equação em que o lado direito é um polinômio: $y'' - 4y' + 2y = 2x^2$. O lado direito é um polinômio de segundo grau. Se y fosse igual a x^2, obtínhamos o lado direito a partir do termo $2y$ no lado esquerdo; mas as derivadas de x^2 darão um termo dependente de x e uma constante; para anular esses termos que não aparecem no lado direito, incluímos os mesmos na função y, multiplicados por coeficientes que serão logo determinados; $y = A + Bx + Cx^2$ e substituindo na equação diferencial: $y'' - 4y' + 2y = 2C - 4B + 2A + (2B - 8C)x + 2Cx$ para que este último polinômio seja igual a $2x^2$ (para qualquer valor de x) é necessário que os coeficientes A, B e C verifiquem as seguintes equações: $2C = 2$; $2B - 8C = 0$; $2A - 4B + 2C = 0$ e a solução deste sistema dá os coeficientes que definem a solução particular $y_p = 7 + 4x + x^2$. Por outro lado, $y'' - 3y' + 2y = 10\,\text{sen}(2x)$. O termo $2y$ conduziria ao lado direito, se $y = 5\cos(2x)$; mas como as derivadas do co-seno são o seno e o co-seno, admitimos a seguinte forma para a solução

$y_p = A\cos(2x) + B\,\text{sen}(2x)$, substituindo na equação diferencial obtemos: $y'' - 3y' + 2y = (-4A - 6B + 2A)\cos(2x) + (-4B + 6A + 2B)\,\text{sen}(2x)$, como o seno e o co-seno são funções linearmente independentes, esta última combinação linear deles só poderá ser igual a $10\,\text{sen}(2x)$ se: $-4A - 6B + 2A = 0$; $-4B + 6A + 2B = 0$. A solução deste sistema é $A = -0,5$, $B = 1,5$ e a solução particular é $y = -0,5\cos(2x) + 1,5\,\text{sen}(2x)$. Nos três exemplos anteriores, a solução procurada foi uma combinação linear de algumas funções linearmente independentes com tantos coeficientes indeterminados quantos funções houver. Comparando os coeficientes de cada função encontra-se uma equação linear por cada coeficiente. No entanto, se alguma das funções independentes fosse também solução da equação homogênea correspondente, a equação dada não terá solução como podemos ver no seguinte exemplo: $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$, usando o método do primeiro exemplo: $y = Ae^{-x} \Rightarrow y'' - 3y' - 4y = (A + 3A - 4A)e^{-x} = 0$ a solução particular neste caso tem a forma: $y = Axe^{-x}$, onde A pode ser determinado por substituição na equação, já que neste caso a função anterior não é solução da equação homogênea (se fosse, teríamos multiplicado mais uma vez por x). O método do coeficientes indeterminados pode ser usado também quando o lado direito for um produto dos três primeiros casos; por exemplo a equação: $y'' - 6y' + 9y = (2+x)e^{3x}\cos(2x)$. A solução particular tem a forma: $y = (A + Bx)e^{3x}\cos(2x) + (C + Dx)e^{3x}\,\text{sen}(2x)$, mas se o lado direito fosse, por exemplo: $y'' - 6y' + 9y = (2+x)e^{3x}$, nesse caso a solução teria a forma: $y = (Ax^2 + Bx^3)e^{3x} + (Cx^2 + Dx^3)e^{3x}$. Foi preciso multiplicar os dois lados da equação linear de segunda ordem duas vezes por x já que as funções e^{3x} e xe^{3x} são soluções da equação homogênea correspondente. O método dos coeficientes indeterminados é útil no caso de equações de coeficientes constantes ou equação de Euler e quando o lado direito tiver a forma geral de alguma das funções consideradas acima. Para outros tipos de equações lineares será preciso usar outros métodos como, por exemplo, o método de variação de parâmetros que veremos numa seção posterior. As soluções de uma equação diferencial não homogênea não constituem um sub-espaço vetorial, pois uma combinação linear de duas soluções não é necessariamente solução da equação.

Método da redução de ordem

Algumas equações de segunda ordem, como a de um corpo de em queda livre com amortecimento e a da corda suspensa em repouso, podem ser reduzidas a equações de primeira ordem, através da introdução de novas variáveis dependentes e independentes. Levando em consideração uma resistência do ar proporcional à velocidade, temos, para a altitude $h = h(t)$ de um objeto em queda livre, a equação:

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg - \alpha\frac{dh}{dt}.$$

Introduzindo a variável: $v = dh/dt$, obtemos a equação de primeira ordem $m\,dv/dt = -mg - \alpha v$, que é separável. Fazendo $k = \alpha/m$, temos

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv.$$

Separando as variáveis, temos: $\frac{dv}{g+kv} = -dt$. Integrando, obtemos: $\frac{1}{k}\ln|g + kv| = C - t$. Logo:

$$|g+kv| = e^{kC}e^{-kt}$$

$$g+kv = \pm e^{kC}e^{-kt}$$

Resolvendo para v e usando $k = \alpha/m$:

$$v(t) = -\frac{g}{k} \pm \frac{e^{kC}}{k}e^{-kt}$$

Substituindo $\pm e^{kC}/k$ por uma nova constante C_2 diferente de zero e lembrando que $k = \alpha/m$, obtemos $v(t) = \underline{-gm} + C_2 e^{-\alpha t/m}$. A solução estacionária $v = -gm/\alpha$ pode ser incluída ao permitindo C_2 igual a zero. Uma outra maneira, mais fácil, de resolver a equação de primeira ordem para v é observando que ela é uma equação linear não-homogênea. De fato, fazendo novamente $k=\alpha/m$, temos: $dv/dt + kv = -g$. Multiplicando essa equação pelo fator de integração e^{kt} temos: $d/dt(ve^{kt}) = (dv/dt + kv)e^{kt} = -ge^{kt}$. Integrando, obtemos: $v(t)e^{kt} = C_2 - g/k\, e^{kt}$, Logo, $v(t) = C_2e^{-kt} - g/k$. Como $v = dh/dt$, podemos escrever: $dh/dt = C_2 e^{-kt} - g/k$. Para obtermos $h=h(t)$, basta integrarmos mais uma vez, obtendo a solução geral da equação do corpo em queda livre com resistência linear: $h(t) = C_1 - C_2/k\, e^{-kt} - g/k\, t$, onde C_1 e C_2 são constantes reais arbitrárias. Isso nos dá a família de todas as soluções possíveis para uma EDO linear não-homogênea.