Carlos Luiz Guer Almeida Santos
20150465

Equação de Bernoulli

Os Bernoullis foram uma família suíça de acadêmicos cujas contribuições à matemática, física, astronomia e história datam do século XVI ao século XX. Jacques, o primeiro dos dois filhos do patriarca homônimo Jacques Bernoulli, deu várias contribuições ao cálculo e à probabilidade. Originalmente, a segunda das duas divisões principais do cálculo era chamada de calculus summatorius. Em 1696, por sugestão de Jacques Bernoulli (filho) este nome foi mudado para calculus integralis, como é conhecido atualmente.
Assim a equação de Bernoulli ficou com a seguinte expressão:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + P(x)y = f(x)y^n$$

em que n é um número real qualquer, é chamada de equação generalizada de Bernoulli. Para $n=0$ e $n=1$ a equação: $\partial y/\partial x + P(x)y = \ldots f(x)y^n$ é transformada em uma equação linear em y. Entretanto, para o caso em que $y \neq 0$, a expressão: $\partial y/\partial x + P(x)y = f(x)y^n$ pode ser escrita como:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x)$$

Se fizermos $w = y^{1-n}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, então:

$$\frac{dw}{\partial x} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Logo, fazendo a substituição: $y^{-n}\,dy/\partial x + P(x)y^{1-n} = f(x)$ a equação transforma-se na equação linear:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x)$$

Ao final, resolvendo $\partial w/\partial x + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x)$ e em seguida

/ / fazendo $y^{1-n} = w$, obtemos uma das possíveis soluções para a equação na forma: $dy/dx + \dots$
$\dots + P(x)y = f(x)y^n$.
Por exemplo:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

Solução: Em: $dy/dx + P(x)y = f(x)y^n$, identificamos $P(x) = 1/x$, $f(x) = x$ e $n = 2$. Logo, a mudança de variável $w = y^{-1}$ nos dá:

$$\frac{dw}{dx} - \frac{1}{x}w = -x$$

O fator de integração para a equação linear obtida com a substituição $w = y^{-1}$ em, digamos, $(0, \infty)$ é:

$$e^{-\int dx/x} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = x^{-1}$$

assim:

$$\frac{d}{dx}[x^{-1}w] = -1$$

Integrando essa última forma, obtemos:

$$x^{-1}w = -x + C \quad \text{ou} \quad w = -x^2 + Cx$$

como $w = y^{-1}$, então $y = 1/w$ ou:

$$y = \frac{1}{-x^2 + Cx}$$

Para $n > 0$, note que a solução trivial $y = 0$ é uma solução para: $dy/dx + P(x)y = f(x)y^n$. No presente exemplo, $y = 0$ é uma solução singular para a equação dada: $dy/dx + 1/x\, y = xy^2$.

Logo, um tipo de equação diferencial que pode ser reduzida a equação linear, equação de Bernoulli, definida como $dy/dx + p(x)y^n = f(x)y$ onde n é um número racional, diferencial de 0 e de 1. A substituição $v = y^{1-n}$ ⇒ $v' = (1-n)y^{-n}y'$ transforma a equação de Bernoulli numa equação linear.

Equação de Ricatti

Jacob Francesco Ricatti (1676-1754). Um conde italiano, Ricatti foi também matemático e filósofo. Assim, a equação diferencial não-linear:

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

é chamada de equação de Riccati. Se y_1 é uma solução particular para: $(dy/dx = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2)$, então as substituições $y = y_1 + u$ e $dy/dx = dy_1/dx + du/dx$ em: $dy/dx = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$ produzem a seguinte equação diferencial para u:

$$\frac{du}{dx} - (Q + 2y_1R)u = Ru^2$$

Assim a equação: $dy/dx = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$ com a substituição em u, fica como sendo uma equação de Bernoulli: $du/dx - (Q + 2y_1R)u = Ru^2$ com $n = 2$, ela pode, por sua vez, ser reduzida à equação linear:

$$\frac{dw}{dx} + (Q + 2y_1R)w = -R$$

através da substituição $w = u^{-1}$. Assim, em muitos casos, uma solução para uma equação de Riccati não pode ser expressa em termos de funções elementares.

Por exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2xy + y^2$$

Solução: Primeiro, fazemos a identificação $f(y') = (1/2)(y')^2$, o que implica $f(t) = (1/2)t^2$. Segue-se da discussão precedente que uma família de soluções é: $y = (x + 1)/2\,C^2$.

Como $f'(t) = t$, uma solução singular é:

$$x = -t,\ y = \tfrac{1}{2}t^2 - t \times t = -\tfrac{1}{2}t^2$$

Depois de eliminar o parâmetro, vemos que esta última solução é a mesma que:

$$y = -\tfrac{1}{2}x^2$$

Percebemos facilmente que esta função não faz parte da família de soluções para $y = -x^2/2$, o que graficamente representa uma parábola com concavidade voltada para baixo.

Equação de Clairaut

/ /

Alex Claude Clairaut (1713-1765). Nascido em Paris em 1713, Clairaut foi uma criança prodígio que escreveu seu primeiro livro sobre matemática aos 11 anos. Foi um dos primeiros a descobrir soluções singulares para equações diferenciais. Como muitos matemáticos de sua época, Clairaut foi também físico e astrônomo.

Assim, sua equação ficou com a seguinte expressão:

$$y = xy' + f(y')$$

Para a equação $y = xy' + f(y')$ uma solução possível é a família de retas $y = cx + f(c)$, em que c é uma constante arbitrária. Por outro lado, a expressão: $y = xy' + f(y')$, pode também possuir uma solução em forma paramétrica:

$$x = -f'(t), \quad y = f(t) - tf'(t)$$

Essa última solução é singular, pois, se $f''(t) \neq 0$, ela ~~m~~ não pode ser obtida da família de soluções $y = cx + f(c)$.

Por exemplo: $y = xy' + 1/2\,(y')^2$. Primeiramente, fazemos a identificação $f(y') = (1/2)(y')^2$, o que implica $f(t) = (1/2)t^2$. Segue-se da discussão precedente que uma família de soluções é: $y = cx + \frac{1}{2}c^2$. Como $f'(t) = t$, uma solução singular é obtida de: $x = -f'(t)$, $y = f(t) - tf'(t)$, assim: $x = -t$, $y = \frac{1}{2}t^2 - t\,x\,t = -1/2\,t^2$. Depois de eliminar o parâmetro, vemos que a solução é a mesma que $y = -1/2\,x^2$. Graficamente, representa uma parábola com concavidade voltada para baixo, assim esta função não faz parte da família de soluções triviais.

Exemplo: $\partial y/\partial x = 2 - 2xy + y^2$. Verifica-se facilmente que $y_1 = 2x$ é uma solução particular para uma equação. Em: $\partial y/\partial x = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$, fazemos as identificações $P(x) = 2$, $Q(x) = -2x$ e $R(x) = 1$. Resolvemos então a equação linear: $\partial w/\partial x + (-2x + 4x)w = -1$ ou $\partial w/\partial x + 2xw = -1$. O fator de integração para essa última equação é e^{x^2}, assim: $d/dx[e^{x^2}w] = -e^{x^2}$.

Agora, a integral $\int^x e^{t^2}dt$ não pode ser expressa em termos de funções elementares. Portanto, escrevemos: $e^{x^2}w = -\int_{x_0}^{x} e^{t^2}dt + c$ ou $e^{x^2}(1/u) = -\int_{x_0}^{x} e^{t^2}dt + c$. ~~ab~~ Assim, $u = \dfrac{e^{x^2}}{c - \int_{x_0}^{x} e^{t^2}dt}$. Uma solução para a equação: $dy/dx = 2 - 2xy + y^2$ é então: $y = 2x + u$.

Transformações

Até o momento, vimos que em certas situações uma equação diferencial pode ser transformada, por meio de uma substituição, em uma forma em que era possível resolvê-la por um método padrão. Uma equação pode parecer diferente de todas as que vimos e estudamos, mas à mudando a variável, talvez um problema aparentemente difícil possa ser facilmente resolvido. Embora não haja uma regra geral que indique qual substituição deve ser feita, um axioma prático é o seguinte: Tente alguma coisa! Algumas vezes custa caro ser engenhoso.

Por exemplo: $y(1+2xy)dx + x(1-2xy)dy = 0$, não é separável, homogênea, exata, linear ou Bernoulli. Porém, se olharmos bem a equação, podemos ser impelidos a tentar a substituição:

$$u = 2xy \quad \text{ou} \quad y = u/2x$$

$$dy = \frac{x\,du - u\,dx}{2x^2}$$

Assim, após algumas simplificações a equação se torna: $2u^2dx + (1-u)x\,du = 0$. Percebemos que a última equação é separável, e daí,

$$2\frac{dx}{x} + \frac{1-u}{u^2}\,du = 0$$

implica em: $2\ln|x| - u^{-1} - \ln|u| = c$

$$\ln\left|\frac{x}{2y}\right| = c + \frac{1}{2xy}$$

$$\frac{x}{2y} = c_1 e^{1/2xy}$$

$$x = 2c_1 y e^{1/2xy}$$

em que e^c foi trocada por c_1. Podemos também trocar $2c_1$ por c_2 se desejarmos. Note que a equação diferencial do exemplo acima possui a solução trivial $y = 0$, mas essa função não está incluída na família a um parâmetro de soluções conhecidas.