Carlos Luilguer Almeida Santos
20150465

Transformada de Laplace de funções contínuas por partes e funções impulso.

Nas aulas anteriores, apresentamos a transformada de Laplace e vimos como ela pode ser usada para resolver um problema de valor inicial com coeficientes constantes. Em todos os exemplos que apresentamos, consideramos funções de entrada (termo do lado direito da EDO) contínuas. Uma das grandes vantagens da transformada de Laplace é que ela também pode ser usada quando a função de entrada é descontínua ou impulsiva. Um tipo importante de descontinuidade que surge, por exemplo na análise de circuitos elétricos, é o de primeira espécie, ou seja, quando a função é contínua exceto por um número finito de "saltos". Podemos operar de forma eficiente com esse tipo de descontinuidade usando a função: A função degrau unitário, denotada por u_c, é definida por:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$

Em particular, escrevemos $u = u_0$. A transformada da função degrau (u_c), para $c > 0$, é:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$$

Considerando agora uma função g dada por:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ f(t-c), & t \geq c, \end{cases}$$

em que f é uma função contínua definida para todo $t \geq 0$. Note que g possui um "salto" em $t = c$. A função g pode ser interpretada como a translação de f. Em termos da função degrau, podemos escrever: $g(t) = u_c(t) f(t-c)$. Desse modo, temos o resultado: Se $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$ existe para $s > a \geq 0$ e se $c > 0$, então

$\mathcal{L}\{u_c(t) f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs}F(s)$, $s > a$. Inversamente, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, então $u_c(t)f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}$. Em uma equação linear não homogênea o lado direito pode ser considerado como a entrada num sistema linear que verifica o princípio de sobreposição. Quando a entrada é descontínua, a saída é contínua pois a solução de uma equação diferencial é uma função derivável. O método da transformada de Laplace é principalmente útil para resolver equações diferenciais com entrada descontínua, já que a transformada de uma função parcelarmente contínua é uma função contínua. Para representar funções descontínuas é conveniente definir a função degrau unitário (também conhecida por função de Heaviside):

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

Se $a < b$, a função:

$$u(t-a) - u(t-b)$$

é igual a 1 no intervalo $a < t < b$ e zero fora do intervalo. Assim, uma função definida em forma diferente em diferentes intervalos, por exemplo,

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & a \leq t < b \\ f_2(t) & c \leq t < d \end{cases}$$

pode ser escrita na forma compacta:

$$f(t) = [u(t-a) - u(t-b)]f_1(t) + [u(t-c) - u(t-d)]f_2(t)$$

facilitando o cálculo da sua transformada de Laplace, por meio da propriedade que veremos na seção que se segue.

Deslocamento no domínio do tempo: a função, $u(t-a)f(t-a)$ onde $u(t-a)$ é a função degrau unitário, representa a função $f(t)$ deslocada uma distância a no eixo do tempo t, sendo nula para $t < a$. A sua transformada de Laplace calcula-se facilmente, em função da transformada de f:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = \int_a^{\infty} f(t-a)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} f(r)\, e^{-(r+a)}\, dr$$

$$= e^{-as}\int_0^\infty f(r)\,e^{-sr}\,dr$$

E obtemos a propriedade de deslocamento em t:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Esta propriedade é útil para calcular transformadas de funções com descontinuidades. Uma outra forma equivalente é a seguinte:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

Por exemplo, resolver o problema de valores iniciais: $y'' + 3y' + 2y = t$ para $t < 1$ e $-t$ para $1 \leq t$; $y(0) = y'(0) = 0$. Começamos por escrever o lado direito da equação na forma compacta: $y'' + 3y' + 2y = [1 - u(t-1)]t - tu(t-1) = t - 2tu(t-1)$. A transformada de Laplace do lado esquerdo é: $\mathcal{L}\{y'' + 3y' + 2y\} = (s^2 + 3s + 2)Y(s)$. Usando a propriedade de deslocamento em t, a transformada do lado direito é: $\mathcal{L}\{t - 2tu(t-1)\} = 1/s^2 - 2e^{-s}\mathcal{L}\{t+1\} = 1/s^2 - 2e^{-s}/s - 2e^{-s}/s^2$. Igualando as transformadas dos dois lados da equação diferencial, podemos obter facilmente Y:

$$Y = \frac{1 - 2e^{-s}}{s^2(s+1)(s+2)} - \frac{2e^{-s}}{s(s+1)(s+2)}$$

Usando decomposição em frações parciais:

$$\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)}$$

$$\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2s^2} - \frac{3}{4s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{4(s+2)}$$

obtemos: $$Y = \frac{1}{2s^2} - \frac{3}{4s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{4(s+2)} + e^{-s}\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2(s+2)}\right)$$

a transformada inversa é: $y(t) = t/2 - 3/4 + e^{-t} - 1/4\,e^{-2t} + u(t-1)\left(1/2 - (t-1) - 1/2\,e^{-2(t-1)}\right)$. Em física uma força impulsiva é uma força $f(t)$ que atua durante um pequeno intervalo de tempo Δt. O aumento total da quantidade de movimento, devido à força $f(t)$, é igual ao impulso: $I = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t)\,dt$. Uma função de impulso unitário é uma função $f(t)$ que produz um impulso igual a 1: $\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t)\,dt = 1$. Um exemplo é a função:

$$\frac{u(t-t_0) - u(t-t_0-\Delta t)}{\Delta t}$$

constante no intervalo $t_0 \leq x < t_0 + \Delta t$. Consideremos uma sucessão de impulsos unitários f_n com intervalos Δt_n decrescentes. Por exemplo, as funções: $f_n = n[u(t-t_0) - u(t-t_0-1/n)]$.

onde u é a função degrau unitário. Nesse exemplo cada função f_n é igual a n no intervalo de t entre a e $a+1/n$, zero fora dele. O intervalo de duração do impulso é $\Delta t_n = 1/n$ e a função f_n é um impulso unitário. A medida que n aumenta, o gráfico da função f_n é cada vez mais alto, e dentro de um intervalo mais pequeno. O limite de uma sucessão de impulsos unitários com intervalos decrescentes, aproximando-se para zero, é designado função delta de Dirac: $\delta(t-t_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$

a função δ é nula em qualquer ponto diferente de t_0, infinita em t_0 mas o seu impulso é igual a 1. A função delta de Dirac não é realmente uma função mas sim um funcional (limite de funções), e daí que o seu integral possa ser diferente de zero enquanto que a função é nula em qualquer ponto diferente de t_0. Uma propriedade importante da função delta de Dirac é o Teorema que se segue. Se $f(t)$ é uma função contínua em t_0,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

Para resolver equações diferenciais onde apareçam termos impulsivos, será útil conhecer a Transformada de Laplace; para o cálculo substituiremos a função delta pelo limite da sucessão de impulsos unitários: $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\{n[u(t-t_0) - u(t-t_0-1/n)]\} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{s}\left[e^{-t_0 s} - e^{-(t_0+1/n)s}\right]$, portanto, $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-t_0 s}$

As propriedades da Transformada de Laplace e as Transformadas das funções que temos calculando neste capítulo encontram-se resumidos na Tabela 8.1 (referência do livro). A quantidade dum medicamento no sangue de um paciente, decresce exponencialmente:

$$y = y_0 e^{-t/a}$$

onde y é a quantidade, em gramas, do medicamento no instante t, y_0 é a quantidade inicial, e a é a constante de decaimento do medicamento no sangue. O paciente recebe duas injeções do medicamento, com doses de y_1 e y_2 gramas, nos instantes t_1 e t_2 (com $t_2 > t_1 > 0$). Calcula a quantidade de medicamento no sangue do paciente, em função do tempo, admitindo que em $t = 0$ ~~não~~ existia nenhum medicamento no sangue do paciente. A massa do medicamento introduzido em cada injeção é $\Delta y = f \Delta t$, onde f é uma função que depende do tempo (fluxo de medicamento que entra no sangue do paciente, em gramas por unidade de tempo): $\Delta y / \Delta t = f(t)$. A transformada de Laplace de um produto de duas funções não é igual ao produto das transformadas de Laplace das duas funções. No entanto, existe uma operação entre funções que, quando transformada, dá o produto das transformadas das duas funções. Essa operação entre funções é designada convolução e joga um papel importante no cálculo de transformadas inversas, como veremos.

O produto de convolução entre duas funções $f(t)$ e $g(t)$ define-se da seguinte forma: $f * g = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$. A transformada de Laplace da convolução entre duas funções f e g, é igual ao produto das transformadas de Laplace das duas funções. A partir das definições da T.L. e do produto de convolução, obtemos: $\mathcal{L}\{f * g\} = \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, e^{-st}\, d\tau\, dt$. O integral em τ pode ser ~~[illegible]~~ estendido até infinito, se multiplicarmos por uma função degrau unitário que anule a parte desde t até infinito: $\mathcal{L}\{f * g\} = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)\, g(t-\tau)\, u(t-\tau)\, e^{-st}\, d\tau\, dt$ trocando a ordem dos dois integrais obtemos: $\mathcal{L}\{f * g\} = \int_0^\infty f(\tau) \left[\int_0^\infty g(t-\tau)\, u(t-\tau)\, e^{-st}\, dt \right] d\tau$. O termo entre parênteses quadrados é a transformada de Laplace da função g, deslocada em t: $g(t-\tau)\, u(t-\tau)$ que é igual à transformada de Laplace de g, multiplicando pela exponencial de $-s\tau$. Assim, obtemos o resultado: $\mathcal{L}\{f * g\} = G(s) \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau$ que é igual ao produto das transformadas de Laplace das duas funções, como pretendíamos demonstrar: $\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$.