Carlos Luilguer Almeida Santos
20150465

Séries de Fourier

Neste capítulo analisamos a série de Fourier que é um caso especial de séries de potências. A série de Fourier tem muitas aplicações na engenharia elétrica mas neste trabalho essas séries são usados apenas para resolver equações diferenciais parciais. Uma série formada por senos e cosenos é chamada de série trigonométrica. Assim, uma série trigonométrica assume a seguinte forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{Sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

A série anterior é chamada de série de Fourier de uma função $f(x)$ desde que essa série seja convergente. As séries de Fourier são análogas às séries de Taylor no sentido em que ambas séries fornecem uma forma de representar funções relativamente complicadas em termos de funções elementares e familiares. Se a série de Fourier converge então ela representa uma função $f(x)$ e podemos representar essa relação da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{Sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

Sabemos que para que uma função seja representável por uma série de potências as condições são as seguintes para um x real: A função deve ser infinitamente derivável. O resto da fórmula de Taylor deve tender para zero. Portanto, devemos observar que uma série trigonométrica pode ser convergente ou divergente. Exemplo 1: Séries trigonométricas convergentes e divergentes. Mostramos algumas séries trigonométricas e suas características de convergência.

1. A série trigonométrica com $a_m = b_m = 1/m^2$ para $m \neq 0$ e $a_0 = 0$ assume a seguinte forma:

$$\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \dots + \frac{1}{9}\cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + \frac{1}{9}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + \dots$$

Pode ser demonstrado que a série anterior converge para todos os valores de x.

2. A série trigonométrica com $a_m = 0$ e $b_m = 1/m$ assume a seguinte forma:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + \dots$$

Pode ser demonstrado que a série anterior converge para todos os valores de x exceto para $x = L/2$.

3. A série trigonométrica com $a_m = 1$ e $b_m = 0$ assume a seguinte forma:

$$\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + \dots$$

Pode ser demonstrado que a série anterior diverge para todos os valores de x exceto para $x = L/2$. As séries de Fourier são usados em aplicações tais como no método de separação de variáveis de equações diferenciais, na resolução de equações diferenciais parciais, na análise de circuitos elétricos em que as bipolos ativos são fontes periódica não senoidal pode ser substituída por uma série de Fourier (que está formado apenas por funções senoidais) e depois aplicar a teoria de corrente alternada para fontes de corrente alternada senoidal e o teorema da superposição para analisar esse tipo de circuito elétrico.

As séries de Fourier podem representar uma grande variedade de funções incluindo algumas funções descontínuas. Entretanto, não podemos esquecer que pela natureza da série de Fourier, ela pode representar somente funções periódicas com período T (o período T não necessariamente é o período original de $f(x)$, isto é, pode ser menor mas um múltiplo do período original). Periodicidade das funções seno e coseno: uma função $f(x)$ é chamada de periódica com período $T > 0$ se o domínio de $f(x)$ contém $x + T$ sempre que contiver x e se adicionalmente

$$f(x+T) = f(x)$$

para todo valor de x. Chamamos o T de período. A figura 1 mostra uma função periódica. Se T é o período de $f(x)$ então um múltiplo inteiro de T também é um período de T ($2T, 3T, 4T, \ldots$). Assim, o menor valor do período é chamado de período fundamental de $f(x)$. Também, a função constante é considerada periódica com qualquer período e sem período fundamental. As funções $\text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ e $\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ para $m = 1, 2, 3, \ldots$ são periódicas com período fundamental $T = 2L/m$. Para verificar essa característica lembremos que $\text{sen}\, x$ e $\cos x$ tem como período fundamental 2π e que $\text{sen}\, \alpha x$ e $\cos \alpha x$ tem período fundamental $2\pi/\alpha$. Assim, escolhendo $\alpha = m\pi/L$ verificamos que o período fundamental T de $\text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ e $\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ é dado por $T = 2\pi/ m\pi/L = 2L/m$. Adicionalmente, como todo múltiplo inteiro de um período também é um período então cada uma das funções $\text{sen}\left(m\pi/L\, x\right)$ e $\cos\left(m\pi/L\, x\right)$ tem um período comum $2L$. Também provamos facilmente que $T = 2L/m$ é um período de $\text{sen}\left(m\pi/L\, x\right)$ da seguinte forma:

$$f(x) = \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$f(x+T) = \text{sen}\left[\frac{m\pi}{L}\left(x + \frac{2L}{m}\right)\right] = \text{sen}\left[\frac{m\pi}{L}x + 2\pi\right] = \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$= f(x)$$

As funções u e v são chamadas de ortogonais no intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ se satisfazem a seguinte relação: $\int^{\beta} u(x)\, v(x)\, dx = 0$. Também, um conjunto de funções formam um conjunto ortogonal se cada par de funções diferentes pertencentes ao conjunto é ortogonal. Assim, as funções $\text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ e $\cos\left(m\pi/L\, x\right)$ para $m = 1, 2, 3, \ldots$ formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo $-L \leq x \leq L$. Podemos provar facilmente a validade das seguintes relações:

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \{0 \text{ para todo } m \text{ e } n$$

$$\int_{-L}^{L} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ L & \text{se } m = n \end{cases}$$

A validade dessas relações podem ser obtidos por integração direta. Na prova devemos usar as seguintes relações Trigonométricas:

$$\text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{1}{2}\left\{\cos\left[\frac{(m-n)\pi}{L}x\right] - \cos\left[\frac{(m+n)}{L}x\right]\right\}$$

$$\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{1}{2}\left\{\cos\left[\frac{(m+n)\pi}{L}x\right] + \cos\left[\frac{(m-n)\pi}{L}x\right]\right\}$$

$$\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{1}{2}\left\{\text{sen}\left[\frac{(m+n)\pi}{L}x\right] + \text{sen}\left[\frac{(m-n)\pi}{L}x\right]\right\}$$

que usaremos quando $m \neq n$. Para o caso particular em que $m = n$ as relações anteriores se reduzem às seguintes relações mais simples:

$$\text{sen}^2\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \frac{1}{2}\left\{1 - \cos\left[\frac{2m\pi}{L}x\right]\right\}$$

$$\cos^2\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \frac{1}{2}\left\{1 + \cos\left[\frac{2m\pi}{L}x\right]\right\}$$

$$\text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\left[\frac{2m\pi}{L}x\right]$$

Supor que a série de Fourier na forma anterior converge e, portanto, representamos a soma da série pela função $f(x)$ da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}\left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

Nesse contexto, pretendemos encontrar os coeficientes de a_m e b_m para uma função $f(x)$ especificada. Multiplicamos por $\cos(n\pi/L\, x)$ para um n fixo inteiro $(n \geq 0)$ e integramos em relação a x de $-L$ a L:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\pi/L\, x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos(n\pi/L\, x)\,dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Para n fixo e diferente de zero e para m variando assim como das relações de ortogonalidade e verificamos que o primeiro e último termo do lado direito da equação é sempre igual a zero e o segundo termo apresenta uma integral diferente apenas quando $m = n$ e, nesse caso, essa parcela da integral é igual a L. Assim, temos o seguinte:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = L a_n \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

que permite encontrar os coeficientes a_n para $n \neq 0$.
Assim para o b_m, multiplicamos por $\operatorname{sen}(n\pi/L\, x)$ para um n fixo inteiro $(n \geq 0)$ e integramos em relação a x de $-L$ a L temos o seguinte:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L}\cos(m\pi/L\, x)\operatorname{sen}(n\pi/L\, x)\,dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Para n fixo e diferente de zero e para m variando assim como das relações de ortogonalidade e verificamos que o segundo termo do lado direito de (3.20) é sempre igual a zero. A integral do primeiro termo é zero porque é uma função senoidal. O terceiro termo termo tem uma integral diferente de zero apenas $m = n$. Assim, (3.20) assume a seguinte forma:

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Portanto, a série converge-se, dessa forma, representa a função $f(x)$.