Carlos Luilguer Almeida Santos
20150465

/ /

Equações Diferenciais Parciais

Uma equação de derivadas parciais é uma relação entre as derivadas de uma função de várias variáveis. Alguns exemplos, que aparecem em diversos problemas, são as seguintes equações: Equação de transferência de calor, se $T(t, x)$ representa a temperatura num instante t, na posição x sobre uma barra, a equação de transferência de calor em uma dimensão é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a \partial^2 T}{\partial x^2}$$

onde a é uma constante. A função T é a variável dependente, e t e x são as variáveis independentes. Equação de onda, uma função de onda, em duas dimensões, é uma função $f(x, y, t)$ solução da equação:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

onde v é uma constante (velocidade de propagação). Neste caso, existem 3 variáveis independentes, ~~mas~~ nomeadamente, as duas coordenadas espaciais x e y, e o tempo t. Equação de Laplace, o potencial eletrostático $V(x, y, z)$, numa região onde não existem cargas, verifica a equação:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Os exemplos anteriores correspondem todos às equações lineares, nas quais uma combinação linear de soluções é também solução. As equações de derivadas parciais em que aparece uma única derivada, podem ser integradas facilmente. Consideremos por exemplo a equação:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 3y$$

Como a segunda derivada em ordem a x é igual à derivada da primeira derivada parcial em ordem a x, portanto, a derivada parcial $\partial v/\partial x$ será igual à primitiva de $3y$, ao longo de um percurso com y constante

Credeal

Digitalizado com CamScanner

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int 3y\, dx \quad (y \text{ constante})$$

$$= 3xy + f(y)$$

onde $f(y)$ pode ser qualquer função arbitrária que não dependa de x. Integrando uma segunda vez, com y constante, obtemos a função $v(x,y)$:

$$v = \frac{3}{2} y x^2 + x f(y) + g(y)$$

Esta relação é bastante geral, pois depende de duas funções arbitrárias f e g. Para obter uma solução única, será necessário saber algumas condições fronteira. As condições fronteira são tão importantes quanto a equação diferencial para determinar a forma da solução, já que com diferentes condições fronteira é possível obter soluções muito diversas.

As equações de derivadas parciais lineares com condições iniciais, podem ser resolvidas por meio da Transformada de Laplace. As condições iniciais (na variável t) para uma equação de ordem n em t, consistem nos valores da função e das suas primeiras $n-1$ derivadas no instante $t=0$. Se, por exemplo, a solução da equação for uma função de duas variáveis, $v(x,t)$, e a equação for de segunda ordem em t, as condições iniciais serão:

$$v(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

onde f e g são duas funções de x dadas. A transformada de Laplace de $v(x,t)$ será uma função $\bar{v}(x,s)$, definida por meio do seguinte integral:

$$\bar{v}(x,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} v(x,t)\, dx$$

As duas condições fronteira permitem calcular as transformadas das duas primeiras derivadas, usando a propriedade da transformada da derivada; o resultado obtido é:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial v}{\partial t}\right\} = s\bar{v}(x,s) - f(x)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right\} = s^2\bar{v}(x,s) = sf(x) - g(x)$$

Credeal

Digitalizado com CamScanner

/ /

Como x e t são variáveis independentes, e como a Transformada de Laplace foi definida em ordem a t, as ordem as derivadas em x e a Transformada de Laplace são independentes; por exemplo,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\{v(x,t)\} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{v(x,t)\} = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}$$

Um produto escalar entre duas funções f e g pode ser definido da seguinte forma:

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^L f(x)g(x)\,dx$$

propriedades: 1. $\langle f,g\rangle$ é um número real; 2. $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$; 3. $\langle cf,g\rangle = c\langle f,g\rangle$, para qualquer constante c; 4. $\langle f,g+h\rangle = \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle$; 5. se $f \neq 0 \Rightarrow \langle f,f\rangle > 0$.

Estas propriedades são idênticas às correspondentes propriedades do produto escalar entre vetores, e permitem definir o módulo de uma função e ângulos entre funções. O módulo da função é

$$|f| = \left(\langle f,f\rangle\right)^{1/2}$$

e duas funções f e g são ortogonais se: $\langle f,g\rangle = 0$. A seguinte sucessão de funções seno:

$$\left\{S_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}$$

são todas ortogonais; nomeadamente:

$$\langle S_n, S_m\rangle = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ L/2, & n = m \end{cases}$$

em relação ao produto escalar definido acima. Qualquer outra função definida no intervalo $0 < x < L$ é linearmente dependente do conjunto de funções S_n (com algumas exceções que serão analisados mais adiante); assim, qualquer função $f(x)$ definida no dito intervalo pode ser escrita como combinação linear da sucessão $\{S_n\}$:

$$f(x) = \sum_{n=1} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Digitalizado com CamScanner

A série anterior é designada por série seno de Fourier.
É fácil demonstrar (usando a ortogonalidade entre as funções S_n) que os coeficientes b_n na série são iguais a:

$$a_n = \frac{2}{L} \langle f, S_n \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

O integral anterior chama-se transformada seno de Fourier da $f(x)$.
Outra sucessão de funções ortogonais é a sucessão de funções co-seno, definida por:

$$\left\{ C_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right\}$$

A propriedade de ortogonalidade é:

$$\langle C_n, C_m \rangle = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ L/2, & n = m \neq 0 \ (\text{ou } L \text{ se } n = m = 0) \end{cases}$$

Qualquer função definida no intervalo $0 < x < L$ é linearmente dependente do conjunto de funções C_n (com algumas excepções que discutiremos).
Assim, uma função $f(x)$ pode também ser escrita como uma série co-seno de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

onde os coeficientes a_n são iguais a:

$$a_n = \frac{2}{L} \langle f, C_n \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

e o integral anterior designa-se transformada co-seno de Fourier da função $f(x)$. A transformada de Fourier é útil para resolver equações de derivadas parciais, de segunda ordem, com condições fronteira. Se $v(x,y)$ for a variável dependente, e tivermos condições fronteira para $x=0$ e $x=L$, começamos por definir a transformada de Fourier da seguinte forma

$$\bar{v}_n(y) = \frac{2}{L} \langle v(x,y), \phi_n(x) \rangle$$

onde ϕ_n será uma das seguintes funções próprias:

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\lambda_n x) \\ \cos(\lambda_n x) \end{cases}$$

Digitalizado com CamScanner

e λ_n são ~~os~~ estes valores próprios escolhidos em forma adequada (já veremos a seguir qual será a escolha apropriada em cada caso). A transformada da segunda derivada tem a propriedade importante (propriedade operacional) de depender da transformada da função. Por definição, a transformada da segunda ~~ordem~~ derivada parcial é:

$$\overline{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)}_n = \frac{2}{L}\left\langle \phi_n, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\rangle$$

integrando por partes duas vezes obtemos:

$$\overline{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)}_n = \frac{2}{L}\int_0^L \phi_n \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\phi_n\Big|_0^L - \int_0^L \phi_n' \frac{\partial v}{\partial x}\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\phi_n - v\phi_n'\right)\Big|_0^L + \frac{2}{L}\int_0^L \phi_n'' v\,dx$$

a segunda derivada das funções próprias é sempre (tanto no caso do seno como no caso do co-seno) proporcional a si própria:

$$\phi_n'' = -\lambda_n^2 \phi_n$$

Assim, a propriedade operacional é:

$$\overline{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)}_n = \frac{2}{L}\left(\frac{\partial v}{\partial x}(L)\phi_n(L) - v(L)\phi_n'(L) - \frac{\partial v}{\partial x}(0)\phi_n(0) + v(0)\phi_n'(0)\right)$$

$$-\lambda_n^2 \bar{v}_n$$

Como vamos resolver uma equação de segunda ordem, são dadas apenas duas condições fronteira que permitem calcular dois dos termos dentro dos parênteses. Podemos usar a liberdade que temos na escolha das funções e valores próprios, para eliminar os outros dois termos dentro dos parênteses: Existem quatro possibilidades: 1. Os valores de $v(0,y)$ e $v(L,y)$ são dados. Neste caso será necessário arbitrar $\phi_n(0) = \phi_n(L) = 0$. O qual determina as seguintes funções e valores próprios.

$$\phi_n(x) = \operatorname{sen}(\lambda_n x) \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

A transformada correspondente é a transformada seno de Fourier. 2. Os valores de $\partial v(0,y)/\partial x$ e $\partial v(L,y)/\partial x$ são dados. $\phi_n'(0) = \phi_n'(L) = 0$.

Digitalizado com CamScanner