Carlos Luilquer Almeida Santos
20150465

/ /

Método de Frobenius para solução em séries de EDO's de 2ª ordem

Quando o ponto $x=0$ é um ponto singular da equação diferencial, a solução y não é analítica em $x=0$ e não pode ser escrita na forma de uma série de McClaurin. No entanto, em alguns casos existe uma constante r tal que y/x^r é uma função analítica: $y(x)=x^r f(x)$ (f analítica em $x=0$), a série de McClaurin de f sim existe. Para saber em que casos isso acontece é preciso identificar a que tipo de singularidade corresponde $x=0$. Os pontos singulares da equação diferencial: $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$, são pontos x_0 onde $P(x_0)=0$. Se os seguintes limites existem:

$$A=\lim_{x\to x_0}\frac{xQ(x)}{P(x)} \qquad B=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2R(x)}{P(x)}$$

diz-se que o ponto x_0 é um ponto singular regular. Se $x=0$ for um ponto singular regular, existirá pelo menos uma solução da forma:

$$y(x)=x^r f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

A função $f(x)$ é analítica em $x=0$ e podemos admitir, sem perder nenhuma generalidade, que $f(0)$ é diferente de zero (se $f(0)$ for nula, fatoriza-se x, e redefinem-se r e f ficando $f(0)$ diferente de zero). Isso implica que a constante a_0 seja também diferente de zero:

$$a_0=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x^r}=f(0)\neq 0$$

As derivadas y' e y'' são:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

Para calcular o valor do índice r primeiro observamos que:

$$\lim_{x\to 0} x^{1-r}y'=r a_0$$

$$\lim_{x\to 0} x^{2-r} y'' = r(r-1)a_0$$

A seguir multiplicamos a equação diferencial por x^{2-r} e dividimos por P

$$x^{2-r}y'' + \frac{xQ}{P}x^{1-r}y' + \frac{x^2R}{P}x^{-r}y = 0$$

No limite $x=0$ e usando as constantes A e B definidos anteriormente, obtemos:

$$[r(r-1) + Ar + B]a_0 = 0$$

Como a_0 é diferente de zero, r deverá ser solução da chamada equação indicial:

$$r(r-1) + Ar + B = 0$$

Para cada raiz real r da equação indicial substituímos as séries para y, y' e y'' na equação diferencial e procedemos da mesma forma que no método das séries, para calcular os coeficientes a_n. Cada raiz conduz a uma solução; se as duas soluções forem diferentes, a solução geral será a combinação linear das duas. Exemplo: $4xy'' + 2y' + y = 0$. O ponto $x=0$ é um ponto singular e, portanto, não pode ser usado o método das séries. Para determinar se $x=0$ é ponto singular regular, calculamos: $A = \lim_{x\to 0} 4\cdot 2x/4x = 1/2$ $B = \lim_{x\to 0} x^2/4x = 0$. Podemos assim usar o método de Frobenius e a equação indicial é: $2r(r-1) + r = 0$ com raízes $r_1 = 0$ e $r_2 = 1/2$. Com a primeira raiz ($r_1=0$) temos que: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y' = \sum_{n=0} n a_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=0} n(n-1)a_n x^{n-2}$, substituindo na equação diferencial obtemos: $\sum_{n=0}^{\infty}[4n(n-1)a_n x^{n-1} + 2na_n x^{n-1} + a_n x^n] = 0$ os dois primeiros somatórios podem ser escritos em função de x^n: $\sum_{n=0}^{\infty}[4n(n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} + a_n]x^n = 0$ a fórmula de recorrência para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ é $(n+1)(4n+2)a_{n+1} + a_n = 0$. A sequência obtida é (arbitrando $a_0 = 1$), $a_n = 1, -1/2, 1/24, -1/720 \ldots$ A solução geral parece ser os inversos dos fatoriais dos números pares, com sinais alternados. A solução geral pode ser obtida transformando a fórmula de recorrência numa equação com coeficientes constantes: $(2n+2)(2n+1) = (2n+2)!/(2n)!$ $\Rightarrow u_n = (2n)!\, a_n \Rightarrow u_{n+1} + u_n = 0$ e $u_n = (-1)^n u_0$ $\Rightarrow a_n = (-1)^n/(2n)!\, a_0$ com esta sequência a série de potências da primeira solução particular é (com $a_0 = 1$). $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(2n)!\, x^n = \cos(x^{1/2})$. Usando a segunda raiz $r_2 = 1/2$, a série de potências da segunda solução é: $y = \sum_{n=0} a_n x^{n+1/2}$, $y' = \sum_{n=0}(n+1/2)a_n x^{n-1/2}$, $y'' = \sum_{n=0}(n^2-1/4)a_n x^{n-3/2}$. Substituindo na equação diferencial obtemos: $\sum_{n=0}[(4n^2-1)a_n x^{n-1/2} + (2n+1)a_n x^{n-1/2} + \ldots$

$\ldots + a_n x^{n+1/2}] = 0$ a soma dos termos $n = 0$ das duas primeiras séries é igual a 0 e as três séries podem ser agrupadas: $\sum_{n=0}^{\infty} [(4n^2+8n+3)a_{n+1} + (2n+3)a_{n+1} + a_n] x^{n+1/2} = 0$ a fórmula de recorrência é: $(2n+2)(2n+3)a_{n+1} + a_n = 0$. A solução geral obtém-se em forma semelhante ao caso anterior: $(2n+2)(2n+3) = (2n+3)!/(2n+1)!$, $u_n = (2n+1)!\, a_n \Rightarrow u_{n+1} + u_n = 0$; $u_n = (-1)^n u_0 \Rightarrow a_n = (-1)^n/(2n+1)!\, a_0$ a série de potências correspondente é (com $a_0 = 1$) $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(2n+1)!\, x^{n+1/2} = \text{sen}(x^{1/2})$. A solução geral é uma combinação linear das duas soluções particulares y_1 e y_2. Em geral, cada raiz da equação indicial pode conduzir a uma solução em séries de potências. No entanto, em alguns casos é possível encontrar apenas uma solução. O teorema que segue indica como determinar a solução geral por meio de séries de potências. Se r_1 e r_2 são duas raízes da equação indicial (em $x=0$) de uma equação diferencial linear de segunda ordem com ponto singular em $x=0$, existem três casos, a depender dos valores de r_1 e r_2: Se $r_1 - r_2$ for diferente de zero e diferente de um número inteiro, cada raiz conduz a uma solução diferente. 2. Se $r_1 = r_2$, é possível obter uma única solução y_1 a partir do método de Frobenius. A segunda solução terá a forma: $y_2(x) = \sum_{n=0} b_n x^{n+r_1} + y_1 \ln x$ onde a sucessão b_n deverá ser obtida por substituição de y_2 na equação diferencial. Se $r_1 - r_2$ for número inteiro, existirá uma solução y_1 com a forma usada no método de Frobenius. A segunda solução será: $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_1} + c\, y_1 \ln x$ onde c é constante. Nos casos em que $c = 0$, a segunda solução tem a forma do método de Frobenius, o qual implica que aplicando o método de Frobenius é possível encontrar as duas soluções y_1 e y_2 linearmente independentes. Quando c não é nula, o método de Frobenius permite encontrar apenas uma solução e a segunda solução deverá ser encontrada por substituição da forma geral de y_2 na equação diferencial. Com as duas soluções encontradas seguindo o método indicado pelo teorema de Frobenius, a solução geral será:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Em alguns casos as condições fronteira exigem que y seja finita na origem o qual implica $C_2 = 0$, se $r_2 < 0$ ou $r_2 = r_1$, já que os dois

casos a segunda solução é divergente na origem.
Se $r_1 - r_2$ é um inteiro e o método de Frobenius conduz a uma única solução y_1, C_2 será também nula e não preciso calcular y_2. Por exemplo: encontre a solução geral da equação: $xy'' + 3y' - x^2y = 0$. O ponto $x=0$ é ponto singular. Os dois limites:

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x} = 3 \qquad B = \lim_{x\to 0} \frac{-x^4}{x} = 0$$

existem e, portanto, $x=0$ é ponto singular regular. A equação indicial é: $r(r-1)+3r = r(r+2) = 0$. Com raízes $r_1 = 0$ e $r_2 = -2$. Como a diferença entre as raízes é um número inteiro, provavelmente o método de Frobenius dará apenas uma das duas soluções linearmente independentes. Se existirem duas soluções com a forma usada no método de Frobenius, estas aparecerão na solução correspondente à raiz menor $r = -2$.
Assim, começamos por considerar o caso $r = -2$: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-2}$, $y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)a_n x^{n-3}$, $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)(n-3)a_n x^{n-4}$. Substituindo na equação diferencial, obtemos: $\sum_{n=0}^{\infty} [(n-2)(n-3)a_n x^{n-3} + 3(n-2)a_n x^{n-3} - a_n x^{n}] = 0 - a_1 x^{-2} + \sum_{n=0} [(n+3)(n+1)a_{n+3} - a_n] x^n = 0$, consequentemente, $a_1 = 0$ e: $(n+3)(n+1)a_{n+3} - a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.
A solução da fórmula de recorrência são três sucessões independentes. A sucessão correspondente a $n = 3m+1$ é nula, já que $a_1 = 0$. Com $n = 3m$ e $u_m = a_{3m}$ obtemos a equação: $9(m+1)(m+1/3)u_{m+1} - u_m = 0$, usando fatoriais e funções gama temos: $9(m+1)!\,\Gamma(m+1+1/3)u_{m+1} - m!\,\Gamma(m+1/3)u_m = 0$ se definirmos: $v_m = m!\,\Gamma(m+1/3)u_m$, obtemos: $9v_{m+1} - v_m = 0 \Rightarrow v_m = v_0/9^m$, $a_{3m} = u_m = \Gamma(1/3)a_0/9^m m!\,\Gamma(m+1/3)$.
Substituindo $n = 3m+2$ e $a_{3m+2} = x_m$ na Equação 7.84, obtemos: $9(m+1)(m+5/3)x_{m+1} - x_m = 0$, usando fatoriais e funções gama temos: $9(m+1)!\,\Gamma(m+1+5/3)x_{m+1} - m!\,\Gamma(m+5/3)x_m = 0$ se definirmos: $z_m = m!\,\Gamma(m+5/3)x_m$, obtemos: $9z_{m+1} - z_m = 0 \Rightarrow z_m = z_0/9^m$, $a_{3m+2} = x_m = \Gamma(5/3)a_2/9^m m!\,\Gamma(m+5/3)$. As duas sucessões encontradas correspondem às duas soluções linearmente independentes. Assim, o método de Frobenius conduz à solução geral:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_{3m}x^{3m-2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{3m+2}x^{3m} = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/3)x^{3m-2}}{9^m m!\,\Gamma(m+1/3)} + a_2 \left(\frac{\Gamma(5/3)x^{3m}}{9^m m!\,\Gamma(m+5/3)} \right).$$

credeal

Descreveremos aqui alguns procedimentos para o cálculo de uma segunda solução linearmente independente $y_2(x)$ quando apenas uma solução $y_1(x) \equiv a_0 u_1(x)$ de $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ na forma da série em: $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots$, com $a_0 \neq 0$. Não permitindo que a_0 se anule, impomos que coeficiente seja o primeiro da série. Faz parte da ~~re~~ resolução determinar:

1. Os valores de r para os quais a EDO tem solução na forma da série em (2.8). Esses valores surgem da resolução de uma equação algébrica do 2º grau, denominada equação indicial, cujas soluções r_1 e r_2 são chamados raízes indiciais. 2. A relação de recorrência para os coeficientes a_n. 3. O intervalo de convergência da solução em série obtida. Os detalhes do método em questão serão apresentados através de exemplos, nos quais $x = 0$ é ponto singular regular em torno do qual se deseja a solução. Conforme as raízes indiciais, três casos importantes devem ser considerados: Assim, 1º circunstância: $r_1 = r_2$ e 2º circunstância: $r_1 - r_2 = K \in \mathbb{N}^*$ e não existe solução na forma de série de potência com $r = r_2$ (a menor raiz). Fazemos uso da fórmula $y_2(x) = C u_1(x) \int [e^{-\int P(x)dx}][1/u_1^2(x)]\,dx$, obtida pela técnica da redução de ordem (cf. referência [5], onde essa fórmula é deduzida e apresentada como a equação (4) da seção 4.2). Acima, $P(x)$ é o coeficiente de y' na EDO escrita na forma dada por (2.7), e C é uma constante arbitrária. Logo, como o procedimento 2: usamos o seguinte resultado:

$y_2(x) = \alpha a_0 u_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$, onde em 1º circunstância $\alpha = 1$ e $b_n = d/dr \, . \, a_n(r)|_{r=r_2}$ e na 2º circunstância: $\alpha = [(r-r_2)a_K(r)/a_0]_{r=r_2}$ e $b_n = d/dr[(r-r_2)a_n(r)]|_{r=r_2}$, sendo $a_n(r)$ a expressão que se obtém para o coeficiente a_n em termos de r e a_0 por meio do uso reiterado da relação de recorrência dependente da raiz indicial (e não do uso reiterado da relação de recorrência específica para a raiz indicial r_2, ou seja, o valor r_2 não é substituído no lugar de r antes de se usar a relação de recorrência reiteradamente na dedução dos coeficientes a_n em termos do primeiro coeficiente, a_0, permanecendo, portanto, a presença do r nas expressões desses coeficientes.