Carlos Luilguer Almeida Santos
20150465

EDOs lineares de ordem n homogêneas e não homogêneas

Uma equação diferencial linear de ordem n é uma equação da forma:

$$P_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + P_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + P_n(t)y = G(t)$$

onde $P_0, P_1, \dots, P_n$ são funções reais e contínuas em algum intervalo $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Nos pontos onde P_0 não se anula, podemos dividir a equação (1) por $P_0(t)$ em ambos os lados e obter uma outra forma geral das e.d.o.'s lineares de ordem n:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t).$$

Também podemos ter a seguinte forma:

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = g(t)$$

Um problema de valor inicial de uma equação de ordem n tem que ter n condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{n-1}(t_0) = y_0^{n-1}$$

Também temos um Teorema de Existência e Unicidade de Equações Lineares de Ordem n. Teorema 1 (Existência e Unicidade) Sejam $p_1, p_2, \dots, p_n$ e g funções contínuas em um intervalo aberto $I = (\alpha, \beta)$ contendo o ponto t_0. Então existe uma única solução $y = \varphi(t)$ para o problema (3), satisfazendo as condições iniciais: $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{n-1}(t_0) = y_0^{n-1}$, e a solução existe em todo o intervalo I. Uma equação linear de ordem n é homogênea se a função $g(t)$ na equação: $\frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t)$ (ou a função $G(t)$ na equação: $P_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + P_0(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + P_n(t)y = G(t)$) é uma função identicamente nula. Ou seja, uma equação linear homogênea de ordem n é da forma:

$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0$

Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções da equação: $y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(t)y'+p_n(t)y=0$, então qualquer combinação linear $c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \cdots + c_n \cdot y_n$ também é solução da equação: $y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(t)y'+p_n(t)y=0$. Vamos definir o Wronskiano de n funções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ como sendo o seguinte determinante: $W(y_1,y_2,\ldots,y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$. Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluções da equação homogênea: $y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(t)y'+p_n(t)y=0$. Dizemos que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formam um conjunto fundamental de soluções de $y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(t)y'+p_n(t)y=0$ se toda solução da equação: $y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(t)y'+p_n(t)y=0$ for combinação linear de $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Do mesmo modo que para equações de segunda ordem, temos o seguinte resultado: Teorema 2. Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ funções contínuas em um intervalo aberto $I=(\alpha,\beta)$. Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluções da equação homogênea: $y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(t)y'+p_n(t)y=0$ no intervalo $I=(\alpha,\beta)$. Então $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formam um conjunto fundamental de soluções de: $y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(t)y'+p_n(t)y=0$ se e somente se $W(y_1,y_2,\ldots,y_n)(t) \neq 0$, para algum $t \in I(\alpha,\beta)$. Em geral, vamos assumir que uma EDO linear de 2ª ordem pode ser escrita como: $A(x)y''+B(x)y'+\ldots+C(x)y=F(x)$, em que A, B, C e F são funções contínuas em um intervalo aberto I. Uma EDO linear de 2ª ordem também pode ser escrita como $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$, dividindo: $A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=F(x)$ por $A(x)$. Por exemplo a EDO: $e^x y'' + \cos x\, y' + (1+\sqrt{x})y = \tan^{-1}x$, é linear com $A(x)=e^x$, $B(x)=\cos x$, $C(x)=1+\sqrt{x}$ e $F(x)=\tan^{-1}x$. As EDOs $y''=yy'$ e $y''+3(y')^2+4y^3=0$ não são lineares. Teorema 3 (Existência e Unicidade). Se p, q, f são funções contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto a então para quaisquer números b_0 e b_1, o problema de valor inicial (PVI) $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$, $y(a)=b_0$ e $y'(a)=b_1$. Admite uma única solução em I. Observação 1: A solução de um PVI envolvendo uma EDO linear de 2ª ordem é determinada considerando duas condições iniciais.

De modo geral, uma EDO linear de ordem $n \geq 2$ pode ser escrita como: $P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = F(x)$, ou, equivalentemente, $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$.

Teorema 9 (Existência e Unicidade). Se $p_1, p_2, \dots, p_n$ e f são funções contínuas em um intervalo aberto I contendo um ponto a então, dados $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$, a EDO ($y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$) admite uma única solução no intervalo I que satisfaz as condições iniciais: $y(a) = b_0$, $y'(a) = b_1$, ... $y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}$.

Uma E.DO linear de ordem $n \geq 2$ é dita homogênea se pode ser escrita como:

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

ou

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

Teorema 11 (Princípio da Superposição): Se $y_1, y_2, \dots, y_n$ são n soluções de uma EDO linear homogênea de ordem $n \geq 2$, então

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n,$$

é também uma solução da EDO. As funções $y_1, y_2, \dots, y_n$ são linearmente independentes em um intervalo I se o Wronskiano não se anula nesse intervalo. Se $y_1, y_2, \dots, y_n$ são soluções linearmente independentes da EDO linear homogênea: $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$, em que $p_1, p_2, \dots, p_n$ são funções contínuas em intervalo I, então qualquer outra solução da EDO pode ser escrita como $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x)$, para $C_1, C_2, \dots, C_n$ reais.

EDOs lineares de ordem n homogênea a coeficientes constantes

Considere a e.d.o. linear homogênea de ordem n com coeficientes constantes: $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$, onde $a_0, a_1, \dots, a_n$ são constantes reais e $a_0 \neq 0$. É natural esperar que $y = e^{rt}$ seja solução da equação: $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$. De fato, substituindo $y = e^{rt}$ na equação anterior, Obtemos:

$$e^{rt}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) = 0$$

A equação:

$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$ é chamada de Equação característica da Equação Diferencial: $a_0 y^n + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ e suas raízes r são tais que $y = e^{rt}$ é solução de $a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$. Considere uma EDO linear homogênea de ordem $n \geq 2$ com coeficientes constantes: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$. Vamos buscar uma solução não-trivial na forma: $y(x) = e^{rx}$. Note que a k-ésima derivada de y satisfaz: $y^{(k)}(x) = r^k e^{rx} = r^k y(x)$. Substituindo na EDO e simplificando, obtemos $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$ chamada equação característica para a EDO. Raízes Distintas da Equação Característica. Se r é uma solução da equação característica, então $y(x) = e^{rx}$ é uma solução da EDO. Sobretudo, como $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$ possui n soluções $r_1, r_2, \dots, r_n$, podemos expressar a solução geral da EDO como: $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$, desde que $r_i \neq r_j$ para todo $i \neq j$, ou seja, se não houverem raízes repetidas. Exemplo: encontre a solução geral de $y'' + 5y' + 6y = 0$. A resposta é a solução geral: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$. Determine a solução do PVI: $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$. Resposta, a solução do PVI é: $y = 9e^{-2x} - 7e^{-3x}$. Encontre a solução do PVI. $y^{(3)} + 3y'' - 10y' = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 70$. OBS: A solução de:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 7 \\ -5C_2 + 2C_3 = 0 \\ +25C_2 + 4C_3 = 70 \end{cases}$$

é $C_1 = 0$, $C_2 = 2$ e $C_3 = 5$. Encontre a solução do PVI $y^{(3)} + 3y'' - 10y' = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 70$. Resposta, a solução do PVI é $y = 2e^{-5x} + 5e^{2x}$. Raízes complexas Distintas. Se r_1 e r_2 forem raízes complexas conjugadas, então $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$. Usando a fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, podemos escrever a combinação linear $K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}$ de forma alternativa

Como: $C_1 e^{\lambda x}\cos(\mu x) + C_2 e^{\lambda x}\,\text{sen}(\mu x)$.

Como toda função constante real é contínua, então, dentre as equações diferenciais lineares, existe um grupo de equações muito importante que é formado pelas equações cujas funções coeficientes de y, y' e y'' são constantes e neste caso, escrevemos simplesmente:

$$L(y) = ay'' + by' + cy = d(x)$$

Para resolver este tipo de equação linear não homogênea: 1. Devemos obter a solução geral $y_h = y_h(x)$ da equação linear homogênea associada $L(y) = ay'' + by' + cy = 0$. Assim, devemos ter $L(y_h) = 0$. 2. Por algum processo matemático, obter uma solução particular $y_p = y_p(x)$ para a equação original, o que significa que $L(y_p) = d(x)$. 3. A solução geral $y = y(x)$ para a EDO dada será a soma da solução geral da equação homogênea associada, obtida em (1) com a solução particular obtida em (2), isto é: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. Com esta forma, temos que $L(y) = L(y_h + y_p) = L(y_h) + L(y_p) = d(x)$. Para resolver a equação homogênea com coeficientes constantes, devemos obter a equação característica associada à mesma, dada por: $ar^2 + br + c = 0$. Obter as raízes da equação característica equivale a obter os autovalores do operador diferencial linear: $L = aD^2 + bD + cI$. Como a equação característica é uma equação do segundo grau, ela possui exatamente duas raízes no conjunto dos números complexos. Detalhando um pouco mais, observamos que quando os valores de a, b e c, são reais, existem três possibilidades para a obtenção das raízes: 1. Duas raízes reais e distintas: Se r e s são reais e distintos as duas autofunções (autovetores) associados a estes autovalores em relação ao operador L, formam o conjunto: $\{e^{rx}, e^{sx}\}$. 2. Duas raízes reais e iguais: Se r é um autovalor real (multiplicidade 2), as duas autofunções (autovetores) associados a estes autovalores em relação ao operador L, formam o conjunto: $\{e^{rx}, xe^{rx}\}$. 3. Duas raízes complexas conjugadas: Se r e s são raízes complexas conjugadas, digamos $r = a + ib$ e $s = a - ib$, as duas autofunções (autovetores) associados a estes autovalores em relação ao operador L, formam o conjunto: $\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\,\text{sen}(bx)\}$. Sendo possível, tal.