Carlos Luilquer Almeida Santos
20150465

Transformada de Laplace, Transformada Inversa e Frações Parciais

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é uma função $F(s)$ num domínio de valores reais s, definida pela integral:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

Igual que no caso da derivação, uma forma rápida de calcular a transformada de uma função é por meio de algumas regras simples. A Transformada inversa de uma função $F(s)$ é a função $f(t)$ cuja transformada de Laplace seja igual a $F(s)$. Para que a transformada de Laplace de $f(t)$ exista, é preciso que $f(t)$ verifique as seguintes duas propriedades: 1. A função deverá ser parcialmente contínua, isto é, $f(t)$ poderá ter alguns pontos isolados onde é descontínua, mas será contínua em cada intervalo entre dois pontos de descontinuidade. 2. A função $f(t)$ deve ser uma função de ordem exponencial: existe um número real a tal que o limite:

$$\lim_{t \to \infty} |f(t)|\, e^{-at}$$

existe. O domínio da transformada de Laplace de $f(t)$ será $s > a$. Usaremos a seguinte notação para indicar a transformada de Laplace da função $f(t)$ $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e a função obtida depois de transformar, será representada pela mesma letra usada para a função, mas em ~~min~~ maiúsculas $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$. Linearidade: para quaisquer duas funções $f(t)$ e $g(t)$, e duas constantes a e b, verifica-se: $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) + bG(s)$ consequentemente, a transformada inversa também é um operador linear: $\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = af(t) + bg(t) = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$. Para a derivada da transformada de Laplace:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = -\int_0^{\infty} t f(t)\, e^{-st}\, dt = \mathcal{L}\{t f(t)\}$$

derivando n vezes obtemos: $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n F}{ds^n}$.

Integrando por partes: $\mathcal{L}\{f'\} = \int_0^\infty f' e^{-st} dt = f e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f e^{-st} dt$, o último integral é a Transformada de f, definida em $s > a$. Para $s > a$ o limite do primeiro termo quando t for infinito, é zero já que f é de ordem exponencial a.

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0).$$

A transformada de derivadas de ordem superior calcula-se aplicando a mesma propriedade várias vezes, por exemplo, a transformada da segunda derivada é igual a:

$\mathcal{L}\{y''\} = s\mathcal{L}\{y'\} - y'(0) = s[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - y'(0) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$. Deslocamento em s: $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty f e^{(a-s)t} dt = F(s-a)$. A Transformada de t^p, onde p é qualquer número real, é: $\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty t^p e^{-st} dt$ usando a mudança de variável $u = st$, o integral transforma-se numa função gama: $\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty (u/s)^p e^{-u} du/s = s^{-(p+1)} \int_0^\infty u^p e^{-u} du = \Gamma(p+1)/s^{p+1}$ em particular, quando p for um número inteiro positivo n. $\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}$ e para $n = 0$. $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$. Aplicando a propriedade de deslocamento em s, podemos calcular a transformada da função exponencial: $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \mathcal{L}\{1\}(s-a) = 1/s-a$ e usando a propriedade da derivada da Transformada: $\mathcal{L}\{te^{at}\} = -d/ds(1/s-a) = 1/(s-a)^2$. O mesmo resultado podia ter sido obtido a partir da Transformada de t, usando a propriedade de deslocamento em s. As Transformadas do seno e do cosseno podem ser calculados substituindo $a = ib$ na expressão: $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \mathcal{L}\{1\}(s-a) = 1/s-a$ e usando a fórmula de Euler: $\mathcal{L}\{e^{ibt}\} = \mathcal{L}\{\cos(bt) + i\,\text{sen}(bt)\} = 1/s-ib = s+ib/s^2+b^2$. Comparando as partes reais e imaginárias, concluímos: $\mathcal{L}\{\cos(bt)\} = s/s^2+b^2$ $\mathcal{L}\{\text{sen}(bt)\} = b/s^2+b^2$. Os resultados da seção anterior podem também ser usados para calcular Transformadas inversas. Por exemplo, calculamos a Transformada inversa de:

$$G(s) = \frac{2s^3 + 4s^2 + 10s + 74}{(s^2+2)(s^2-2s+10)}$$

usando expansão em frações parciais, obtemos:

$$G(s) = \frac{2}{s+2} + \frac{3}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s-1)^2+9}$$

Para calcular a Transformada inversa de cada termo, começamos por calcular as transformadas inversas das três funções $1/s$, $1/s^2$; $3/s^2+9$. Que são 1, t e sen(3t), respectivamente. A seguir usamos a propriedade de deslocamento em s para calcular a transformada inversa da função G:

$$g(t) = 2e^{-2t} + 3te^{-2t} + \frac{e^{t}}{3} \operatorname{sen}(3t)$$

Como vimos numa seção anterior, as transformadas de Laplace das derivadas de uma função são todas proporcionais à transformada da função original, multiplicada por s^n, onde n é a ordem da derivada. Esta propriedade permite transformar uma equação diferencial linear com coeficientes constantes numa equação algébrica. Por exemplo consideremos a equação:

$$3y'' - 12y' + 12y = 4e^{2x} \operatorname{sen}(2x)$$

Transformando os dois lados da equação e usando a propriedade de linearidade, ~~tem~~ obtemos: $3\mathcal{L}\{y''\} - 12\mathcal{L}\{y'\} + 12\mathcal{L}\{y\} = 4\mathcal{L}\{e^{2x}\operatorname{sen}(2x)\}$ cada um dos termos pode ser calculado usando as propriedades da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\{e^{2x}\operatorname{sen}(2x)\} = \frac{2}{(s-2)^2+4}$$

a transformada da equação diferencial é:

$$3s^2Y - 3C_1s - 3C_2 - 12sY + 12C_1 + 12Y = 8/(s-2)^2+4$$

onde A e B são duas constantes, iguais aos valores iniciais de y e y' em x = 0. Esta equação é uma equação algébrica que pode ser facilmente simplificada, conduzindo à função Y:

$$Y = \frac{3C_1s + 3C_2 - 3C_1}{3s^2 - 12s + 12} + \frac{8}{[(s-2)^2+4](3s^2-12s+12)}$$

A solução da EDO é a transformada inversa desta função. Usando a expansão em frações parciais:

$$Y = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{2C}{(s-2)^2+4} + \frac{D(s-2)}{(s-2)^2+4}$$

onde A, B, C e D são constantes que podem ser calculadas comparando as duas últimas equações:

$A = C_1 \quad B = C_2 - 2C_1 + 2/3 \quad C = -1/3 \quad D = 0$

A transformada inversa de cada uma das frações parciais é facilmente identificada, usando as transformadas calculadas em seções anteriores. A resposta final é:

$$y(x) = [(1-2x)y(0) + xy'(0) + \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(2x)]e^{-x}$$

Quando os coeficientes de uma equação diferencial linear são polinômios a transformada de Laplace pode ser calculada usando os seguintes resultados:

$$\mathcal{L}\{t^n y\} = (-1)^n \frac{d^n Y}{ds^n}$$

$$\mathcal{L}\{t^n y'\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[sY - y(0)] = (-1)^n \frac{d^n(sY)}{ds^n}$$

$$\mathcal{L}\{t^n y''\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[s^2 Y - s y(0)]$$

A transformada da equação diferencial será outra equação diferencial para a função Y, de ordem igual ao maior grau dos coeficientes da equação original. Em alguns casos a equação diferencial obtida resulta ser mais fácil de resolver do que a equação original.

A transformada de Laplace Y e as suas derivadas deverão ser funções assimptoticamente decrescentes; esta propriedade das transformadas de Laplace impõe condições fronteira para a equação diferencial obtida. O lado direito de uma equação linear não homogênea pode ser considerado como a entrada num sistema linear que verifica o princípio de sobreposição. Quando a entrada é descontínua, a saída é contínua pois a solução de uma equação diferencial é uma função derivável. O método da transformada de Laplace é principalmente útil para resolver equações diferenciais com entrada descontínua, já que a transformada de uma função parcelarmente contínua é uma função contínua. Para representar funções descontínuas é conveniente definir a função degrau unitário (também conhecida por função de Heaviside):

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

Se $a > b$, a função:

$$u(t-a) - u(t-b)$$

é igual a 1 no intervalo $a < t < b$ e zero fora do intervalo.

Assim, uma função definida em forma diferente em diferentes intervalos, por exemplo,

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & a \leq t < b \\ f_2(t) & c \leq t < d \end{cases}$$

pode ser escrita na forma compacta:

$$f(t) = [u(t-a) - u(t-b)]f_1(t) + [u(t-c) - u(t-d)]f_2(t)$$

facilitando o cálculo da sua transformada de Laplace, por meio da propriedade que veremos na seção que se segue.

A função:

$$u(t-a)f(t-a)$$

onde $u(t-a)$ é a função degrau unitário, representa a função $f(t)$ deslocada uma distância a no eixo do tempo t, sendo nula para $t < a$. A sua transformada de Laplace calcula-se facilmente, em função da transformada de f:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = \int_0^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt$$
$$= \int_0^\infty f(r)e^{-s(r+a)}\,dr$$
$$= e^{-as}\int_0^\infty f(r)e^{-sr}\,dr$$

E obtemos a propriedade de deslocamento em t:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Esta propriedade é útil para calcular transformadas de funções com descontinuidades. Uma outra forma equivalente é a seguinte:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

Exemplo, resolver o problema de valores iniciais: $y'' + 3y' + 2y = t\,(t<1)$ $-t\,(1\leq t)$; $y(0) = y'(0) = 0$. Começamos por escrever o lado direito da equação na forma compacta: $y'' + 3y' + 2y = [1 - u(t-1)]t - tu(t-1) = t - 2tu(t-1)$. A transformada de Laplace do lado esquerdo é: $\mathcal{L}\{y'' + 3y' + 2y\} = (s^2 + 3s + 2)Y(s)$. Usando a propriedade de deslocamento em t, a transformada do lado direito é: $\mathcal{L}\{t - 2tu(t-1)\} = 1/s^2 - 2e^{-s}\mathcal{L}\{t+1\} = 1/s^2 - 2e^{-s}/s - 2e^{-s}/s^2$. Igualando as transformadas dos dois lados da equação diferencial, podemos obter facilmente Y: $= 1/s^2(s+1)(s+2) - 2e^{-s}/s(s+1)(s+2)$. Usando a composição em frações parciais: $1/s(s+1)(s+2) = 1/2s - 1/(s+1) + 1/2(s+2) \Rightarrow 1/s^2(s+1)(s+2) = 1/2s^2 - 3/4s + 1/(s+1) - 1/4(s+2) + 5/(s+1)$. Obtemos: $y = 1/2s^2 - 3/4s + 1/(s+1) - 1/4(s+2) + e^{-s}\left(1/2s - 1/s - 1/2(s+2)\right)$. Pode-se ter a inversa.