

# Resolução de Sistemas Lineares. Métodos Diretos: Decomposição LU.

## Introdução

A base do método chamado Fatoração ou Decomposição LU, está apoiada na simplicidade de resolução de sistemas triangulares.

Seja o sistema linear  $Ax = b$

O processo de fatoração para resolução deste sistema consiste em decompor a matriz  $A$  dos coeficientes em um produto de dois ou mais fatores e, em seguida, resolver uma sequência de sistemas lineares que nos conduzirá a solução do sistema linear original.

Suponhamos que seja possível fatorar a matriz  $A$  dos coeficientes num produto de uma matriz triangular inferior com diagonal unitária  $L$  e uma matriz triangular superior  $U$ , isto é:

$$A = LU$$

Nestas condições, o sistema  $Ax = b$  pode ser reescrito na forma  $LUx = b$ , o que permite o desmembramento em dois sistemas triangulares

$$Ly = b \quad \text{e} \quad Ux = y$$

Resolvendo o primeiro sistema, calculamos  $y$  que, usado no segundo sistema, fornecerá o vetor procurado  $x$ .

Dessa maneira, conhecidas  $L$  e  $U$ , o sistema será resolvido com  $2n^2$  operações (dois sistemas operações do método da triangulares), o que representa um ganho substancial comparado com as  $(2n^3)/3$  eliminação de Gauss.

## Cálculo dos Fatores L e U

Os fatores  $L$  e  $U$  podem ser obtidos através de fórmulas para os elementos  $l_{ij}$  e  $u_{ij}$ , ou então, podem ser construídos usando a ideia básica do método da Eliminação de Gauss.

Veremos a seguir como obter  $L$  e  $U$  através do processo de Gauss.

Dada uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ , seja  $A_k$  a matriz constituída das primeiras  $k$  linhas e colunas de  $A$ .

Suponha que  $\det(A_k) \neq 0$  para  $k = 1, 2, \dots, (n - 1)$ .

Então, existe uma única matriz triangular inferior  $L = (m_{ij})$ , com  $m_{ii} = 1$ ,  $1 \leq i \leq n$ , e uma única matriz triangular superior  $U = (u_{ij})$  tais que  $LU = A$ .

Ainda mais,  $\det(A) = u_{11} u_{22} \dots u_{nn}$

Quando o procedimento de eliminação de Gauss é aplicado em uma matriz  $[a]$ , os elementos das matrizes  $[L]$  e  $[U]$  já são calculados automaticamente.

A matriz triangular superior [U] é a matriz de coeficientes [a] obtida ao final do procedimento.

A matriz triangular inferior [L] não é escrita explicitamente durante o procedimento, mas os elementos que a formam na realidade são calculados ao longo do caminho:

- Os elementos diagonais de [L] são todos iguais a 1.
- Os elementos abaixo da diagonal são os multiplicadores  $m_{ij}$  que multiplicam a equação pivô quando ela é usada para eliminar os elementos abaixo do coeficiente pivô

No caso de um sistema com quatro equações, a matriz de coeficientes [a] é  $(4 \times 4)$ , e a decomposição tem a forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} \end{bmatrix}$$

**Exemplo 1:** Resolver o sistema linear a seguir usando a fatoração LU:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

### Solução

O primeiro passo será calcular os  $m_{ij}$  e  $u_{ij}$ , usando o processo de Gauss sem estratégia de pivoteamento.

#### 1ª etapa:

Pivô = $a_{11} = 1$	$E 1 \leftarrow E 1$ $E 2 \leftarrow E 2 - 2 E 1$ $E 3 \leftarrow E 3 - E 1$
---------------------	--

#### 2ª etapa:

Pivô = $a_{22} = -1$	$E 1 \leftarrow E 1$ $E 2 \leftarrow E 2$ $E 3 \leftarrow E 3 - 4 E 2$
----------------------	--

Os fatores L e U são:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para resolvermos o sistema  $\mathbf{Ax} = (2, 3, 0)^T$ , resolvemos  $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ .

$\mathbf{y} = (2, -1, 2)^T$  e, com estes valores, calculamos  $\mathbf{x}$  através de  $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$

A solução do sistema é  $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$

**Exercício 1:** Resolver o sistema linear a seguir usando a fatoração LU:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

A solução do sistema é  $\mathbf{x} = (-3, 5, 0)^T$

**Exercício 2:** Resolver o sistema linear a seguir usando a fatoração LU:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

A solução do sistema é  $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$