

UNIDADE 3

Resolução de Sistemas Lineares.

Métodos Iterativos: Método iterativo de Jacobi, Método iterativo de Gauss-Seidel.

Introdução

Sistemas de equações lineares também podem ser resolvidos com o uso de uma abordagem iterativa.

Na solução de sistemas de equações usando processos iterativos, as equações são colocadas em uma forma explícita na qual cada incógnita é escrita em termos das demais incógnitas.

| | | |
|---|--|---|
| $\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 &= b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 &= b_3 \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 &= b_4 \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">a)</p> | <p>Escrevendo as equações em uma forma explícita</p> | $\begin{aligned} x_1 &= [b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)]/a_{11} \\ x_2 &= [b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)]/a_{22} \\ x_3 &= [b_3 - (a_{32}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4)]/a_{33} \\ x_4 &= [b_4 - (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3)]/a_{44} \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">b)</p> |
|---|--|---|

Forma padronizada (a) e explícita (b) de um sistema de quatro equações.

Onde

| | |
|-------------------------|------------------------------------|
| a_{ij} : coeficientes | $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ |
| x_j : incógnitas | $j = 1, 2, \dots, n$ |
| b_i : constantes | $i = 1, 2, \dots, m$ |

O processo de solução começa com a escolha de valores iniciais para as incógnitas (primeira solução estimada).

Na primeira iteração, a primeira solução assumida é substituída no lado direito das equações, e os novos valores calculados para as incógnitas formam a segunda solução estimada.

Na segunda iteração, a segunda solução é substituída de volta nas equações para que novos valores sejam obtidos para as incógnitas, e isso constitui a terceira solução estimada.

As iterações continuam da mesma forma e, quando o método dá certo, as soluções obtidas durante as iterações sucessivas convergem para a solução real.

Em um sistema com n equações, as equações explícitas para as incógnitas $[x_i]$ são:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} a_{ij} x_j \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Condição para a convergência

Para um sistema de n equações $[a][x] = [b]$, uma condição suficiente para a convergência ocorre se, em cada uma das linhas da matriz de coeficientes $[a]$, o valor absoluto do elemento diagonal for maior que a soma dos valores absolutos dos elementos fora da diagonal.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} |a_{ij}| \quad (2)$$

Essa condição é suficiente, mas não necessária para a convergência do método iterativo.

Quando a condição (2) é satisfeita, a matriz [a] é classificada como **diagonalmente dominante**, e o processo iterativo converge para a solução.

A solução, no entanto, pode convergir mesmo quando a Eq. (2) não é satisfeita.

Dois métodos iterativos específicos são apresentados a seguir, os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel.

A diferença entre esses dois métodos está na maneira pela qual os novos valores calculados para as incógnitas são utilizados.

No método de Jacobi, os valores das incógnitas no lado direito da Eq. (1) são atualizados todos de uma vez no final de cada iteração.

No método de Gauss-Seidel, o valor de cada incógnita é atualizado (e usado no cálculo da nova estimativa das demais incógnitas dentro da mesma iteração) assim que se calcula uma nova estimativa para essa incógnita.

Método iterativo de Jacobi (Gauss-Jacobi)

No método de Jacobi, um valor inicial é escolhido para cada uma das incógnitas, $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, ..., $x_n^{(1)}$.

Se não houver nenhuma informação a respeito dos valores aproximados das incógnitas, **pode-se assumir que o valor inicial de todas elas seja igual a zero**.

A segunda estimativa da solução, $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, ..., $x_n^{(2)}$, é calculada com a substituição da primeira estimativa no lado direito das Eqs. (1):

$$x_i^{(2)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} a_{ij} x_j^{(1)} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Em geral, a **(k + 1)**-ésima estimativa da solução é calculada a partir da k-ésima estimativa usando:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

As iterações continuam até que as diferenças entre os valores obtidos nas iterações sucessivas sejam pequenas.

As iterações podem ser interrompidas quando

$$\bullet \quad \left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k)}} \right| < \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5a)$$

ou

$$\bullet \quad \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5b)$$

então $x_i^{(k+1)}$ são as soluções do sistema.

Exemplo 1: Resolver por Gauss-Jacobi, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,01 o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 18 \end{cases}$$

Solução

a) Verificação da convergência

b) Isolamento das incógnitas

c) Atribuição inicial

$$x_1^{(0)} = 0 \quad x_2^{(0)} = 0 \quad x_3^{(0)} = 0$$

d) Iterações

A solução deste sistema é: **(1,0501; 2,2359; 2,9425)**^T

Quantidade de iterações: **5**

Método iterativo de Gauss-Seidel

No método de Gauss-Seidel, valores iniciais são assumidos para as incógnitas x_2, x_3, \dots, x_n (todas as incógnitas, exceto x_1).

Se não houver nenhuma informação a respeito dos valores aproximados das incógnitas, pode-se assumir que o valor inicial de todas elas seja igual a zero.

Os primeiros valores assumidos para as incógnitas são substituídos na Eq. (1) com $i = 1$ para calcular o valor de x_1

Em seguida, a Eq. (1) com $i = 2$ é usada no cálculo de um novo valor para x_2

Isso é seguido do uso da Eq. (1) com $i = 3$ para calcular um novo valor para x_3 , o que continua até que $i = n$, o que representa o final da primeira iteração.

Em seguida, a segunda iteração começa com $i = 1$, onde um novo valor é calculado para x_1 , e assim por diante.

No método de Gauss-Seidel, os valores atuais das incógnitas são utilizados no cálculo do novo valor da próxima incógnita.

Em outras palavras, à medida que um novo valor é calculado, ele é imediatamente utilizado na próxima aplicação da Eq. (1) (no método de Jacobi, os valores das incógnitas obtidos em uma iteração são utilizados como um conjunto completo no cálculo dos novos valores das incógnitas na próxima iteração. Os valores das incógnitas não são atualizados no meio da iteração).

A aplicação da Eq. (1) no método de Gauss-Seidel leva à fórmula iterativa:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} a_{1j} x_j^{(k)} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \\ x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \left(\sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \right] \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}} \left[b_n - \sum_{j=1}^{j=n-1} a_{nj} x_j^{(k+1)} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Note que os valores das incógnitas na iteração $k + 1$, $x_i^{(k+1)}$, são calculados usando os valores $x_j^{(k+1)}$ obtidos na iteração $k + 1$ para $j < i$ e usando os valores $x_j^{(k)}$ para $j > i$.

O critério de interrupção das iterações é o mesmo utilizado no método de Jacobi, a Eq. (5).

O método de Gauss-Seidel converge mais rápido do que o método de Jacobi e requer menos memória computacional quando programado.

Exemplo 2: Resolver por Gauss-Seidel, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,01 o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 18 \end{cases}$$

Solução

a) Verificação da convergência

b) Isolamento das incógnitas

c) Atribuição inicial

$$x_1^{(0)} = 0 \quad x_2^{(0)} = 0 \quad x_3^{(0)} = 0$$

d) Iterações

A solução deste sistema é: **(1,0501; 2,2359; 2,9425)**^T

Quantidade de iterações: **3**

Comparação dos Métodos de Solução de Sistemas Lineares

| Métodos Diretos | Métodos Iterativos |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Processos finitos (convergência para qualquer sistema não-singular); • Apresentam problemas com erros de arredondamento; • Utiliza-se técnicas de pivoteamento para amenizar os problemas de arredondamento; • O processo de triangularização destrói a esparsidade da matriz de coeficientes. Técnicas de Esparsidade são utilizadas para amenizar o enchimento da matriz. • Para matrizes cheias a solução requer n^3 sem considerar o pivoteamento. | <ul style="list-style-type: none"> • Provavelmente mais eficientes para sistemas de grande porte, principalmente com a utilização de computação de alto desempenho (vetorial e paralela); • Tem convergência assegurada apenas sob certas condições; • Conserva a esparsidade da matriz de coeficientes; • Os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel requerem $2n^2$ operações por iteração; • Poucas vantagens adicionais são conseguidas em soluções para vetores independentes adicionais com a matriz de coeficientes mantida constante, como no caso da fatoração LU; • Carregam menos erros de arredondamento no processo, tendo em vista que a convergência uma |

vez assegurada independe da aproximação inicial. Somente os erros da última iteração afetam a solução.

Exercícios

Exercício 1: Resolver por Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,02 o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 15 \end{cases}$$

Resposta:

| GJ | GS |
|---------|---------|
| x | x |
| 0,99751 | 0,99961 |
| 1,00514 | 0,99746 |
| 0,99159 | 1,00145 |

Exercício 2: Resolver por Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,05 o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = -6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 19 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 14 \end{cases}$$

Dica: verificar convergência

Resposta:

| GJ | GS |
|--------|--------|
| x | x |
| 4,9983 | 4,9977 |
| 3,9903 | 4,0010 |
| 3,0050 | 2,9997 |

Exercício 3: Resolver por Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,05 o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 - x_3 = 16 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 18 \end{cases}$$

Dica: verificar convergência

Resposta:

| GJ | GS |
|--------|--------|
| x | x |
| 1,0499 | 1,0499 |
| 2,2379 | 2,2366 |
| 2,9371 | 2,9428 |

Exercício 4: Resolver por Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a **0,01** o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 - x_3 = 13 \\ x_1 + 8x_2 + 1x_3 = 30 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 21 \end{cases}$$

Resposta:

| GJ | GS |
|--------|--------|
| x | x |
| 2,0066 | 2,0066 |
| 2,9924 | 3,0007 |
| 3,9845 | 4,0006 |

UNIDADE 3

Resolução de Sistemas Não - Lineares

No processo de resolução de um problema prático, é frequente a necessidade de se obter a solução de um sistema de equações não lineares.

Dado um sistema de funções não lineares $F = (f_1, \dots, f_n)$, o objetivo é encontrar as soluções para $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

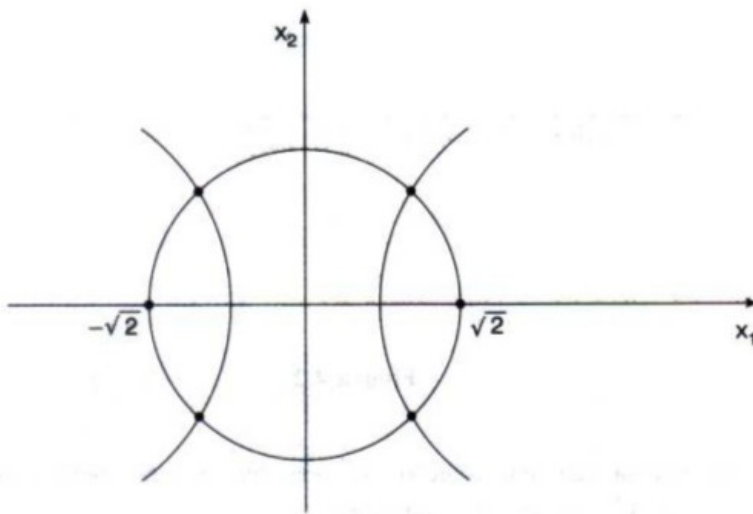
Ou, equivalente:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Exemplo 1:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - \frac{x_2^2}{9} - 1 = 0 \end{cases}$$

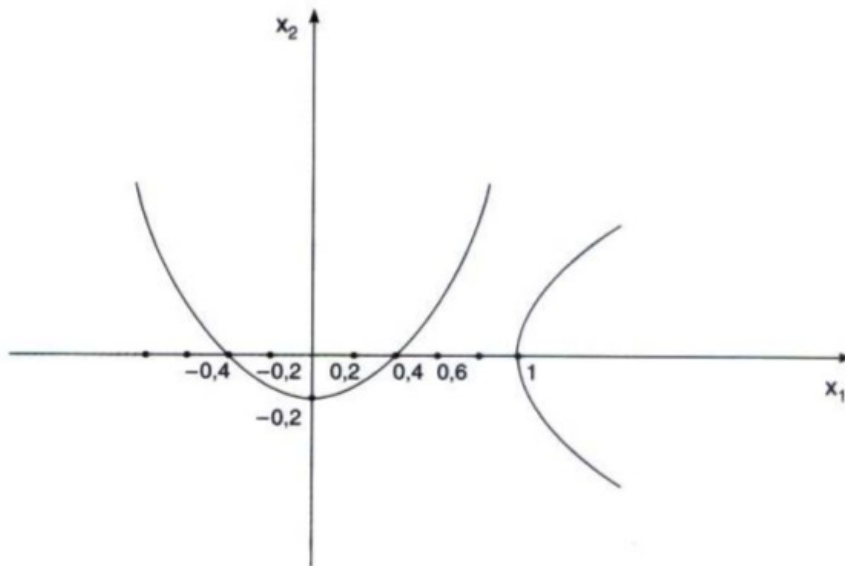
Esse sistema não linear admite 4 soluções, que são os pontos onde as curvas f_1 e f_2 se interceptam.



Exemplo 2:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 - 0,2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = -x_1 + x_2^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Esse sistema não linear não tem solução, ou seja, não existem pontos onde as curvas f_1 e f_2 se interceptam.



Usamos a seguinte notação:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Cada função $f_i(x)$ é uma função não linear em x , $f_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, n$, e portanto $F(x)$ é uma função não linear em x , $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$.

No caso de sistemas lineares, $F(x) = Ax - b$, onde $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$

Estamos supondo que $F(x)$ está definida num conjunto aberto $D \subset \mathbf{R}^n$ e que tem derivadas contínuas nesse conjunto. Ainda mais, supomos que existe pelo menos um ponto $x^* \in D$, tal que $F(x^*) = 0$.

O vetor das derivadas parciais da função $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é denominado **vetor gradiente** de $f_i(x)$ e será denotado $\nabla f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$:

$$\nabla f_i(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n} \right)^T$$

A matriz das derivadas parciais $F(x)$ é chamada **matriz Jacobiana** e será denotada por $J(x)$:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \nabla f_2(x)^T \\ \dots \\ \nabla f_n(x)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Exemplo 3: Para o sistema não linear

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 3x_1^2x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

a matriz Jacobiana correspondente será:

$$J(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 6x_1x_2 & -6x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$$

Os métodos para resolução de sistemas não lineares são iterativos, isso é, a partir de um ponto inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, geram uma sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ de vetores.

O critério de parada consiste em verificar se todas as componentes $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ tem módulo pequeno.

O método mais amplamente estudado e conhecido para resolver sistemas de equação não lineares é o método de Newton.

Uma iteração requer basicamente:

1. A avaliação da matriz Jacobiana em $\mathbf{x}^{(k)}$
2. A resolução do sistema linear $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ e, por esse motivo, cada iteração é considerada computacionalmente cara.

Em relação ao item (2) pode-se empregar métodos baseados em fatoração da matriz Jacobiana.

Métodos iterativos podem ser também aplicados; por serem iterativos, obtêm uma aproximação para a solução exata do sistema linear e, conseqüentemente, o passo de Newton, $\mathbf{s}^{(k)}$, não é calculado exatamente.

Por essa razão, o método de Newton com a resolução do sistema linear através de um método iterativo é denominado **método de Newton inexato**.