MÉTODO DE NEWTON

O método de **Newton** (também chamado de método de **Newton-Raphson**) é um esquema usado para se obter a solução numérica de uma equação na forma **f(x) = 0**, onde **f(x)** é contínua e diferenciável e a sua equação possui uma solução próxima a um ponto definido.

O processo de solução começa com a escolha do ponto $\mathbf{x_1}$ como a primeira estimativa da solução.

A segunda estimativa, $\mathbf{x_2}$, é obtida a partir do cruzamento com o eixo **x** da reta tangente a **f(x)** no ponto $\mathbf{(x_1, f(x_1))}$.

A estimativa seguinte, $\mathbf{x_3}$, é a interseção com o eixo **x** da reta tangente a **f(x)** no ponto $\mathbf{(x_2, f(x_2))}$, e assim por diante.

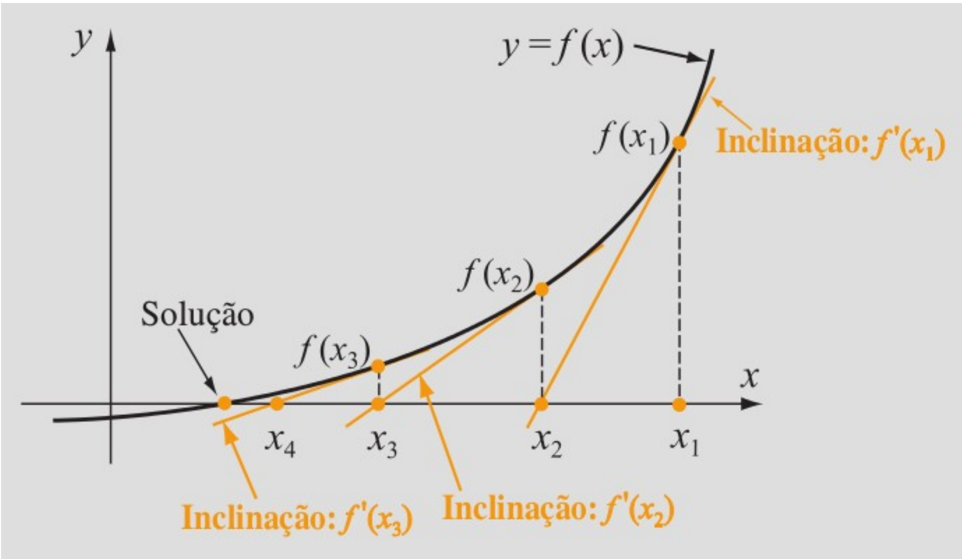

Figura 1 Método de Newton

Matematicamente, na primeira iteração, a inclinação $\mathbf{f'(x_1)}$ da tangente no ponto $\mathbf{(x_1, f(x_1))}$ é dada por:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2} \qquad (1)$$

Resolvendo a Eq. (1) para $\mathbf{x_2}$, obtém-se:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad (2)$$

A Eq. (2) pode ser generalizada para que a “próxima” solução $\mathbf{x_{i+1}}$ seja obtida a partir da solução atual:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (3)$$

A Eq. (3) é a fórmula iterativa geral do método de Newton.

Ela é chamada de fórmula iterativa porque a solução é obtida com a aplicação repetida da Eq.(3) em cada passo sucessivamente.

O método de Newton também pode ser deduzido a partir da série de Taylor.
A expansão em série de Taylor de **f(x)** em torno de $\mathbf{x_1}$ é dada por:

$$f(x)=f(x_1)+(x-x_1)f'(x_1)+\frac{1}{2!}(x_1-x_2)^2 f''(x_1)+\ldots \qquad (4)$$

Se $\mathbf{x_2}$ é uma solução da equação **f(x) = 0** e $\mathbf{x_1}$ é um ponto próximo a $\mathbf{x_2}$, então:

$$f(x)=0=f(x_1)+(x-x_1)f'(x_1)+\frac{1}{2!}(x_1-x_2)^2 f''(x_1)+\ldots \qquad (5)$$

Considerando apenas os dois primeiros termos da série, uma solução aproximada pode ser determinada resolvendo a Eq. (5) para $\mathbf{x_2}$:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad (6)$$

O resultado é o mesmo dado pela Eq. (2). Na iteração seguinte, a expansão em série de Taylor é escrita em torno do ponto $\mathbf{x_2}$, e uma solução aproximada $\mathbf{x_3}$ é calculada. A fórmula geral é igual àquela dada pela Eq. (3).

Restrição:

É necessário conhecer um intervalo que contenha o valor desejado.

Melhor extremo:

Para decidir qual o melhor extremo do intervalo **(a, b)** a iniciar o método, basta verificar qual dos extremos possui função e segunda derivada com mesmo sinal:

$$f(x_i)f''(x_i)>0$$

Algoritmo para o método de Newton

1. Escolha um ponto $\mathbf{x_1}$ como uma tentativa inicial da solução.
2. Para **i = 1, 2,...** até que o erro seja menor que um valor especificado, calcule $\mathbf{x_{i+1}}$ usando a seguinte fórmula

$$\boldsymbol{x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Critério de parada

Idealmente, as iterações devem ser interrompidas quando uma solução exata é obtida. Isso significa que o valor de **x** deve ser tal que **f(x) = 0**.

Geralmente, conforme foi discutido anteriormente, a solução exata não pode ser obtida computacionalmente.

Na prática, portanto, as iterações são interrompidas quando o erro estimado for menor que algum valor predeterminado.

Uma tolerância não pode ser calculada como se faz no método da bisseção, já que os limites não são conhecidos.

Duas estimativas de erro tipicamente utilizadas pelo método de Newton são:

1. Erro relativo estimado:

As iterações são interrompidas quando o erro relativo estimado é menor que um valor especificado **ε** (epsilon):

$$\left|\frac{x_{i+1}-x_i}{x_i}\right| \leq \varepsilon \qquad (7)(a)$$

ou

$$|x_{i+1}-x_i| \leq \varepsilon \qquad (7)(b)$$

2. Tolerância em f(x):

As iterações são interrompidas quando o valor absoluto de $\mathbf{f(x_i)}$ é menor que algum número **δ** (delta):

$$|f(x_i)| \leq \delta \qquad (8)$$

Notas a respeito do método de Newton

- O método de Newton, quando bem-sucedido, converge rapidamente. A não convergência usualmente ocorre porque o ponto de partida não está suficientemente próximo da solução.
- Problemas de convergência ocorrem tipicamente quando o valor de **f′(x)** é próximo de zero na vizinhança da solução (onde **f(x) = 0**).
- É possível mostrar que o método de Newton converge
  - se a função **f(x)** e as suas derivadas primeira e segunda, **f′(x)** e **f″(x)**, forem contínuas,
  - se **f′(x)** for diferente de zero na solução,
  - e se o ponto de partida $\mathbf{x_1}$ estiver próximo da solução exata.
- Ilustrações de dois casos em que o método de Newton **não converge** (isto é, **diverge**) são mostradas na Fig. 2.

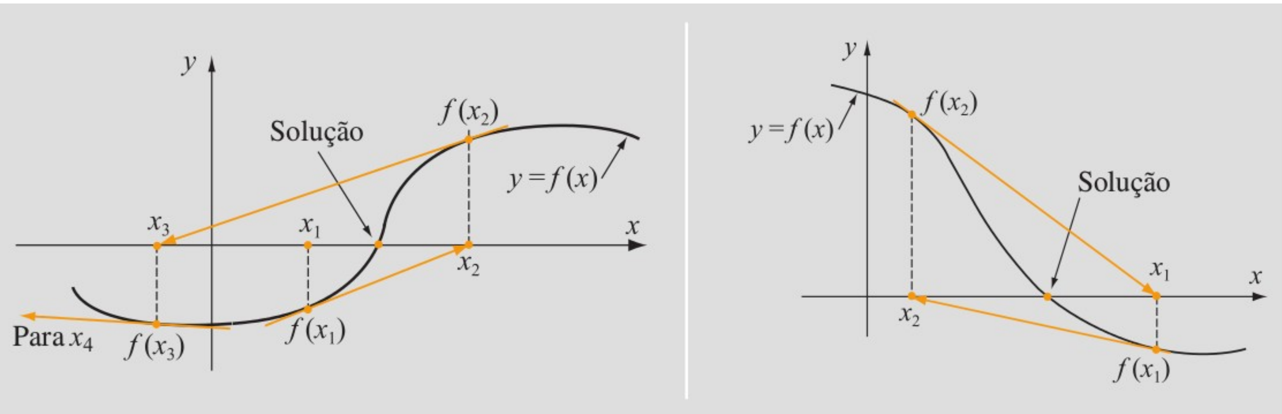

Figura 2 Casos em que o método de Newton diverge.

- Uma função **f′(x)**, que é a derivada da função **f(x)**, deve ser utilizada na fórmula iterativa, a Eq (3).

- Em muitos casos, é simples escrever a derivada, mas às vezes a sua determinação pode ser difícil.
- Quando não se tem uma expressão para a derivada, é possível obter a inclinação numericamente ou empregar o método da secante, que é de certa forma similar ao método de Newton mas não requer uma expressão para a derivada.

Condições de Newton-Raphson-Fourier

Segundo Newton, para haver a convergência, bastaria que o intervalo **(a, b)** em análise fosse suficientemente pequeno.

Contudo, Raphson e Fourier concluíram que um intervalo pequeno é aquele que contém uma e somente uma raiz. Com isso, algumas condições foram estabelecidas para que tal exigência fosse válida:

1) Se **f(a) f(b) > 0**, então existe um número par de raízes reais (contando suas multiplicidades) ou não existem raízes reais no intervalo (a, b) (**Teorema de Bolzano**);

2) Se **f(a) f(b) < 0**, então existe um número ímpar de raízes reais (contando suas multiplicidades) no intervalo (a, b) (**Teorema de Bolzano**);

3) Se **f'(a) f'(b) > 0**, então o comportamento da função neste intervalo poderá ser apenas crescente ou apenas decrescente, e nunca os dois se alternando;

4) Se **f'(a) f'(b) < 0**, então a função terá o comportamento de ora crescer ora decrescer;

5) Se **f''(a) f''(b) > 0**, então a concavidade não muda no intervalo em análise;

6) Se **f''(a) f''(b) < 0**, então a concavidade muda no intervalo em análise.

Portanto, haverá convergência no intervalo (a, b) se e somente se:

$$f(a)\,f(b) < 0$$

$$f'(a)\,f'(b) > 0$$

$$f''(a)\,f''(b) > 0$$

Exemplo 1: Convergência do método de Newton

Determine a solução da equação $f(x)=\frac{1}{x}-2$ usando o método de Newton.

Como ponto de partida (estimativa inicial da solução), use:

(a) x = 1,4

(b) x = 1

(c) x = 0,4

SOLUÇÃO

A equação pode ser resolvida analiticamente, e a solução exata é x = 0,5.

Para uma solução numérica empregando o método de Newton, a função $f(x)=\frac{1}{x}-2$ e a sua derivada $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ devem ser substituídas na Eq. (3):

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}=x_i-\frac{\frac{1}{x_i^2}-2}{-\frac{1}{x_i^2}}=2(x_i-x_i^2) \qquad (9)$$

(a) Quando o ponto de partida das iterações é **x_1 = 1,4**, às duas iterações seguintes, usando a Eq. (9), são:

$$x_2=2(x_1-x_1^2)=2(1{,}4-1{,}4^2)=-1{,}12$$

$$x_3=2(x_2-x_2^2)=2((-1{,}12)-(-1{,}12)^2)=-4{,}7488$$

Esses resultados indicam que o método de Newton diverge.

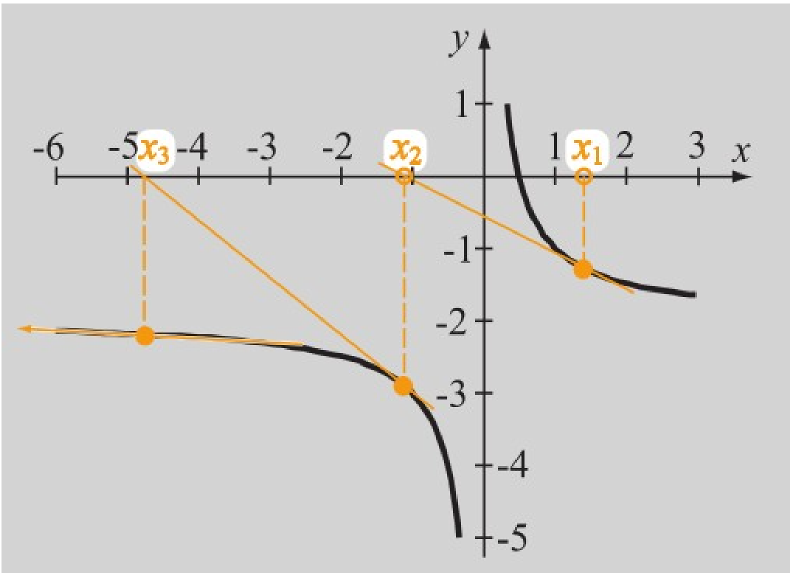

Figura 3 (a) Exemplo 1 (a) **x_1 = 1,4**

(b) Quando o ponto de partida das iterações é **x_1 = 1**, as duas iterações seguintes, usando a Eq. (9), são:

$$x_2=2(x_1-x_1^2)=2(1-1^2)=0$$

$x_3 = 2(x_2 - x_2^2) = 2(0 - 0^2) = 0$

Nesses resultados, a solução aparentemente converge para **x = 0**, que não é uma solução.

Em **x = 0**, a função é, na realidade, indefinida (este é um ponto de singularidade).

Obtém-se uma solução a partir da Eq. (9) porque a equação foi simplificada. Este caso é ilustrado na Fig. 3 (b).

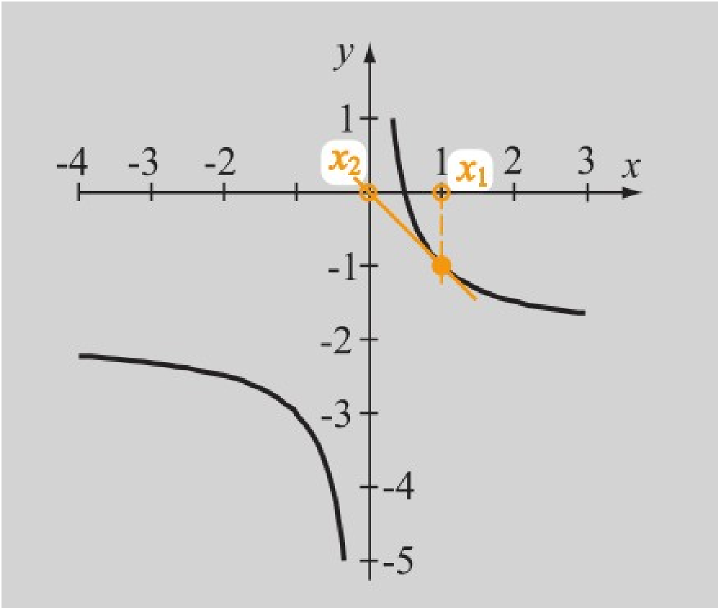

Figura 3 (b) Exemplo 1 (b) **x_1 = 1**

(c) Quando o ponto de partida das iterações é **x_1 = 0,4**, as duas iterações seguintes, usando a Eq. (9), são:

$x_2 = 2(x_1 - x_1^2) = 2(0{,}4 - 0{,}4^2) = 0{,}48$

$x_3 = 2(x_2 - x_2^2) = 2(0{,}48 - 0{,}48^2) = 0{,}4992$

Neste caso, ilustrado na Fig 3 (c), o método de Newton converge para a solução correta. Este exemplo também mostra que, se o ponto de partida for suficientemente próximo da solução exata, o método de Newton converge.

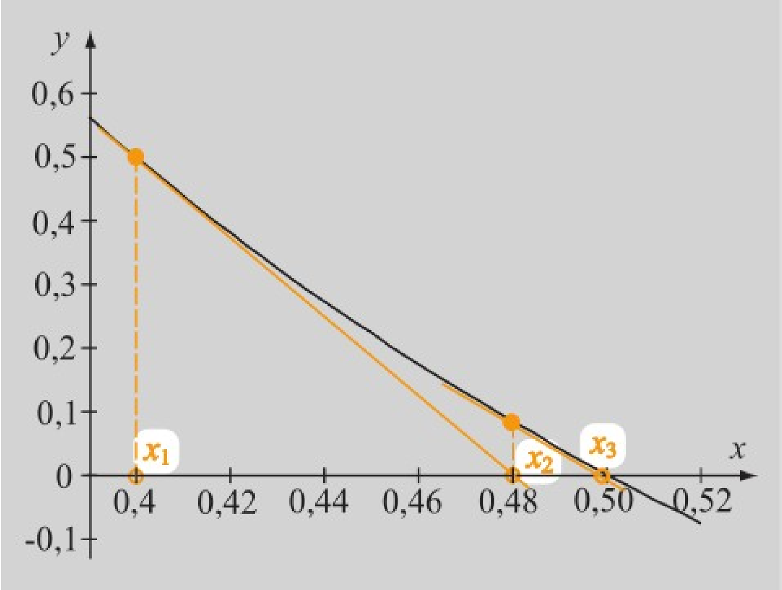

Figura 3 (c) Exemplo 1 (c) **x_1 = 0,4**

EXERCÍCIOS

Exercício 1:

Calcular a raiz positiva da equação **f(x) = 2x − sen(x) − 4 = 0**, com **erro ≤ 10^{-3}**, usando o método de NR.

f(x) = 2x − sen(x) − 4

f'(x) = 2 − cos(x)

f''(x) = sen(x)

x = 2,3542

Exercício 2:

Obter a raiz cúbica de 5, **f(x) = x^3 − 5**, usando o método NR sendo o **erro ≤ 10^{-3}**

f(x) = x^3 − 5

f'(x) = $3x^2$

f''(x) = 6x

x = 1,7100

Exercício 3:

Calcular a raiz negativa de **f(x) = $x^3 - 5x^2 + x + 3$**, com **erro ≤ 10^{-4}**.

f(x) = $x^3 - 5x^2 + x + 3$

f'(x) = $3x^2 - 10x + 1$

f''(x) = 6x - 10

x = −0,64575

Exercício 4:

Seja a função **$f(x) = x^2 - 9,5x + 8,5$**, obter a raiz contida no intervalo **[8, 9]**. Os cálculos devem ser realizados com 4 decimais com arredondamento e erro não superior a **0,001**.

$f(x) = x^2 - 9,5x + 8,5$

$f'(x) = 2x - 9,5$

$f''(x) = 2$

$x = 8,5000$

Exercício 5:

Determine a solução da equação **$f(x) = 8 - 4,5\,(x - \text{sen } x) = 0$** usando o método da bisseção e o método de Newton. A solução deve ter uma tolerância menor que **0,001**. Compare os resultados, em quantas iterações os métodos chegam a solução?

$f'(x) = -4,5(1 - \cos x)$

$f''(x) = -4,5\ \text{sen}(x)$

Bisseção

Número de iterações 10

$x = 2,430664$

Newton

Número de iterações 3

$x = 2,430466$