Circuitos Digitais

Álgebra de Boole

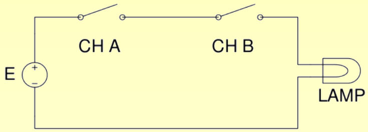
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Prof. Dr. Fábio Rodrigues de la Rocha

Álgebra de Boole

- George Boole - 1854;
- Claude Shannon - 1937 - Tese no MIT sobre circuitos elétricos usando números binários e álgebra booleana;
- Funções lógicas NOT AND e OR - tabela verdade
- Exemplo de um sistema físico usando AND e OR.

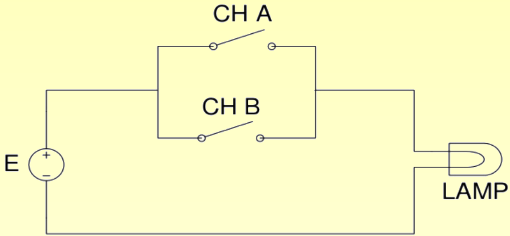
Sistema físico para um AND



CH A	CH B	LAMP
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\text{LAMP} = \text{CHA and CHB}$$
$$\text{LAMP} = \text{CHA.CHB}$$

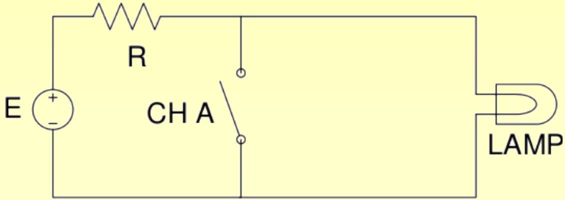
Sistema físico para um OR



CH A	CH B	LAMP
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$\text{LAMP} = \text{CHA or CHB}$$
$$\text{LAMP} = \text{CHA} + \text{CHB}$$

Sistema físico para um NOT



CH A	LAMP
0	1
1	0

$$\text{LAMP} = \text{not CHA}$$
$$\text{LAMP} = \overline{CHA}$$
$$\text{LAMP} = \text{CHA'}$$

Teoremas

Sendo A um valor lógico (pode assumir apenas dois valores 0 ou 1 - verdadeiro ou falso), $\overline{A}$ é a negação ou o completo de A. Assim, se A=1 o complemento será 0 e vice-versa. Logicamente, $\overline{\overline{A}} = A$

Teoremas

A + 0	= A		A . 1	= A	
A + 1	= 1 (elemento nulo)		A . 0	= 0 (elemento nulo)	
A + A	= A(Idempotencia)		A . A	= A(Idempotencia)	
A + $\overline{A}$	= 1		A . $\overline{A}$	= 0	

Teorema dualidade

Teoremas

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{A} + \mathrm{AB} &= \mathrm{A} \\ \mathrm{A(A{+}B)} &= \mathrm{A}\ \text{(dual)} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} AB + A\overline{B} &= A \\ (A+B)(A+\overline{B}) &= A\ \text{(dual)} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A + \overline{A}B &= A + B \\ A(\overline{A}+B) &= AB\ \text{(dual)} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A + BC &= (A+B)(A+C) \\ A(B+C) &= AB + AC\ \text{(dual)} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} AB + \overline{A}C &= (A+C)(\overline{A}+B) \\ (A+B)(\overline{A}+C) &= AC + \overline{A}B\ \text{(dual)} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} AB + \overline{A}C + BC &= AB + \overline{A}C \\ (A+B)(\overline{A}+C)(B+C) &= (A+B)(\overline{A}+C)\ \text{(dual)} \end{aligned}}$$

Exemplo:

Utilizando a tabela verdade prove que:

- $A + \overline{A}B = A + B$
- $(A + B)(\overline{A} + C)(B + C) = (A + B)(\overline{A} + C)$

Teorema de De Morgan:

Um teorema especial conhecido como Teorema de De Morgan é assim enunciado: “O complemento de um produto é igual a soma dos complementos e o completo de uma soma é igual ao produto dos complementos”

Ou usando a notação:

$\overline{A.B.C.D} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}$

O teorema se aplica a qualquer quantidade de termos.

A segunda parte do teorema :

$\overline{A + B + C + D} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$

Postulados

Postulado P1 - associatividade

O resultado da “soma” de três elementos quaisquer, por exemplo X, Y e Z, não depende da ordem das parcelas :

$$X + Y + Z = (X + Y) + Z = X + (Y + Z)$$

O resultado do “produto de três elementos quaisquer, por exemplo X, Y e Z não depende da ordem dos termos nos produtos:

$$X.Y.Z = (X.Y).Z = X.(Y.Z)$$

Postulados

Postulado P2 - comutatividade

O resultado da “soma” de dois elementos quaisquer, por exemplo X e Y não muda se a ordem for mudada :

$$X + Y = Y + X$$

O resultado do “produto de dois elementos quaisquer, por exemplo X e Y não muda se a ordem for mudada:

$$X.Y = Y.X$$

Postulados

Postulado P3 e P4 - elemento unitário

O elemento unitário de uma operação é um elemento que o seu emprego na operação com um valor X resulta no próprio elemento X:

$X + 0 = X$ Para a operação OU o elemento unitário é 0

$X.1 = X$ Para a operação AND o elemento unitário é 1

Postulados

Postulado P5 - distributividade E sobre OU

O "produto" de um elemento X qualquer pela expressão (Y+Z) é igual a soma do "produto" de X pelos elementos Y e Z:

$$X.(Y + Z) = (X.Y) + (X.Z)$$

Postulados

Postulado P6 - distributividade de OU sobre E

A “soma” de um elemento X qualquer com o “produto” dos elementos Y e Z é igual ao “produto“ das ”somas“ de X com os elementos de Y e Z:

$$X + (Y.Z) = (X + Y).(X + Z)$$

É uma função que assume 0 ou 1.

$F(A, B, C, D) = A.\overline{B}.D + \overline{A}.\overline{B}(C + A.D)$

Represente a função usando uma tabela verdade.

Funções Booleanas

Projete uma função lógica de três variáveis (A, B e C) que assume o valor 1 quando A for 0 e B for 1 ou quando A for igual a 1 e C igual a 0.

1) Passo criar a tabela verdade com as três variáveis de entrada

2) Preencher a coluna com 1 quando o enunciado for verdade

3) Criar a função lógica utilizando os termos que estão em 1 na saída da tabela verdade

Funções Booleanas

Projete uma função lógica de três variáveis (A, B e C) que assume o valor 1 quando a maioria das entradas está em 1.

1) Passo criar a tabela verdade com as três variáveis de entrada

2) Preencher a coluna com 1 quando o enunciado for verdade

3) Criar a função lógica utilizando os termos que estão em 1 na saída da tabela verdade

Funções Booleanas

Usando a tabela verdade mostre que:

$A\overline{B} + \overline{A}.B = \overline{(\overline{A}.\overline{B}) + (A.B)}$

Funções Booleanas

Usando os postuladores e teoremas, mostre que:

$$A\overline{B} + \overline{A}.B = \overline{(\overline{A}.\overline{B}) + (A.B)}$$

Funções Booleanas

Simplifique:

1. $w = \overline{z.0}$
2. $w = (a+1)(b+0) + ss + 1$
3. $w = \overline{t} + \overline{r.t}$
4. $w = \overline{\overline{x} + x}$
5. $w = (\overline{x} + y)(\overline{x + y})$
6. $w = x(\overline{x} + y)$
7. $w = x.y + \overline{y.x}.z$
8. $w = \overline{x}(x+y) + \overline{z} + z.y$
9. $v = \overline{w + w\overline{x} + yz}$

Funções Booleanas

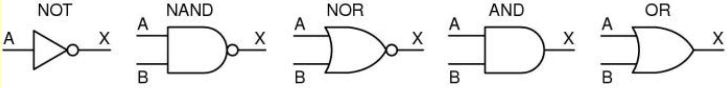
Dada a função lógica de quatro variáveis baixo, represente-a como uma soma de produtos

$$f(A, B, C, D) = (\overline{A} + BC)(B + \overline{C}D)$$

usando a lei distributiva temos:

Portas lógicas

- Alguns exemplos de portas lógicas;
- Alguns exemplos de circuitos integrados;
- Porta lógica ideal x real;
- TTL e CMOS, niveis de tensão na entrada e saída
- Equivalência de portas lógicas



A	X
0	1
1	0

(a)

A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(b)

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(c)

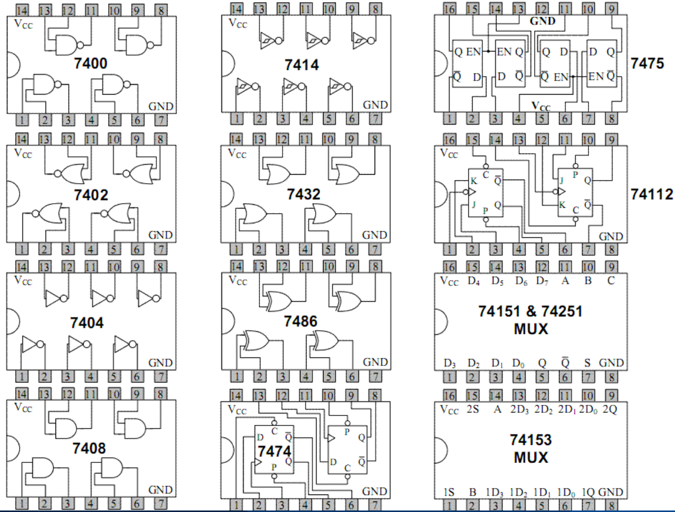
A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(d)

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(e)

Portas lógicas - circuitos integrados



Portas lógicas - níveis lógicos

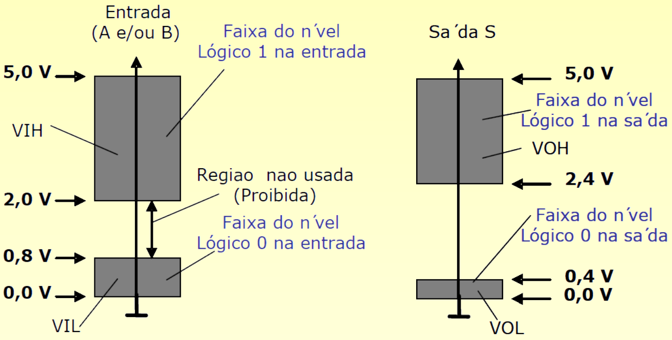
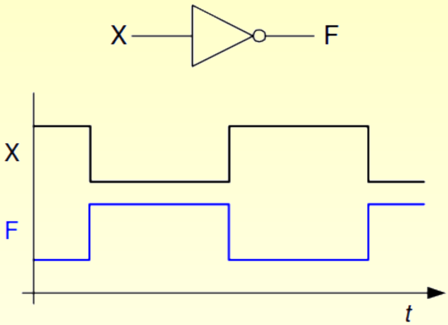


Figura 2.14 Convençoes dos n veis logicos para TTL.

Portas lógicas - tempo de propagação

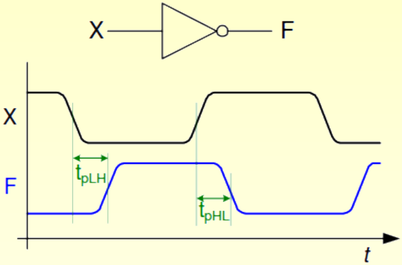
Idealmente, as portas lógicas responderiam instantaneamente a variações na entrada...



Portas lógicas - tempo de propagação

...mas, na realidade:

- os sinais de entrada não são ondas perfeitas
- as portas lógicas respondem com um atraso temporal



Portas lógicas - tempo de propagação

t_{pLH} – Tempo de propagação LOW→HIGH

Tempo que a saída demora a subir em resposta a uma variação na entrada que causa essa subida

t_{pHL} – Tempo de propagação HIGH→LOW

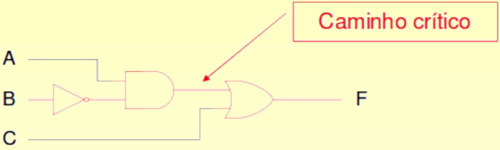
Tempo que a saída demora a descer em resposta a uma variação na entrada que causa essa descida

t_{pd} – Tempo de propagação

$t_{pd} = \mathrm{Max}(t_{pLH,}\, t_{pH})$

Portas lógicas - tempo de propagação

Exemplo:



$t_{pd(Total)} = t_{pd(NOT)} + t_{pd(AND)} + t_{pd(OR)} = 27ns$

Exemplo de uma situação:

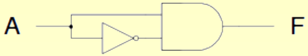
passagem de A=1, B=1, C=0 $\rightarrow$ F=0

para A=1, B=0, C=0 $\rightarrow$ F=1 (B mudou de 1 para 0)

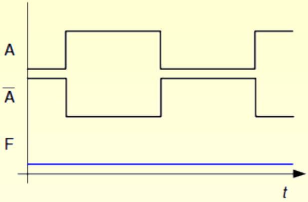
Portas lógicas - tempo de propagação

Os tempos de propagação podem também ser responsáveis por ocorrerem "picos" na saída...

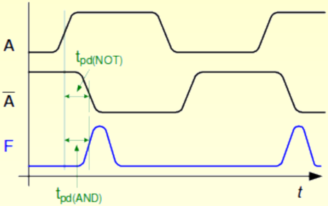
Exemplo:



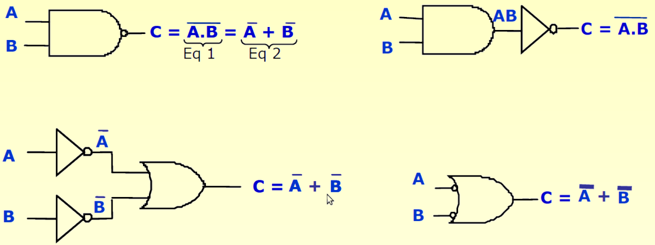
Comportamento teórico



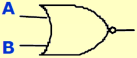
Comportamento mais realista



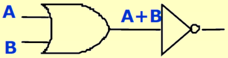
Portas lógicas - equivalencia NAND



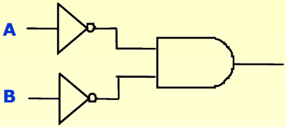
Portas lógicas - equivalencia NOR



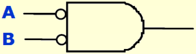
$C = \overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$



$C = \overline{A+B}$

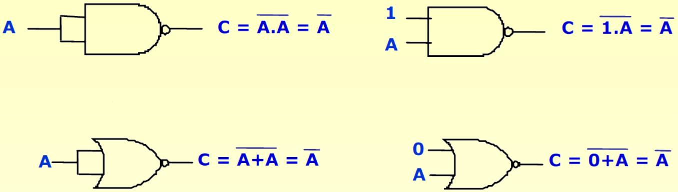


$C = \bar{A} \cdot \bar{B} = \overline{\overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}} = \overline{A + B}$



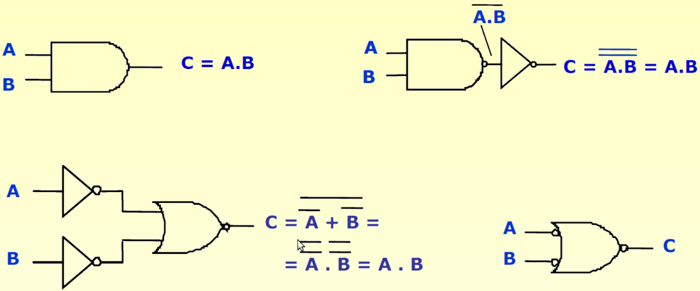
$C = \bar{A} \cdot \bar{B}$

Portas lógicas - equivalencia NOT

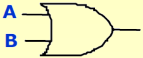


Portas lógicas - equivalencia AND

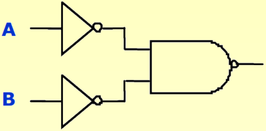
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA



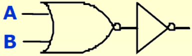
Portas lógicas - equivalencia OR



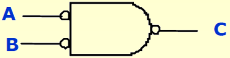
$C = A+B$



$C = \overline{\overline{A}.\overline{B}} = A+B$



$C = \overline{\overline{A + B}} = A+B$



Portas lógicas

Considerando a função booleana
$f(A, B, C) = A.\overline{B}.C + \overline{A}.(\overline{C} + B)$

Crie a tabela verdade da função

Represente um circuito composto por portas lógicas

MinTermos

x	y	z	f(x,y,z)	f'(x,y,z)
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

$$\begin{aligned} f &= x'y'z' + x'y'z + x'yz' + x'yz + xyz' \\ &= m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_6 \\ &= \Sigma m(0,1,2,3,6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f' &= xy'z' + xy'z + xyz \\ &= m_4 + m_5 + m_7 \\ &= \Sigma m(4,5,7) \end{aligned}$$

MaxTermos

x	y	z	f(x,y,z)	f'(x,y,z)
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

$$f = (x' + y + z)(x' + y + z')(x' + y' + z')$$
$$= M_4 M_5 M_7$$
$$= \Pi M(4,5,7)$$

$$f' = (x + y + z)(x + y + z')(x + y' + z)$$
$$(x + y' + z')(x' + y' + z)$$
$$= M_0 M_1 M_2 M_3 M_6$$
$$= \Pi M(0,1,2,3,6)$$

Formas padrão das funções lógicas

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Produto de somas:

$f(A, B, C) = A(\overline{B} + C)$

Pretende-se transformar a equação em produto de somas. O primeiro termo falta B e C e o segundo termo falta A. Utilizando um truque, podemos inserir um termo $B\overline{B}$ e $C\overline{C}$ ao primeiro termo e $A\overline{A}$ ao segundo.

$(A + B\overline{B} + C\overline{C})(B + C + A\overline{A})$

Depois, basta aplicar o teorema que diz $:A + BC = (A + B)(A + C)$ (distributividade).

Formas padrão das funções lógicas

Soma de produtos:

$f(A, B, C, D) = (A\overline{B} + \overline{A}B)(C + \overline{C}D)$

Pretende-se transformar a equação em soma de produtos.

Podemos realizar as multiplicações, resultando em:

$A\overline{B}C + A\overline{B}.\overline{C}D + \overline{A}.BC + \overline{A}B\overline{C}D$

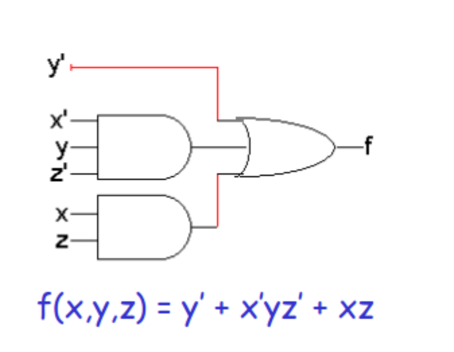
Agora, adiciona-se os termos faltantes $(D + \overline{D})$, resultando em:

$A\overline{B}C(D + \overline{D}) + A\overline{B}.\overline{C}D + \overline{A}.BC(D + \overline{D}) + \overline{A}B\overline{C}D$

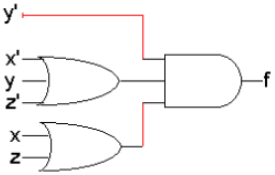
$A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}.\overline{C}D + \overline{A}.BCD + \overline{A}.BC\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D$

$A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}.\overline{C}D + \overline{A}.BCD + \overline{A}.BC\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D$

Estruturas de dois níveis de portas

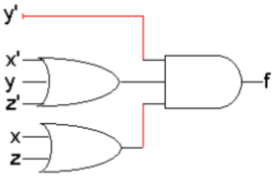


Estruturas de dois níveis de portas



$$f(x,y,z) = y'\,(x' + y + z')\,(x + z)$$

circuitos Equivalentes



$$f(x,y,z) = y'\,(x' + y + z')\,(x + z)$$