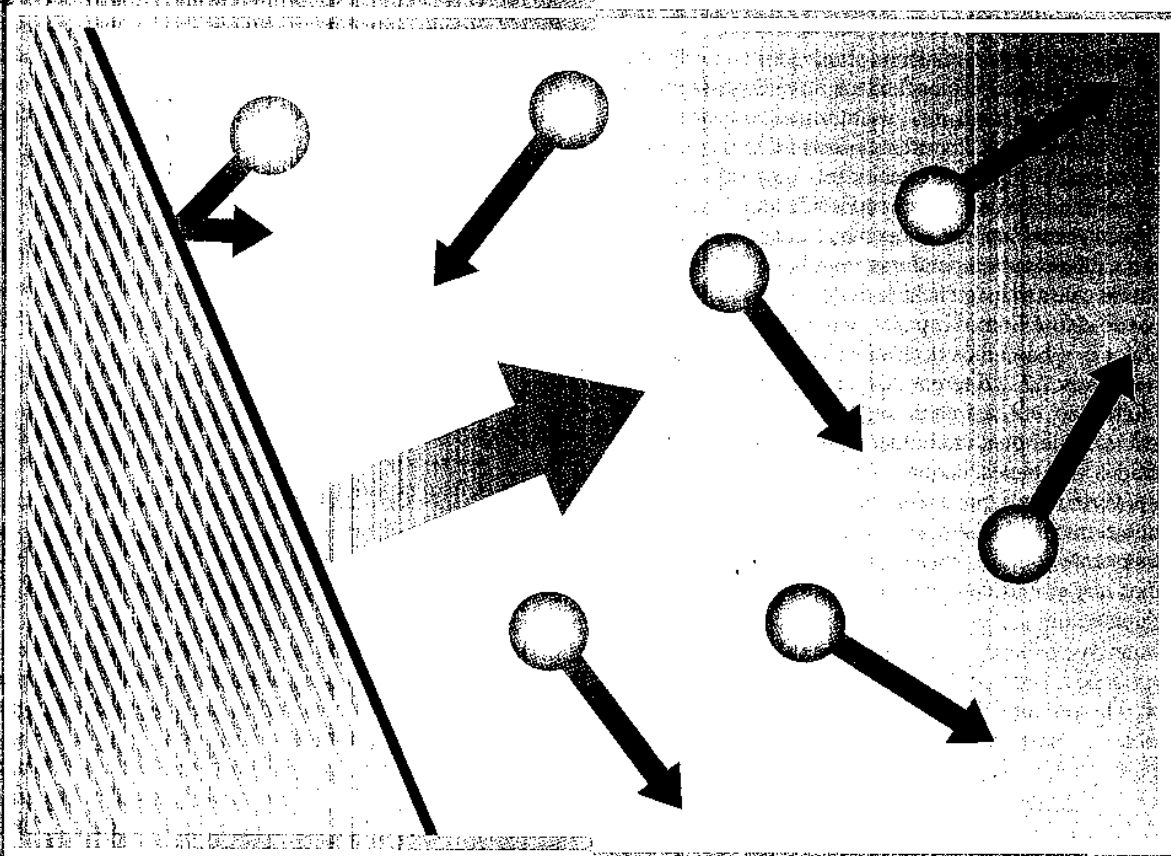


## 2

# Introdução à Condução



**L**embre-se de que a condução se refere ao transporte de energia em um meio devido a um gradiente de temperatura e o mecanismo físico é a atividade atômica ou molecular aleatória. No Capítulo 1, aprendemos que a transferência de calor por condução é governada pela *lei de Fourier* e que o uso desta lei para determinar o fluxo térmico depende do conhecimento da forma na qual a temperatura varia no meio (a *distribuição de temperaturas*). Inicialmente, restringimos nossa atenção a condições simplificadas (condução unidimensional e em regime estacionário em uma parede plana) nas quais a distribuição de temperaturas é facilmente deduzida, sendo linear. Contudo, a lei de Fourier pode ser aplicada à condução transiente e multidimensional em geometrias complexas, nas quais a natureza da distribuição de temperaturas não é evidente.

Os objetivos deste capítulo são dois. Primeiramente, desejamos desenvolver um entendimento mais profundo da lei de Fourier. Quais são suas origens? Que forma ela tem em diferentes geometrias? Como sua constante de proporcionalidade (a *condutividade térmica*) depende da natureza física do meio? Nosso segundo objetivo é desenvolver, a partir de princípios básicos, a equação geral, chamada de *equação do calor*, que governa a distribuição de temperaturas em um meio. É a solução dessa equação que fornece o conhecimento da distribuição de temperaturas, que pode ser, então, usada com a lei de Fourier para determinar o fluxo térmico.

## 2.1

### A Equação da Taxa da Condução

Embora a equação da taxa da condução, lei de Fourier, tenha sido apresentada na Seção 1.2, este é o momento apropriado para analisarmos a sua origem. A lei de Fourier é *fenomenológica*, isto é, ela foi desenvolvida a partir de fenômenos observados ao invés de ter sido derivada a partir de princípios fundamentais. Por esse motivo, vemos a equação da taxa como uma generalização baseada em uma vasta evidência experimental. Por exemplo, considere o experimento de condução de calor, em regime estacionário, mostrado na Figura 2.1. Um bastão cilíndrico de material conhecido tem a sua superfície lateral isolada termicamente, enquanto as duas faces restantes são mantidas a diferentes temperaturas, com  $T_1 > T_2$ . A diferença de temperaturas causa transferência de calor por condução no sentido positivo do eixo  $x$ . Somos capazes de medir a taxa de transferência de calor  $q_x$  e buscamos determinar como  $q_x$  depende das seguintes variáveis:  $\Delta T$ , a diferença de temperaturas;  $\Delta x$ , o comprimento do bastão; e  $A$ , a área da seção transversal do bastão.

Podemos imaginar que, inicialmente, os valores de  $\Delta T$  e  $\Delta x$  sejam mantidos constantes, enquanto o valor de  $A$  varia. Ao fazermos isso, verificamos que  $q_x$  é diretamente proporcional a  $A$ . Analogamente, mantendo  $\Delta T$  e  $A$  constantes, observamos que  $q_x$  varia inversamente com  $\Delta x$ . Finalmente, mantendo  $A$  e  $\Delta x$  constantes, temos que  $q_x$  é diretamente proporcional a  $\Delta T$ . O efeito conjunto é, então,

$$q_x \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

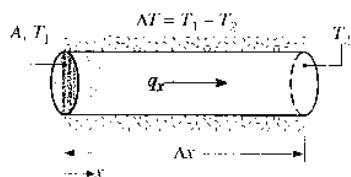


FIGURA 2.1 Experimento de condução térmica em regime estacionário.

Ao mudarmos o material (por exemplo, de um metal para um plástico), observaríamos que a proporcionalidade anterior permanece válida. Contudo, também constataríamos que, para valores idênticos de  $A$ ,  $\Delta x$ , e  $\Delta T$ , o valor de  $q_x$  seria menor para o plástico do que para o metal. Isso sugere que a proporcionalidade pode ser convertida em uma igualdade pela introdução de um coeficiente que é uma medida do comportamento do material. Assim, escrevemos

$$q_x = kA \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

onde  $k$ , a *condutividade térmica* ( $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ), é uma importante *propriedade* do material. Levando a expressão anterior ao limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , obtemos para a *taxa* de transferência de calor

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad (2.1)$$

ou para o *fluxo* de calor (fluxo térmico)

$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (2.2)$$

Lembre-se de que o sinal de menos é necessário porque o calor é sempre transferido no sentido da diminuição das temperaturas.

A lei de Fourier, como escrita na Equação 2.2, implica que o fluxo térmico é uma grandeza direcional. Em particular, a direção de  $q_x''$  é *normal* à área da seção transversal  $A$ . Ou, de uma forma mais geral, a direção do escoamento de calor será sempre normal a uma superfície de temperatura constante, chamada de superfície *isotérmica*. A Figura 2.2 ilustra o sentido do fluxo térmico  $q_x''$  em uma parede plana na qual o *gradiente de temperatura*  $dT/dx$  é negativo. A partir da Equação 2.2, conclui-se que  $q_x''$  é positivo. Note que as superfícies isotérmicas são planos normais à direção do eixo  $x$ .

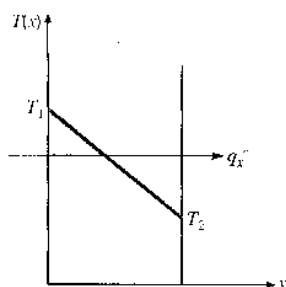


FIGURA 2.2 A relação entre o sistema de coordenadas, o sentido do escoamento de calor e o gradiente de temperatura em uma dimensão.

Reconhecendo que o fluxo térmico é uma grandeza vetorial, podemos escrever um enunciado mais geral para a equação da taxa da condução (*lei de Fourier*) da seguinte forma:

$$\mathbf{q}'' = -k\nabla T = -k\left(\mathbf{i}\frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (2.3)$$

onde  $\nabla$  é o operador "grad" tridimensional e  $T(x, y, z)$  é o campo escalar de temperaturas. Está implícito na Equação 2.3 que o vetor fluxo térmico encontra-se em uma direção perpendicular às superfícies isotérmicas. Consequentemente, uma forma alternativa da lei de Fourier é

$$q''_n = -k\frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.4)$$

onde  $q''_n$  é o fluxo térmico em uma direção  $n$ , que é normal a uma *isoterma*, como mostrado para o caso bidimensional na Figura 2.3. A transferência de calor é mantida pelo gradiente de temperatura ao longo de  $n$ . Observe também que o vetor fluxo térmico pode ser decomposto em componentes, de tal forma que, em coordenadas cartesianas, a expressão geral para  $\mathbf{q}''$  é

$$\mathbf{q}'' = i q''_x + j q''_y + k q''_z \quad (2.5)$$

## 2.2

### As Propriedades Térmicas da Matéria

Para usar a lei de Fourier, a condutividade térmica do material deve ser conhecida. Essa propriedade, que é classificada como uma *propriedade de transporte*, fornece uma indicação da taxa na qual a energia é transferida pelo processo de difusão. Ela depende da estrutura física da matéria, atômica e molecular, que está relacionada ao estado da matéria. Nesta seção, analisaremos várias formas da matéria, identificando aspectos importantes dos seus comportamentos e apresentando valores típicos desta propriedade.

#### 2.2.1 Condutividade Térmica

A partir da lei de Fourier, Equação 2.6, a condutividade térmica associada à condução na direção  $x$  é definida como

$$k_x \equiv -\frac{q''_x}{(\partial T/\partial x)}$$

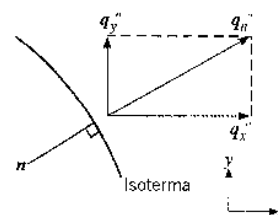


FIGURA 2.3 O vetor fluxo térmico normal a uma isoterma em um sistema de coordenadas bidimensional.

onde, a partir da equação 2.3, tem-se que

$$q''_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \quad q''_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \quad q''_z = -k\frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.6)$$

Cada uma dessas expressões relaciona o fluxo térmico *através de uma superfície* ao gradiente de temperatura em uma direção perpendicular à superfície. Também está implícito na Equação 2.3 que o meio através do qual a condução ocorre é *isotrópico*. Em tal meio, o valor da condutividade térmica é independente da direção da coordenada.

A lei de Fourier é a pedra fundamental da transferência de calor por condução e suas características principais são resumidas a seguir. Ela *não* é uma expressão que possa ser derivada a partir de princípios fundamentais; ao contrário, ela é uma generalização baseada em evidências experimentais. Ela é uma expressão que *define* uma importante propriedade dos materiais, a condutividade térmica. Além disso, a lei de Fourier é uma expressão vetorial, indicando que o fluxo térmico é normal a uma isoterma e no sentido da diminuição das temperaturas. Finalmente, note que a lei de Fourier se aplica a toda matéria, independentemente do seu estado físico (sólido, líquido ou gás).

Definições similares são associadas às condutividades térmicas nas direções  $y$  e  $z$  ( $k_y, k_z$ ), porém para um material isotrópico a condutividade térmica é independente da direção de transferência,  $k_x = k_y = k_z \equiv k$ .

Da equação anterior tem-se que, para um dado gradiente de temperatura, o fluxo térmico por condução aumenta com o aumento da condutividade térmica. Em geral, a condutividade térmica de um sólido é maior do que a de um líquido, que, por sua vez, é maior do que a de um gás. Conforme ilustrado na Figura 2.4, a condutividade térmica de um sólido pode ser mais do que quatro ordens de grandeza superior à de um gás. Essa tendência se deve, em grande parte, à diferença no espaçamento intermolecular nos dois estados.

**O Estado Sólido** Na visão moderna dos materiais, um sólido pode ser composto por elétrons livres e átomos ligados em um arranjo periódico chamado de *lattice*. Consequentemente, o trans-

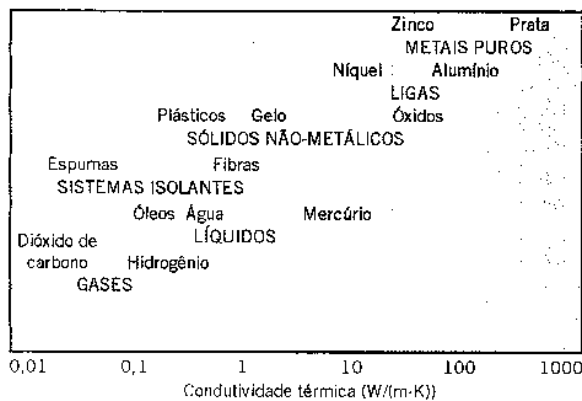


FIGURA 2.1 Faixas da condutividade térmica de vários estados da matéria a temperaturas e pressões normais.

porte de energia térmica pode ser devido a dois efeitos: migração de elétrons livres e ondas vibracionais no *lattice*. Quando visto como um fenômeno de partículas, os *quanta* da vibração do *lattice* são chamados de *fônons*. Em metais puros, a contribuição dos elétrons para a transferência de calor por condução predomina, enquanto em não-condutores e semicondutores a contribuição dos fônons é dominante.

A teoria cinética fornece a expressão a seguir para a condutividade térmica [1]:

$$k = \frac{1}{3} C \bar{v} \lambda_{\text{ipm}} \quad (2.7)$$

Para materiais condutores como os metais,  $C \equiv C_e$  é o calor específico do elétron por unidade de volume,  $\bar{v}$  é a velocidade média do elétron e  $\lambda_{\text{ipm}} \equiv \lambda_e$  é o livre percurso médio do elétron, que é definido como a distância média percorrida por um elétron antes de colidir com uma imperfeição no material ou com um fônon. Em sólidos não-condutores,  $C \equiv C_f$  é o calor específico do fônon,  $\bar{v}$  é a velocidade média do som e  $\lambda_{\text{ipm}} \equiv \lambda_f$  é o livre percurso médio do fônon, que novamente é determinado por colisões com imperfeições ou outros fônons. Em todos os casos, a condutividade térmica aumenta na medida em que o livre percurso médio dos transportadores de energia (elétrons ou fônons) é aumentado.

Quando elétrons e fônons transportam energia térmica levando à transferência de calor por condução em um sólido, a condutividade térmica  $k$  pode ser representada por

$$k = k_e + k_f \quad (2.8)$$

Em uma primeira aproximação,  $k_e$  é inversamente proporcional à resistividade elétrica,  $\rho_e$ . Para metais puros, que possuem um valor baixo de  $\rho_e$ ,  $k_e$  é muito maior do que  $k_f$ . Ao contrário, para ligas, que possuem um valor de  $\rho_e$  substancialmente mais elevado, a contribuição de  $k_f$  para  $k$  passa a não ser mais desprezível. Para sólidos não-metálicos,  $k$  é determinada principalmente por  $k_f$ , que aumenta na medida em que a frequência das interações entre os átomos e o *lattice* diminuem. A regularidade do arranjo do *lattice* tem um efeito importante em  $k_f$ , com materiais cristalinos (bem-ordenados), como o quartzo, possuindo uma condutividade térmica maior do que materiais amorfos, como o vidro.

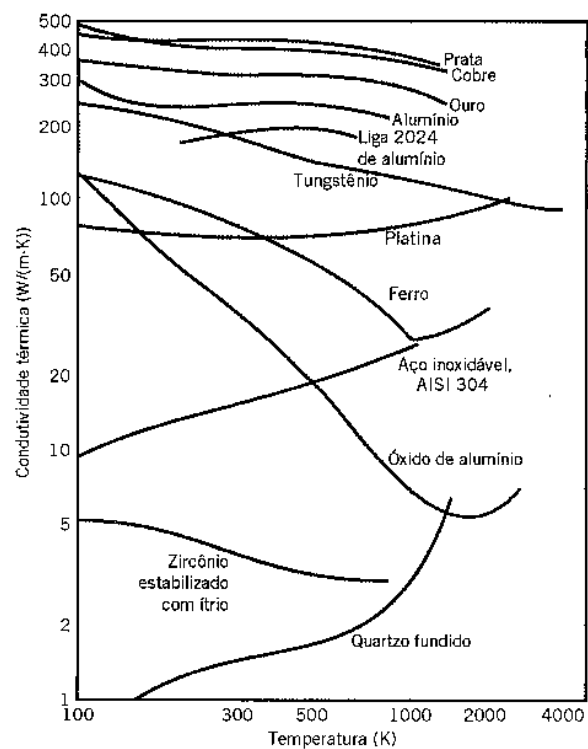


FIGURA 2.5 A dependência com a temperatura da condutividade térmica de sólidos selecionados.

Na realidade, para sólidos cristalinos não-metálicos, tais como o diamante e o óxido de berílio,  $k_f$  podem ser bastante grandes, excedendo valores de  $k$  associados a bons condutores, como o alumínio.

A dependência de  $k$  com a temperatura é mostrada na Figura 2.5 para sólidos metálicos e não-metálicos representativos. Valores de materiais selecionados, de importância técnica, também são fornecidos na Tabela A.1 (sólidos metálicos) e nas Tabelas A.2 e A.3 (sólidos não-metálicos). Análises mais detalhadas da condutividade térmica estão disponíveis na literatura [2].

**O Estado Sólido: Efeitos em Escalas Micro e Nano** Na discussão anterior, a condutividade térmica *global* é descrita e os respectivos valores, listados nas Tabelas A.1 a A.3, são apropriados para o uso quando as dimensões físicas do material de interesse são relativamente grandes. Este é o caso em muitos problemas tradicionais de engenharia. Entretanto, em algumas áreas da tecnologia, como a microeletrônica, as dimensões características dos materiais podem ser da ordem de micrômetros ou nanômetros. Nesses casos, deve-se tomar cuidado para levar em conta as possíveis modificações em  $k$  que podem ocorrer na medida em que as dimensões físicas ficam pequenas.

Seções transversais de *filmes* do mesmo material que possuem espessuras  $L_1$  e  $L_2$  são mostradas na Figura 2.6. Elétrons ou fônons que estão associados à condução de energia térmica são também mostrados qualitativamente. Note que as fronteiras físicas do filme agem no *espalhamento* dos transportadores de energia e no *redirecionamento* de sua propagação. Para grandes  $L/\lambda_{\text{ipm}}$  (Figura 2.6a), o efeito das fronteiras na redução do comprimento médio da trajetória do transportador de energia é me-

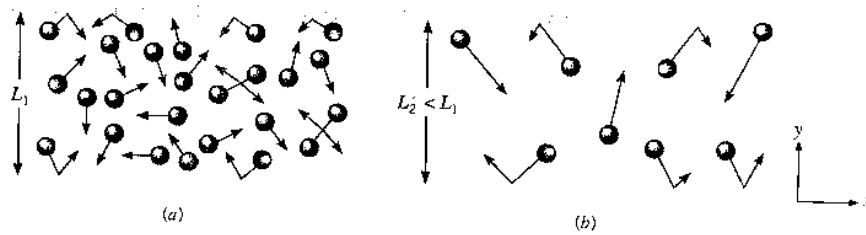


FIGURA 2.6 Trajetórias de elétrons e fônons com efeitos de fronteiras em (a) um filme relativamente espesso e (b) um filme relativamente fino.

nor e a transferência de calor por condução ocorre como descrito de forma global nos materiais. Contudo, na medida em que o filme se torna mais fino, as fronteiras físicas do material podem diminuir a distância média líquida percorrida pelos transportadores de energia, como mostrado na Figura 2.6b. Além disso, elétrons e fônons que se movimentam na diminuta direção  $y$  (representando a condução na direção  $y$ ) são afetados pelas fronteiras de uma forma mais significativa do que os transportadores de energia que se movem na direção  $x$ . Desta forma, para filmes caracterizados por pequenos  $L/\lambda_{\text{ipm}}$ , temos que  $k_y < k_x < k$ , onde  $k$  é a condutividade térmica global do material do filme.

Para  $L/\lambda_{\text{ipm}} \geq 1$ , valores para  $k_x$  e  $k_y$  podem ser estimados com 20% de precisão a partir das seguintes expressões[1]:

$$k_x/k = 1 - 2\lambda_{\text{ipm}}/(3\pi L) \quad (2.9a)$$

$$k_y/k = 1 - \lambda_{\text{ipm}}/(3L) \quad (2.9b)$$

As Equações 2.9a,b revelam que os valores de  $k_x$  e  $k_y$  se afastam no máximo aproximadamente 5% da condutividade térmica global se  $L/\lambda_{\text{ipm}} > 7$  (para  $k_x$ ) e  $L/\lambda_{\text{ipm}} > 4,5$  (para  $k_y$ ). Valores do livre percurso médio, assim como da espessura de filme crítica,  $L_{\text{crit}}$ , abaixo da qual os efeitos de microescala têm que ser considerados, são incluídos na Tabela 2.1 para alguns materiais a  $T \approx 300$  K. Para filmes com  $\lambda_{\text{ipm}} < L < L_{\text{crit}}$ ,  $k_x$  e  $k_y$  são determinados a partir dos valores globais como indicado nas Equações 2.9a, b. Não há regras gerais para prever valores das condutividades térmicas para  $L/\lambda_{\text{ipm}} < 1$ . Note que, em sólidos, os valores de  $\lambda_{\text{ipm}}$  diminuem na medida em que a temperatura aumenta.

Em adição ao espalhamento a partir das fronteiras físicas, como no caso da Figura 2.6b, os transportadores de energia podem ser redirecionados por *dopantes* químicos impregnados no material ou pelas *fronteiras dos grãos*, que separam *clusters* individuais do material em outro modo de matéria homogênea. *Materiais nanoestruturados* são quimicamente idênticos aos seus correspondentes na forma convencional, porém são processados termicamente para fornecer tamanhos de grãos muito pequenos

no material final e, na perspectiva da transferência de calor, há um aumento significativo do espalhamento e da reflexão dos transportadores de energia nas fronteiras dos grãos.

Valores medidos da condutividade térmica de um material nanoestruturado de zircônio estabilizado com ítrio são mostrados na Figura 2.7. Esta cerâmica particular é largamente usada com objetivos de isolamento térmico em dispositivos de combustão a alta temperatura, como motores de turbina a gás. A condução é dominada pela transferência de fônons e o livre percurso médio dos transportadores de energia na forma de fônons é, a partir da Tabela 2.1,  $\lambda_{\text{ipm}} = 25$  nm a 300 K. Na medida em que o tamanho dos grãos é reduzido para dimensões características menores do que 25 nm (e mais fronteiras de grãos são introduzidas no material por unidade de volume), ocorre uma significativa redução da condutividade térmica. A extrapolação dos resultados da Figura 2.7 para temperaturas maiores não é recomendada, pois o livre percurso médio diminui com o aumento da temperatura ( $\lambda_{\text{ipm}} \approx 4$  nm para  $T \approx 1525$  K) e grãos do material podem coalescer, se unir e aumentar a temperaturas elevadas. Consequentemente,  $L/\lambda_{\text{ipm}}$  se torna maior em altas temperaturas e a redução de  $k$  devido aos efeitos em nanoescala é menos pronunciada.

**O Estado Fluido** O estado fluido inclui tanto líquidos quanto gases. Como o espaçamento intermolecular é muito maior e o movimento das moléculas é mais aleatório para o estado fluido em relação ao estado sólido, o transporte de energia térmica é menos efetivo. Consequentemente, a condutividade térmica de gases e de líquidos é geralmente menor do que a de sólidos.

O efeito da temperatura, da pressão e das espécies químicas presentes na condutividade térmica de um gás pode ser explicado pela teoria cinética dos gases [5]. Desta teoria sabe-se que a condutividade térmica é diretamente proporcional à densidade do gás, à velocidade molecular média  $\bar{c}$  e ao livre percurso médio  $\lambda_{\text{ipm}}$ , que é a distância média percorrida por um

TABELA 2.1 Livre percurso médio e espessura de filme crítica para vários materiais a  $T \approx 300$  K[3,4]

Material	$\lambda_{\text{ipm}}$ (nm)	$L_{\text{crit},y}$ (nm)	$L_{\text{crit},x}$ (nm)
Arsenito de gálio	23	160	100
Diamante(IIa)	315	2200	1400
Dióxido de silício	0,6	4	3
Ouro	31	220	140
Óxido de alumínio	5,08	36	22
Silício	43	290	180
Zircônio estabilizado com ítrio	25	170	110

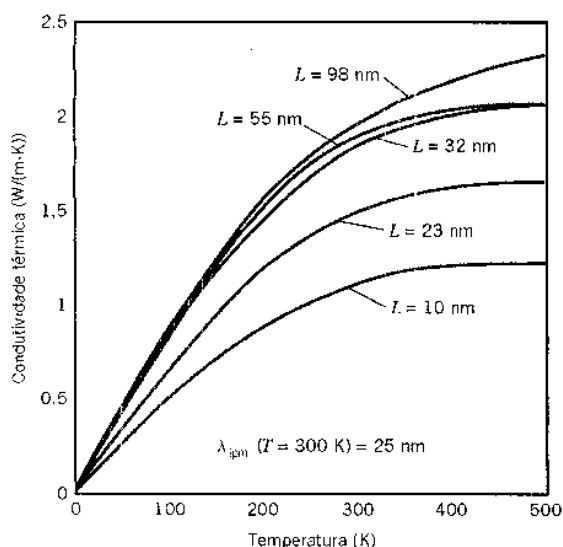


FIGURA 2.7 Condutividades térmicas medidas do zircônio estabilizado com ítrio como uma função da temperatura e do tamanho médio dos grãos [3].

transportador de energia (uma molécula) antes de experimentar uma colisão.

$$k = \frac{1}{3} \bar{c}_v \rho \bar{c} \lambda_{ipm} \quad (2.10)$$

Uma vez que  $\bar{c}$  aumenta com o aumento da temperatura e com a diminuição da massa molecular, a condutividade térmica de um gás aumenta com a elevação da temperatura e com a diminuição da massa molecular. Essas tendências são mostradas na Figura 2.8. Contudo, como  $\rho$  e  $\lambda_{ipm}$  são direta e inversamente proporcionais à pressão do gás, respectivamente, a condutividade térmica é independente da pressão, à exceção de casos extremos como, por exemplo, quando as condições se aproximam daquelas do vácuo perfeito. Conseqüentemente, a hipótese de que  $k$  é independente da pressão do gás para grandes volumes de gás é apropriada para as faixas de pressão de interesse neste texto. Dessa forma, embora os valores de  $k$  apresentados na Tabela A.4 se refiram à pressão atmosférica ou à pressão de saturação correspondente à temperatura dada, eles podem ser usados em uma faixa ampla de pressões.

As condições moleculares associadas ao estado líquido são mais difíceis de serem descritas e os mecanismos físicos envolvidos na explicação da condutividade térmica não são bem entendidos [6]. A condutividade térmica de líquidos não-metálicos geralmente diminui com o aumento da temperatura. Como mostrado na Figura 2.9, água, glicerina e óleo de motor são notáveis exceções. A condutividade térmica de líquidos normalmente não varia com a pressão, exceto nas proximidades do ponto crítico. Também é geralmente verdade que a condutividade térmica diminui com o aumento da massa molecular. Valores da condutividade térmica são freqüentemente tabelados em função da temperatura para o estado saturado do líquido. As Tabelas A.5 e A.6 apresentam esses dados para vários líquidos de uso comum.

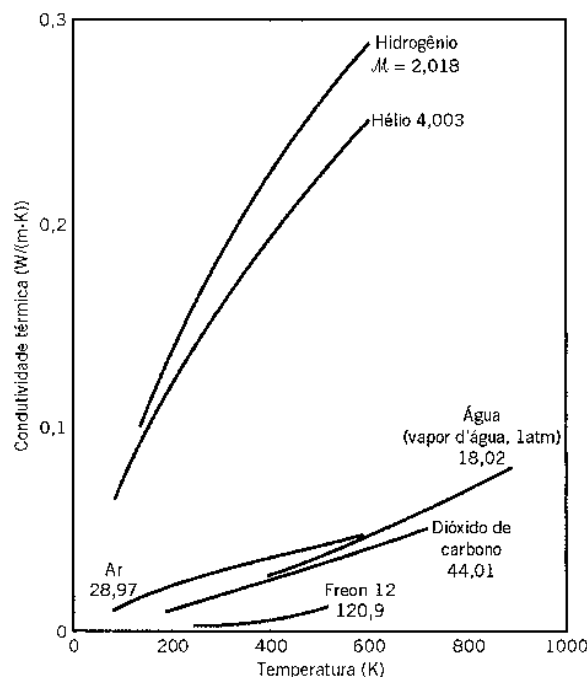


FIGURA 2.8 A dependência com a temperatura da condutividade térmica de gases selecionados a pressões normais. Massas moleculares ( $M$ ) dos gases também são mostradas.

Metais líquidos são freqüentemente utilizados em aplicações com elevados fluxos térmicos, tais como as que existem em usinas nucleares de potência. A condutividade térmica desses líquidos é dada na Tabela A.7. Observe que os valores são muito maiores do que aqueles dos líquidos não-metálicos [7].

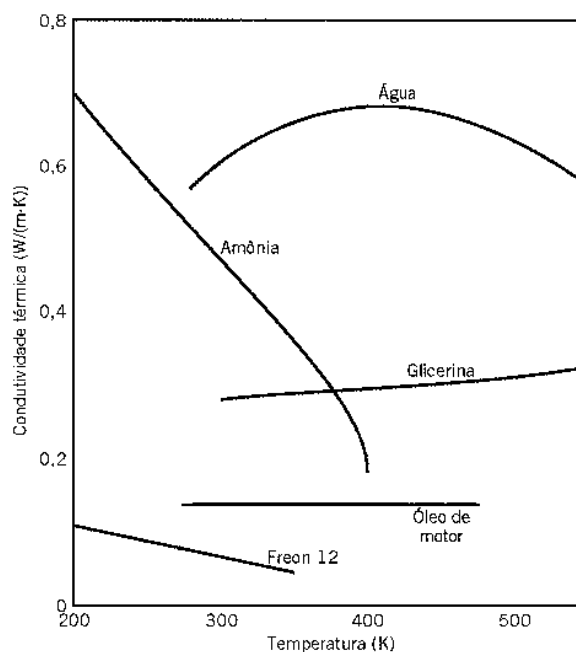


FIGURA 2.9 A dependência com a temperatura da condutividade térmica de líquidos não-metálicos selecionados sob condições saturadas.

### O Estado Fluido: Efeitos em Escalas Micro e Nano

Como no estado sólido, a condutividade térmica global pode ser modificada na medida em que as dimensões características do sistema se tornam pequenas, em particular para valores pequenos de  $L/\lambda_{\text{ipm}}$ . Assim como na situação mostrada na Figura 2.6b, o livre percurso médio das moléculas se torna restrito quando o fluido é, por exemplo, contido em um reservatório de pequena dimensão física.

**Sistemas de Isolamento** Isolantes térmicos são constituídos por materiais de baixa condutividade térmica combinados para obter uma condutividade térmica do sistema ainda menor. Nos isolantes tradicionais do tipo *fibras*, *pós*, ou *flocos*, o material sólido encontra-se finamente disperso em um espaço contendo ar. Tais sistemas são caracterizados por uma *condutividade térmica efetiva*, que depende da condutividade térmica e das propriedades radiantes da superfície do material sólido, bem como da natureza e da fração volumétrica de ar ou espaços vazios. Um importante parâmetro do sistema é a sua densidade aparente (massa do sólido/volume total), que depende fortemente da forma na qual o material está empacotado.

Se pequenos espaços são formados pela ligação ou fundição de porções do material sólido, uma matriz rígida é criada. Quando não há ligação entre esses espaços, o sistema é conhecido como um isolante *celular*. Exemplos de tais isolantes rígidos são sistemas de *espumas*, particularmente aqueles feitos com materiais plásticos ou vítreos. Isolantes *refletivos* são compostos por múltiplas e paralelas camadas de folhas finas ou lâminas de alta refletividade, que são espaçadas entre si de modo a refletir a energia radiante de volta à sua origem. O espaçamento entre as folhas é projetado de modo a restringir o movimento do ar e, em isolantes de alta *performance*, há vácuo nesse espaço. Em todos os tipos de isolantes, vácuo nos espaços vazios implica na redução da condutividade térmica efetiva do sistema.

É importante reconhecer que a transferência de calor através de qualquer um desses sistemas de isolamento pode incluir vários modos: condução através dos materiais sólidos; condução ou convecção através do ar nos espaços vazios e troca radiante entre superfícies da matriz sólida. A condutividade térmica efetiva leva em consideração todos esses processos e valores para alguns sistemas de isolamento selecionados que estão resumidos na

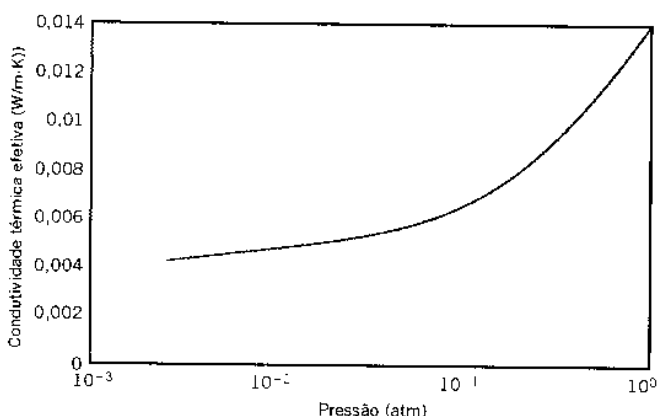


FIGURA 2.10 Condutividade térmica medida de aerogel de sílica dopado com carbono como uma função da pressão a  $T \approx 300$  K [10].

Tabela A.3. Informações básicas adicionais e dados estão disponíveis na literatura [8, 9].

Como em filmes finos, efeitos de micro e nanoescala podem influenciar a condutividade térmica efetiva de materiais isolantes. O valor de  $k$  para um aerogel de sílica nanoestruturada, que é composto por aproximadamente 5% em volume de material sólido e 95% em volume de ar retido no interior de poros de  $L \approx 20$  nm, é mostrado na Figura 2.10. Note que a  $T \approx 300$  K, o livre percurso médio do ar na pressão atmosférica é aproximadamente 80 nm. Na medida em que a pressão é reduzida, o  $\lambda_{\text{ipm}}$  crescerá para um gás não-confinado, mas o movimento molecular do ar retido está restrito pelas paredes dos pequenos poros e  $k$  é reduzido a valores extremamente baixos em relação às condutividades térmicas de materiais convencionais mostrados na Figura 2.4.

### 2.2.2 Outras Propriedades Relevantes

Em nossa análise de problemas da transferência de calor, será necessário o uso de várias propriedades da matéria. Essas propriedades são geralmente conhecidas por propriedades *termofísicas* e incluem duas categorias distintas: as propriedades de *transporte* e as propriedades *termodinâmicas*. As propriedades de transporte incluem os coeficientes das taxas de difusão, como  $k$ , a condutividade térmica (para a transferência de calor), e  $\nu$ , a viscosidade cinemática (para a transferência de momento). As propriedades termodinâmicas, por outro lado, dizem respeito ao estado de equilíbrio de um sistema. A densidade ( $\rho$ ) e o calor específico ( $c_p$ ) são duas dessas propriedades muito usadas na análise termodinâmica. O produto  $\rho c_p$  (J/(m<sup>3</sup>·K)), comumente chamado de capacidade calorífica volumétrica, mede a capacidade de um material de armazenar energia térmica. Uma vez que substâncias que possuem densidade elevada são tipicamente caracterizadas por calores específicos com valores pequenos, muitos sólidos e líquidos, que são considerados meios bons para o armazenamento de energia, possuem capacidades caloríficas comparáveis ( $\rho c_p > 1$  MJ/(m<sup>3</sup>·K)). Entretanto, devido às suas muito baixas densidades, os gases são muito pouco adequados para o armazenamento de energia térmica ( $\rho c_p \approx 1$  kJ/(m<sup>3</sup>·K)). Os valores da densidade e do calor específico para uma grande variedade de sólidos, líquidos e gases são fornecidos nas tabelas do Apêndice A.

Em análises da transferência de calor, a razão entre a condutividade térmica e a capacidade calorífica volumétrica é uma importante propriedade chamada *difusividade térmica*  $\alpha$ , que possui como unidades de m<sup>2</sup>/s:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

Ela mede a capacidade do material de conduzir energia térmica em relação à sua capacidade de armazená-la. Materiais com elevados  $\alpha$  responderão rapidamente a mudanças nas condições térmicas a eles impostas, enquanto materiais com reduzidos  $\alpha$  responderão mais lentamente, levando mais tempo para atingir uma nova condição de equilíbrio.

A precisão dos cálculos de engenharia depende da exatidão com que são conhecidos os valores das propriedades termofísicas [11-13]. Poderiam ser citados numerosos exemplos de defeitos em equipamentos e no projeto de processos, ou então de não-atendimento de especificações de *performance*, que poderiam ser atribuídos a informações erradas associadas à seleção de valores de propriedades-chaves utilizados na análise inicial do siste-

ma. A seleção de dados confiáveis para as propriedades é uma parte importante em qualquer análise criteriosa em engenharia. O uso ocasional de dados que não foram bem caracterizados ou avaliados, como podem ser achados em algumas literaturas e em manuais, deve ser evitado. Valores recomendados para muitas

propriedades termofísicas podem ser obtidos a partir da Referência 14. Essa referência, disponível na maioria das bibliotecas institucionais, foi preparada pelo Centro de Pesquisas de Propriedades Termofísicas (*Thermophysical Properties Research Center - TPRC*), na Universidade de Purdue.

### EXEMPLO 2.1

A difusividade térmica  $\alpha$  é a propriedade de transporte que controla um processo de transferência de calor por condução em regime transiente. Usando os valores apropriados de  $k$ ,  $\rho$  e  $c_p$ , disponíveis no Apêndice A, calcule  $\alpha$  para os seguintes materiais nas temperaturas indicadas: alumínio puro, 300 e 700 K; carvão de silício, 1.000 K; parafina, 300 K.

### SOLUÇÃO

**Dados:** Definição da difusividade térmica  $\alpha$ .

**Achar:** Valores numéricos de  $\alpha$  para materiais especificados em temperaturas definidas.

**Propriedades:** Tabela A.1, alumínio puro (300 K):

$$\left. \begin{array}{l} \rho = 2702 \text{ kg/m}^3 \\ c_p = 903 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)} \\ k = 237 \text{ W/(m}\cdot\text{K)} \end{array} \right\} \alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{237 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}}{2702 \text{ kg/m}^3 \times 903 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}} = 97,1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Tabela A.1, alumínio puro (700 K):

$$\left. \begin{array}{ll} \rho = 2702 \text{ kg/m}^3 & \text{a 300 K} \\ c_p = 1090 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)} & \text{a 700 K (por interpolação linear)} \\ k = 225 \text{ W/(m}\cdot\text{K)} & \text{a 700 K (por interpolação linear)} \end{array} \right\}$$

Donde

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{225 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}}{2702 \text{ kg/m}^3 \times 1090 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}} = 76 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Tabela A.2, carvão de silício (1000 K):

$$\left. \begin{array}{ll} \rho = 3160 \text{ kg/m}^3 & \text{a 300 K} \\ c_p = 1195 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)} & \text{a 1000 K} \\ k = 87 \text{ W/(m}\cdot\text{K)} & \text{a 1000 K} \end{array} \right\} \alpha = \frac{87 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}}{3160 \text{ kg/m}^3 \times 1195 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}} = 23 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Tabela A.3, parafina (300 K):

$$\left. \begin{array}{l} \rho = 900 \text{ kg/m}^3 \\ c_p = 2890 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)} \\ k = 0,24 \text{ W/(m}\cdot\text{K)} \end{array} \right\} \alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{0,24 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}}{900 \text{ kg/m}^3 \times 2890 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}} = 9,2 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$$

### Comentários:

1. Observe a dependência das propriedades termofísicas do alumínio e do carvão de silício em relação à temperatura. Por exemplo, para o carvão de silício,  $\alpha(1000 \text{ K}) \approx 0,1 \times \alpha(300 \text{ K})$ ; logo, as propriedades desse material apresentam uma grande dependência da temperatura.
2. A interpretação física de  $\alpha$  é que ela fornece uma medida do transporte de calor ( $k$ ) em relação ao armazenamento de energia ( $\rho c_p$ ). Em geral, os sólidos metálicos possuem elevados  $\alpha$ , enquanto os não-metálicos (por exemplo, a parafina) possuem valores de  $\alpha$  mais baixos.
3. A interpolação linear dos valores das propriedades é em geral aceitável nos cálculos de engenharia.
4. O uso de densidades obtidas a uma temperatura baixa (300 K) em cálculos que envolvem temperaturas mais elevadas ignora os efeitos da expansão térmica, mas também é aceitável para cálculos de engenharia.

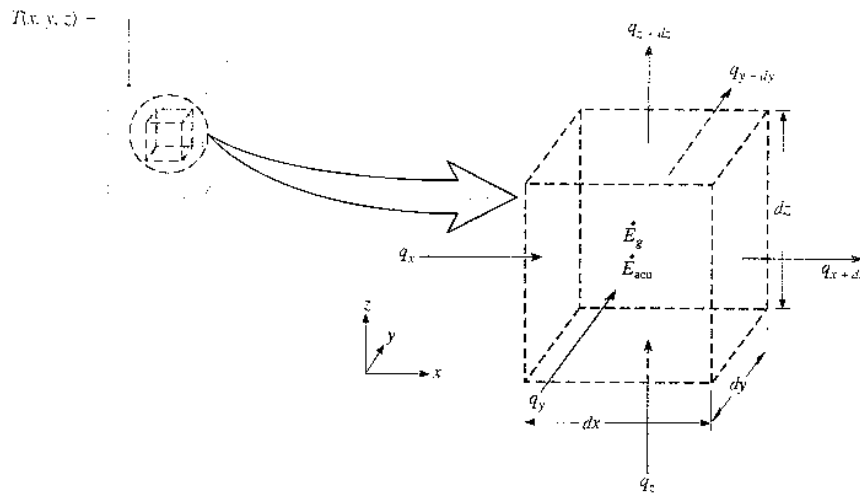
## 2.3

### A Equação da Difusão de Calor (Difusão Térmica)

Um dos objetivos principais da análise da condução de calor é determinar o *campo de temperaturas* em um meio resultante das condições impostas em suas fronteiras. Ou seja, desejamos conhecer a *distribuição de temperaturas*, que representa como a temperatura varia com a posição no meio. Uma vez conhecida essa distribuição, o fluxo de calor por condução (fluxo térmico condutivo) em qualquer ponto do meio ou na sua superfície pode

ser determinado através da lei de Fourier. Outras importantes grandezas de interesse podem também ser determinadas. Para um sólido, o conhecimento da distribuição de temperaturas pode ser usado para verificar a sua integridade estrutural através da determinação de tensões, expansões e deflexões térmicas. A distribuição de temperaturas também pode ser usada para otimizar a espessura de um material isolante ou para determinar a com-



FIGURA 2.11 Volume de controle diferencial,  $dx \, dy \, dz$ , para análise da condução em coordenadas cartesianas.

patibilidade entre revestimentos especiais ou adesivos usados com o material.

Agora consideramos a forma pela qual a distribuição de temperaturas pode ser determinada. O procedimento segue a metodologia, descrita na Seção 1.3.3, de aplicação da exigência de conservação da energia. Neste caso, define-se um *volume de controle diferencial*, identificam-se os processos de transferência de energia relevantes e substituem-se as equações das taxas de transferência de calor apropriadas. O resultado é uma equação diferencial cuja solução, para condições de contorno especificadas, fornece a distribuição de temperaturas no meio.

Considere um meio homogêneo no interior do qual não há movimento macroscópico (advecção) e a distribuição de temperaturas  $T(x, y, z)$  está representada em coordenadas cartesianas. Seguindo a metodologia de aplicar a exigência de conservação da energia (Seção 1.3.3), inicialmente definimos um volume de controle infinitesimalmente pequeno (diferencial),  $dx \, dy \, dz$ , conforme mostrado na Figura 2.11. Optando por formular a primeira lei para um dado instante do tempo, a segunda etapa consiste em identificar os processos energéticos que são relevantes para esse volume de controle. Se há gradientes de temperatura, irá ocorrer transferência de calor por condução através de cada uma das superfícies de controle. As taxas de transferência de calor por condução perpendiculares a cada uma das superfícies de controle na posição de coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  são indicadas pelos termos  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$ , respectivamente. As taxas de transferência de calor por condução nas superfícies opostas podem, então, ser expressas como uma expansão em série de Taylor na qual, desprezando-se os termos de ordens superiores, tem-se

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (2.11a)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (2.11b)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (2.11c)$$

Em palavras, a Equação 2.11a afirma simplesmente que o componente  $x$  da taxa de transferência de calor na posição  $x + dx$  é

igual ao valor desse componente em  $x$  somado à quantidade pela qual ele varia com  $x$  multiplicada por  $dx$ .

No interior do meio pode haver, também, um termo de *fonte de energia* associado à taxa de geração de energia térmica. Esse termo é representado como

$$\dot{E}_g = \dot{q} \, dx \, dy \, dz \quad (2.12)$$

onde  $\dot{q}$  é a taxa na qual a energia é gerada por unidade de volume do meio ( $\text{W/m}^3$ ). Além disso, também podem ocorrer variações na quantidade de energia interna térmica armazenada pela matéria no interior do volume de controle. Na ausência de mudança de fase, os efeitos da energia latente não são pertinentes, e o termo referente ao *acúmulo de energia* pode ser escrito como

$$\dot{E}_{acu} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx \, dy \, dz \quad (2.13)$$

onde  $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$  é a taxa de variação com o tempo da energia sensível (térmica) do meio, por unidade de volume.

Mais uma vez, é importante notar que os termos  $\dot{E}_g$  e  $\dot{E}_{acu}$  representam processos físicos diferentes. O termo referente à geração de energia  $\dot{E}_g$  é a manifestação de algum processo de conversão de energia, envolvendo, de um lado, energia térmica  $q$ , de outro, alguma outra forma de energia, como energia química, elétrica ou nuclear. O termo é positivo (uma *fonte*) se a energia térmica está sendo gerada no material à custa de alguma outra forma de energia; ele é negativo (um *sumidouro*) se energia térmica está sendo consumida. Por outro lado, o termo relativo ao acúmulo de energia  $\dot{E}_{acu}$  se refere à taxa de variação da energia térmica acumulada pela matéria.

A última etapa da metodologia descrita na Seção 1.3.3 consiste em representar a conservação de energia utilizando as equações de taxas anteriormente desenvolvidas. Em uma base de *taxa*, a forma geral da exigência de conservação da energia é

$$\dot{E}_{ent} + \dot{E}_g - \dot{E}_{sai} = \dot{E}_{acu} \quad (1.11c)$$

Logo, reconhecendo que as taxas de condução de calor constituem a entrada de energia,  $\dot{E}_{ent}$ , e a saída de energia,  $\dot{E}_{sai}$ , e substituindo as Equações 2.12 e 2.13, obtemos

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q} dx dy dz = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz} \\ = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (2.14)$$

Substituindo as Equações 2.11, segue-se que

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q} dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (2.15)$$

As taxas de transferência de calor por condução podem ser determinadas pela lei de Fourier,

$$q_x = -k dy dz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.16a)$$

$$q_y = -k dx dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.16b)$$

$$q_z = -k dx dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.16c)$$

onde cada componente do fluxo térmico da Equação 2.6 foi multiplicado pela área da superfície de controle (diferencial) apropriada para obter a taxa de transferência de calor. Substituindo as Equações 2.16 na Equação 2.15 e dividindo todos os termos pelas dimensões do volume de controle ( $dx dy dz$ ), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.17)$$

A Equação 2.17 é a forma geral, em coordenadas cartesianas, da equação da difusão de calor. Essa equação, frequentemente chamada de *equação do calor*, fornece a ferramenta básica para a análise da condução de calor. A partir de sua solução, podemos obter a distribuição de temperaturas  $T(x,y,z)$  como uma função do tempo. A aparente complexidade dessa expressão não deve obscurecer o fato de que ela descreve uma condição física importante, qual seja, a conservação da energia. Você deve possuir uma clara compreensão do significado físico de cada uma das parcelas que aparecem nessa equação. Por exemplo, a parcela  $\partial(k\partial T/\partial x)/\partial x$  está relacionada ao fluxo líquido de calor por condução para o interior do volume de controle na direção da coordenada  $x$ . Desta forma, multiplicando por  $dx$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = q_x'' - q_{x+dx}'' \quad (2.18)$$

Expressões similares se aplicam aos fluxos nas direções  $y$  e  $z$ . Portanto, em palavras, a Equação 2.17 postula que *em qualquer ponto do meio, a taxa líquida de transferência de energia por condução para o interior de um volume unitário somada à taxa volumétrica de geração de energia térmica deve ser igual à taxa de variação da energia térmica acumulada no interior deste volume*.

Com frequência, é possível trabalhar com versões simplificadas da Equação 2.17. Por exemplo, se a condutividade térmica for constante, a equação do calor será

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.19)$$

onde  $\alpha = k/(\rho c_p)$  é a *difusividade térmica*. Simplificações adicionais da forma geral da equação do calor são frequentemente possíveis. Por exemplo, em condições de *regime estacionário* não pode haver variação na quantidade da energia armazenada; assim, a Equação 2.17 se reduz a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0 \quad (2.20)$$

Além disso, se a transferência de calor for *unidimensional* (por exemplo, na direção  $x$ ) e *não existir geração de energia*, a Equação 2.20 se reduz a

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (2.21)$$

A importante consequência desse resultado é que, *em condições de transferência de calor unidimensional, em regime estacionário, sem geração de energia*, o fluxo de calor é uma constante na direção da transferência ( $d\dot{q}/dx = 0$ ).

A equação do calor também pode ser escrita em coordenadas cilíndricas e esféricas. Os volumes de controle diferenciais para esses dois sistemas de coordenadas são mostrados nas Figuras 2.12 e 2.13.

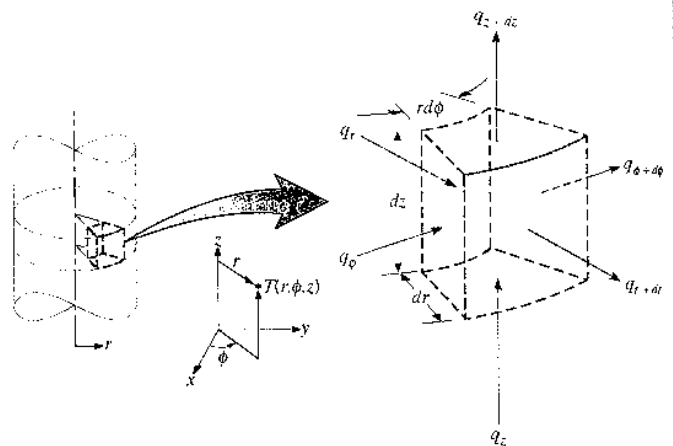


FIGURA 2.12 Volume de controle diferencial,  $dr \cdot r d\phi \cdot dz$ , para análise da condução em coordenadas cilíndricas ( $r, \phi, z$ ).

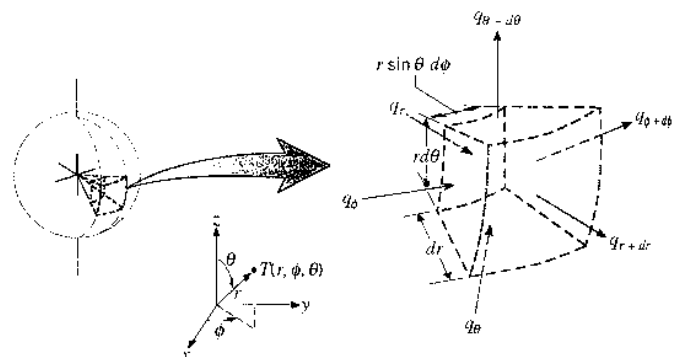


FIGURA 2.13 Volume de controle diferencial,  $dr \cdot r \sin(\theta) d\phi \cdot r d\theta$ , para análise da condução em coordenadas esféricas ( $r, \theta, \phi$ ).

**Coordenadas Cilíndricas** Quando o operador grad ( $\nabla$ ) da Equação 2.3 é representado em coordenadas cilíndricas, a forma geral do vetor fluxo térmico e, portanto, da lei de Fourier é

$$\mathbf{q}'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial r} + j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} + k\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (2.22)$$

na qual

$$q_r'' = -k\frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} \quad q_z'' = -k\frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.23)$$

são os componentes do fluxo térmico nas direções radial, circumferencial e axial, respectivamente. Aplicando um balanço de energia no volume de controle diferencial da Figura 2.12, a seguinte forma geral da equação do calor é obtida:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.24)$$

**Coordenadas Esféricas** Em coordenadas esféricas, a forma geral do vetor fluxo térmico e da lei de Fourier é

$$\mathbf{q}'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial r} + j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + k\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) \quad (2.25)$$

na qual

$$q_r'' = -k\frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\theta'' = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi} \quad (2.26)$$

são os componentes do fluxo térmico nas direções radial, polar e azimutal, respectivamente. Aplicando um balanço de energia no volume de controle diferencial da Figura 2.13, a seguinte forma geral da equação do calor é obtida:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.27)$$

Uma vez que é importante que você seja capaz de aplicar os princípios de conservação em volumes de controle diferenciais, você deve tentar deduzir a Equação 2.24 ou 2.27 (veja os Problemas 2.35 e 2.36). Note que o gradiente de temperatura na lei de Fourier deve ter unidades de K/m. Por esse motivo, ao determinar o gradiente para uma coordenada angular, ele deve estar expresso em termos de uma variação diferencial de *comprimento do arco*. Por exemplo, o componente do fluxo térmico na direção circumferencial no sistema de coordenadas cilíndricas é  $\dot{q}_\phi = -(k/r)(\partial T/\partial \phi)$  e não  $\dot{q}_\phi = -k(\partial T/\partial \phi)$ .

## EXEMPLO 2.2

A distribuição de temperaturas ao longo de uma parede com espessura de 1 m, em um certo instante de tempo, é dada por

$$T(x) = a + bx + cx^2$$

na qual  $T$  está em graus Celsius e  $x$  em metros, enquanto  $a = 900^\circ\text{C}$ ,  $b = -300^\circ\text{C/m}$ , e  $c = -50^\circ\text{C/m}^2$ . Uma geração de calor uniforme,  $\dot{q} = 1000 \text{ W/m}^3$ , está presente na parede, cuja área é de  $10 \text{ m}^2$ . O seu material possui as seguintes propriedades:  $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$ ,  $k = 40 \text{ W/(m K)}$  e  $c_p = 4 \text{ kJ/(kg K)}$ .

1. Determine a taxa de transferência de calor que entra na parede ( $x = 0$ ) e que deixa a parede ( $x = 1 \text{ m}$ ).
2. Determine a taxa de variação da energia acumulada na parede.
3. Determine a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo nas posições  $x = 0$ ,  $0,25$  e  $0,5 \text{ m}$ .

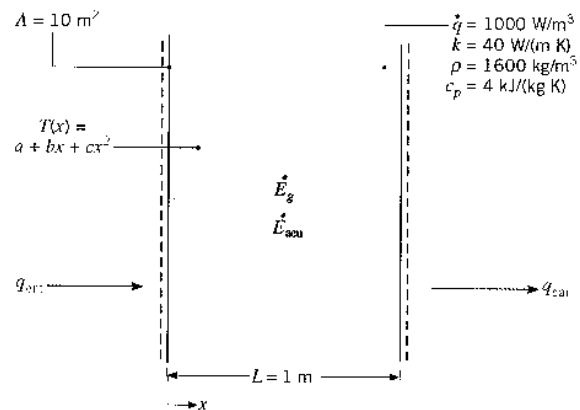
## SOLUÇÃO

**Dados:** Distribuição de temperaturas  $T(x)$  em um dado instante de tempo  $t$  em uma parede unidimensional com geração de calor uniforme.

**Achar:**

1. As taxas de transferência de calor entrando,  $q_{\text{ent}}(x = 0)$ , e saindo,  $q_{\text{sa}}(x = 1 \text{ m})$ , da parede.
2. A taxa de variação da energia acumulada na parede,  $\dot{E}_{\text{acu}}$ .
3. A taxa de variação da temperatura em relação ao tempo em  $x = 0$ ,  $0,25$  e  $0,5 \text{ m}$ .

**Esquema:**



**Considerações:**

1. Condução unidimensional na direção  $x$ .
2. Meio isotrópico com propriedades constantes.
3. Geração de calor interna uniforme,  $\dot{q}(\text{W/m}^3)$ .

**Análise:**

1. Lembre-se de que, uma vez conhecida a distribuição de temperaturas no meio, a determinação da taxa de transferência de calor por condução em qualquer ponto desse meio, ou nas suas superfícies, é uma tarefa simples com o uso da lei de Fourier. Assim, as taxas de transferência de calor desejadas

podem ser determinadas através da utilização da distribuição de temperaturas dada com a Equação 2.1. Desta forma,

$$q_{\text{ent}} = q_r(0) = -kA \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -kA(b + 2cx)_{x=0}$$

$$q_{\text{ent}} = b k A = 300^\circ\text{C/m} \times 40 \text{ W/(m K)} \times 10 \text{ m}^2 = 120 \text{ kW} \quad \triangleleft$$

Analogamente,

$$q_{\text{sa}} = q_r(L) = -kA \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = -kA(b + 2cx)_{x=L}$$

$$q_{\text{sa}} = -(b + 2cL)kA = -[-300^\circ\text{C/m} + 2(-50^\circ\text{C/m}^2) \times 1 \text{ m}] \times 40 \text{ W/(m K)} \times 10 \text{ m}^2$$

$$160 \text{ kW} \quad \triangleleft$$

2. A taxa de variação da energia acumulada na parede  $\dot{E}_{\text{acu}}$  pode ser determinada aplicando-se um balanço de energia global na parede. Usando a Equação 1.11c para um volume de controle no entorno da parede,

$$\dot{E}_{\text{ent}} + \dot{E}_g - \dot{E}_{\text{sa}} = \dot{E}_{\text{acu}}$$

no qual  $\dot{E}_g = qAL$ . Tem-se, então,

$$\dot{E}_{\text{acu}} = \dot{E}_{\text{ent}} + \dot{E}_g - \dot{E}_{\text{sa}} = q_{\text{ent}} + \dot{q}AL - q_{\text{sa}}$$

$$\dot{E}_{\text{acu}} = 120 \text{ kW} + 1000 \text{ W/m}^3 \times 10 \text{ m}^2 \times 1 \text{ m} - 160 \text{ kW}$$

$$\dot{E}_{\text{acu}} = -30 \text{ kW} \quad \triangleleft$$

3. A taxa de variação da temperatura em relação ao tempo, em qualquer ponto do meio, pode ser determinada pela equação do calor, Equação 2.19, reescrita na forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\rho c_p}$$

A partir da distribuição de temperaturas dada, tem-se que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (b + 2cx) = 2c = 2(-50^\circ\text{C/m}^2) = 100^\circ\text{C/m}^2$$

Note que essa derivada é independente da posição no meio. Assim, a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é também independente da posição e é dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{40 \text{ W/(m K)}}{1600 \text{ kg/m}^3 \times 4 \text{ kJ/(kg K)}} \times (100^\circ\text{C/m}^2) + \frac{1000 \text{ W/m}^3}{1600 \text{ kg/m}^3 \times 4 \text{ kJ/(kg K)}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -6,25 \times 10^{-4}^\circ\text{C/s} + 1,56 \times 10^{-4}^\circ\text{C/s}$$

$$= -4,69 \times 10^{-4}^\circ\text{C/s} \quad \triangleleft$$

#### Comentários:

1. A partir do resultado anterior, fica evidente que a temperatura em todos os pontos no interior da parede está diminuindo com o tempo.
2. A lei de Fourier pode sempre ser usada para calcular a taxa de transferência de calor por condução a partir do conhecimento da distribuição de temperaturas, mesmo em condições transientes com geração interna de calor.

**Efeitos em Microescala** Para a maioria das situações práticas, as equações da difusão térmica geradas neste texto podem ser usadas com confiança. Contudo, essas equações estão baseadas no uso da lei de Fourier na descrição dos efeitos condutivos, que não leva em conta a velocidade finita na qual a informação térmica é propagada no meio pelos vários transportadores de energia. As consequências da velocidade de propagação finita podem ser desprezadas se os eventos de transferência de calor de interesse ocorrerem em uma escala de tempo suficientemente longa,  $\Delta t$ , como

$$\frac{\lambda_{\text{ipm}}}{c \Delta t} \ll 1 \quad (2.28)$$

As equações da difusão térmica deste texto são igualmente inválidas para problemas nos quais o espalhamento nas fronteiras deve ser considerado explicitamente. Por exemplo, a distribuição de temperaturas *no interior* do filme delgado da Figura 2.6b não pode ser determinada pelo uso das equações da difusão do calor anteriores. Discussões adicionais de aplicações de transferência de calor e métodos de análise, em micro e nanoescalas, estão disponíveis na literatura [1,15].

## 2.1

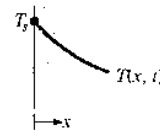
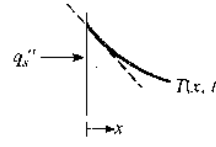
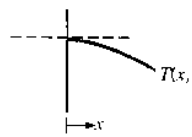
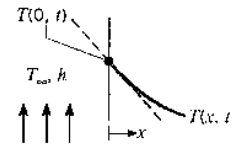
### Condições de Contorno e Inicial

Para determinar a distribuição de temperaturas em um meio, é necessário resolver a forma apropriada da equação do calor. No entanto, tal solução depende das condições físicas existentes nas *fronteiras* do meio, e, se a situação variar com o tempo, a solução também depende das condições existentes no meio em algum *instante inicial*. Com relação às *condições nas fronteiras*, ou *condições de contorno*, há várias possibilidades comuns que são expressas de maneira simples em forma matemática. Como a equação do calor é de segunda ordem em relação às coordenadas espaciais, duas condições de contorno devem ser fornecidas para cada coordenada espacial necessária para descrever o sistema. Como a

equação é de primeira ordem em relação ao tempo, apenas uma condição, chamada de *condição inicial*, deve ser especificada.

Os três tipos de condições de contorno frequentemente encontradas na transferência de calor estão resumidos na Tabela 2.2. As condições estão especificados na superfície  $x = 0$ , para um sistema unidimensional. A transferência de calor se dá no sentido positivo da direção  $x$  com a distribuição de temperaturas, que pode ser função do tempo, designada por  $T(x, t)$ . A primeira condição corresponde a uma situação na qual a superfície é mantida a uma temperatura fixa  $T_s$ . Ela é comumente chamada de uma *condição de Dirichlet* ou de uma condição de contorno de pri-

TABELA 2.2 Condições de contorno para a equação da difusão de calor na superfície ( $x = 0$ )

1. Temperatura da superfície constante		
$T(0, t) = T_s$	(2.29)	
2. Fluxo térmico na superfície constante		
(a) Fluxo térmico diferente de zero		
$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = q_s''$	(2.30)	
(b) Superfície isolada termicamente ou adiabática		
$\frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = 0$	(2.31)	
3. Condição de convecção na superfície		
$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]$	(2.32)	

meira espécie. Ela é aproximada de perto, por exemplo, quando a superfície está em contato com um sólido em fusão ou com um líquido em ebulição. Em ambos os casos há transferência de calor na superfície, enquanto a superfície permanece na temperatura do processo de mudança de fase. A segunda condição corresponde à existência de um fluxo térmico fixo ou constante  $\dot{q}_s$  na superfície. Esse fluxo térmico está relacionado ao gradiente de temperatura na superfície pela lei de Fourier, Equação 2.6, que pode ser escrita na forma

$$q_s''(0) = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_s''$$

Ela é conhecida por *condição de Neumann* ou como uma condição de contorno de *segunda espécie*, e pode ser obtida através da fixação de um aquecedor elétrico na forma de uma fina película à superfície. Um caso particular dessa condição corresponde a uma superfície *perfeitamente isolada*, ou *adiabática*, superfície na qual  $\partial T / \partial x|_{x=0} = 0$ . A condição de contorno de *terceira espécie* corresponde à existência, na superfície, de um aquecimento (ou resfriamento) por convecção e é obtida a partir de um balanço de energia na superfície, conforme discutido na Seção 1.3.2.

### EXEMPLO 2.3

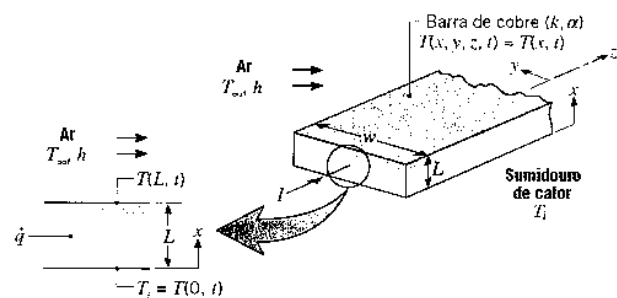
Uma longa barra de cobre com seção transversal retangular, cuja largura  $w$  é muito maior do que a sua espessura  $L$ , é mantida em contato com um sumidouro de calor em sua superfície inferior, e a temperatura ao longo da barra é aproximadamente igual à do sumidouro,  $T_i$ . De repente, uma corrente elétrica é passada através da barra e uma corrente de ar, com temperatura  $T_\infty$ , é passada sobre a sua superfície superior, enquanto a superfície inferior continua mantida a  $T_i$ . Obtenha a equação diferencial e as condições inicial e de contorno que podem ser usadas para determinar a temperatura em função da posição e do tempo na barra.

### SOLUÇÃO

**Dados:** Uma barra de cobre inicialmente em equilíbrio térmico com um sumidouro de calor é subitamente aquecida pela passagem de uma corrente elétrica.

**Achar:** A equação diferencial e as condições inicial e de contorno necessárias para determinar a temperatura no interior da barra em função da posição e do tempo.

**Esquema:**



**Considerações:**

1. Uma vez que a barra é longa e  $w \gg L$ , os efeitos de pontas e laterais são desprezíveis e a transferência de calor no interior da barra é principalmente unidimensional na direção  $x$ .
2. Taxa volumétrica de geração de calor uniforme,  $\dot{q}$ .
3. Propriedades constantes.

**Análise:** A distribuição de temperaturas é governada pela equação do calor (2.17), que, para condições unidimensionais e de propriedades constantes do presente problema, se reduz a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1) \quad \triangleleft$$

onde a temperatura é uma função da posição e do tempo,  $T(x, t)$ . Como essa equação diferencial é de segunda ordem em relação à coordenada espacial  $x$  e de primeira ordem em relação ao tempo  $t$ , devem ser fornecidas duas condições de contorno na direção  $x$  e uma condição, chamada de condição inicial, para o tempo. A condição de contorno para a superfície inferior corresponde ao caso 1 da Tabela 2.2. Em particular, como a temperatura nessa superfície é mantida em um valor,  $T_i$ , constante ao longo do tempo, tem-se que

$$T(0, t) = T_i \quad (2) \quad \triangleleft$$

A condição de transferência de calor por convecção na superfície, caso 3 da Tabela 2.2, é apropriada para a superfície superior. Logo,

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h[T(L, t) - T_\infty] \quad (3) \quad \triangleleft$$

A condição inicial é inferida a partir do reconhecimento de que, antes da mudança nas condições, a barra encontrava-se a uma temperatura uniforme  $T_i$ . Assim,

$$T(x, 0) = T_i \quad (4) \quad \triangleleft$$

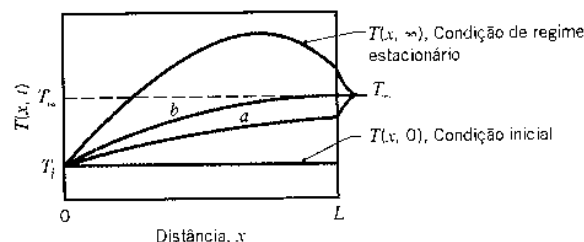
Se  $T_i$ ,  $T_\infty$ ,  $\dot{q}$  e  $h$  forem conhecidos, as Equações 1 a 4 podem ser resolvidas para se obter a distribuição da temperaturas  $T(x, t)$  em função do tempo, após a imposição da corrente elétrica.

**Comentários:**

1. O *sumidouro de calor* em  $x = 0$  poderia ser mantido pela exposição desta superfície a um banho de gelo ou pelo contato com uma *placa fria*. Uma placa fria possui canais refrigerantes que são usinados em um sólido de elevada condutividade térmica (em geral, cobre). Pela circulação de um líquido (em geral, água) através dos canais, a placa, e por-

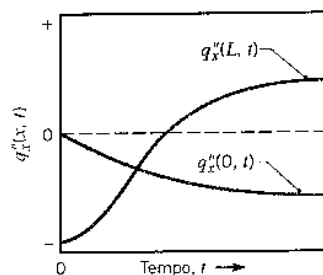
tanto a superfície com a qual ela está em contato, pode ser mantida a uma temperatura praticamente uniforme.

2. A temperatura da superfície superior,  $T(L, t)$ , variará com o tempo. Essa temperatura é uma incógnita e pode ser obtida após a determinação de  $T(x, t)$ .
3. Podemos usar nossa intuição física para esboçar distribuições de temperaturas na barra em tempos selecionados do início ao final do processo transiente. Se considerarmos que  $T_\infty > T_i$  e que a corrente elétrica é suficientemente alta para aquecer a barra até temperaturas superiores a  $T_\infty$ , as distribuições a seguir corresponderiam à condição inicial ( $t \leq 0$ ), à condição final (regime estacionário) ( $t \rightarrow \infty$ ) e a dois tempos intermediários.



Note que as distribuições satisfazem às condições de contorno e inicial. Qual é a característica particular da distribuição identificada por (b)?

4. Nossa intuição pode, também, ser usada para inferir a forma na qual o fluxo térmico varia com o tempo nas superfícies ( $x = 0, L$ ) da barra. Em coordenadas  $q_x'' - t$ , as variações no transiente são como mostradas a seguir,



Certifique-se de que as variações anteriores são consistentes com as distribuições de temperaturas do Comentário 3. Para  $t \rightarrow \infty$ , como  $q_x''(0)$  e  $q_x''(L)$  estão relacionados com a taxa volumétrica de geração de energia?

**2.5****Resumo**

Os principais objetivos deste capítulo foram melhorar o seu entendimento da equação da taxa condutiva (lei de Fourier) e familiarizar você com a equação do calor. Você pode testar o seu entendimento de conceitos relacionados com esses assuntos ao responder as questões a seguir.

- Na formulação geral da *lei de Fourier* (aplicável em qualquer geometria), quais são as grandezas vetoriais e escalares? Por que há um sinal de menos no lado direito desta equação?
- O que é uma *superfície isotérmica*? O que pode ser dito sobre o fluxo térmico em qualquer local desta superfície?

- Qual forma a *lei de Fourier* assume em cada direção ortogonal dos sistemas de coordenadas cartesiano, cilíndrico e esférico? Em cada caso, quais são as unidades do gradiente de temperatura? Você pode escrever cada equação de memória?
- Uma propriedade da matéria importante é definida pela *lei de Fourier*. Qual é ela? Qual é o seu significado físico? Quais são suas unidades?
- O que é um material *isotrópico*?
- Por que geralmente a condutividade térmica de um sólido é maior do que a de um líquido? Por que a condutividade térmica de um líquido é maior do que a de um gás?
- Por que geralmente a condutividade térmica de um sólido condutor elétrico é maior do que a de um não-condutor? Por que materiais como o óxido de berílio, o diamante e o carbeto de silício (veja a Tabela A.2) são exceções a esta regra?
- É a *condutividade térmica efetiva* de um sistema de isolamento uma manifestação verdadeira da eficácia com a qual calor é transferido através do sistema somente por condução?
- Por que a condutividade térmica de um gás aumenta com o aumento da temperatura? Por que ela é aproximadamente independente da pressão?
- Qual é o significado físico da *difusividade térmica*? Como ela é definida e quais são suas unidades?
- Qual é o significado físico de cada termo que aparece na *equação do calor*?
- Cite alguns exemplos de *geração de energia térmica*. Se a taxa na qual a energia térmica é gerada por unidade de volume,  $\dot{q}$ , variar com a posição em um meio de volume  $V$ , como pode ser determinada a taxa de geração de energia para o meio inteiro,  $\dot{E}_g$ , a partir do conhecimento de  $q(x, y, z)$ ?
- Para um meio com reação química, qual tipo de reação fornece uma *fonte* de energia térmica ( $\dot{q} > 0$ )? Qual tipo de reação fornece um *sumidouro* de energia térmica ( $\dot{q} < 0$ )?
- Para resolver a *equação do calor*, determinando a distribuição de temperaturas em um meio, *condições de contorno* nas superfícies do meio devem ser especificadas. Que condições físicas são normalmente adequadas para este objetivo?

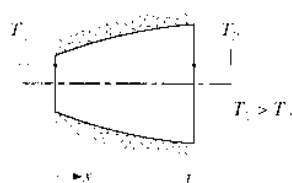
## Referências

1. Flik, M. L., B.-I. Choi, and K. E. Goodson, *J. Heat Transfer*, **114**, 666, 1992.
2. Klemens, P. G., "Theory of the Thermal Conductivity of Solids," in R. P. Tye, Ed., *Thermal Conductivity*, Vol. 1, Academic Press, London, 1969.
3. Yang, H.-S., G.-R. Bai, L. J. Thompson, and J. A. Eastman, *Acta Materialia*, **50**, 2309, 2002.
4. Chen, G., *J. Heat Transfer*, **118**, 539, 1996.
5. Vincenti, W. G., and C. H. Kruger, Jr., *Introduction to Physical Gas Dynamics*, Wiley, New York, 1986.
6. McLaughlin, H., "Theory of the Thermal Conductivity of Fluids," in R. P. Tye, Ed., *Thermal Conductivity*, Vol. 2, Academic Press, London, 1969.
7. Foust, O. J., Ed., "Sodium Chemistry and Physical Properties," in *Sodium-NaK Engineering Handbook*, Vol. 1, Gordon & Breach, New York, 1972.
8. Mallory, J. F., *Thermal Insulation*, Reinhold Book Corp., New York, 1969.
9. American Society of Heating, Refrigeration and Air Conditioning Engineers, *Handbook of Fundamentals*, Chapters 23–25 and 31, ASHRAE, New York, 2001.
10. Zeng, S. Q., A. Hunt, and R. Greif, *J. Heat Transfer*, **117**, 1055, 1995.
11. Sengers, J. V., and M. Klein, Eds., *The Technical Importance of Accurate Thermophysical Property Information*, National Bureau of Standards Technical Note No. 590, 1980.
12. Najjar, M. S., K. J. Bell, and R. N. Maddox, *Heat Transfer Eng.*, **2**, 27, 1981.
13. Hanley, H. J. M., and M. E. Baltatu, *Mech. Eng.*, **105**, 68, 1983.
14. Touloukian, Y. S., and C. Y. Ho, Eds., *Thermophysical Properties of Matter, The TPRC Data Series* (13 volumes on thermophysical properties: thermal conductivity, specific heat, thermal radiative, thermal diffusivity, and thermal linear expansion), Plenum Press, New York, 1970 through 1977.
15. Cahill, D. G., W. K. Ford, K. E. Goodson, G. D. Mahan, A. Majumdar, H. J. Maris, R. Merlin, and S. R. Phillpot, *App. Phys. Rev.*, **93**, 793, 2003.

## Problemas

### Lei de Fourier

- 2.1 Considere condução de calor unidimensional, em regime estacionário, através da geometria axi-simétrica mostrada na figura.



Supondo propriedades constantes e nenhuma geração interna de calor, esboce a distribuição de temperaturas em um sistema de coordenadas  $T - x$ . Explique sucintamente a forma da curva obtida.

- 2.2 Um tubo de água quente, com raio externo  $r_1$ , está a uma temperatura  $T_1$ . Uma espessa camada de isolamento térmico, aplicada para reduzir a perda de calor, possui um raio externo  $r_2$  e a sua superfície externa está a uma temperatura  $T_2$ . Em um sistema de coordenadas  $T - r$ , esboce a distribuição de temperaturas no isolante para uma transferência de calor unidimensional, em estado estacionário, com propriedades constantes. Justifique, resumidamente, a forma da curva encontrada.