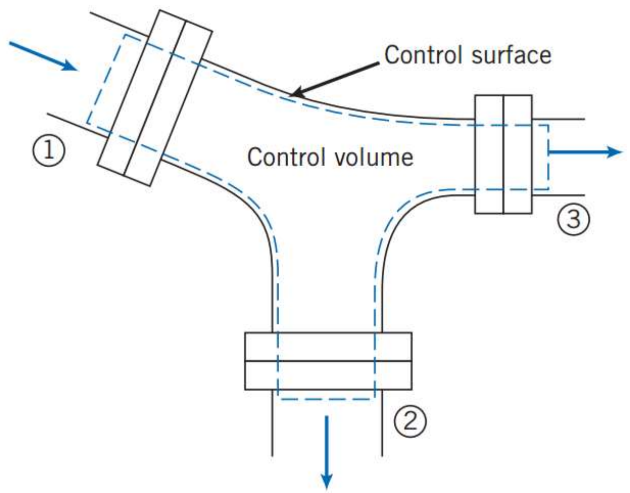
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Campus Araranguá - ARA
Departamento de Energia e Sustentabilidade

UNIDADE 5
ANÁLISE DIFERENCIAL DO MOVIMENTO DOS FLUIDOS

Formulação Integral x Formulação Diferencial

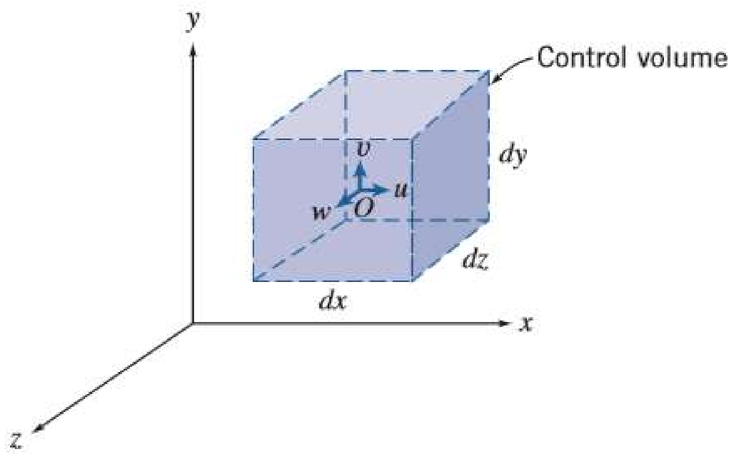
- **Formulação integral:** útil quando o interesse é analisar o comportamento geral de um campo de escoamento ou o efeito de/sobre um dispositivo.

- **Formulação diferencial:** análise detalhada, ponto a ponto, em que aplicamos as equações do movimento.



Conservação da massa

Considere o volume infinitesimal de fluido $d\forall = dxdydz$



- Massa específica ρ no centro O (x,y,z) do VC.

- Velocidade no centro O dada por:

$$\vec{V} = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + w\hat{k}$$

- Avaliando as propriedades nas faces direita e esquerda:

$$\rho_R = \rho\Big|_{x+dx/2} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}\left(\frac{dx}{2}\right)$$

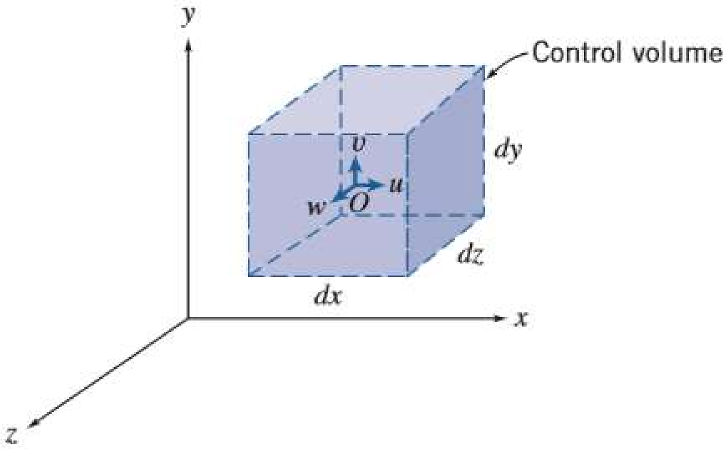
$$u_R = u\Big|_{x+dx/2} = u + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{dx}{2}\right)$$

$$\rho_L = \rho\Big|_{x-dx/2} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}\left(-\frac{dx}{2}\right) = \rho - \frac{\partial \rho}{\partial x}\left(\frac{dx}{2}\right)$$

$$u_L = u\Big|_{x-dx/2} = u - \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{dx}{2}\right)$$

Conservação da massa

A conservação da massa enuncia que:



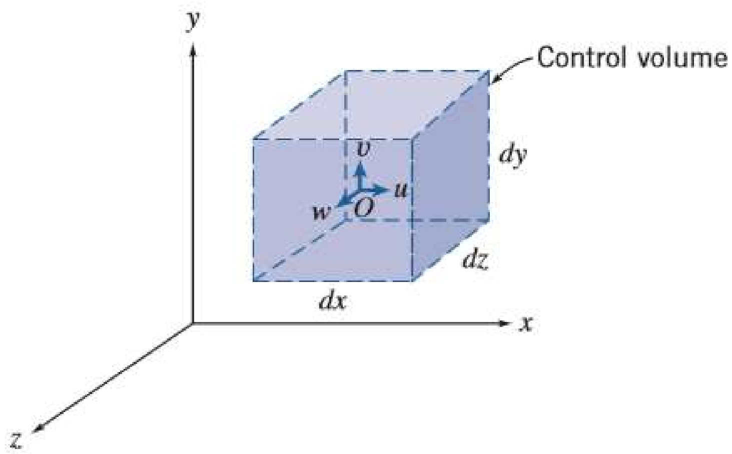
$$\underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}_{\text{Fluxo de massa líquido pelas SC's}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{\text{Taxa de variação de massa no VC}} = 0$$

- O primeiro termo é avaliado considerando o fluxo em cada uma das 6 faces do VC.

$$(\rho u A)_R = \rho u A\Big|_{x+d\ \ /2} = \left[\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}\left(\frac{dx}{2}\right)\right]\left[u + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{dx}{2}\right)\right] dydz = \rho udydz + \frac{1}{2}\left[u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x}\right] dxdydz$$

$$(\rho u A)_L = \rho u A\Big|_{x-dx/2} = -\left[\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x}\left(\frac{dx}{2}\right)\right]\left[u - \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{dx}{2}\right)\right] dydz = -\rho udydz + \frac{1}{2}\left[u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x}\right] dxdydz$$

Conservação da massa

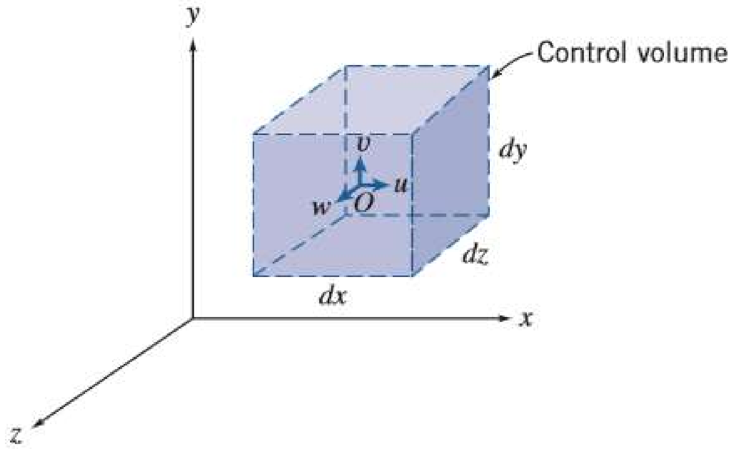


$$\underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}_{\text{Fluxo de massa líquido pelas SC's}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{\text{Taxa de variação de massa no VC}} = 0$$

Somando as expressões:

$$\rho u dydz + \frac{1}{2}\left[u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x}\right] dxdydz - \rho u dydz + \frac{1}{2}\left[u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x}\right] dxdydz = \left[u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x}\right] dxdydz = \boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dxdydz}$$

Conservação da massa



$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho dV$$

$$\left\{\text{Fluxo de massa líquido pelas SC's}\right\} + \left\{\text{Taxa de variação de massa no VC}\right\} = 0$$

Replicando o procedimento para os planos +y, –y, +z e -z:

+y -y

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dxdydz$$

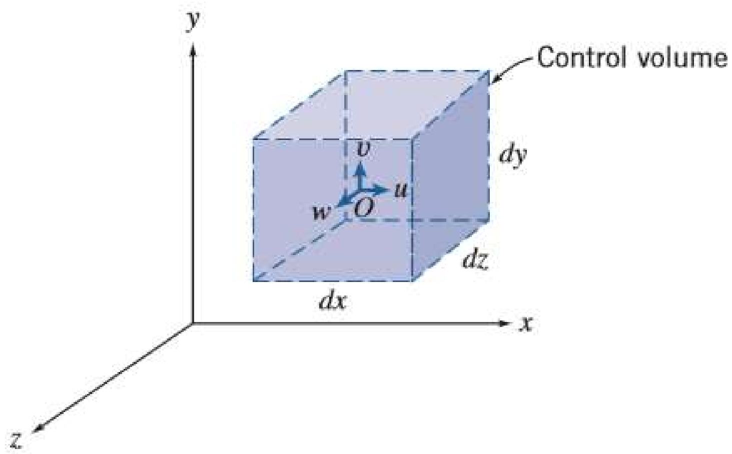
+z -z

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dxdydz$$

Somando os fluxos:

$$\longrightarrow \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dxdydz$$

Conservação da massa



$$\underbrace{\int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}}_{\text{Fluxo de massa líquido pelas SC's}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho dV}_{\text{Taxa de variação de massa no VC}} = 0$$

equivalentes

Replicando o procedimento para os planos +y, –y, +z e -z:

+y -y

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dxdydz$$

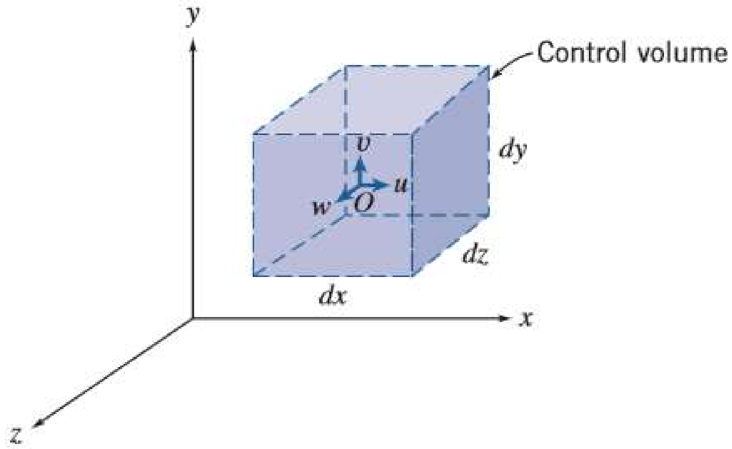
+z -z

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dxdydz$$

Somando os fluxos:

$$\longrightarrow \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]dxdydz$$

Conservação da massa



equivalentes

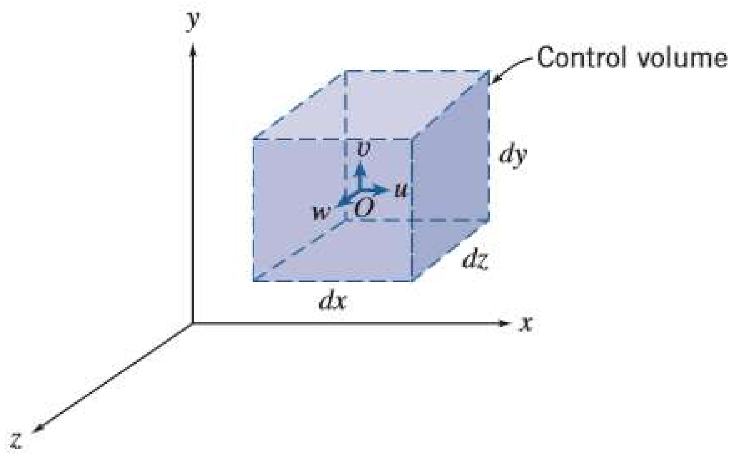
$$\underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}_{\text{Fluxo de massa líquido pelas SC's}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{\text{Taxa de variação de massa no VC}} = 0$$

A massa dentro do VC pode ser calculada como ρdxdydz. Logo, a sua taxa de variação é:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$$

equivalentes

Conservação da massa



$$\underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}_{\text{Fluxo de massa líquido pelas SC's}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{\text{Taxa de variação de massa no VC}} = 0$$

A massa dentro do VC pode ser calculada como ρdxdydz. Logo, a sua taxa de variação é:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$$

Somando com o termo anterior:

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dxdydz$$

CM em coord. cartesianas.

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0}$$

Eq. da continuidade

Conservação da massa

Aplicando o operador vetorial $\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$, podemos escrever:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\vec{V} = 0$$

Conservação da massa

Aplicando o operador vetorial $\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$, podemos escrever:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\vec{V} = 0$$

Para escoamento incompressível (ρ constante):

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \xrightarrow{\text{plano xy}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Aumento de u em x é acompanhado de redução de v em y.

Conservação da massa

Aplicando o operador vetorial $\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$, podemos escrever:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\vec{V} = 0$$

Para escoamento incompressível (ρ constante):

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \xrightarrow{\text{plano xy}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

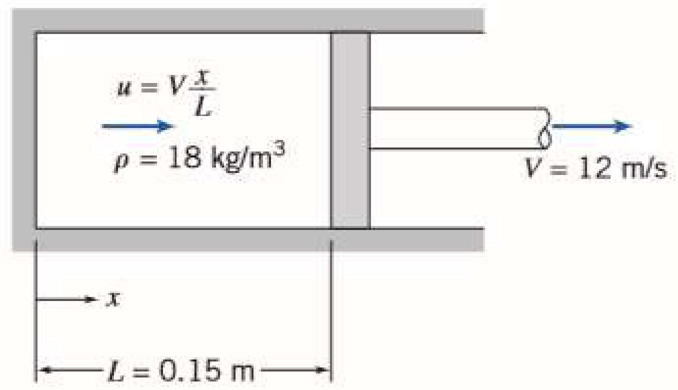
Aumento de u em x é acompanhado de redução de v em y.

Para escoamento permanente:

$$\nabla \cdot \rho\vec{V} = 0 \longrightarrow \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

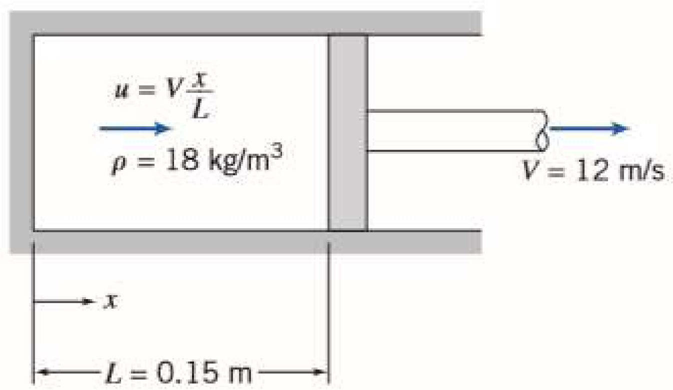
Conservação da massa

Exemplo 5.2 (5ª ed.): Um amortecedor a gás na suspensão de um automóvel comporta-se como um dispositivo pistão-cilindro. Num instante em que o pistão está L = 0,15 m afastado da extremidade fechada do cilindro, a massa específica do gás é uniforme ρ = 18 kg/m³ e o pistão começa a mover-se, afastando-se da extremidade fechada do cilindro, com V = 12 m/s. O movimento do gás é unidimensional e proporcional à distância em relação à extremidade fechada; varia linearmente de zero, na extremidade, a u = V no pistão. Avalie a taxa de variação da massa específica do gás nesse instante. Obtenha uma expressão para a massa específica média como função do tempo.



Conservação da massa

$t = 0$



Hipótese:

- Velocidade u uniforme em cada seção.

Equação Continuidade: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$

Como $\vec{V} = u\hat{\imath} = u(x) \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

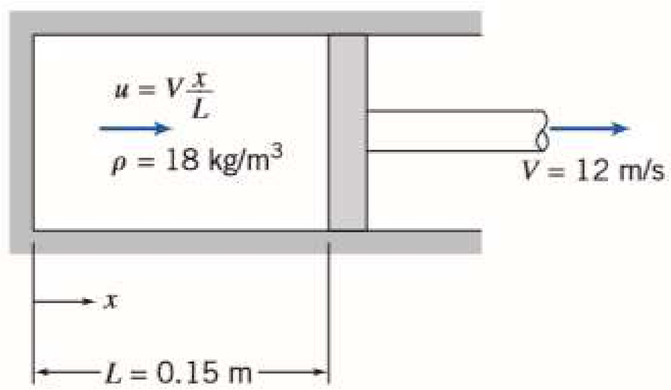
Logo, a Eq. da continuidade para esse problema fica: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x}$

Como o interesse é na massa específica média no interior do cilindro, $\rho \approx \rho(t)$

Como $u = u(x)$, temos: $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{du}{dx}$

Conservação da massa

$t = 0$



Substituindo a relação para u e separando variáveis:

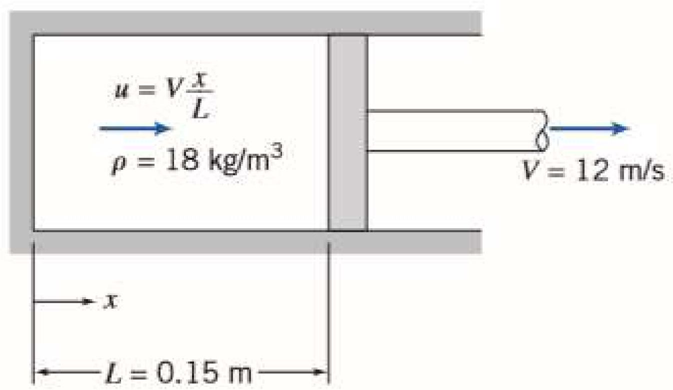
$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\frac{du}{dx} \longrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{Vx}{L}\right)dt = -\left(\frac{V}{L}\right)dt$$

onde $L = L_0 + Vt$

$$\longrightarrow \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho} = -\int_0^t\left(\frac{V}{L_0 + Vt}\right)dt$$

Conservação da massa

$t = 0$



Substituindo a relação para u e separando variáveis:

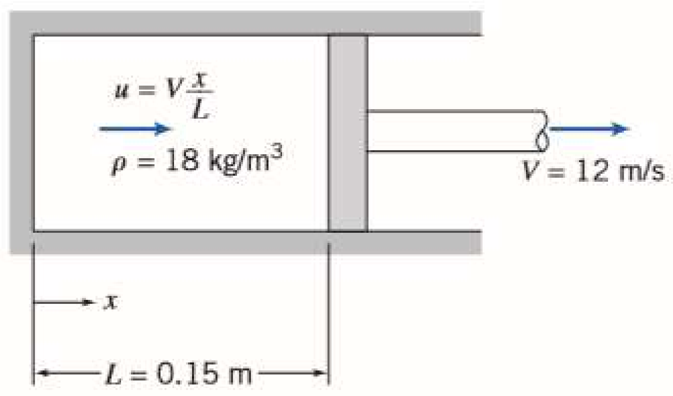
$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\frac{du}{dx} \longrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{Vx}{L}\right)dt = -\left(\frac{V}{L}\right)dt$$

onde $L = L_0 + Vt \longrightarrow \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho} = -\int_0^t\left(\frac{V}{L_0 + Vt}\right)dt$

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \ln\left(\frac{L_0}{L_0 + Vt}\right) \longrightarrow \rho = \rho_0\frac{L_0}{L_0 + Vt} \longrightarrow \boxed{\rho = 18\frac{0{,}15}{0{,}15 + 12t}}$$

Conservação da massa

$t = 0$



Substituindo a relação para u e separando variáveis:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\frac{du}{dx} \longrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{Vx}{L}\right)dt = -\left(\frac{V}{L}\right)dt$$

onde $L = L_0 + Vt \longrightarrow \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho} = -\int_0^t\left(\frac{V}{L_0 + Vt}\right)dt$

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \ln\left(\frac{L_0}{L_0 + Vt}\right) \longrightarrow \rho = \rho_0\frac{L_0}{L_0 + Vt} \longrightarrow \boxed{\rho = 18\frac{0{,}15}{0{,}15 + 12t}}$$

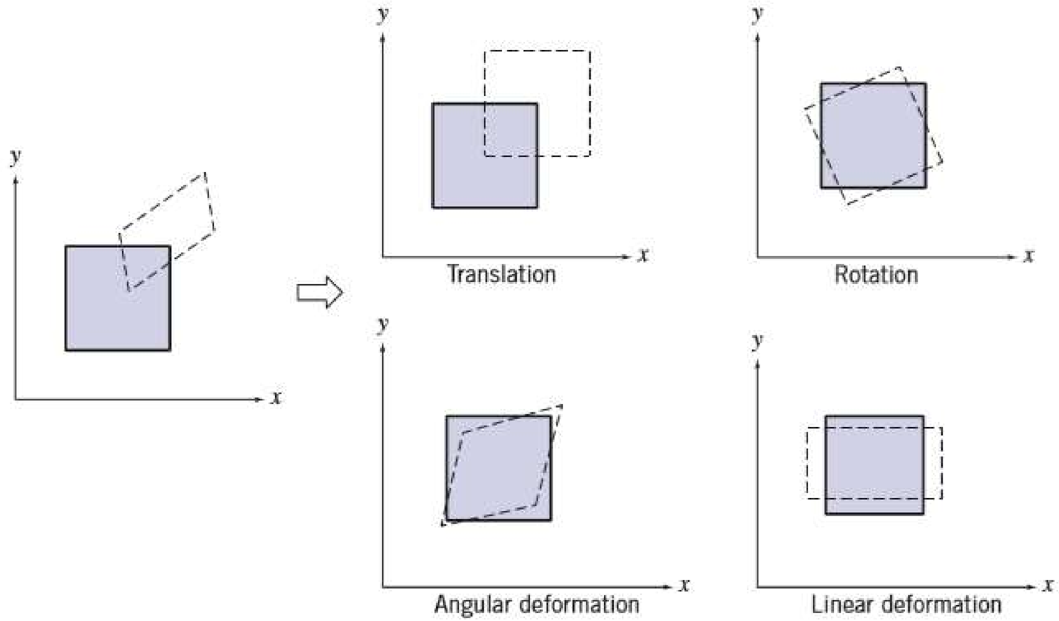
No instante inicial:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho_0\frac{d}{dx}\left(\frac{Vx}{L}\right) = -\rho_0\left(\frac{V}{L_0}\right) = -18 * \frac{12}{0{,}15} = \boxed{-1440\left[\frac{kg}{m^3.s}\right]}$$

Cinemática dos fluidos

- Antes de formular o efeito das forças sobre o movimento dos fluidos (2ª lei de Newton), é importante analisar as características do movimento de um elemento de fluido infinitesimal em um escoamento.

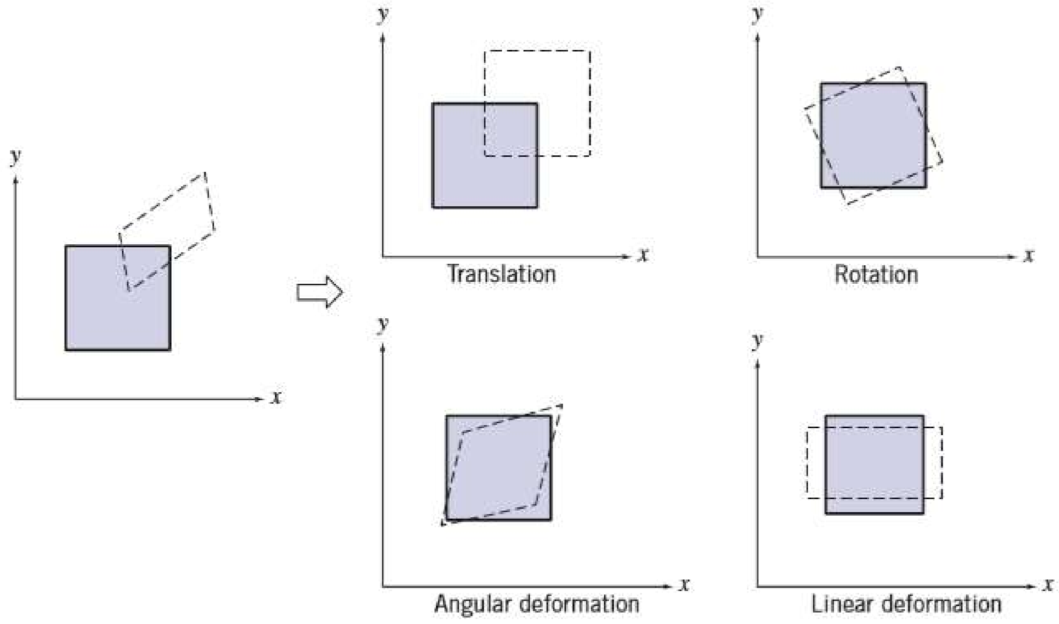
- À medida que um elemento fluido se move, ele pode sofrer:
  - Translação
  - Rotação
  - Deformação angular
  - Deformação linear



Cinemática dos fluidos

- Antes de formular o efeito das forças sobre o movimento dos fluidos (2ª lei de Newton), é importante analisar as características do movimento de um elemento de fluido infinitesimal em um escoamento.

- À medida que um elemento fluido se move, ele pode sofrer:
  - Translação
  - Rotação
  - Deformação angular
  - Deformação linear

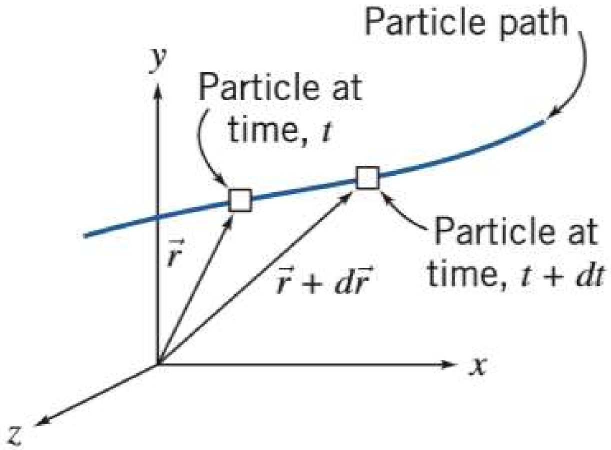


Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- Ao apresentar a teoria do contínuo, mostramos que o campo de escoamento pode ser descrito em função da posição espacial e do tempo:

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) \qquad\qquad \rho = \rho(x, y, z, t)$$

- Por ser uma função de quatro variáveis independentes, podemos expressar a variação da velocidade da partícula como:



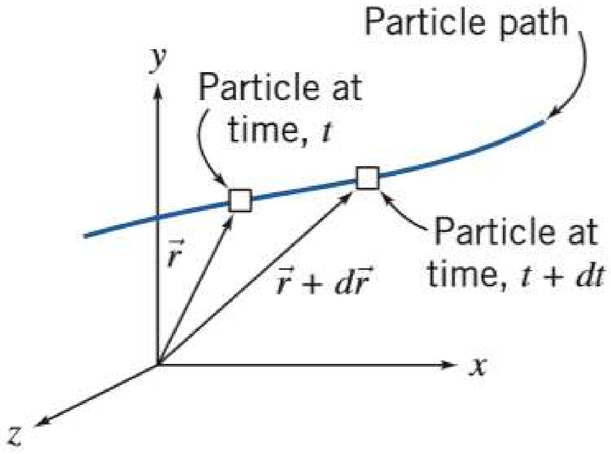
$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- Ao apresentar a teoria do contínuo, mostramos que o campo de escoamento pode ser descrito em função da posição espacial e do tempo:

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) \qquad\qquad \rho = \rho(x, y, z, t)$$

- Por ser uma função de quatro variáveis independentes, podemos expressar a variação da velocidade da partícula como:



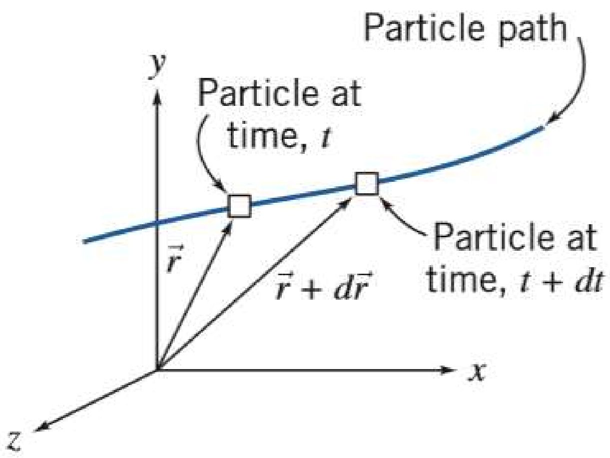
$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$

- Portanto, a aceleração total da partícula é:

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- Considere uma partícula se movendo em um escoamento conforme:



- A velocidade da partícula na posição $\vec{r}$ e no tempo t é:

$$\vec{V}_p\Big|_t = \vec{V}(x, y, z, t) \qquad \vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

- Durante o intervalo de tempo dt, a partícula se deslocou em

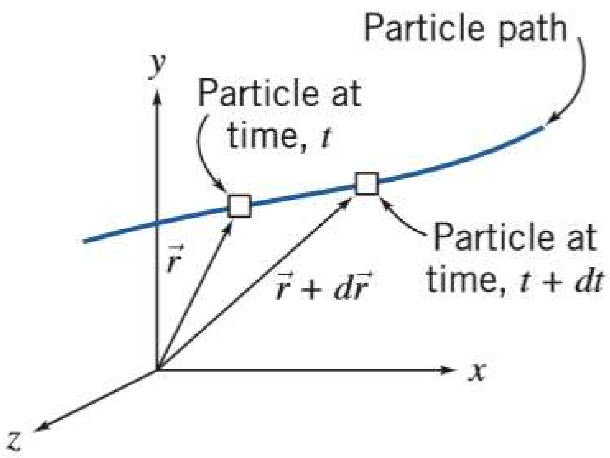
$$\overrightarrow{dr} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$$

de modo que suas novas posição e velocidade no tempo t + dt são:

$$\overrightarrow{r + dr} = (x + dx)\hat{\imath} + (y + dy)\hat{\jmath} + (z + dz)\hat{k} \qquad \vec{V}_p\Big|_{t+dt} = \vec{V}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- A variação da velocidade da partícula durante esse deslocamento é:



$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$

- Portanto, a aceleração total da partícula é:

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

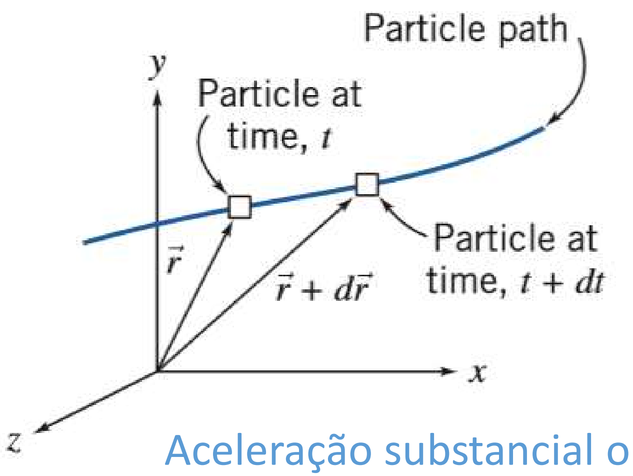
$$\boxed{\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}$$

Aceleração material (Lagrangiano)

Abordagem de campo (Euleriano)

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- Definimos a variação da velocidade da partícula em função de variáveis independentes:



$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$

- Portanto, a aceleração total da partícula é:

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}$$

Aceleração substancial ou material

$$\boxed{\frac{D\vec{V}_p}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}$$

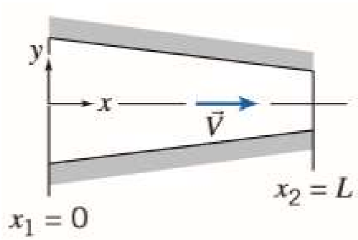
Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- Há dois efeitos que provocam a aceleração de uma partícula:

$$\boxed{\frac{D\vec{V}_p}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}$$

1. Efeito local. Associado ao processo transiente. $\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t}$

2. Efeito de transporte convectivo para uma região de velocidade mais elevada. Não depende do tempo. Exemplo: escoamento em um bocal.



$$u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- Componentes do vetor aceleração (sistema cartesiano):

x: $$a_{p,x} = \frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

y: $$a_{p,y} = \frac{Dv}{Dt} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

z: $$a_{p,z} = \frac{Dw}{Dt} = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- Componentes do vetor aceleração (sistema cartesiano):

x: $$a_{p,x} = \frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

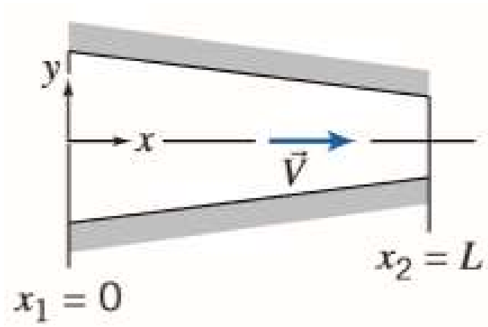
y: $$a_{p,y} = \frac{Dv}{Dt} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

z: $$a_{p,z} = \frac{Dw}{Dt} = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Com essas expressões, pode-se calcular a aceleração da partícula em **qualquer posição** do escoamento e a **qualquer instante**.

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

Exemplo 5.5 (5ª ed.): Considere o escoamento unidimensional, permanente, incompressível, através do canal plano e convergente mostrado. A velocidade na linha de centro horizontal (eixo x) é dada por $\vec{V} = V_1[1 + (x/L)]\hat{\imath}$. Determine a aceleração para uma partícula se movendo ao longo dessa linha de centro. Se utilizarmos o método de descrição lagrangiano, a posição da partícula localizada em x = 0, no instante t = 0, será uma função do tempo $x_p = f(t)$. Obtenha a expressão para f(t) e, em seguida, tomando a derivada segunda da função em relação ao tempo, obtenha uma expressão para a componente x da aceleração da partícula.



Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

Como o escoamento é 1D e permanente:

$$\vec{V} = V(x) \longrightarrow a_{p,x} = \frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \longrightarrow a_{p,x} = u\frac{\partial u}{\partial x}$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

Como o escoamento é 1D e permanente:

$$\vec{V} = V(x) \longrightarrow a_{p,x} = \frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \longrightarrow a_{p,x} = u\frac{\partial u}{\partial x}$$

Substituindo a expressão para velocidade $\vec{V} = V_1[1 + (x/L)]\hat{\imath}$

$$a_{p,x} = V_1\left[1 + \frac{x}{L}\right]\frac{\partial}{\partial x}\left\{V_1\left[1 + \frac{x}{L}\right]\right\} \longrightarrow a_{p,x} = \frac{V_1^2}{L}\left[1 + \frac{x}{L}\right]$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

Como o escoamento é 1D e permanente:

$$\vec{V} = V(x) \longrightarrow a_{p,x} = \frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \longrightarrow a_{p,x} = u\frac{\partial u}{\partial x}$$

Substituindo a expressão para velocidade $\vec{V} = V_1[1 + (x/L)]\hat{\imath}$

$$a_{p,x} = V_1\left[1 + \frac{x}{L}\right]\frac{\partial}{\partial x}\left\{V_1\left[1 + \frac{x}{L}\right]\right\} \longrightarrow \boxed{a_{p,x} = \frac{V_1^2}{L}\left[1 + \frac{x}{L}\right]}$$

FORMULAÇÃO EULERIANA $\longrightarrow$ Propriedade da partícula assume o valor do escoamento na posição espacial.

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

Para determinarmos a aceleração da partícula a partir de um método de descrição **lagrangiano**, devemos escrever sua posição instantânea em função do tempo:

$$x_p = x_p(t)$$

Sabendo que a velocidade da partícula é u_p, temos:

$$u_p = \frac{dx_p}{dt} \longrightarrow u_p = \frac{dx_p}{dt} = V_1\left[1 + \frac{x_p}{L}\right]$$

Separando variáveis e integrando:

Posição instantânea da partícula

$$\int_0^{x_p} \frac{dx_p}{\left[1 + \frac{x_p}{L}\right]} = \int_0^t V_1 dt \longrightarrow L \ln\left(1 + \frac{x_p}{L}\right) = V_1 t \longrightarrow x_p = L\left(e^{V_1 t/L} - 1\right)$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

Derivando duas vezes em relação ao tempo, obtemos a aceleração:

$$a_{p,x} = \frac{d^2 x_p}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[L\left(e^{V_1 t/L} - 1\right)\right] = \boxed{\frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t/L}}$$

Aceleração da partícula é função apenas do tempo.
FORMULAÇÃO LAGRANGIANA

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

Derivando duas vezes em relação ao tempo, obtemos a aceleração:

$$a_{p,x} = \frac{d^2 x_p}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[L\left(e^{V_1 t/L} - 1\right)\right] = \boxed{\frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t/L}}$$

Aceleração da partícula é função apenas do tempo.
FORMULAÇÃO LAGRANGIANA

Comparando resultados obtidos pelas duas expressões:

		t = 0 (x = 0)	**t = t_L (x = L)**
EULERIANO	$a_{p,x} = \frac{V_1^2}{L}\left[1 + \frac{x}{L}\right]$	$\boldsymbol{a_{p,x} = \frac{V_1^2}{L}}$	$\boldsymbol{a_{p,x} = 2\frac{V_1^2}{L}}$
LAGRANGIANO	$a_{p,x} = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t/L}$	$\boldsymbol{a_{p,x} = \frac{V_1^2}{L}}$	$L = L\left(e^{V_1 t/L} - 1\right) \longrightarrow e^{V_1 t/L} = 2$ $\boldsymbol{a_{p,x} = 2\frac{V_1^2}{L}}$

Conservação da quantidade de movimento linear

- A forma diferencial da Eq. da QML é obtida a partir da aplicação da 2ª Lei de Newton a uma partícula infinitesimal de massa dm.

- Para um sistema finito: $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ onde $\vec{P} = \int_{massa} \vec{V} dm$

- Para um sistema infinitesimal:

$$\vec{P} = \vec{V}m \longrightarrow d\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(\vec{V}m)}{dt} = \vec{V}\frac{dm}{dt} + dm\frac{d\vec{V}}{dt} = dm\frac{d\vec{V}}{dt}$$

em que: $\frac{d\vec{V}}{dt} = u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$ $\Rightarrow$ $d\vec{F} = dm\left(u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)$

Conservação da quantidade de movimento linear

- A forma diferencial da Eq. da QML é obtida a partir da aplicação da 2ª Lei de Newton a uma partícula infinitesimal de massa dm.

- Para um sistema finito: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$ onde $\vec{P} = \displaystyle\int_{massa} \vec{V} dm$

- Para um sistema infinitesimal:

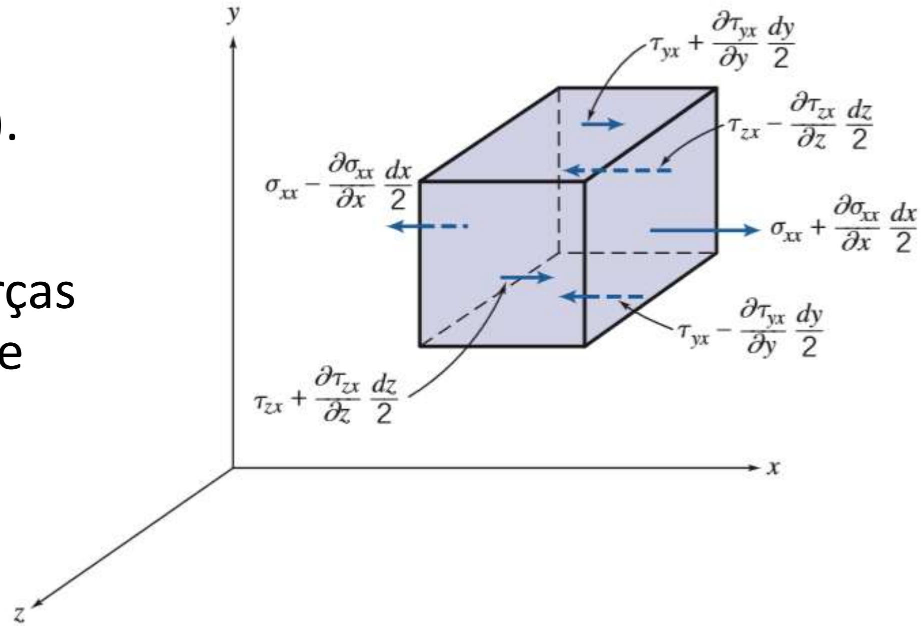
$$\vec{P} = \vec{V}m \longrightarrow d\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(\vec{V}m)}{dt} = \vec{V}\frac{dm}{dt} + dm\frac{d\vec{V}}{dt} = dm\frac{d\vec{V}}{dt}$$

em que: $\dfrac{d\vec{V}}{dt} = u\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t}$ $\Rightarrow$ $d\vec{F} = dm\left(u\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)$

Conservação da quantidade de movimento linear

- As forças que atuam na partícula podem ser de corpo ou de superfície (tangenciais ou normais).

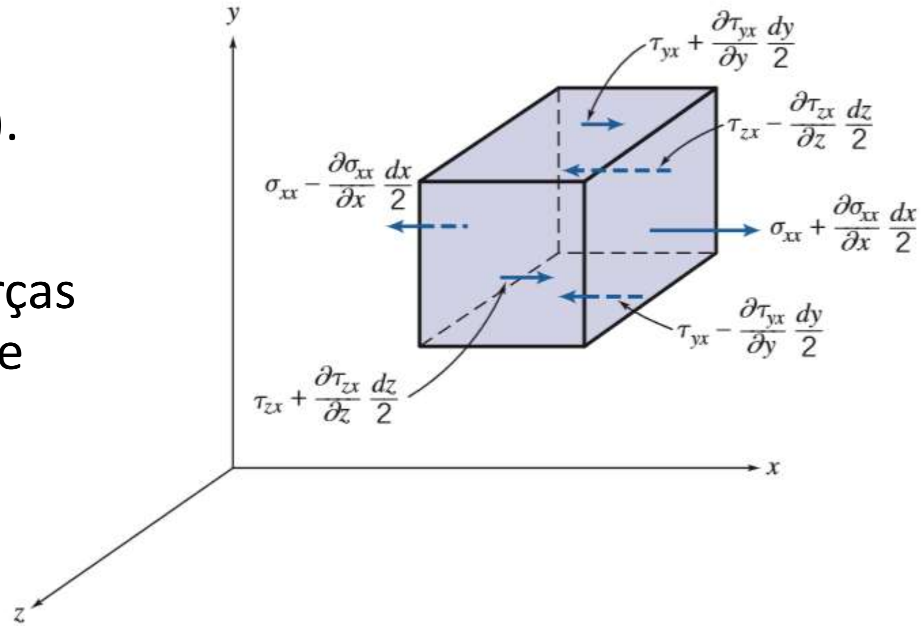
- Considerando apenas as componentes x das forças sobre o elemento de massa dm e admitindo que σ_{xx}, τ_{yx} e τ_{zx} atuam no centro do elemento:



Conservação da quantidade de movimento linear

- As forças que atuam na partícula podem ser de corpo ou de superfície (tangenciais ou normais).

- Considerando apenas as componentes x das forças sobre o elemento de massa dm e admitindo que σ_{xx}, τ_{yx} e τ_{zx} atuam no centro do elemento:

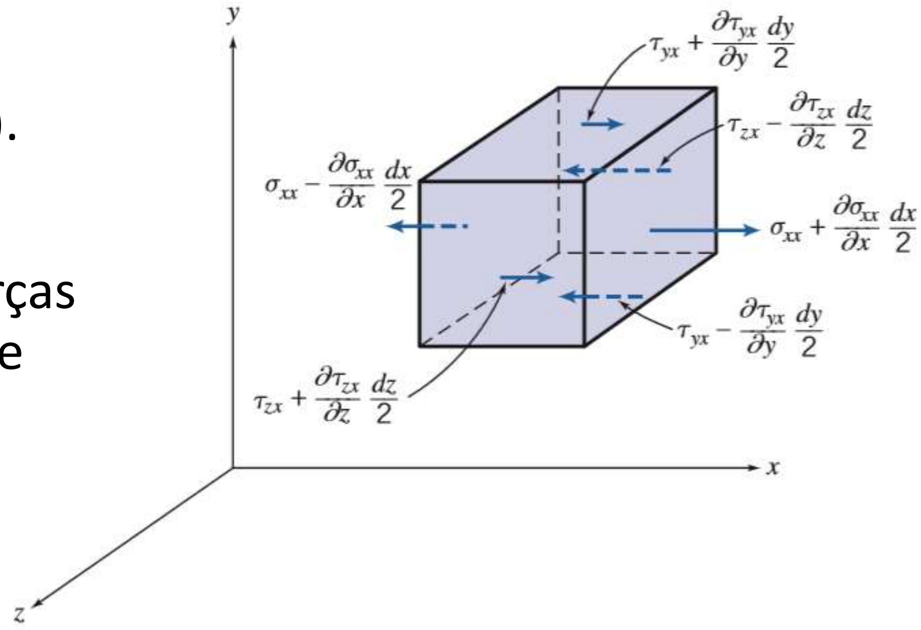


$$dF_{s,x} = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz +$$
$$+\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz +$$
$$+\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy$$

Conservação da quantidade de movimento linear

- As forças que atuam na partícula podem ser de corpo ou de superfície (tangenciais ou normais).

- Considerando apenas as componentes x das forças sobre o elemento de massa dm e admitindo que σ_{xx}, τ_{yx} e τ_{zx} atuam no centro do elemento:



$$dF_{s,x} = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz +$$
$$+\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz +$$
$$+\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy$$

$$\Rightarrow \quad dF_{s,x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz$$

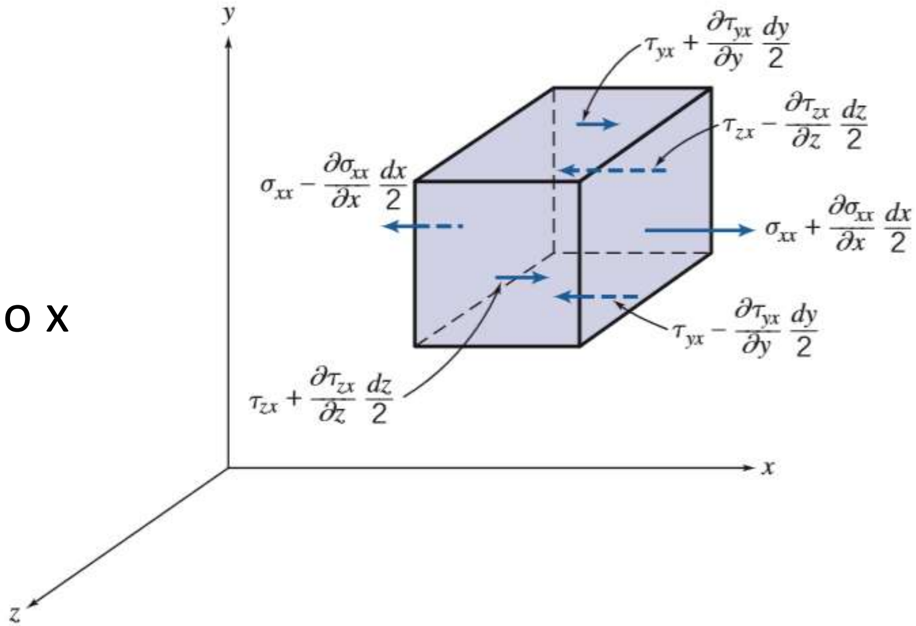
Conservação da quantidade de movimento linear

- A força de corpo na direção x é:

$$dF_{b,x} = \rho g_x d\forall$$

- Assim, o somatório de forças externas na direção x que atuam sobre o elemento dm fica:

$$dF_x = dF_{b,x} + dF_{s,x}$$
$$= \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) dxdydz$$



- Finalmente, a equação da conservação da QML em x:

x: $$\left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) = \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Conservação da quantidade de movimento linear

- Aplicando o mesmo procedimento para os eixos y e z:

y: $$\left(\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) = \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

z: $$\left(\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right) = \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

Conservação da quantidade de movimento linear

- Para um fluido newtoniano, as tensões viscosas podem ser escritas em função da taxa de deformação e da viscosidade:

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \qquad \sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \qquad \tau_{zy} = \tau_{yz} \qquad \sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$

Conservação da quantidade de movimento linear

- Inserindo esses termos nas equações para cada coordenada e simplificando para hipótese de escoamento incompressível e viscosidade constante:

x: $$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

y: $$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial t}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

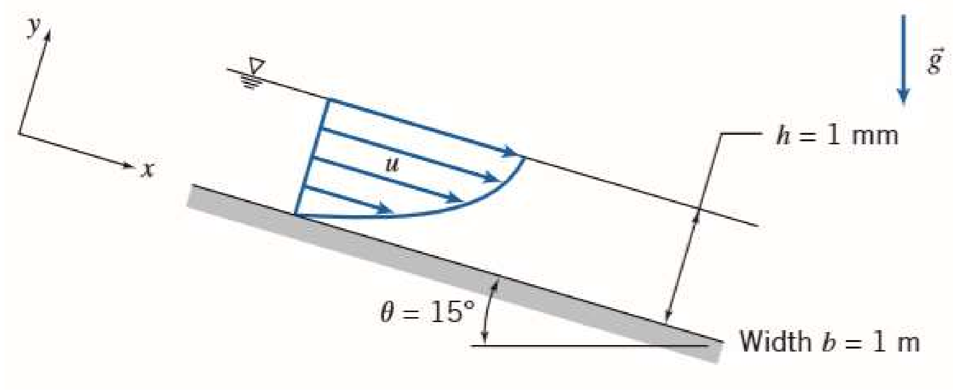
z: $$\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

A solução dessas equações fornece o campo de velocidades

Equações de Navier-Stokes para um escoamento incompressível com μ cte.

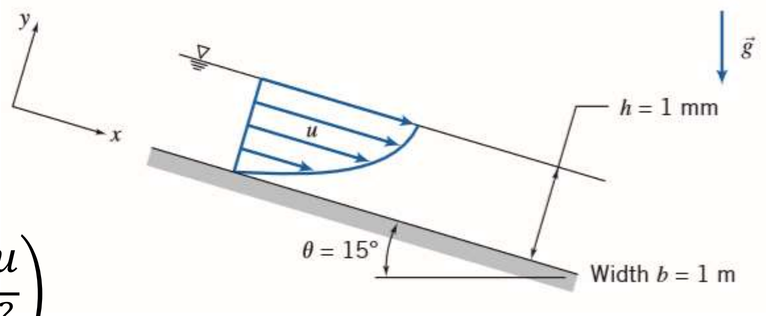
Conservação da quantidade de movimento linear

Exemplo 5.9 (5ª ed.): Um líquido escoa para baixo sobre uma superfície plana inclinada em um filme laminar, permanente, completamente desenvolvido e de espessura h. Simplifique as equações da continuidade e de Navier-Stokes para modelar esse campo de escoamento. Obtenha expressões para o perfil de velocidade do líquido, a distribuição de tensão de cisalhamento, a vazão volumétrica e a velocidade média. Relacione a espessura do filme de líquido com a vazão volumétrica por unidade de profundidade em um filme d'água com espessura h = 1mm, escoando sobre uma superfície com largura b = 1m, inclinada de θ = 15° em relação à horizontal.



Conservação da quantidade de movimento linear

Hipóteses: 1) Escoamento incompressível; 2) viscosidade constante; 3) w = 0, d/dz = 0; 4) completamente desenvolvido (d/dx = 0); 5) regime permanente.



Eqs. Básicas: $$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

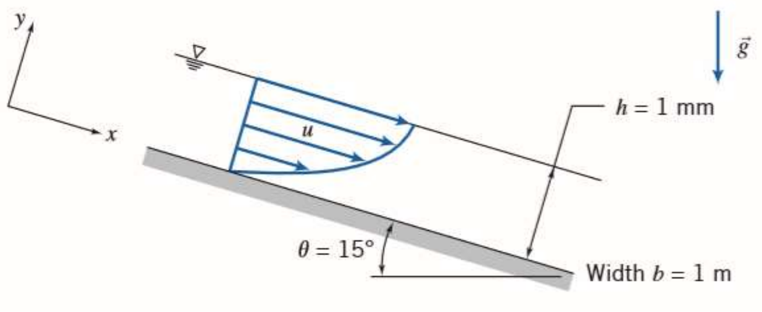
$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial t}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Conservação da quantidade de movimento linear

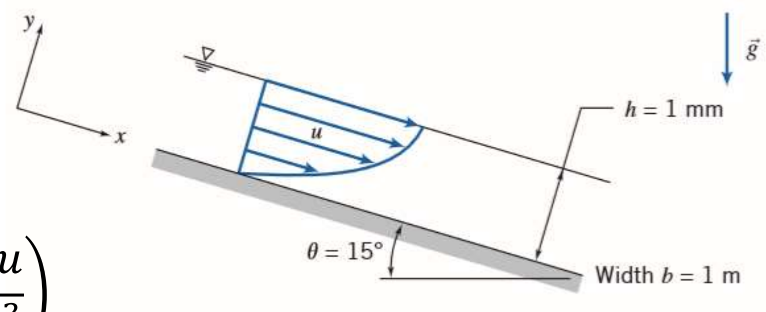
Hipóteses: 1) Escoamento incompressível; 2) viscosidade constante; 3) w = 0, d/dz = 0; 4) completamente desenvolvido (d/dx = 0); 5) regime permanente.

Eqs. Básicas: $$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$



Conservação da quantidade de movimento linear

<u>Hipóteses:</u> 1) Escoamento incompressível; 2) viscosidade constante; 3) w = 0, d/dz = 0; 4) completamente desenvolvido (d/dx = 0); 5) regime permanente.



<u>Eqs. Básicas:</u>

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial t}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Conservação da quantidade de movimento linear

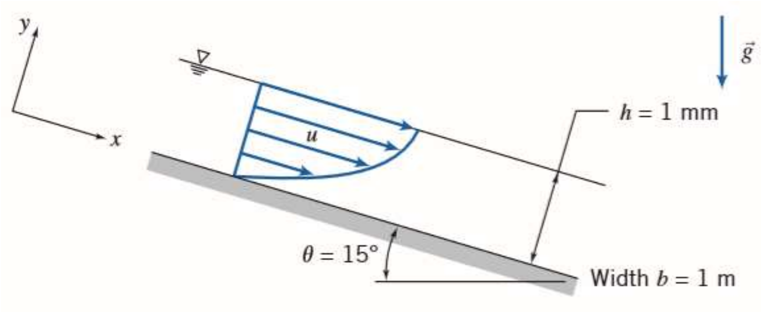
<u>Hipóteses:</u> 1) Escoamento incompressível; 2) viscosidade constante; 3) w = 0, d/dz = 0; 4) completamente desenvolvido (d/dx = 0); 5) regime permanente.

<u>Eqs. Básicas:</u>

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}}_{0\ (5)} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\downarrow$$

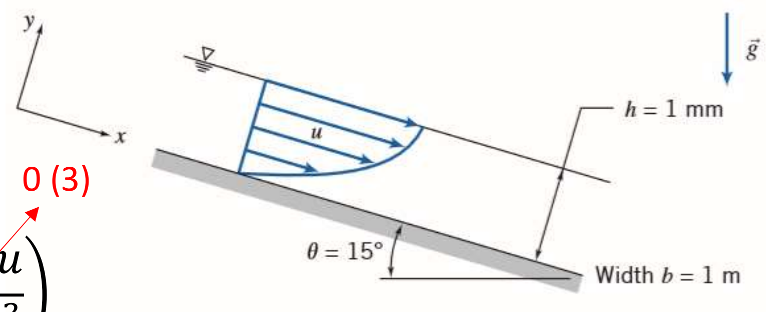
$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}}_{0\ (4)} + \frac{\partial v}{\partial y} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{0\ (3)} = 0 \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



Na parede, v = 0. Portanto, v = 0 ao longo de toda a espessura de filme.

Conservação da quantidade de movimento linear

<u>Hipóteses:</u> 1) Escoamento incompressível; 2) viscosidade constante; 3) w = 0, d/dz = 0; 4) completamente desenvolvido (d/dx = 0); 5) regime permanente.



<u>Eqs. Básicas:</u>

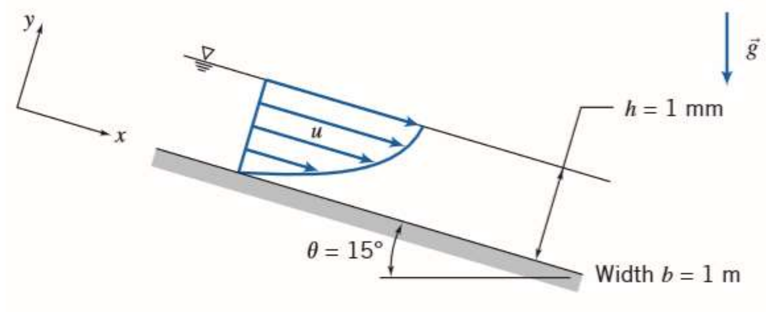
$$\rho\left(\cancelto{0\ (4)}{u\frac{\partial u}{\partial x}}+\cancelto{0\ (v=0)}{v\frac{\partial u}{\partial y}}+\cancelto{0\ (3)}{w\frac{\partial u}{\partial z}}+\cancelto{0\ (5)}{\frac{\partial u}{\partial t}}\right)=\rho g_x-\cancelto{0\ (4)}{\frac{\partial p}{\partial x}}+\mu\left(\cancelto{0\ (4)}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cancelto{0\ (3)}{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}\right)$$

$$\rho\left(\cancelto{0\ (4)}{u\frac{\partial v}{\partial x}}+\cancelto{0\ (CM)}{v\frac{\partial v}{\partial y}}+\cancelto{0\ (3)}{w\frac{\partial v}{\partial z}}+\cancelto{0\ (5)}{\frac{\partial v}{\partial t}}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\cancelto{0\ (4)}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}+\cancelto{0\ (CM)}{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}+\cancelto{0\ (3)}{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}\right)$$

$$\rho\left(\cancelto{0\ (3)}{u\frac{\partial w}{\partial x}}+\cancelto{0\ (3)}{v\frac{\partial w}{\partial y}}+\cancelto{0\ (3)}{w\frac{\partial w}{\partial z}}+\cancelto{0\ (5)}{\frac{\partial w}{\partial t}}\right)=\cancelto{0\ (3)}{\rho g_z}-\cancelto{0\ (3)}{\frac{\partial p}{\partial z}}+\mu\left(\cancelto{0\ (3)}{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}+\cancelto{0\ (3)}{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}+\cancelto{0\ (3)}{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}\right)$$

Conservação da quantidade de movimento linear

Finalmente:



x: $0 = \rho g_x + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ **y:** $0 = \rho g_y - \dfrac{\partial p}{\partial y}$

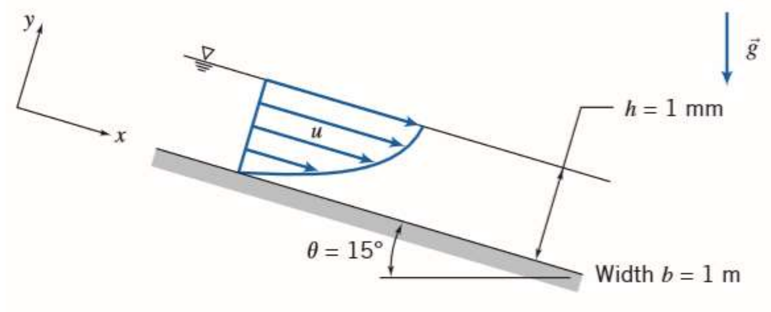
Como $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \longrightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{d^2 u}{dy^2}$

solução geral

Logo: $\dfrac{d^2 u}{dy^2} = -\dfrac{\rho g \sin\theta}{\mu} \xrightarrow{\text{1ª int.}} \dfrac{du}{dy} = -\dfrac{\rho g \sin\theta}{\mu} y + c_1 \xrightarrow{\text{2ª int.}} u = -\dfrac{\rho g \sin\theta}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2$

Conservação da quantidade de movimento linear

Finalmente:



x: $0 = \rho g_x + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ **y:** $0 = \rho g_y - \dfrac{\partial p}{\partial y}$

Como $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \longrightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{d^2 u}{dy^2}$

solução geral

Logo: $\dfrac{d^2 u}{dy^2} = -\dfrac{\rho g \sin\theta}{\mu} \xrightarrow{\text{1ª int.}} \dfrac{du}{dy} = -\dfrac{\rho g \sin\theta}{\mu} y + c_1 \xrightarrow{\text{2ª int.}} u = -\dfrac{\rho g \sin\theta}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2$

Solução particular obtida a partir das condições de contorno:

1) $u(0) = 0$ não-escorregamento na parede $\longrightarrow c_2 = 0$

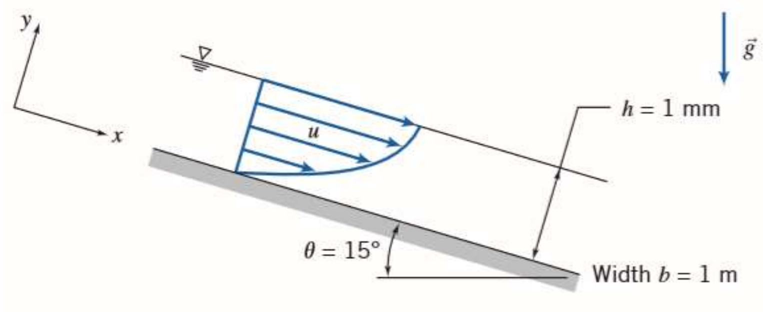
2) $\left.\dfrac{du}{dy}\right|_{y=h} = 0$ tensão nula na superfície livre $\longrightarrow c_1 = \dfrac{\rho g \sin\theta}{\mu} h$

Perfil de velocidade

$$\boxed{u(y) = \frac{\rho g \sin\theta}{\mu}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right)}$$

Conservação da quantidade de movimento linear

A distribuição da tensão cisalhante é:



$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}$$

Assim,

$$\tau_{yx} = \mu \frac{d}{dy}\left[\frac{\rho g \sin\theta}{\mu}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right)\right] = \boxed{\rho g \sin\theta\,(h-y)} \longrightarrow$$

Tensão +
Na parede (y+), sentido x+

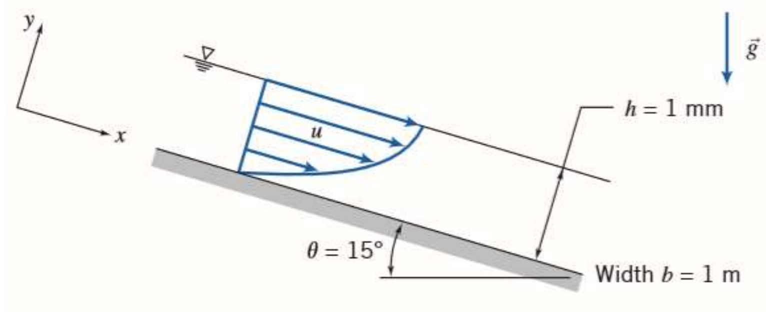
A vazão volumétrica é:

$$Q = \int_A u dA = \int_0^h ubdy = \frac{\rho g \sin\theta}{\mu} b \int_0^h \left(hy - \frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{\rho g b \sin\theta}{\mu}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{6}\right) = \boxed{\frac{\rho g b h^3 \sin\theta}{3\mu}}$$

Conservação da quantidade de movimento linear

Velocidade média:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{\rho g b h^3 \sin\theta}{3\mu b h} = \boxed{\frac{\rho g h^2 \sin\theta}{3\mu}}$$



A espessura do filme em função da vazão é:

$$\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{3\mu Q}{\rho g b \sin\theta}}}$$

Finalmente, a vazão volumétrica é obtida para um conjunto de valores:

$$h = 1mm \quad \rho = 1000kg/m^3$$
$$\theta = 15° \quad \mu = 10^{-3}Pa.s$$
$$b = 1m$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{\rho g b h^3 \sin\theta}{3\mu} = 0{,}846L/s}$$