UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Campus Araranguá - ARA
Departamento de Energia e Sustentabilidade

UNIDADE 6
ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL NÃO VISCOSO

Equação de Euler

- No último capítulo, deduzimos as equações do movimento para um fluido incompressível, com propriedades constantes e newtoniano. Agora, podemos aplicar simplificações a fim de modelar situações práticas.

- Em muitas aplicações, o escoamento pode ser considerado invíscido (sem atrito ou não viscoso), de modo que adota-se $\mu = 0$.

- Assim, as equações de Navier-Stokes são simplificadas. Para a direção x, temos:

Equação genérica (dir. X)

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Equação de Euler (dir. X)

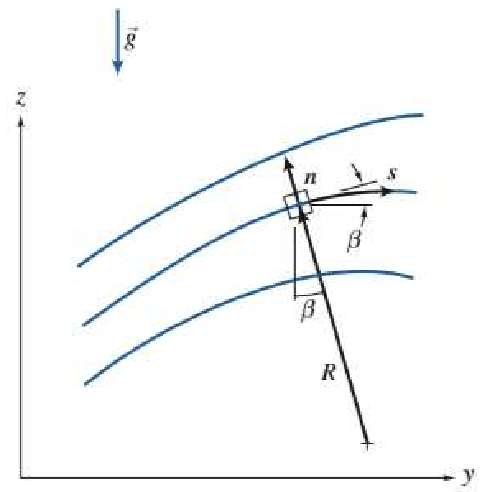
$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x}$$

Equação de Euler em coordenadas de LC

- No escoamento em regime permanente, uma partícula fluida move-se ao longo de uma LC (linhas de trajetória e corrente coincidem). Assim, ao descrever o movimento de uma partícula em regime permanente, a distância ao longo de uma LC é uma coordenada lógica para se escrever as equações do movimento.

- Deduziremos a equação de Euler em **coordenadas de LC**. Isso permitirá analisar variações de pressão e velocidade ao longo do escoamento.

- Considere o esquema ao lado.

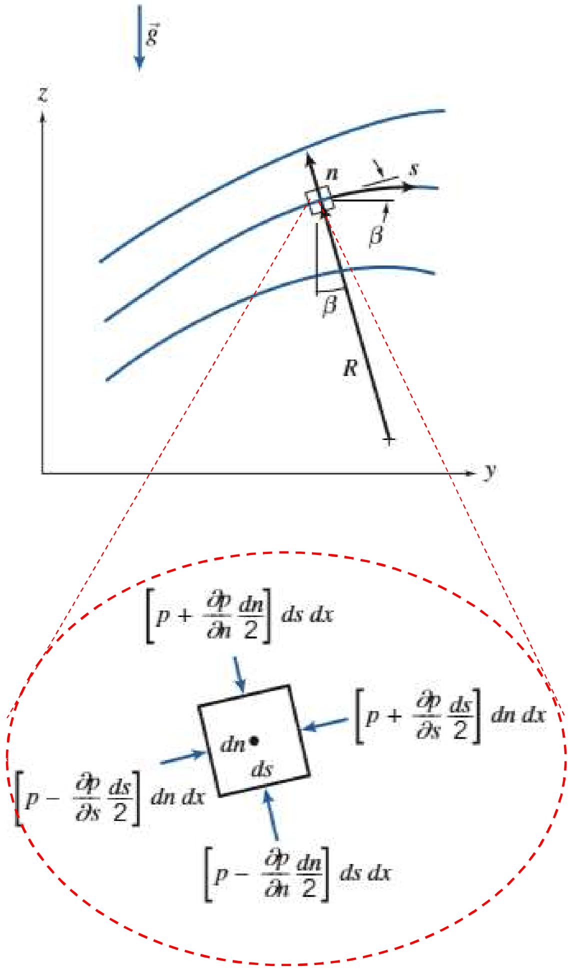


Equação de Euler em coordenadas de LC

- No escoamento em regime permanente, uma partícula fluida move-se ao longo de uma LC (linhas de trajetória e corrente coincidem). Assim, ao descrever o movimento de uma partícula em regime permanente, a distância ao longo de uma LC é uma coordenada lógica para se escrever as equações do movimento.

- Deduziremos a equação de Euler em **coordenadas de LC**. Isso permitirá analisar variações de pressão e velocidade ao longo do escoamento.

- Considere o esquema ao lado.



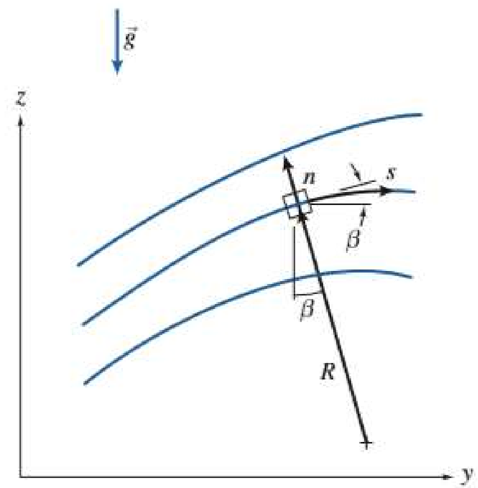
Equação de Euler em coordenadas de LC

- Aplicando a 2ª lei de Newton na direção **s** ao elemento de volume dsdndx:

$$dF_{s,s} + dF_{b,s} = dma_s$$

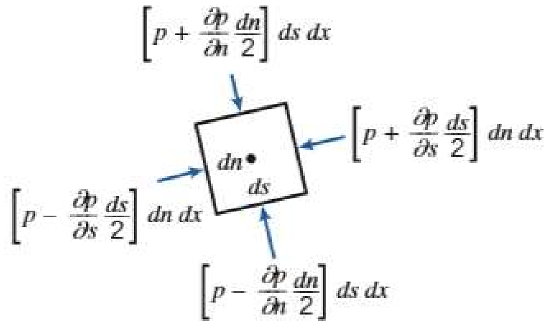
- A aceleração na direção s (as) é:

$$a_s = \frac{dV_s}{dt} = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s\frac{\partial V_s}{\partial s} \quad \text{análogo a:} \quad a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$



- Como o escoamento é invíscido, as forças de superfície são devidas apenas às pressões nas faces.

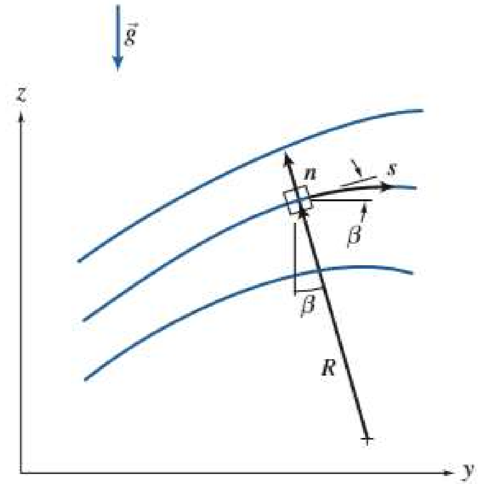
$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right)dndx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right)dndx - dmg\sin\beta = dm\left(\frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s\frac{\partial V_s}{\partial s}\right)$$



Equação de Euler em coordenadas de LC

- Substituindo a densidade e o volume e simplificando:

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right)dndx-\left(p+\frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right)dndx-\rho dxdsdng\sin\beta=\rho dxdsdn\left(\frac{\partial V_s}{\partial t}+V_s\frac{\partial V_s}{\partial s}\right)$$

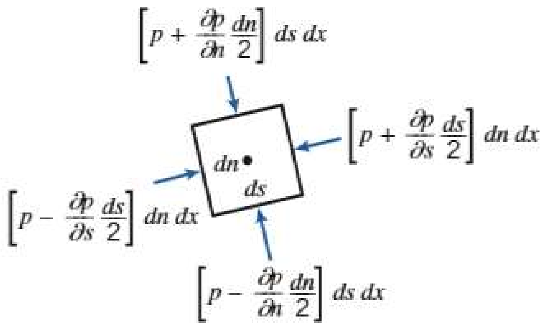


$$-\frac{\partial p}{\partial s}-\rho g\sin\beta=\rho\left(\frac{\partial V_s}{\partial t}+V_s\frac{\partial V_s}{\partial s}\right)$$

- Como $\sin\beta=\frac{\partial z}{\partial s}$ $\longrightarrow$ $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}-g\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial V_s}{\partial t}+V_s\frac{\partial V_s}{\partial s}$

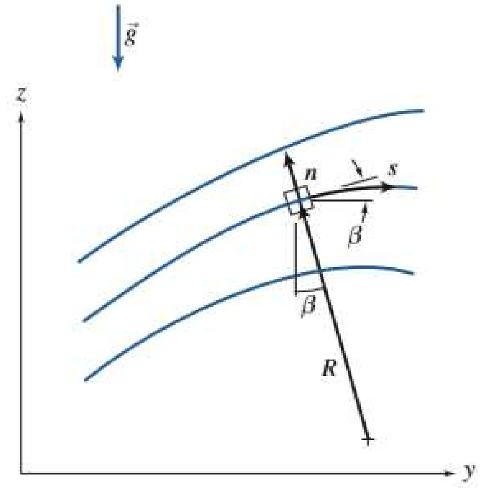
- Em regime permanente e sem desnível $\left(\frac{\partial z}{\partial s}=0\right)$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}=-V_s\frac{\partial V_s}{\partial s}=-V\frac{\partial V}{\partial s}$$



Equação de Euler em coordenadas de LC

- Substituindo a densidade e o volume e simplificando:

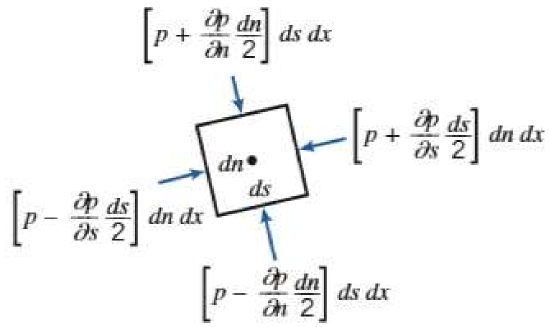


$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right)dndx-\left(p+\frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right)dndx-\rho dxdsdng\sin\beta=\rho dxdsdn\left(\frac{\partial V_s}{\partial t}+V_s\frac{\partial V_s}{\partial s}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial s}-\rho g\sin\beta=\rho\left(\frac{\partial V_s}{\partial t}+V_s\frac{\partial V_s}{\partial s}\right)$$

- Como $\sin\beta=\dfrac{\partial z}{\partial s}$ $\longrightarrow$ $-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial s}-g\dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial V_s}{\partial t}+V_s\dfrac{\partial V_s}{\partial s}$

- Em regime permanente e sem desnível $\left(\dfrac{\partial z}{\partial s}=0\right)$



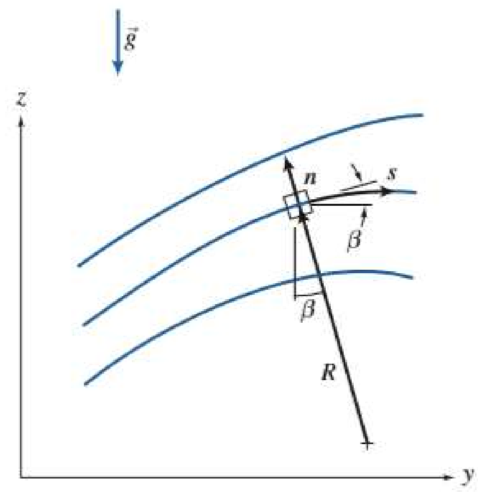
$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}=-V\frac{\partial V}{\partial s}}\longrightarrow$$

p e V variam inversamente

Equação de Euler em coordenadas de LC

- Para a direção **n**:

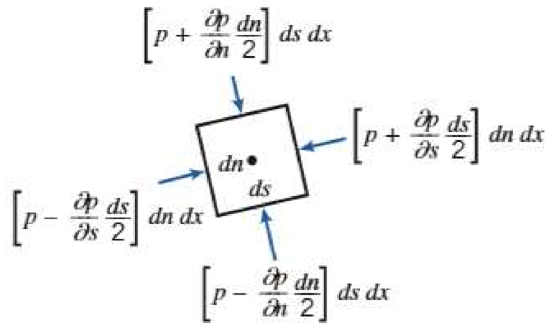
$$dF_{s,n} + dF_{b,n} = dm a_n$$



- Expandindo a expressão:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right) ds dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right) ds dx - \rho dx ds dn g \cos\beta = \rho dx ds dn a_n$$

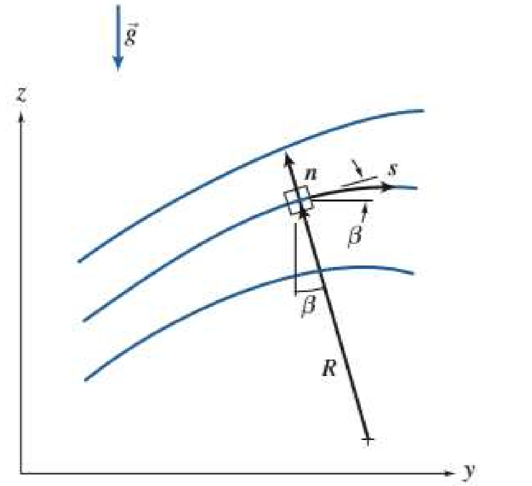
$$-\frac{\partial p}{\partial n} - \rho g \cos\beta = \rho a_n$$



Equação de Euler em coordenadas de LC

- Para a direção **n**:

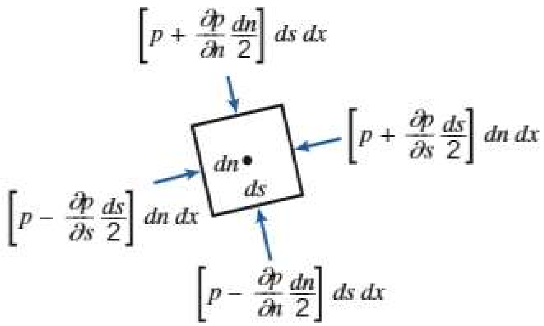
$$dF_{s,n} + dF_{b,n} = dma_n$$



- Expandindo a expressão:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right) dsdx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right) dsdx - \rho dxdsdng\cos\beta = \rho dxdsdna_n$$

$$-\frac{\partial p}{\partial n} - \rho g\cos\beta = \rho a_n$$



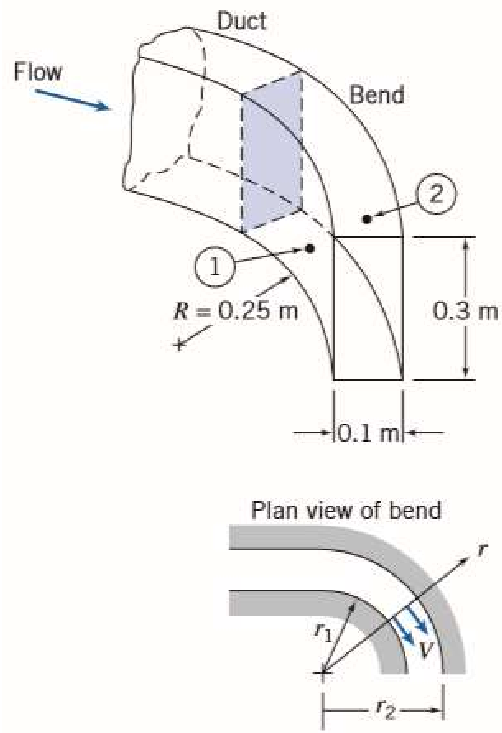
- Como $\cos\beta = \frac{\partial z}{\partial n}$ e adotando em regime permanente $a_n = -\frac{V^2}{R}$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} - g\frac{\partial z}{\partial n} = -\frac{V^2}{R} \xrightarrow{\text{plano horizontal}} \boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V^2}{R}}$$

Equação de Euler em coordenadas de LC

Exemplo 6.1: Estimar a vazão volumétrica de ar no duto a partir de medições de pressão na superfície interna e externa da curva:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 40 mmH_2O$$



Hipóteses: 1) regime permanente;

2) sem atrito (uniforme);

3) incompressível.

Equação de Euler em coordenadas de LC

Aplicando a equação de Euler para a componente **n** (radial) cruzando as linhas de corrente do escoamento, temos:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V^2}{R} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho\frac{V^2}{r}$$

Como a seção transversal é constante e não há atrito, a velocidade ao longo da direção s não se altera. Portanto:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = -V\cancelto{0}{\frac{\partial V}{\partial s}} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial s} = 0 \quad \longrightarrow \quad p = p(r) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dr} = \rho\frac{V^2}{r}$$

Separando variáveis e integrando:

$$dp = \rho V^2 \frac{dr}{r} \quad \longrightarrow \quad p_2 - p_1 = \rho V^2 \ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$p_2 - p_1 = 1000 * 9{,}81 * \frac{40}{1000} = 392{,}4\ [Pa]$$

$$\rho = 1{,}23\ [kg/m^3]$$

Equação de Euler em coordenadas de LC

Calculando V:

$$V = \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{\rho \ln \frac{r_2}{r_1}}} = \sqrt{\frac{392{,}4}{1{,}23 \ln \frac{0{,}35}{0{,}25}}} = 30{,}5 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Da definição de vazão volumétrica:

$$\boxed{Q = VA = 30{,}5 * 0{,}1 * 0{,}3 = 0{,}916 \left[\frac{m^3}{s}\right]}$$

Equação de Bernoulli

- Ao integrar a equação de Euler em regime permanente ao longo de uma LC, obtemos a equação de Bernoulli:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s} = V\frac{\partial V}{\partial s}$$ Eq. Euler ao longo de s (RP)

- Se uma partícula fluida percorre um comprimento ds ao longo de uma LC, podemos escrever:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s}ds &= dp \\ \frac{\partial z}{\partial s}ds &= dz \\ \frac{\partial V}{\partial s}ds &= dV \end{aligned}\right\} \quad -\frac{dp}{\rho} - gdz - VdV = 0 \xrightarrow{\text{integrando}} \int\frac{dp}{\rho} + \int gdz + \int VdV = 0$$

ρ *constante*

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = constante}$$

Equação de Bernoulli

- Condições estabelecidas para dedução da Equação de Bernoulli:

  1. Regime Permanente
  2. Esc. incompressível
  3. Esc. invíscido
  4. Esc. ao longo de uma LC.

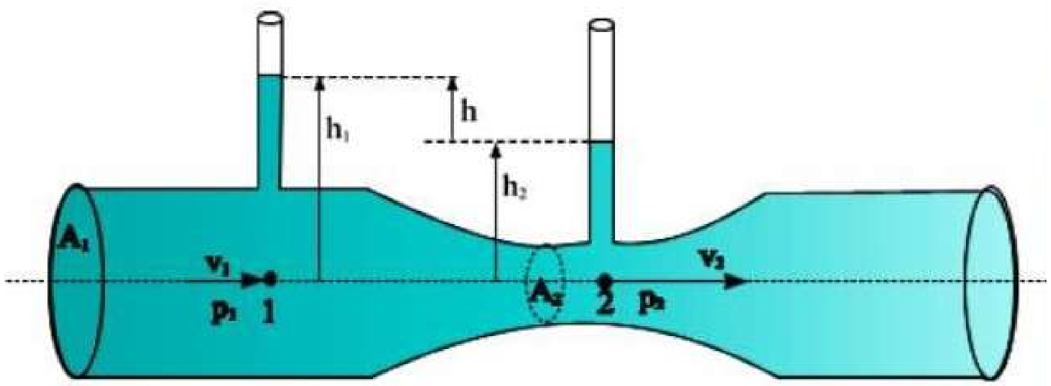
$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = constante}$$

- Interpretação física:

As variações de pressão, velocidade e altura se compensam ao longo de uma linha de corrente.

Equação de Bernoulli

Exemplo: O tubo de Venturi é um dispositivo utilizado para medição indireta de velocidade em uma tubulação, a partir de tomadas de pressão. Determine a velocidade em 1 em função do desnível h do manômetro, de g e das áreas A1 e A2.

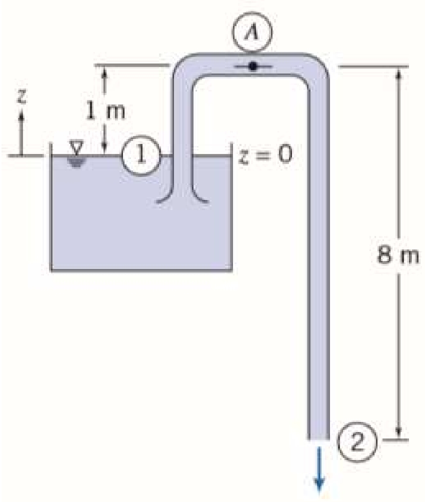


Equação de Bernoulli

Exemplo: Água flui de um tanque muito grande através de um pequeno orifício posicionado na porção inferior. Estime a velocidade de descarga.

Equação de Bernoulli

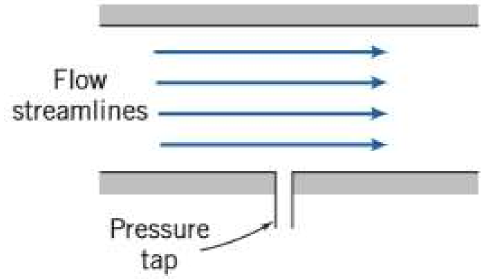
Exemplo 6.4: Um tubo em U atua como um sifão d'água. A curva no tubo está 1 m acima da superfície da água; a saída do tubo está 7 m abaixo. O fluido sai pela extremidade inferior do sifão como um jato livre, à pressão atmosférica. Se o escoamento é sem atrito, em primeira aproximação, determine a velocidade do jato e a pressão absoluta do fluido na curva.



Pressões estática, dinâmica e de estagnação

- A pressão explícita na equação de Bernoulli é conhecida como <u>pressão estática</u> ou <u>termodinâmica</u>.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = constante \longrightarrow p + \rho\frac{V^2}{2} + \rho gz = constante$$



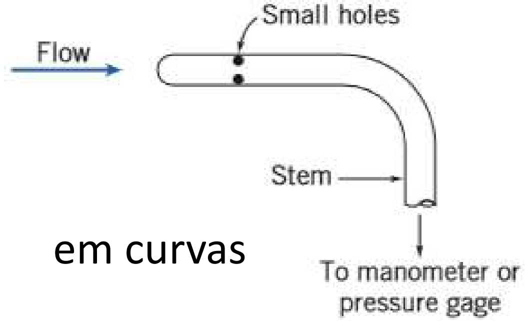
(a) Wall pressure tap

- Como medir essa pressão?

Eq. Euler na direção n $$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + g\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{V^2}{R}$$

Na ausência de gravidade e em tubulação reta $$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

em curvas



Pressões estática, dinâmica e de estagnação

- Se assumirmos que a energia potencial não varia ao longo da linha de corrente, temos:

$$p + \rho \frac{V^2}{2} + \rho \cancel{g z}^{\,0} = constante$$

- A soma da pressão estática com um termo de pressão vinculado à energia cinética do fluido se mantém constante ao longo da LC em um escoamento sem atrito. Essa é a <u>pressão de estagnação</u>, interpretada como a pressão decorrente da desaceleração do fluido até o repouso.

- Em um escoamento incompressível, a equação de Bernoulli pode ser utilizada para relacionar variações de velocidade e de pressão ao longo da LC. Desprezando diferença de elevação:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_o}{\rho} + \cancel{\frac{V_o^2}{2}}^{\,0} \longrightarrow \boxed{p_o = p + \rho \frac{V^2}{2}}$$

- Se a pressão estática for p em um ponto do escoamento em que a velocidade é V, a pressão de estagnação p_0 onde a velocidade de estagnação é $V_0 = 0$ pode ser calculada como:

Pressões estática, dinâmica e de estagnação

- A pressão dinâmica é o déficit entre a pressão de estagnação e a pressão estática. Ela recebe este nome, pois está associada à velocidade do escoamento.

$$p_o = p + \underbrace{\rho \frac{V^2}{2}}_{\text{Pressão dinâmica}}$$

- Resolvendo a expressão acima para a velocidade, temos:

$$V = \sqrt{\frac{2(p_o - p)}{\rho}}$$

- Logo, pode-se determinar a velocidade do escoamento a partir das medições das pressões de estagnação e estática do fluido.

Pressões estática, dinâmica e de estagnação

- A pressão de estagnação é medida com uma sonda chamada de tubo de pitot. A tomada de pressão é acoplada em uma abertura na ponta da sonda, orientada contra o escoamento. A sonda deve estar alinhada com o escoamento.

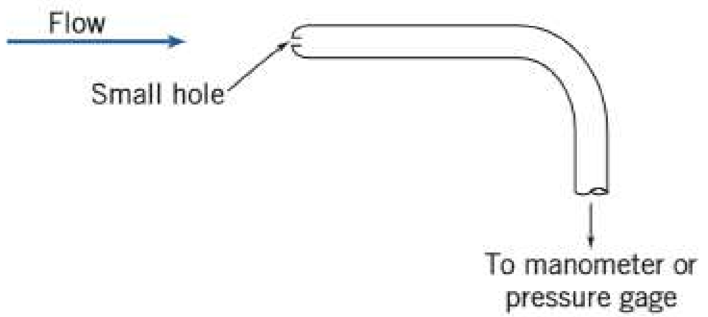
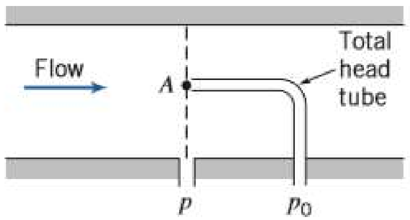
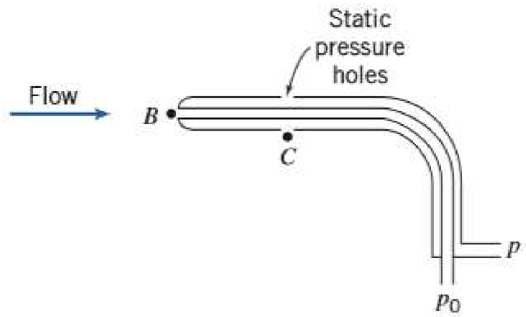


Fig. 6.3 **Measurement of stagnation pressure.**

- Outra possibilidade é utilizar sondas para medição combinada de pressão estática e de estagnação.



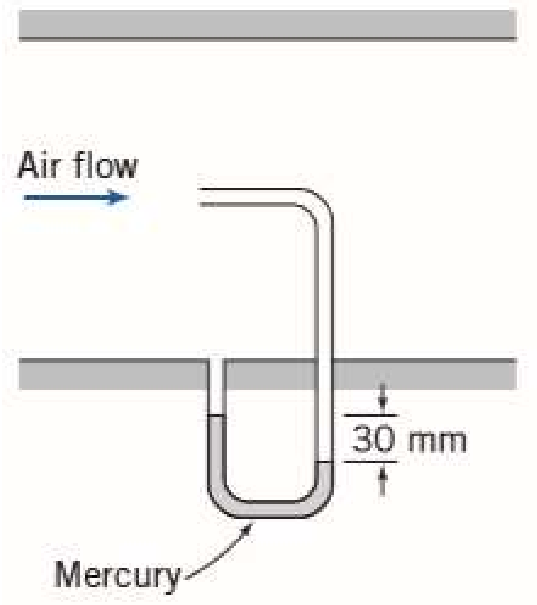
(*a*) Total head tube used with wall static tap



(*b*) Pitot-static tube

Pressões estática, dinâmica e de estagnação

Exemplo: Um tubo de pitot é inserido em um escoamento de ar a fim de medir a velocidade (vide figura). A pressão estática é medida no mesmo ponto do escoamento, usando uma tomada de pressão junto à parede. Determine a velocidade do escoamento.



Pressões estática, dinâmica e de estagnação

Exemplo: Um avião leve voa a 150 km/h no ar padrão a 1000 m de altitude (p = 89,9 kPa, rho = 1,12 kg/m³). Determine a pressão de estagnação na borda de ataque da asa e a pressão estática em outro ponto perto da asa em que a velocidade relativa ao ar é 60 m/s.