

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

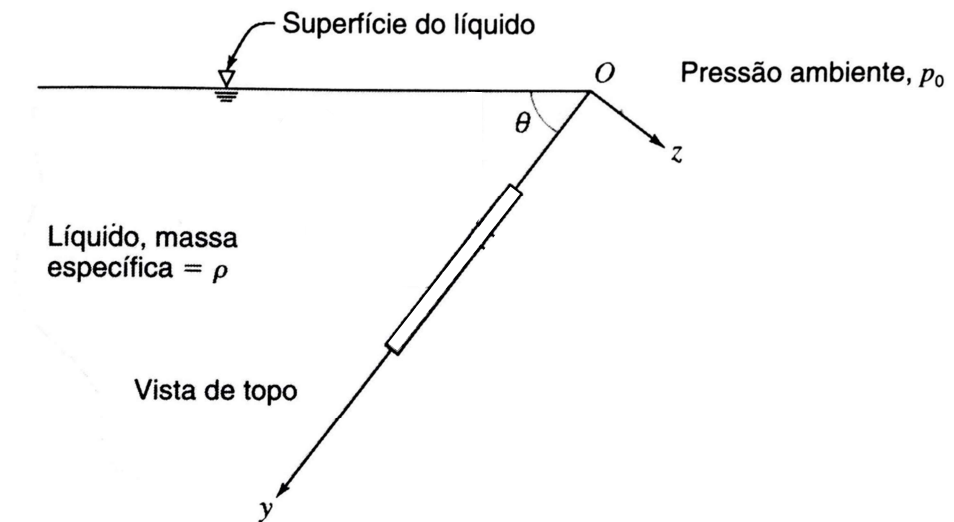
Já sabemos como determinar a distribuição de pressão em um fluido estático.

Assim, podemos examinar a força que atua sobre uma superfície submersa.

Para especificar totalmente a força resultante sobre uma superfície submersa, devemos informar:

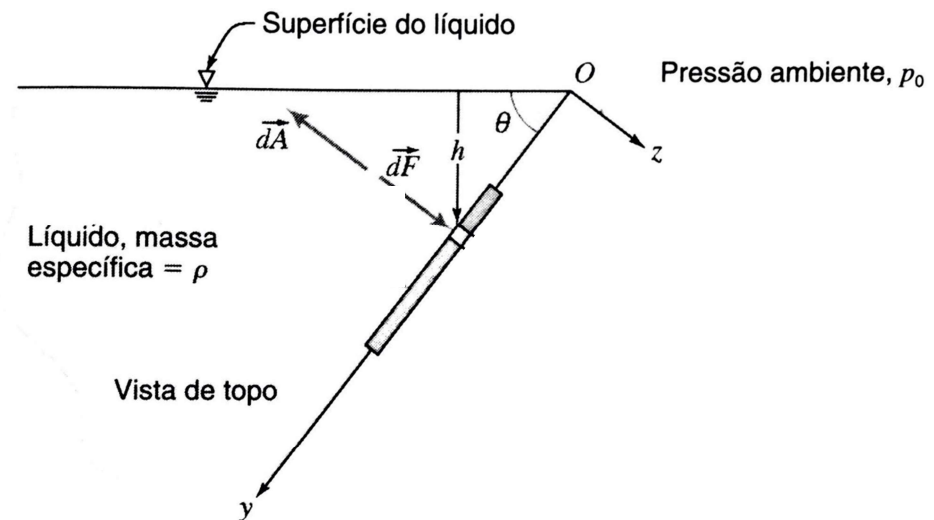
1. Magnitude da força;
2. Sentido da força;
3. Linha de ação da força.

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

$$dF = p dA$$

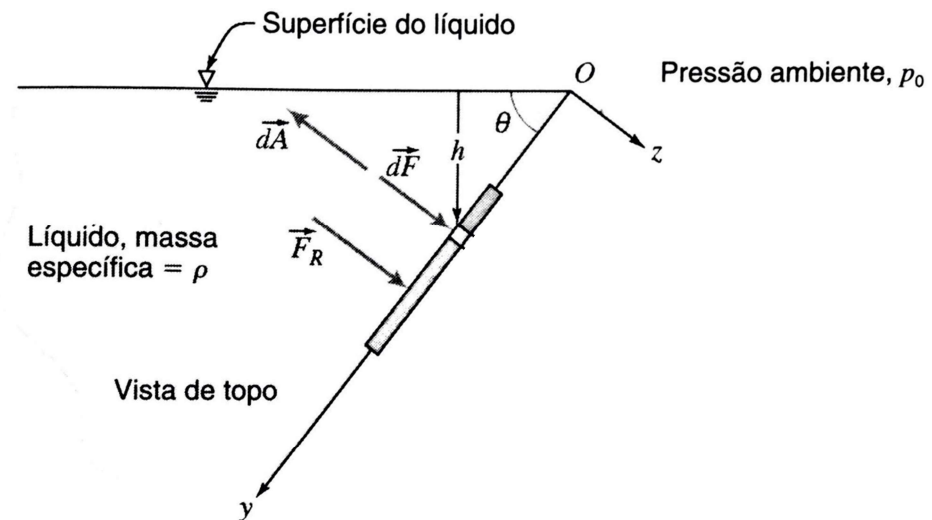


Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

$$dF = p dA$$

Força resultante, F_R :

$$F_R = \int_A dF = \int_A p dA$$



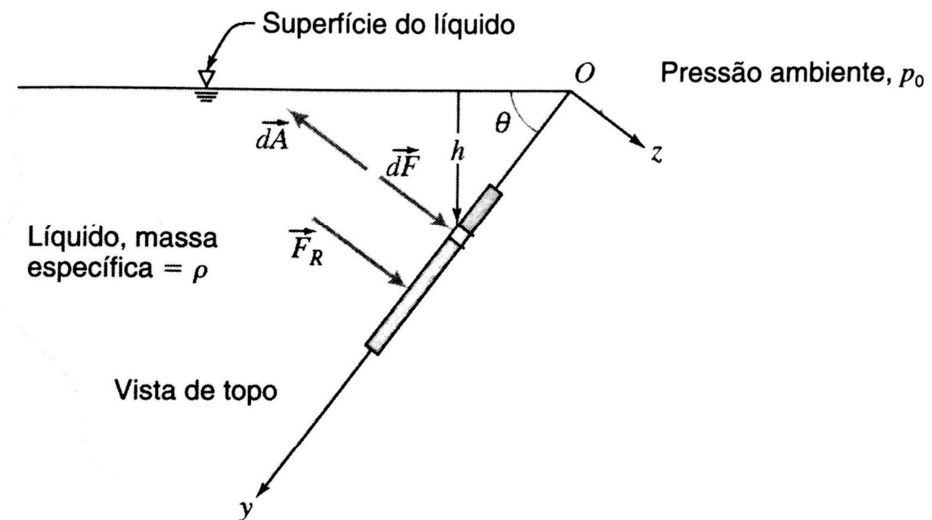
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

$$F_R = \int_A p dA$$

em que p vem de:

$$\frac{dp}{dh} = \rho g$$

$$p = p_0 + \int_0^h \rho g dh = p_0 + \rho gh$$



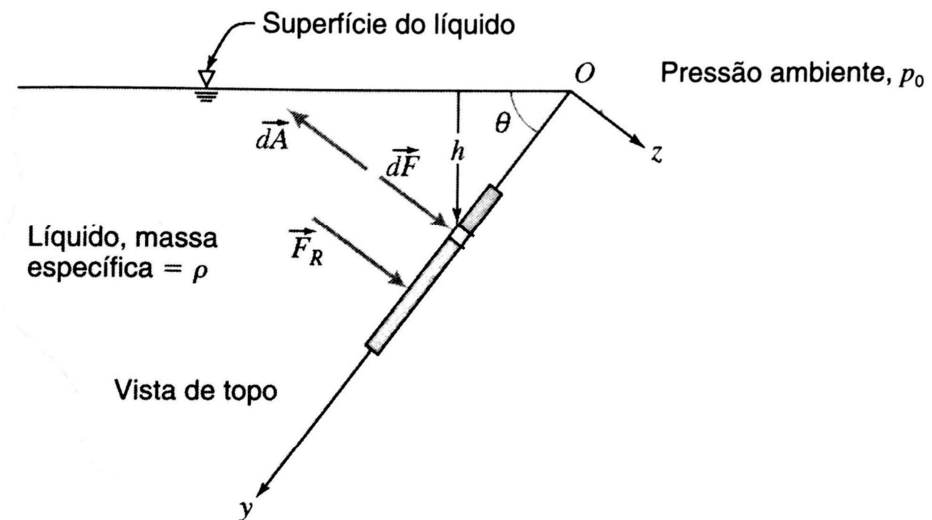
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

$$F_R = \int_A p dA$$

$$p = p_0 + \rho gh$$

A profundidade h é escrita em termos de y .

$$F_R = \int_A (p_0 + \rho gy \sin \theta) dA$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

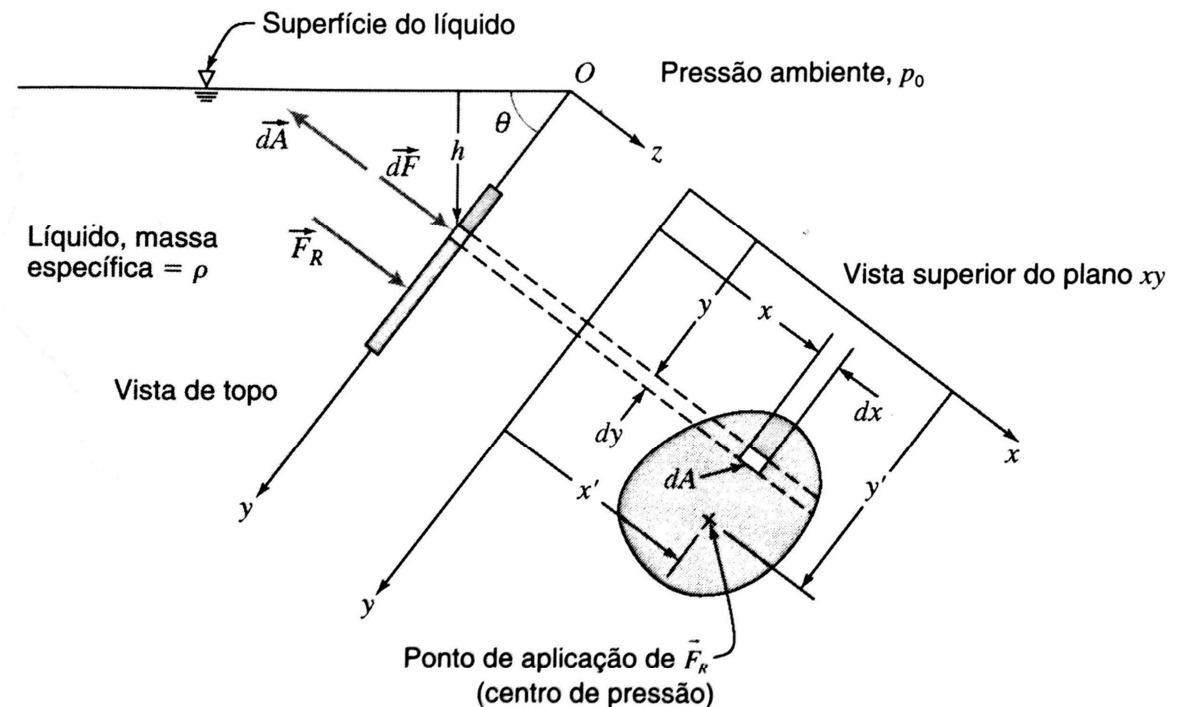
$$F_R = \int_A p dA$$

$$p = p_0 + \rho gh$$

A profundidade h é escrita em termos de y .

$$F_R = \int_A (p_0 + \rho gy \sin \theta) dA$$

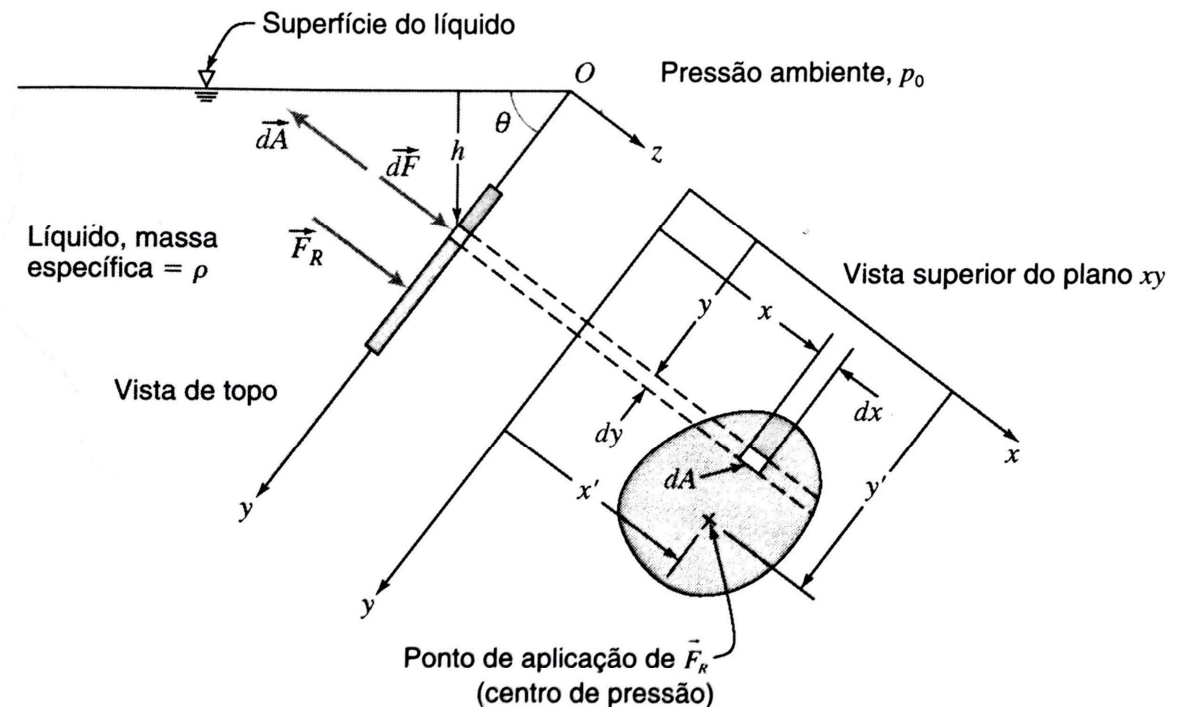
A área dA é escrita em termos das mesmas coordenadas de p .



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

O ponto de aplicação da \vec{F}_R (centro de pressão), é tal que o momento gerado por essa força em relação a qualquer eixo seja o mesmo gerado pelas forças distribuídas.

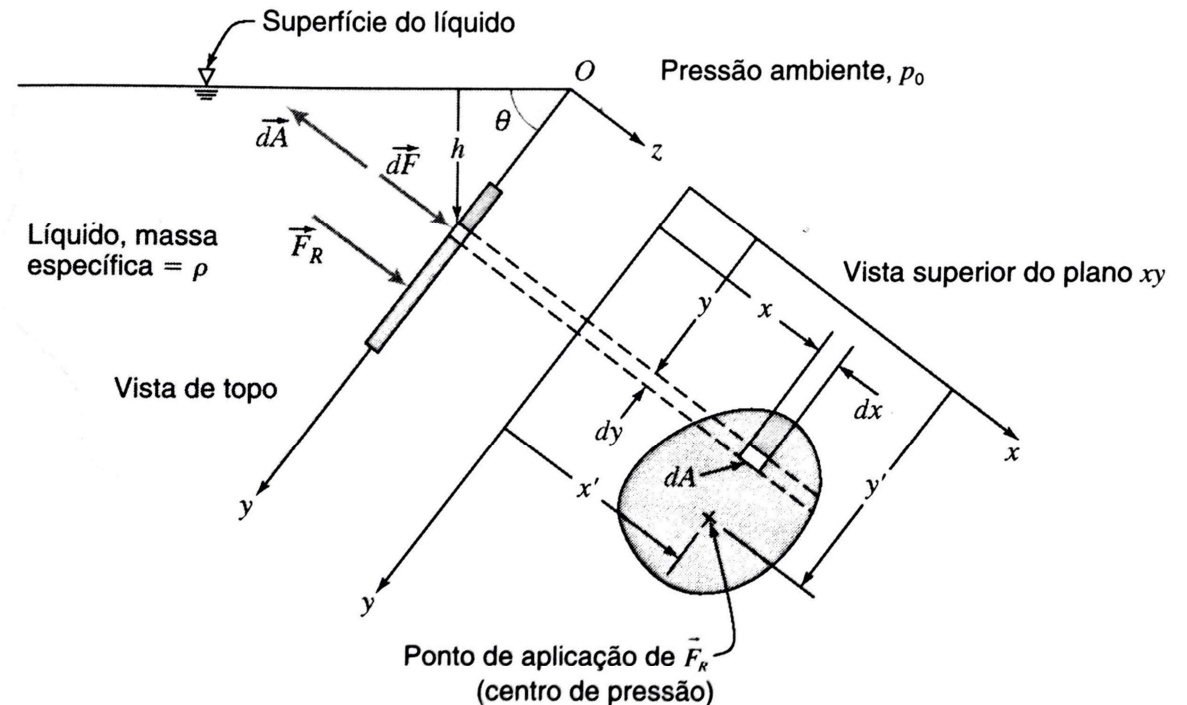
$$\vec{r}' \times \vec{F}_R = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \int_A \vec{r} \times p dA \hat{k}$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

O ponto de aplicação da \vec{F}_R (centro de pressão), é tal que o momento gerado por essa força em relação a qualquer eixo seja o mesmo gerado pelas forças distribuídas.

$$\underbrace{\vec{r}' \times \vec{F}_R}_{\text{Momento de } \vec{F}_R} = \int \underbrace{\vec{r} \times d\vec{F}}_{\text{Momento de cada } d\vec{F}} = \int_A \vec{r} \times p dA \hat{k}$$



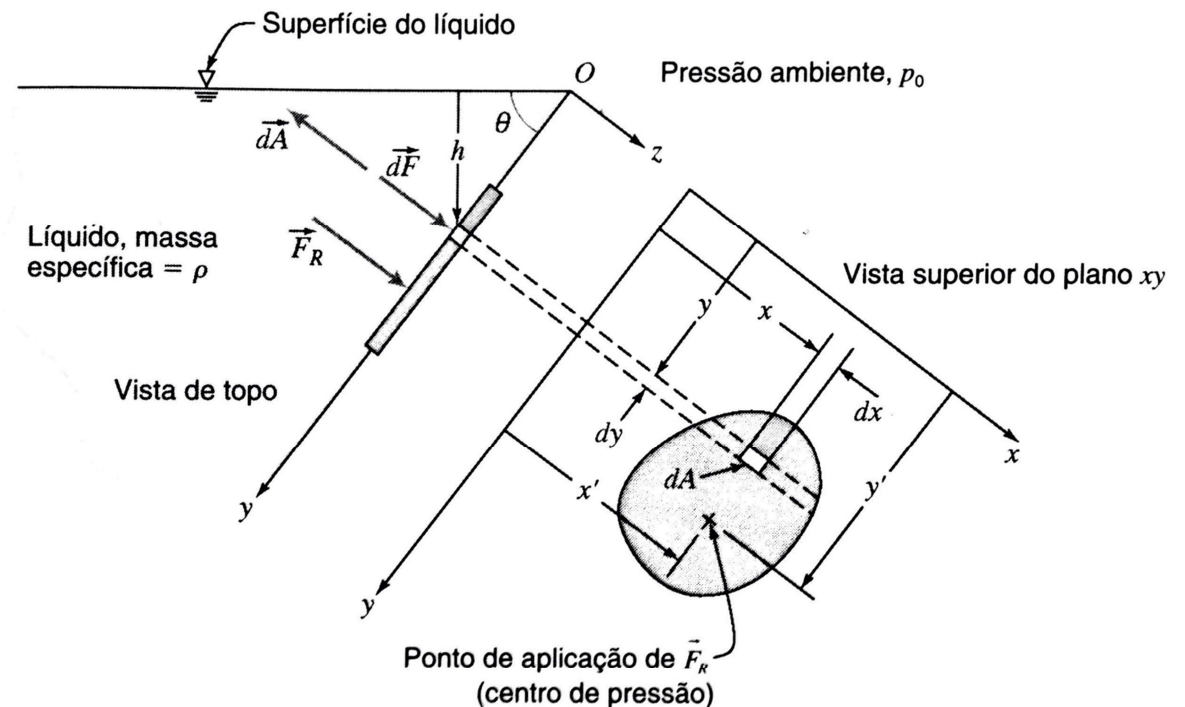
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

O ponto de aplicação da \vec{F}_R (centro de pressão), é tal que o momento gerado por essa força em relação a qualquer eixo seja o mesmo gerado pelas forças distribuídas.

$$\underbrace{\vec{r}' \times \vec{F}_R}_{\text{Momento de } \vec{F}_R} = \underbrace{\int \vec{r} \times d\vec{F}}_{\text{Momento de cada } d\vec{F}} = \int_A \vec{r} \times p dA \hat{k}$$

$$\vec{r}' = \hat{i}x' + \hat{j}y' \quad \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$$

$$\vec{F}_R = F_R \hat{k}$$

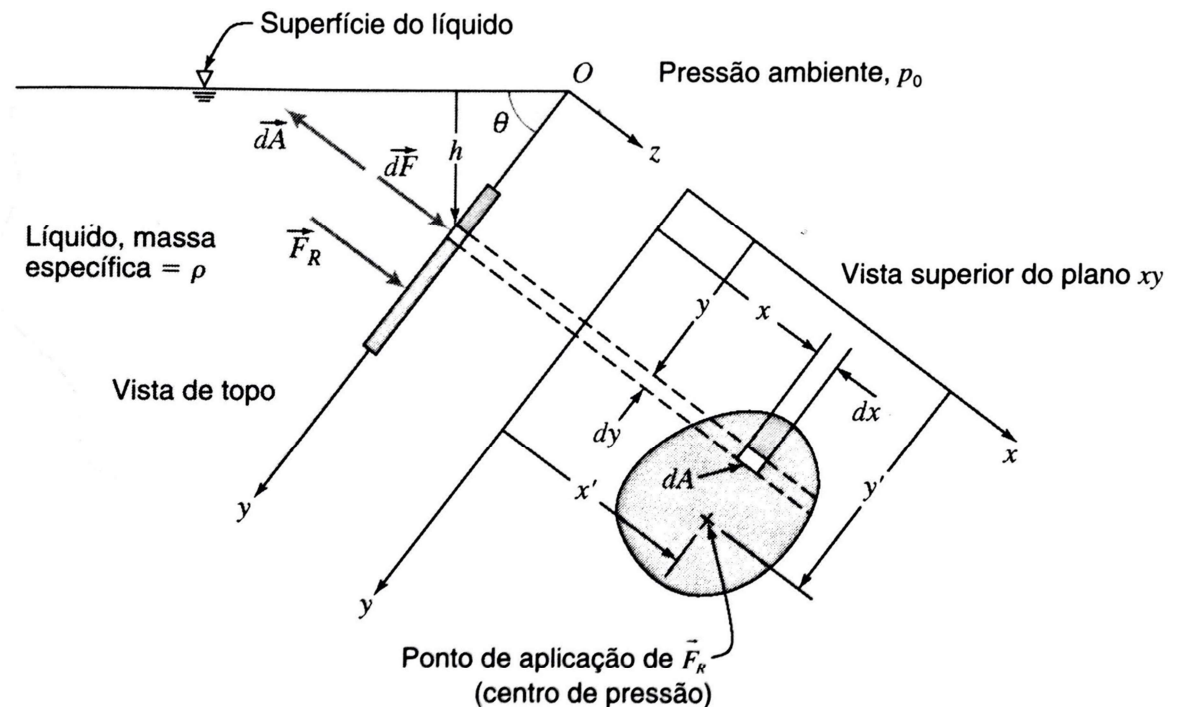


Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Substituindo, temos:

$$(\hat{i}x' + \hat{j}y') \times F_R \hat{k} = \int (\hat{i}x + \hat{j}y) \times d\vec{F}$$

$$= \int_A (\hat{i}x + \hat{j}y) \times p dA \hat{k}$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

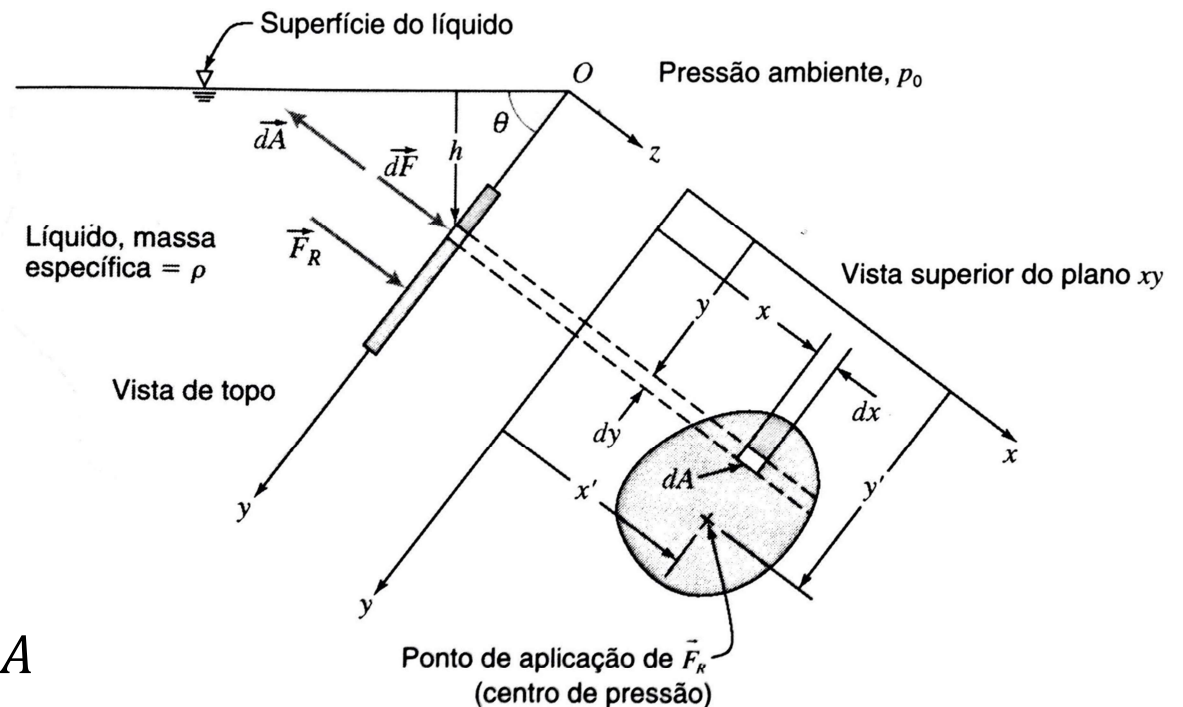
Substituindo, temos:

$$(\hat{i}x' + \hat{j}y') \times F_R \hat{k} = \int (\hat{i}x + \hat{j}y) \times d\vec{F}$$

$$= \int_A (\hat{i}x + \hat{j}y) \times p dA \hat{k}$$

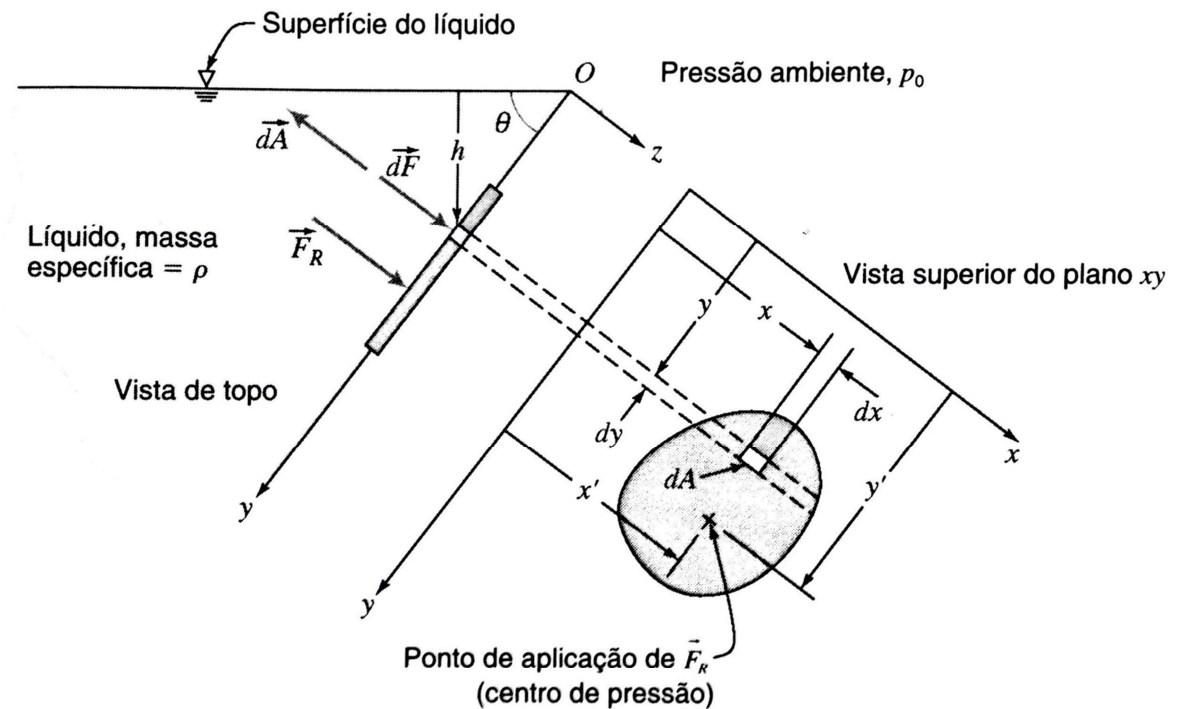
Resolvendo os produtos vetoriais:

$$-\hat{j}x'F_R + \hat{i}y'F_R = \int_A (-\hat{j}xp + \hat{i}yp) dA$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

$$-\hat{j}x'F_R + \hat{i}y'F_R = \int_A (-\hat{j}xp + \hat{i}yp) dA$$



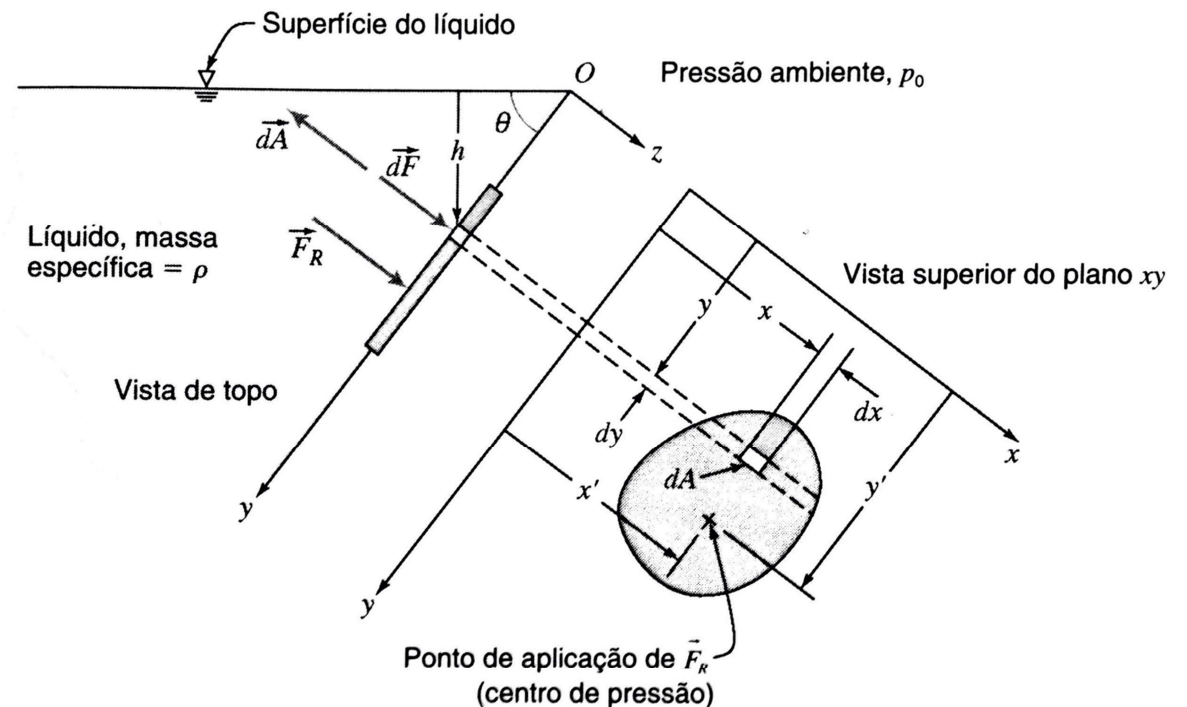
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

$$-\hat{j}x'F_R + \hat{i}y'F_R = \int_A (-\hat{j}xp + \hat{i}yp) dA$$

Formando equações escalares:

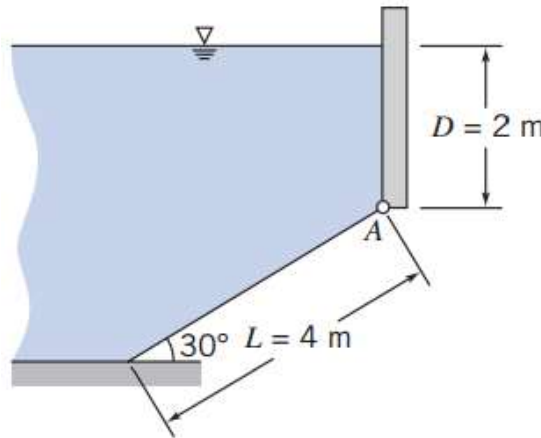
$$x'F_R = \int_A xp dA$$

$$y'F_R = \int_A yp dA$$



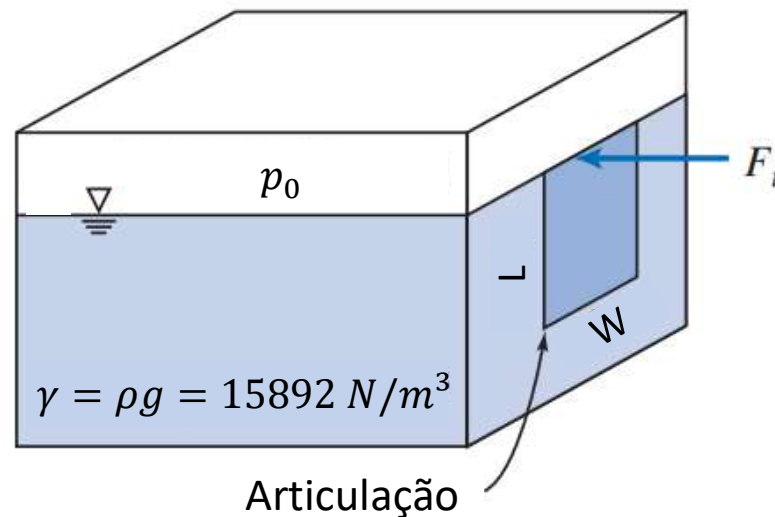
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Exemplo: Superfície articulada em A tem 5 metros de largura. Determinar força resultante sobre a superfície inclinada.



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Exemplo: A porta lateral do tanque é articulada na borda inferior. Uma pressão $p_0 = 4,8 \text{ kPa}$ (man) é aplicada na superfície livre do líquido. Determinar a força F_t para manter a porta fechada ($w = 0,61 \text{ m}$; $L = 0,914 \text{ m}$)



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

Trata-se de uma alternativa ao método apresentado anteriormente e consiste em utilizar equações recursivas para calcular a força e o seu ponto de aplicação sobre uma superfície plana submersa.

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

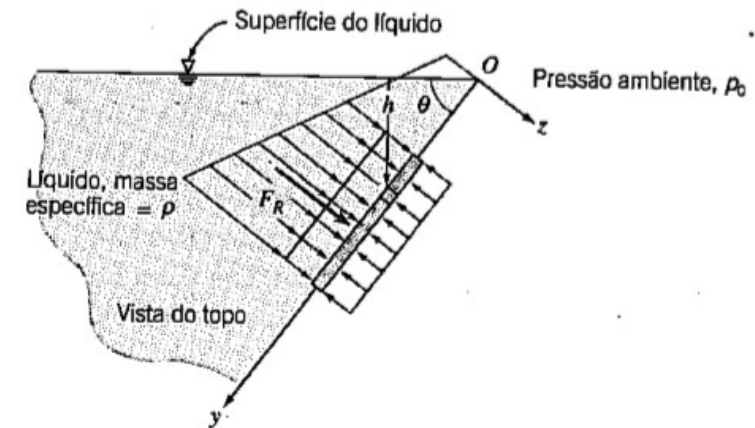
1. Cálculo da força

A distribuição de pressão na face superior é a soma da pressão p_0 uniforme com a pressão hidrostática do líquido:

$$p = p_0 + \rho gh$$

Consequentemente, a força resultante nessa mesma face é:

$$F_R = \int_A p dA = \int_A (p_0 + \rho gh) dA = \int_A (p_0 + \rho g y \sin \theta) dA = p_0 \int_A dA + \rho g \sin \theta \int_A y dA$$
$$F_R = p_0 A + \rho g \sin \theta \int_A y dA$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

1. Cálculo da força

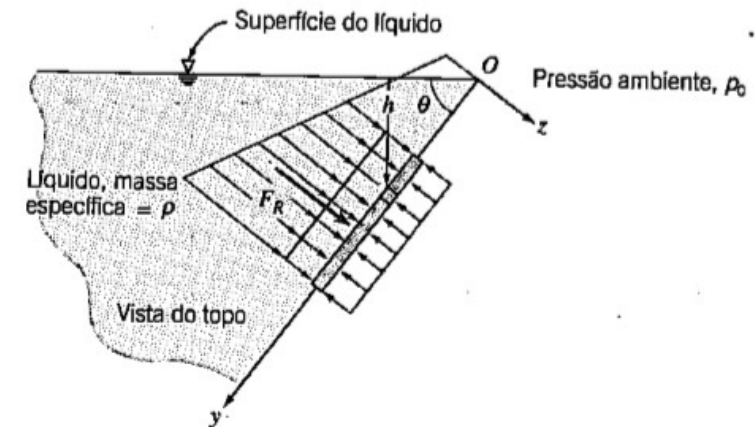
$$F_R = p_0 A + \rho g \sin \theta \int_A y dA \longrightarrow \int_A y dA = y_c A$$

sendo y_c (ou \bar{y}) o **centróide** da área A (centro geométrico). Logo,

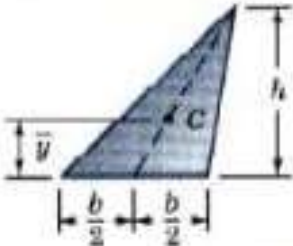
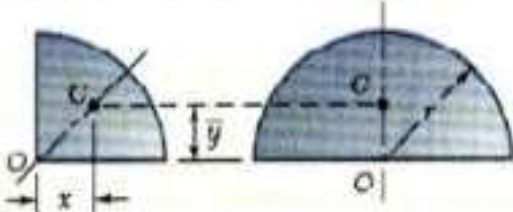

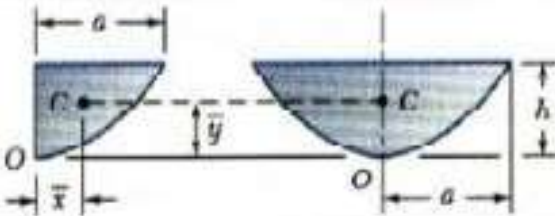
$$F_R = p_0 A + \rho g \sin \theta y_c A = (p_0 + \rho g h_c) A = p_c A$$

Conhecendo o formato da superfície e o fluido, determina-se facilmente a força.

Se p_0 atuar dos dois lados da placa, ela não contribui para a força líquida sobre a placa.



Centroids of Common Shapes of Areas

Shape		\bar{x}	\bar{y}	Area
Triangular area			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Quarter-elliptical area		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Semielliptical area		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Semiparabolic area		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabolic area		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

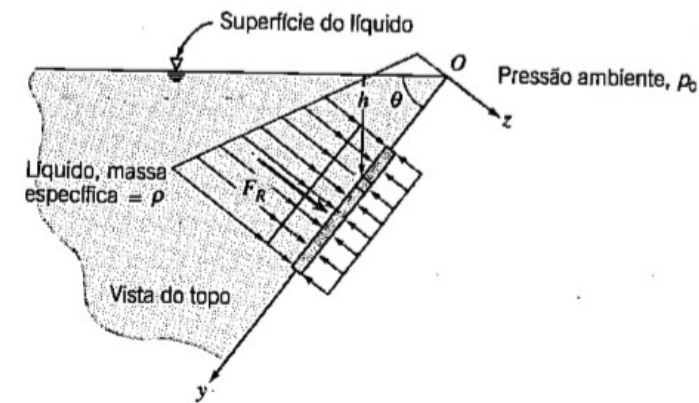
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

2. Linha de ação

Partindo da relação $y' F_R = \int_A y p \, dA$

$$y' F_R = \int_A y(p_0 + \rho g y \sin \theta) \, dA = p_0 \int_A y \, dA + \rho g \sin \theta \int_A y^2 \, dA$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

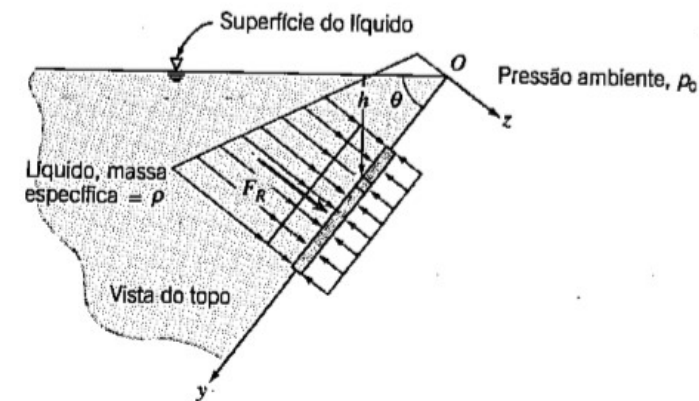
Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

2. Linha de ação

Partindo da relação $y' F_R = \int_A y p \, dA$

$$y' F_R = \int_A y (p_0 + \rho g y \sin \theta) \, dA = p_0 \int_A y \, dA + \rho g \sin \theta \int_A y^2 \, dA$$

$y_c A$



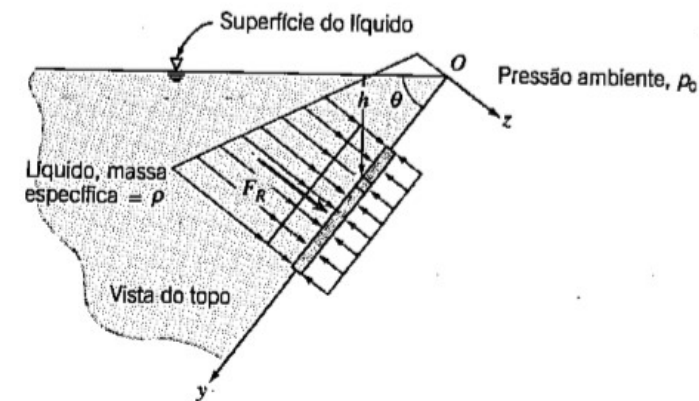
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

2. Linha de ação

Partindo da relação $y' F_R = \int_A y p \, dA$

$$y' F_R = \int_A y (p_0 + \rho g y \sin \theta) \, dA = p_0 \underbrace{\int_A y \, dA}_{y_c A} + \rho g \sin \theta \underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{\text{Momento de inércia, } I_{xx}}$$



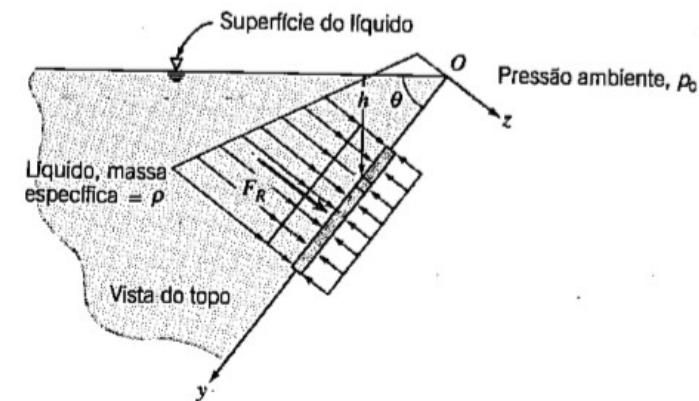
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

2. Linha de ação

Partindo da relação $y' F_R = \int_A y p \, dA$

$$y' F_R = \int_A y (p_0 + \rho g y \sin \theta) \, dA = p_0 \underbrace{\int_A y \, dA}_{y_c A} + \rho g \sin \theta \underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{\text{Momento de inércia, } I_{xx}}$$



Teorema dos Eixos Paralelos

$$I_{xx} = I_{\hat{x}\hat{x}} + A y_c^2$$

onde: $I_{\hat{x}\hat{x}}$ = momento de inércia em relação ao eixo x que passa pelo centróide.

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

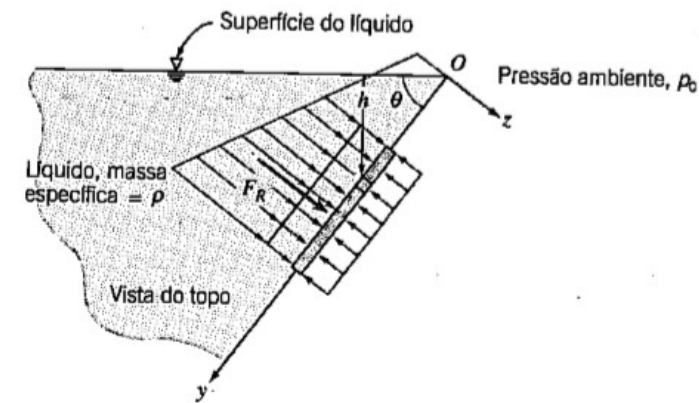
Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

2. Linha de ação

Portanto:

$$y' F_R = p_0 \int_A y dA + \rho g \sin \theta \int_A y^2 dA = p_0 y_c A + \rho g \sin \theta I_{xx}$$

$$y' F_R = p_0 y_c A + \rho g \sin \theta (I_{\hat{x}\hat{x}} + A y_c^2) = y_c (p_0 A + \rho g y_c \sin \theta A) + \rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{x}}$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

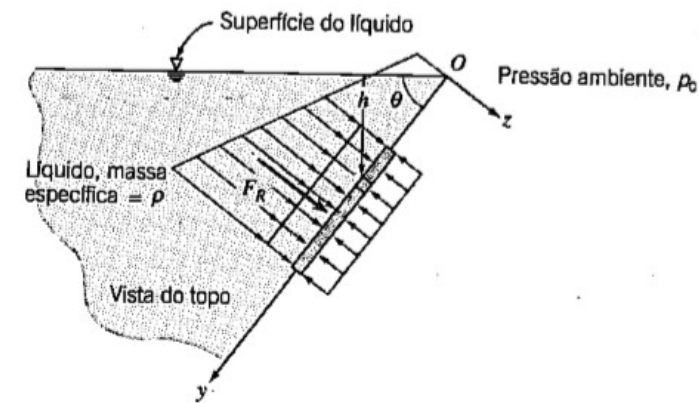
Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

2. Linha de ação

Portanto:

$$y' F_R = p_0 \int_A y dA + \rho g \sin \theta \int_A y^2 dA = p_0 y_c A + \rho g \sin \theta I_{xx}$$

$$y' F_R = p_0 y_c A + \rho g \sin \theta (I_{\hat{x}\hat{x}} + A y_c^2) = y_c (p_0 A + \rho g y_c \sin \theta A) + \rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{x}}$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

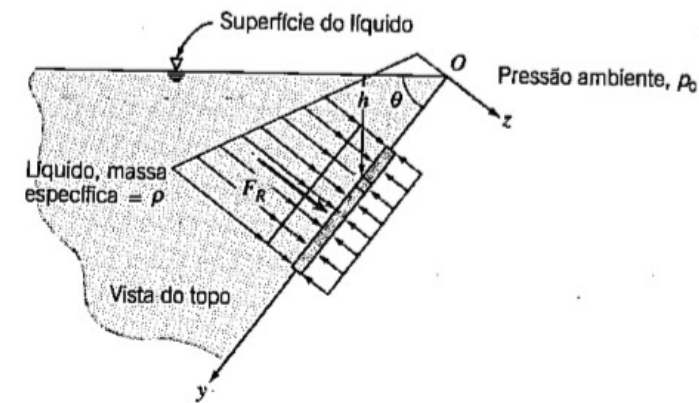
2. Linha de ação

Portanto:

$$y' F_R = p_0 \int_A y dA + \rho g \sin \theta \int_A y^2 dA = p_0 y_c A + \rho g \sin \theta I_{xx}$$

$$y' F_R = p_0 y_c A + \rho g \sin \theta (I_{\hat{x}\hat{x}} + A y_c^2) = y_c (p_0 A + \rho g y_c \sin \theta A) + \rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{x}}$$

$$y' F_R = y_c F_R + \rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{x}} \longrightarrow \boxed{y' = y_c + \frac{\rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{x}}}{F_R}}$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

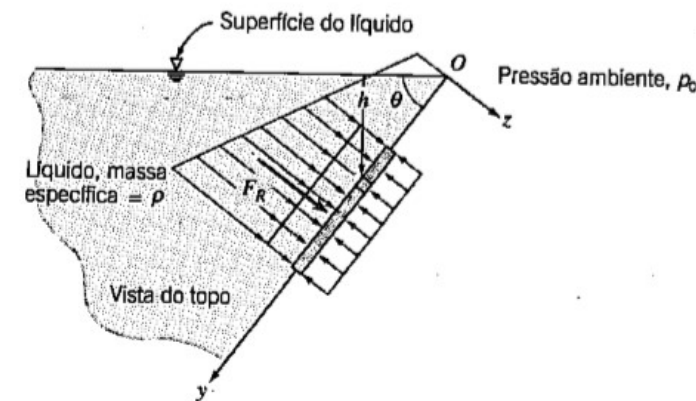
Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

2. Linha de ação

Para mesma pressão ambiente dos dois lados ($p_0 = 0$):

$$y' F_R = y_c (p_0 A + \rho g y_c \sin \theta A) + \rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{x}}$$

$$y' F_R = y_c \rho g y_c \sin \theta A + \rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{x}} \quad \text{onde} \quad F_R = \rho g y_c \sin \theta A$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

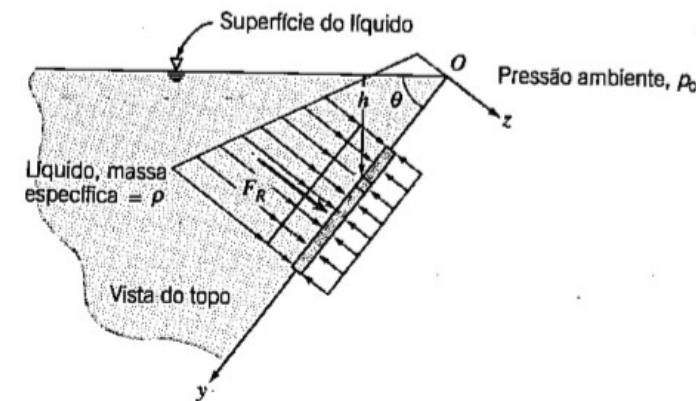
2. Linha de ação

Para mesma pressão ambiente dos dois lados ($p_0 = 0$):

$$y' F_R = y_c (p_0 A + \rho g y_c \sin \theta A) + \rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{x}}$$

$$y' F_R = y_c \rho g y_c \sin \theta A + \rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{x}} \quad \text{onde} \quad F_R = \rho g y_c \sin \theta A$$

$$y' = y_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{y_c A}$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

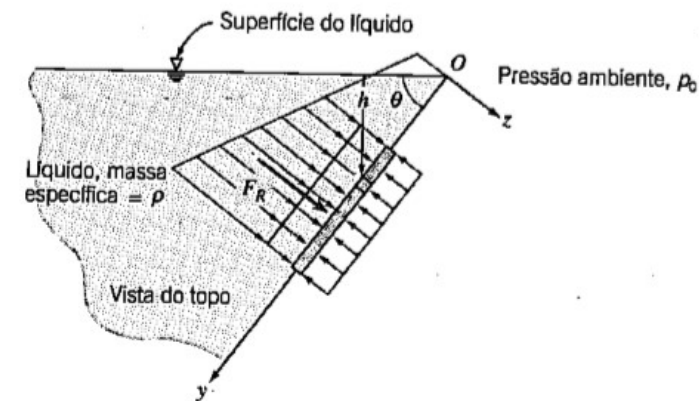
Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

2. Linha de ação

Replicando o desenvolvimento para obtenção de x' :

$$x' F_R = \int_A x p \, dA = \int_A x (p_0 + \rho g y \sin \theta) \, dA = \int_A (x p_0 + \rho g x y \sin \theta) \, dA$$

$$x' F_R = p_0 \underbrace{\int_A x \, dA}_{x_c A} + \rho g \sin \theta \underbrace{\int_A x y \, dA}_{\text{Produto de inércia, } I_{xy}}$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

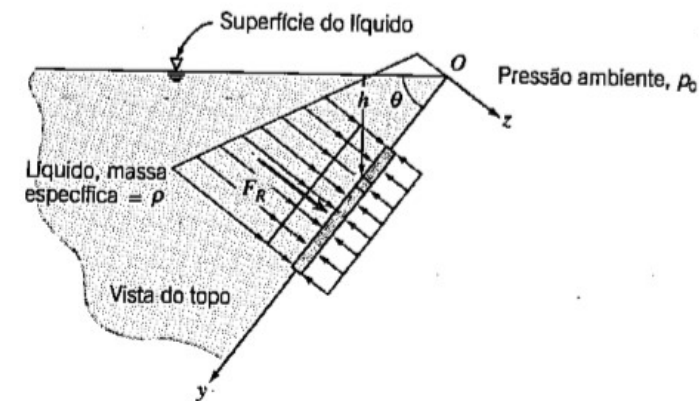
2. Linha de ação

Replicando o desenvolvimento para obtenção de x' :

$$x'F_R = \int_A xp \, dA = \int_A x(p_0 + \rho g y \sin \theta) \, dA = \int_A (xp_0 + \rho g xy \sin \theta) \, dA$$

$$x'F_R = p_0 \underbrace{\int_A x \, dA}_{x_c A} + \rho g \sin \theta \underbrace{\int_A xy \, dA}_{\text{Produto de inércia, } I_{xy}}$$

**Produto
de inércia, I_{xy}**



Teorema dos Eixos Paralelos

$$I_{xy} = I_{\hat{x}\hat{y}} + Ax_c y_c$$

onde:

$I_{\hat{x}\hat{y}}$ = produto de inércia da área em relação ao par de eixos $\hat{x}\hat{y}$ que passam pelo centróide.

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

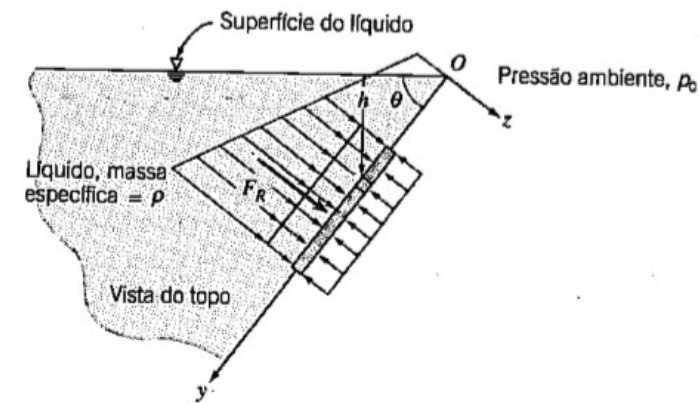
2. Linha de ação

Replicando o desenvolvimento para obtenção de x' :

$$x' F_R = p_0 x_c A + \rho g \sin \theta I_{xy}$$

Aplicando manipulação análoga àquela para obtenção de y' :

$$x' = x_c + \frac{\rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{y}}}{F_R}$$



Teorema dos Eixos Paralelos

$$I_{xy} = I_{\hat{x}\hat{y}} + A x_c y_c$$

onde:

$I_{\hat{x}\hat{y}}$ = produto de inércia da área em relação ao par de eixos $\hat{x}\hat{y}$ que passam pelo centróide.

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

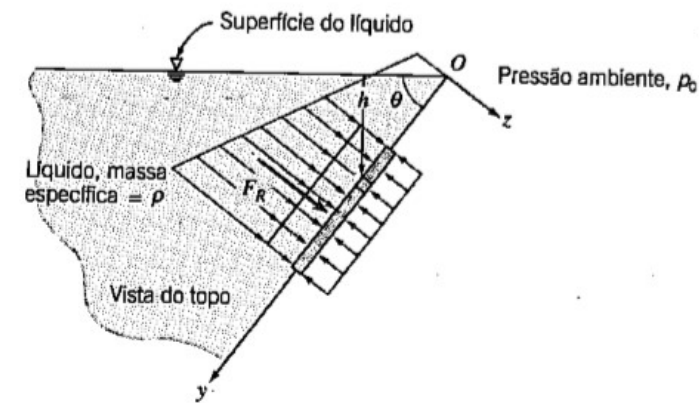
2. Linha de ação

Replicando o desenvolvimento para obtenção de x' :

$$x' F_R = p_0 x_c A + \rho g \sin \theta I_{xy}$$

Aplicando manipulação análoga àquela para obtenção de y' :

$$\boxed{x' = x_c + \frac{\rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{y}}}{F_R}} \quad \text{Se } p_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{x' = x_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{y}}}{y_c A}}$$



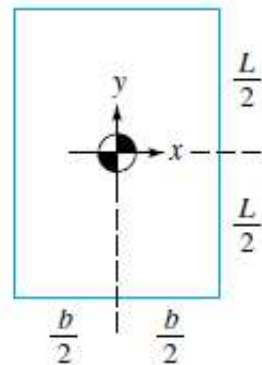
Teorema dos Eixos Paralelos

$$I_{xy} = I_{\hat{x}\hat{y}} + A x_c y_c$$

onde:

$I_{\hat{x}\hat{y}}$ = produto de inércia da área em relação ao par de eixos $\hat{x}\hat{y}$ que passam pelo centróide.

Momentos e produtos de inércia em relação aos eixos que passam pelo centróide.

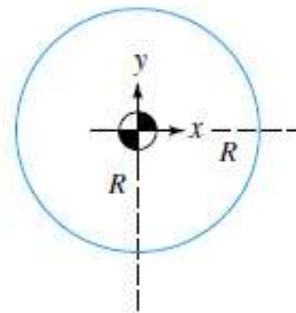


(a)

$$A = bL$$

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

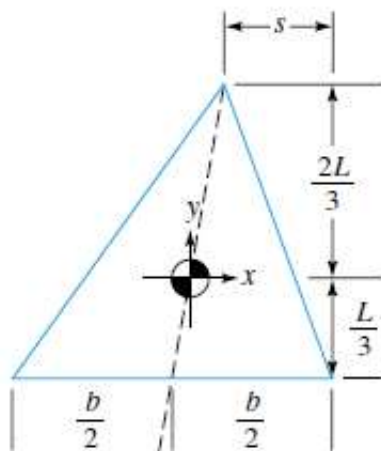


(b)

$$A = \pi R^2$$

$$I_{xx} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xy} = 0$$

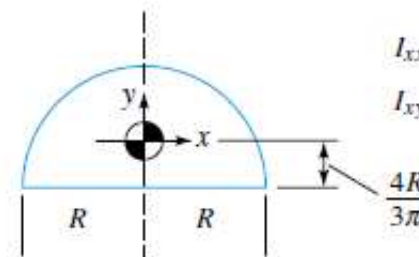


(c)

$$A = \frac{bL}{2}$$

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{36}$$

$$I_{xy} = \frac{b(b-2s)L^2}{72}$$



(d)

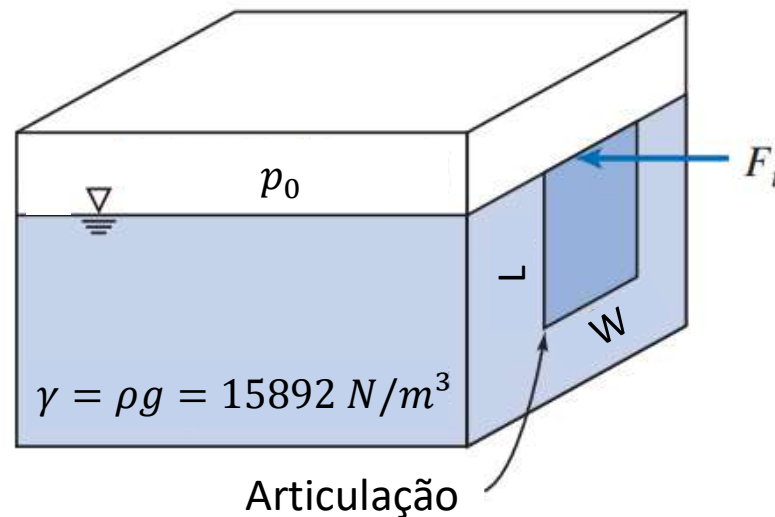
$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_{xx} = 0.10976R^4$$

$$I_{xy} = 0$$

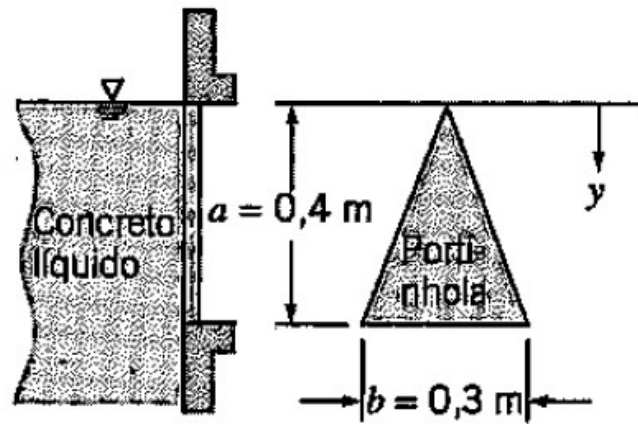
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Exemplo: A porta lateral do tanque é articulada na borda inferior. Uma pressão $p_0 = 4,8 \text{ kPa}$ (man) é aplicada na superfície livre do líquido. Determinar a força F_t para manter a porta fechada ($w = 0,61 \text{ m}$; $L = 0,914 \text{ m}$)



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Exemplo: Calcule a força resultante sobre a comporta abaixo (densidade do concreto = 2500 kg/m^3).



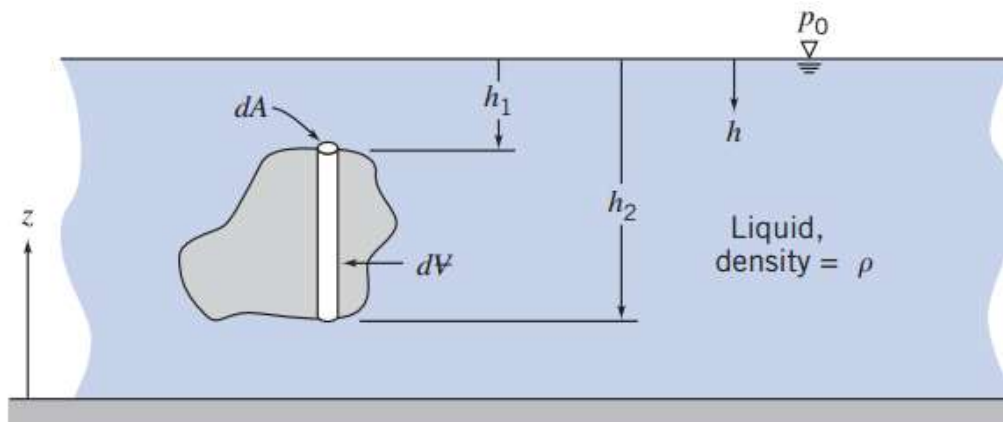
Empuxo



Conceito: Força vertical que atua sobre um objeto imerso (ou parcialmente imerso) em um meio fluido devido à distribuição de pressão ao seu redor.

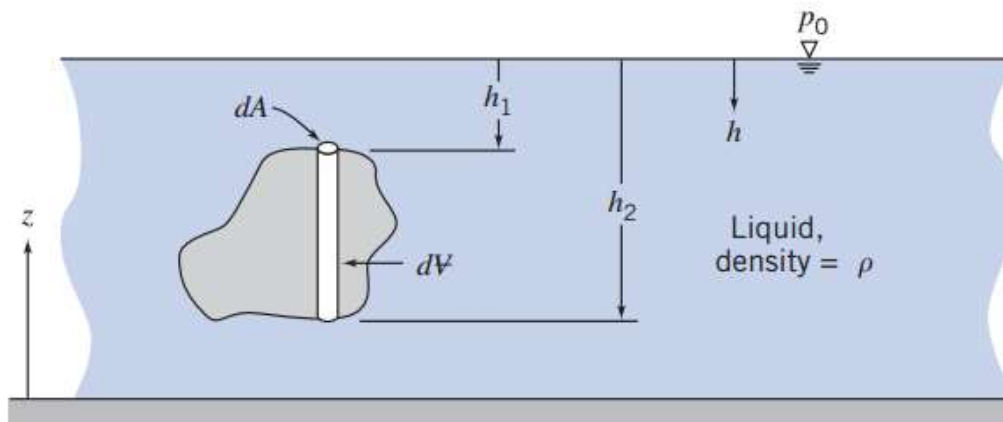
Empuxo

Dedução matemática do conceito de empuxo:



Empuxo

Dedução matemática do conceito de empuxo:



A variação da pressão no fluido é dada por:

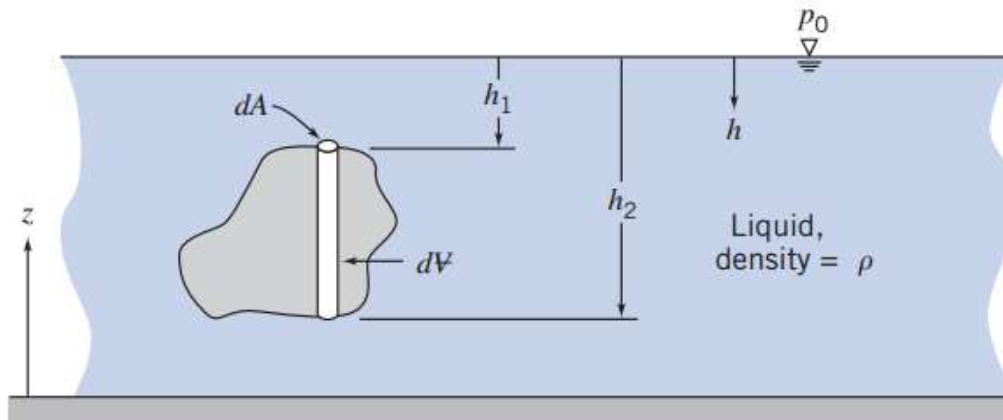
$$\frac{dp}{dh} = \rho g$$

Se ρ for constante:

$$p = p_0 + \rho gh$$

Empuxo

Dedução matemática do conceito de empuxo:



A força líquida vertical devido à pressão hidrostática que atua sobre o elemento é:

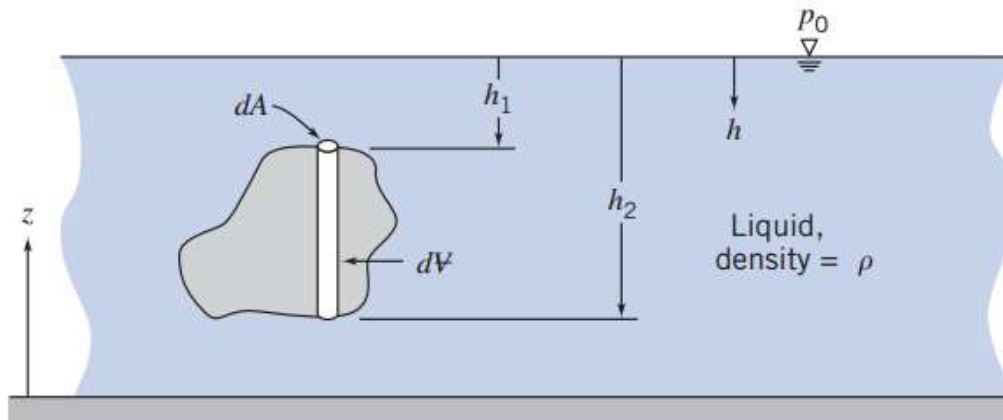
$$\begin{aligned} dF_z &= (p_0 + \rho g h_2)dA - (p_0 + \rho g h_1)dA \\ &= \rho g(h_2 - h_1)dA \end{aligned}$$

Como $dV = (h_2 - h_1)dA$:

$$F_z = \int dF_z = \int_V \rho g dV = \rho g V$$

Empuxo

Dedução matemática do conceito de empuxo:



O empuxo sobre o objeto é igual ao **peso do fluido** deslocado.

A força líquida vertical devido à pressão hidrostática que atua sobre o elemento é:

$$\begin{aligned} dF_z &= (p_0 + \rho gh_2)dA - (p_0 + \rho gh_1)dA \\ &= \rho g(h_2 - h_1)dA \end{aligned}$$

Como $dV = (h_2 - h_1)dA$:

$$F_z = \int dF_z = \int_V \rho g dV = \rho g V$$

Empuxo

Exemplo: Um balão de ar quente deve ser capaz de suspender uma cesta de 300 kg. Determine a temperatura que o ar deve ser aquecido para efetuar essa tarefa. (Considerar o balão como uma esfera de diâmetro igual a 15 m).

