Probabilidade e Estatística - Semana II

Espaço de Amostras Finito

Neste tipo de espaço temos somente um conjunto de n possíveis resultados do experimento. Assim, sendo os eventos A_1, A_2, ..., A_n referentes aos eventos em que ocorrem os o primeiro resultado, o segundo resultado e assim por diante, temos que

$$P(A_i) \geq 0, \text{ para } i = 1, ..., n$$

e

$$\sum_{i=0}^{n} P(A_i) = 1.$$

Espaço de Amostras Simples

Ocorre quando qualquer um dos n resultados de um dado experimento que tem espaço de amostra finito tem a mesma probabilidade de ocorrer. Assim a probabilidade do evento A_i em que o i-ésimo resultado ocorre é dada por $1/n$. Matematicamente:

$$P(A_i) = \frac{1}{n}$$

Num caso destes, se um evento A engloba m diferentes resultados, a probabilidade deste evento ocorrer num experimento é dada por:

$$\text{Pr}(A) = \frac{m}{n}.$$

Exemplo 1

Qual é a probabilidade de termos exatamente 2 coroas quando jogamos 3 moedas?

Considerando que as moedas são independentes umas das outras, temos no total 8 possibilidades de resultados. Destas 8 possibilidades, 3 delas contém exatamente 2 coroas. Assim, a probabilidade buscada é 3/8.

Métodos de Contagem

Agora iremos ver algumas considerações sobre alguns métodos de contagem.

Regra da Multiplicação

Consideremos dois experimentos distintos, onde o primeiro possui m resultados e o segundo possui n resultados possíveis. Quando estes experimentos são **independentes**, se um evento é considerado a combinação dos dois resultados, então o número total de possíveis resultados é $m \times n$.

Na verdade, se o experimento tiver k partes, o resultado de cada parte tiver n_i resultados possíveis (com i = 1, 2, ..., k), então o número total de possíveis resultados é $n_1 \times n_2 \times ... n_k$.

Exemplo 2

Qual o número de possíveis combinações de cara/-coroa que são possíveis quando se jogam 6 moedas. Considere que as moedas são distinguíveis (ou seja, as moedas são identificadas).

Como temos 6 moedas, elas são distinguíveis e as jogadas das moedas são independentes, então o número total de possibilidades é dado por $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$.

Permuta

Quando temos n elementos e queremos arrumar **todos** eles em diferentes ordens temos n possibilidades para a primeira posição, $(n-1)$ possibilidades para a segunda posição, e assim por diante. O número de possibilidades desta permuta é:

$$P_n = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1 = n!$$

Permuta com Diferentes Tipos

Suponha que temos um conjunto formado por diferentes tipos de indivíduos, ou seja, n_1 elementos do tipo 1, n_2 elementos do tipo 2, etc, sendo n o número total de elementos. O número de diferentes permutas que podemos fazer será:

$$P'_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ...}$$

Exemplo 3

Uma caixa contém 10 bolas, sendo 4 delas azuis e 6 vermelhas. Em quantas combinações diferentes podemos arranjar estas 10 bolas, se modo que a sequência de cores seja diferente em cada combinação?

Temos aqui um caso de permuta com diferentes tipos. Assim, o número de possibilidades é:

$$P'_{10} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$$

Exemplo 4

Sete pessoas vão se hospedar em um hotel, sendo que resta 1 quarto tripo e 2 quartos duplos. Quantas combinações diferentes podemos ter nestas condições?

Temos aqui um caso de permuta com diferentes tipos. Assim, o número de possibilidades é:

$$P_7' = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

Arranjo

Considere um conjunto que tem n elementos. Se k elementos ($k \leq n$) são escolhidos ao acaso e **removidos** do conjunto original, o número de possíveis conjuntos de k elementos formados é dado por $A_{n,k}$:

$$A_{n,k} = n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)$$

Utilizando o conceito de fatorial, temos:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemplo 5

O presidente e o tesoureiro de um clube devem ser escolhidos entre um grupo de 25 membros. Se a mesma pessoal não pode ocupar ambos os cargos ao mesmo tempo, é o número de possíveis combinações?

Temos aqui um caso de permuta sem reposição. Assim, o número de possibilidades é:

$$A_{25,2} = \frac{25!}{23!} = 25 \times 24 = 600$$

Exemplo 6

Suponha que existam dois times de corrida A e B, que contém 3 participantes cada. Se as qualidades de todos os participantes forem exatamente iguais, qual é a probabilidade dos 3 participantes do time A chegarem nas 3 primeiras posições e os 3 do time B chegarem na 4a, 5a e 6a posições, de uma corrida que contem somente com os 6 participantes acima?

Temos aqui um caso de permuta sem reposição. Assim, a probabilidade P é dada por:

$$P = \frac{3! \times 3!}{6!} = \frac{1}{20}$$

Arranjo com Reposição

Considere um caso semelhante ao anterior, mas onde os k elementos escolhidos são imediatamente devolvidos ao conjunto original assim que forem selecionados. Neste caso, o mesmo elemento pode ser escolhido mais de uma vez. O número de possibilidades é dado por n^k.

Exemplo 7

Considere uma caixa com n bolas numeradas. Imagine que se realiza um experimento onde k bolas, uma a uma, são retiradas da caixa e seu número é anotado. Em seguida esta bola é devolvida ao conjunto total. Qual é a probabilidade de que nenhuma das k bolas seja repetida?

O número total de possibilidade que temos de ter k bolas não repetidas em um conjunto de n bolas é dado por $A_{n,k}$. Entretanto, o número total de possibilidades que temos considerando as repetições é dado por n^k. Assim, a probabilidade buscada é dada por

$$\frac{A_{n,k}}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!\, n^k}$$

.

Exemplo 8

Uma sala contém um número n de pessoas. Qual é a probabilidade de que ao menos duas pessoas na sala tenham o aniversário no mesmo dia?

Neste caso será mais fácil calcularmos a probabilidade de que todas as pessoas façam aniversário em datas diferentes. Se considerarmos, para simplificar o caso, que o ano tem 365 dias e que as pessoas da sala tenham probabilidade igual de terem nascido em qualquer dia do ano, o número total de combinações é dado por 365^n (365 dias do ano, cada dia tendo probabilidade igual de que qualquer uma das n pessoas tenham nascido neste dia). Se queremos considerar o caso em que as pessoas tenham nascido em dias diferentes, temos $P_{365,n}$. Assim, a probabilidade de que ao menos duas pessoas tenham nascido no mesmo dia é dada por:

$$1 - \frac{A_{365,n}}{365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-n)!\, 365^n}$$

A tabela abaixo apresenta esta probabilidade para alguns valores de n:

n	p	n	p
5	0,027	25	0,569
10	0,117	30	0,706
15	0,253	40	0,891
20	0,411	40	0,970
22	0,476	50	0,994
23	0,507		

Fórmula de Stirling

Em muitas aplicações de permutações e combinações é necessário que se calcule o fatorial de um número relativamente grande. Por exemplo, para $n \geq 70, n! > 10^{100}$. Obviamente este número não poderá ser representado em uma calculadora de bolso. Entretanto, a fórmula de Stirling nos dá uma aproximação:

$$\lim_{n\to\infty} n! \approx (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$$

Combinações

Imagine que temos um conjunto de n elementos e queremos escolher k elementos, sem reposição, e sem importar a ordem dos mesmos. Este tipo de problema pode ser pensado como a combinação de dois efeitos. Primeiro escolhemos aleatoriamente k elementos de n, e depois descontamos todas as possíveis permutações entre eles. Assim:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Exemplo 9

Considere um comitê de 8 pessoas que deve ser selecionadas a partir de um grupo de 20 pessoas. Qual é o número de grupos distintos que podem ser formados?

Este é um caso de combinação, pois a ordem das pessoas no grupo não é importante. Assim:

$$C_{20,8} = \frac{20!}{8!\,12!} = 125970.$$

Coeficiente Binomial

O número de combinações de n elementos em grupos de k elementos recebe o símbolo de:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

Os coeficientes binomiais aparecem, por exemplo, no seguinte caso:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,k} x^i\, y^{n-i}$$

onde x e y são números reais e n é um inteiro positivo.

Exemplo 10

Suponha que você tenha 10 moedas. a) Qual é a probabilidade p de obter exatamente 3 caras no lançamento destas 10 moedas? b) Qual é a probabilidade p' de se obter 3 ou menos caras?

Na parte a, este problema equivale a descobrir qual é o número de possíveis maneiras de combinar exatamente 3 caras, dentro de um conjunto de 3 caras e 7 coroas. Como o número total de possíveis combinações de caras e coroas é 2^{10}, temos:

$$p = \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}} = 0,1172.$$

No item b, a probabilidade de termos 3 ou menos caras é dada pela soma das probabilidades de termos nenhuma cara, ou 1 cara, ou 2 caras ou 3 caras. Assim:

$$p' = \frac{\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}}{2^{10}} = \frac{176}{2^{10}} = 0,1719.$$

Combinação com Reposição

Imagine que temos um conjunto de n elementos e queremos escolher k elementos, **com reposição**, e sem importar a ordem dos mesmos. Pode-se mostrar que o número de diferentes grupos é dado por:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Exemplo 11

Considere uma padaria que faz somente 7 tipos de doces. Você quer fazer uma combinação de 12 doces a partir destes 7 tipos. Quantos grupos diferentes você conseguiria fazer a partir desta situação sendo que os doces podem se repetir?

Este é um caso de combinação com reposição. O resultado é dado por:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{12+7-1}{12} = 18564.$$

Combinação de Métodos

Muitas vezes problemas mais complicados deve ser quebrados em partes menores, que às vezes precisam ser solucionadas com métodos diferentes. Ou mesmo um problema simples pode ser pensado de diferentes formas e solucionado de diferentes maneiras.

Exemplo 12

O gene humano que define o tipo sanguíneo consiste de um par de alelos. Estes alelos são chamados de O, A e B, respectivamente. Sabendo-se que não há como diferenciar o genótipo AO de OA, quantos genótipos diferentes podemos ter?

Podemos pensar no problema de duas formas. Podemos usar combinação dos 3 elementos, 2-a-2, sem reposição:

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Entretanto, como não há reposição, falta incluir os casos em que o genótipo é formado pelos mesmos alelos (3). Assim, o número buscado é 6.
Outra forma de ver o problema é pensar que utilizar a combinação com reposição. Assim temos:

$$\binom{3+2-1}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

Exemplo 13

Considere que uma pessoa jogou uma moeda 10 vezes. Qual é a probabilidade de a) termos exatamente 3 caras e b) termos 3 ou menos caras.

O número total de possibilidades é dado por 2^{10}. Para saber quantas destas possibilidades seriam iguais a 3 caras, podemos usar a combinação de 3 caras em 10 moedas. Ou seja, a probabilidade buscada é:

$$\frac{\binom{10}{3}}{2^{10}} = \frac{10!}{3!\,7!\,2^10} = 0,1172$$

Para o item b, temos que somar as probabilidades de termos nenhuma, uma, duas e três caras. Isto resulta em:

$$\frac{\binom{10}{3} + \binom{10}{2} + \binom{10}{1} + 1}{2^{10}} = 0,1719$$

Exemplo 14

Considere que temos um grupo de 15 garotos e 30 garotas. Devemos selecionar um grupo de 10 pessoas entre estes dois grupos. Qual é probabilidade de termos exatamente 3 garotos neste grupo?

O número total de possibilidades é dado por $\begin{pmatrix} 45 \\ 10 \end{pmatrix}$. Quantos destes terão somente 3 garotos? Podemos primeiramente pensar que temos que escolher um grupo de 3 garotos dentre os 10. Este número é $\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}$. Cada um destes grupos podem ser combinado com qualquer combinação de 7 meninas entre o grupo das 30: $\begin{pmatrix} 30 \\ 7 \end{pmatrix}$. Assim a probabilidade buscada é:

$$\frac{\binom{15}{3} \times \binom{30}{7}}{\binom{45}{10}} = 0,2904.$$

Exemplo 15

Considere um baralho completo, com 52 cartas. Se temos 4 participantes e cada um deles recebe 13 cartas ao acaso, qual é a probabilidade de que cada participante receba um ás?

Podemos pensar neste problema de duas maneiras diferentes. No primeiro caso, podemos pensar que temos dois tipos de cartas somente, o ás de cada naipe e as outras 48 cartas. Assim, o número total de possibilidades de distribuição das cartas é dada por $\begin{pmatrix} 52 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dentre todas estas possibilidades, temos 13 possibilidades de posições diferentes para o ás para o primeiro participantes, 13 posições para o segundo, etc... Assim, a probabilidade buscada é

dada por:

$$\frac{13^4}{\binom{52}{4}} = \frac{13^4\,4!\,48!}{52!} = 0,1055.$$

Outra maneira de pensar no problema é imaginar que todas as 52 cartas são completamente distinguíveis entre si. Neste caso o número total de permutações é 52!. Como antes, há 13 possibilidades de termos um ás no primeiro participante, 13 no segundo, etc. Entretanto, temos que multiplicar 13^4 pelo número de possíveis permutações dos 4 diferentes ases (4!) e para cada uma destas temos ainda que pensar que temos 48! permutações de cada uma das outras 48 cartas restantes. No final, temos a mesma equação acima.