Probabilidade e Estatística - Semana XIII

Distribuição F

Muitas vezes queremos comparar a variância ou a dispersão de dois conjuntos de amostras, a fim de verificar se elas podem ter vindo da mesma função densidade de probabilidade. Esta distribuição pode ser aplicada para duas ou mais amostras.

O teste F se baseia na razão de duas variáveis aleatórias que seguem uma distribuição do tipo χ^2, cada uma delas dividida pelo seu respectivo número de graus de liberdade.

Definição 1 (Distribuição F): *Seja U e V duas variáveis aleatórias independentes que seguem uma distribuição do tipo χ^2 com, respectivamente, u e v graus de liberdade. Então a variável aleatória F, definida como:*

$$F = \frac{U/u}{V/v}$$

tem função densidade de probabilidade dada por:

$$h(f) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma[(u+v)/2]\,(u/v)^{u/2}}{\Gamma(u/2)\,\Gamma(v/2)} \dfrac{f^{(u/2)-1}}{(1+uf/v)^{(u+v)/2}}, & f > 0, \\ 0, & f \leq 0 \end{cases}$$

Esta f.d.p. é chamada de distribuição F *com u e v graus de liberdade.*

A distribuição F parece bastante com uma distribuição Γ. Se representarmos $f_\alpha(u,v)$ como o valor de f acima do qual a área sob a curva da distribuição F com u e v graus de liberdade é igual a α, então o seguinte teorema é válido.

Teorema 1: *Se $f_\alpha(u,v)$ é o valor da distribuição F com u e v graus de liberdade é o valor de f para o qual a área sob a curva é igual a α, então:*

$$f_{1-\alpha}(u,v) = \frac{1}{f_\alpha(v,u)}$$

Distribuição F para Duas Amostras

Considere que temos dois conjuntos de dados com, respectivamente, n_1 e n_2 amostras cada, provenientes de uma distribuição normal com variâncias, respectivamente, iguais a σ_1^2 e σ_2^2. Sabemos que:

$$\chi_1^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}$$

e

$$\chi_2^2 = \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}$$

seguem distribuições de χ^2 com, respectivamente, (n_1-1) e (n_2-1) graus de liberdade. Como as amostras foram coletadas independemente, então podemos dizer que a razão entre as duas variáveis segue uma distribuição F.

Teorema 2: *Se S_1^2 e S_2^2 são as variâncias amostrais de dois conjuntos de dados de tamanho n_1 e n_2 respectivamente, provenientes de uma distribuição normal, então:*

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2\,\sigma_2^2}{S_2^2\,\sigma_1^2}$$

segue uma distribuição F com n_1 e n_2 graus de liberdade.

Exemplo 1

Imagine que se tenham duas distribuições normais com médias desconhecidas μ_1 e μ_2, respectivamente, e com variâncias σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas. Uma amostra de 16 observações é adquirida da primeira distribuição e se obtém $\sum_{i=1}^{16} X_i = 84$ e $\sum_{i=1}^{16} X_i^2 = 563$. De forma similar, uma amostra de 10 observações é feita na segunda distribuição, obtendo-se $\sum_{i=1}^{10} Y_i = 18$ e $\sum_{i=1}^{10} Y_i^2 = 72$. a) Utilize o método da máxima verissimilhança para estimar σ_1^2 e σ_2^2. b) Caso se considere que as variâncias de ambas as amostras sejam exatamente iguais, pode-se dizer que a diferença observada nas variâncias de amostra tem probabilidade menor do que 5% de ocorrer?

a) Neste caso temos que:

$$\sum_i (X_i - \bar{X})^2 = \left(\sum_i X_i^2 \right) - \frac{\left(\sum_i X_i\right)^2}{n}$$

Assim temos que:

$$\hat{\sigma_1^2} = \frac{1}{16} \sum_i (X_i - \bar{X})^2 = \frac{563 - 84^2/16}{16} = \frac{122}{16} = 7,625$$

e

$$\hat{S_1^2} = \frac{1}{15} \sum_i (X_i - \bar{X})^2 = \frac{563 - 84^2/16}{16} = \frac{122}{15} = 8,133$$

e da mesma forma:

$$\hat{\sigma_2^2} = \frac{1}{10} \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \frac{72 - 18^2/10}{10} = \frac{39,6}{10} = 3,96$$

e

$$\hat{S_2^2} = \frac{1}{9} \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \frac{72 - 18^2/10}{10} = \frac{39,6}{9} = 4,4$$

b) Podemos utilizar a distribuição F. Neste caso, já que consideramos $\sigma_1 = \sigma_2$ temos:

$$\begin{aligned} F &= \frac{S_1^2/\sigma_1}{S_2^2/\sigma_2} \\ &= \frac{S_1^2}{S_2^2} \\ &= 1,8484 \end{aligned}$$

Olhando-se para a tabela de F, vemos que a probabilidade de $f_{0.95}$ para 15 e 9 graus de liberdade é 3,01. Portanto, existe uma probabilidade maior do que 5% de que a diferença observada seja devido à estatística do problema.

Teste de Hipóteses

Além do problema da estimativa de parâmetros, outra parte importante da estatística inferencial está no que se chama de *teste de hipótese*. Normalmente, neste tipo de abordagem, estamos interessados em comprovar uma hipótese sobre determinado sistema ou, dito de maneira mais forma, uma hipótese sobre a função densidade de probabilidade que está por trás do funcionamento deste sistema. Em geral, esta hipótese é formulada em termos de um dos parâmetros, que chamaremos θ desta distribuição. Por exemplo, queremos saber se a média de determinada população é próxima de determinado valor previamente hipostenizado Então se faz um experimento e se verifica se a hipótese nula deve ser rejeitada ou não.

Hipóteses

Do ponto de vista de estatística, sempre formulamos duas hipóteses. A primeira delas é chamada de hipótese nula. A segunda hipótese é chamada de hipótese alternativa. Definimos nossas hipóteses de forma que elas preencham todo o espaço de parâmetro Ω possíveis para θ. Chamaremos de Ω_0 o espaço de parâmetro em que θ obedece a hipótese nula e Ω_1 o espaço de parâmetro em que θ obedece a hipótese alternativa.

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad \theta \in \Omega_0 \\ H_1 : &\quad \theta \in \Omega_1 \end{aligned}$$

Algumas características:

- o espaço de parâmetros Ω é dividido em duas regiões;
- temos $\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega$;
- se a hipótese nula é formada por um único valor, dizemos que esta é uma hipótese simples, em caso contrário dizemos que esta é uma hipótese composta.
- as hipóteses podem, alternativamente, ter limites em somente um lado. Por exemplo podemos ter $H_0 : \theta \leq \theta_0$;
- o resultado do teste é sempre dado em relação à hipótese nula: ou aceitamos a hipótese nula ou rejeitamos a hipótese nula.
- Se rejeitamos a hipótese nula, fica subentendido que a hipótese alternativa é aceita, com base nos resultados do experimento realizado. Entretanto, do ponto de vista forma, evita-se falar que a hipótese alternativa é aceita.

Região Crítica

A região crítica está diretamente relacionada com o tipo de hipótese que tenhamos formulado. No caso de uma hipótese simples ($\theta = \theta_0$) então a região crítica será formada por duas regiões, uma para valores da estatística utilizada abaixo de um valor crítico mínimo e outra região para valores da estatística utilizada para valores acima de um valor crítico máximo. No caso em que a hipótese tiver limite em apenas um dos lados, a região crítica é formada por somente uma região.

Como exemplo, consideremos que θ é o valor médio de determinada população. Após realizado o experimento utilizamos como estimador desta média o valor médio das n observações $\bar{X}_n$. Se nossas hipóteses são:

$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$
$$H_1: \quad \mu \neq \mu_0$$

então podemos pensar que $\bar{X}_n$ dificilmente terá exatamente o valor μ_0 da nossa hipótese nula. Temos que considerar um intervalo $\mu_0 - c \leq \mu_0 \leq \mu_0 + c$ na qual $\bar{X}_n$ poderá ser encontrada. A região dentro este intervalo é chamada de região de aceitação e a região fora desta intervalo é chamada de região crítica. Os valores limites são chamados de valores críticos. A escolha dos valores críticos em cada caso vai depender de argumentos teóricos sobre o sistema em questão e sobre o teste realizado.

Tipos de Erros

Quando realizamos testes de hipóteses temos 4 possíveis combinações de validade da hipótese nula e aceitação/rejeição desta hipótese:

hipótese rejeitada		hipótese verdadeira	
		H_0	H_1
	H_0	erro tipo I	✓
	H_1	✓	erro tipo II

tipo I ocorre quando rejeitamos a hipótese nula, quando ela é verdadeira

tipo II ocorre quando falhamos em rejeitar a hipótese nula, quando ela é na verdade falsa

É importante notar que dada a natureza estatística das observações realizadas, é praticamente impossível eliminarmos completamente estes dois tipos de erro. Além do mais, podemos ver que há uma competição na importância destes dois tipos de erros, pois se aumentarmos a região de aceitação (aumentando c) para diminuir a chance de rejeitarmos a hipótese nula, diminuindo a chance de incorrermos no erro tipo I, acabamos aumentando a chance de incorrermos no erro do tipo II.

Poder do teste

Suponha que realizamos um experimento para verificarmos as hipóteses descritas acima. Queremos utilizar um teste δ para testarmos a validade da hipótese nula para o presente caso. Podemos definir a função $\pi(\theta|\delta)$ como a probabilidade de que o teste δ irá rejeitar H_0 se o valor do parâmetro buscado for θ e $1 - \pi(\theta|\delta)$ a probabilidade de que não rejeitemos a hipótese nula. Isto significa que:

$$\pi(\theta|\delta) = \Pr\left(\bar{X}_n \in R|\theta\right), \quad \theta \in \Omega,$$

onde R é a região de rejeição.

Podemos ver que para cada valor de θ, $\pi(\theta|\delta)$ será a probabilidade de incorrermos em um erro do tipo I. De forma análoga, $1 - \pi(\theta|\delta)$ é a probabilidade de incorrermos em um erro do tipo II. Assim, o ideal seria que a função $\pi(\theta|\delta)$ fosse 1 para toda a região de rejeição, e 0 para toda a região de aceitação. Na prática, o que temos em geral é um compromisso entre estes dois tipos de erro.

Nível de Significância

Uma maneira de se encontrar um equilíbrio entre os dois tipos de erro mencionados anteriormente é escolher um valor α_0 tal que $\pi(\theta|\delta)$ sejam menor do que α_0 dentro da região Ω_0. Portanto, se a hipótese nula é simples, então $\pi(\theta_0|\delta)$ tem que ser menor do que α_0. O valor de α_0 é chamado de nível de significância do teste: seu valor é geralmente escolhido como 5% ou 1%.

Assim, uma vez escolhido o nível de significância α_0, podemos escolher o maior valor de c possível que ainda satisfaça a condição $\sup_{\theta\in\Omega_0} \pi(\theta|\delta) \leq \alpha_0$

p-valor

Está ficando cada vez mais comum em testes de hipótese não só reportar se a hipótese nula foi rejeita ou não, mas também o valor de nível de significância escolhido para o teste e, adicionalmente, o valor mínimo de α_0 para o qual a hipótese nula teria sido rejeitada no estudo realizado. Este valor é chamado de p-valor.

Testes de Hipótese para Média

Existem vários tipos de testes de hipótese para médias.

Teste de Hipótese para Média Simples com Variância Conhecida

Imagine que queiramos testar a hipótese de que a média de determinada população é igual à μ_0. Caso seja conhecida a variância da população original σ podemos utilizar como estatística Z de maneira que:

$$Z = \sqrt{n}\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$$

siga uma distribuiçao normal padrão $\mathcal{N}(0, 1)$. Caso o nível de confiança exigido seja $\gamma = 1 - \alpha_0$, então teremos as seguintes regiões críticas:

- hipótese simples ($\mu = \mu_0$):

$$c_1 = \Phi\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) \qquad \rightarrow \quad \mu_1 = \bar{X}_n - \frac{c_1\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$c_2 = \Phi\left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \qquad \rightarrow \quad \mu_2 = \bar{X}_n + \frac{c_1\sigma}{\sqrt{n}}$$

- hipótese com limite superior ($\mu < \mu_0$):

$$c = \Phi\left(1 - \alpha_0\right) \quad \rightarrow \quad \mu = \bar{X}_n + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$$

- hipótese com limite superior ($\mu > \mu_0$):

$$c = \Phi\left(\alpha_0\right) \quad \rightarrow \quad \mu = \bar{X}_n - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$$

Exemplo 2

Considere o caso em que o fabricante de determinada guloseima faça vendas deste produto em embalagens de 50 gramas nominais. O fabricante afirma que a média de conteúdo das embalagens é de 50 gramas, com desvio padrão de 2,5 gramas. Uma amostra de 10 embalagens foram analisadas e encontrou-se 48,3 gramas. Utilizando-se um nível de significância de 5%, pode-se afirmar que a média é realmente 50 gramas?

Neste caso podemos utilizar a estatística Z, já que quando conhecemos o desvio padrão da distribuição de uma variável X, conhecemos como é a distribuição da média desta distribuição. Como o teste de hipótese é simples, então temos que as regiões críticas são:

$$c_1 = \Phi^{-1}(0,025) = -1,96$$

Logo:

$$-1,96 \leq \frac{(X_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \leq 1,96$$

que corresponde à:

$$48,3 - \frac{(1,96)(2,5)}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 48,3 + \frac{(1,96)(2,5)}{\sqrt{10}}$$

ou seja

$$46.75051 \leq \mu \leq 49.84949$$

e como μ está fora deste intervalo, então temos que a hipótese nula é rejeitada. O p-valor é dado por:

$$2 \times \Phi\left(\frac{(48,3-50)\sqrt{10}}{2,5}\right) = 0.03152763$$

Exemplo 3

O tempo de vida, em horas, das baterias de determinada marca é uma variável aleatória distribuída normalmente, com desvio padrão de 1,25 horas. Uma amostra de 10 baterias teve média de 40,5 horas.

- **há evidências que suportem a hipótese de que o tempo de vida da bateria excede 40 horas? Use $\alpha = 0,05$;**
- **qual é o p-valor do item anterior?**
- **Qual é a probabilidade de cometermos o erro tipo II se o tempo de vida for 42 horas?**
- **qual o tamanho da amostra que deveríamos testar se quiséssemos que garantir que a probabilidade de cometermos erro do tipo II não fosse maior do que 0,10 caso o valor verdadeiro do tempo de vida da bateria fosse 44 horas?**

.

As repostas:

- Se o tempo de vida segue uma distribuição normal temos que $c = \Phi^{-1}(0,05) = -1.644854$. Logo, se $\bar{X}_n > 40 - 0.6501855 = 39.34981$ então a hipótese nula não pode ser descartada;
- O valor de Z neste caso é dado por $Z = \frac{(40,5-40)\sqrt{10}}{1,25} = 1,264911$. Deste valor temos p-valor = $\Phi(1,264911) \rightarrow p$-valor $= 0.8970484$;
- Neste caso

Teste de Hipótese para Média Simples e Variância Desconhecida

Neste caso podemos utilizar como estatística:

$$U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S},$$

que segue uma distribuição t-Student com $(n-1)$ graus de liberdade. Caso o nível de confiança exigido pelo teste seja $\gamma = 1 - \alpha_0$ temos as seguintes regiões críticas:

- hipótese simples ($\mu = \mu_0$):

$$c_1 = T\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) \qquad \rightarrow \quad \mu_1 = \bar{X}_n - \frac{c_1 S}{\sqrt{n}}$$

$$c_2 = T\left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \qquad \rightarrow \quad \mu_2 = \bar{X}_n + \frac{c_1 S}{\sqrt{n}}$$

- hipótese com limite superior ($\mu < \mu_0$):

$$c = T(1-\alpha_0) \quad \rightarrow \quad \mu = \bar{X}_n + \frac{cS}{\sqrt{n}}$$

- hipótese com limite superior ($\mu > \mu_0$):

$$c = T(\alpha_0) \quad \rightarrow \quad \mu = \bar{X}_n - \frac{cS}{\sqrt{n}}$$

Exemplo 4

O fabricante de certa marca de barras de cereais *light* afirma que a média de gordura saturada encontrada em seus produtos é de 0,5 g. Em uma amostra aleatória de 8 barras de cereal desta marca, a quantidade de gordura o observada foi 0,6; 0,7; 0,7; 0,3; 0,4; 0,5; 0,4; 0,2. Você concorda com a afirmação da empresa? Assuma uma distribuição normal.

Como não conhecemos a variância, vamos utilizar uma distribuição do tipo t-Student. Podemos ver que $\bar{X} = 0,475$ e $S = 0,1832251$. Assim, calculando U temos:

$$U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} = \frac{\sqrt{8}(0,475 - 0,5)}{0,1832251} = -0,3859224.$$

Podemos ver o intervalo de confiança com nível de confiança de 0,95. Procurando na tabela para $t_{0,025}$ e 7 graus de liberdade vemos que $U = 2,365$. Assim $c = \frac{2,365\,S}{\sqrt{n}} = \frac{2,365 \times 0,1832251}{\sqrt{8}} = 0,15318$. Assim, nosso intervalo de confiança para $\gamma = 0,95$ é dado por:

$$\begin{aligned} \Pr\left(\bar{X} - c \le \mu \le \bar{X} + c\right) &= 0,95 \\ \Pr\left(0,475 - 0,15318 \le \mu \le 0,475 + 0,15318\right) &= 0,95 \\ \Pr\left(0,32182 \le \mu \le 0,62818\right) &= 0,95 \end{aligned}$$

Assim, parece que a afirmação de que $\mu = 5$ parece verdadeira.
Utilizando um teste de hipóteses em que:

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \mu = 0,5 \\ H_1: &\quad \mu \neq 0,5 \end{aligned}$$

Com os dados acima podemos ver que para $\alpha_0 = 0,05$ e $\mu = \mu_0 = 0,5$ teríamos $U = 2,365$ e $c = 0,15318$. Portanto aceitaríamos a hipótese nula se a média estivesse entre $(\mu_0 - c \le \bar{X} \le \mu_0 + c)$, ou seja, $(0,34682 \le \bar{X} \le 0,65318)$. O p-valor neste caso é calculado da seguinte forma. Temos que calcular qual é a probabilidade de rejeitarmos a hipótese nula se a região de aceitação se limitasse à média observada. Neste caso vemos que $\bar{X} = c$ e, portanto, $t = -0,3859224$. Olhando para a tabela dos valores da distribuição t-Student, vamos que o valor da f.d.c para este valor fica entre 0,3 e 0,4. Utilizando um algoritmo computacional, podemos ver que o $p-$valor = 2*0,3555075 = 0,7110151

Teste de Hipótese para Duas Médias e Variâncias Conhecidas

A subtração de uma variável normal com média μ_1 e variância σ_1^2 e outra variável normal com média μ_2 e variância σ_2^2 é também uma variável normal com média $\mu_1 - \mu_2$ e variância $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Neste caso podemos utilizar como estatística:

$$Z = \frac{(\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

que segue uma distribuição normal padrão. Caso o nível de confiança exigido pelo teste seja $\gamma = 1 - \alpha_0$ temos as seguintes regiões críticas:

- hipótese simples ($\mu_1 = \mu_2$):

$$\begin{aligned} c_1 = \Phi\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) &\quad\rightarrow\quad \mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) - c_1\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \\ c_2 = \Phi\left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) &\quad\rightarrow\quad \mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) + c_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \end{aligned}$$

- hipótese com limite superior ($\mu_1 < \mu_2$):

$$c = \Phi\left(1 - \alpha_0\right) \quad\rightarrow\quad \mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) + c\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- hipótese com limite superior ($\mu_1 > \mu_2$):

$$c = \Phi\left(\alpha_0\right) \quad\rightarrow\quad \mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) - c\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Teste de Hipótese para Duas Médias e Variâncias Desconhecidas mas Iguais

Se as variâncias forem desconhecidas, podemos testar se ambas são iguais de acordo com o teste F. Se elas forem estatisticamente iguais, podemos aplicar o teste abaixo.

Neste caso podemos utilizar como estatística:

$$U = \frac{(\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

que segue uma distribuição t-Student com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade. Aqui S_p é definido como a média ponderada das variâncias amostrais das duas amostras:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Caso o nível de confiança exigido pelo teste seja $\gamma = 1 - \alpha_0$ temos as seguintes regiões críticas:

- hipótese simples ($\mu_1 = \mu_2$):

$$\begin{aligned} c_1 = T\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) &\quad\rightarrow\quad \mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) - c_1 S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \\ c_2 = T\left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) &\quad\rightarrow\quad \mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) + c_2 S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \end{aligned}$$

- hipótese com limite superior ($\mu_1 < \mu_2$):

$$c = T\left(1 - \alpha_0\right) \quad\rightarrow\quad \mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) + c S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

- hipótese com limite superior ($\mu_1 > \mu_2$):

$$c = T\left(\alpha_0\right) \quad\rightarrow\quad \mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) - c S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Teste de Hipótese para Duas Médias e Variâncias Desconhecidas mas Diferentes

Se as variâncias forem desconhecidas, podemos testar se ambas são iguais de acordo com o teste F. Se elas forem estatisticamente diferentes, podemos aplicar o teste abaixo.

Neste caso podemos utilizar como estatística:

$$U = \frac{(\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}},$$

que segue uma distribuição t-Student com ν graus de liberdade. Aqui ν é definido como:

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)}{n_2 - 1}}$$

Caso o nível de confiança exigido pelo teste seja $\gamma = 1 - \alpha_0$ temos as seguintes regiões críticas:

- hipótese simples ($\mu_1 = \mu_2$):

$$\begin{aligned} c_1 = T\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) &\quad\rightarrow\quad \mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) - c_1\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \\ c_2 = T\left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) &\quad\rightarrow\quad \mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) + c_2\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \end{aligned}$$

- hipótese com limite superior ($\mu_1 < \mu_2$):

$$c = T(1-\alpha_0) \quad \rightarrow \quad \mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) + c\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

- hipótese com limite superior ($\mu_1 > \mu_2$):

$$c = T(\alpha_0) \quad \rightarrow \quad \mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) - c\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

Teste de Hipótese para a Variância de uma População Normal

Caso X seja uma variável aleatória que segue uma distribuição normal com variância e média desconhecida σ, e $X_1, X_2, ..., X_n$ sejam n observações desta variável então:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

segue uma distribuição χ^2 com $(n-1)$ graus de liberdade. Caso o nível de confiança exigido pelo teste seja $\gamma = 1 - \alpha_0$ temos as seguintes regiões críticas:

- hipótese simples ($\sigma = \sigma_0$):

$$c_1 = Q\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) \quad \rightarrow \quad S_1 = \sigma_0\sqrt{\frac{c_1}{(n-1)}}$$

$$c_2 = Q\left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \quad \rightarrow \quad S_2 = \sigma_0\sqrt{\frac{c_2}{(n-1)}}$$

- hipótese com limite superior ($\sigma < \sigma_0$):

$$c = Q(1-\alpha_0) \quad \rightarrow \quad S = \sigma_0\sqrt{\frac{c}{n-1}}$$

- hipótese com limite superior ($\sigma > \sigma_0$):

$$c = Q(\alpha_0) \quad \rightarrow \quad S = \sigma_0\sqrt{\frac{c}{n-1}}$$

Exemplo 5

Uma máquina preenche recipientes de 5 litros de detergente líquido automaticamente. Espera-se que a variância no preenchimento da máquina não seja maior do que 150 ml^2. Em uma amostra de 20 recipientes, notou-se que a variância amostra ficou em 160 ml^2. Utilizando $\alpha = 0,05$ e supondo que a quantidade de líquido em cada recipiente tenha distribuição normal, o que se pode dizer sobre a variância σ^2 da quantidade de líquido em cada recipiente?

Neste caso a hipótese nula é $\sigma = \sqrt{150}$. A estatística é dada por:

$$\frac{(20-1)S^2}{\sigma^2}$$

Os limites da região crítica são dados por:

$$c_1 = Q(0,025) = 8,906516 \quad \rightarrow \quad S_1^2 = 70,3146$$

e

$$c_2 = Q(0,975) = 32.85233 \quad \rightarrow \quad S_2^2 = 259,3605$$

Portanto, não há indícios de que a variância seja diferente de 150 ml^2.