Probabilidade e Estatística - Probabilidade Condicional e Teorema de Bayes

Probabilidade Condicional

Atualização da probabilidade do evento A ocorrer quando sabemos que o evento B ocorreu.

Exemplo 1

Digamos que você jogou na Mega Sena (onde você escolhe 6 números entre 0 e 60). Se você jogou somente um bilhete, a sua chance de ganhar é de 1 em $\binom{60}{6}$, que é 1/50063860 ou $1.997\,448\,86 \times 10^{-8}$. Entretanto, digamos que os teus números escolhidos sejam 1, 14, 15, 20, 23, 37. Ao conversar com um amigo, ele lhe informa que não lembra de todos os números que saíram no resultado oficial, mas que tem certeza que o número 15 foi um dos sorteados. Assim, podemos dizer que o evento buscado, é aquele onde os números escolhidos foram os 6 que você jogou, e o evento B que ocorreu é aquele onde um dos números sorteados foi 15. Qual é a probabilidade atualizada de A, sabendo que o evento B ocorreu?

Já que B ocorreu, então podemos ver que a probabilidade de A ocorrer é apenas 1 em todas as possibilidades onde B ocorre. Assim, como o número 15 já foi escolhido, sobram 5 possibilidade para os outros números:

$$\text{Pr}(A|B) = \frac{1}{\binom{59}{5}} = 1.997\,448\,86 \times 10^{-7}.$$

As chances de você ter sido sorteado aumentaram por 10 vezes! Entretanto, ela ainda é bastante pequena...

Definição

Definição 1 (Probabilidade Condicional): *Sejam A e B dois eventos definidos. A probabilidade condicional $P(A|B)$ de que A ocorra, condicionada ao fato de que B tenha ocorrido em um dado experimento, é dada por:*

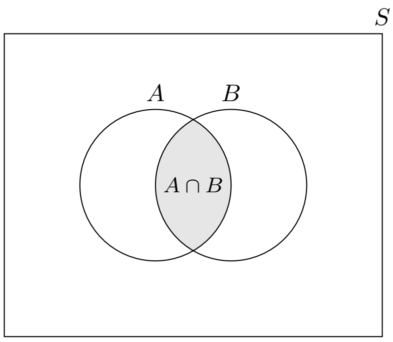
$$\text{Pr}(A|B) = \frac{\text{Pr}(A \cap B)}{\text{Pr}(B)},$$

onde $\Pr(A \cap B)$ é a probabilidade de A e B ocorrerem simultaneamente e $\Pr B$ é a probabilidade do evento B ocorrer.

Suponhamos que sabemos que um evento B ocorreu. Queremos atualizar a probabilidade de um outro evento A ter ocorrido. A nova probabilidade de A é chamada de probabilidade condicional de A, dado que B ocorreu e é denotada Pr$(A|B)$. Se Pr$(B) > 0$, então:

$$\text{Pr}(A|B) = \frac{\text{Pr}(A \cap B)}{\text{Pr}(B)}$$

No diagrama abaixo podemos ver que a probabilidade de A ocorrer, dado que B ocorreu é proporção entre a região achurada de B (correspondente a $A \cap B$) em relação à região total de B.



Exemplo 2

Refaça o exemplo anterior, utilizando a equação de Pr$(A|B)$ acima

A probabilidade do evento B é dada por:

$$\text{Pr}(B) = \frac{6}{60} = 0,1$$

A probabilidade de $A \cap B$ é

$$\text{Pr}(A \cap B) = \text{Pr}(A) = \frac{1}{\binom{60}{6}} = 1.997\,448\,86 \times 10^{-8}.$$

Assim:

$$\text{Pr}(A|B) = \frac{1.997\,448\,86 \times 10^{-8}}{0,1} = 1.997\,448\,86 \times 10^{-7}.$$

Regra da Multiplicação para Prob. Condicionais

Em determinadas situações, é relativamente fácil de se calcular as probabilidades condicionais. Nestes casos:

$$\text{Pr}(A \cap B) = \text{Pr}(B)\ \text{Pr}(A|B),$$

se Pr$(B) \neq 0$.

De maneira análoga:

$$\text{Pr}(A \cap B) = \text{Pr}(A)\ \text{Pr}(B|A),$$

Exemplo 3

Uma caixa contém v bolas vermelhas e a bolas azuis. Qual é a probabilidade de tirarmos, sem reposição, uma bola vermelha e depois uma bola azul da caixa?

Se considerarmos o evento A aquele em que tiramos uma bola vermelha na primeira tentativa, e o evento B aquele em que tiramos uma bola azul na segunda tentativa, temos claramente que:

$$\Pr(A) = \frac{v}{v+a}.$$

Como a caixa contém agora uma bola vermelha a menos, a probabilidade de tirarmos uma bola azul entre as bolas restantes é:

$$\Pr(B|A) = \frac{a}{v+a-1}$$

Assim, a probabilidade procurada (Pr($A \cap B$)) é:

$$Pr(A \cap B) = \left(\frac{v}{v+a}\right)\left(\frac{a}{v+a-1}\right).$$

Teorema 1: *Se A_1, A_2, ..., A_n forem eventos tais que $Pr(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) > 0$, então:*

$$\begin{aligned} Pr(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) &= Pr(A_1) \times \\ &\times Pr(A_2|A_1)\, Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \times ... \\ &... \times Pr(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

A prova deste teorema consiste em se abrir os termos da direita. Assim:

$$\begin{aligned} \Pr(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) &= \Pr(A_1) \times \\ &\times \Pr(A_2|A_1)\Pr(A_3|A_1 \cap A_2)\Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \times \\ &... \times \Pr(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \\ &= \Pr(A_1) \times \\ &\times \frac{\Pr(A_2 \cap A_1)}{\Pr(A_1)}\frac{\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\Pr(A_2 \cap A_1)} \times ... \\ &... \times \frac{\Pr(A_1 \cap ... \cap A_{n-1} \cap A_n)}{\Pr(A_1 \cap ... \cap A_{n-1})} \end{aligned}$$

Cancelando-se os termos de numerados e denominador que aparecem duplicados temos a prova.

Exemplo 4

Reconsidere o problema anterior, onde uma caixa contém v bolas vermelhas e a bolas azuis. Qual é a probabilidade de tirarmos, sem reposição, uma bola vermelha e depois uma bola azul, depois uma bola vermelha e depois uma bola azul, nesta ordem?

Se considerarmos o evento V_1 aquele em que tiramos uma bola vermelha na primeira tentativa, e o evento A_1 aquele em que tiramos uma bola azul na segunda tentativa, o evento V_3 aquele em que tiramos uma bola vermelha na terceira tentativa e o evento A_2 como aquele em que tiramos uma bola azul na quarta tentativa, então:

$$\begin{aligned} Pr(V_1 \cap A_1 \cap V_2 \cap A_2) &= \left(\frac{v}{v+a}\right)\left(\frac{a}{v+a-1}\right) \times \\ &\times \left(\frac{v}{v+a-2}\right)\left(\frac{a}{v+a-3}\right) \end{aligned}$$

Probabilidades condicionais se comportam da mesma forma que probabilidades normais. Todas as propriedades que valem para probabilidades normais também valem para probabilidades condicionais. Por exemplo, temos que $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$, assim a probabilidade $\Pr(A^c|B) = 1 - \Pr(A|B)$ é verdadeira também.

Exemplo 5

Imagine que se fez as estatísticas de voos de um aeroporto e se verificou que a probabilidade de partida de voos na hora é $\Pr(P) = 0,83$ e a probabilidade de chegada de voos em seu destino na hora é dada por $\Pr(C) = 0,82$. Além disso, sabe-se que a probabilidade de um mesmo voo partir e chegar nas horas marcadas é de 0,78. Assim, pede-se as seguires probabilidades: a) de um voo chegar em seu destino na hora sabendo-se que partiu no horário, b) de um voo ter partido em seu horário agendado, sabendo-se que chegou em seu destino na hora marcada e c) chegar em seu destino na hora marcada, sabendo-se que partiu atrasado.

a) Aplicando-se as equações acima temos:

$$\Pr(C|P) = \frac{\Pr(C \cap P)}{\Pr(P)} = \frac{0,78}{0,83} = 0,94.$$

b) Aplicando-se as equações acima temos:

$$\Pr(P|C) = \frac{\Pr(C \cap P)}{\Pr(C)} = \frac{0,78}{0,82} = 0,95.$$

c) Neste caso teríamos algo do tipo:

$$\Pr(C|P^c) = \frac{\Pr(C \cap P^c)}{\Pr(P^c)}.$$

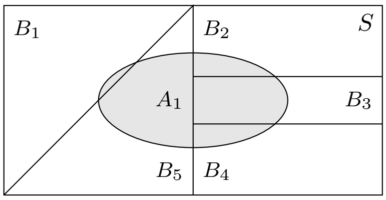
Como sabemos que do total de voos, $\Pr(C) = 0,82$ voos chegam na hora certa e, do total de voos, $\Pr(C \cap P) = 0,78$ partem e chegam na hora certa, fica claro que (0,82 - 0,78) = 0,04 = $\Pr(C \cap P^c)$ do total de voos chegam na hora certa mas partem atrasados. Outra maneira de ver isto, é notar que: $\Pr(A \cap B^c) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$. Adicionalmente, como $\Pr(P) = 0,83$ dos voos partem na hora certa, temos que $\Pr(P^c) = (1 - \Pr(P)) = 0,17$ dos voos partem atrasados. Assim:

$$\Pr(C|P^c) = \frac{0,04}{0,17} = 0,24.$$

Probabilidades Condicionais e Partições

Definição 2 (Partição): *Se um espaço de amostras S possui n eventos B_1, B_2, ..., B_n mutualmente exclusivos e que percorrem completamente S, ou seja, $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = S$. Neste caso a probabilidade de um evento A é dada por:*

$$Pr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} Pr\,(B_i)\; Pr\,(A|B_i)\,. \tag{1}$$



Prova

Se os eventos B_i são mutualmente exclusivos, temos que:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_n),$$

e

$$\text{Pr}\,(A) = \text{Pr}\,(A \cap B_1) + \text{Pr}\,(A \cap B_2) + ... + \text{Pr}\,(A \cap B_n)\,.$$

Daí:

$$\text{Pr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} \text{Pr}\,(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \text{Pr}\,(B_i)\; \text{Pr}\,(A|B_i)$$

Exemplo 6

Imagine que numa oficina temos duas caixas de parafusos (caixa A e B). Uma das caixas (A) contém 60 parafusos longos (L) e 40 parafusos curtos (C). A outra caixa (B) contém 10 parafusos longos e 20 parafusos curtos. Uma pessoa pega aleatoriamente uma das caixas. Qual é a probabilidade de que este parafuso é longo?

Neste caso as duas caixas formam uma partição do conjunto total de parafusos. Assim:

$$\text{Pr}\,(L) = \text{Pr}\,(A)\; \text{Pr}\,(L|A) + \text{Pr}\,(B)\; \text{Pr}\,(L|B)$$

Como as duas caixas são escolhidas aleatoriamente, temos que $\text{Pr}\,(A) = \text{Pr}\,(B) = 1/2$. Assim:

$$\text{Pr}\,(L) = \frac{1}{2}\,\frac{60}{(60+40)} + \frac{1}{2}\,\frac{10}{(10+20)} = \frac{7}{15}$$

Partições e probabilidades condicionais

A regra acima também funciona para probabilidades condicionais. Assim:

$$\text{Pr}\,(A|C) = \sum_{i=1}^{n} \text{Pr}\,(B_i|C)\; \text{Pr}\,(A|B_i \cap C)$$

.

Eventos Independentes

Se ao sabermos que um evento B ocorreu, isto não mudar a probabilidade de um evento A, dizemos que estes eventos são independentes.

Exemplo 7

Duas moedas são jogadas. O evento A é aquele em que uma cara é sorteada na segunda moeda. Se o evento B é aquele em que uma coroa é sorteada na primeira moeda, calcule Pr $(A|B)$.

Das equações acima temos que:

$$\text{Pr}\,(A|B) = \frac{\text{Pr}\,(A \cap B)}{\text{Pr}\,(B)}$$

Temos que $\text{Pr}\,(A \cap B)$ = 1/4 (coroa na primeira moeda e cara na segunda) e $\text{Pr}\,(B)$ = 1/2. Logo $\text{Pr}\,(A|B)$ = (1/4)/(1/2) = 1/2 = $\text{Pr}\,(A)$. Ou seja, saber que tivemos coroa na primeira moeda não muda a probabilidade de termos cara na segunda moeda.

Definição 3: *Dois eventos A e B são independentes quando a probabilidade de A não muda se soubermos que houve um evento B:*

$$Pr\,(A|B) = Pr\,(A)$$

Como resultado da definição acima, temos:

$$\text{Pr}\,(A \cap B) = \text{Pr}\,(B)\; \text{Pr}\,(A|B) = \text{Pr}\,(A)\, \text{Pr}\,(B)\,.$$

É importante notar que $\text{Pr}\,(A) > 0$ e $\text{Pr}\,(B) > 0$.

Exemplo 8

Uma empresa tem duas máquinas (M_1 e M_2). A primeira máquina tem probabilidade Pr $(M_1, e) = 1/3$ de estragar nesta semana e a segunda tem probabilidade Pr $(M_2, e) = 1/4$ de estragar nesta semana. Qual é a probabilidade p de que ao menos uma das máquinas estrague nesta semana?

Como as máquinas são independentes, o fato de uma estragar não altera a probabilidade da outra também estragar ou não. Assim:

$$\text{Pr}\,(M_1, e \cap M_2, e) = \text{Pr}\,(M_1, e)\; \text{Pr}\,(M_2, e) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

. Logo, a probabilidade de ao menos uma das máquinas estragar é dada por:

$$\text{Pr}\,(M_1, e \cup M_2, e) = \text{Pr}\,(M_1, e) + \text{Pr}\,(M_2, e) - \text{Pr}\,(M_1, e \cap M_2, e) = \frac{1}{2}$$

Teorema 2 (Independência de Complementos): *Se dois eventos A e B são independentes, então A e B^c também são independentes.*

Prova: Sabemos que:

$$\Pr(A \cap B^c) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B),$$

e se A e B são independentes, então $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$. Logo:

$$\begin{aligned}\Pr(A \cap B^c) &= \Pr(A) - \Pr(A)\Pr(B) \\ &= \Pr(A)\left[1 - \Pr(b)\right] \\ &= \Pr(A)\Pr(B^c).\end{aligned}$$

Assim, A e B^c também são independentes.

Independência de Vários Eventos

Se considerarmos n eventos $A_1, A_2, ..., A_n$, estes eventos são ditos independentes se para qualquer combinação de subconjuntos de k elementos, com $k = 2, 3, 4, ..., n$ tivermos:

$$\Pr(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = \Pr(A_{i_1})\Pr(A_{i_2})...\Pr(A_{i_k})$$

Considerem o caso de 3 eventos A, B e C. Eles serão considerados mutualmente independentes, se e somente se:

$$\begin{aligned}\Pr(A \cap B) &= \Pr(A)\Pr(B) \\ \Pr(A \cap C) &= \Pr(A)\Pr(C) \\ \Pr(B \cap C) &= \Pr(B)\Pr(C) \\ \Pr(A \cap B \cap C) &= \Pr(A)\Pr(B)\Pr(C)\end{aligned}$$

Exemplo 9

Suponha uma máquina que produza um item específico. Ela tem probabilidade p de produzir o item com defeito e, portanto, uma probabilidade $(1-p)$ de produzir este mesmo item sem defeito. Calcule a probabilidade de: a) termos exatamente 2 itens com defeito em 6 itens escolhidos ao acaso, b) que ao menos um dos 6 itens escolhidos tenha defeito e c) começarmos com $n = 5$ itens escolhidos ao acaso e pararmos quando tivermos exatamente 5 itens com defeito. Qual é a probabilidade de que isto ocorra num determinado valor $n \leq 5$?

Os eventos são claramente independentes. Assim: **a)** Quando temos 6 itens escolhidos ao acaso, sendo 2 deles com defeitos, temos a seguinte probabilidade P_1 para uma data sequência:

$$P_1 = p\,p\,(1-p)(1-p)(1-p)(1-p) = p^2(1-p)^4.$$

Na verdade, qualquer sequência terá a mesma probabilidade. Assim, a probabilidade requerida é:

$$\binom{6}{2} p^2 (1-p)^4$$

b) É mais fácil vermos a probabilidade de que nenhum dos itens tenha defeito P_2. Assim:

$$P_2 = (1-p)^6.$$

Logo a probabilidade requerida é:

$$1 - (1-p)^6.$$

c) Se pararmos assim que tivermos 5 peças defeituosas, teremos um grupo de 5 peças com defeito e $n-5$ peças sem defeito. Assim, a probabilidade P_3 disso ocorrer é:

$$P_3 = p^5(1-p)^{n-5}.$$

Como a última peça é defeituosa, temos 4 outras peças defeituosas combinadas entre as $n-1$ posições. Assim, a probabilidade requerida é:

$$\binom{n-1}{4} p^5 (1-p)^{n-5}$$

Algumas Definições

Independência

Quando pensamos em independência de eventos na prática, temos que tomar certo cuidado. Algumas vezes temos que rever a suposição de que determinados eventos são independentes. Um exemplo banal disso é supormos inicialmente que uma moeda é justa, ou seja, que temos iguais probabilidades de termos cara e coroa) mas à medida que são feitos lançamentos desta moeda se note que há uma tendência clara que termos mais um dos resultados do que o outro.

Eventos Mutualmente Excludentes e Independentes

É comum se confundir estes dois conceitos. Entretanto, geralmente quando tempos eventos que são mutualmente excludentes eles não podem ser independentes. É fácil ver o porque disso se pensarmos que se dois eventos são mutualmente excludentes (ou seja, se eles não tem resultados em comum no diagrama de Venn), então se soubermos que um deles ocorreu isso implica que sabemos de antemão que o outro não pode ocorrer. Assim, eles não podem ser independentes. Eles só serão mutualmente excludentes e independentes se ao menos um destes dois eventos tiver probabilidade nula de ocorrer.

Eventos Condicionalmente Excludentes

Ocorrem quando podemos supor que dois ou mais eventos $(A_1, A_2, ..., A_n)$ são independentes, se soubermos que outro evento B ocorreu. Matematicamente, para que dois eventos A_1 e A_2, sejam condicionalmente excludentes, temos que:

$$\Pr(A_2|A_1 \cap B) = \Pr(A_2|B),$$

com a condição de que $\Pr(A_1 \cap B) > 0$.

Analogamente ao caso de múltiplos eventos independentes, temos:

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_B|B) = \Pr(A_1|B)\Pr(A_2|B)...\Pr(A_k|B)$$

onde $k = 2, 3, ..., n$. Assim, a equação acima tem que ser válida para quaisquer subgrupos dos n elementos. Um exemplo disso é termos duas moedas, uma delas justa e a outra com duas caras. Se selecionarmos uma das duas moedas ao acaso, sem olharmos, e a jogarmos, sabemos que os resultados das jogadas consecutivas vai depender de qual das duas moedas foi selecionada aleatoriamente.

Teorema de Bayes

Podemos agora voltar novamente a estudar o caso em que temos eventos do tipo B_i, com $i = 1, ..., n$ tais que estes formam uma partição do espaço de amostra S. Imagine que queremos agora saber qual é a probabilidade de um destes eventos da partição, B_j, por exemplo, ter ocorrido se soubermos que o evento A ocorreu. A equação do teorema de Bayes é dada por:

$$\text{Pr}\,(A|B_j) = \frac{\text{Pr}\,(A)\,\text{Pr}\,(B_j|A)}{\sum_{i=1}^{n} \text{Pr}\,(A)\,\text{Pr}\,(B_i|A)}$$

Prova: Começamos por:

$$\text{Pr}\,(B_j|A) = \frac{\text{Pr}\,(A \cup B_j)}{\text{Pr}\,(A)} = \frac{\text{Pr}\,(B_j)\,\text{Pr}\,(A|B_j)}{\text{Pr}\,(A)}$$

Mas utilizando a equação (1) temos:

$$\text{Pr}\,(B_j|A) = \frac{\text{Pr}\,(B_j)\,\text{Pr}\,(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \text{Pr}\,(B_i)\;\text{Pr}\,(A|B_i)},$$

o que completa a prova.

Exemplo 10

Suponha novamente o problema anterior, no qual temos duas caixas de parafusos, uma com 60 parafusos longos e 40 curtos, e outra caixa com 10 longos e 20 curtos. Considere que você pegou, ao acaso em uma das caixas (sem que você saiba qual caixa é essa) um parafuso longo. Qual é a probabilidade de que ela tenha vindo da primeira caixa?

Se o evento A for pegar um parafuso longo, o evento B_1 for escolher a primeira caixa e o evento B_2 for pegar a segunda caixa, então, segundo o teorema de Bayes temos:

$$\begin{aligned}\text{Pr}\,(B_1|A) &= \frac{\text{Pr}\,(B_1)\,\text{Pr}\,(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{2} \text{Pr}\,(B_i)\;\text{Pr}\,(A|B_i)} \\ &= \frac{\text{Pr}\,(B_1)\,\text{Pr}\,(A|B_1)}{\text{Pr}\,(B_1)\;\text{Pr}\,(A|B_1) + \text{Pr}\,(B_2)\;\text{Pr}\,(A|B_2)} \\ &= \frac{1/2\,60/100}{1/2\,60/100\;+\;1/2\,10/30} = \frac{9}{14}\end{aligned}$$

Obviamente temos que $\text{Pr}\,(B_2|A) = 5/14$.

Exemplo 11

Suponha que você faça o teste para determinada doença. O teste tem confiança de 90%, ou seja, há uma chance em 10 de que o resultado da sua doença ser diagnosticado de forma equivocada. É conhecido o fato de que a doença em questão afeta uma em cada 10000 pessoas. Caso você receba um diagnóstico positivo para esta doença, qual é a probabilidade de que você realmente tenha a doença neste caso?

Podemos considerar o evento B_1 como ter realmente a doença, o evento B_2 como não ter a doença e o evento B será o diagnóstico positivo. Assim, queremos saber $\text{Pr}\,(B_1|A)$:

$$\begin{aligned}\text{Pr}\,(B_1|A) &= \frac{\text{Pr}\,(B_1)\,\text{Pr}\,(A|B_1)}{\text{Pr}\,(B_1)\;\text{Pr}\,(A|B_1) + \text{Pr}\,(B_2)\;\text{Pr}\,(A|B_2)} \\ &= \frac{1/10000\,9/10}{1/10000\,9/10\;+\;9999/10000\,1/10} \\ &= 0,00090\end{aligned}$$

Assim, a probabilidade de que se tenha realmente a doença aumentou 9 vezes mas é, entretanto, relativamente baixa, uma vez que o teste não é bastante eficaz.
Entretanto, consideremos o caso alternativo, onde a pessoa se encontra em um grupo de risco onde 1 em cada 20 pessoas é acometida por esta mesma doença. Neste caso a probabilidade do diagnóstico ser verdadeiro fica:

$$\begin{aligned}\text{Pr}\,(B_1|A) &= \frac{\text{Pr}\,(B_1)\,\text{Pr}\,(A|B_1)}{\text{Pr}\,(B_1)\;\text{Pr}\,(A|B_1) + \text{Pr}\,(B_2)\;\text{Pr}\,(A|B_2)} \\ &= \frac{1/20\,9/10}{1/20\,9/10\;+\;19/20\,1/10} \\ &= 0,32.\end{aligned}$$

Daí fica muito mais provável que o diagnóstico seja verdadeiro.

Exemplo 12

Suponhamos que 3 máquinas M_1, M_2 e M_3 façam os mesmos itens em uma indústria. Dos produtos totais, 20% são feitos por M_1, 30% por M_2 e 50% por M_3. Sabe-se que a probabilidade de termos um produto com defeito feito por M_1 é 0,01, por M_2 é 0,02 e por M_3 é 0,03. Se um produto é pego por acaso, e é defeituoso, qual é probabilidade de que tenha sido feito por M_2?

Se o evento D for aquele em que o produto selecionado é defeituoso e M_1, M_2 e M_3 forem os eventos onde este produto é fabricado por, respectivamente, as máquinas M_1, M_2 e M_3, então estamos buscando:

$$\begin{aligned}\text{Pr}\,(M_2|D) &= \frac{\text{Pr}\,(M_2)\,\text{Pr}\,(D|M_2)}{\sum_{i=1}^{3} \text{Pr}\,(M_i)\,\text{Pr}\,(D|M_i)} \\ &= \frac{0,3\,0,02}{0,2\,0,01\;+\;0,3\,0,02\;+\;0,5\,0,03} \\ &= 0,26.\end{aligned}$$

Podemos realizar cálculos semelhantes e encontrar $\text{Pr}\,(M_1|D) \sim 0,087$ e $\text{Pr}\,(M_3|D) \sim 0,65$.

Probabilidades Anteriores e Posteriores

No exercício anterior, a probabilidade Pr (M_2) = 0,3 é a probabilidade de que um item qualquer, escolhido ao acaso, tenha sido fabricado pela máquina M_2. Ao sabermos que este item tem defeito, a probabilidade de que este item tenha sido fabricado por esta máquina cai para 0,26. Isto quer dizer que o teorema de Bayes, de certa forma, modificou a probabilidade atribuída para este evento. Chamamos de **probabilidade anterior** aquela probabilidade atribuída a um evento, antes de sabermos que outro evento ocorreu, e chamamos de **probabilidade posterior** a probabilidade deste mesmo evento ocorrer, ao sabermos que outro evento ocorreu.

Atualizando probabilidades

Podemos utilizar a probabilidade posterior como sendo a probabilidade anterior quando um novo experimento é conduzido sob as mesmas condições.

Exemplo 13

Suponha o caso do teste da doença. Suponhamos que a pessoa receba um diagnóstico positivo em um primeiro exame e queira repetir o exame. Suponha que ela receba um segundo resultado positivo. Qual é a probabilidade de que a pessoa tenha realmente a doença?

No caso em que ela não se encontra no grupo de risco (ou seja, no caso em que a doença acomete 1 em cada 10000 pessoas), a probabilidade Pr $(B_1|A_1 \cap A_2)$ de que a pessoa tenha a doença (evento B_1) quando recebe um primeiro diagnóstico positivo (evento A_1) e um segundo diagnóstico positivo (evento A_2) é dado por:

$$\begin{aligned}\text{Pr}\,(B_1|A_1 \cap A_2) &= \frac{\text{Pr}\,(B_1)\,\text{Pr}\,(A_1 \cap A_2|B_1)}{\text{Pr}\,(B_1)\ \text{Pr}\,(A_1 \cap A_2|B_1) + \text{Pr}\,(B_2)\ \text{Pr}\,(A_1 \cap A_2 \\ &= \frac{1/10000\,9/10\,9/10}{1/10000\,9/10\,9/10\ +\ 9999/10000\,1/10\,1/10} \\ &= 0,008.\end{aligned}$$

Usamos o fato de que os dois diagnósticos são independentes. Embora a chance de se ter a doença tenha aumentado em 10 vezes, ela ainda é menor do que 1%.
Temos outro cenário no caso em que a pessoa esteja no grupo de risco, pois:

$$\begin{aligned}\text{Pr}\,(B_1|A_1 \cap A_2) &= \frac{\text{Pr}\,(B_1)\,\text{Pr}\,(A_1 \cap A_2|B_1)}{\text{Pr}\,(B_1)\ \text{Pr}\,(A_1 \cap A_2|B_1) + \text{Pr}\,(B_2)\ \text{Pr}\,(A_1 \cap A_2} \\ &= \frac{1/20\,9/10\,9/10}{1/20\,9/10\,9/10\ +\ 19/20\,1/10\,1/10} \\ &= 0,81\end{aligned}$$

Agora, podemos revisitar este problema por outra óptica. Já vimos que depois do primeiro resultado positivo, a probabilidade da pessoa ter a doença passou a ser de 0,0009. Podemos utilizar esta probabilidade posterior como probabilidade anterior para o calcula da probabilidade de termos a doença quando o resultado é positivo pela segunda vez.

Neste caso Pr $(B_1') = $ Pr $(B_1|A)$

$$\begin{aligned}\text{Pr}\,(B_1'|A_2) &= \frac{\text{Pr}\,(B_1')\,\text{Pr}\,(A_2|B_1')}{\text{Pr}\,(B_1')\ \text{Pr}\,(A_2|B_1') + \text{Pr}\,(B_2')\ \text{Pr}\,(A_2|B_2')} \\ &= \frac{0,00090\,9/10}{0,00090\,9/10\ +\ (1-0,00090)\,1/10} \\ &= 0,008.\end{aligned}$$

Exemplo 14

Suponha que você tenha duas moedas. Uma delas é uma moeda justa, onde um lado é cara e o outro lado é coroa. A segunda moeda é tal que ela possui dois lados iguais, com cara. Suponha que você seleciona aleatoriamente uma destas moedas, sem saber qual delas foi selecionada. Esta moeda é, então jogada, e o resultado é cara. Qual é a probabilidade de que a moeda justa tenha sido selecionada?

Primeiramente vemos que a probabilidade $P(B_1)$ inicial de selecionarmos a moeda justa é de 1/2. Se o resultado do primeiro lançamento é cara (A_1), então a probabilidade de que tenhamos escolhido a primeira moeda passa a ser de:

$$\begin{aligned}\text{Pr}\,(B_1|A_1) &= \frac{\text{Pr}\,(B_1)\,\text{Pr}\,(A_1|B_1)}{\text{Pr}\,(B_1)\ \text{Pr}\,(A_1|B_1) + \text{Pr}\,(B_2)\ \text{Pr}\,(A_1|B_2)} \\ &= \frac{1/2\,1/2}{1/2\,1/2\ +\ 1/2\,1} \\ &= 1/3\end{aligned}$$

Se a moeda é lançada uma segunda vez (A_2), então a probabilidade de que esta moeda seja a justa passa a ser:

$$\begin{aligned}\text{Pr}\,(B_1|A_1 \cap A_2) &= \frac{\text{Pr}\,(B_1)\,\text{Pr}\,(A_1 \cap A_2|B_1)}{\text{Pr}\,(B_1)\ \text{Pr}\,(A_1 \cap A_2|B_1) + \text{Pr}\,(B_2)\ \text{Pr}\,(A_1 \cap A_2|B} \\ &= \frac{1/2\,1/2\,1/2}{1/2\,1/2\,1/2\ +\ 1/2\,1\,1} \\ &= 1/5\end{aligned}$$

Mas, conforme vimos anteriormente, podemos utilizar a probabilidade posterior do primeiro lançamento como probabilidade anterior para o segundo lançamento:

$$\begin{aligned}\text{Pr}\,(B_1'|A_2) &= \frac{\text{Pr}\,(B_1')\,\text{Pr}\,(A_2|B_1')}{\text{Pr}\,(B_1')\ \text{Pr}\,(A_2|B_1') + \text{Pr}\,(B_2')\ \text{Pr}\,(A_2|B_2')} \\ &= \frac{1/3\,1/2}{1/3\,1/2\ +\ 2/3\,1/2} \\ &= 1/5\end{aligned}$$

Como esperado, os resultados são idênticos.

Exemplo 15

Um clássico exemplo do uso do teorema de Bayes está no problema conhecido como Monty Hall. Neste exemplo, um participante está em um programa de televisão onde existem 3 portas: uma delas esconde um prêmio e as outras duas estão vazias. O participante esco-

lhe uma porta aleatoriamente e, em seguida, o apresentador abre uma das duas portas não selecionadas, mostrando que a mesma está vazia. É dada ao participante a oportunidade do mesmo trocar de porta, ou ficar naquela que ele havia inicialmente escolhido. Se pergunta qual é a opção mais vantajosa para o participante.

A fim de tratar do problema, podemos dizer que as portas são numeradas: 1, 2, e 3. Para facilitar os cálculos, suponhamos que a porta escolhida seja a de número 1 (o problema é simétrico frente a porta escolhida inicialmente e, portanto, tanto faz qual é esta escolha neste estágio do problema). A probabilidade inicial de que o prêmio esteja na porta 1 é $\Pr(P_1) = 1/3$. Digamos que o apresentador abra a porta 2 (X_2), como isto afeta o valor de P_1? Isto pode ser respondido pelo teorema de Bayes:

$$\begin{aligned}\Pr(P_1|X_2) &= \frac{\Pr(P_1)\Pr(X_2|P_1)}{\Pr(P_1)\ \Pr(X_2|P_1) + \Pr(P_2)\ \Pr(X_2|P_2) + \Pr(P_3)\ \Pr(X_2|P_3)} \\ &= \frac{1/3\,1/2}{1/3\,1/2\ +\ 1/3\,0\ +\ 1/3\,1} \\ &= 1/3\end{aligned}$$

Já para a probabilidade do prêmio estar na porta 3, temos:

$$\begin{aligned}\Pr(P_3|X_2) &= \frac{\Pr(P_3)\Pr(X_2|P_3)}{\Pr(P_1)\ \Pr(X_2|P_1) + \Pr(P_2)\ \Pr(X_2|P_2) + \Pr(P_3)\ \Pr(X_2|P_3)} \\ &= \frac{1/3\,1}{1/3\,1/2\ +\ 1/3\,0\ +\ 1/3\,1} \\ &= 2/3\end{aligned}$$