Probabilidade e Estatística - Listas 04 e 05
Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Araranguá
Prof. Agenor Hentz

1. Suponha que uma variável X tenha função probabilidade discreta f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & \text{para } x = 1, ..., 5 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine o valor de c.

2. Suponha que dois dados são rolados. Seja X o valor absoluto da diferença do número das faces, determine a função probabilidade $f(X)$.

3. Suponha que uma caixa contenha 7 bolas vermelhas e 3 bolas azuis. Se cinco bolas são selecionadas aleatoriamente, sem reposição, determine a função probabilidade do número de bolas vermelhas que são obtidas nesta seleção.

4. Suponha que uma variável X tenha uma distribuição discreta com a função probabilidade f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{2^x}, & \text{para } x = 0, 1, 2, ... \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Encontre o valor da constante c.

5. Suponha que uma variável aleatoria X tenha f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1 - x^3), & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Faça o gráfico desta f.d.p. e encontre as seguintes probabilidades: *a)* $\Pr\left(X < \frac{1}{2}\right)$, *b)* $\Pr\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right)$, *c)* $\Pr\left(X > \frac{1}{3}\right)$

6. Suponha que a função distribuição cumulativa f.d.c. de uma variável aleatória X seja dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \leq 0 \\ \frac{1}{9}x^2, & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \\ 1, & \text{para } x > 3 \end{cases}$$

Encontre a f.d.p. $f(x)$ de X.

7. Suponha que um letreiro eletrônico contenha 3 lâmpadas na primeira linha e 4 lâmpadas na segunda linha. Seja X o número de lâmpadas queimadas na primeira linha em um intervalo de tempo t e Y o número de lâmpadas queimadas na segunda linha no mesmo intervalo de tempo. Suponha que a função probabilidade conjunta seja dada pela tabela abaixo:

	Y				
X	0	1	2	3	4
0	0,08	0,07	0,06	0,01	0,01
1	0,06	0,10	0,12	0,05	0,02
2	0,05	0,06	0,09	0,04	0,03
3	0,02	0,03	0,03	0,03	0,04

Encontre cada uma das seguintes probabilidades:

a) $\Pr(X = 2)$;
b) $\Pr(Y \geq 2)$;
c) $\Pr(X \leq 2 \text{ e } Y \leq 2)$;
d) $\Pr(X = Y)$;
e) $\Pr(X < Y)$

8. Suponha que a f.d.p. conjunta de X e Y seja tal que:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{15}{4}x^2, & \text{para } 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Determine as f.d.p. marginais de X e Y;
- X e Y são variáveis independentes?

9. Suponha que a f.d.p. conjunta de X e Y seja tal que:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2xe^{-y}, & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 < y < \infty \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

X e Y são variáveis independentes?

10. Suponha que a f.d.p. conjunta de X e Y seja dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y)^2, & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine *a)* A f.d.p. condicional de X dado um valor de Y; *b)* $\Pr\left(X < \frac{1}{2} | Y = \frac{1}{2}\right)$

11. Suponha que somente um entre dois aparelhos seja usado para que se faça determinado experimento. O instrumento 1 resulta em uma medida cuja f.d.p. h_1 é dada por:

$$h_1(x) = \begin{cases} 2x, & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O instrumento 2 resulta em uma medida que tem f.d.p. h_2 dada por:

$$h_2(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha que um dos instrumentos seja selecionado aleatoriamente e seja feita uma medida X.

a) Encontre a f.d.p. marginal de X;
b) Se a medida encontrada foi $X = 1/4$ qual é a probabilidade de que o primeiro aparelho tenha sido utilizado nesta medida?

12. A quantidade de querosene, em unidades de milhares de litros, em um tanque no início do dia é dado pela variável aleatória Y. Destes, uma quantidade X são vendidos ao longo do dia. Suponha que não haja reposição do tanque ao longo do dia, de forma que $x \leq y$, e assuma que a f.d.p. conjunta destas variáveis é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{para } 0 \leq x \leq y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

  a) Determine se X e Y são independentes

  b) Encontre $\Pr\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} | Y = \frac{3}{4}\right)$

13. Três cartas são retiradas sem reposição de um baralho completo com 52 cartas. Seja X o número de reis selecionados e Y o número de valetes, encontre:

  a) a f.d.p. conjunta de X e Y;

  b) $\Pr((X,Y) \in A)$, onde A é o evento tal que $\{(x,y) | x + y \geq 2\}$

14. O tempo Z em minutos entre ligações em uma empresa é dado pela f.d.p.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-z/10}, & \text{para } 0 \leq z < \infty \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

  a) Qual é a probabilidade de que não ocorra nenhuma ligação em um intervalo de 20 minutos?

  b) Qual é a probabilidade de que haja uma ligação nos primeiros 10 minutos de abertura da empresa?

Respostas: **1)** $c = 1/15$; **2)** $f(0) = 6/36$, $f(1) = 10/36$, $f(2) = 8/36$, $f(3) = 6/36$, $f(4) = 4/36$, $f(5) = 2/36$ **3)** $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 21/252$, $f(3) = 105/252$, $f(4) = 105/252$, $f(5) = 21/252$; **4)** $c = 1/2$ **5)** *a*) 31/48; *b*) 27/48; *c*) 136/243; **6)** $f(x) = (2/9)x$ (para $0 \leq x \leq 3$) e $f(x) = 0$ (fora deste intervalo) **7)** *a*) 0,27; *b*) 0,53; *c*) 0,69; *d*) 0,3; *e*) 0,55; **8)** *a*) $f_1(x) = 15x^2(1-x^2)/4$, $f_2(y) = (5/4)(1-y)^{3/2}$; *b*) não são independentes; **9)** *a*) $f_1(x) = 2x$, $f_2(y) = e^{-y}$; *b*) são independentes; **10)** *a*) $f(x|y) = (x+y)^2/[(1/3)+y+y^2]$; *b*) 7/26; **11)** *a*) $f_1(x) = x + (3/2)x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$, $f_1(x) = 0$ (caso contrário); *b*) 8/11; **12)** *a*) não são independentes [$f_1(x) = 2x$ $(0 \leq x \leq y)$, $f_2(y) = 2y$ $(0 \leq y \leq 1)$]; *b*) 1/3; **13)** *a*) $f(0,0) = 13244/22100$; $f(1,0) = f(0,1) = 3784/22100$; $f(1,1) = 704/22100$; $f(1,2) = f(2,1) = 24/22100$; $f(3,0) = f(0,3) = 4/22100$; $f(2,0) = f(0,2) = 264/22100$; *b*) 584/22100 ; **14)** *a*) e^{-2}; *b*) $1 - e^{-1}$.