

Síntesis del Programa de la Asignatura

(Fundamento Legal: Artículo 89 del Decreto Ejecutivo 539 de 30 de agosto de 2018)

1. DATOS GENERALES:

Facultad:	Arquitectura y Diseño	Escuela: Arquitectura Estructural	Período: 2021-9C
Denominación de la asignatura:	Análisis Estructural III		
Créditos: 4	Horas dedicación:5	Teóricas:3	Prácticas:2
Prerrequisitos:	5751- Análisis Estructural II		
Área de Formación:			
Pregrado y Grado	General: <input type="checkbox"/>	Integración <input type="checkbox"/>	Servicio Social <input type="checkbox"/>
	Profesional: <input type="checkbox"/>	Básica <input type="checkbox"/> Apoyo <input type="checkbox"/>	Especialidad <input type="checkbox"/> Libre Elección <input type="checkbox"/>
Postgrado	<input type="checkbox"/>	Integración e Investigación <input type="checkbox"/>	Especialidad <input type="checkbox"/>
Docente:	Alonso González L Teléfono: 775-9619 Celular: 6213-8766		

2. DESCRIPCIÓN:

Esta asignatura abarca el análisis de estructuras indeterminadas por diversos métodos. Inicia con el cálculo de la deflexión en vigas y marcos. Sigue con el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas por los siguientes métodos: de flexibilidad, de desplazamiento, de la pendiente deformación y de rigidez. Finalmente, se presenta el uso de la computadora en el análisis estructural

3. COMPETENCIAS:

3.1 Competencias Genéricas:

COMPETENCIA	Nivel de desempeño que aplica a la asignatura
Comunicación	<ul style="list-style-type: none"> • Reelaborar la información recibida y expresarla lógicamente a través de medios orales, escritos y gráficos. • Expresión verbal, escrita, comunicación en otro idioma
Liderazgo Intelectual	<ul style="list-style-type: none"> • Problematizar la realidad y explorar alternativas de respuesta • Pensamiento crítico y creativo • Solución de problemas
Aprendizaje Colaborativo y en Equipo	<ul style="list-style-type: none"> • Escuchar y participar en la organización del trabajo y asumir responsablemente la tarea que corresponda en un equipo de trabajo • Planeación

	<ul style="list-style-type: none"> • Trabajo en Equipo • Liderazgo Colaborativo
Innovación y Cambio	<ul style="list-style-type: none"> • Cuestionar lo dado y anticipar alternativas desde diferentes escenarios • Imaginación y creatividad. • Hab. de proyección/previsión (anticipación).
Visión Humanista	<ul style="list-style-type: none"> • Evaluar las propias propuestas profesionales en función de sus alcances y limitaciones para la solución de problemas globales. • Conciencia de la dignidad de la persona. • Conciencia ecológica. • Experiencia estética.
Manejo de Sí	<ul style="list-style-type: none"> • Ponderar y valorar las fortalezas y debilidades así como las expectativas y convicciones personales para adecuarlas al contexto y tomar opciones éticas fundamentadas. • Responsabilidad y compromiso.

3.2 Competencias Específicas:

▪ **De la carrera (de acuerdo al Perfil del Egresado por competencias)**

APRENDER A CONOCER

- *Determina los métodos constructivos ideales para las obras de construcción.*
- *Reconoce las condiciones físicas reales y específicas del sitio y sus alrededores.*
- *Interpreta el enfoque técnico y administrativo apropiado para ejecutar el proyecto.*
- *Reconoce las normas, estudios y requerimientos ambientales relacionados a proyectos de construcción.*
- *Identifica materiales y sistemas constructivos de acuerdo a los recursos disponibles y los requerimientos del proyecto.*

APRENDER A HACER

- *Diseña planos y especificaciones de obras de construcción para realización de proyectos.*
- *Elabora presupuestos para proyectos.*
- *Prepara planes de inspecciones y mantenimiento de acuerdo a las necesidades físicas del proyecto.*

- *Formula el plan de ejecución y administración de proyecto para cumplir con los parámetros, costos, calidad y tiempo.*
- *Verifica el cumplimiento de las normas ambientales para el logro de la sostenibilidad.*
- *Ejecuta la administración de los proyectos de construcción con altos valores éticos.*
- *Formula estrategias por actividad para la optimización de los recursos disponibles en el proyecto.*
- *Aplica las normas técnicas y mejores prácticas de construcción en la ejecución del proyecto.*
- *Inspecciona las obras de construcción para que cumplan con el enfoque técnico estipulado.*
- *Ejecuta los planes de calidad preparados para la obra de construcción.*
- *Controla la ejecución del proyecto dando seguimiento continuo a las actividades en desarrollo.*
- *Presupuesta detalladamente los costos del proyecto.*

APRENDER A SER

- *Aplica el código de ética en la elaboración de los diseños y los planos.*
- *Actúa con respeto a las normas legales en la etapa de planeación del proyecto de construcción.*
- *Domina el lenguaje técnico para la mejor comunicación de las partes involucradas o para la solución de problemas durante la ejecución del plan.*
- *Actúa con liderazgo en la organización de los equipos de trabajo para el cumplimiento de los objetivos del proyecto.*

APRENDER A VIVIR

- *Tener una visión humanista, ecológica con alto sentido social para comprender, interpretar y proponer soluciones a los problemas sociales y generar condiciones más justas y plenamente humanas.*

SABER EMPRENDER

- *Incorpora la innovación con nuevas tecnologías de diseño amigables con el ambiente.*
- *Transforma eficientemente el proceso de levantamiento de requerimientos y planificación del proyecto a realizar.*
- *Propone procesos para mitigar el impacto negativo de la construcción de obras civiles en la comunidad*

▪ De la asignatura

APRENDER A CONOCER

- Diferenciar los métodos de desplazamientos para cálculos de estructuras indeterminadas
- Describir el procedimiento de solución estructuras indeterminadas por los métodos de desplazamientos
- Mencionar los softwares estructurales más comunes en el análisis de estructuras.
- Definir el procedimiento básico para modelamiento de sistemas estructurales

APRENDER A HACER

- Aplicar los métodos de desplazamientos para solución de vigas y marcos indeterminados
- Analizar los resultados de modelamientos de estructuras por medio de softwares estructurales

APRENDER A SER

- *Valorar las condiciones de las estructuras en función de su uso para beneficio del hombre.*
- *Valorar las estructuras como elemento moderno del habitat humano*
- *Debe tener sentido de responsabilidad*
- *Saber trabajar en equipo*
- *Deber tener espíritu creativo e innovador*
- *Saber buscar y analizar información*
- *Saber tomar decisiones*
- *Debe ser puntual*
- *Debe ser organizado*

APRENDER A VIVIR

- *Tener una visión humanista, ecológica con alto sentido social para comprender, interpretar y proponer soluciones a los problemas sociales y generar condiciones más justas y plenamente humanas que se puedan generar el desarrollo de un proyecto en donde se usen conceptos relacionados a análisis de estructuras indeterminadas*

SABER EMPRENDER

- *Identificar la aplicación de los problemas relacionados con análisis estructural de estructuras indeterminadas con las diferentes áreas de la ingeniería civil.*
- *Integrar cada uno de los conocimientos adquiridos previamente en los cursos aprobados para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas con al apoyo de software estructurales*

4. CONTENIDOS:

Tema N° 1. Análisis de Estructuras Indeterminadas. Método Pendiente- Deflexión

- 1.1. *Introducción y Generalidades*
- 1.2. *Análisis de Vigas*
- 1.3. *Análisis de Marcos sin desplazamientos*
- 1.4. *Análisis de Marcos con desplazamientos*
- 1.5. *Análisis de Marcos con elementos inclinados*
- 1.6. *Análisis de Marcos con niveles múltiples*
- 1.7. *Análisis de estructuras no prismáticas*

Tema N° 2. Análisis de Estructuras Indeterminadas. Método de Distribución de Momentos

- 2.1. *Introducción y Generalidades*
- 2.2. *Análisis de Vigas*
- 2.3. *Análisis de Marcos sin desplazamientos*
- 2.4. *Análisis de Marcos con desplazamientos*
- 2.5. *Análisis de Marcos con elementos inclinados*
- 2.6. *Análisis de Marcos con niveles múltiples*
- 2.7. *Análisis de estructuras no prismáticas*

Tema N° 3. Análisis de Estructuras Indeterminadas. Método de Rigidez

- 3.1. *Introducción. Algebra matricial para estructuras*
- 3.2. *Aplicación para armaduras*
- 3.3. *Armaduras nodales, efectos de cambios térmicos*
- 3.4. *Armaduras espaciales*
- 3.5. *Aplicación para vigas*
- 3.6. *Aplicación para marcos 2D*
- 3.7. *Aplicación para marcos 3D*
- 3.8. *Aplicación para emparrillados*

Tema N° 4. Uso de Computadora en el Análisis Estructural

- 4.1. *Conceptos para el desarrollo de programas*
- 4.2. *Sistemas y Programas disponibles*
- 4.3. *Ventajas y riesgos en el uso de software*
- 4.4. *Uso de Excell para Métodos de Análisis Estructural*
- 4.5. *Modelamientos con software estructurales para diferentes tipos de estructuras*
- 4.6. *Ánalisis de Resultados con software estructurales*

5. METODOLOGÍA:

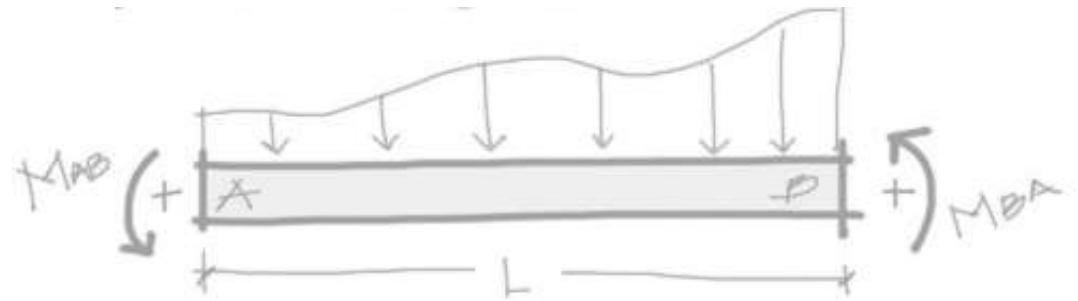
- Clase Expositiva complementada con resolución de problemas
- Aprendizaje Basado en Problemas
- Tareas y talleres
- Investigaciones
- Programación de Hojas Electrónicas
- Modelamiento y Análisis de Estructuras con software estructural
- Exámenes Parciales
- Examen Final

6. EVALUACIÓN:

ASPECTOS	ACTIVIDAD	VALORES (%)
PARCIALES	3 EXÁMENES PARCIALES	35
PORTAFOLIO	EVIDENCIA DE MATERIAL EN CLASE	10
TAREAS Y TALLERES	PROBLEMAS A DESARROLLAR EN CASA Y CLASE DE CADA MÓDULO	10
PROYECTO	DESARROLLO DE HOJA ELECTRÓNICA PARA MÉTODOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL	15
EXAMEN FINAL	EXAMEN DE TEMAS DESARROLLADOS DURANTE EL CUATRIMESTRE	30
Total		100

7. BIBLIOGRAFÍA:

- Hibbeler, Russell. **Análisis Estructural.** Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 2011
- McCormac, Jack, Elling, Rudolf. **Análisis de estructuras-Métodos Clásico y Matricial.** Ediciones AlfaOmega, México, 2010.
- Kenneth Leet. **Fundamentos de análisis estructural.** McGraw-Hill. 2006.
- Aslam Kassimali. **Matrix Analysis of Structure.** CENGAGE Learning. 2012.
- Aslam Kassimali. **Structural Analysis.** CENGAGE Learning. 2011.



ECUACIONES PENDIENTE DEFLEXIÓN

Análisis de Estructuras Indeterminadas

Método Pendiente- Deflexión

Aplicación en Vigas



SOLICITACIONES
INTERNAS

MOMENTOS
DE FLECCION
PERFECTO

θ_A [RAD]



$\theta_A; \theta_B$ GIROS [RAD]

Δ_{AB} ASENTAMIENTO

$M_{AB}; M_{BA}$ MOMENTOS
FLECTORES

Método de Análisis de Estructuras Indeterminadas

Método de Fuerza

Se escriben las ecuaciones que satisfacen las ecuaciones de compatibilidad y de fuerza-desplazamiento para la estructura con el fin de encontrar las fuerzas redundantes. Una vez encontradas estas fuerzas, se encuentran las fuerzas restantes por medio de las ecuaciones de equilibrio.

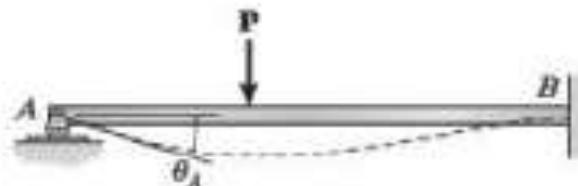
Método de Desplazamiento

Se escriben las relaciones fuerza- desplazamiento para los elementos, para luego satisfacer los requisitos de equilibrio de la estructura. En este caso las incógnitas en las ecuaciones son desplazamientos. Una vez obtenidos los desplazamientos, las fuerzas se determinan a partir de las ecuaciones de compatibilidad y de fuerza-desplazamiento.

	Incógnitas	Ecuaciones usadas para la solución	Coefficientes de las incógnitas
Método de la fuerza	Fuerzas	Compatibilidad y fuerza-desplazamiento	Coefficientes de flexibilidad
Método del desplazamiento	Desplazamientos	Equilibrio y fuerza-desplazamiento	Coefficientes de rigidez

Grados de Libertad

"Los desplazamientos desconocidos en los nodos de un elemento estructural cargado se denominan grados de libertad"



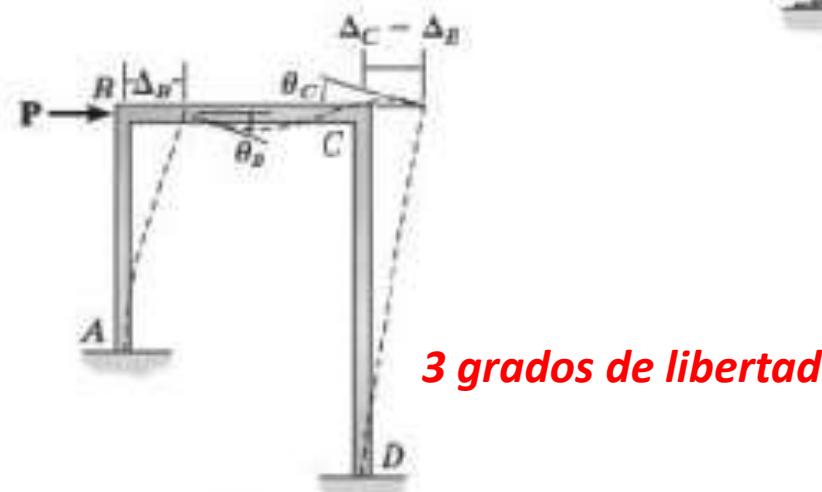
1 grado de libertad

"los grados de libertad indicarán las ecuaciones de compatibilidad necesarias"

"En los métodos de desplazamiento los grados de libertad son iguales a las incógnitas del sistema "



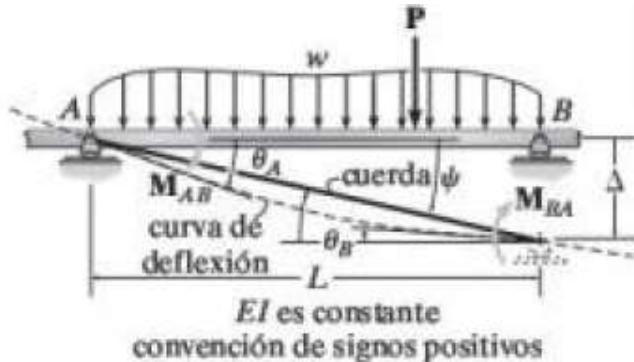
4 grados de libertad



3 grados de libertad

Ecuaciones de Pendiente- Deflexión

Caso General



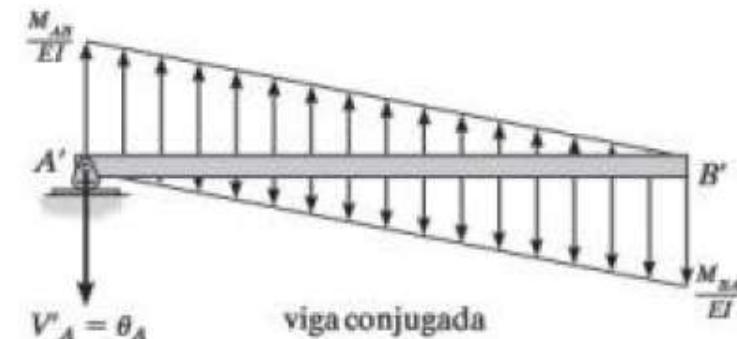
3 grados de libertad.
 ϑ_A , ϑ_B y Δ

"Momentos y desplazamientos angulares se consideran positivos en sentido horario"

Desplazamiento angular en A, ϑ_A .



Derivación de ecuaciones por superposición



$$\zeta + \sum M_{A'} = 0;$$

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{AB}}{EI} \right) L \right] \frac{L}{3} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{BA}}{EI} \right) L \right] \frac{2L}{3} = 0$$

$$\zeta + \sum M_{B'} = 0;$$

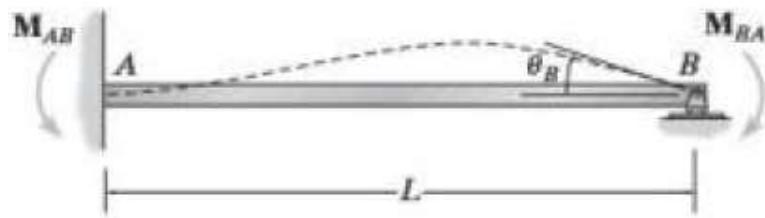
$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{BA}}{EI} \right) L \right] \frac{L}{3} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{AB}}{EI} \right) L \right] \frac{2L}{3} + \theta_A L = 0$$

$$M_{AB} = \frac{4EI}{L} \theta_A$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L} \theta_A$$

Ecuaciones de Pendiente- Deflexión

Desplazamiento angular en B, ϑ_B :



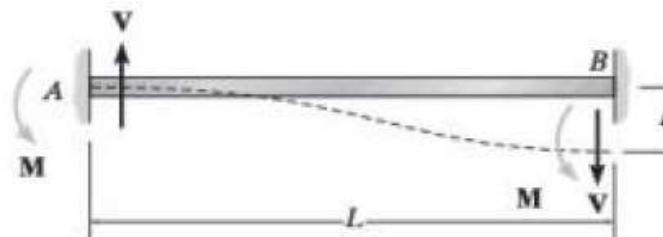
$$M_{BA} = \frac{4EI}{L} \theta_B$$

$$\downarrow + \sum M_{B'} = 0; \quad \left[\frac{1}{2} \frac{M}{EI} (L) \left(\frac{2}{3} L \right) \right] - \left[\frac{1}{2} \frac{M}{EI} (L) \left(\frac{1}{3} L \right) \right] - \Delta = 0$$

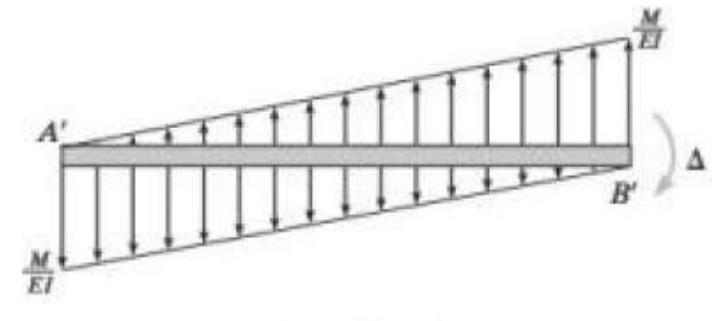
$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} \theta_B$$

Momentos de Extremos fijos (FEM)

Desplazamiento lineal relativo, Δ



viga real



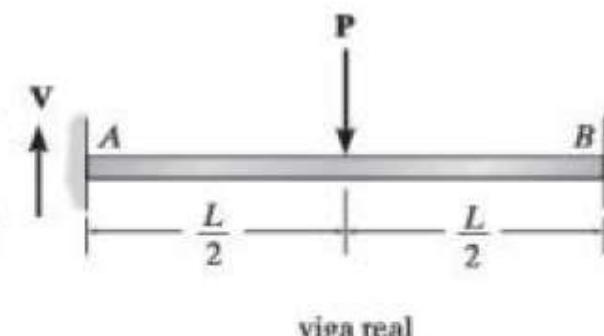
viga conjugada

$$M_{AB} = M_{BA} = M = \frac{-6EI}{L^2} \Delta$$

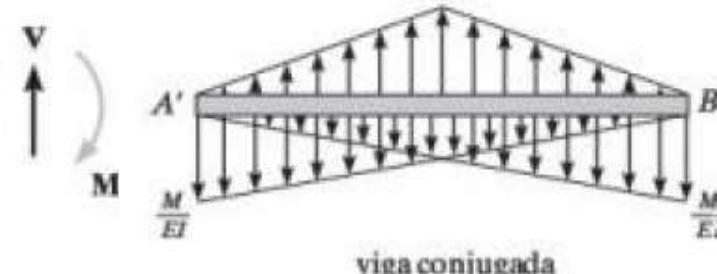
$$+ \uparrow \sum F_y = 0; \quad \left[\frac{1}{2} \left(\frac{PL}{4EI} \right) L \right] - 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right) L \right] = 0$$

$$M = \frac{PL}{8}$$

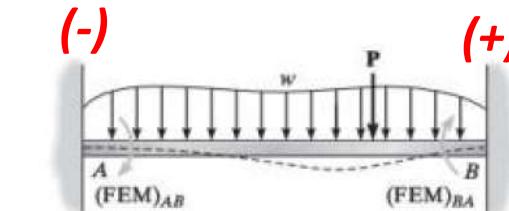
*solo para este
caso de carga*



viga real



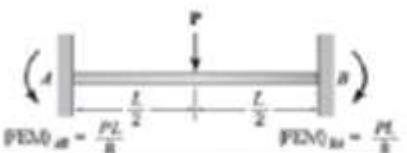
viga conjugada



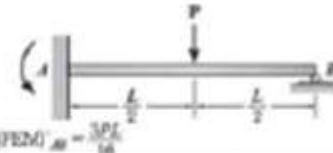
Tablas de Momento de Extremo Fijos

(contraportada del Libro Hibbeler)

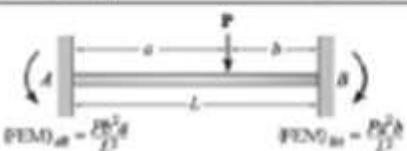
Momentos de extremo fijo



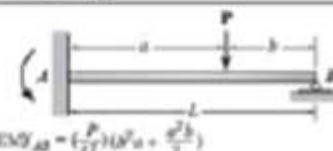
$$(FEM)_{sf} = \frac{P L}{8}$$



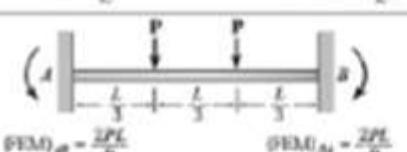
$$(FEM)_{sf} = \frac{3PL}{16}$$



$$(FEM)_{sf} = \frac{Pb^2d}{D}$$



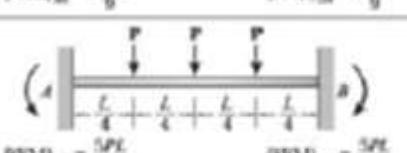
$$(FEM)_{sf} = \left(\frac{P}{D} \right) \left(b^2a + \frac{a^2b}{2} \right)$$



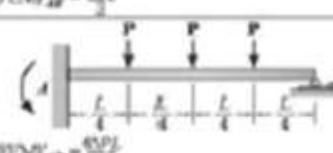
$$(FEM)_{sf} = \frac{2PL}{9}$$



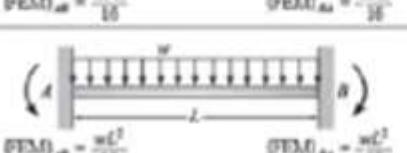
$$(FEM)_{sf} = \frac{PL}{2}$$



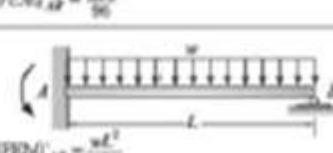
$$(FEM)_{sf} = \frac{5PL}{18}$$



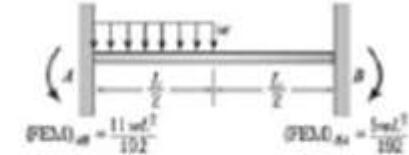
$$(FEM)_{sf} = \frac{45PL}{96}$$



$$(FEM)_{sf} = \frac{wL^2}{12}$$

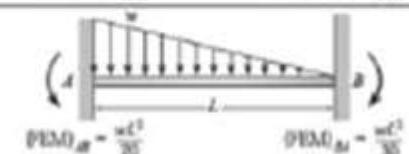


$$(FEM)_{sf} = \frac{wL^2}{8}$$



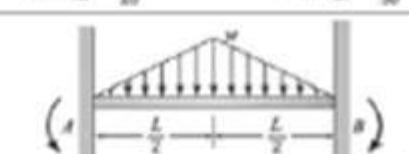
$$(FEM)_{sf} = \frac{11wL^2}{192}$$

$$(FEM)_{sf} = \frac{1wL^2}{192}$$



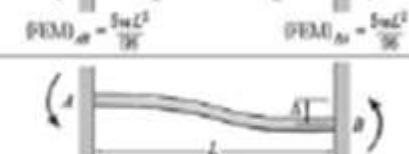
$$(FEM)_{sf} = \frac{wL^2}{20}$$

$$(FEM)_{sf} = \frac{wL^2}{30}$$



$$(FEM)_{sf} = \frac{5wL^2}{192}$$

$$(FEM)_{sf} = \frac{1wL^2}{96}$$



$$(FEM)_{sf} = \frac{6wL^3}{L^3}$$

$$(FEM)_{sf} = \frac{6wL^3}{L^3}$$



$$(FEM)_{sf} = \frac{5wL^3}{L^3}$$

$$(FEM)_{sf} = \frac{5wL^3}{L^3}$$

Ecuación Final de Pendiente- Deflexión para cada tramo de viga

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{L}\right)\left[2\theta_A + \theta_B - 3\left(\frac{\Delta}{L}\right)\right] + (\text{FEM})_{AB}$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{L}\right)\left[2\theta_B + \theta_A - 3\left(\frac{\Delta}{L}\right)\right] + (\text{FEM})_{BA}$$

$$M_N = 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N$$

Para el claro interno o el claro final con el extremo lejano fijo

donde

M_N = momento interno en el extremo cercano del claro; este momento es *positivo en sentido horario* cuando actúa sobre el claro.

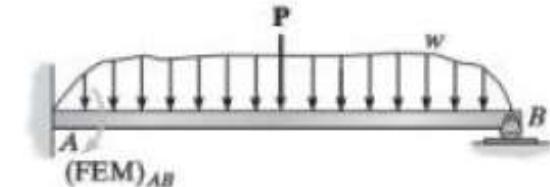
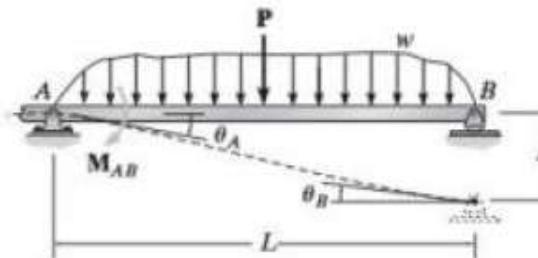
E, k = módulo de elasticidad del material y rigidez del claro
 $k = I/L$.

θ_N, θ_F = pendientes de los extremos cercano y lejano o desplazamientos angulares del claro en los soportes; los ángulos se miden en *radianes* y son *positivos en sentido horario*.

ψ = rotación de la cuerda del claro debida a un desplazamiento lineal, es decir, $\psi = \Delta/L$; este ángulo se mide en *radianes* y es *positivo en sentido horario*.

$(\text{FEM})_N$ = momento del extremo fijo en el soporte del extremo cercano; el momento es *positivo en sentido horario* cuando actúa sobre el claro; consulte la tabla en el interior de la contraportada para ver distintas condiciones de carga.

Claro final articulado



$$M_N = 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N$$

$$0 = 2Ek(2\theta_F + \theta_N - 3\psi) + 0$$

$$M_N = 3Ek(\theta_N - \psi) + (\text{FEM})_N$$

Sólo para un claro final con el extremo lejano articulado o soportado por un rodillo

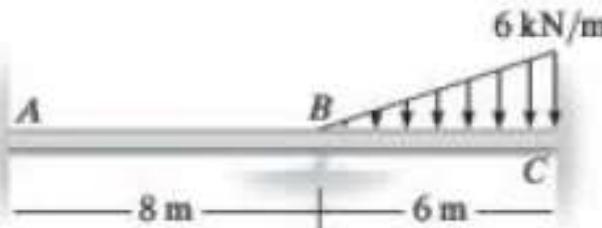
$$M_{rh} = \frac{3EI}{L}(\theta_r - \psi) + \left(\text{FEM}_{rh} - \frac{\text{FEM}_{hr}}{2} \right)$$

$$M_{hr} = 0$$

Donde el subíndice r indica el extremo *rígidamente conectado* del elemento en el extremo del elemento donde el momento M_{rh} actúa y el subíndice h indica el extremo articulado del elemento. La rotación del extremo articulado se puede escribir como

$$\theta_h = \frac{\theta_r}{2} + \frac{3}{2}\psi - \frac{L}{4EI}(\text{FEM}_{hr})$$

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga que se muestra en la figura 11-10a. EI es constante.

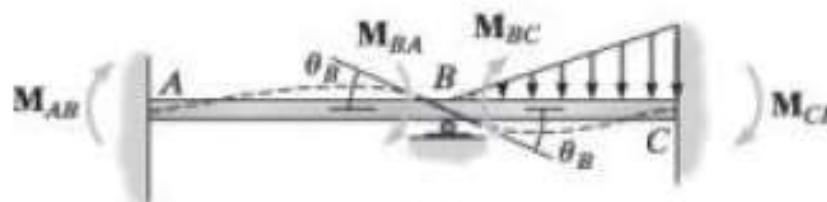


SOLUCIÓN

Ecuaciones de pendiente-deflexión. En este problema deben considerarse dos claros. Puesto que no hay un claro que tenga el extremo lejano articulado o soportado por rodillos, se aplica la ecuación 11-8 para obtener la solución. Si se emplean las fórmulas de los FEM tabuladas para la carga triangular que se muestran en el interior de la contraportada, se tiene

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{30} = -\frac{6(6)^2}{30} = -7.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{20} = \frac{6(6)^2}{20} = 10.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Observe que $(FEM)_{BC}$ es negativo porque actúa en sentido antihorario sobre la viga en B. Además, $(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = 0$ puesto que no hay carga en el claro AB.

A fin de identificar las incógnitas, en la figura 11-10b se muestra la curva elástica de la viga. Como se indica, hay cuatro momentos internos desconocidos. Sólo la pendiente en B, θ_B , es desconocida. Como A y C son soportes fijos, $\theta_A = \theta_C = 0$. Además, dado que los soportes no se asientan, ni se desplazan hacia arriba o hacia abajo, $\psi_{AB} = \psi_{BC} = 0$. Para el claro AB, si se considera que A es el extremo cercano y B es el extremo lejano, se tiene

$$\begin{aligned} M_N &= 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N \\ M_{AB} &= 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 0 = \frac{EI}{4}\theta_B \end{aligned} \quad (1)$$

Ahora, tomando a B como el extremo cercano y a A como el extremo lejano, resulta

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 0 = \frac{EI}{2}\theta_B \quad (2)$$

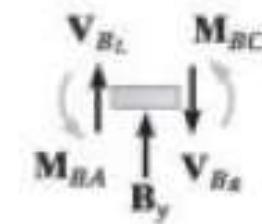
De manera similar, para el claro BC se tiene

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] - 7.2 = \frac{2EI}{3}\theta_B - 7.2 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 10.8 = \frac{EI}{3}\theta_B + 10.8 \quad (4)$$

Ecuaciones de equilibrio. Las cuatro ecuaciones anteriores contienen cinco incógnitas. La quinta ecuación necesaria proviene de la condición del equilibrio de momentos en el soporte B. En la figura 11-10c se muestra el diagrama de cuerpo libre de un segmento de la viga en B. Aquí se supone que M_{BA} y M_{BC} actúan en dirección positiva para ser consistentes con las ecuaciones de pendiente-deflexión.* Las cortantes en la viga contribuyen con un momento insignificante alrededor de B puesto que el segmento tiene una longitud diferencial. Por lo tanto,

$$\zeta + \sum M_B = 0; \quad M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (5)$$



Para resolver, sustituya las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (5), de donde se obtiene

$$\theta_B = \frac{6.17}{EI}$$

Si se sustituye de nuevo este valor en las ecuaciones (1)-(4) resulta

$$M_{AB} = 1.54 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

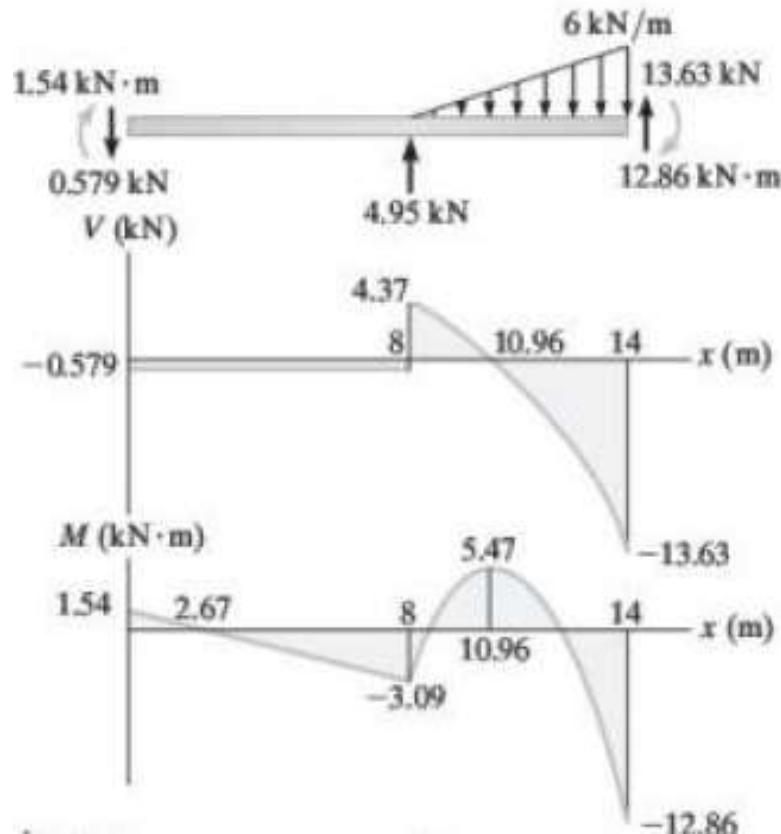
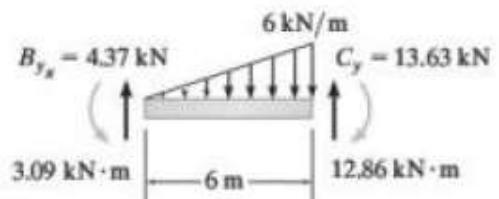
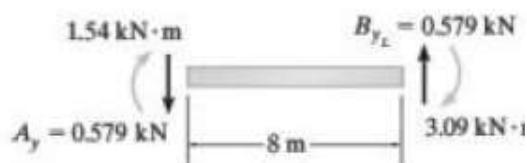
$$M_{BA} = 3.09 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = -3.09 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

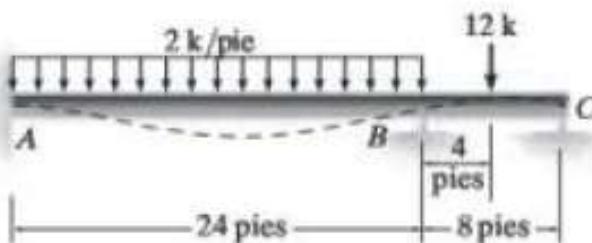
$$M_{CB} = 12.86 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

El valor negativo para M_{BC} indica que este momento actúa en sentido antihorario sobre la viga, no en sentido horario como se mostró en la figura 11-10b.

Con base en estos resultados, las fuerzas cortantes en los claros extremos se determinan a partir de las ecuaciones de equilibrio, figura 11-10d. El diagrama de cuerpo libre de toda la viga y los diagramas de fuerza cortante y de momento se muestran en la figura 11-10e.



Dibuja los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga que se muestra en la figura 11-1a. EI es constante.



SOLUCIÓN

Ecuaciones de pendiente-deflexión. En este problema deben considerarse dos claros. La ecuación 11-8 se aplica al claro *AB*. Se puede usar la ecuación 11-10 para el claro *BC* porque el *extremo C* está sobre un rodillo. Si se usan las fórmulas para los FEM tabuladas que se encuentran en el interior de la contraportada, se tiene

$$(\text{FEM})_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{1}{12}(2)(24)^2 = -96 \text{ k}\cdot\text{pie}$$

$$(\text{FEM})_{BA} = \frac{wL^2}{12} = \frac{1}{12}(2)(24)^2 = 96 \text{ k}\cdot\text{pie}$$

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{3PL}{16} = -\frac{3(12)(8)}{16} = -18 \text{ k}\cdot\text{pie}$$

Observe que $(\text{FEM})_{AB}$ y $(\text{FEM})_{BC}$ son negativos, puesto que actúan en sentido antihorario sobre la viga en *A* y *B*, respectivamente. Además, como los apoyos no se asientan, $\psi_{AB} = \psi_{BC} = 0$. Al aplicar la ecuación 11-8 para el claro *AB* y tomar en cuenta que $\theta_A = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} M_N &= 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N \\ M_{AB} &= 2E\left(\frac{I}{24}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] - 96 \\ M_{AB} &= 0.08333EI\theta_B - 96 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} M_{BA} &= 2E\left(\frac{I}{24}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 96 \\ M_{BA} &= 0.1667EI\theta_B + 96 \end{aligned} \quad (2)$$

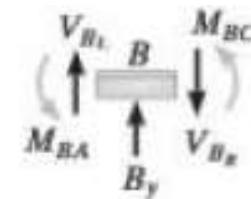
Si se aplica la ecuación 11-10 con *B* como el extremo cercano y *C* como el extremo lejano, resulta

$$\begin{aligned} M_N &= 3E\left(\frac{I}{L}\right)(\theta_N - \psi) + (\text{FEM})_N \\ M_{BC} &= 3E\left(\frac{I}{8}\right)(\theta_B - 0) - 18 \\ M_{BC} &= 0.375EI\theta_B - 18 \end{aligned} \quad (3)$$

Recuerde que la ecuación 11-10 *no* se aplica de *C* (extremo cercano) a *B* (extremo lejano).

Ecuaciones de equilibrio. Las tres ecuaciones anteriores contienen cuatro incógnitas. La cuarta ecuación necesaria proviene de las condiciones de equilibrio en el soporte *B*. En la figura 11-11b se muestra el diagrama de cuerpo libre. Se tiene

$$\downarrow + \sum M_B = 0; \quad M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (4)$$



Para resolver, sustituya las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (4), de donde resulta

$$\theta_B = -\frac{144.0}{EI}$$

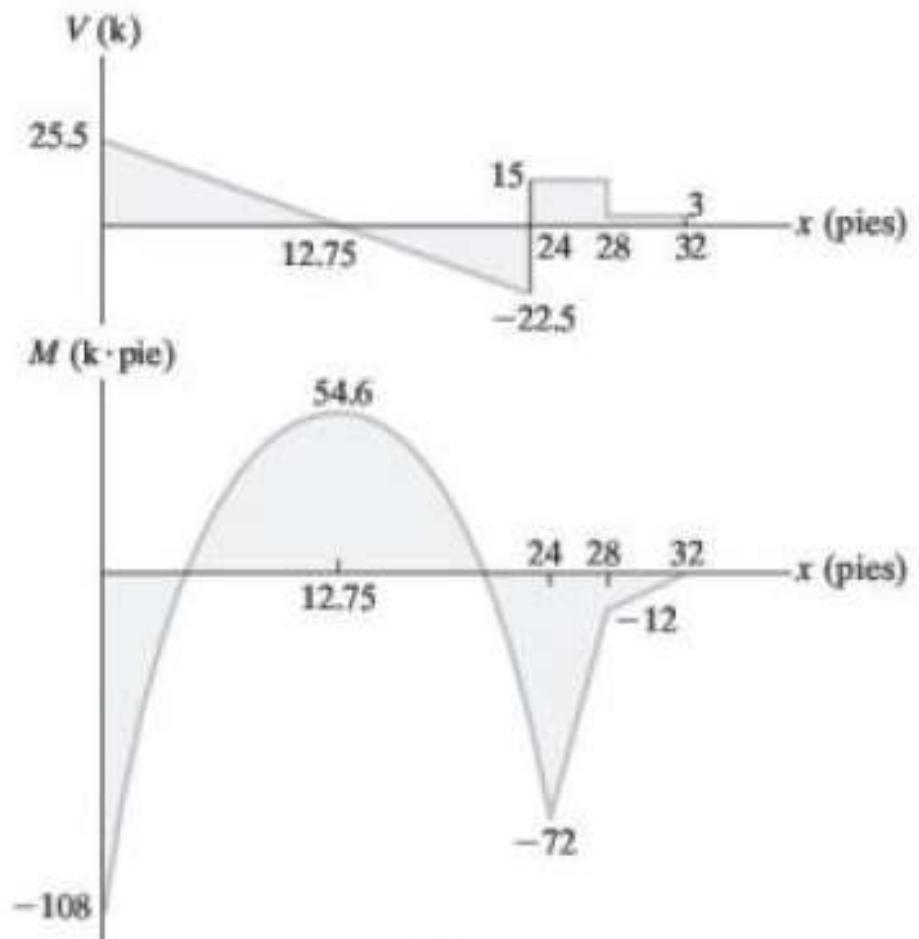
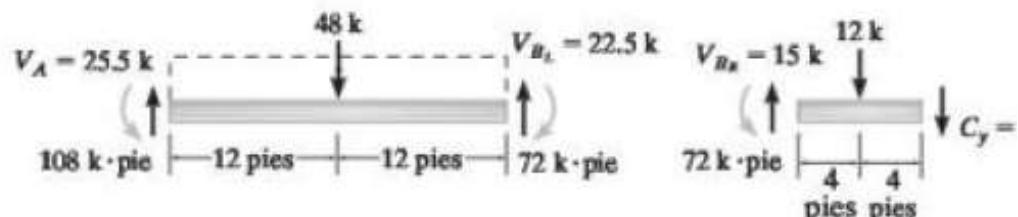
Como θ_B es negativo (sentido antihorario), la curva elástica para la viga se dibujó correctamente en la figura 11-11a. Al sustituir θ_B en las ecuaciones (1)-(3), se obtiene

$$M_{AB} = -108.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BA} = 72.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BC} = -72.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Con base en estos datos para los momentos, se han determinado las reacciones cortantes en los extremos de los claros de la viga, según se muestra en la figura 11-11c. Los diagramas de fuerza cortante y de momento se grafican en la figura 11-11d.

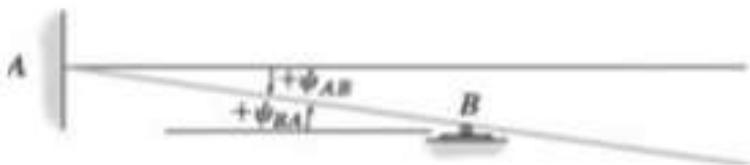


Determine el momento en *A* y *B* para la viga que se muestra en la figura 11-12a. El soporte en *B* se desplaza (asienta) 80 mm. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 5(10^6) \text{ mm}^4$.



SOLUCIÓN

Ecuaciones de pendiente-deflexión. En este problema sólo debe considerarse un claro (*AB*) puesto que el momento en M_{BC} debido a la saliente puede calcularse a partir de la estática. Como no hay carga en el claro *AB*, los FEM son iguales a cero. Como se muestra en la figura 11-12a, el desplazamiento hacia abajo (asentamiento) de *B* hace que la cuerda del claro *AB* gire en sentido horario. Por lo tanto,



$$\psi_{AB} = \psi_{BA} = \frac{0.08 \text{ m}}{4} = 0.02 \text{ rad}$$

La rigidez para *AB* es

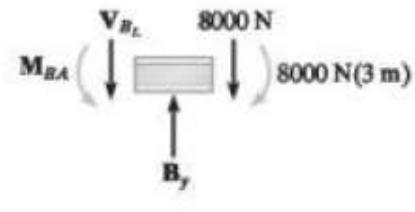
$$k = \frac{I}{L} = \frac{5(10^6) \text{ mm}^4 (10^{-12}) \text{ m}^4 / \text{mm}^4}{4 \text{ m}} = 1.25(10^{-6}) \text{ m}^3$$

Al aplicar la ecuación de pendiente-deflexión (ecuación 11-8) al claro *AB* con $\theta_A = 0$, se tiene

$$M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N$$

$$M_{AB} = 2(200(10^9) \text{ N/m}^2)[1.25(10^{-6}) \text{ m}^3][2(0) + \theta_B - 3(0.02)] + 0 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2(200(10^9) \text{ N/m}^2)[1.25(10^{-6}) \text{ m}^3][2\theta_B + 0 - 3(0.02)] + 0 \quad (2)$$



Ecuaciones de equilibrio. El diagrama de cuerpo libre de la viga en el soporte *B* se muestra en la figura 11-12c. El equilibrio de momentos requiere que

$$\downarrow + \sum M_B = 0; \quad M_{BA} - 8000 \text{ N}(3 \text{ m}) = 0$$

Si se sustituye la ecuación (2) en esta ecuación resulta

$$1(10^6)\theta_B - 30(10^3) = 24(10^3)$$

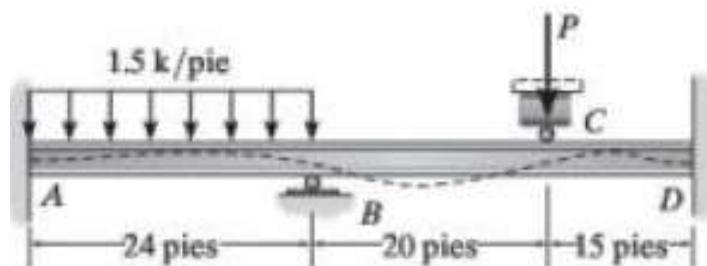
$$\theta_B = 0.054 \text{ rad}$$

Por lo tanto, a partir de las ecuaciones (1) y (2)

$$M_{AB} = -3.00 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA} = 24.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Determine los momentos internos en los soportes de la viga que se muestra en la figura 11-13a. El soporte de rodillo en *C* es empujado hacia abajo 0.1 pies por la fuerza *P*. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi e $I = 1500$ pulg 4 .

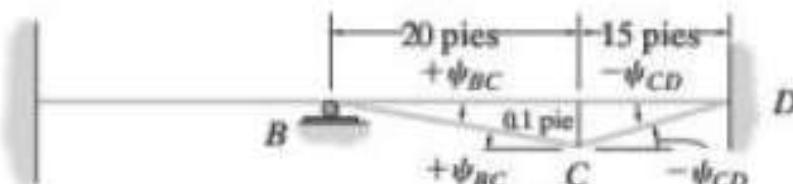


SOLUCIÓN

Ecuaciones de pendiente-deflexión. En este problema deben considerarse tres claros. Se aplica la ecuación 11-8 porque los soportes en los extremos *A* y *D* están fijos. Además, sólo el claro *AB* tiene FEM.

$$(FEM)_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{1}{12}(1.5)(24)^2 = -72.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{12} = \frac{1}{12}(1.5)(24)^2 = 72.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$



Como se muestra en la figura 11-13b, el desplazamiento (o asentamiento) del soporte *C* ocasiona que ψ_{BC} sea positivo, puesto que la cuerda del claro *BC* gira en sentido horario, y ψ_{CD} sea negativo, porque la cuerda del claro *CD* gira en sentido antihorario. Por lo tanto,

$$\psi_{BC} = \frac{0.1 \text{ pie}}{20 \text{ pies}} = 0.005 \text{ rad} \quad \psi_{CD} = -\frac{0.1 \text{ pie}}{15 \text{ pies}} = -0.00667 \text{ rad}$$

Asimismo, al expresar las unidades de la rigidez en pies, se tiene

$$k_{AB} = \frac{1500}{24(12)^4} = 0.003014 \text{ pies}^3 \quad k_{BC} = \frac{1500}{20(12)^4} = 0.003617 \text{ pies}^3$$

$$k_{CD} = \frac{1500}{15(12)^4} = 0.004823 \text{ pies}^3$$

Si se observa que $\theta_A = \theta_D = 0$ puesto que *A* y *D* son soportes fijos, y se aplica la ecuación pendiente-deflexión (ecuación 11-8) dos veces a cada claro, resulta

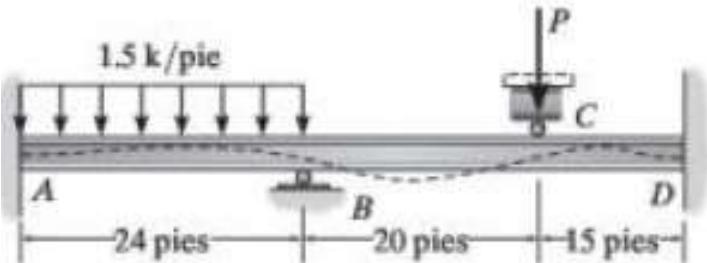
Para el claro *AB*:

$$M_{AB} = 2[29(10^3)(12)^2](0.003014)[2(0) + \theta_B - 3(0)] - 72 \quad (1)$$

$$M_{AB} = 25 173.6\theta_B - 72$$

$$M_{BA} = 2[29(10^3)(12)^2](0.003014)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 72 \quad (2)$$

$$M_{BA} = 50 347.2\theta_B + 72$$



Para el claro BC :

$$M_{BC} = 2[29(10^3)(12)^2](0.003617)[2\theta_B + \theta_C - 3(0.005)] + 0 \\ M_{BC} = 60416.7\theta_B + 30208.3\theta_C - 453.1 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2[29(10^3)(12)^2](0.003617)[2\theta_C + \theta_B - 3(0.005)] + 0 \\ M_{CB} = 60416.7\theta_C + 30208.3\theta_B - 453.1 \quad (4)$$

Para el claro CD :

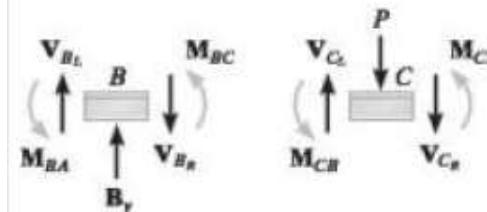
$$M_{CD} = 2[29(10^3)(12)^2](0.004823)[2\theta_C + 0 - 3(-0.00667)] + 0 \\ M_{CD} = 80555.6\theta_C + 0 + 805.6 \quad (5)$$

$$M_{DC} = 2[29(10^3)(12)^2](0.004823)[2(0) + \theta_C - 3(-0.00667)] + 0 \\ M_{DC} = 40277.8\theta_C + 805.6 \quad (6)$$

Ecuaciones de equilibrio. Estas seis ecuaciones contienen ocho incógnitas. Si se escriben las ecuaciones de equilibrio de momentos para los soportes en B y C , figura 10-13c, se tiene

$$\downarrow + \sum M_B = 0; \quad M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$

$$\downarrow + \sum M_C = 0; \quad M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (8)$$



Para encontrar la solución se sustituyen las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (7), y las ecuaciones (4) y (5) en la ecuación (8). De esto resulta,

$$\theta_C + 3.667\theta_B = 0.01262 \\ -\theta_C - 0.214\theta_B = 0.00250$$

Por lo tanto,

$$\theta_B = 0.00438 \text{ rad} \quad \theta_C = -0.00344 \text{ rad}$$

El valor negativo de θ_C indica un giro en sentido inverso de la tangente en C , figura 11-13a. Al sustituir estos valores en las ecuaciones (1)-(6) se obtiene

$$M_{AB} = 38.2 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{BA} = 292 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{BC} = -292 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

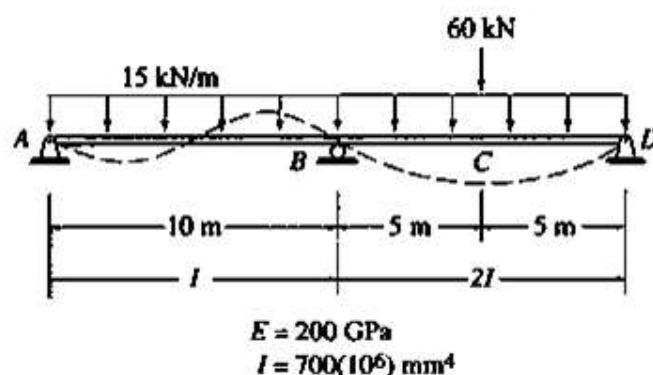
$$M_{CB} = -529 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CD} = 529 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{DC} = 667 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

Aplique estos momentos en los extremos a los claros BC y CD y demuestre que $V_{C_L} = 41.05 \text{ k}$, $V_{C_R} = -79.73 \text{ k}$ y que la fuerza sobre el rodillo es $P = 121 \text{ k}$.

Determine las reacciones y los momentos en el extremo del elemento para la viga continua mostrada en la Fig. 15.7(a) por el método de la pendiente-deflexión.



Grado de libertad. θ_B

Momentos de empotre

$$\text{FEM}_{AB} = \frac{15(10)^2}{12} = 125 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad o \quad +125 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{FEM}_{BA} = 125 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad o \quad -125 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{FEM}_{BD} = \frac{60(10)}{8} + \frac{15(10)^2}{12} = 200 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad o \quad +200 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{FEM}_{DB} = 200 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad o \quad -200 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Ecuaciones de la pendiente-deflexión. Dado que ambos elementos de la viga tienen un extremo articulado, usaremos la Ec. (15.15) para obtener las ecuaciones de la pendiente-deflexión de ambos elementos. Así,

$$M_{AB} = 0$$

$$M_{BA} = \frac{3EI}{10}(\theta_B) + \left(-125 - \frac{125}{2}\right) = 0.3EI\theta_B - 187.5$$

$$M_{BD} = \frac{3EI(2J)}{10}(\theta_B) + \left(200 + \frac{200}{2}\right) = 0.6EI\theta_B + 300$$

$$M_{DB} = 0$$

Ecuaciones de equilibrio. Considerando el equilibrio de momentos del cuerpo libre en el nodo B (Fig. 15.7(b)), obtenemos la ecuación de equilibrio

$$M_{BA} + M_{BD} = 0 \quad (3)$$

$$A \leftarrow M_{AB} = 0 \quad \left(\frac{B}{\Delta} \right) M_{BD} \quad \left(\frac{M_{DB}}{\Delta} \right)_D = 0$$

Rotación en los nodos. Para determinar las incógnitas de la rotación en los nodos θ_B , sustituimos las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) y (2)) en la ecuación de equilibrio (Ec. (3)) para obtener

$$(0.3EI\theta_B - 187.5) + (0.6EI\theta_B + 300) = 0$$

o

$$0.9EI\theta_B = -112.5$$

De la cual

$$EI\theta_B = -125 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

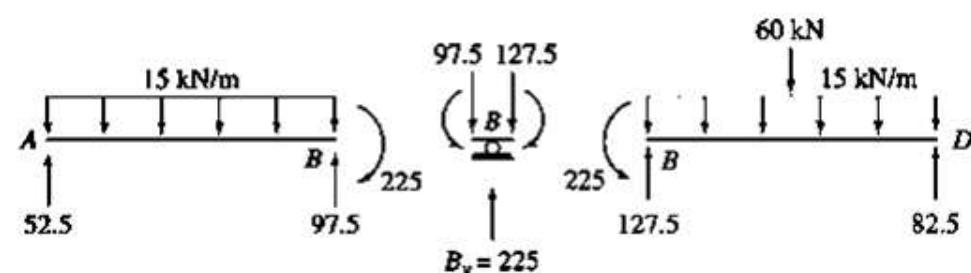
Momentos en el extremo del elemento. Los momentos en el extremo del elemento se pueden determinar sustituyendo los valores numéricos de $EI\theta_B$ en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) y (2)). Así,

$$M_{BA} = 0.3(-125) - 187.5 = -225 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad o \quad 225 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

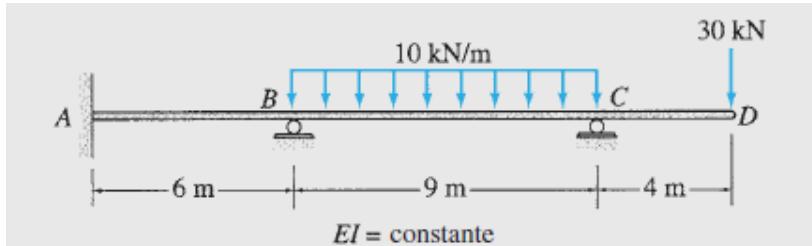
$$M_{BD} = 0.6(-125) + 300 = 225 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Respuesta

Respuesta

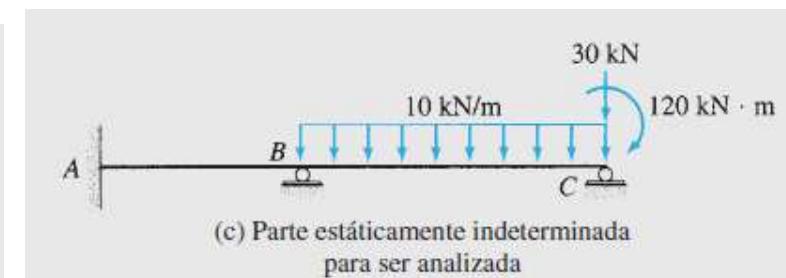
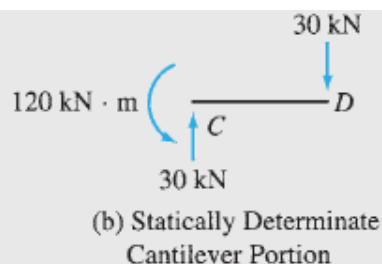


Determine las reacciones y los momentos en el extremo de elemento para la viga continua mostrada en la Fig. 15.8(a) por el método de la pendiente-deflexión.



Solución

Debido a que el momento y el cortante en el extremo C del elemento en cantilever se pueden calcular directamente aplicando las ecuaciones de equilibrio (ver Fig. 15.8(b)), no es necesario incluir este elemento en el análisis. Por lo tanto, solo la parte indeterminada AC de la viga, mostrada en la Fig. 15.8(c), necesita ser analizada. Tenga en cuenta que, como se muestra en esta figura, el momento de 120 kN·m y las fuerzas ejercidas de 30 kN en el nodo C por el cantilever CD se debe de tomar en cuenta en el análisis.



Grado de libertad. De la Fig. 15.8(c) podemos ver que los nodos B y C están libres para la rotación, por lo tanto la estructura a analizar tiene dos grados de libertad, los cuales son las incógnitas de las rotaciones de los nodos θ_B y θ_C .

Momentos de empotre

$$\text{FEM}_{AB} = \text{FEM}_{BA} = 0$$

$$\text{FEM}_{AC} = \frac{10(9)^2}{12} = 67.5 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad o \quad +67.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\text{FEM}_{CB} = 67.5 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad o \quad -67.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Ecuaciones de la pendiente-deflexión. Aplicando la Ec. (15.9) a los elementos AB y BC, escribimos las ecuaciones de la pendiente-deflexión:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{6}(\theta_B) = 0.333EI\theta_B \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{6}(2\theta_B) = 0.667EI\theta_B \quad (2)$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{9}(2\theta_B + \theta_C) + 67.5 = 0.444EI\theta_B + 0.222EI\theta_C + 67.5 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{9}(2\theta_C + \theta_B) - 67.5 = 0.222EI\theta_B + 0.444EI\theta_C - 67.5 \quad (4)$$

Ecuaciones de equilibrio. Considerando el momento en el equilibrio de los cuerpos libres de los nodos B y C (Fig. 15.8(d)), obtenemos las ecuaciones de equilibrio:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (5)$$

$$M_{CB} + 120 = 0 \quad (6)$$



Rotaciones de los nodos. Sustituyendo las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (2) a la (4)) en las ecuaciones de equilibrio (Ecs. (5) y (6)), resulta

$$1.111EI\theta_B + 0.222EI\theta_C = -67.5 \quad (7)$$

$$0.222EI\theta_B + 0.444EI\theta_C = -52.5 \quad (8)$$

Resolviendo las Ecs. (7) y (8) de forma simultánea, determinamos los valores de $EI\theta_B$ y $EI\theta_C$ como

$$EI\theta_B = -41.25 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EI\theta_C = -97.62 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Momentos en el extremo del elemento. Los momentos en el extremo del elemento se pueden calcular sustituyendo los valores numéricos de $EI\theta_s$ y $EI\theta_c$ en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (4)):

$$M_{AB} = 0.333(-41.25) = -13.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 13.7 \text{ kN} \cdot \text{m}) \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BA} = 0.667(-41.25) = -27.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 27.5 \text{ kN} \cdot \text{m}) \quad \text{Respuesta}$$

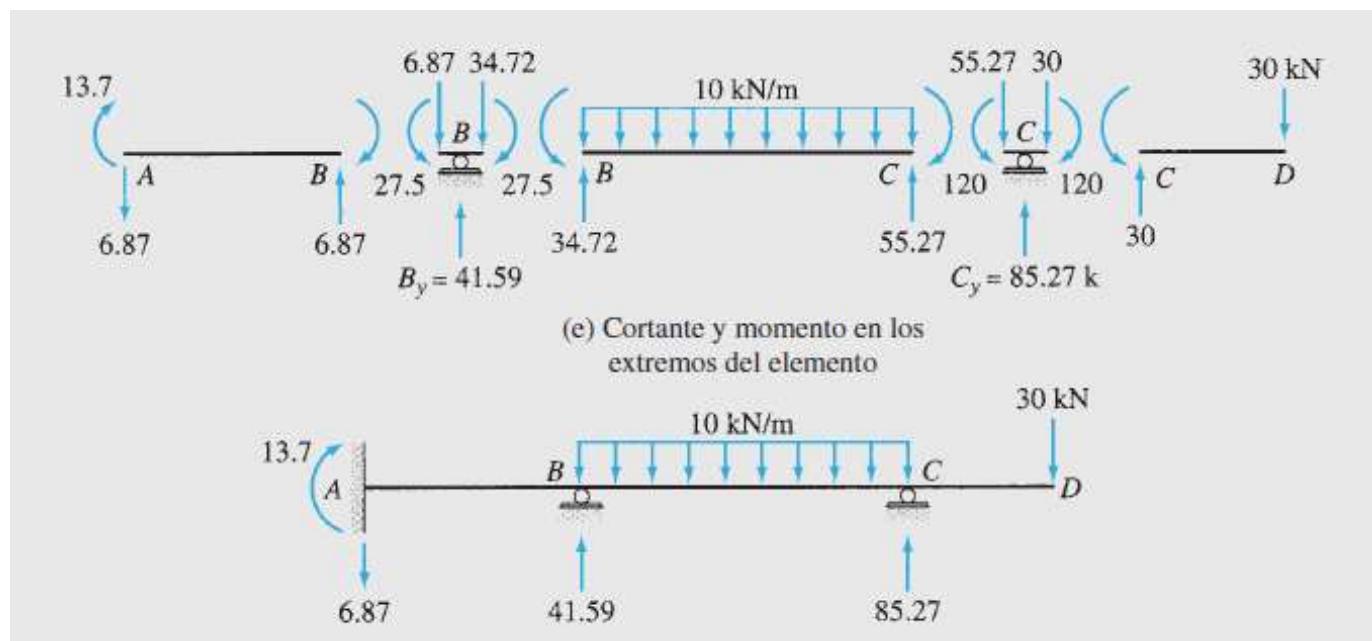
$$\begin{aligned} M_{BC} &= 0.444(-41.25) + 0.222(-97.62) + 67.5 \\ &= 27.5 \text{ kN} \cdot \text{m}) \quad \text{Respuesta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{CB} &= 0.222(-41.25) + 0.444(-97.62) - 67.5 \\ &= -120 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 120 \text{ kN} \cdot \text{m}) \quad \text{Respuesta} \end{aligned}$$

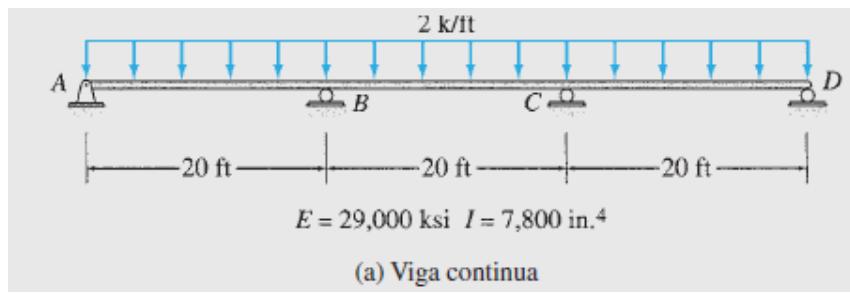
Tenga en cuenta que los valores numéricos de M_{AB} , M_{AC} y M_{CD} satisfacen las ecuaciones de equilibrio (Ecs. (5) y (6)).

Cortante en el extremo del elemento y reacciones en los apoyos. Ver las Figs. 15.8(e) y (f). Respuesta

Comprobación del equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se cumplen.



Determine los momentos del extremo del elemento y las reacciones de la viga de cuatro claros continuos mostrada en la Fig. 15.10(a) debidas a la carga uniformemente repartida, y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga continua de la Fig. 15.9(a), debido a un carga uniformemente distribuida y a un asentamiento de $\frac{5}{8}$ in en B y de $1\frac{1}{2}$ in en C, y de $\frac{3}{4}$ in en D. Utilice el método de la pendiente-deflexión.



Solución

Grados de libertad. A pesar de que los cuatro nodos de la viga están libres para presentar rotaciones, podemos eliminar las rotaciones de los apoyos simples en los extremos A y D del análisis usando las ecuaciones de la pendiente-deflexión modificada para los elementos AB y CD, respectivamente. Por lo tanto, el análisis solo involucrará las dos incógnitas de la rotación de los nodos θ_B y θ_C .

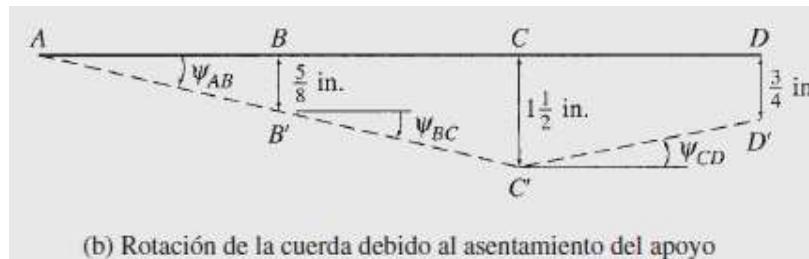
continúa

Momentos de empotre. Debido a que no hay cargas externas que actúen en la viga, los momentos de empotre son cero.

$$FEM_{AB} = FEM_{BC} = FEM_{CD} = \frac{2(20)^2}{12} = 66.7 \text{ k-ft } \quad o \quad +66.7 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BA} = FEM_{CB} = FEM_{DC} = 66.7 \text{ k-ft } \quad o \quad -66.7 \text{ k-ft}$$

Rotaciones de la cuerda. El asentamiento especificado se muestra en la Fig. 15.10(b) en una escala exagerada. La línea punteada inclinada en esta figura indica la cuerda (no las curvas clásicas) de los elementos en la posición deformada. Se puede ver de esta figura que debido a que el apoyo A no tiene ningún asentamiento pero el apoyo B se asienta $\frac{5}{8}$ in, el asen-



tamiento relativo entre los dos extremos del elemento AB es $\frac{5}{8}$ in = 0.0521 ft. Debido a que la longitud del elemento AB es de 20 ft, la rotación de la cuerda del elemento AB es

$$\psi_{AB} = -\frac{0.0521}{20} = -0.0026$$

Aquí el signo negativo ha sido asignado al valor de ψ_{AB} para indicar que su dirección es en sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la Fig. 15.10(b). La rotación de la cuerda del elemento BC se puede calcular de manera similar usando los asentamientos de los apoyos B y C. De la Fig. 15.10 (b) observamos que el asentamiento relativo entre los extremos del elemento BC es $1\frac{1}{2}$ in - $\frac{5}{8}$ in = 0.875 in = 0.0729 ft, y así sucesivamente.

$$\psi_{BC} = -\frac{0.0729}{20} = -0.00365$$

De manera similar, la rotación de la cuerda del elemento CD es

$$\psi_{CD} = \frac{1.5 - 0.75}{(12)(20)} = 0.00313$$

Ecuaciones de la pendiente-deflexión

$$M_{AB} = 0$$

$$M_{BA} = \frac{3EI}{20}(\theta_B + 0.0026) - 100 = 0.15EI\theta_B + 0.00039EI - 100 \quad (1)$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{20} = 2\theta_B + \theta_C - 3(-0.00365) + 66.7$$

$$= 0.2EI\theta_B + 0.1EI\theta_C + 0.0011EI + 66.7 \quad (2)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{20} = 2\theta_C + \theta_B - 3(-0.00365) - 66.7$$

$$= 0.1EI\theta_B + 0.2EI\theta_C + 0.0011EI - 66.7 \quad (3)$$

$$M_{CD} = \frac{3EI}{20}(\theta_C - 0.00313) + 100 = 0.15EI\theta_C - 0.00047EI + 100 \quad (4)$$

$$M_{DC} = 0$$

Respuesta

Momentos de empotre. Para calcular los momentos en el extremo del elemento, sustituimos los valores numéricos de $EI\theta_B$ y $EI\theta_C$ nuevamente en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (4)) para obtener

$$M_{BA} = -427.7 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 427.7 \text{ k-ft} \quad \text{(})$$

$$M_{BC} = 427.7 \text{ k-ft} \quad \text{(})$$

$$M_{CB} = 808 \text{ k-ft} \quad \text{(})$$

$$M_{CD} = -808 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 808 \text{ k-ft} \quad \text{(})$$

Respuesta

Respuesta

Respuesta

Respuesta

Respuesta

Cortante en el extremo y reacciones en los apoyos. Ver las Figs. 15.10(d) y (e).

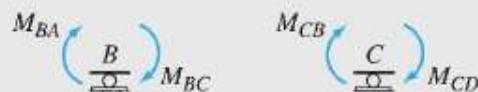
Comprobación del equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se cumplen.

Respuesta

Ecuaciones de equilibrio. Ver la Fig. 15.10(c).

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (5)$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (6)$$



(c) Diagrama de cuerpo libre de los nodos B y C

Rotaciones del nodo. Sustituyendo las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (4)) en las ecuaciones de equilibrio (Ecs. (5) y (6)), obtenemos

$$0.35EI\theta_B + 0.1EI\theta_C = -0.00149EI + 33.3$$

$$0.1EI\theta_B + 0.35EI\theta_C = -0.00063EI - 33.3$$

Sustituyendo $EI = (29,000)(7,800)/(12)^2 \text{ k} - \text{ft}^2$ en el lado derecho de la igualdad de las ecuaciones anteriores, resulta

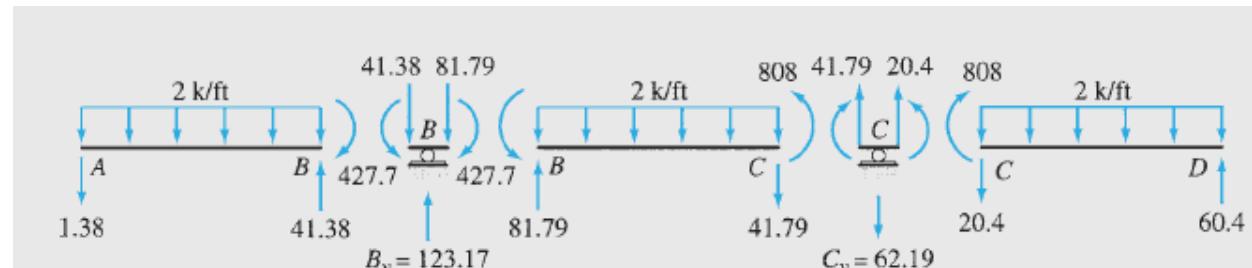
$$0.35EI\theta_B + 0.1EI\theta_C = -2,307.24 \quad (7)$$

$$0.1EI\theta_B + 0.35EI\theta_C = -1,022.93 \quad (8)$$

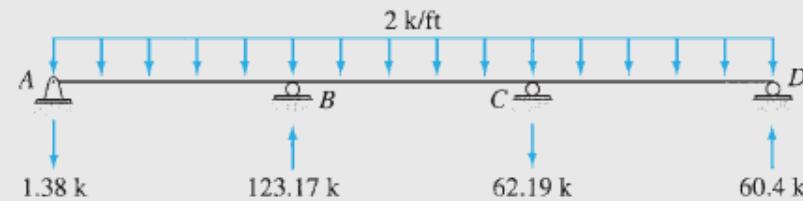
Resolviendo las Ecs. (7) y (8) simultáneamente, determinamos los valores de $EI\theta_B$ y $EI\theta_C$ como

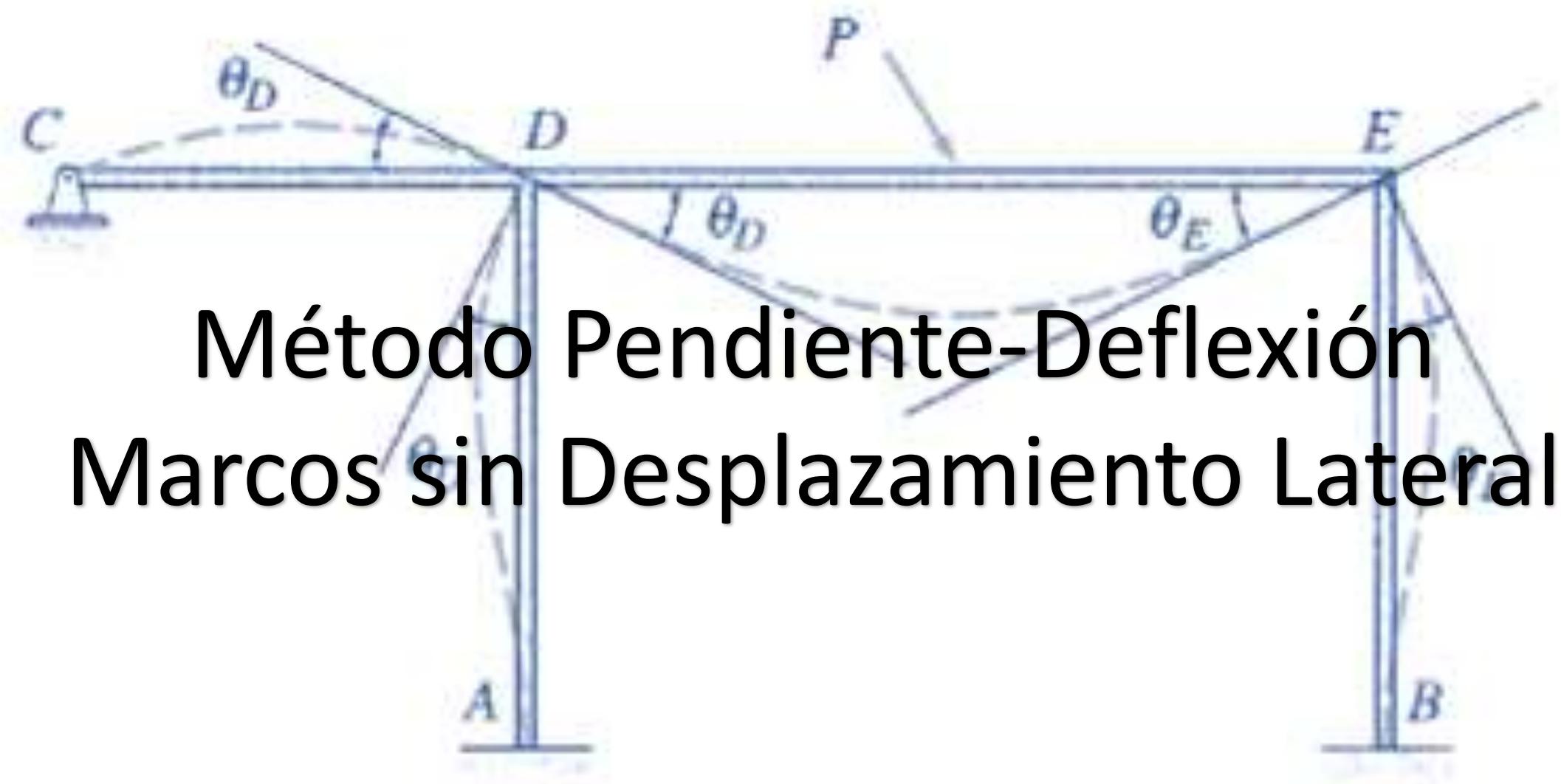
$$EI\theta_B = -6,268.81 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\theta_C = -1,131.57 \text{ k-ft}^2$$

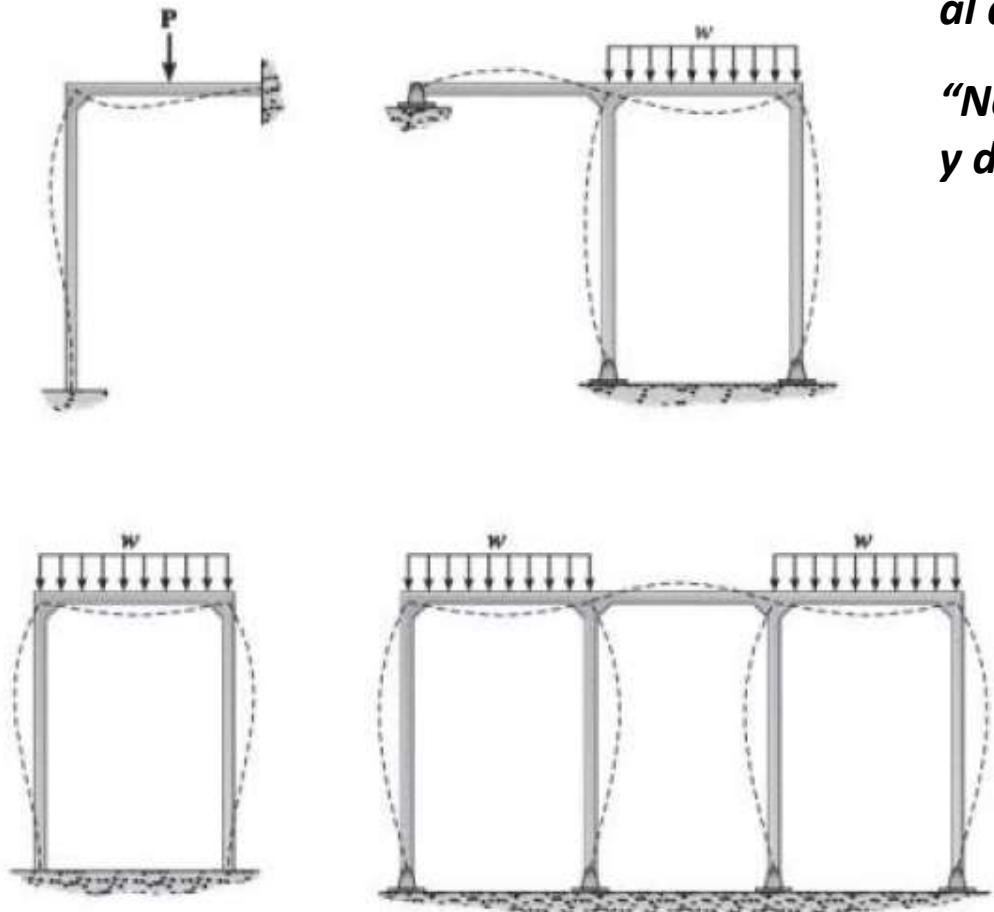


(d) Cortantes y momentos en el extremo del elemento



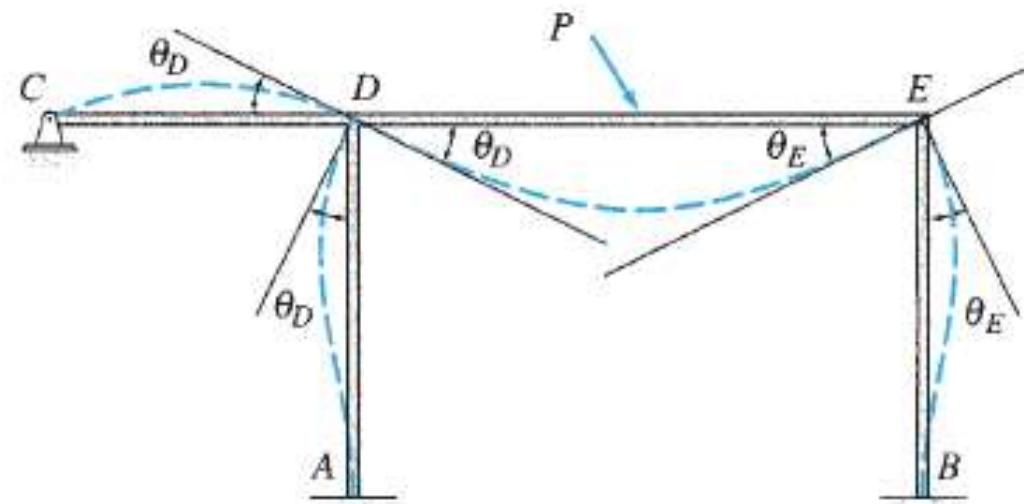


Marcos sin Desplazamiento Lateral

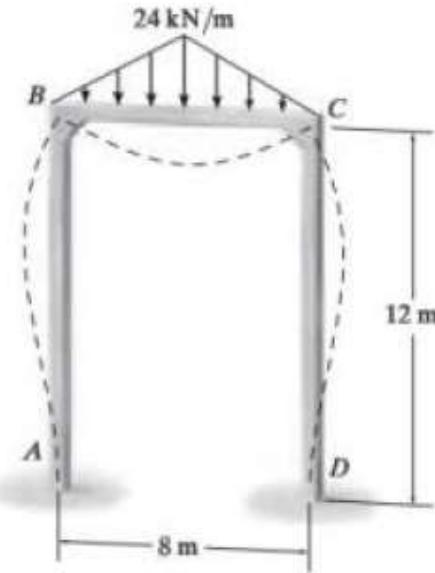


“Un marco no se moverá, o no se desplazará a la derecha o a la izquierda, si se encuentra debidamente restringido al desplazamiento lateral.”

“No habrá desplazamiento también si hay simetría de carga y de geometría”



Determine los momentos en cada junta del marco que se muestra en la figura 11-16a, EI es constante.



SOLUCIÓN

Ecuaciones de pendiente-deflexión. En este problema deben considerarse tres claros: AB , BC y CD . Como los claros están fijamente apoyados en A y D , se aplica la ecuación 11-8 para encontrar la solución.

A partir de la tabla que se encuentra en el interior de la contraportada, los FEM para BC son

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{5wL^2}{96} = -\frac{5(24)(8)^2}{96} = -80 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(\text{FEM})_{CB} = \frac{5wL^2}{96} = \frac{5(24)(8)^2}{96} = 80 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Observe que $\theta_A = \theta_D = 0$ y que $\phi_{AB} = \phi_{BC} = \phi_{CD} = 0$, puesto que no se producirá un desplazamiento lateral.

Al aplicar la ecuación 11-8, se tiene

$$M_N = 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 0$$

$$M_{AB} = 0.1667EI\theta_B \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 0$$

$$M_{BA} = 0.333EI\theta_B \quad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3(0)] - 80$$

$$M_{BC} = 0.5EI\theta_B + 0.25EI\theta_C - 80 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3(0)] + 80$$

$$M_{CB} = 0.5EI\theta_C + 0.25EI\theta_B + 80 \quad (4)$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2\theta_C + 0 - 3(0)] + 0$$

$$M_{CD} = 0.333EI\theta_C \quad (5)$$

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2(0) + \theta_C - 3(0)] + 0$$

$$M_{DC} = 0.1667EI\theta_C \quad (6)$$

Ecuaciones de equilibrio. Las seis ecuaciones anteriores contienen ocho incógnitas. Las dos ecuaciones de equilibrio restantes provienen del equilibrio de momentos en las juntas *B* y *C*, figura 11-16b. Se tiene

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (8)$$

Para resolver estas ocho ecuaciones se sustituyen las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (7), y se remplazan las ecuaciones (4) y (5) en la ecuación (8). Resulta

$$0.833EI\theta_B + 0.25EI\theta_C = 80$$

$$0.833EI\theta_C + 0.25EI\theta_B = -80$$

Al resolver simultáneamente se obtiene

$$\theta_B = -\theta_C = \frac{137.1}{EI}$$

la cual concuerda con la manera en que se deforma el marco, como se muestra en la figura 11-16a. Si se sustituye en las ecuaciones (1)-(6), se tiene

$$M_{AB} = 22.9 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{BA} = 45.7 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{Resp.}$$

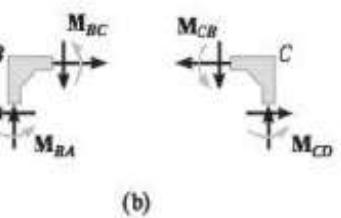
$$M_{BC} = -45.7 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CB} = 45.7 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{Resp.}$$

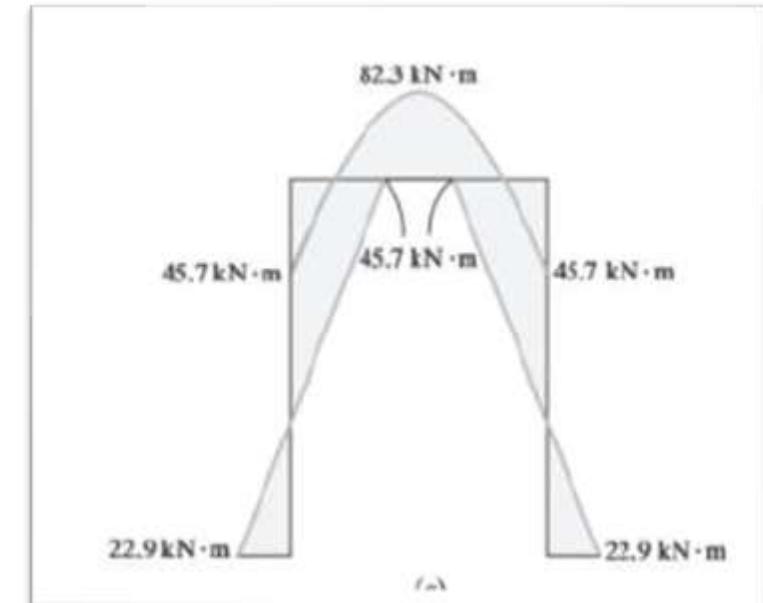
$$M_{CD} = -45.7 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{DC} = -22.9 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{Resp.}$$

Con base en estos resultados pueden determinarse las reacciones en los extremos de cada elemento a partir de las ecuaciones de equilibrio y es posible dibujar el diagrama de momento para el marco, figura 11-16c.



(b)



$$\begin{aligned} \text{Diagram: } & \text{Left column height } h = 8 \text{ m}, \text{ width } b = 8 \text{ m}, \text{ load } q = 24 \text{ kN/m} \\ \text{Equation: } & R_A = \frac{\frac{1}{2}(24)(8)}{2} = 48 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$q = mx$$

$$q = \frac{24}{4}x = 6x$$

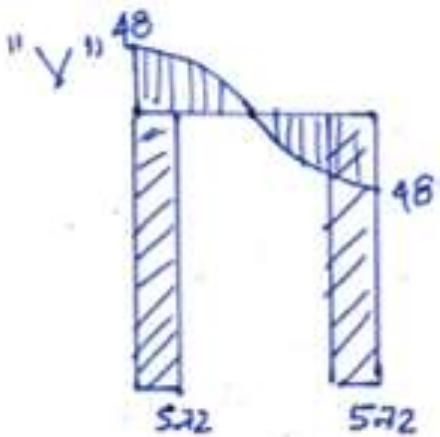
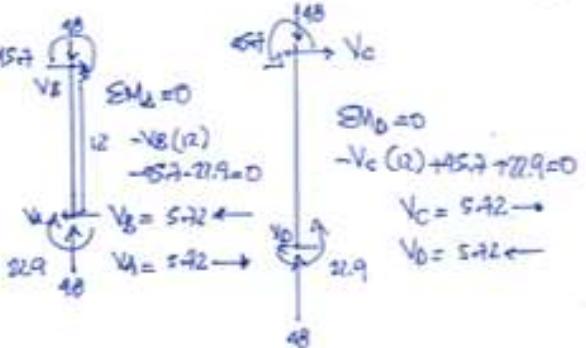
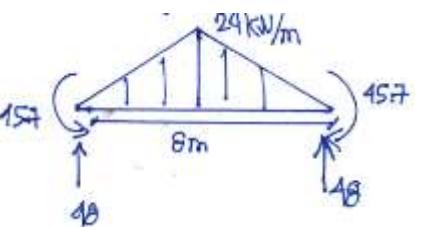
$$v = -\frac{6x^2}{2} + 48$$

$$M = -\frac{3x^3}{3} + 48x + M_0$$

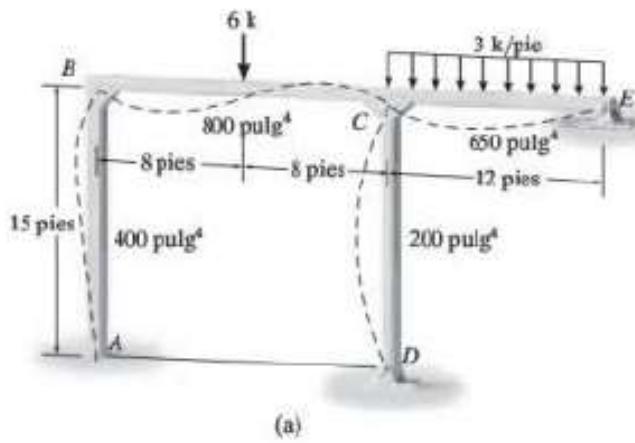
$$M = -x^3 + 48x - 45.7$$

$$x = 4 \text{ m}$$

$$M = 82.3 \text{ kN/m}$$



Determine los momentos internos en cada junta de la estructura que se muestra en la figura 11-17a. El momento de inercia para cada elemento se da en la figura. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi.



SOLUCIÓN

Ecuaciones de pendiente-deflexión. En este problema deben considerarse cuatro claros. Se aplica la ecuación 11-8 a los claros AB y BC , y la ecuación 11-10 a CD y CE , porque los extremos en D y E están articulados.

Si se calculan las rigideces de los elementos, se tiene

$$k_{AB} = \frac{400}{15(12)^4} = 0.001286 \text{ pies}^3 \quad k_{CD} = \frac{200}{15(12)^4} = 0.000643 \text{ pies}^3$$

$$k_{BC} = \frac{800}{16(12)^4} = 0.002411 \text{ pies}^3 \quad k_{CE} = \frac{650}{12(12)^4} = 0.002612 \text{ pies}^3$$

Los FEM debidos a las cargas son

$$(FEM)_{BC} = -\frac{PL}{8} = -\frac{6(16)}{8} = -12 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{PL}{8} = \frac{6(16)}{8} = 12 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{CE} = -\frac{wL^2}{8} = -\frac{3(12)^2}{8} = -54 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Al aplicar las ecuaciones 11-8 y 11-10 a la estructura y tomar en cuenta que $\theta_A = 0$, $\psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = \psi_{CE} = 0$ dado que no se produce desplazamiento lateral, se tiene

$$\begin{aligned} M_N &= 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N \\ M_{AB} &= 2[29(10^3)(12)^2](0.001286)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$M_{AB} = 10740.7\theta_B$$

$$M_{BA} = 2[29(10^3)(12)^2](0.001286)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 0$$

$$M_{BA} = 21481.5\theta_B \quad (2)$$

$$M_{BC} = 2[29(10^3)(12)^2](0.002411)[2\theta_B + \theta_C - 3(0)] - 12$$

$$M_{BC} = 40277.8\theta_B + 20138.9\theta_C - 12 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2[29(10^3)(12)^2](0.002411)[2\theta_C + \theta_B - 3(0)] + 12$$

$$M_{CB} = 20138.9\theta_B + 40277.8\theta_C + 12 \quad (4)$$

$$M_N = 3Ek(\theta_N - \psi) + (\text{FEM})_N$$

$$M_{CD} = 3[29(10^3)(12)^2](0.000643)[\theta_C - 0] + 0 \quad (5)$$

$$M_{CD} = 8055.6\theta_C$$

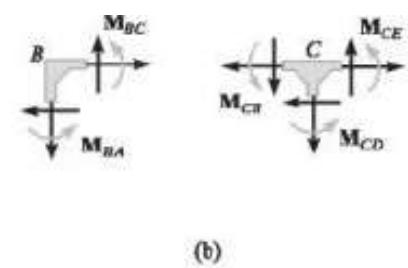
$$M_{CE} = 3[29(10^3)(12)^2](0.002612)[\theta_C - 0] - 54$$

$$M_{CE} = 32725.7\theta_C - 54 \quad (6)$$

Ecuaciones de equilibrio. Estas seis ecuaciones contienen ocho incógnitas. Es posible escribir dos ecuaciones de equilibrio de momentos para las juntas B y C , figura 11-17b. Se obtiene

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$

$$M_{CB} + M_{CD} + M_{CE} = 0 \quad (8)$$



$$61\ 759.3\theta_B + 20\ 138.9\theta_C = 12$$

$$20\ 138.9\theta_B + 81\ 059.0\theta_C = 42$$

$$50\ 129.2\theta_B + 91\ 029.0\theta_C = 45$$

Al tener un sentido horario, estos valores tienden a distorsionar la estructura como se muestra en la figura 11-17a. Si se sustituyen estos valores en las ecuaciones (1)-(6) y se resuelve, resulta

$$M_{AB} = 0.296 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Resp.

$$M_{BA} = 0.592 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Resp.

$$M_{BC} = -0.592 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Resp.

$$M_{CB} = 33.1 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

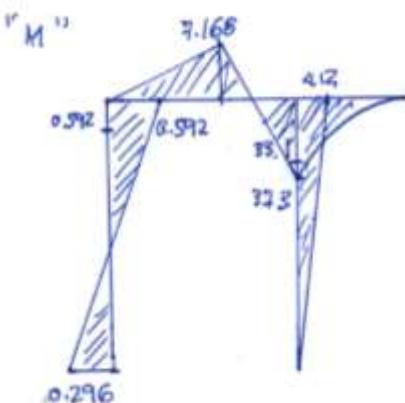
Resp.

$$M_{CD} = 4.12 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Resp.

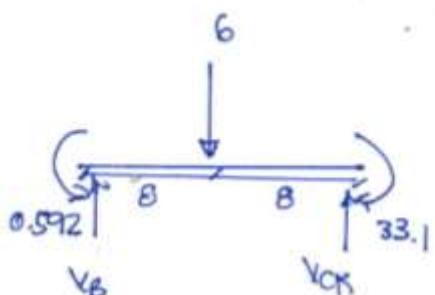
$$M_{CE} = -37.3 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Resp.



$$\begin{aligned} & 3 \text{ kip} \\ & \text{C} \quad 12 \quad \text{E} \\ & \downarrow \text{V}_{CL} \quad \uparrow \text{R}_E \\ & \sum M_E = 0 \\ & 37.3 - 3(12)(6) + R_E(12) = 0 \\ & R_E = 14.89 \text{ k} \uparrow \\ & V_{CL} = 3(12) - 14.89 = 21.11 \text{ k} \uparrow \\ & V_C = 21.11 + 5.03 = 26.14 \uparrow \end{aligned}$$

TRAMO B-C

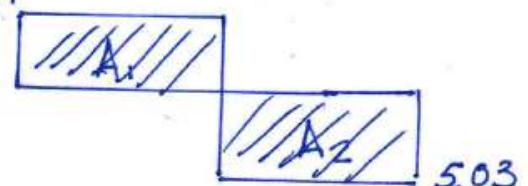


$$+\uparrow \sum M_B = 0$$

$$0.592 - 33.1 - 6(8) + V_{CR}(16) = 0$$

$$V_{CR} = 5.03$$

$$V_B = 0.97$$



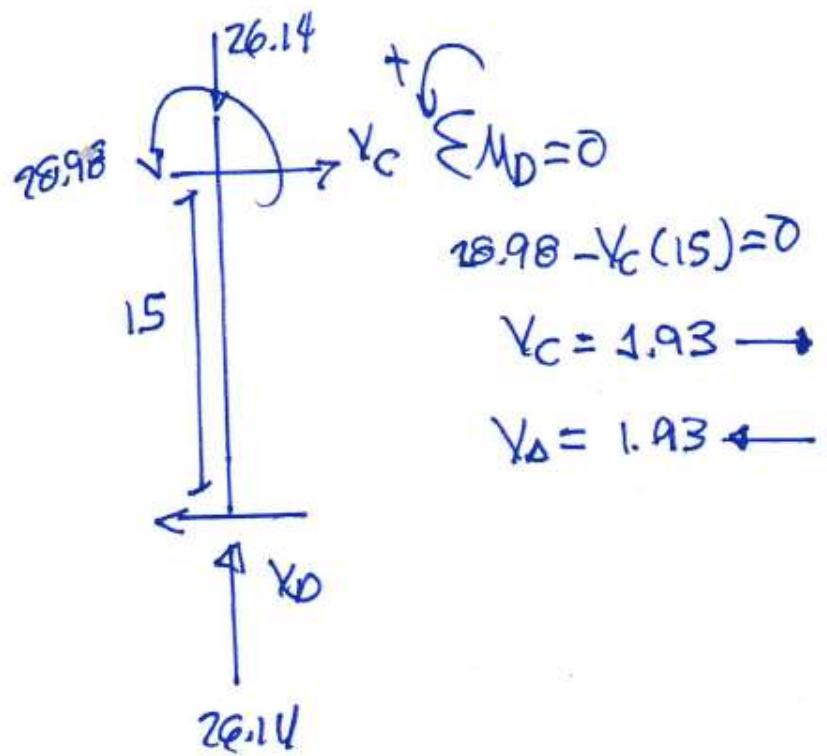
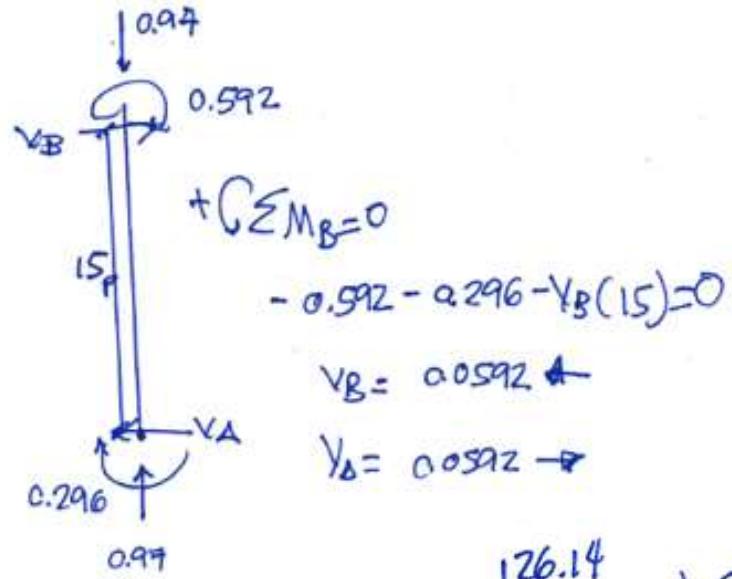
$$A_1 = 0.97(8) = 7.76$$

$$A_2 = 5.03(8) = -40.24$$

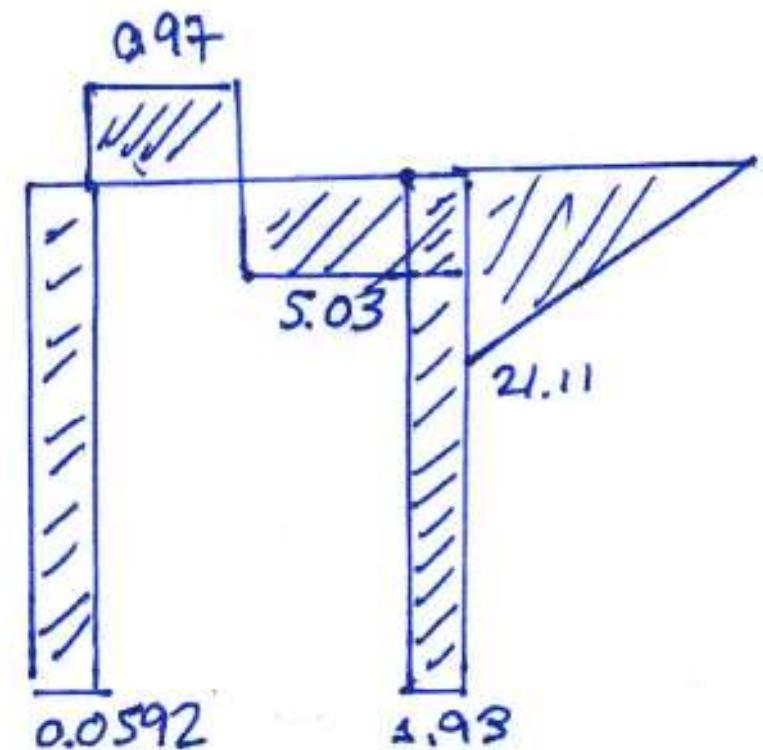
$$-0.592 + 7.76 - 40.24 = -33.1$$

M_{CB}

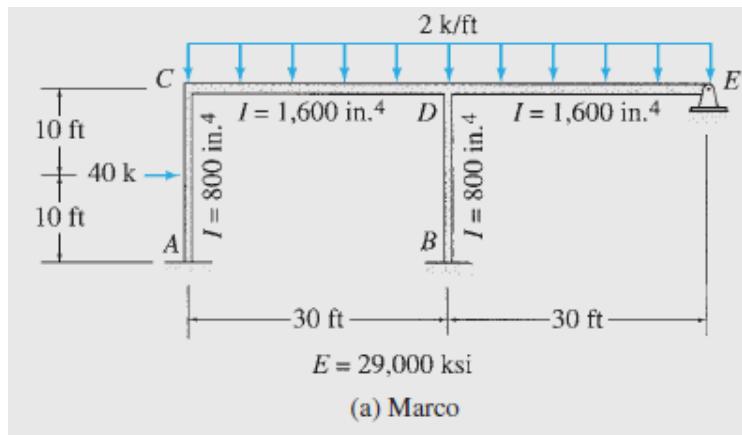
$$M_{CB} = -0.592 + 7.76 = 7.168$$



1' 2' 3'



Determine los momentos en los extremos del elemento y las reacciones del marco mostrado en la Fig. 15.13(a) mediante el método de la pendiente-deflexión.



Ecuaciones de la pendiente-deflexión. Como se indicó en la Fig. 15.13(a), los momentos de inercia de las columnas y de las vigas del marco son 800 in^4 y $1,600 \text{ in}^4$, respectivamente. Usando $I = I_{\text{columna}} = 800 \text{ in}^4$ como momento de inercia de referencia, expresamos la I_{viga} en términos de I como

$$I_{\text{viga}} = 1,600 = 2(800) = 2I$$

continúa

Después, escribimos las ecuaciones de la pendiente-deflexión usando la Ec. (15.9) para los elementos CA, BD y CD, y la Ec. (15.15) al elemento DE. Por lo tanto,

$$M_{AC} = \frac{2EI}{20}(\theta_C) + 100 = 0.1EI\theta_C + 100 \quad (1)$$

$$M_{CA} = \frac{2EI}{20}(2\theta_C) - 100 = 0.2EI\theta_C - 100 \quad (2)$$

$$M_{BD} = \frac{2EI}{20}(\theta_D) = 0.1EI\theta_D \quad (3)$$

$$M_{DB} = \frac{2EI}{20}(2\theta_D) = 0.2EI\theta_D \quad (4)$$

$$M_{CD} = \frac{2E(2I)}{30}(2\theta_C + \theta_D) + 150 = 0.267EI\theta_C + 0.133EI\theta_D + 150 \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2E(2I)}{30}(2\theta_D + \theta_C) - 150 = 0.133EI\theta_C + 0.267EI\theta_D - 150 \quad (6)$$

$$M_{DE} = \frac{3E(2I)}{30}(\theta_D) + \left(150 + \frac{150}{2}\right) = 0.2EI\theta_D + 225 \quad (7)$$

$$M_{ED} = 0$$

Respuesta

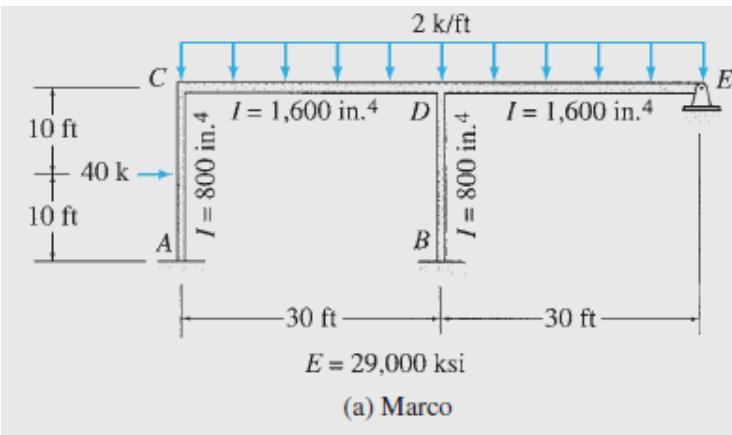
$$\text{FEM}_{AC} = \frac{40(20)}{8} = 100 \text{ k-ft} \quad o \quad +100 \text{ k-ft}$$

$$\text{FEM}_{CA} = 100 \text{ k-ft} \quad o \quad -100 \text{ k-ft}$$

$$\text{FEM}_{BD} = \text{FEM}_{DB} = 0$$

$$\text{FEM}_{CD} = \text{FEM}_{DE} = \frac{2(30)^2}{12} = 150 \text{ k-ft} \quad o \quad +150 \text{ k-ft}$$

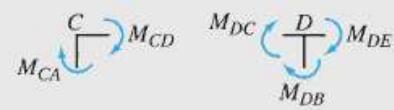
$$\text{FEM}_{DC} = \text{FEM}_{ED} = 150 \text{ k-ft} \quad o \quad -150 \text{ k-ft}$$



Ecuaciones de equilibrio. Aplicando la ecuación de equilibrio $\sum M = 0$ al cuerpo libre de los nodos C y D (Fig. 15.13(b)), obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$M_{CA} + M_{CD} = 0 \quad (8)$$

$$M_{DB} + M_{DC} + M_{DE} = 0 \quad (9)$$



(b) Diagrama de cuerpo libre de los nodos C y D

Ecuaciones de equilibrio. Aplicando la ecuación de equilibrio $\sum M = 0$ al cuerpo libre de los nodos C y D (Fig. 15.13(b)), obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$M_{CA} + M_{CD} = 0 \quad (8)$$

$$M_{DB} + M_{DC} + M_{DE} = 0 \quad (9)$$

Rotaciones de los nodos. Sustituyendo las ecuaciones de la pendiente-deflexión en las ecuaciones de equilibrio resulta

$$0.467EI\theta_C + 0.133EI\theta_D = -50 \quad (10)$$

$$0.133EI\theta_C + 0.667EI\theta_D = -75 \quad (11)$$

Resolviendo las Ecs. (10) y (11) simultáneamente, determinamos los valores de $EI\theta_C$ y $EI\theta_D$

$$EI\theta_C = -79.545 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\theta_D = -96.591 \text{ k-ft}^2$$

Momentos en los extremos del elemento. Los momentos en los extremos del elemento pueden calcularse mediante la sustitución de los valores numéricos de $EI\theta_C$ y $EI\theta_D$ en las ecuaciones de pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (7)).

$$M_{AC} = 92 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CA} = -115.9 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 115.9 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

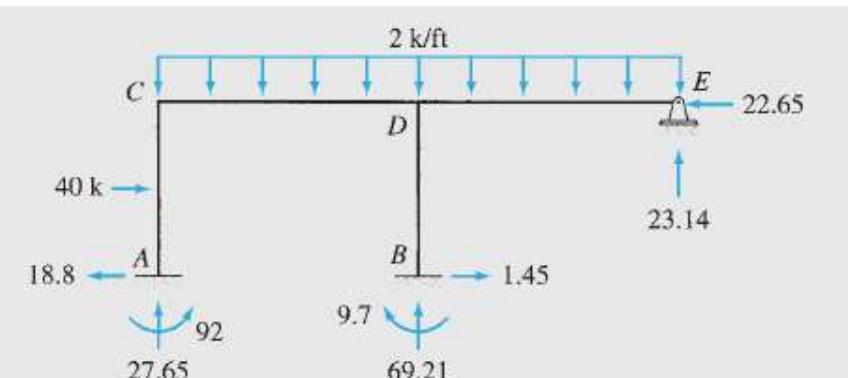
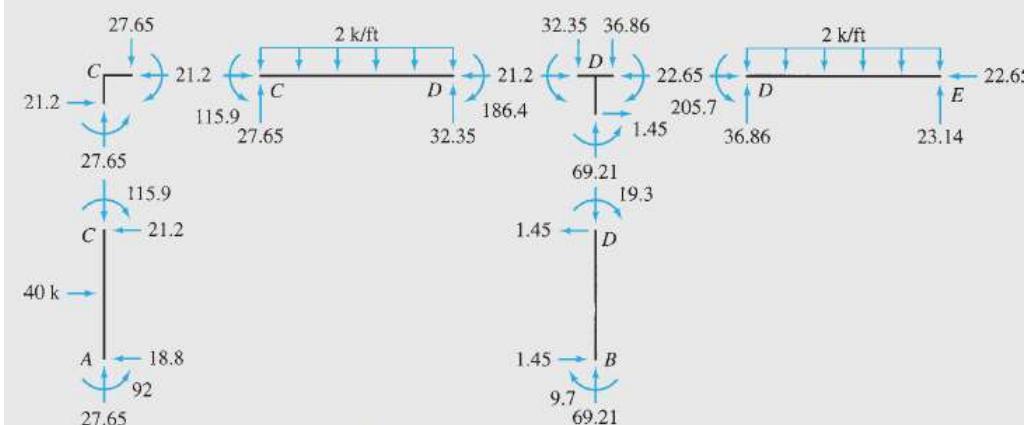
$$M_{BD} = -9.7 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 9.7 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DB} = -19.3 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 19.3 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

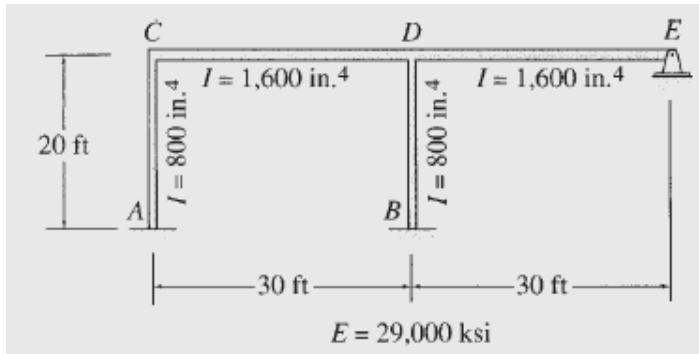
$$M_{CD} = 115.9 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DC} = -186.4 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 186.4 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

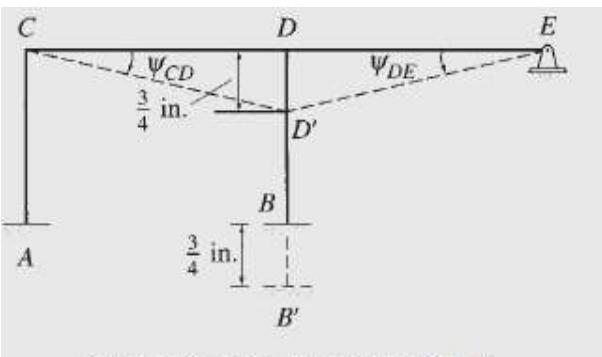
$$M_{DE} = 205.7 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$



Determine los momentos en los extremos del elemento y las reacciones del marco mostrado en la Fig. 15.18(a) debidos al asentamiento de $\frac{3}{4}$ in en el apoyo B. Utilice el método de la pendiente-deflexión.



(a) Marco



(b) Rotación de las cuerdas debido al asentamiento del apoyo

Ecuación de la pendiente-deflexión

$$M_{AC} = 0.1EI\theta_C \quad (1)$$

$$M_{CA} = 0.2EI\theta_C \quad (2)$$

$$M_{BD} = 0.1EI\theta_D \quad (3)$$

$$M_{DB} = 0.2EI\theta_D \quad (4)$$

$$M_{CD} = \frac{2E(2I)}{30} [2\theta_C + \theta_D - 3(-0.00208)] \\ = 0.267EI\theta_C + 0.133EI\theta_D + 0.000832EI \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2E(2I)}{30} [2\theta_D + \theta_C - 3(-0.00208)] \\ = 0.133EI\theta_C + 0.267EI\theta_D + 0.000832EI \quad (6)$$

$$M_{DE} = \frac{3E(2I)}{30} (\theta_D - 0.00208) = 0.2EI\theta_D - 0.000416EI \quad (7)$$

$$M_{ED} = 0$$

$$M_{CA} + M_{CD} = 0 \quad (8)$$

$$M_{DB} + M_{DC} + M_{DE} = 0 \quad (9)$$

$$M_{CA} = 0.2EI\theta_C \quad (1)$$

$$M_{CA} = 0.2EI\theta_C \quad (2)$$

$$M_{BD} = 0.1EI\theta_D \quad (3)$$

$$M_{DB} = 0.2EI\theta_D \quad (4)$$

$$M_{CD} = \frac{2E(2I)}{30} [2\theta_C + \theta_D - 3(-0.00208)] \\ = 0.267EI\theta_C + 0.133EI\theta_D + 0.000832EI \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2E(2I)}{30} [2\theta_D + \theta_C - 3(-0.00208)] \\ = 0.133EI\theta_C + 0.267EI\theta_D + 0.000832EI \quad (6)$$

$$M_{DE} = \frac{3E(2I)}{30} (\theta_D - 0.00208) = 0.2EI\theta_D - 0.000416EI \quad (7)$$

Respuesta

Ecuaciones de equilibrio. Ver la Fig. 15.14(c).

$$M_{CA} + M_{CD} = 0 \quad (8)$$

$$M_{DB} + M_{DC} + M_{DE} = 0 \quad (9)$$



(c) Diagrama de cuerpo libre de los nodos C y D

Solución

El marco se muestra en la Fig. 15.14(a).

Grados de libertad. θ_C y θ_D son los grados de libertad.

Rotación de la cuerda. Debido a que la deformación axial del elemento BD se desprecia, el asentamiento de $\frac{3}{4}$ in en el apoyo B genera que el nodo D se desplace hacia abajo en la misma cantidad, como se muestra en la Fig. 15.14(b). Las líneas punteadas inclinadas en esta figura representan las cuerdas (no las curvas elásticas) de los elementos CD y DE en la posición deformada. La rotación de la cuerda del elemento CD es

$$\psi_{CD} = -\frac{\frac{3}{4}}{(12)(30)} = -0.00208$$

En donde el signo negativo ha sido asignado al valor de ψ_{CD} para indicar que es en el sentido de las manecillas del reloj. De manera similar, para el elemento DE.

$$\psi_{DE} = 0.00208$$

Rotación de los nodos. Sustituyendo las ecuaciones de pendiente-deflexión en las ecuaciones de equilibrio, obtenemos

$$0.467EI\theta_C + 0.133EI\theta_D = -0.000832EI$$

$$0.133EI\theta_C + 0.667EI\theta_D = -0.000416EI$$

Sustituyendo $EI = (29,000)/(800)/(12)^2 \text{ k}\cdot\text{ft}^2$ en los lados derechos de las ecuaciones anteriores

$$0.467EI\theta_C = 0.133EI\theta_D = -134 \quad (10)$$

$$0.133EI\theta_C = 0.667EI\theta_D = -67 \quad (11)$$

Resolviendo las Ecs. (10) y (11) simultáneamente, obtenemos

$$EI\theta_C = -273.883 \text{ k}\cdot\text{ft}^2$$

$$EI\theta_D = -45.838 \text{ k}\cdot\text{ft}^2$$

Momentos en los extremos del elemento. Sustituyendo los valores numéricos de $EI\theta_c$ y $EI\theta_d$ en las ecuaciones de la pendiente-deflexión, obtenemos

$$M_{AC} = -27.4 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad o \quad 27.4 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CA} = -54.8 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad o \quad 54.8 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BD} = -4.6 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad o \quad 4.6 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DB} = -9.2 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad o \quad 9.2 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CD} = 54.8 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DC} = 85.4 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DE} = -76.2 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad o \quad 76.2 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{Respuesta}$$

Volviendo a sustituir los valores numéricos de los momentos en los extremos del elemento en las ecuaciones (Ecs. (8) y (9)), resulta

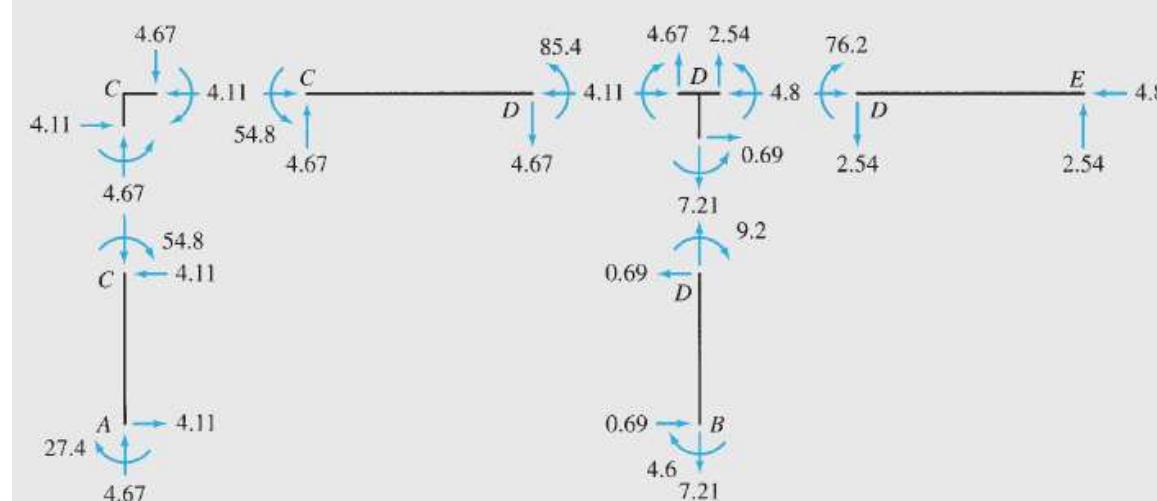
$$M_{CA} + M_{CD} = -54.8 + 54.8 = 0$$

Comprobación

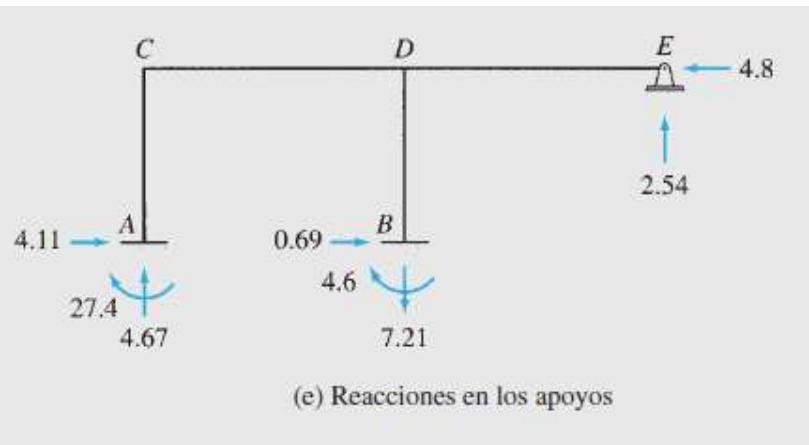
$$M_{DB} + M_{DC} + M_{DE} = -9.2 + 85.4 - 76.2 = 0$$

Comprobación

Cortantes en los extremos del elemento y fuerzas axiales. Ver la Fig. 15.14(e).



(d) Momentos en los extremos, cortantes y carga axial



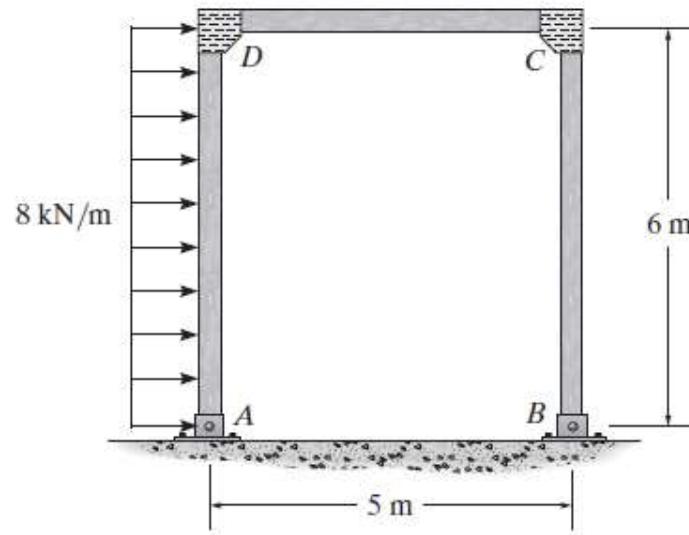
(e) Reacciones en los apoyos

Comprobación del equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se cumplen.

Método Pendiente- Deflexión Marcos con Desplazamiento Lateral



Determinar el momento en las juntas C y D, y dibujar el diagrama de momento del marco. Asumir los soportes en A y B como articulados. EI es constante



Cálculo de FEM

$$(FEM)_{DA} = \frac{wL^2}{8} = \frac{8(6^2)}{8} = 36 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(FEM)_{DC} = (FEM)_{CD} = (FEM)_{CB} = 0$$

Desplazamientos Relativos

$$\psi_{DA} = \psi_{CB} = \psi \text{ and } \psi_{DC} = \psi_{CD} = 0$$

Momentos en la Viga

$$M_N = 2Ek (2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N$$

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_D + \theta_C - 3(0)] + 0 = \left(\frac{4EI}{5}\right)\theta_D + \left(\frac{2EI}{5}\right)\theta_C$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_C + \theta_D - 3(0)] + 0 = \left(\frac{4EI}{5}\right)\theta_C + \left(\frac{2EI}{5}\right)\theta_D$$

Momentos en las Columnas

$$M_N = 3Ek (\theta_N - \psi) + (\text{FEM})_N$$

$$M_{DA} = 3E\left(\frac{I}{6}\right)(\theta_D - \psi) + 36 = \left(\frac{EI}{2}\right)\theta_D - \left(\frac{EI}{2}\right)\psi + 36$$

$$M_{CB} = 3E\left(\frac{I}{6}\right)(\theta_C - \psi) + 0 = \left(\frac{EI}{2}\right)\theta_C - \left(\frac{EI}{2}\right)\psi$$

Ecuaciones de Compatibilidad

Equilibrio en la junta D

$$M_{DA} + M_{DC} = 0$$

$$\left(\frac{EI}{2}\right)\theta_D - \left(\frac{EI}{2}\right)\psi + 36 + \left(\frac{4EI}{5}\right)\theta_D + \left(\frac{2EI}{5}\right)\theta_C = 0$$

$$1.3EI\theta_D + 0.4EI\theta_C - 0.5EI\psi = -36$$

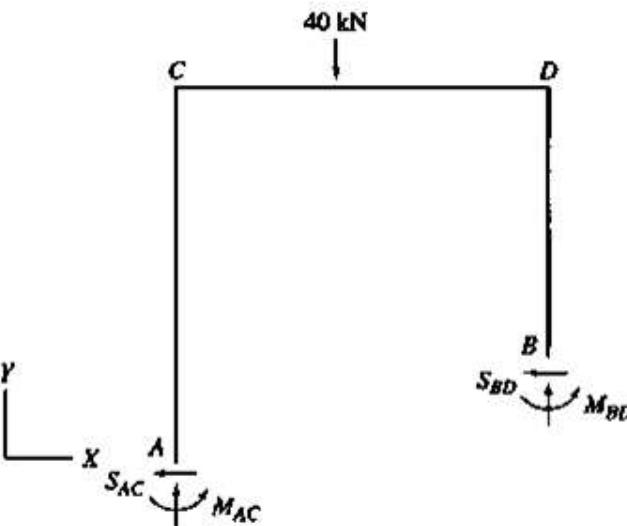
$$M_{CD} + M_{CB} = 0$$

$$\left(\frac{4EI}{5}\right)\theta_C + \left(\frac{2EI}{5}\right)\theta_D + \left(\frac{EI}{2}\right)\theta_C - \left(\frac{EI}{2}\right)\psi = 0$$

$$0.4EI\theta_D + 1.3EI\theta_C - 0.5EI\psi = 0$$

Para establecer la tercera ecuación de equilibrio, aplicamos la ecuación de equilibrio de la fuerza $\sum F_x = 0$ al diagrama del marco completo (Fig. 15.17(c)), para obtener

$$S_{AC} + S_{BD} = 0$$



(c) Diagrama de cuerpo libre del marco completo

En la cual S_{AC} y S_{BD} representan los cortantes en los extremos inferiores de las columnas AC y BD , respectivamente, como se muestra en la Fig. 15.17(c). Para expresar los cortantes en los extremos de las columnas en términos de los momentos en los extremos de la columna, dibujamos los diagramas de cuerpo libre de las dos columnas (Fig. 15.17(d)), y sumamos los momentos alrededor del extremo superior de cada columna:

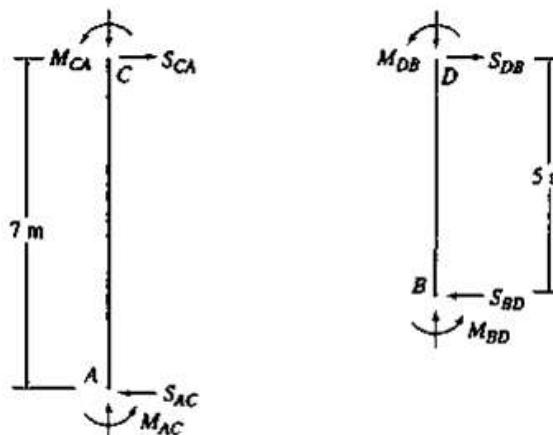
$$S_{AC} = \frac{M_{AC} + M_{CA}}{7} \quad \text{y} \quad S_{BD} = \frac{M_{BD} + M_{DB}}{5}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la tercera ecuación de equilibrio, obtenemos

$$\frac{M_{AC} + M_{CA}}{7} + \frac{M_{BD} + M_{DB}}{5} = 0$$

Que podemos reescribir como

$$5(M_{AC} + M_{CA}) + 7(M_{BD} + M_{DB}) = 0 \quad (9)$$



(d) Diagramas de cuerpo libre de las columnas AC y BD

Desplazamientos de los nodos. Para determinar las incógnitas de los desplazamientos de los nodos θ_C y θ_D y Δ , sustituimos las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (6), en las Ecs. (7) a la (9)) para obtener

$$1.142EI\theta_C + 0.286EI\theta_D + 0.122EI\Delta = -39.2 \quad (10)$$

$$0.286EI\theta_C + 1.371EI\theta_D + 0.24EI\Delta = 29.4 \quad (11)$$

$$4.285EI\theta_C + 8.4EI\theta_D + 4.58EI\Delta = 0 \quad (12)$$

Resolviendo las Ecs. (10) a la (12) simultáneamente, resulta

$$EI\theta_C = -40.211 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$EI\theta_D = 34.24 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$EI\Delta = -25.177 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

Momentos en los extremos del elemento. Sustituyendo los valores numéricos de $EI\theta_C$, $EI\theta_D$ y $EI\Delta$ en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (6)), obtenemos

$$M_{AC} = -14.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 14.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CA} = -26 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 26 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BD} = 7.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

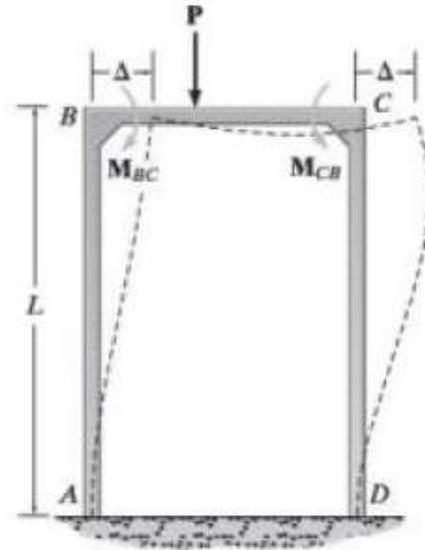
$$M_{DB} = 21.3 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CD} = 26 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DC} = -21.3 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 21.3 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

Marcos con Desplazamiento Lateral

Ecuaciones de Compatibilidad

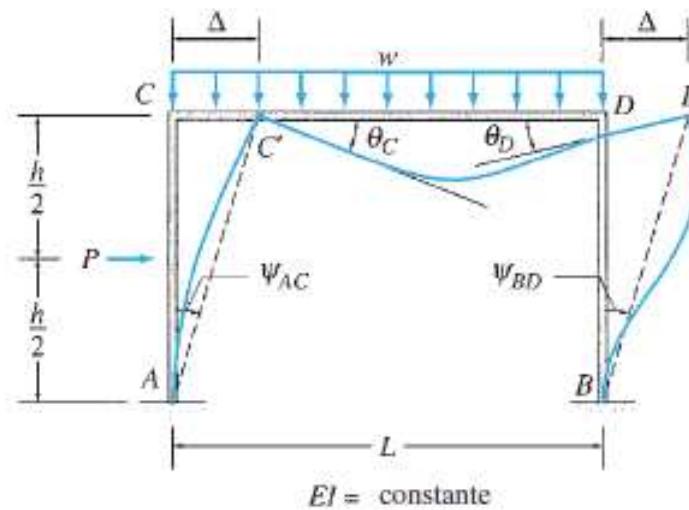


Desplazamiento relativo entre columnas

$$\Psi = \Delta/L$$

“ Si las alturas de las columnas no son iguales se igualan los desplazamientos de las columnas ($\Delta_B = \Delta_c = \Delta$)

y se despeja el valor de ψ para cada columna” $\Delta = \psi L$



$$\Psi_B = \Delta/L_B$$

$$\Psi_c = \Delta/L_c$$

$$\Psi_B L_B = \Psi_c L_c$$

2 Primeras ecuaciones (Equilibrio en los nodos)

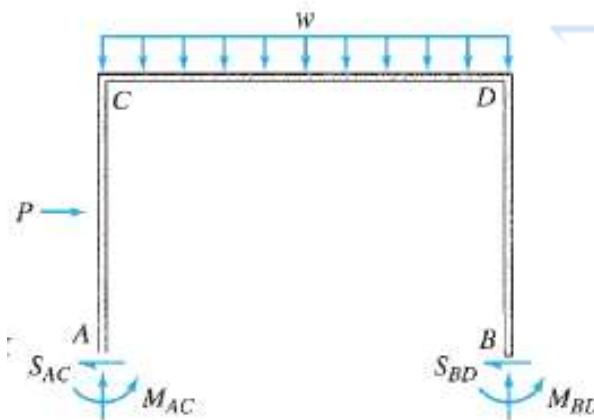


$$M_{ca} + M_{cd} = 0$$

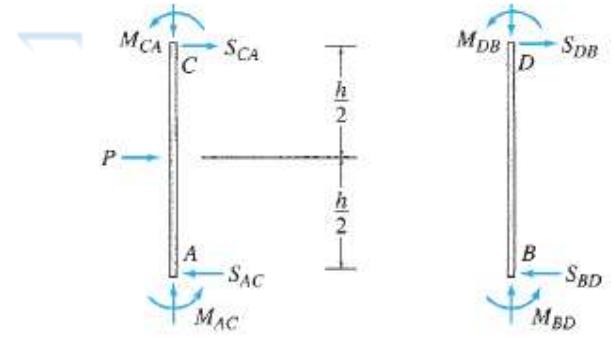
$$M_{db} + M_{dc} = 0$$

3 Ecuación de Compatibilidad

$$\sum F_x = 0$$

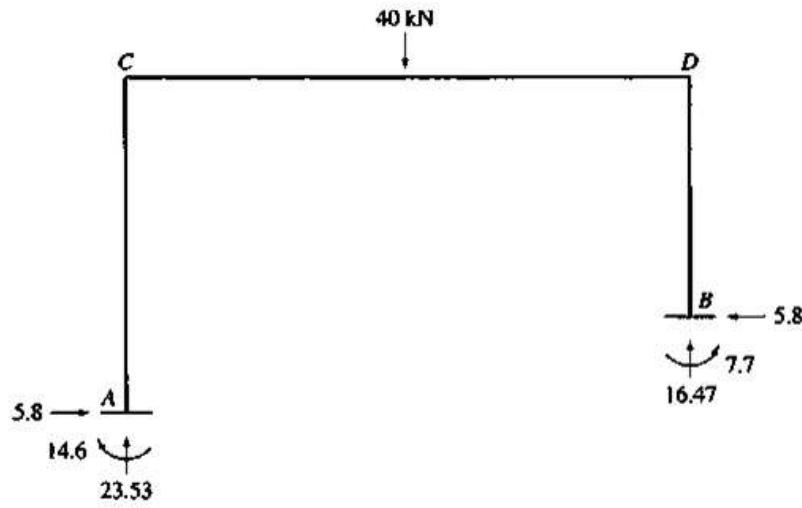
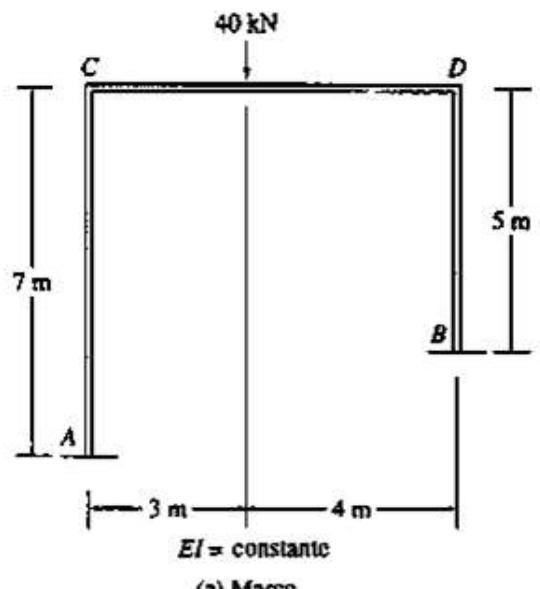


(c) Diagrama de cuerpo libre del marco completo

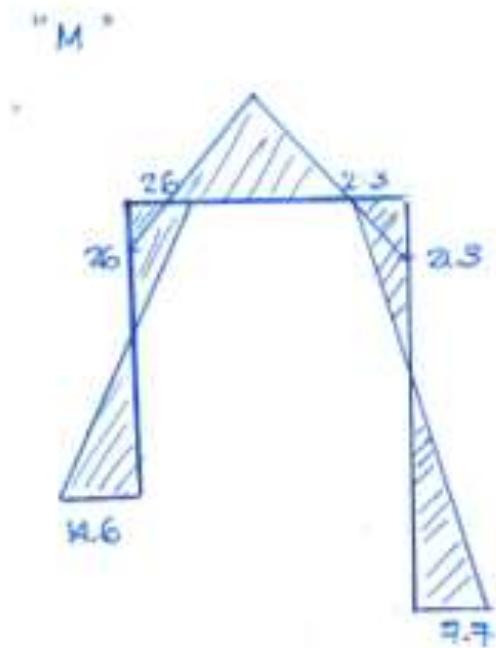
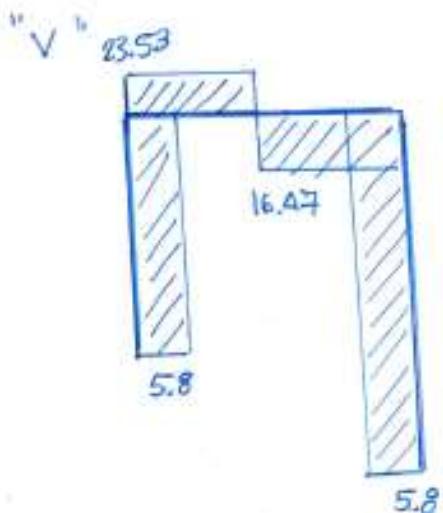
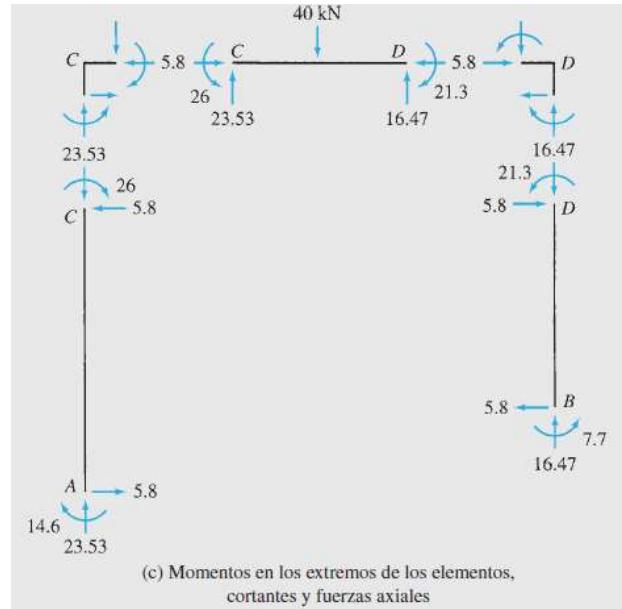


(d) Diagrama de cuerpo libre de las columnas AC y BD

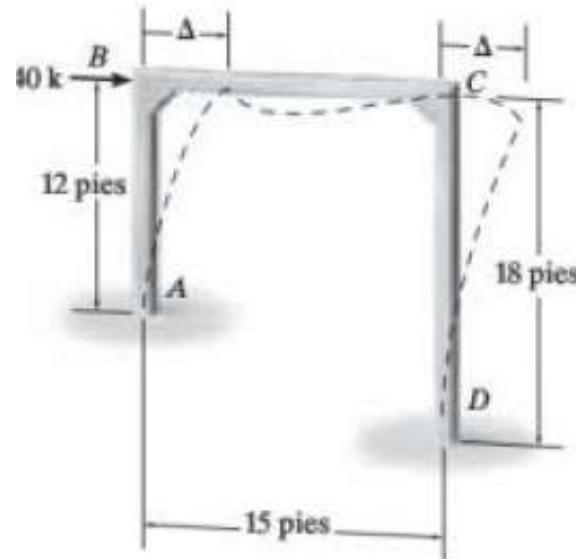
$$P - S_{AC} - S_{BD} = 0$$



(d) Reacciones en los apoyos



Determine los momentos en cada junta del marco que se muestra en la figura 11-19a. EI es constante.



SOLUCIÓN

Ecuaciones de pendiente-deflexión. Como los extremos en A y D están fijos, se aplica la ecuación 11-8 a los tres claros de la estructura. Aquí se produce desplazamiento lateral porque ni la carga aplicada ni la geometría de la estructura son simétricas. En este caso, la carga se aplica directamente a la junta B y, por lo tanto, ningún FEM actúa en las juntas. Como se muestra en la figura 11-19a, se supone que ambas juntas B y C se desplazan una cantidad igual Δ . En consecuencia, $\psi_{AB} = \Delta/12$ y $\psi_{DC} = \Delta/18$. Ambos términos son positivos porque la cuerda de los elementos AB y CD "giran" en sentido horario. Si se relaciona ψ_{AB} con ψ_{DC} , se tiene $\psi_{AB} = (18/12)\psi_{DC}$. Al aplicar la ecuación 11-8 al marco, resulta

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)\left[2(0) + \theta_B - 3\left(\frac{18}{12}\psi_{DC}\right)\right] + 0 = EI(0.1667\theta_B - 0.75\psi_{DC}) \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)\left[2\theta_B + 0 - 3\left(\frac{18}{12}\psi_{DC}\right)\right] + 0 = EI(0.333\theta_B - 0.75\psi_{DC}) \quad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{15}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3(0)] + 0 = EI(0.267\theta_B + 0.133\theta_C) \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{15}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3(0)] + 0 = EI(0.267\theta_C + 0.133\theta_B) \quad (4)$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{18}\right)[2\theta_C + 0 - 3\psi_{DC}] + 0 = EI(0.222\theta_C - 0.333\psi_{DC}) \quad (5)$$

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{18}\right)[2(0) + \theta_C - 3\psi_{DC}] + 0 = EI(0.111\theta_C - 0.333\psi_{DC}) \quad (6)$$

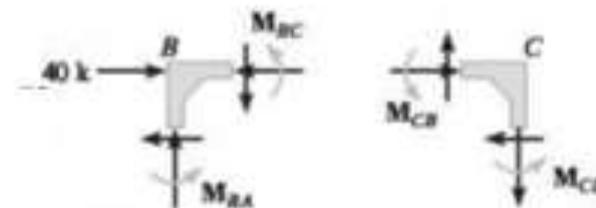
Ecuaciones de equilibrio. Las seis ecuaciones contienen nueve incógnitas. Es posible escribir dos ecuaciones de equilibrio de momentos para las juntas B y C , figura 11-19b, a saber,

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

Como se presenta un desplazamiento horizontal Δ , se considerará la sumatoria de las fuerzas sobre todo el marco en la dirección x . De esto resulta

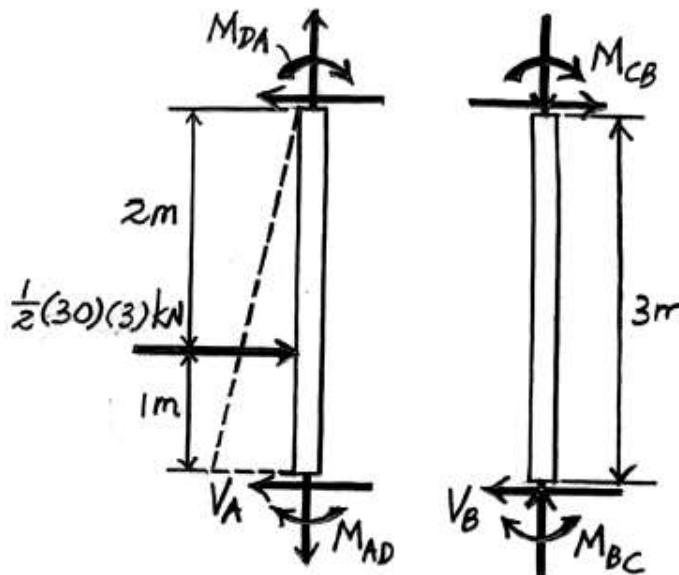
$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 40 - V_A - V_D = 0$$



Tercera ecuación de compatibilidad

Sumatoria de fuerzas en x=0

$$\pm \sum F_x = 0; \quad \frac{1}{2}(30)(3) - V_A - V_B = 0$$



$$\zeta + \sum M_D = 0; \quad \frac{1}{2}(30)(3)(2) - M_{DA} - M_{AD} - V_A(3) = 0$$

$$V_A = 30 - \frac{M_{DA}}{3} - \frac{M_{AD}}{3}$$

$$\zeta + \sum M_C = 0; \quad -M_{CB} - M_{BC} - V_B(3) = 0$$

$$V_B = -\frac{M_{CB}}{3} - \frac{M_{BC}}{3}$$

$$\frac{1}{2}(30)(3) - \left(30 - \frac{M_{DA}}{3} - \frac{M_{AD}}{3}\right) - \left(-\frac{M_{CB}}{3} - \frac{M_{BC}}{3}\right) = 0$$

$$M_{DA} + M_{AD} + M_{CB} + M_{BC} = -45$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{4EI}{3}\right)\theta_D - 2EI\psi + 9 + \left(\frac{2EI}{3}\right)\theta_D - 2EI\psi - 13.5 + \left(\frac{4EI}{3}\right)\theta_C - 2EI\psi \\ + \left(\frac{2EI}{3}\right)\theta_C - 2EI\psi = -45 \end{aligned}$$

$$2EI\theta_D + 2EI\theta_C - 8EI\psi = -40.5 \quad (9)$$

Resolviendo las 3 ecuaciones de compatibilidad

$$\theta_C = \frac{261}{56EI} \quad \theta_D = \frac{9}{56EI} \quad \psi = \frac{351}{56EI}$$

Momentos Finales

$$M_{AD} = -25.93 \text{ kN}\cdot\text{m} = -25.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DA} = -3.321 \text{ kN}\cdot\text{m} = -3.32 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DC} = 3.321 \text{ kN}\cdot\text{m} = 3.32 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

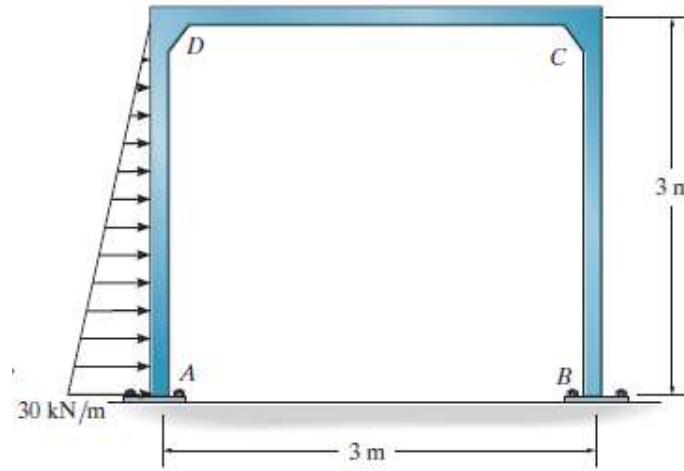
$$M_{CD} = 6.321 \text{ kN}\cdot\text{m} = 6.32 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = -9.429 \text{ kN}\cdot\text{m} = -9.43 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB} = -6.321 \text{ kN}\cdot\text{m} = -6.32 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_N = 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N$$

Determinar el momento en las juntas A, B, C y D, y dibujar el diagrama de momento del marco. Asumir los soportes en A y B como empotrados. El es constante



Cálculo de FEM

$$(\text{FEM})_{AD} = -\frac{wL^2}{20} = -\frac{30(3^2)}{20} = 13.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(\text{FEM})_{DA} = \frac{wL^2}{30} = \frac{30(3^2)}{30} = 9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(\text{FEM})_{DC} = (\text{FEM})_{CD} = (\text{FEM})_{CB} = (\text{FEM})_{BC} = 0$$

Desplazamientos Relativos

$$\psi_{AD} = \psi_{DA} = \psi_{BC} = \psi_{CB} = \psi \quad \psi_{CD} = \psi_{DC} = 0$$

Momento en las Columnas

$$M_{AD} = 2E\left(\frac{I}{3}\right)[2(0) + \theta_D - 3\psi] + (-13.5) = \left(\frac{2EI}{3}\right)\theta_D - 2EI\psi - 13.5 \quad (1)$$

$$M_{DA} = 2E\left(\frac{I}{3}\right)(2\theta_D + 0 - 3\psi) + 9 = \left(\frac{4EI}{3}\right)\theta_D - 2EI\psi + 9 \quad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{3}\right)[2(0) + \theta_C - 3\psi] + 0 = \left(\frac{2EI}{3}\right)\theta_C - 2EI\psi \quad (5)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{3}\right)[2\theta_C + 0 - 3\psi] + 0 = \left(\frac{4EI}{3}\right)\theta_C - 2EI\psi \quad (6)$$

Momento en la viga

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{3}\right)[2\theta_D + \theta_C - 3(0)] + 0 = \left(\frac{4EI}{3}\right)\theta_D + \left(\frac{2EI}{3}\right)\theta_C \quad (3)$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{3}\right)[2\theta_C + \theta_D - 3(0)] + 0 = \left(\frac{4EI}{3}\right)\theta_C + \left(\frac{2EI}{3}\right)\theta_D \quad (4)$$

Ecuaciones de Compatibilidad

Equilibrio en junta C

$$M_{CD} + M_{CB} = 0$$

$$\left(\frac{4EI}{3}\right)\theta_C + \left(\frac{2EI}{3}\right)\theta_D + \left(\frac{4EI}{3}\right)\theta_C - 2EI\psi = 0$$

Equilibrio en junta D

$$M_{DA} + M_{DC} = 0$$

$$\left(\frac{4EI}{3}\right)\theta_D - 2EI\psi + 9 + \left(\frac{4EI}{3}\right)\theta_D + \left(\frac{2EI}{3}\right)\theta_C = 0$$

$$\left(\frac{8EI}{3}\right)\theta_D + \left(\frac{2EI}{3}\right)\theta_C - 2EI\psi = -9 \quad (7)$$

$$\left(\frac{2EI}{3}\right)\theta_D + \left(\frac{8EI}{3}\right)\theta_C - 2EI\psi = 0 \quad (8)$$

Diagrama de Cortante

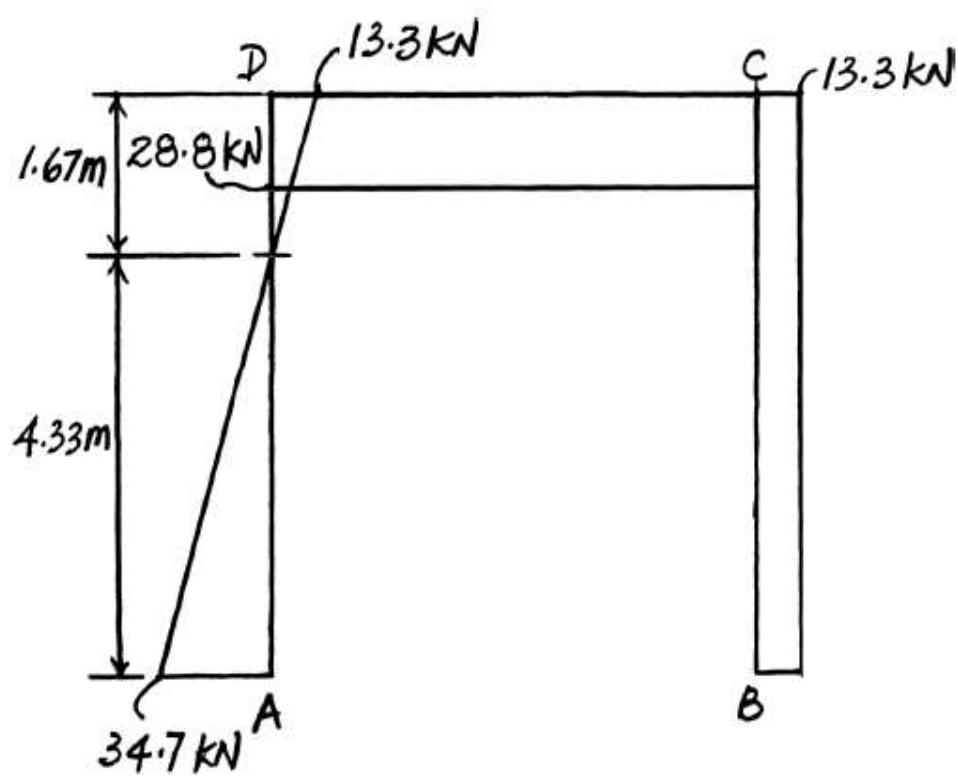
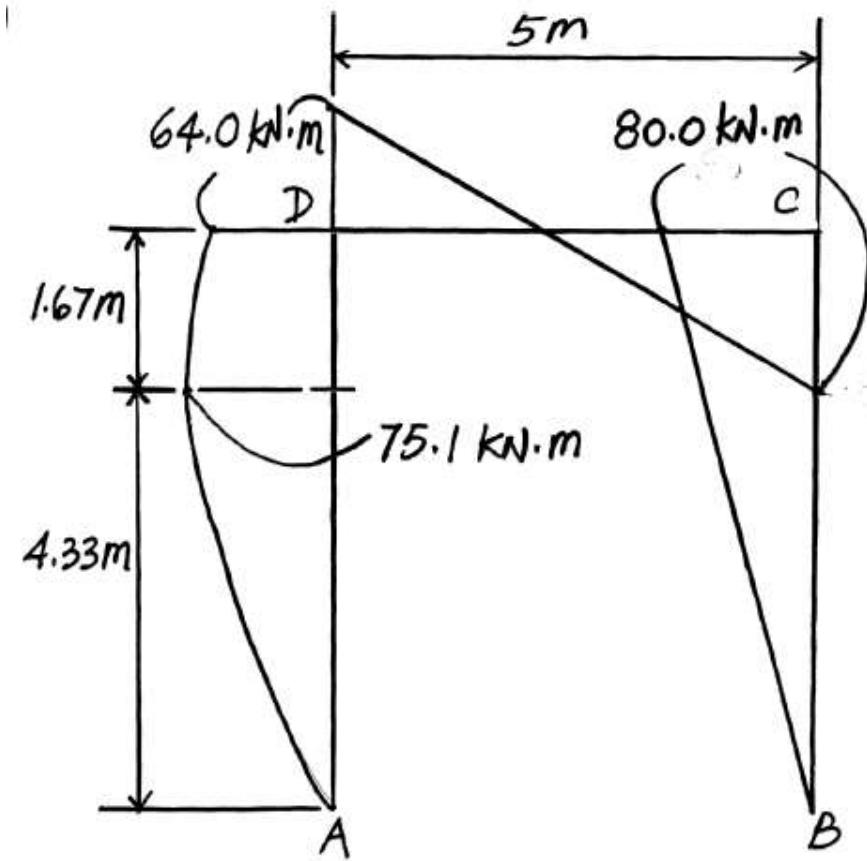


Diagrama de Momento



Tercera ecuación de compatibilidad

Sumatoria de fuerzas en x = 0

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 8(6) - V_A - V_B = 0$$

$$\zeta + \sum M_D = 0; \quad 8(6)(3) - M_{DA} - V_A(6) = 0$$

$$V_A = 24 - \frac{M_{DA}}{6}$$

$$\zeta + \sum M_C = 0; \quad -M_{CB} - V_B(6) = 0$$

$$V_B = -\frac{M_{CB}}{6} = 0$$

$$8(6) - \left(24 - \frac{M_{DA}}{6} \right) - \left(-\frac{M_{CB}}{6} \right) = 0$$

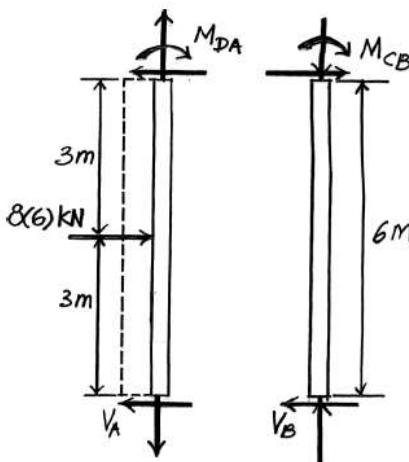
$$M_{DA} + M_{CB} = -144$$

$$\left(\frac{EI}{2} \right) \theta_D - \left(\frac{EI}{2} \right) \psi + 36 + \left(\frac{EI}{2} \right) \theta_C - \left(\frac{EI}{2} \right) \psi = -144$$

$$0.5EI\theta_D + 0.5EI\theta_C - EI\psi = -180$$

Resolviendo las 3 ecuaciones de compatibilidad

$$\theta_C = \frac{80}{EI} \quad \theta_D = \frac{40}{EI} \quad \psi = \frac{240}{EI}$$



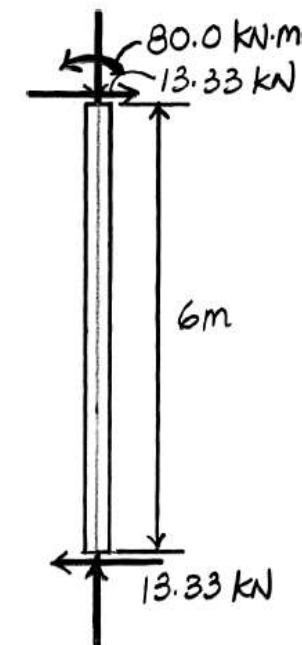
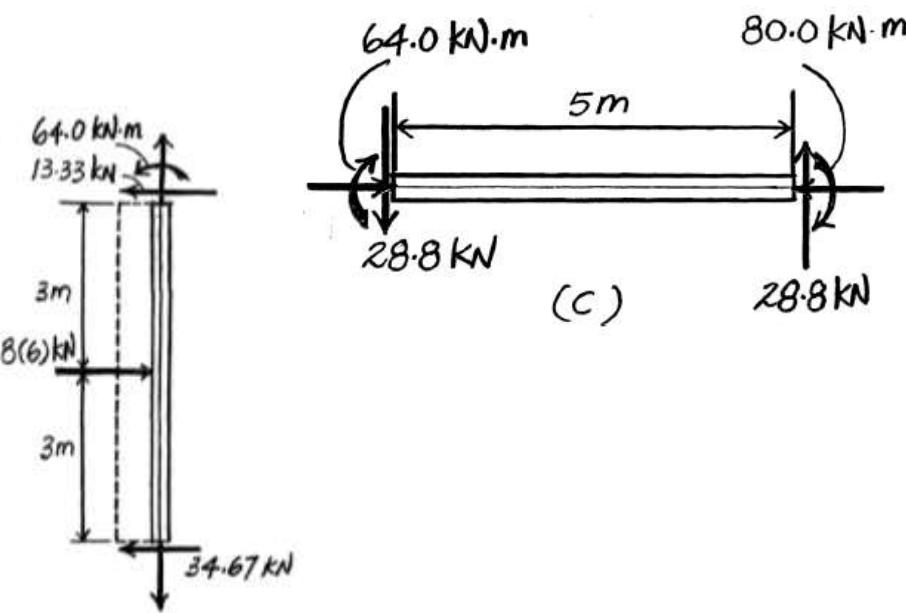
Momentos Finales

$$M_{DC} = 64.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CD} = 80.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{DA} = -64.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB} = -80.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



Entonces, a partir de la ecuación (6),

$$10 + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{4} + \frac{M_{DC}}{4} = 0 \quad (7)$$

Al sustituir las ecuaciones de pendiente-deflexión en las ecuaciones (5) y (7) y al simplificar se obtiene

$$\theta_B = \frac{3}{4}\psi$$

$$10 + \frac{EI}{4} \left(\frac{3}{2}\theta_B - \frac{15}{4}\psi \right) = 0$$

Por lo tanto,

$$\theta_B = \frac{240}{21EI} \quad \psi = \frac{320}{21EI}$$

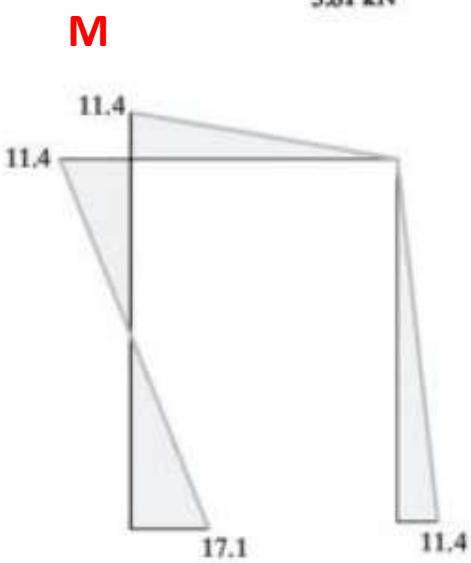
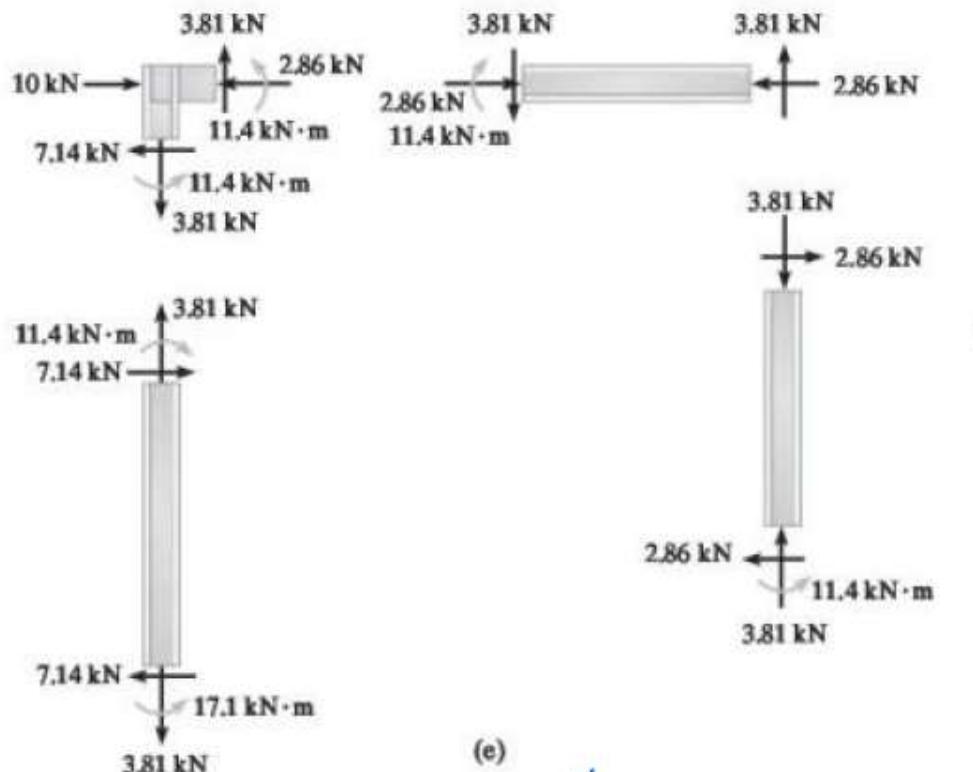
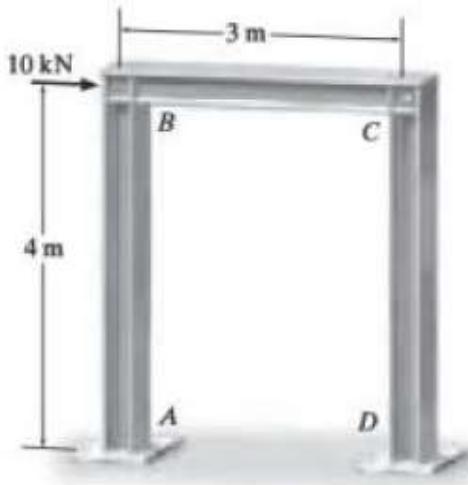
Si se sustituyen estos valores en las ecuaciones (1)-(4), se tiene

$$M_{AB} = -17.1 \text{ kN}\cdot\text{m}, \quad M_{BA} = -11.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

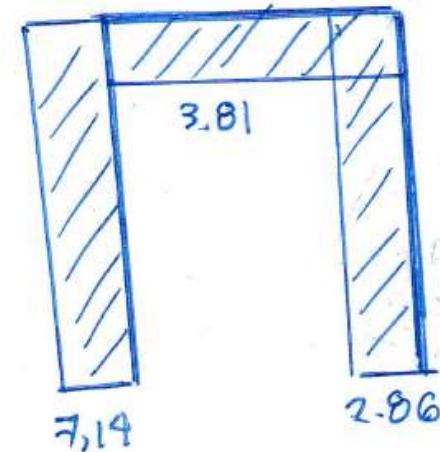
Resp.

$$M_{BC} = 11.4 \text{ kN}\cdot\text{m}, \quad M_{DC} = -11.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

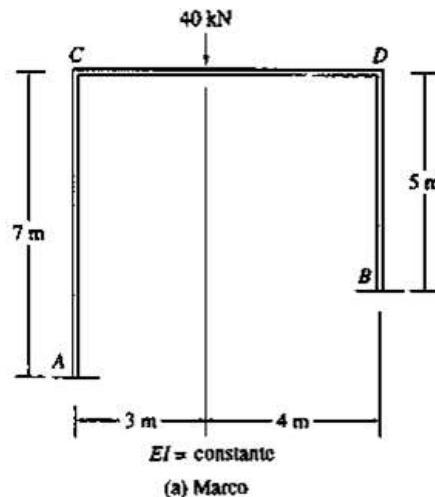
Resp.



(e)



Determine los momentos en los extremos del elemento y las reacciones del marco mostrado en la Fig. 15.17(a). Utilice el método de la pendiente-deflexión.



Momentos de empotre. Usando las expresiones del momento de empotre que se encuentran en el interior de la portada del libro, obtenemos

$$FEM_{CD} = \frac{40(3)(4)^2}{(7)^2} = 39.2 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad o \quad +39.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$FEM_{DC} = \frac{40(3)^2(4)}{(7)^2} = 29.4 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad o \quad -29.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$FEM_{AC} = FEM_{CA} = FEM_{BD} = FEM_{DB} = 0$$

Rotación de las cuerdas. De la Fig. 15.17(b) podemos ver que

$$\psi_{AC} = -\frac{\Delta}{7} \quad \psi_{BD} = -\frac{\Delta}{5} \quad \psi_{CD} = 0$$

Ecuaciones de la pendiente-deflexión

$$M_{AC} = \frac{2EI}{7} \left[\theta_C - 3\left(-\frac{\Delta}{7}\right) \right] = 0.286EI\theta_C + 0.122EI\Delta \quad (1)$$

$$M_{CA} = \frac{2EI}{7} \left[2\theta_C - 3\left(-\frac{\Delta}{7}\right) \right] = 0.571EI\theta_C + 0.122EI\Delta \quad (2)$$

$$M_{BD} = \frac{2EI}{5} \left[\theta_D - 3\left(-\frac{\Delta}{5}\right) \right] = 0.4EI\theta_D + 0.24EI\Delta \quad (3)$$

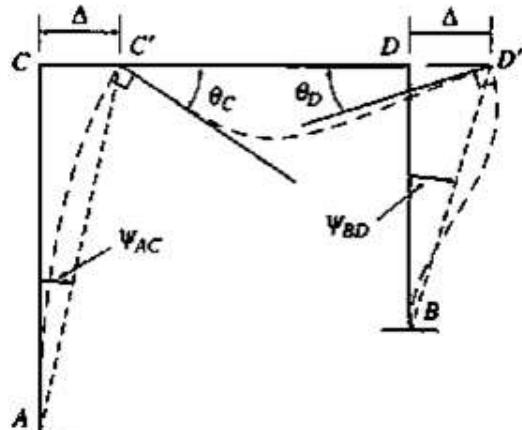
$$M_{DB} = \frac{2EI}{5} \left[2\theta_D - 3\left(-\frac{\Delta}{5}\right) \right] = 0.8EI\theta_D + 0.24EI\Delta \quad (4)$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{7}(2\theta_C + \theta_D) + 39.2 = 0.571EI\theta_C + 0.286EI\theta_D + 39.2 \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{7}(\theta_C + 2\theta_D) - 29.4 = 0.286EI\theta_C + 0.571EI\theta_D - 29.4 \quad (6)$$

Solución

Grados de libertad. Los grados de libertad son θ_C y θ_D y Δ . (ver la Fig. 15.178(b)).



(b) Configuración deformada del marco

Ecuaciones de equilibrio. Considerando el equilibrio de momentos de los nodos C y D, obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$M_{CA} + M_{CD} = 0 \quad (7)$$

$$M_{DB} + M_{DC} = 0 \quad (8)$$

Las reacciones horizontales o fuerzas cortantes de columna V_A y V_D pueden relacionarse con los momentos internos al considerar el diagrama de cuerpo libre de cada columna por separado, figura 11-19c. Se tiene

$$\sum M_B = 0; \quad V_A = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{12}$$

$$\sum M_C = 0; \quad V_D = -\frac{M_{DC} + M_{CD}}{18}$$

Por lo tanto,

$$40 + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{12} + \frac{M_{DC} + M_{CD}}{18} = 0 \quad (9)$$

A fin de resolver, se sustituyen las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (7), las ecuaciones (4) y (5) en la ecuación (8), y las ecuaciones (1), (2), (5) y (6) en la ecuación (9). De aquí se obtiene

$$0.6\theta_B + 0.133\theta_C - 0.75\psi_{DC} = 0$$

$$0.133\theta_B + 0.489\theta_C - 0.333\psi_{DC} = 0$$

$$0.5\theta_B + 0.222\theta_C - 1.944\psi_{DC} = -\frac{480}{EI}$$

Al resolver simultáneamente, se tiene

$$EI\theta_B = 438.81 \quad EI\theta_C = 136.18 \quad EI\psi_{DC} = 375.26$$

Por último, con base en estos resultados y resolviendo las ecuaciones (1)-(6) se obtiene

$$M_{AB} = -208 \text{ k·pie}$$

Resp.

$$M_{BA} = -135 \text{ k·pie}$$

Resp.

$$M_{BC} = 135 \text{ k·pie}$$

Resp.

$$M_{CB} = 94.8 \text{ k·pie}$$

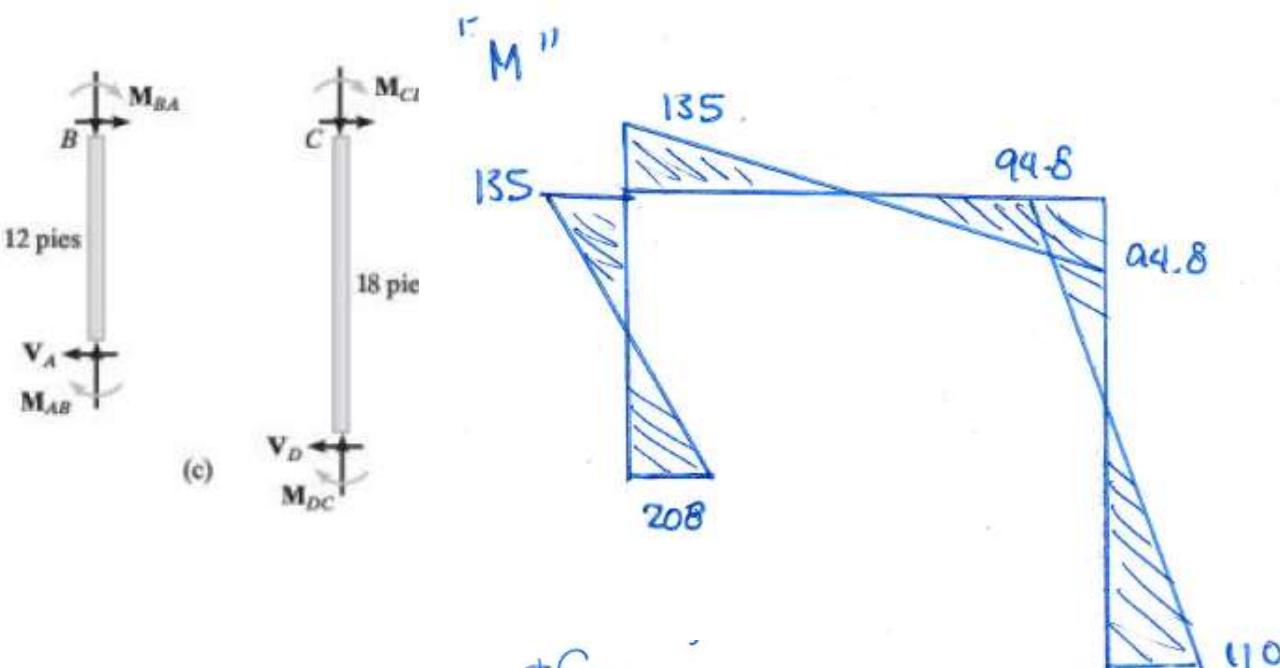
Resp.

$$M_{CD} = -94.8 \text{ k·pie}$$

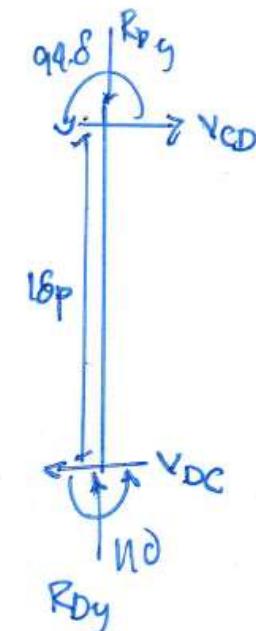
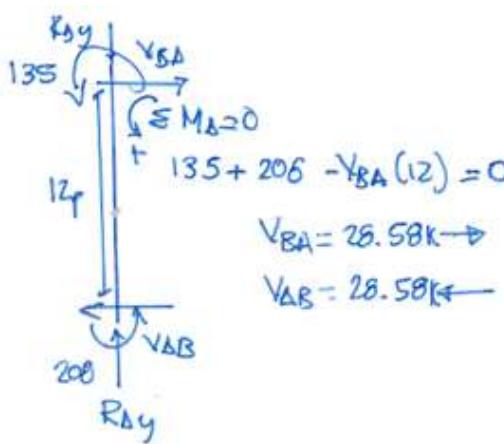
Resp.

$$M_{DC} = -110 \text{ k·pie}$$

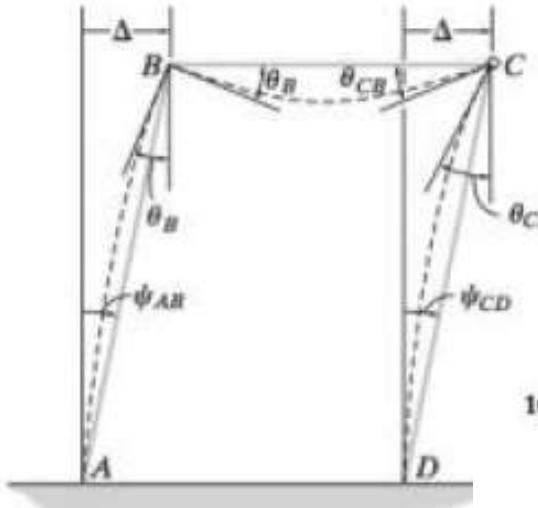
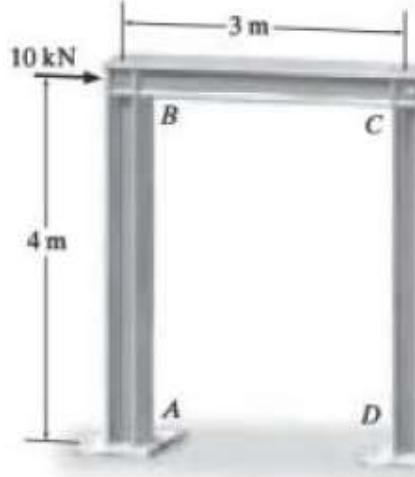
Resp.



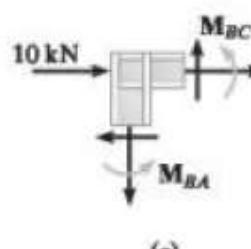
$$+\sum M_D = 0 \\ 94.8 + 110 - V_{CD}(18) = 0 \\ V_{CD} = 11.38 \text{ k} \rightarrow \\ V_{DC} = 11.38 \text{ k} \leftarrow$$



Determine los momentos en cada junta del marco que se muestra en la figura 11-20a. Los soportes en *A* y *D* están fijos y se supone que la junta *C* está articulada. EI es constante para cada elemento.



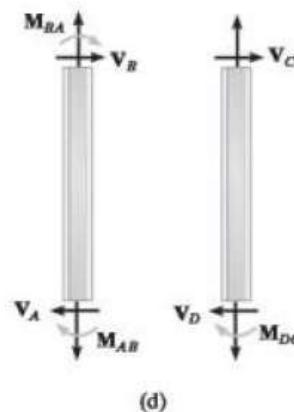
(b)



(c)

Solución

Ecuaciones de pendiente-deflexión. Se aplicará la ecuación 11-8 al elemento *AB* puesto que está conectado fijamente en ambos extremos. La ecuación 11-10 puede aplicarse de *B* a *C* y de *D* a *C* porque el pasador en *C* soporta un momento cero. Como se muestra en el diagrama de deflexión, figura 11-20b, hay un desplazamiento lineal desconocido de la estructura y un desplazamiento angular desconocido θ_B en la junta *B*.* Debido a Δ , los elementos de la cuerda *AB* y *CD* giran en sentido horario, $\psi = \psi_{AB} = \psi_{DC} = \Delta/4$. Si se toma en cuenta que $\theta_A = \theta_D = 0$, y que no hay FEM para los elementos, se tiene



(d)

$$M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{4}\right)[2(0) + \theta_B - 3\psi] + 0 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{4}\right)(2\theta_B + 0 - 3\psi) + 0 \quad (2)$$

$$M_N = 3E\left(\frac{I}{L}\right)(\theta_N - \psi) + (\text{FEM})_N$$

$$M_{BC} = 3E\left(\frac{I}{3}\right)(\theta_B - 0) + 0 \quad (3)$$

$$M_{DC} = 3E\left(\frac{I}{4}\right)(0 - \psi) + 0 \quad (4)$$

Ecuaciones de equilibrio. El equilibrio de momentos en la junta *B*, figura 11-20c, requiere que

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (5)$$

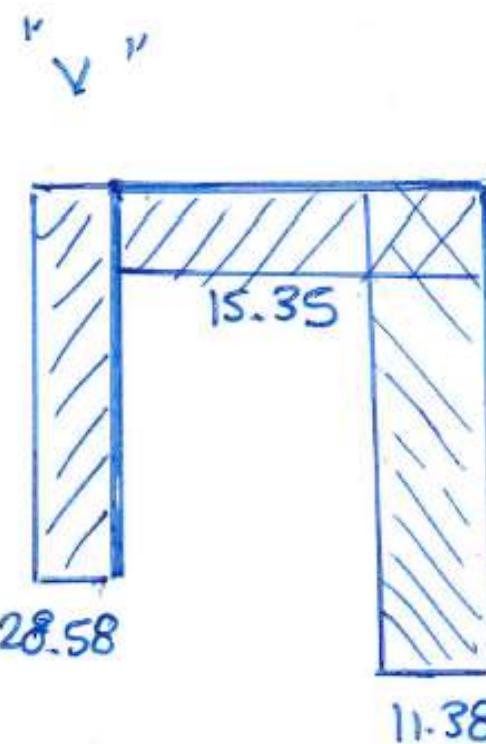
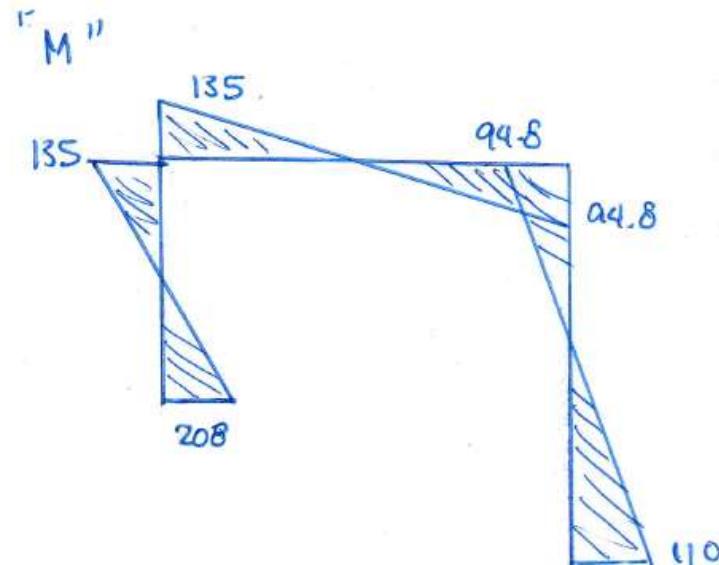
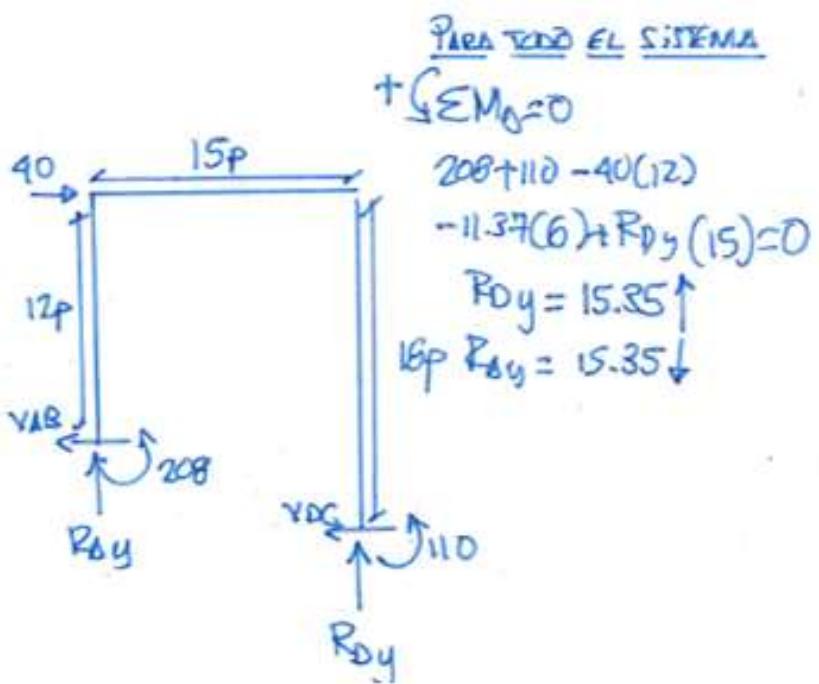
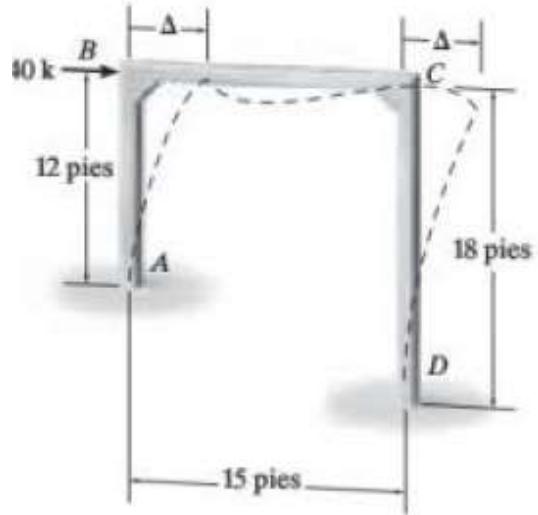
Si las fuerzas se suman para *todo el marco* en la dirección horizontal, resulta

$$\pm \sum F_x = 0; \quad 10 - V_A - V_D = 0 \quad (6)$$

Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de cada columna, figura 11-20d, se tiene

$$\sum M_B = 0; \quad V_A = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{4}$$

$$\sum M_C = 0; \quad V_D = -\frac{M_{DC}}{4}$$



11.38

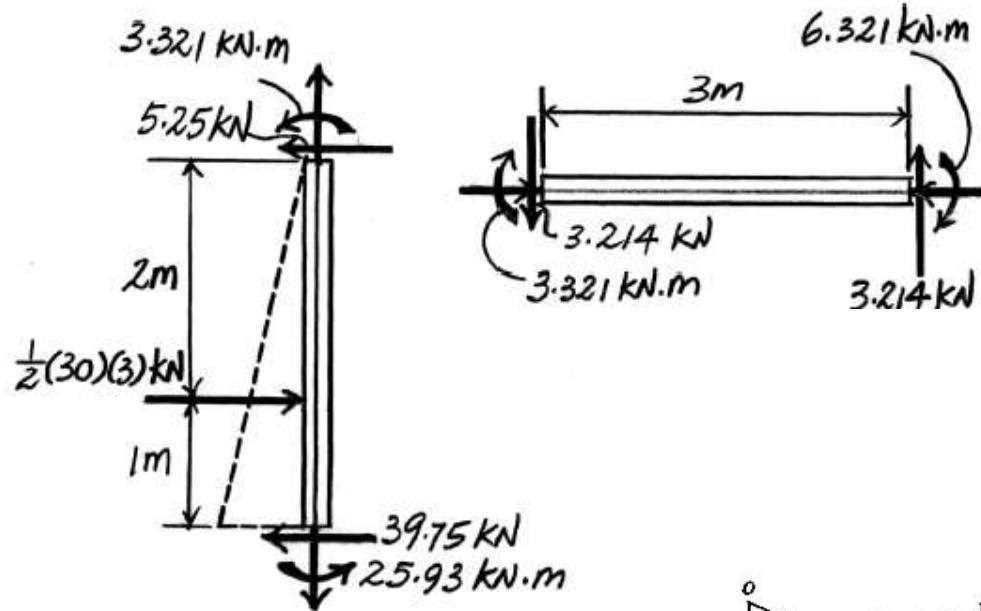
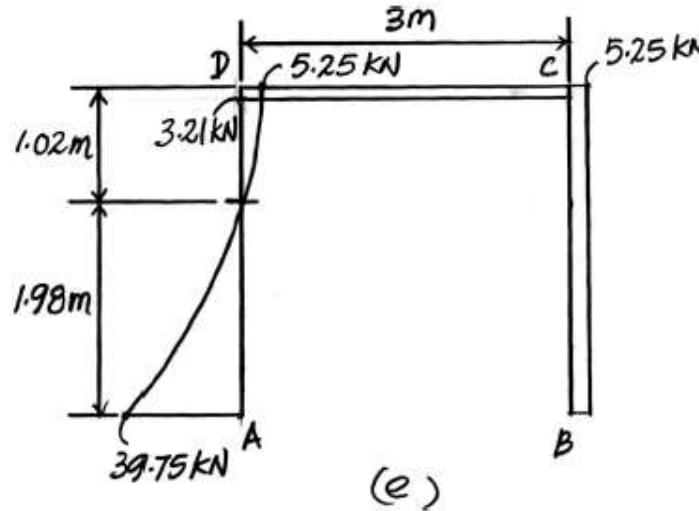
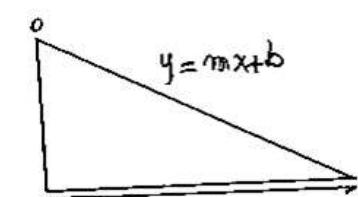


Diagrama de Cortante



(e)



$$q = \frac{0-30}{3-0} x + 30$$

$$q = 30 - 10x$$

$$V = - \int q dx$$

$$V = \int (-30 + 10x) dx$$

$$V = -30x + \frac{10x^2}{2} + C_1$$

$$x=0 \quad C_1 = V_0 = 39.75$$

$$V = -30x + 5x^2 + 39.75$$

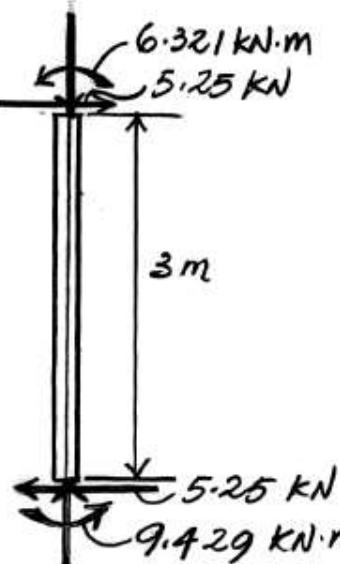
Para $V=0$

$$0 = -30x + 5x^2 + 39.75$$

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(5)(39.75)}}{2(5)}$$

$$x_1 = \frac{30 + \sqrt{105}}{10} = 4.02$$

$$x_2 = \frac{30 - \sqrt{105}}{10} = 1.98$$



$$M = \frac{dV}{dx} = \int (-30x + 5x^2 + 39.75) dx$$

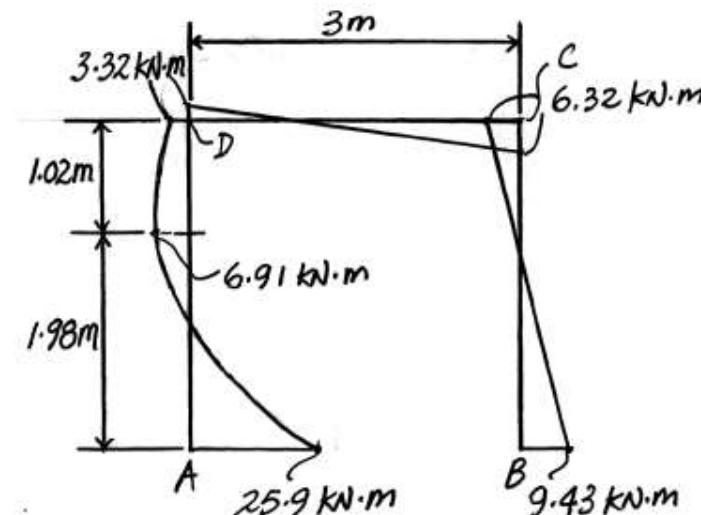
$$M = -\frac{30x^2}{2} + \frac{5}{3}x^3 + 39.75x + M_0$$

$$M = -15x^2 + \frac{5}{3}x^3 + 39.75x - 25.9$$

$$M(x=1.98) = -15(1.98)^2 + \frac{5}{3}(1.98)^3 + 39.75(1.98) - 25.9$$

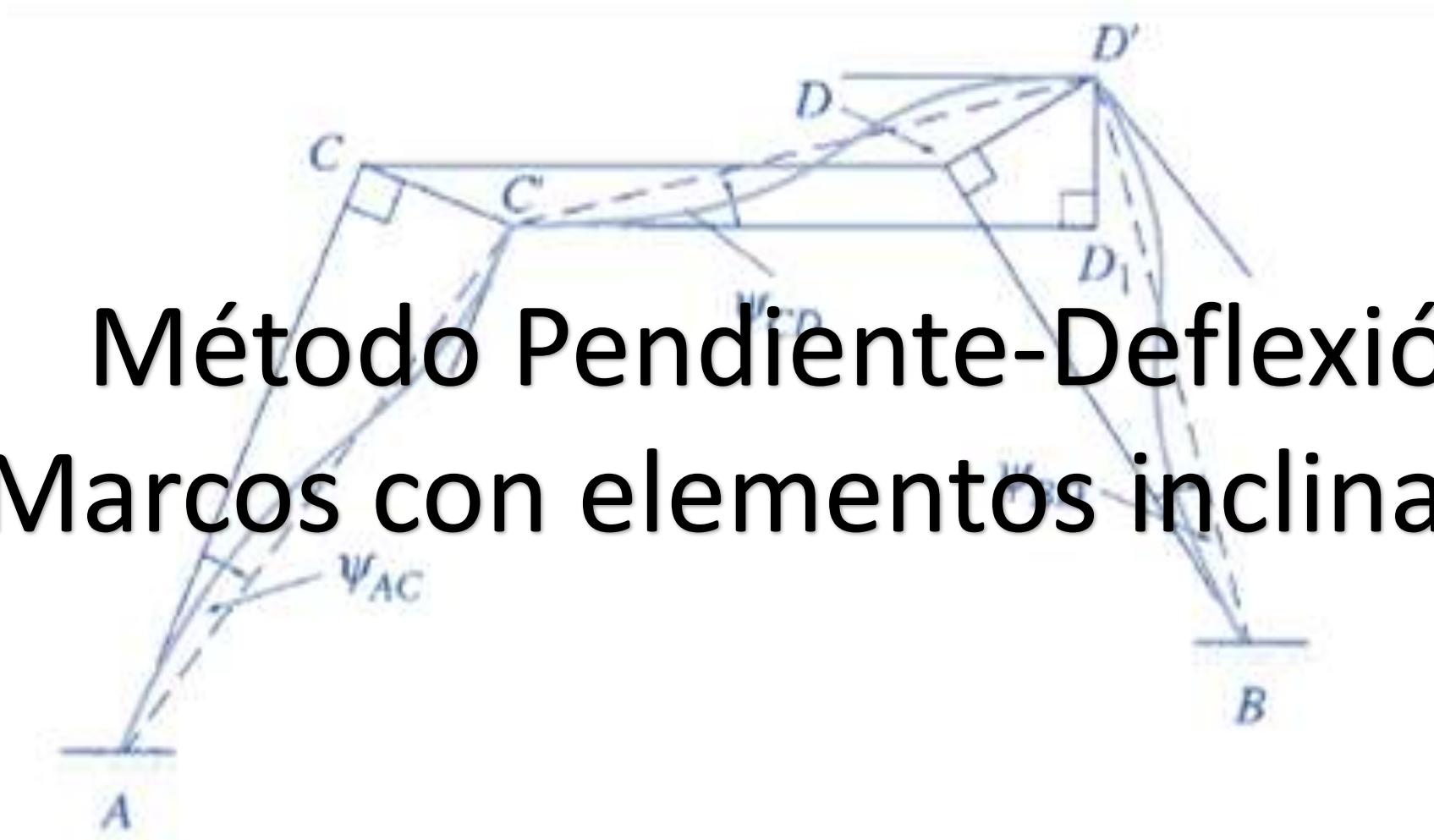
$$M(x=1.98) = 6.93 \text{ kN.m} //$$

Diagrama de Momento



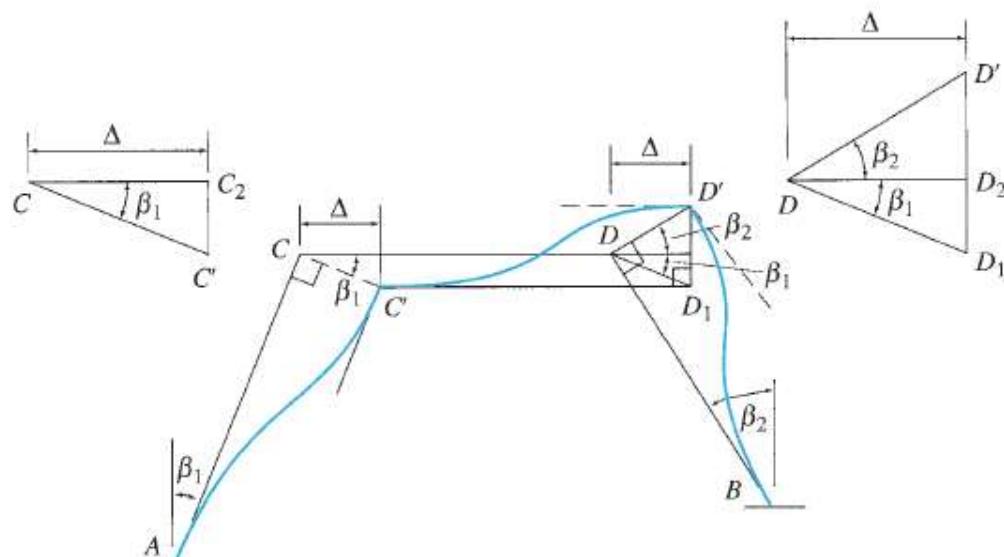
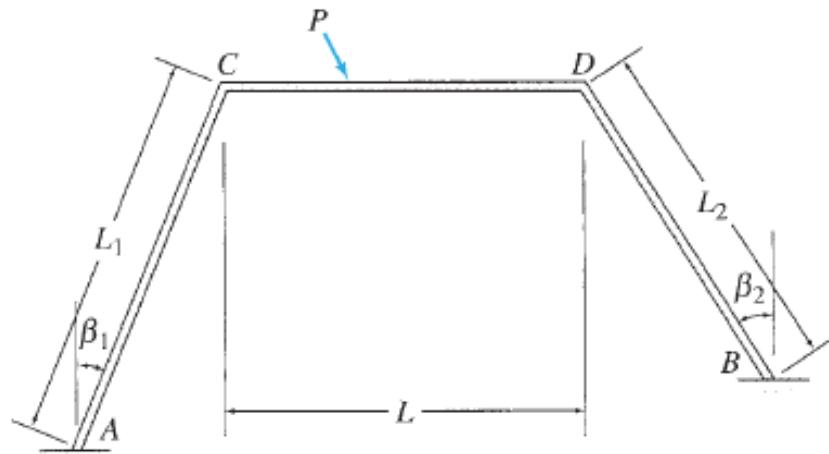
Método Pendiente-Deflexión

Marcos con elementos inclinados

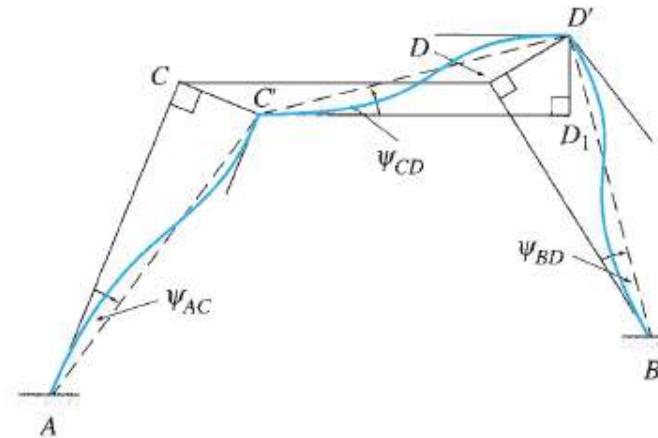


Marcos con elementos inclinados

Conceptos Básicos



(b) Configuración deformada debido al desplazamiento lateral



(c) Rotación de la cuerda debido al desplazamiento lateral

$$\psi_{AC} = -\frac{CC'}{L_1} \quad \psi_{BD} = -\frac{DD'}{L_2} \quad \psi_{CD} = \frac{D_1 D'}{L}$$

$$CC' = \frac{\Delta}{\cos \beta_1}$$

$$DD_2 = DD_1 \cos \beta_1 = \Delta$$

$$DD' = \frac{DD_2}{\cos \beta_2} = \frac{\Delta}{\cos \beta_2}$$

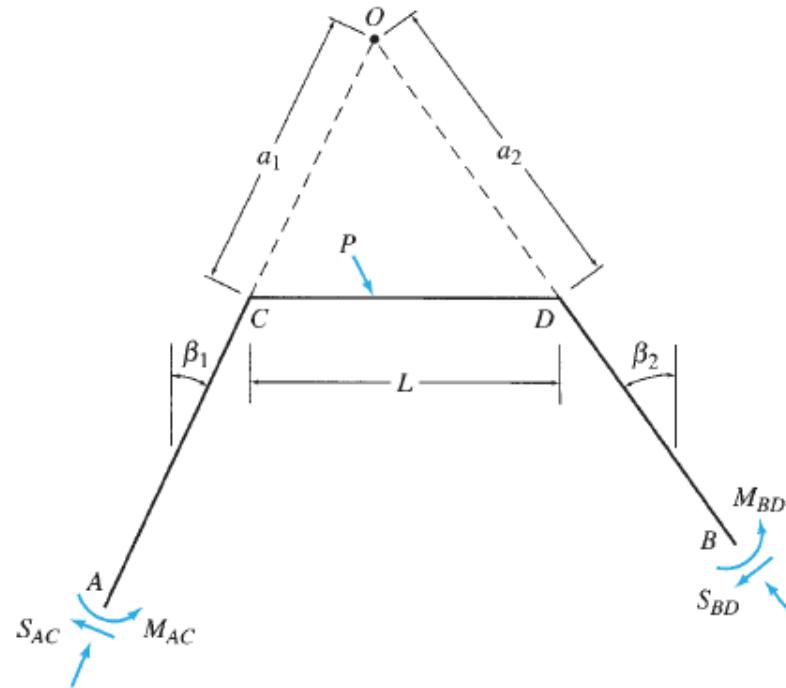
$$D_1 D' = DD_1 \sin \beta_1 + DD' \sin \beta_2 = \frac{\Delta}{\cos \beta_1} \sin \beta_1 + \frac{\Delta}{\cos \beta_2} \sin \beta_2$$

$$D_1 D' = \Delta(\tan \beta_1 + \tan \beta_2)$$

$$\begin{aligned}\psi_{AC} &= -\frac{\Delta}{L_1 \cos \beta_1} \\ \psi_{BD} &= -\frac{\Delta}{L_2 \cos \beta_2} \\ \psi_{CD} &= \frac{\Delta}{L} (\tan \beta_1 + \tan \beta_2)\end{aligned}$$

Marcos con elementos inclinados

Ecuaciones de Compatibilidad



Tercera ecuación de Compatibilidad

“Realizar momento alrededor de un punto imaginario O (Centro Instantáneo de Rotación) donde convergen los elementos inclinados de todas las fuerzas externas que inciden en el marco”

$$\sum M_o = 0$$

$$a_1 \cos \beta_1 = a_2 \cos \beta_2$$

$$a_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \beta_2 = L$$

$$a_1 = \frac{L}{\cos \beta_1 (\tan \beta_1 + \tan \beta_2)}$$

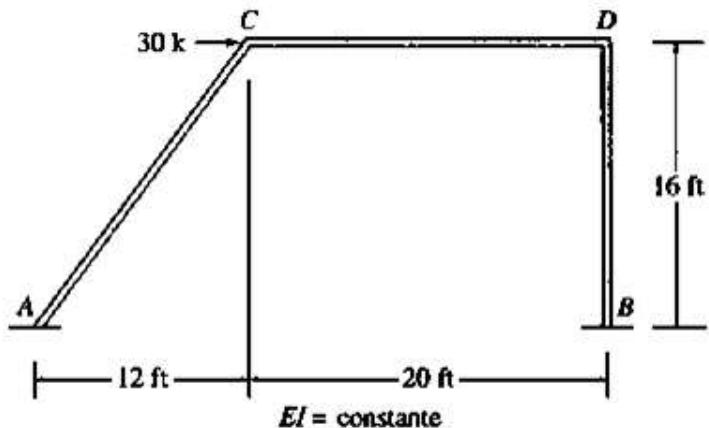
$$a_2 = \frac{L}{\cos \beta_2 (\tan \beta_1 + \tan \beta_2)}$$

Dos primeras ecuaciones

“Equilibrio de Momento en los nodos”

$$\sum M_C = 0 \quad y \quad \sum M_D = 0$$

Determine los momentos en los extremos del elemento y las reacciones del marco mostrado en la Fig. 15.18(a). Utilice el método de la pendiente-deflexión.



(a) Marco

Solución

Grados de libertad. Los grados de libertad son θ_c y θ_d y Δ .

Momentos de empotre. Debido a que no hay cargas externas aplicadas a los elementos, los momentos de empotre son cero.

Rotación de las cuerdas. De la Fig. 15.18(b) podemos ver que

$$\psi_{AC} = -\frac{CC'}{20} = -\frac{\left(\frac{5}{4}\right)\Delta}{20} = -0.0625\Delta$$

$$\psi_{BD} = -\frac{DD'}{16} = -\frac{\Delta}{16} = -0.0625\Delta$$

$$\psi_{CD} = \frac{C'C_1}{20} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)\Delta}{20} = 0.0375\Delta$$

Ecuaciones de la pendiente-deflexión

$$M_{AC} = \frac{2EI}{20} [\theta_c - 3(-0.0625\Delta)] = 0.1EI\theta_c + 0.0188EI\Delta \quad (1)$$

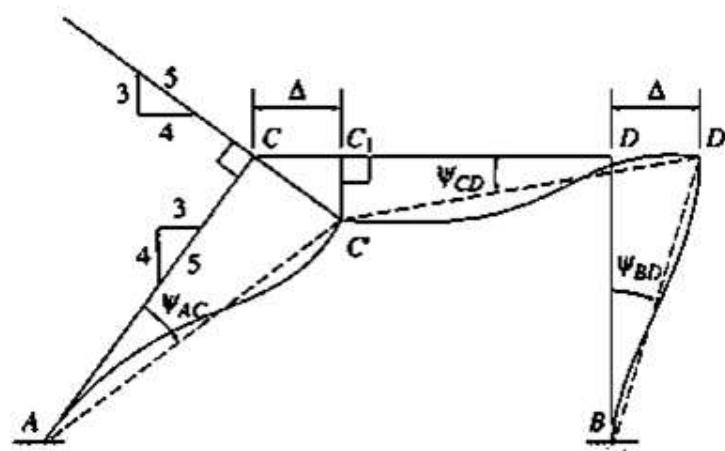
$$M_{CA} = \frac{2EI}{20} [2\theta_c - 3(-0.0625\Delta)] = 0.2EI\theta_c + 0.0188EI\Delta \quad (2)$$

$$M_{BD} = \frac{2EI}{16} [\theta_d - 3(-0.0625\Delta)] = 0.125EI\theta_d + 0.0234EI\Delta \quad (3)$$

$$M_{DB} = \frac{2EI}{16} [2\theta_d - 3(-0.0625\Delta)] = 0.25EI\theta_d + 0.0234EI\Delta \quad (4)$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{20} [2\theta_c + \theta_d - 3(0.0375\Delta)] = 0.2EI\theta_c + 0.1EI\theta_d - 0.0113EI\Delta \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{20} [2\theta_d + \theta_c - 3(0.0375\Delta)] = 0.2EI\theta_d + 0.1EI\theta_c - 0.0113EI\Delta \quad (6)$$



(b) Rotaciones de la cuerda debido al desplazamiento lateral permitido

Ecuaciones de equilibrio. Considerando el equilibrio de momentos del nodo *C* y *D*, obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$M_{CA} + M_{CD} = 0 \quad (7)$$

$$M_{DB} + M_{DC} = 0 \quad (8)$$

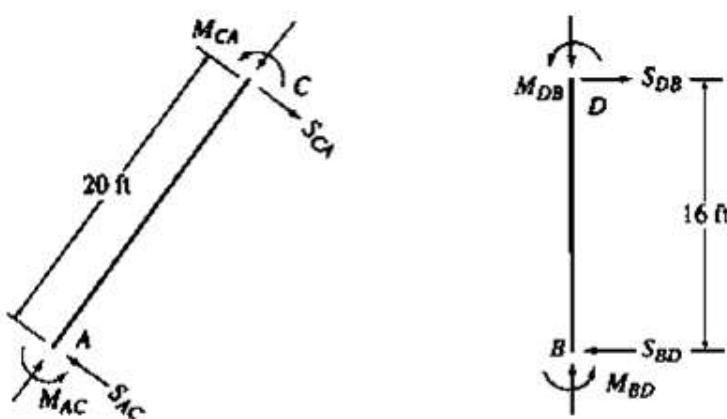
La tercera ecuación de equilibrio se establece sumando los momentos de todas las fuerzas y pares que actúan en el cuerpo libre del marco completo alrededor del punto *O*, el cual se localiza en la intersección del eje longitudinal de las dos columnas, como se muestra en la Fig. 15.18(c). Así,

$$+ C \sum M_O = 0 \quad M_{AC} - S_{AC}(53.33) + M_{BD} - S_{BD}(42.67) + 30(26.67) = 0$$

Donde el cortante en los extremos inferiores de las columnas se puede expresar en término de los momentos de los extremos de la columna como (ver la Fig. 15.18(d)):

$$S_{AC} = \frac{M_{AC} + M_{CA}}{20} \quad \text{y} \quad S_{BD} = \frac{M_{BD} + M_{DB}}{16}$$

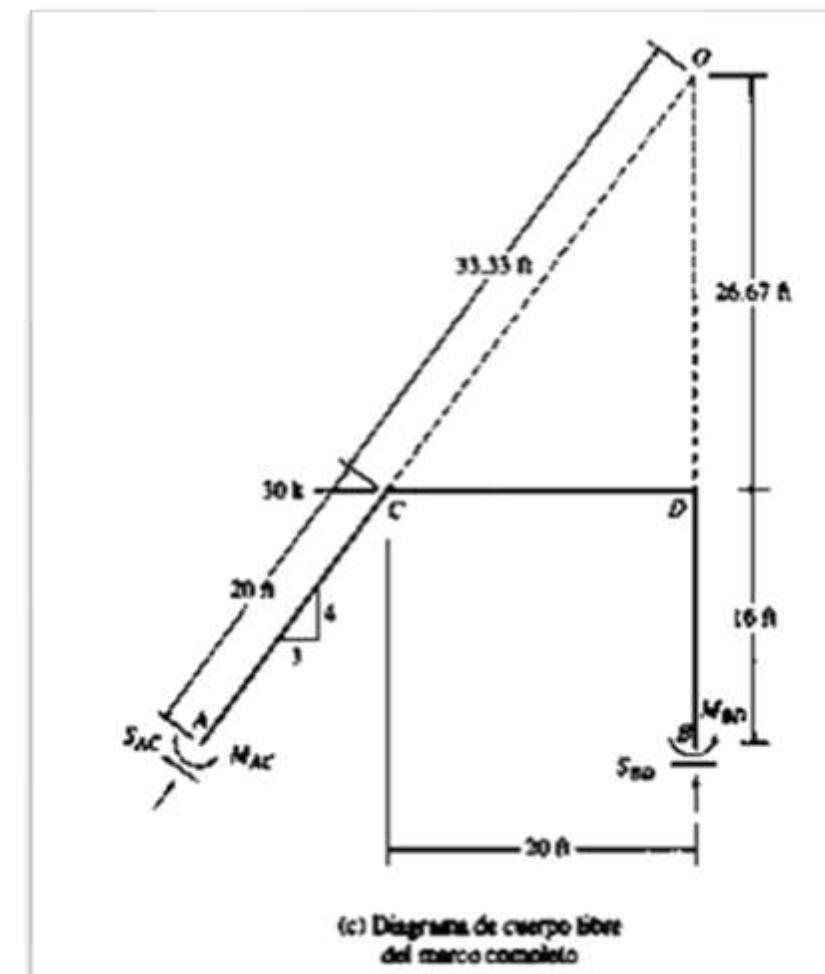
continúa



(d) Diagramas de cuerpo libre
de las columnas *AC* y *BD*

Sustituyendo estas expresiones en la tercera ecuación de equilibrio, obtenemos

$$1.67M_{AC} + 2.67M_{CA} + 1.67M_{BD} + 2.67M_{DB} = 800 \quad (9)$$



(c) Diagrama de cuerpo libre
del marco completo

Desplazamientos de los nodos. Sustituyendo las ecuaciones de equilibrio de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (6)) en las ecuaciones de equilibrio (Ecs. (7) a la (9)), resulta que

$$0.4EI\theta_C + 0.1EI\theta_D + 0.0075EI\Delta = 0 \quad (10)$$

$$0.1EI\theta_C + 0.45EI\theta_D + 0.0121EI\Delta = 0 \quad (11)$$

$$0.71EI\theta_C + 0.877EI\theta_D + 0.183EI\Delta = 800 \quad (12)$$

Resolviendo las Ecs. (10) a la (12) simultáneamente, determinamos:

$$EI\theta_C = -66.648 \text{ k}\cdot\text{ft}^2$$

$$EI\theta_D = -125.912 \text{ k}\cdot\text{ft}^2$$

$$EI\Delta = 5,233.6 \text{ k}\cdot\text{ft}^3$$

Momentos en los extremos del elemento. Sustituyendo los valores numéricos de $EI\theta_C$, $EI\theta_D$ y $EI\Delta$ en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (6)), obtenemos

$$M_{AC} = 91.7 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CA} = 85.1 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BD} = 106.7 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DB} = 91 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CD} = -85.1 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{o} \quad 85.1 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DC} = -91 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{o} \quad 91 \text{ k}\cdot\text{ft} \quad \text{Respuesta}$$

Sustituyendo nuevamente los valores numéricos de los momentos en los extremos del elemento en las ecuaciones de equilibrio resulta que

$$M_{CA} + M_{CD} = 85.1 - 85.1 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$M_{DB} + M_{DC} = 91 - 91 = 0 \quad \text{Comprobación continua}$$

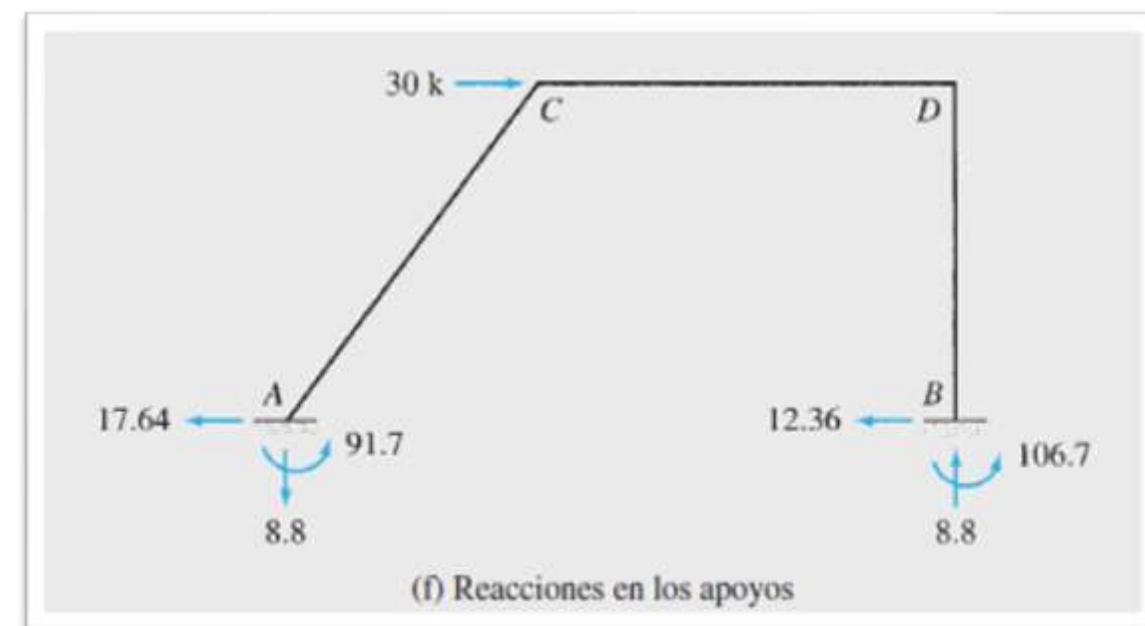
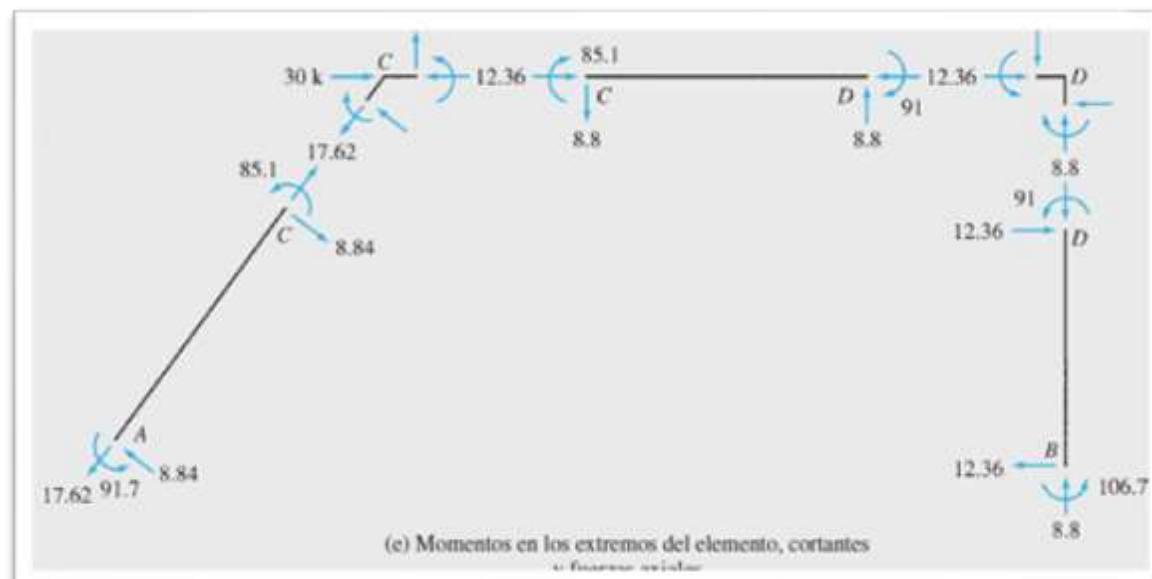
$$\begin{aligned} 1.67M_{AC} + 2.67M_{CA} + 1.67M_{BD} + 2.67M_{DB} &= 1.67(91.7) + 2.67(85.1) \\ &\quad + 1.67(106.7) + 2.67(91) \\ &= 801.5 \approx 800 \quad \text{Comprobación} \end{aligned}$$

Cortantes en los extremos del elemento y fuerzas axiales. Ver la Fig. 15.18(e).

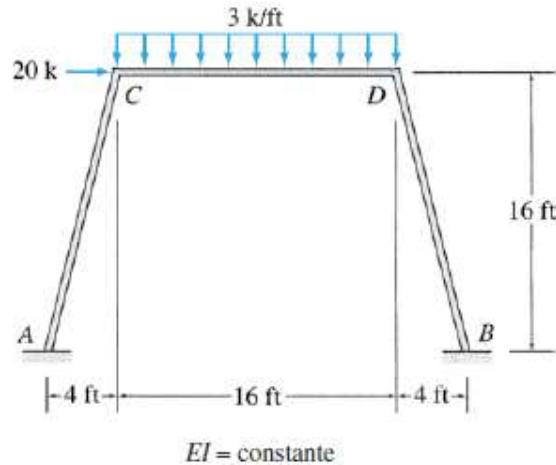
Reacciones en los apoyos. Ver la Fig. 15.18(f).

Respuesta

Comprobación del equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se cumplen.



Para el marco mostrado encuentre los momentos finales en los extremos



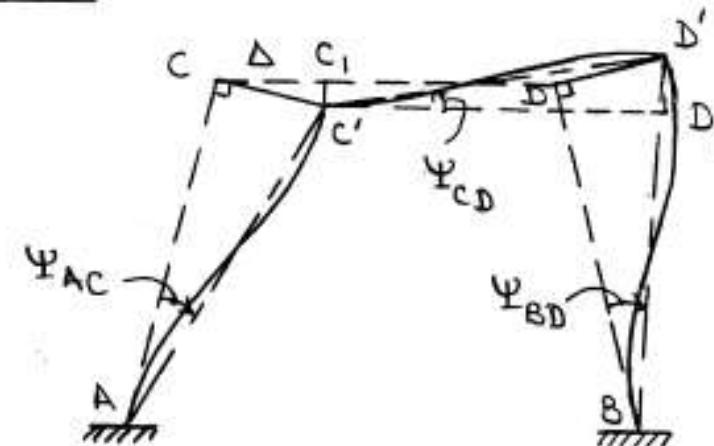
16.30 Fixed-end moments: The non-zero fixed-end moments are: $FEM_{CD} = \frac{3(16)^2}{12} = 64 \text{ k-ft}$ and $FEM_{DC} = -64 \text{ k-ft}$.

$$\Psi_{AC} = -\frac{CC'}{L_{AC}} = -\frac{(\sqrt{17}/4)\Delta}{16.49} = -0.0625\Delta$$

$$\Psi_{BD} = -\frac{DD'}{L_{BD}} = -\frac{(\sqrt{17}/4)\Delta}{16.49} = -0.0625\Delta$$

$$\Psi_{CD} = \frac{D_1D'}{L_{CD}} = \frac{2(1/4)\Delta}{16} = 0.03125\Delta$$

Chord rotations:



Slope-deflection equations:

$$M_{AC} = 0.121EI(\theta_C + 0.188\Delta); M_{CA} = 0.121EI(2\theta_C + 0.188\Delta)$$

$$M_{BD} = 0.121EI(\theta_D + 0.188\Delta); M_{DB} = 0.121EI(2\theta_D + 0.188\Delta)$$

$$M_{CD} = 0.125EI(2\theta_C + \theta_D - 0.0938\Delta) + 64$$

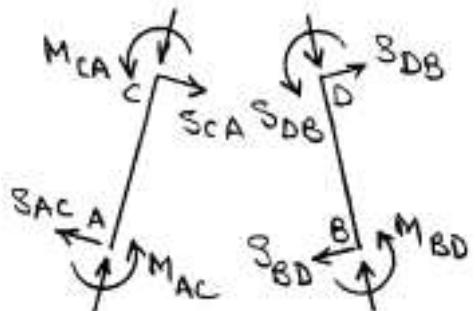
$$M_{DC} = 0.125EI(\theta_C + 2\theta_D - 0.0938\Delta) - 64$$

Equilibrium equations: $M_{CA} + M_{CD} = 0$

$$0.492EI\theta_C + 0.125EI\theta_D + 0.011EI\Delta = -64 \quad (1)$$

$$M_{DC} + M_{DB} = 0$$

$$0.125EI\theta_C + 0.492EI\theta_D + 0.011EI\Delta = 64 \quad (2)$$



$$+G \sum M_O = 0$$

$$M_{AC} + M_{BD} - (S_{AC} + S_{BD})49.49 + 20(32) = 0$$

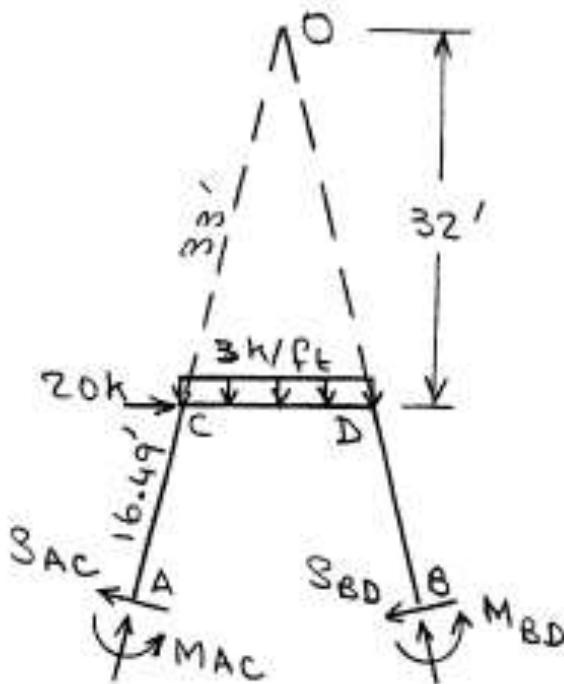
$$M_{AC} + M_{BD} - \frac{49.49}{16.49}(M_{AC} + M_{CA} + M_{BD} + M_{DB}) + 640 = 0$$

$$0.968 EI\theta_C + 0.968 EI\theta_D + 0.227 EI\Delta = 640 \quad (3)$$

By solving Eqs. (1) thru (3), we obtain:

$$EI\theta_C = -233.7 \text{ k-ft}^2, EI\theta_D = 115.1 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\Delta = 3325 \text{ k-ft}^3$$



Member end moments. Substituting the numerical values of $EI\theta_C$, $EI\theta_D$ and $EI\Delta$ into the slope-deflection equations, we obtain: $M_{AC} = 47.4 \text{ k-ft}$;

$$\underline{M_{CA} = 19 \text{ k-ft}}; \underline{M_{BD} = 89.5 \text{ k-ft}}; \underline{M_{DB} = 103.5 \text{ k-ft}};$$

$$\underline{M_{CD} = -19 \text{ k-ft}}; \underline{M_{DC} = -103.5 \text{ k-ft}}$$

Ecuaciones de equilibrio. Del equilibrio de momentos en las juntas *B* y *C* se obtiene

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$

$$M_{CD} + M_{CB} = 0 \quad (8)$$

La tercera ecuación de equilibrio necesaria puede obtenerse al sumar momentos respecto al punto *O* sobre todo el marco, figura 11-22d. Esto elimina las fuerzas desconocidas normales \mathbf{N}_A y \mathbf{N}_D y, por lo tanto

$$\sum M_O = 0;$$

$$M_{AB} + M_{DC} - \left(\frac{M_{AB} + M_{BA}}{10} \right)(34) - \left(\frac{M_{DC} + M_{CD}}{20} \right)(40.78) - 24(6) = 0 \\ -2.4M_{AB} - 3.4M_{BA} - 2.04M_{CD} - 1.04M_{DC} - 144 = 0 \quad (9)$$

Si se sustituyen estos valores en las ecuaciones (1)-(6), se tiene

$$M_{AB} = -23.2 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad M_{BC} = 5.63 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad M_{CD} = -25.3 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Resp.

$$M_{BA} = -5.63 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad M_{CB} = 25.3 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad M_{DC} = -17.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Resp.

Al sustituir las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (7), las ecuaciones (4) y (5) en la ecuación (8), y las ecuaciones (1), (2), (5) y (6) en la ecuación (9) resulta

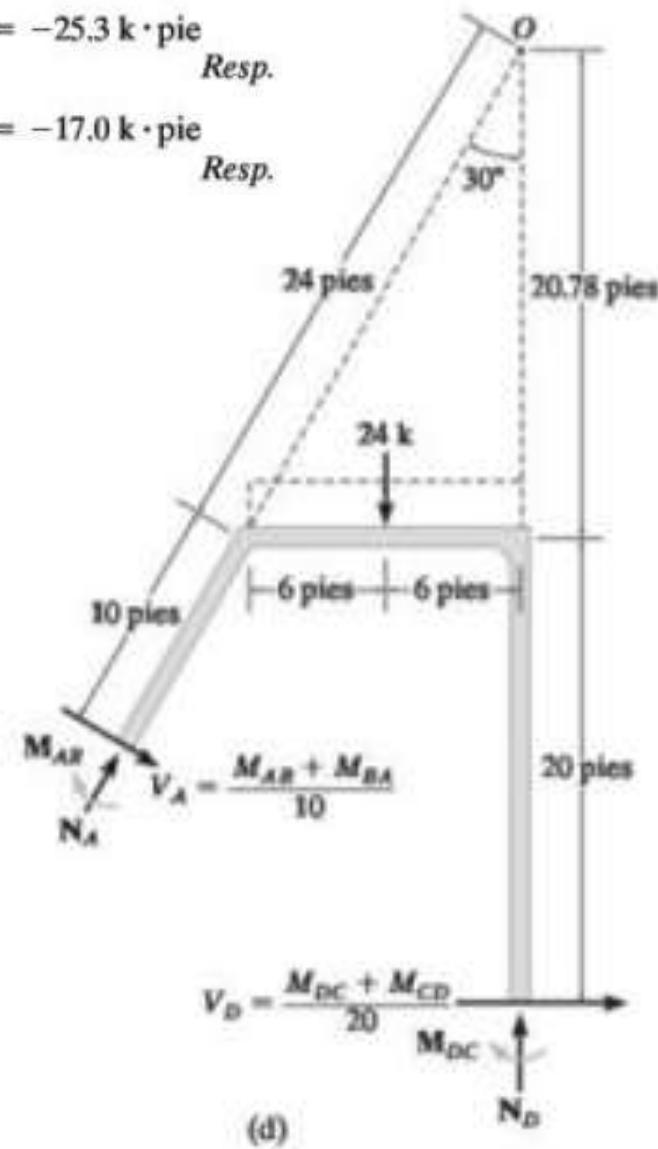
$$0.733\theta_B + 0.167\theta_C - 0.392\psi_1 = \frac{24}{EI}$$

$$0.167\theta_B + 0.533\theta_C + 0.0784\psi_1 = -\frac{24}{EI}$$

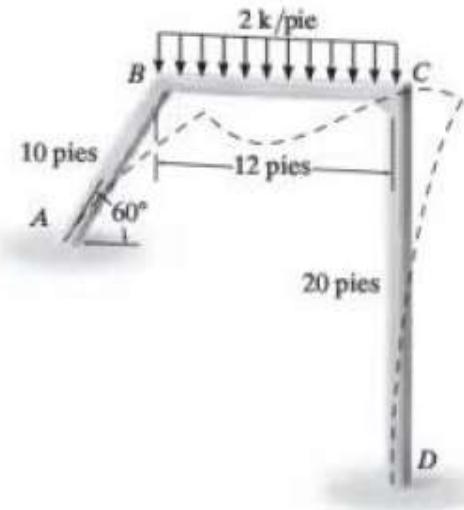
$$-1.840\theta_B - 0.512\theta_C + 3.880\psi_1 = \frac{144}{EI}$$

Al resolver estas ecuaciones simultáneamente se obtiene

$$EI\theta_B = 87.67 \quad EI\theta_C = -82.3 \quad EI\psi_1 = 67.83$$

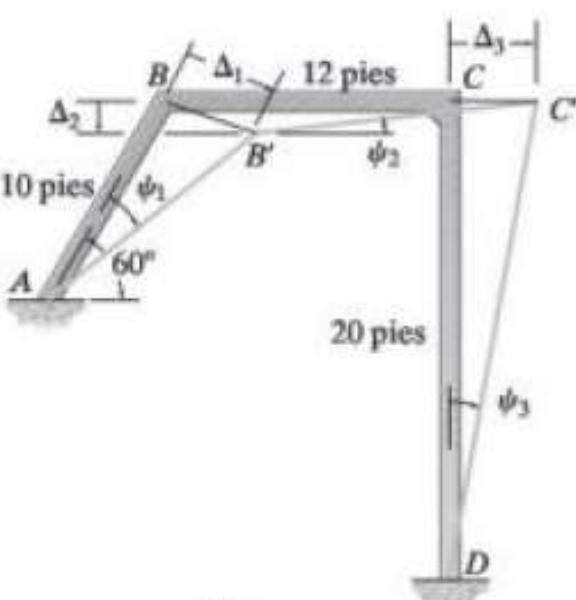


Determine los momentos en cada junta del marco que se muestra en la figura 11-22a. EI es constante para cada elemento.



El elemento inclinado AB ocasiona que el marco se ladee hacia la derecha, según se muestra en la figura 11-22a. Como resultado, las juntas B y C experimentan desplazamientos, tanto de rotación como lineales. Los desplazamientos lineales se muestran en la figura 11-22b, donde B se mueve Δ_1 hacia B' y C se mueve Δ_3 hacia C' . Estos desplazamientos hacen que las cuerdas de los elementos giren ψ_1 , ψ_3 (sentido horario) y $-\psi_2$ (sentido antihorario), como se muestra en la figura.* Por lo tanto,

$$\psi_1 = \frac{\Delta_1}{10} \quad \psi_2 = -\frac{\Delta_2}{12} \quad \psi_3 = \frac{\Delta_3}{20}$$



SOLUCIÓN

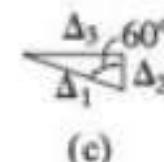
Ecuaciones de pendiente-deflexión. La ecuación 11-8 se aplica a cada uno de los tres claros. Los FEM son

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{2(12)^2}{12} = -24 \text{ k}\cdot\text{pie}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{2(12)^2}{12} = 24 \text{ k}\cdot\text{pie}$$

Como se muestra en la figura 11-22c, los tres desplazamientos pueden relacionarse. Por ejemplo, $\Delta_2 = 0.5\Delta_1$ y $\Delta_3 = 0.866\Delta_1$. Por lo tanto, a partir de las ecuaciones anteriores se tiene

$$\psi_2 = -0.417\psi_1 \quad \psi_3 = 0.433\psi_1$$



Con base en estos resultados, las ecuaciones de pendiente-deflexión de la estructura son

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{10}\right)[2(0) + \theta_B - 3\psi_1] + 0 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{10}\right)[2\theta_B + 0 - 3\psi_1] + 0 \quad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3(-0.417\psi_1)] - 24 \quad (3)$$

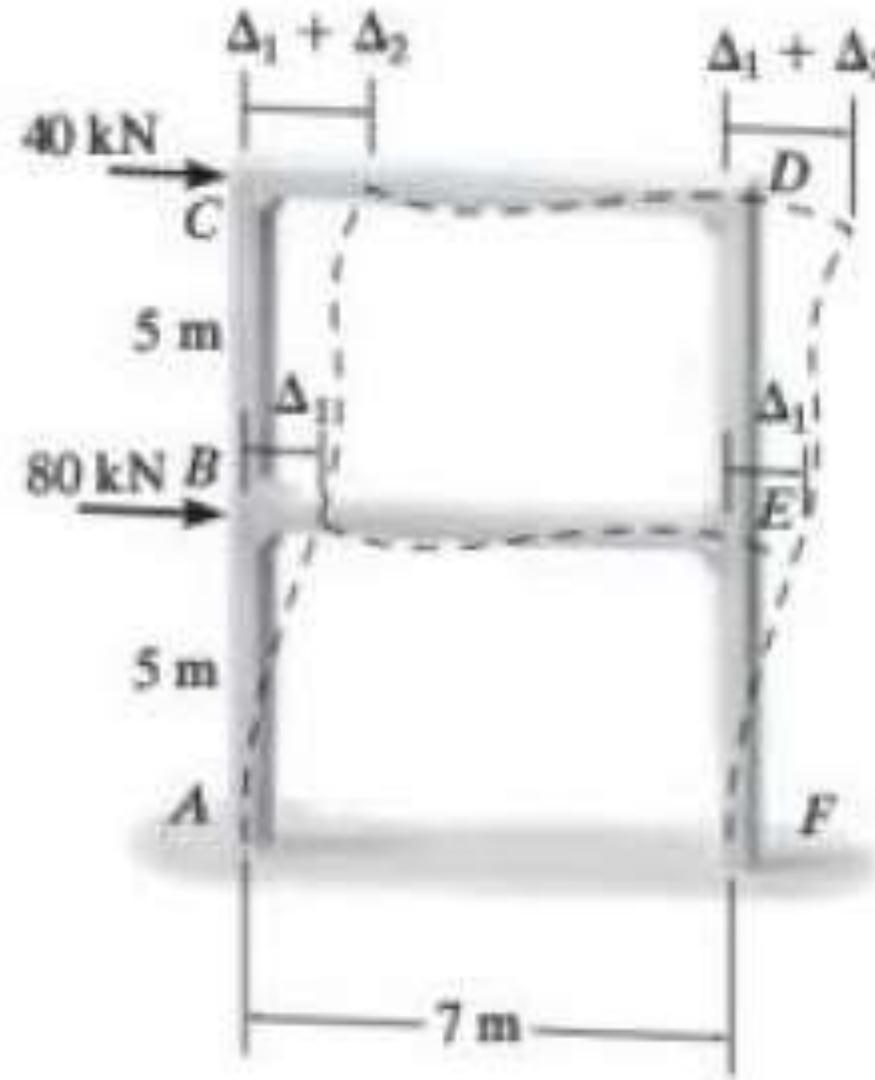
$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3(-0.417\psi_1)] + 24 \quad (4)$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{20}\right)[2\theta_C + 0 - 3(0.433\psi_1)] + 0 \quad (5)$$

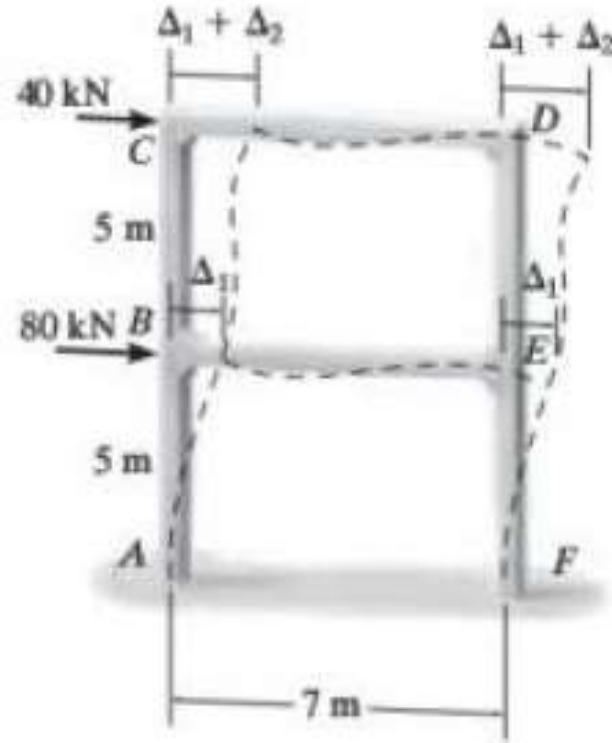
$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{20}\right)[2(0) + \theta_C - 3(0.433\psi_1)] + 0 \quad (6)$$

Estas seis ecuaciones contienen nueve incógnitas.

Método Pendiente- Deflexión Marcos de Múltiples pisos



Explique cómo se determinan los momentos en cada junta de la estructura de dos niveles que se muestra en la figura 11-21a. EI es constante.



SOLUCIÓN

Ecuación de pendiente-deflexión. Como los soportes en A y F están fijos, la ecuación 11-8 se aplica para los seis claros de la estructura. No es necesario calcular ningún FEM porque la carga aplicada actúa en las juntas. Aquí, la carga desplaza a las juntas B y E una cantidad Δ_1 , y a C y D una cantidad $\Delta_1 + \Delta_2$. El resultado es que los elementos AB y FE experimentan rotaciones de $\psi_1 = \Delta_1/5$, y BC y ED se someten a rotaciones de $\psi_2 = \Delta_2/5$.

Al aplicar la ecuación 11-8 al marco se obtiene

$$M_{BE} = 2E\left(\frac{I}{7}\right)[2\theta_B + \theta_E - 3(0)] + 0 \quad (7)$$

$$M_{EB} = 2E\left(\frac{I}{7}\right)[2\theta_E + \theta_B - 3(0)] + 0 \quad (8)$$

$$M_{ED} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_E + \theta_D - 3\psi_2] + 0 \quad (9)$$

$$M_{DE} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_D + \theta_E - 3\psi_2] + 0 \quad (10)$$

$$M_{FE} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2(0) + \theta_E - 3\psi_1] + 0 \quad (11)$$

$$M_{EF} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_E + 0 - 3\psi_1] + 0 \quad (12)$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2(0) + \theta_E - 3\psi_1] + 0 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_B + 0 - 3\psi_1] + 0 \quad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3\psi_2] + 0 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3\psi_2] + 0 \quad (4)$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{7}\right)[2\theta_C + \theta_D - 3(0)] + 0 \quad (5)$$

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{7}\right)[2\theta_D + \theta_C - 3(0)] + 0 \quad (6)$$

Estas 12 ecuaciones contienen 18 incógnitas.

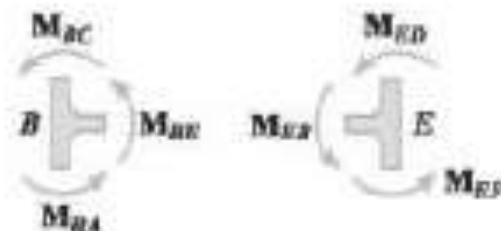
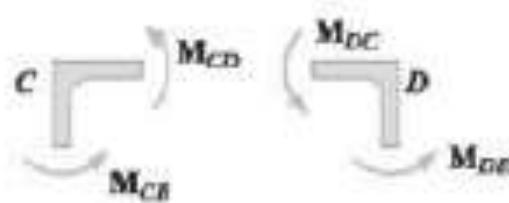
Ecuaciones de equilibrio. El equilibrio de momentos en las juntas *B*, *C*, *D* y *E*, figura 11-21*b*, requiere que

$$M_{BA} + M_{BE} + M_{BC} = 0 \quad (13)$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (14)$$

$$M_{DC} + M_{DE} = 0 \quad (15)$$

$$M_{EF} + M_{EB} + M_{ED} = 0 \quad (16)$$

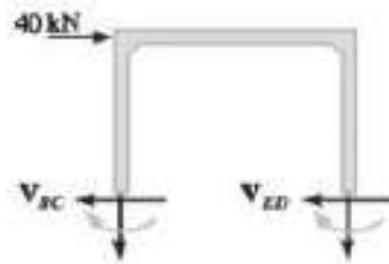


(b)

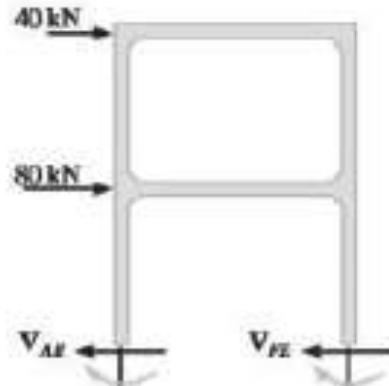
Como en los ejemplos anteriores, la fuerza cortante en la base de todas las columnas de cualquier nivel debe equilibrar las cargas horizontales aplicadas, figura 11-21*c*. De aquí resulta

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\pm} \sum F_x &= 0; & 40 - V_{BC} - V_{ED} &= 0 \\ 40 + \frac{M_{BC} + M_{CB}}{5} + \frac{M_{ED} + M_{DE}}{5} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\pm} \sum F_x &= 0; & 40 + 80 - V_{AB} - V_{FE} &= 0 \\ 120 + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{5} + \frac{M_{EF} + M_{FE}}{5} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$



La solución requiere sustituir las ecuaciones (1)-(12) en las ecuaciones (13)-(18), de donde resultan seis ecuaciones con seis incógnitas, ψ_1 , ψ_2 , θ_B , θ_C , θ_D y θ_E . Estas ecuaciones pueden resolverse de manera simultánea. Los resultados se sustituyen de nuevo en las ecuaciones (1)-(12), de donde se obtienen los momentos en las juntas.



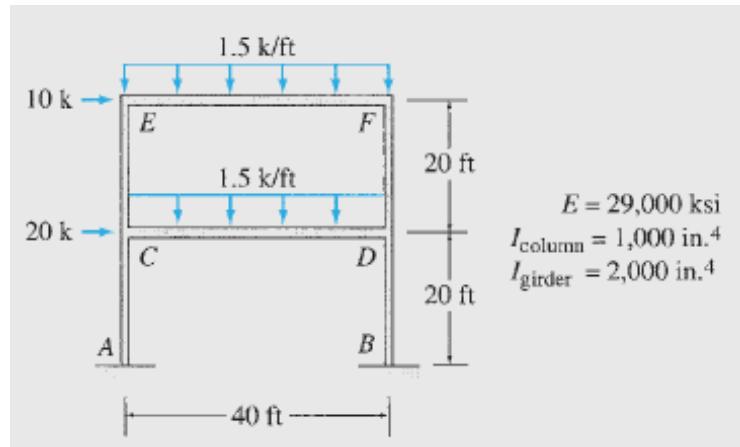
(c)

Determine los momentos en los extremos del elemento, las reacciones en los apoyos y la deflexión horizontal del nodo F del marco de dos niveles de la Fig. 15.19(a). Utilice el método de la pendiente-deflexión.

Momentos de empotre. Los momentos de empotre son:

$$FEM_{CD} = FEM_{EF} = 200 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{DC} = FEM_{FE} = -200 \text{ k-ft}$$



Solución

Grados de libertad. En la Fig. 15.19(a) podemos ver que los nodos C, D, E y F del marco están libres a la rotación, y el desplazamiento en dirección horizontal. Como se muestra en la Fig. 15.19(b), el desplazamiento horizontal de los nodos del primer entrepiso en los nodos C y D se designa como Δ_1 , mientras que el desplazamiento horizontal del segundo entrepiso de los nodos E y F se expresa como Δ_2 , representando el desplazamiento relativo de los nodos del segundo entrepiso con los nodos del primer entrepiso. Por lo tanto, el marco tiene seis grados de libertad, es decir, θ_C , θ_D , θ_E y θ_F , Δ_1 y Δ_2 .

Ecuaciones de la pendiente-deflexión. Usando $I_{columna} = I$ e $I_{girder} = 2I$ escribimos

$$M_{AC} = 0.1EI\theta_C + 0.015EI\Delta_1 \quad (1)$$

$$M_{CA} = 0.2EI\theta_C + 0.015EI\Delta_1 \quad (2)$$

$$M_{BD} = 0.1EI\theta_D + 0.015EI\Delta_1 \quad (3)$$

$$M_{DB} = 0.2EI\theta_D + 0.015EI\Delta_1 \quad (4)$$

$$M_{CE} = 0.2EI\theta_C + 0.1EI\theta_E + 0.015EI\Delta_2 \quad (5)$$

$$M_{EC} = 0.2EI\theta_E + 0.1EI\theta_C + 0.015EI\Delta_2 \quad (6)$$

$$M_{DF} = 0.2EI\theta_D + 0.1EI\theta_F + 0.015EI\Delta_2 \quad (7)$$

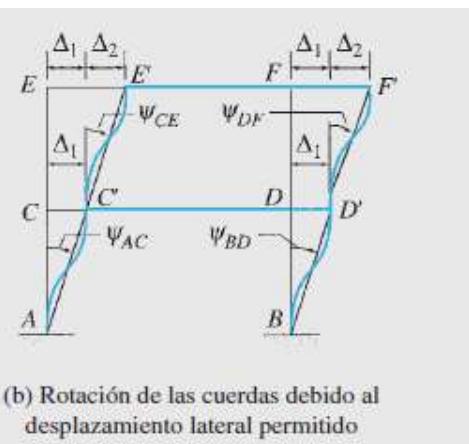
$$M_{FD} = 0.2EI\theta_F + 0.1EI\theta_D + 0.015EI\Delta_2 \quad (8)$$

$$M_{CD} = 0.2EI\theta_C + 0.1EI\theta_D + 200 \quad (9)$$

$$M_{DC} = 0.2EI\theta_D + 0.1EI\theta_C - 200 \quad (10)$$

$$M_{EF} = 0.2EI\theta_E + 0.1EI\theta_F + 200 \quad (11)$$

$$M_{FE} = 0.2EI\theta_F + 0.1EI\theta_E - 200 \quad (12)$$



(b) Rotación de las cuerdas debido al desplazamiento lateral permitido

Ecuaciones de equilibrio. Considerando el equilibrio de momentos de los nodos C, D, E y F, obtenemos

$$M_{CA} + M_{CD} + M_{CE} = 0 \quad (13)$$

$$M_{DB} + M_{DC} + M_{DF} = 0 \quad (14)$$

$$M_{EC} + M_{EF} = 0 \quad (15)$$

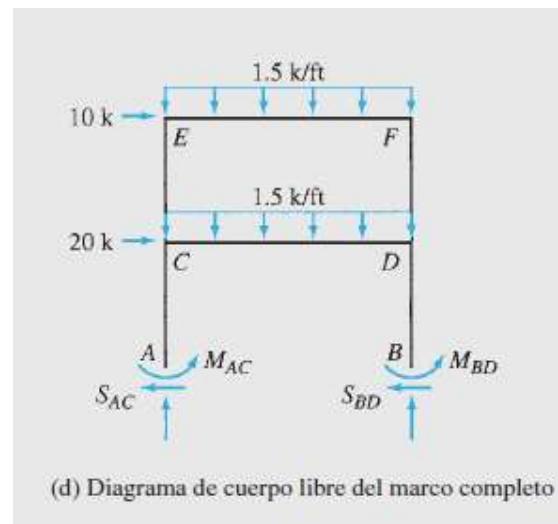
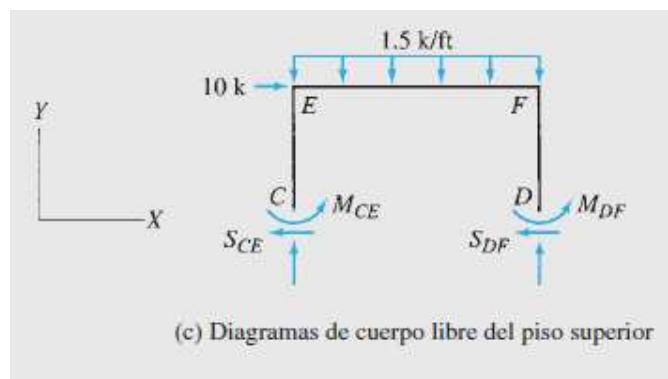
$$M_{FD} + M_{FE} = 0 \quad (16)$$

Para establecer las dos ecuaciones de equilibrio restantes, pasamos sucesivamente una sección horizontal justo arriba del extremo inferior de las columnas de cada entrepiso del marco y aplicamos la ecuación de equilibrio horizontal ($\sum F_x = 0$) al cuerpo libre de la porción del marco arriba de la sección. Los diagramas de cuerpo libre obtenidos así se muestran en las Figs. 15.19(c) y (d). Aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ al entrepiso superior del marco (Fig. 15.19(c)), obtenemos

$$S_{CE} + S_{DF} = 10$$

De manera similar, aplicando $\sum F_y = 0$ al marco completo (Fig. 15.19(d)), escribimos

$$S_{AC} + S_{BD} = 30$$



Expresando los cortantes en los extremos de las columnas en términos de los momentos en los extremos:

$$S_{AC} = \frac{M_{AC} + M_{CA}}{20} \quad S_{BD} = \frac{M_{BD} + M_{DB}}{20}$$

$$S_{CE} = \frac{M_{CE} + M_{EC}}{20} \quad S_{DF} = \frac{M_{DF} + M_{FD}}{1}$$

Y sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de equilibrio de fuerza, obtenemos

$$M_{CE} + M_{EC} + M_{DF} + M_{FD} = 200 \quad (17)$$

$$M_{AC} + M_{CA} + M_{BD} + M_{DB} = 600 \quad (18)$$

Desplazamiento de los nodos. Sustituyendo las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (12)) en las ecuaciones de equilibrio Ecs. (13) a la (18), resulta

$$0.6EI\theta_C + 0.1EI\theta_D + 0.1EI\theta_E + 0.015EI\Delta_1 + 0.015EI\Delta_2 = -200 \quad (19)$$

$$0.1EI\theta_C + 0.6EI\theta_D + 0.1EI\theta_F + 0.015EI\Delta_1 + 0.015EI\Delta_2 = 200 \quad (20)$$

$$0.1EI\theta_C + 0.4EI\theta_E + 0.1EI\theta_F + 0.015EI\Delta_2 = -200 \quad (21)$$

$$0.1EI\theta_D + 0.1EI\theta_E + 0.4EI\theta_F + 0.015EI\Delta_2 = 200 \quad (22)$$

$$0.3EI\theta_C + 0.3EI\theta_D + 0.3EI\theta_E + 0.3EI\theta_F + 0.06EI\Delta_2 = 200 \quad (23)$$

$$0.1EI\theta_C + 0.1EI\theta_D + 0.02EI\Delta_1 = 200 \quad (24)$$

Resolviendo las Ecs. (19) a la (24) por el método de eliminación de Gauss-Jordan (Apéndice B), determinamos

$$EI\theta_C = -812.988 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\theta_D = -241.556 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\theta_E = -789.612 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\theta_F = 353.248 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\Delta_1 = 15;272.728 \text{ k-ft}^3 \quad o \quad \Delta_1 = 0.0758 \text{ ft} = 0.91 \text{ in.} \rightarrow$$

$$EI\Delta_2 = 10;787.878 \text{ k-ft}^3 \quad o \quad \Delta_2 = 0.0536 \text{ ft} = 0.643 \text{ in.} \rightarrow$$

Por lo tanto, la deflexión horizontal del nodo F del marco es como sigue:

$$\Delta_F = \Delta_1 + \Delta_2 = 0.91 + 0.643 = 1.553 \text{ in.} \rightarrow$$

Respuesta

Momentos en los extremos del elemento. Sustituyendo los valores numéricos de los desplazamientos de los nodos en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (12)), obtenemos

$$M_{AC} = 147.8 \text{ k-ft}$$

$$M_{CA} = 66.5 \text{ k-ft}$$

$$M_{BD} = 204.9 \text{ k-ft}$$

$$M_{DB} = 180.8 \text{ k-ft}$$

$$M_{CE} = -79.7 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 79.7 \text{ k-ft}$$

$$M_{EC} = -77.4 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 77.4 \text{ k-ft}$$

$$M_{DF} = 148.8 \text{ k-ft}$$

$$M_{FD} = 208.3 \text{ k-ft}$$

$$M_{CD} = 13.2 \text{ k-ft}$$

$$M_{DC} = -329.6 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 329.6 \text{ k-ft}$$

$$M_{EF} = 77.4 \text{ k-ft}$$

$$M_{FE} = -208.3 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 208.3 \text{ k-ft}$$

Respuesta

$$M_{FD} + M_{FE} = 208.3 - 208.3 = 0$$

$$M_{CE} + M_{EC} + M_{DF} + M_{FD} = -79.7 - 77.4 + 148.8 + 208.3 = 200$$

$$M_{AC} + M_{CA} + M_{BD} + M_{DB} = 147.8 + 66.5 + 204.9 + 180.8 = 600$$

Comprobación

Comprobación

Comprobación

Cortantes en los extremos del elemento y fuerzas axiales. Ver la Fig. 15.19(e).

Reacciones en los apoyos. Ver la Fig. 15.19(f).

Comprobación del equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se cumplen.

Sustituyendo nuevamente los valores numéricos de los momentos en los extremos del elemento en las ecuaciones de equilibrio resulta que

$$M_{CA} + M_{CD} + M_{CE} = 66.5 + 13.2 - 79.7 = 0$$

Respuesta

$$M_{DB} + M_{DC} + M_{DF} = 180.8 - 329.6 + 148.8 = 0$$

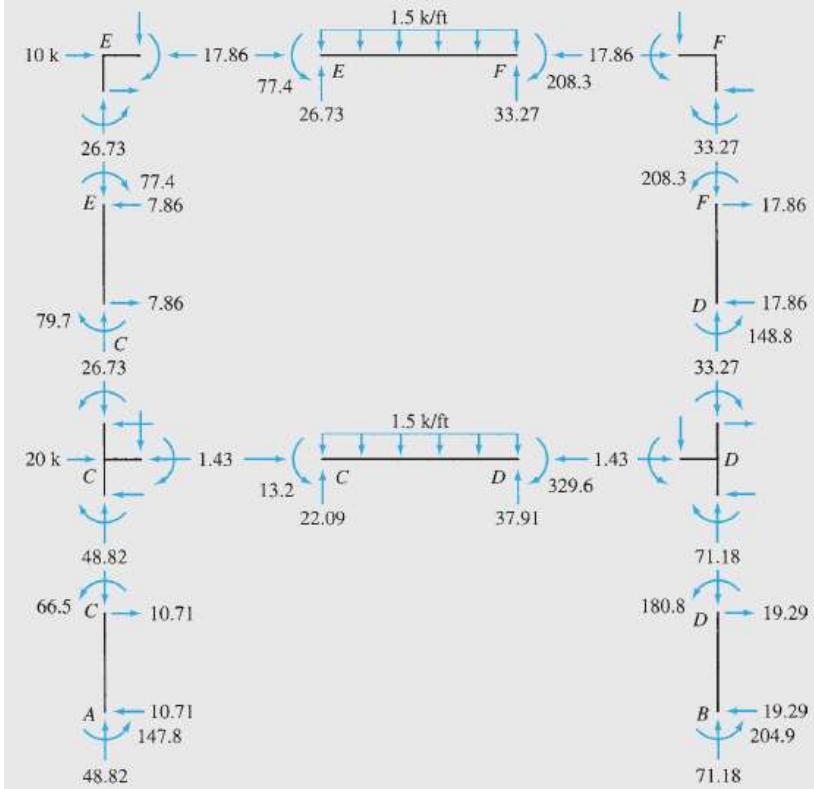
Comprobación

$$M_{EC} + M_{EF} = -77.4 + 77.4 = 0$$

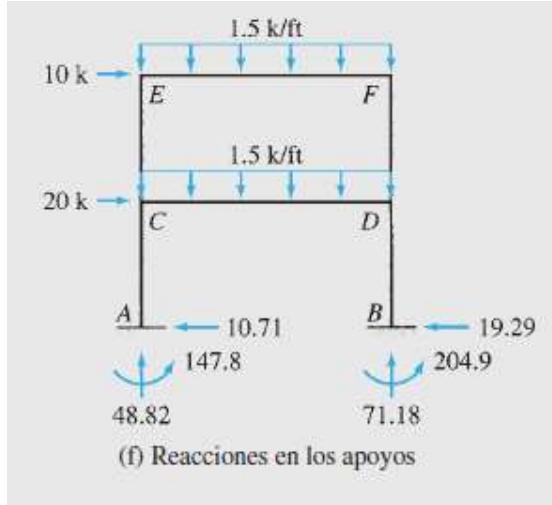
Comprobación

Comprobación

continúa

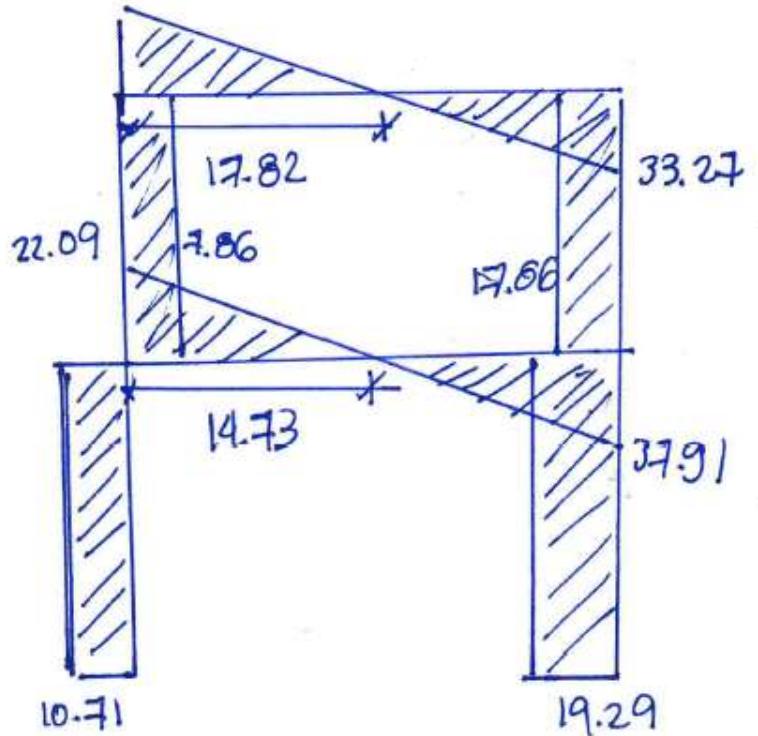


(e) Momentos en los extremos del elemento, cortantes y fuerzas axiales



(f) Reacciones en los apoyos

V " 26.73



Viga EF

$$V = -1.5x + 26.73$$

$$M = -\frac{1.5x^2}{2} + 26.73x - 77.4$$

$$V=0 \quad x=17.82$$

$$M_{max} = 160.76$$

Viga CD

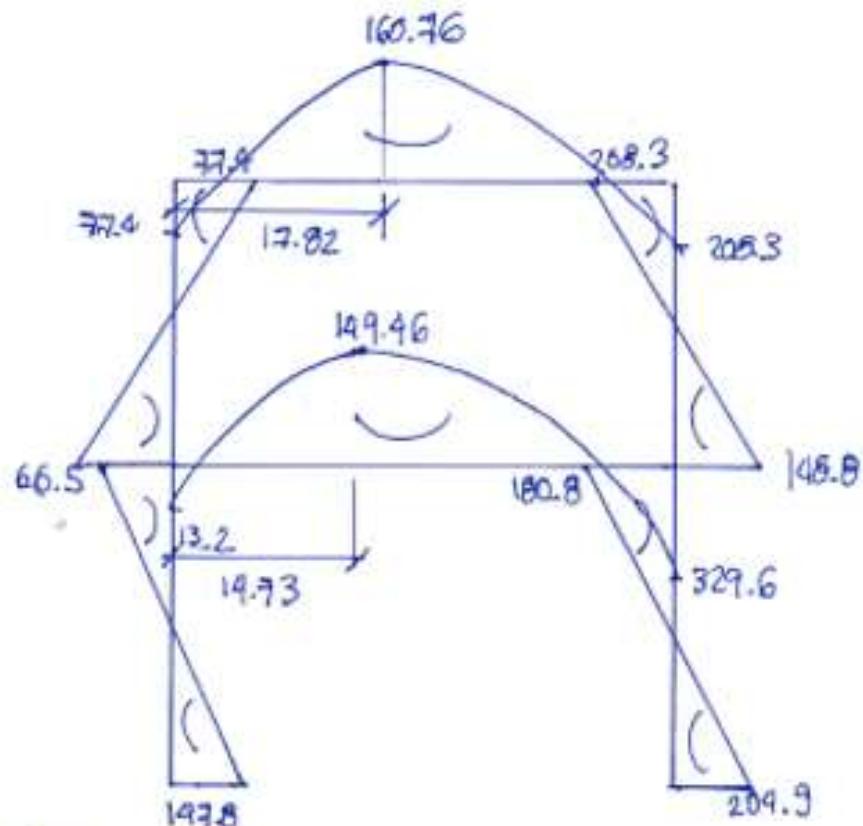
$$V = -1.5x + 22.09$$

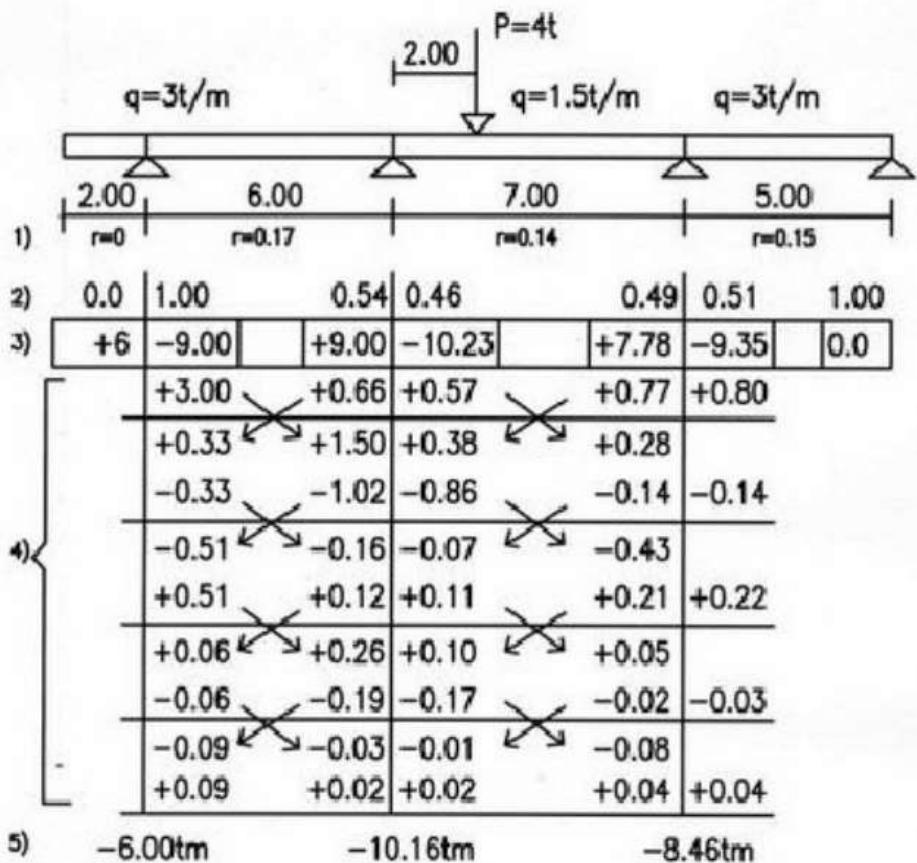
$$M = -\frac{1.5x^2}{2} + 22.09x - 13.2$$

$$V=0 \quad x=14.73$$

$$M_{max} = 149.46$$

M "





Distribución de Momentos en Vigas

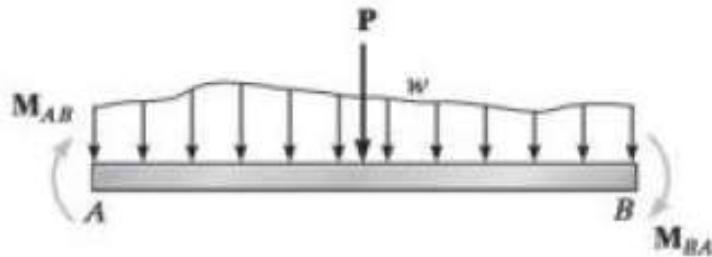
Introducción a Distribución de Momentos

Definición

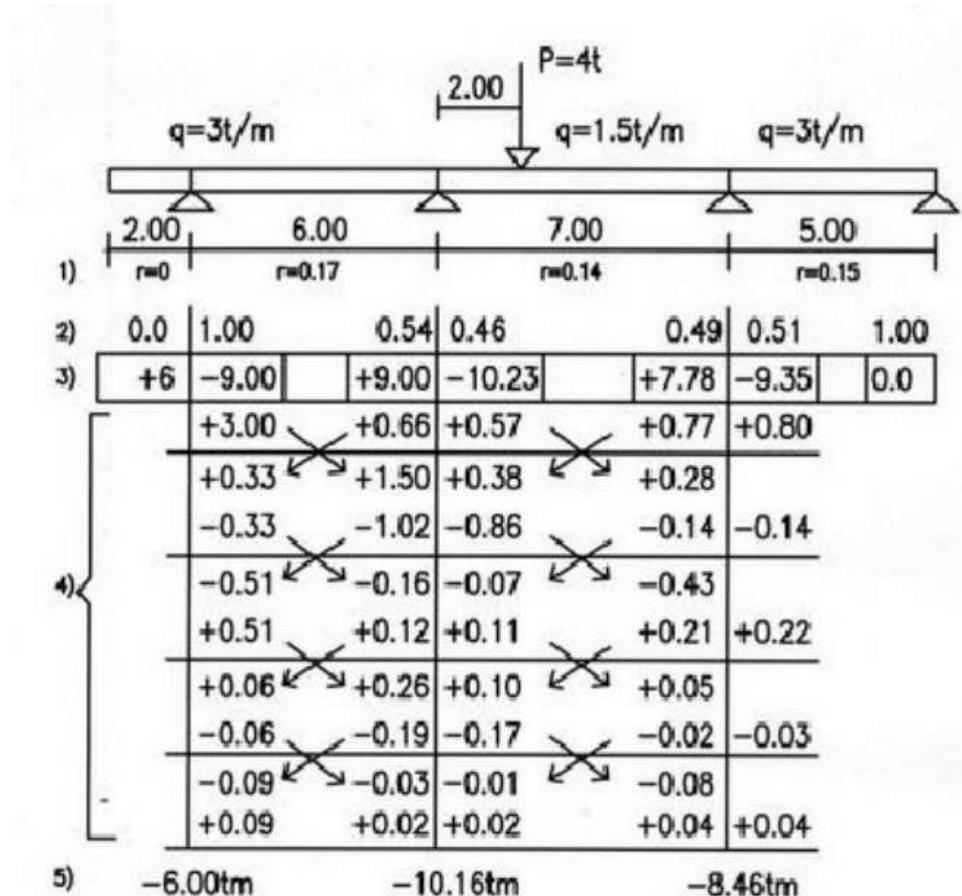
Es un método de aproximaciones sucesivas que puede Realizarse con cualquier grado de precisión deseado

Se supone inicialmente que cada junta de una estructura está fija. Después al liberar y bloquear cada junta sucesiva, los momentos en las juntas se distribuyen y equilibran hasta que las juntas tiendan a girar a sus posiciones finales

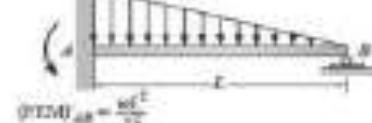
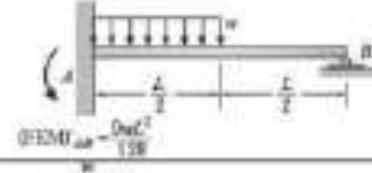
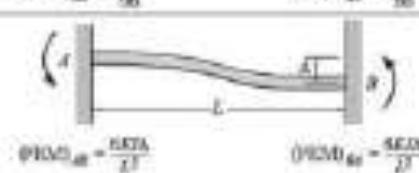
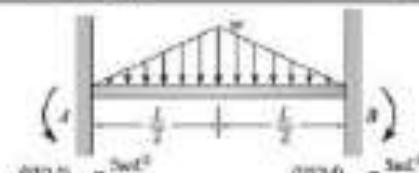
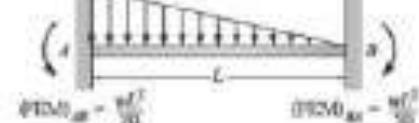
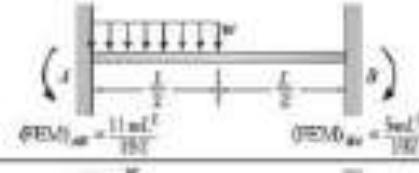
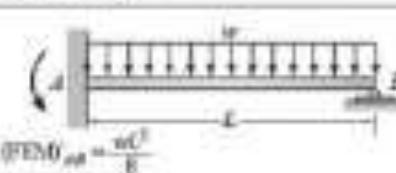
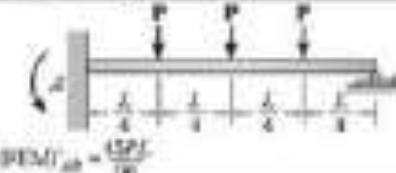
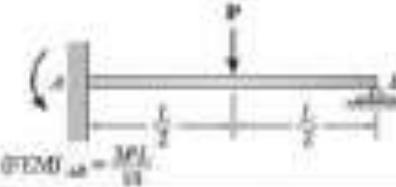
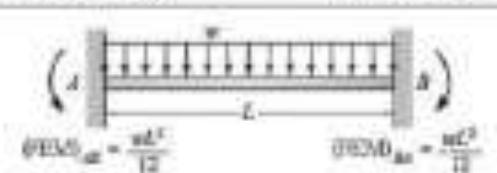
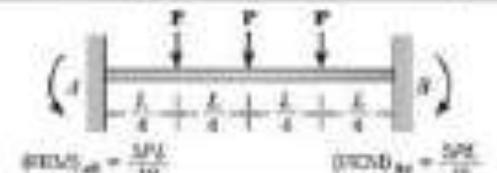
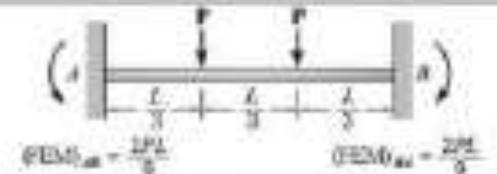
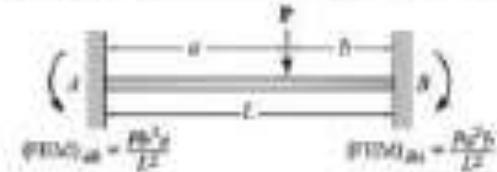
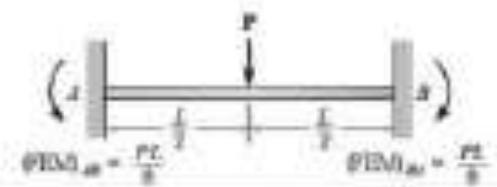
Convención de Signos



- Favor de las manecillas del reloj positivo
- Contra de las manecillas del reloj negativo



Momento en Extremos Fijos (FEM)



QUESTION: What is the deflection curve for the beam in diagram (a)?

ANSWER: The deflection curve is a parabola.

QUESTION: What is the deflection curve for the beam in diagram (b)?

ANSWER: The deflection curve is a parabola.

Modificación del Factor de Rígidez del Elemento (Extremo articulado)

$$K = \frac{3EI}{L}$$

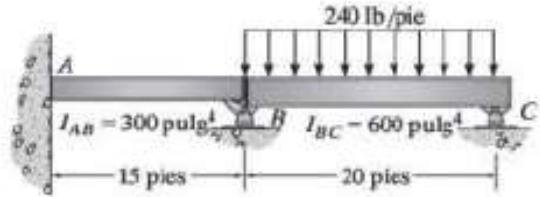
Extremo lejano articulado
o con soporte de rodillo

Factor de Traslado

Se realizan ciclos sucesivos de distribución y traslado de Momentos hasta que los momentos en las juntas tiendan a cero.

- *Se distribuyen los momentos de acuerdo al factor de distribución e invirtiendo su signo*
- *Se trasladan esos momentos distribuidos al nodo próximo con un valor de M/2*
- *Se repite el procedimiento hasta que los momentos de traslado tienda a cero*
- *El factor de distribución en el extremo empotrado es cero y no se trasladan momento , solo reciben momento del nodo vecino.*
- *El factor de distribución de articulación externa es igual a 1.*

Determine los momentos internos en los soportes de la viga que se muestra en la figura 12-14a. El momento de inercia de los dos claros se muestra en la figura.



SOLUCIÓN

Como la viga está soportada por rodillos en su extremo lejano *C*, la rigidez del claro *BC* se calculará con base en $K = 3EI/L$. Se tiene

$$K_{AB} = \frac{4EI}{L} = \frac{4E(300)}{15} = 80E$$

$$K_{BC} = \frac{3EI}{L} = \frac{3E(600)}{20} = 90E$$

Por lo tanto,

$$DF_{AB} = \frac{80E}{\infty + 80E} = 0$$

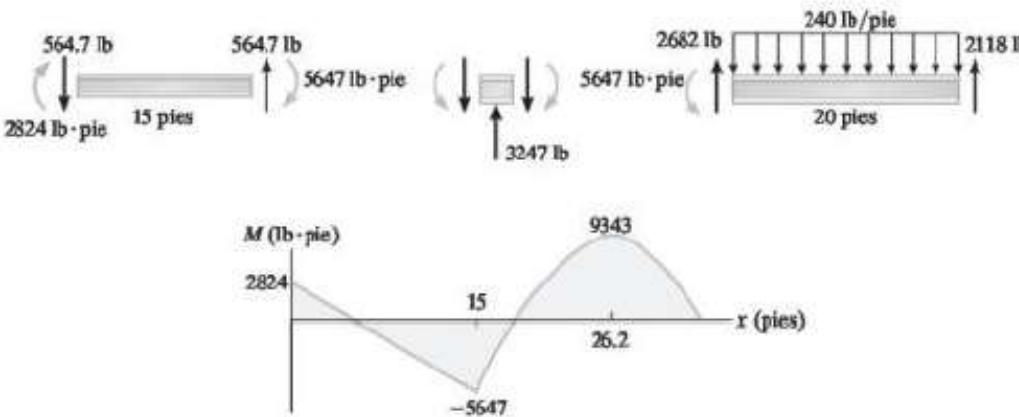
$$DF_{BA} = \frac{80E}{80E + 90E} = 0.4706$$

$$DF_{BC} = \frac{90E}{80E + 90E} = 0.5294$$

$$DF_{CB} = \frac{90E}{90E} = 1$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{8} = \frac{-240(20)^2}{8} = -12\,000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Junta	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>
Elemento	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>
DF	0	0.4706	0.5294	1
FEM Dist.			-12 000 5647.2	6352.8
CO	2823.6			
ΣM	2823.6	5647.2	-5647.2	0



Determine el momento interno en cada soporte de la viga que se muestra en la figura 12-8a. Se indica el momento de inercia de cada claro.

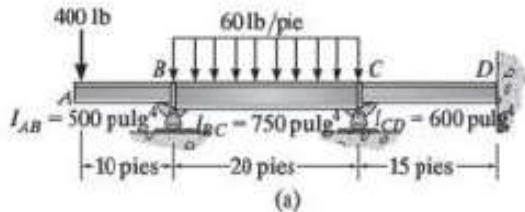


Figura 12-8

SOLUCIÓN

En este problema no hay un momento que se distribuya en el claro saliente AB ; por lo tanto, el factor de distribución $(DF)_{BA} = 0$. La rigidez del claro BC se basa en $4EI/L$ puesto que el oscilador no está en el extremo lejano de la viga. Los factores de rigidez, los factores de distribución y los momentos de extremo fijo se calculan de la siguiente manera:

$$K_{BC} = \frac{4E(750)}{20} = 150E \quad K_{CD} = \frac{4E(600)}{15} = 160E$$

$$DF_{BC} = 1 - (DF)_{BA} = 1 - 0 = 1$$

$$DF_{CB} = \frac{150E}{150E + 160E} = 0.484$$

$$DF_{CD} = \frac{160E}{150E + 160E} = 0.516$$

$$DF_{DC} = \frac{160E}{\infty + 160E} = 0$$

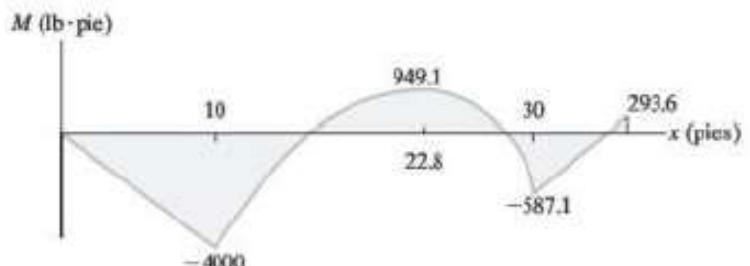
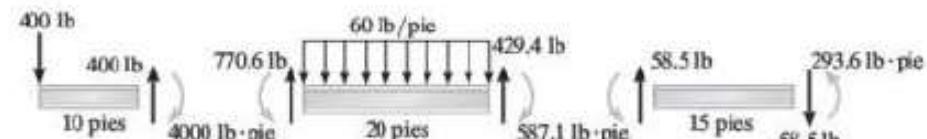
Debido a la saliente,

$$(FEM)_{BA} = 400 \text{ lb}(10 \text{ pies}) = 4000 \text{ lb}\cdot\text{pie}$$

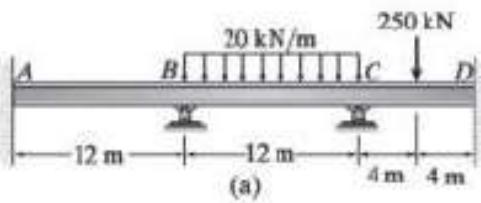
$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{60(20)^2}{12} = -2000 \text{ lb}\cdot\text{pie}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{60(20)^2}{12} = 2000 \text{ lb}\cdot\text{pie}$$

Junta	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>	
	Elemento		<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF	0	1	0.484	0.516	0	
FEM	4000	-2000	2000			
Dist.		-2000	X -968	-1032		
TR		-484	X -1000		-516	
Dist.		484	X 484	516		
TR		242	X 242		258	
Dist.		-242	X -117.1	-124.9		
TR		-58.6	X -121		-62.4	
Dist.		58.6	X 58.6	62.4		
TR		29.3	X 29.3		31.2	
Dist.		-29.3	X -14.2	-15.1		
TR		-7.1	X -14.6		-7.5	
Dist.		7.1	X 7.1	7.6		
TR		3.5	X 3.5		3.8	
Dist.		-3.5	X -1.7	-1.8		
TR		-0.8	X -1.8		-0.9	
Dist.		0.8	X 0.9	0.9		
TR		0.4	X 0.4		0.4	
Dist.		-0.4	X -0.2	-0.2		
TR		-0.1	X -0.2		-0.1	
Dist.		0.1	X 0.1	0.1		
ΣM	4000	-4000	587.1	-387.1	-293.6	



Determine los momentos internos en cada soporte de la viga que se muestra en la figura 12-7a. EI es constante.



(a)

SOLUCIÓN

Primero deben calcularse los factores de distribución en cada junta.* Los factores de rigidez para los elementos son

$$K_{AB} = \frac{4EI}{12} \quad K_{BC} = \frac{4EI}{12} \quad K_{CD} = \frac{4EI}{8}$$

Por lo tanto,

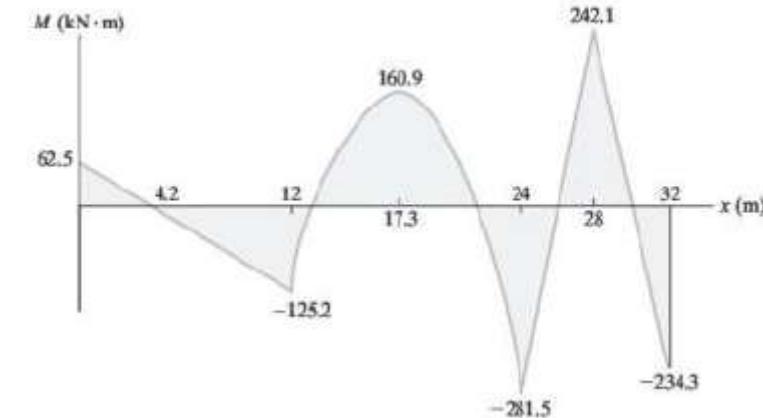
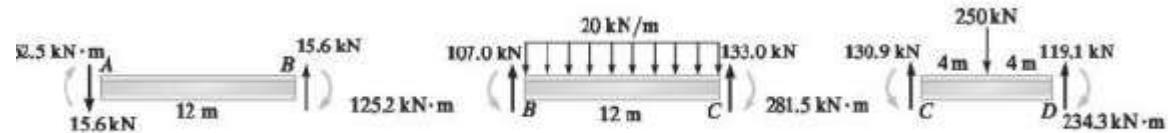
$$DF_{AB} = DF_{DC} = 0 \quad DF_{BA} = DF_{BC} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/12} = 0.5$$

$$DF_{CB} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.4 \quad DF_{CD} = \frac{4EI/8}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.6$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{-20(12)^2}{12} = -240 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{20(12)^2}{12} = 240 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(FEM)_{CD} = -\frac{PL}{8} = -\frac{250(8)}{8} = -250 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (FEM)_{DC} = \frac{PL}{8} = \frac{250(8)}{8} = 250 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Junta	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
Elemento	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF	0	0.5	0.5	0.4	0.6	0
FEM Dist.		120	120	-240 4	240 6	-250 250
TR Dist.	60		2	60		3
TR Dist.	-1		-1	-24	-36	
TR Dist.	-0.5		-12	-0.5		-18
TR Dist.	6		6	0.2	0.3	
TR Dist.	3		0.1	3		0.2
TR Dist.	-0.05		-0.05	-1.2	-1.8	
TR Dist.	-0.02		-0.6	-0.02		-0.9
ΣM	62.5	125.2	-125.2	281.5	-281.5	234.3



Rigidez de los Elementos

$$K_{AB} = \frac{3EI}{L} = \frac{3EI}{20} = K_{CD}$$

$$K_{BC} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{5}$$

Factores de Distribución

$$F.D_{BA} = \frac{\frac{3EI}{20}}{\frac{3EI}{20} + \frac{EI}{5}} = 0.428 = F.D_{CD}$$

$$F.D_{BC} = \frac{\frac{EI}{5}}{\frac{3EI}{20} + \frac{EI}{5}} = 0.92 = F.D_{CB}$$

Tabla de Distribución y Traslado

II	AB		(4298.35)		DC
	BA	BC	CB	(-1015.1)	
	0.428	0.571	0.571	0.428	
-53.61	-1789.77	-165.55	636.33		
983.77	+1314.67	+280.09	+434.96		
	250.82	657.5			
-129.47	-166.34	-37.6	-281.33		
	-188	583.17			
+30.96	+129.59	+92.8	+35.6		
	37.8	293.54			
-0.18	-1360	-30.95	-23.01		
	-15.38	-6.6			
+6.58	+380	+3.88	+2.91		
	4.94	844.40			
-0.03	-111	-252	-1.88		
	-126	-0.55			
+0.59	+172	+0.31	+0.24		
	0.45	0.36			
-0.06	-0.09	-0.21	-0.15		
	422.2	222.13	-802.83	803.17	

Factor de Rigidez del Elemento

$$K = \frac{4EI}{L}$$

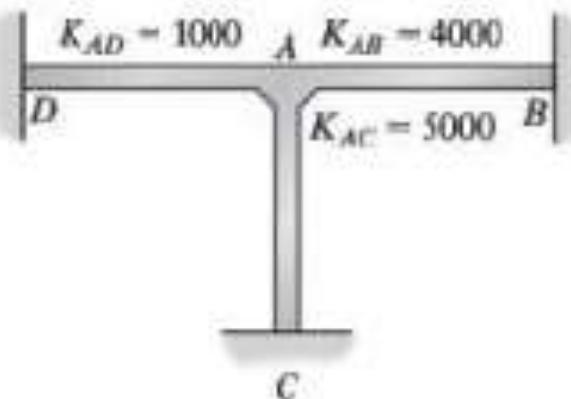
Extremo lejano fijo



Factor de Distribución (DF)

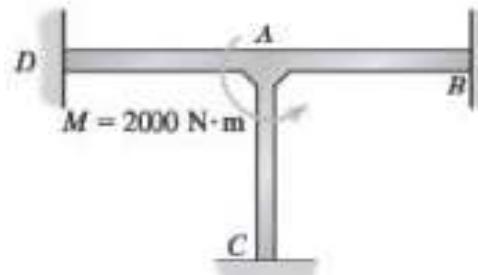
Factor de Rigidez en la Junta

$$K_t = \sum K_i \quad K_t = \sum K_i = 1000 + 4000 + 5000 = 10000$$



$$DF_i = \frac{M_i}{M} = \frac{K_i \theta}{\theta \sum K_i}$$

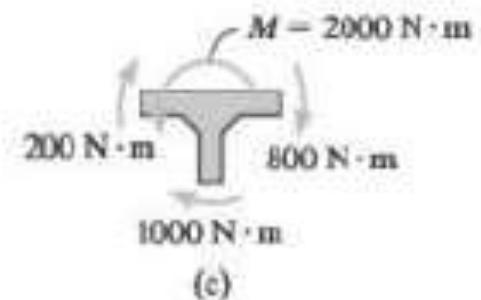
$$DF = \frac{K}{\sum K}$$



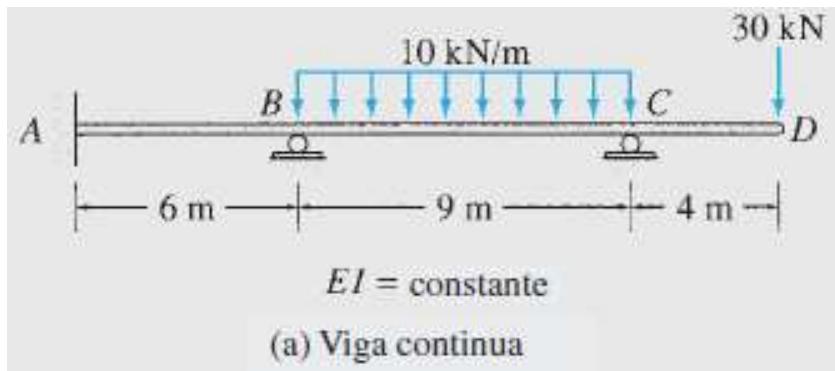
$$DF_{AB} = 4000 / 10000 = 0.4$$

$$DF_{AC} = 5000 / 10000 = 0.5$$

$$DF_{AD} = 1000 / 10000 = 0.1$$



Determine los momentos en los extremos del elemento para una viga continua mostrada en la Fig. 16.10(a), usando método e distribución de momentos.



Factores de Distribución. Debido a que la porción en cantiliver CD no contribuye al rigidez rotacional del nodo C , podemos tratar al nodo C como en apoyo simple y usar la rigidez a la flexión relativa reducida del elemento BC en el análisis:

$$K_{BA} = \frac{I}{6} \quad \text{y} \quad K_{BC} = \frac{3}{4} \left(\frac{I}{9} \right) = \frac{I}{12}$$

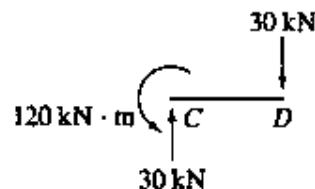
En el nodo B ,

$$DF_{BA} = \frac{I/6}{(I/6) + (I/12)} = \frac{2}{3}$$

$$DF_{BC} = \frac{I/12}{(I/6) + (I/12)} = \frac{1}{3}$$

En el nodo C ,

$$DF_{CB} = 1$$



(b) Porción de cantiliver
estáticamente determinado

Momentos de Empotre. Usando las expresiones de los momentos empotrados y la Fig. 16.10(b), obtenemos

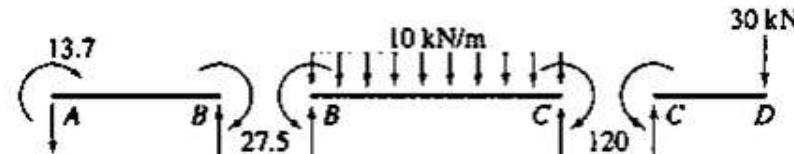
$$FEM_{AB} = FEM_{BA} = 0$$

$$FEM_{BC} = +67.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad FEM_{CB} = -67.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$FEM_{CD} = +30(4) = +120 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

AB	BA	BC	CB	CD
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	
	-45	+67.5	-67.5	+120
-22.5	-22.5	-26.3	-52.5	
+ 8.8	+17.5	+ 8.8		
-13.7	-27.5	+27.5	-120	+120

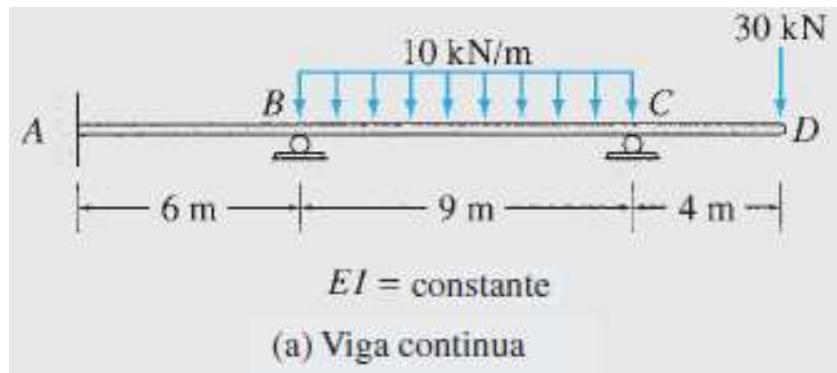
(c) Tabla de distribución de momentos



(d) Momentos finales en los extremos de los elementos (kN·m)

Resolver el problema anterior con criterios del libro R.C. Hibbeler

Determine los momentos en los extremos del elemento para una viga continua mostrada en la Fig. 16.10(a), usando método e distribución de momentos.



Rigideces de Elementos y Factores de Distribución

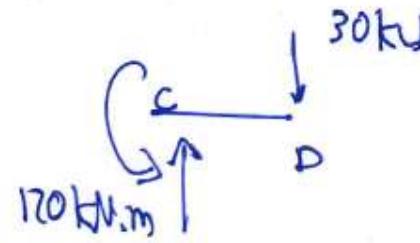
$$K_{BA} = \frac{4EI}{6}$$

$$K_{BC} = \frac{3EI}{9}$$

$$FD_{BA} = \frac{\frac{1}{3}EI}{\frac{1}{3}EI + \frac{1}{3}EI} = 0.67$$

$$FD_{BC} = \frac{\frac{1}{3}EI}{\frac{1}{3}EI + \frac{1}{3}EI} = 0.33$$

Momento en Cantolibre



Cálculo de FEM

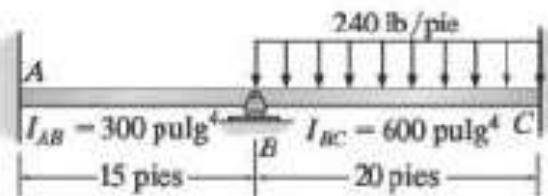
$$\frac{FEM}{BC} = -\frac{wL^2}{8} = -\frac{10(9)^2}{8}$$

$$FEM_{BC} = -101.25$$

Tabla de Distribución y Traslado

	BA	BC	CB	CD
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	-120
			-120	120
		60	120	120
		27.5	137.5	120
			137.5	-27.5
				120

Encuentre los momentos en los extremos y las reacciones de la viga mostrada



$$K_{BA} = \frac{4E(300)}{15} = 4E(20) \text{ pulg}^4/\text{pie} \quad K_{BC} = \frac{4E(600)}{20} = 4E(30) \text{ pulg}^4/\text{pie}$$

$$DF_{BA} = \frac{4E(20)}{4E(20) + 4E(30)} = 0.4$$

$$DF_{BC} = \frac{4E(30)}{4E(20) + 4E(30)} = 0.6$$

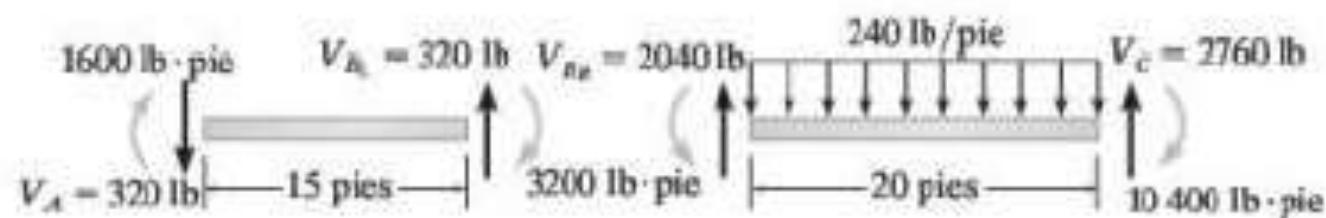
$$DF_{AB} = \frac{4E(20)}{\infty + 4E(20)} = 0$$

$$DF_{CB} = \frac{4E(30)}{\infty + 4E(30)} = 0$$

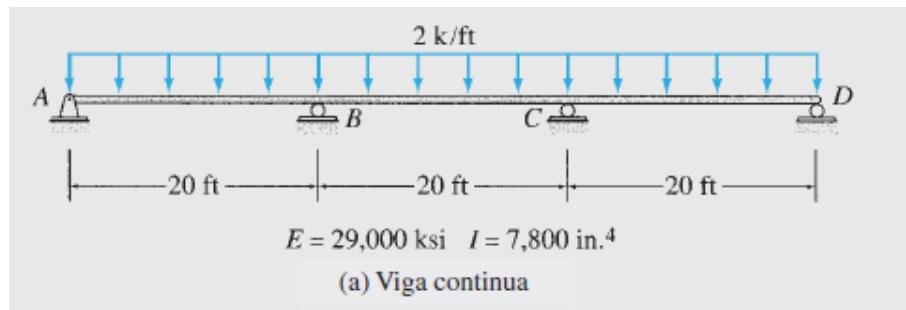
$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{240(20)^2}{12} = -8000 \text{ lb}\cdot\text{pie}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{240(20)^2}{12} = 8000 \text{ lb}\cdot\text{pie}$$

Junta	A	B	C
Elemento	AB	BA	BC
DF	0	0.4	0.6
FEM			-8000 8000
Dist,TR	1600 → 3200		4800 → 2400
ΣM	1600	3200	-3200 10 400



Determine los momentos en los extremos del elemento de la viga continua de tres claros mostrada en la Fig. 16.12(a) debido a la carga uniformemente repartida y debido a el asentamiento del apoyo de $\frac{5}{8}$ in en B, de $1\frac{1}{2}$ in en C, y de $\frac{3}{4}$ in en D. Utilice el método de distribución de momentos.



Solución

Esta viga fue previamente analizada en el Ejemplo 15.6 usando el método de la pendiente-deflexión

Factores de Distribución. En el nodo A.

$$DF_{AB} = 1$$

En el nodo B,

$$DF_{BA} = \frac{3I/80}{(3I/80) + (I/20)} = 0.429$$

$$DF_{BC} = \frac{I/20}{(3I/80) + (I/20)} = 0.571$$

En el nodo C,

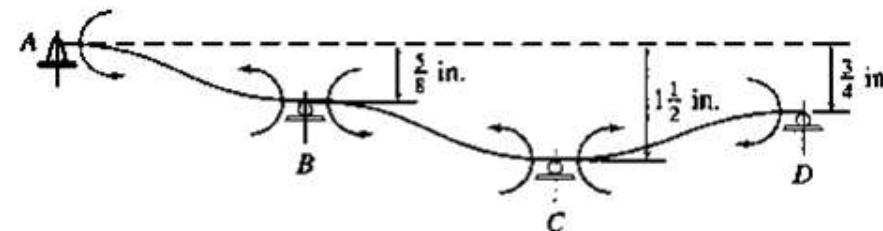
$$DF_{CB} = \frac{I/20}{(3I/80) + (I/20)} = 0.571$$

$$DF_{CD} = \frac{3I/80}{(3I/80) + (I/20)} = 0.429$$

En el nodo D,

$$DF_{DC} = 1$$

Momentos de Empotre. La configuración deformada del viga continua con todos los nodos anclados contra la rotación y sujeta a un asentamiento en el apoyo se muestra en la Fig. 16.12(b) usando una escala exagerada. Se puede ver de esta figura que los asentamientos relativos para los tres elementos son $\Delta_{AB} = \frac{5}{8}$ in, $\Delta_{BC} = 1\frac{1}{2} - \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$ in y $\Delta_{CD} = 1\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ in.



(b) Fixed-End Moments Due to Support Settlements

$$FEM_{AB} = FEM_{BA} = +\frac{6EI\Delta}{L^3} = +\frac{6(29,000)(7,800)\left(\frac{5}{8}\right)}{(20)^2(12)^3}$$

$$= +1,227.2 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{AC} = FEM_{CA} = +\frac{6(29,000)(7,800)\left(\frac{7}{8}\right)}{(20)^2(12)^3} = +1,718.1 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{CD} = FEM_{DC} = -\frac{6(29,000)(7,800)\left(\frac{3}{4}\right)}{(20)^2(12)^3} = -1,472.7 \text{ k-ft}$$

Sumando los efectos de los FEM de cargas y desplazamientos

$$FEM_{AB} = +1,293.9 \text{ k-ft} \quad FEM_{BA} = +1,160.5 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BC} = +1,784.8 \text{ k-ft} \quad FEM_{CB} = +1,651.4 \text{ k-ft}$$

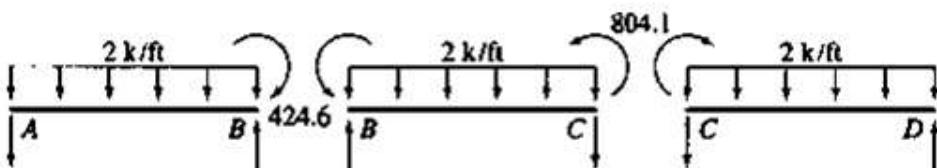
$$FEM_{CD} = -1,406 \text{ k-ft} \quad FEM_{DC} = -1,539.4 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{AB} = FEM_{BC} = FEM_{CD} = +\frac{2(20)^2}{12} = +66.7 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BA} = FEM_{CB} = FEM_{DC} = -66.7 \text{ k-ft}$$

AB	BA	BC	CB	CD	DC
1	0.429	0.571	0.571	0.429	1
+1293.9	+1160.5	+1784.8	+1651.4	-1406	-1539.4
-1293.9	-1263.5	-1681.8	-140.1	-105.3	+1539.4
-	-647	-70.1	-840.9	+769.7	
+ 307.6	+ 409.5	+ 40.7	+ 30.5		
-	8.8	+ 204.8			
-	11.6	- 116.9	- 87.9		
-	58.5	- 5.8			
+ 25.1	+ 33.4	+ 3.3	+ 2.5		
-	1.7	+ 16.7			
-	0.7	- 1.0	- 9.5	- 7.2	
-	4.8	- 0.5			
+ 2.1	+ 2.7	+ 0.3	+ 0.2		
-	0.2	+ 1.4			
-	0.1	- 0.8	- 0.6		
-	0.4				
+ 0.2	+ 0.2				
0	- 424.6	+ 424.6	+ 804.1	- 804.1	0

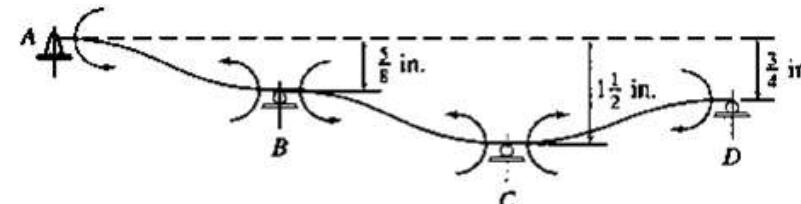
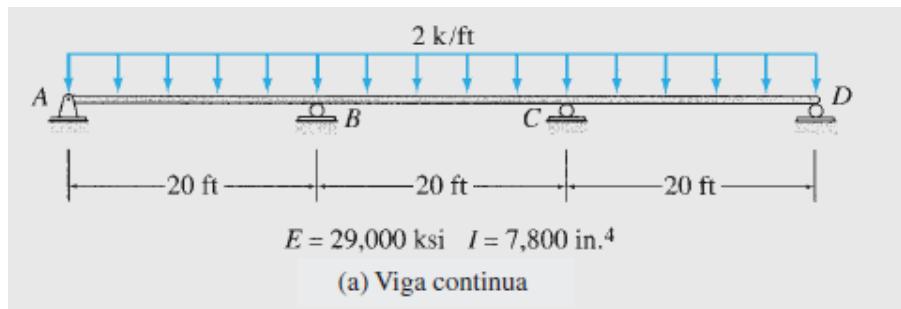
(c) Tabla de distribución de momento



(d) Momentos finales en los extremos de los elementos (kN·m)

Resolver el problema anterior con criterios del libro R.C. Hibbeler

Determine los momentos en los extremos del elemento de la viga continua de tres claros mostrada en la Fig. 16.12(a) debido a la carga uniformemente repartida y debido a el asentamiento del apoyo de $\frac{5}{8}$ in en B, de $1\frac{1}{2}$ in en C, y de $\frac{3}{4}$ in en D. Utilice el método de distribución de momentos.



(b) Fixed-End Moments Due to Support Settlements

FEM POR DESPLAZAMIENTO

$$FEM_{BA} = \frac{3EI\Delta}{L^2} = \frac{3(29000)(7800)(\frac{5}{8})}{(20)^2(12)^3} = -613.61$$

$$FEM_{BC} = FEM_{CB} = \frac{6(29000)(7800)(\frac{1}{6})}{20^2(12)^3} = +1718.1$$

$$FEM_{CD} = \frac{3(29000)(7800)(\frac{3}{4})}{20^2(12)^3} = +736.33$$

Cálculos de FEM

$$\left. \begin{aligned} FEM_{BC} &= -\frac{wL^2}{12} = -\frac{2(20)^2}{12} = -66.67 \\ FEM_{CB} &= +66.67 \\ FEM_{BA} &= +\frac{wL^2}{8} = \frac{2(20)^2}{8} = +100 \\ FEM_{CD} &= -\frac{wL^2}{8} = -\frac{2(20)^2}{8} = -100 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \text{Cargas} \\ \text{DS} \\ \text{GRAVEDAD} \end{matrix}$$

FEM FINALES

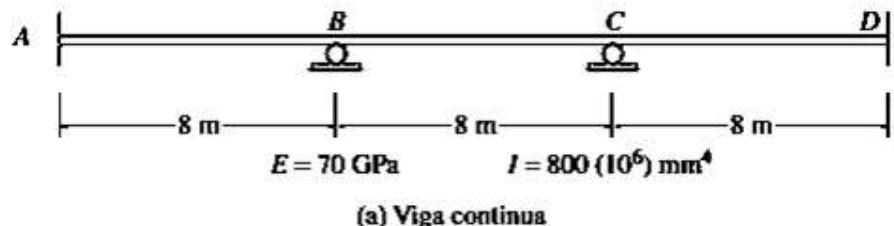
$$FEM_{BA} = +100 - 613.61 = -513.61$$

$$FEM_{BC} = -66.67 - 1718.1 = -1789.77$$

$$FEM_{CB} = +66.67 - 1718.1 = -1651.43$$

$$FEM_{CD} = -100 + 736.33 = +636.33$$

Determine los momentos en los extremos del elemento para una viga continua mostrada en la Fig. 16.11(a), debido a un asentamiento de 20 mm en el apoyo B. Utilice el método de distribución de momentos.



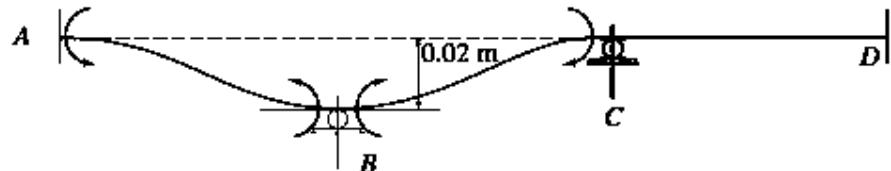
Momentos de Empotre. La configuración deformada del viga continua con todos los nodos anclados contra la rotación y sujeta a un asentamiento en el apoyo se muestra en la Fig. 16.11(b) usando una escala exagerada. Se puede ver de esta figura que los asentamientos relativos para los tres elementos son $\Delta_{AB} = \Delta_{BC} = 0.02 \text{ m}$ y $\Delta_{CD} = 0$.

Usando las expresiones del momento de empotre, determinamos los momentos de empotre debido al asentamiento del soporte como

$$\text{FEM}_{AB} = \text{FEM}_{BA} = +\frac{6EI\Delta}{L^2} = +\frac{6(70)(800)(0.02)}{(8)^2} = 105 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\text{FEM}_{BC} = \text{FEM}_{CB} = -\frac{6EI\Delta}{L^2} = -\frac{6(70)(800)(0.02)}{(8)^2} = -105 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\text{FEM}_{CD} = \text{FEM}_{DC} = 0$$



(b) Fixed-End Moments Due to Support Settlement

Factores de Distribución. En el nodo B.

$$DF_{BA} = \frac{I/8}{(I/8) + (I/8)} = 0.5$$

$$DF_{BC} = \frac{I/8}{(I/8) + (I/8)} = 0.5$$

$$DF_{CB} = \frac{I/8}{(I/8) + (I/8)} = 0.5$$

$$DF_{CD} = \frac{I/8}{(I/8) + (I/8)} = 0.5$$

En el nodo C,

Distribución de Momentos. La distribución de momentos se lleva acabo de manera usual, como se muestra en la tabla de distribución de momentos y la Fig. 16.11(c).

Momentos Finales. Ver la tabla de distribución de momentos y la Fig. 16.11(d).

Respuesta

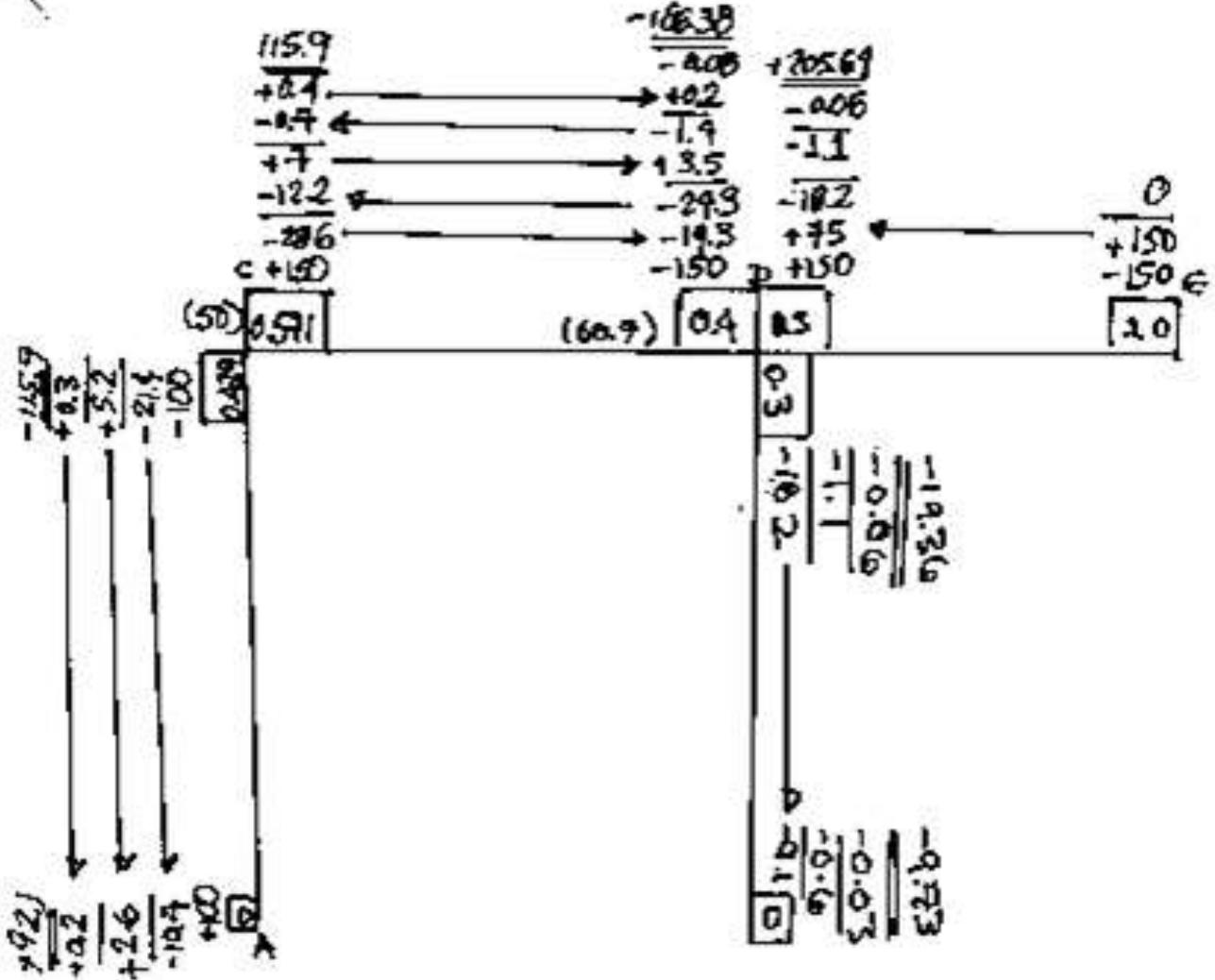
AB	BA		BC		CB		CD		DC	
	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
+105	+105	-105	-105	+52.5	+52.5					
		+26.3				+26.3				
		-13.1	-13.1			-6.6				
-6.6				+3.3	+3.3		+1.6			
		+1.6					+1.6			
-0.8	-0.8			-0.4	-0.4			+0.2	+0.2	
-0.4				+0.2	+0.2					+0.1
		+0.1								
-0.05	-0.05									
+98	+91.1	-91	-56	+56	+28					

(c) Tabla de distribución de momento



(d) Momentos finales en los extremos de los elementos (kN·m)

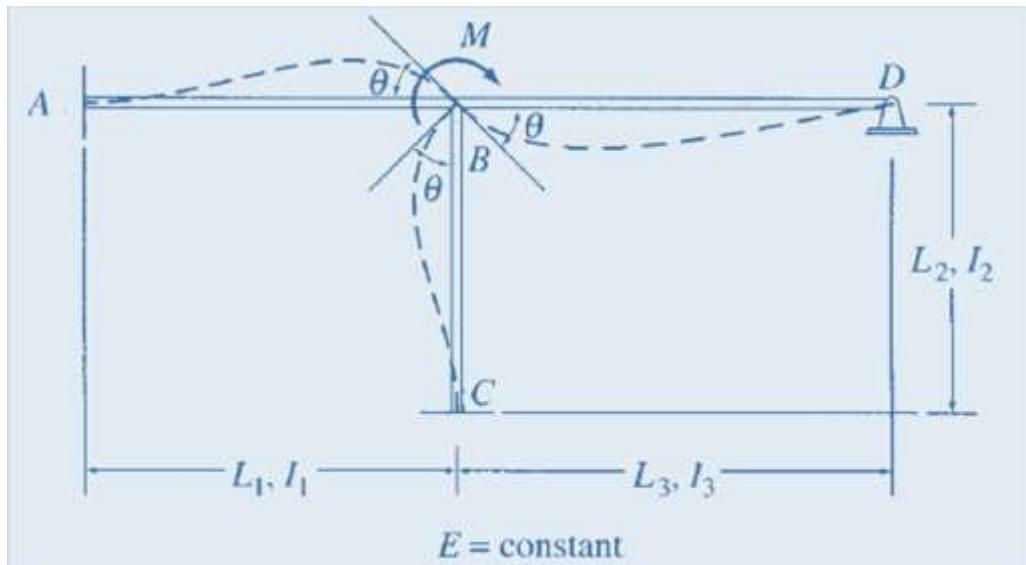
Método de Distribución de Momentos Marcos Sin Desplazamiento Lateral



Marcos Sin Desplazamiento

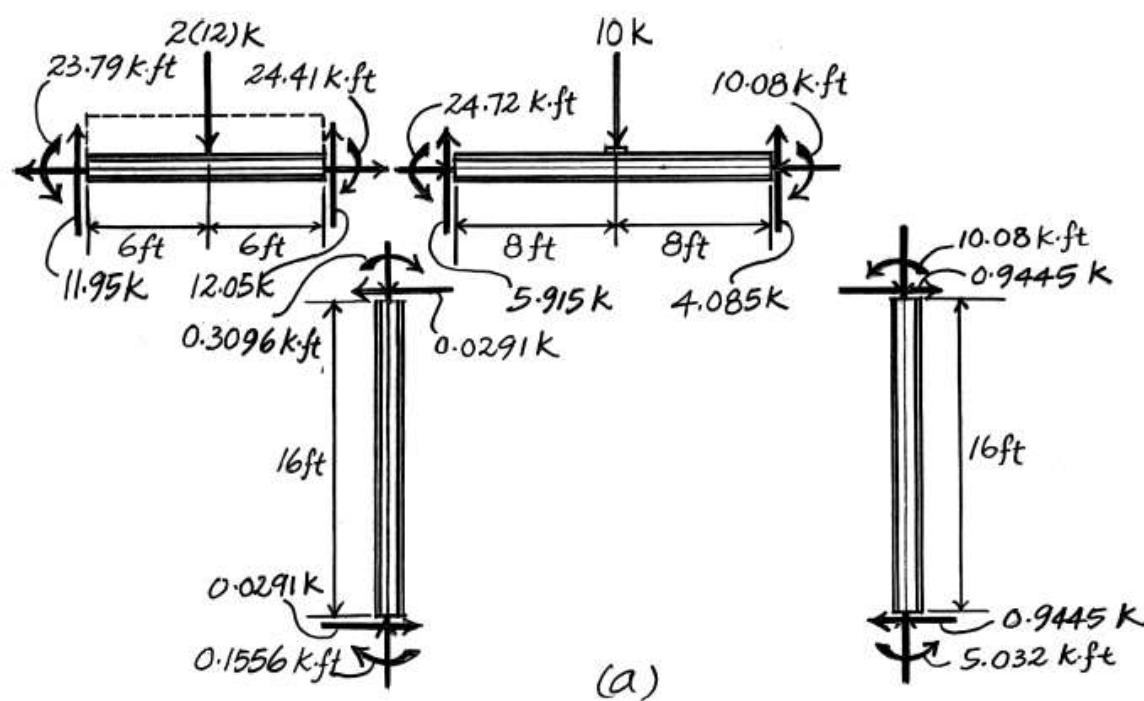
Lateral

Conceptos Básicos



- **Se asumen los mismos criterios usados en el análisis de vigas**
 - ✓ Cálculo de FEM en base a tablas en vigas y Columnas
 - ✓ Factores de Distribución en cada nodo
 - ✓ Factores de transporte y distribución
 - ✓ Balanceo de nodos al inicio del análisis
 - ✓ Empezar preferiblemente cada ciclo desde las vigas a las columnas
 - ✓ Suma de los valores acumulados en cada extremo al final del análisis para obtener los momentos finales

Fuerzas Internas



(a)

Diagrama de Momento

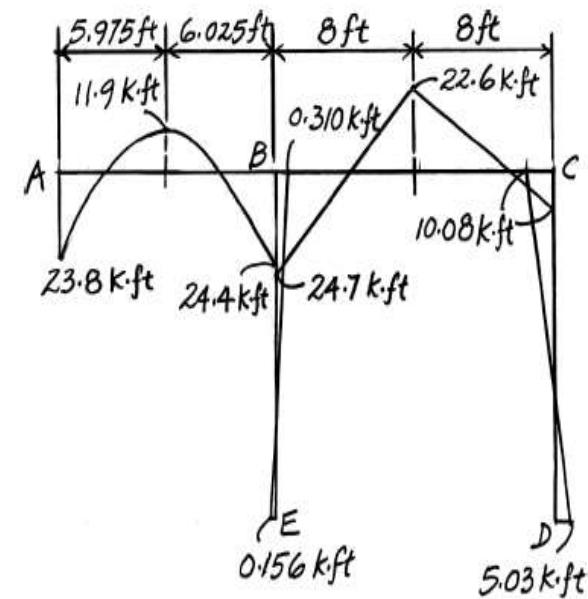
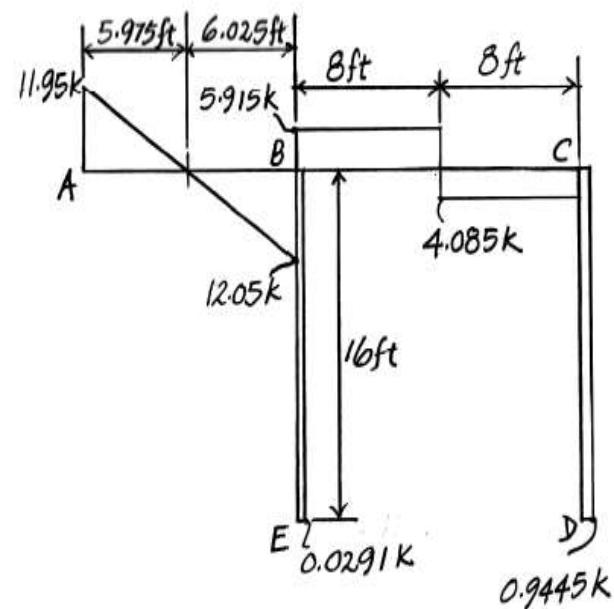
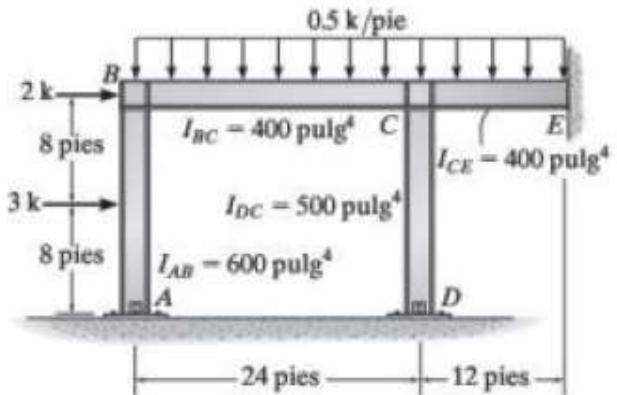


Diagrama de Cortante (Shear Force Diagram)



12-18. Determine los momentos en cada junta del marco, y después dibuje el diagrama de momentos para el elemento *BCE*. Suponga que *B*, *C* y *E* están fijamente conectados y que *A* y *D* están articulados. $E = 29(10^3)$ ksi.



$$(DF)_{AB} = (DF)_{DC} = 1 \quad (DF)_{DC} = 0$$

$$(DF)_{BA} = \frac{3(A1.5I_{BC})/16}{3(1.5I_{BC})/16 + 4I_{BC}/24} = 0.6279$$

$$(DF)_{BC} = 0.3721$$

$$(DF)_{CB} = \frac{4I_{BC}/24}{4I_{BC}/24 + 3(1.25I_{BC})/16 + 4I_{BC}/12} = 0.2270$$

$$(DF)_{CD} = 0.3191$$

$$(DF)_{CE} = 0.4539$$

$$(FEM)_{AB} = \frac{-3(16)}{8} = -6 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

$$(FEM)_{BA} = 6 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

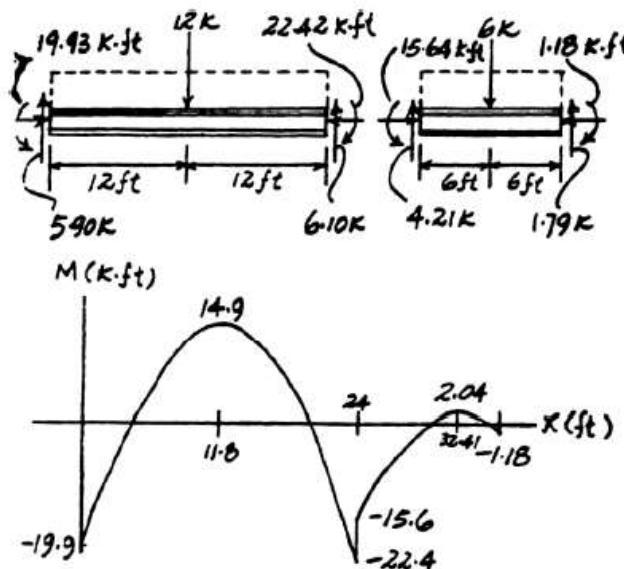
$$(FEM)_{BC} = \frac{-(0.5)(24)^2}{12} = -24 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

$$(FEM)_{CB} = 24 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

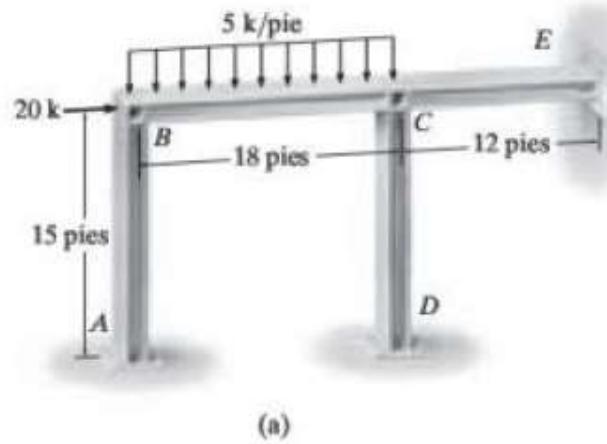
$$(FEM)_{CE} = \frac{-(0.5)(12)^2}{12} = -6 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

$$(FEM)_{EC} = 6 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

$$(FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = 0$$



Joint	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>E</i>		<i>D</i>
Mem.	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>CE</i>	<i>EC</i>	<i>DC</i>
DF	1	0.6279	0.3721	0.2270	0.3191	0.4539	0	1
FEM	-6.0	6.0	-24.0	24.0		-6.0	6.0	
	6.0	11.30	6.70	-4.09	-5.74	-8.17		
		3.0	-2.04	3.35			-4.09	
		-0.60	-0.36	-0.76	-1.07	-1.52		
			-0.38	-0.18			-0.76	
		0.24	0.14	0.04	0.06	0.08		
			0.02	0.07			0.04	
		-0.01	-0.01	-0.02	-0.02	-0.03		
							-0.02	
$\sum M$	0	19.9	-19.9	22.4	-6.77	-15.6	1.18	0



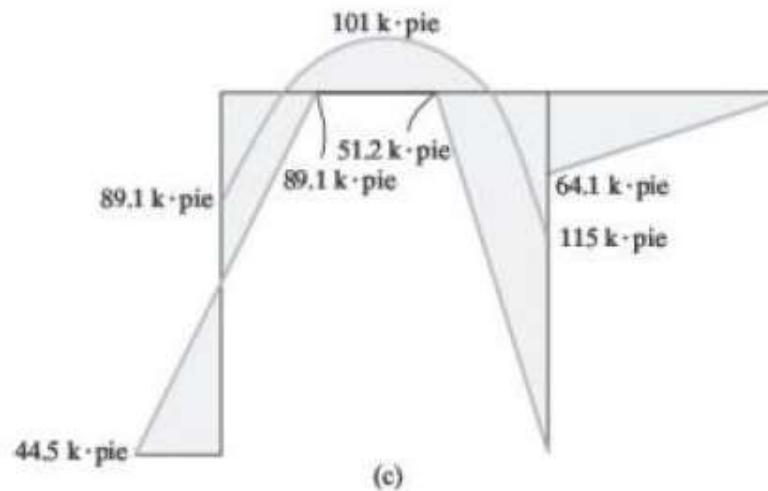
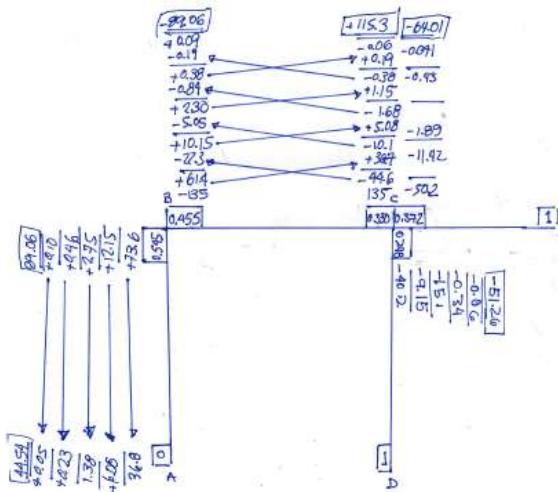
(a)

Junta	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>	<i>E</i>	
Elemento	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>CE</i>	<i>DC</i>	<i>EC</i>
DF	0	0.545	0.455	0.330	0.298	0.372	1	1
FEM Dist.			73.6	-135 61.4 -44.6	135 -40.2	-50.2		
TR Dist.	36.8		12.2	-22.3 10.1 -10.1	30.7 -9.1	-11.5		
TR Dist.	6.1		2.8	-5.1 2.3 -1.7	5.1 -1.5	-1.9		
TR Dist.	1.4		0.4	-0.8 0.4 -0.4	1.2 -0.4	-0.4 -0.4		
TR Dist.	0.2		0.1	-0.2 0.1 -0.1	0.2 0.0	-0.1 -0.1		
ΣM	44.5	89.1	-89.1	115	-51.2	-64.1		

(b)

Tabla de Distribución de Momentos en Marcos

El diagrama de momentos para el marco de la figura 12-15c se construye utilizando estos datos.



(c)

Tabla de Distribución de Momentos en Marcos

	AC	CA	CD	DC	DB	DE	ED	Trasporte	BD
Factores de distribución		0.429	0.571		0.4	0.3	0.3		
1. Momento de empotre	+100	-100	+150	-150		+150	-150		
2. Balance del nodo		- 21.4	- 28.6	- 14.3		+ 75	+150		
3. Trasporte		- 10.7		- 24.3	- 18.2	- 18.2			
4. Balance del nodo			- 12.2						-9.1
5. Trasporte			+ 7						
6. Balance del nodo		+ 2.6		+ 3.5					
7. Trasporte		+ 5.2		- 1.4	- 1.1	- 1.1			
8. Balance del nodo			- 0.7						-0.6
9. Trasporte			+ 0.4						
10. Balance del nodo		+ 0.2		+ 0.2					
11. Trasporte		+ 0.3		- 0.1	- 0.1	- 0.1			
12. Momentos finales	+ 92.1	-115.9	+115.9	-186.4	-19.4	+205.6	0		-9.7

(c) Tabla de distribución de momento

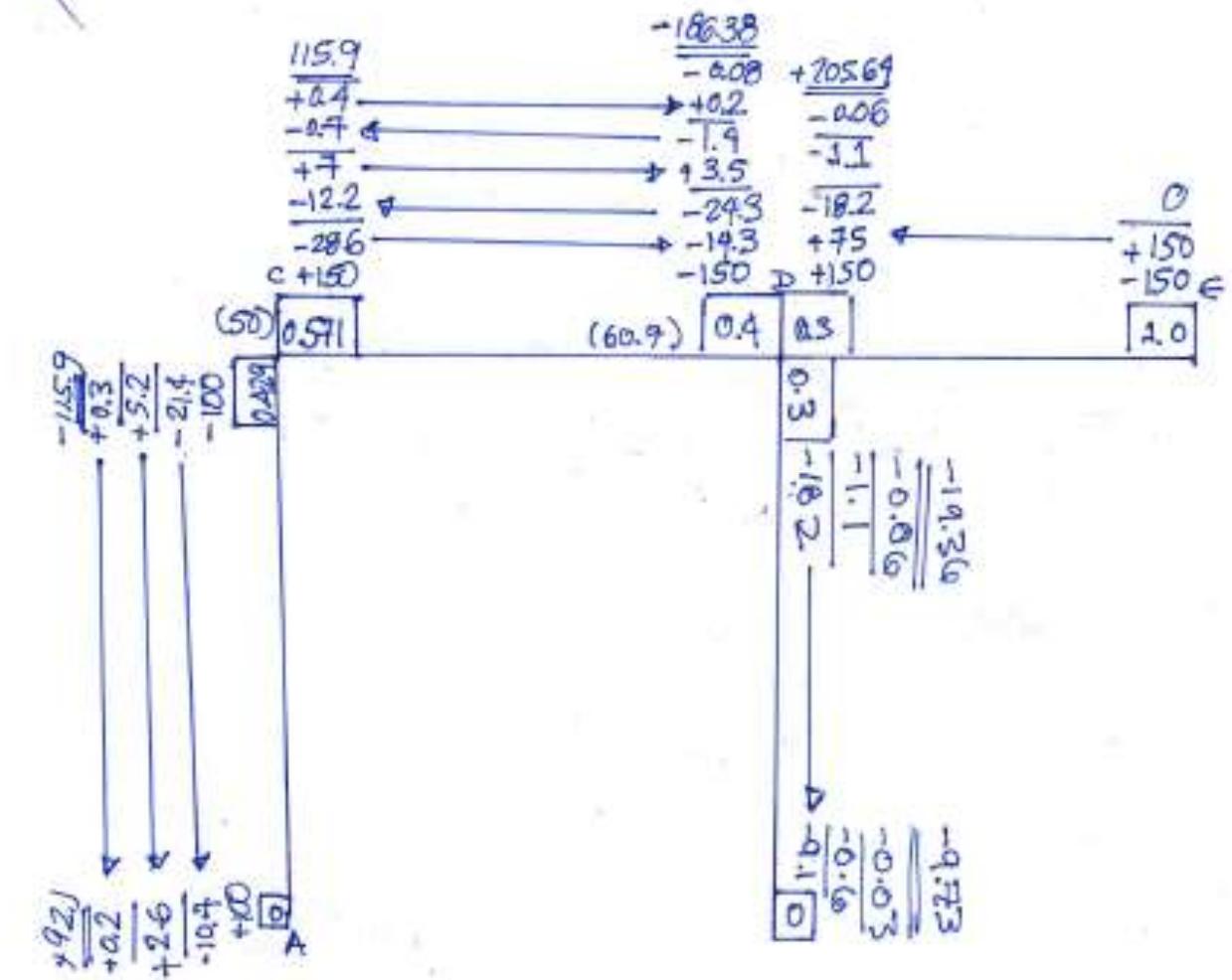
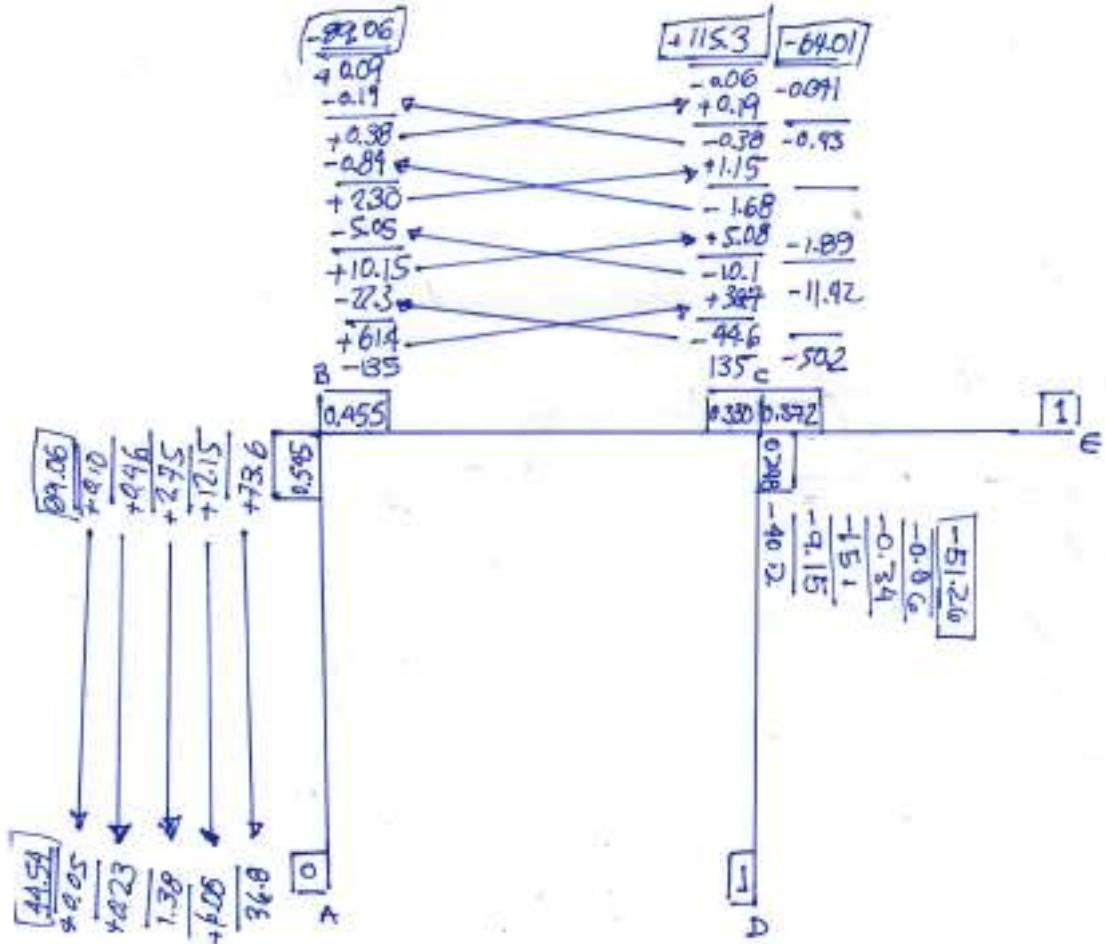


Tabla de Distribución de Momentos en Marcos

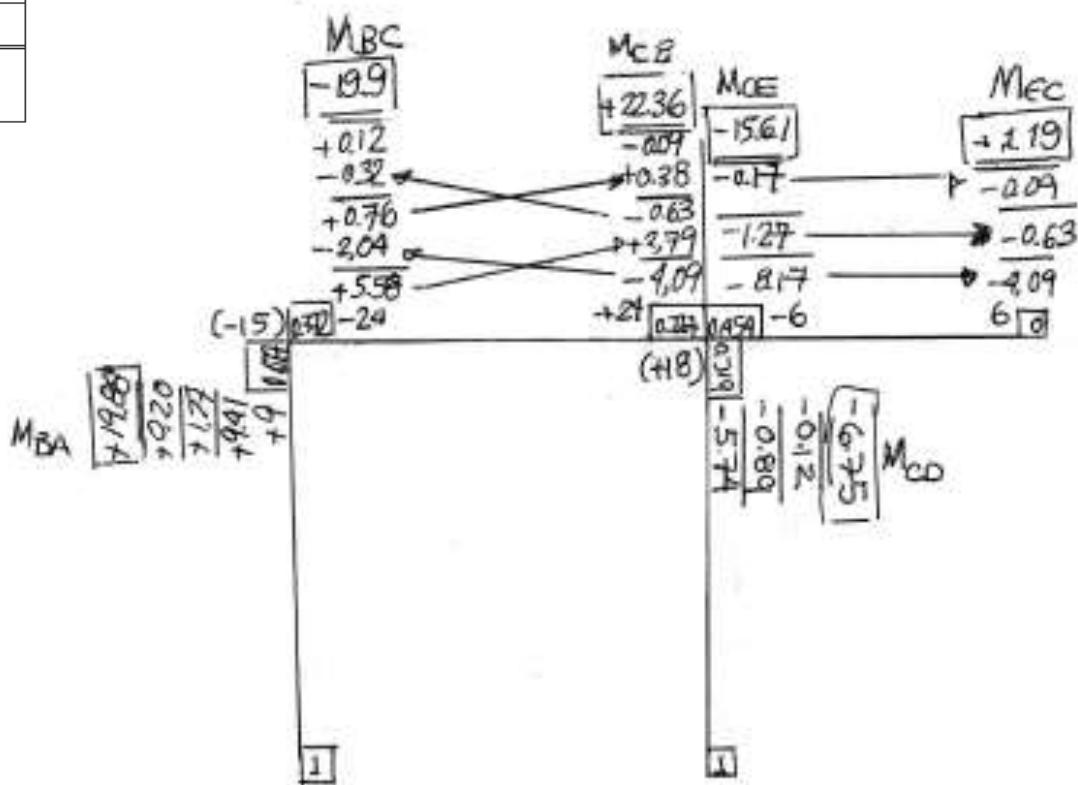
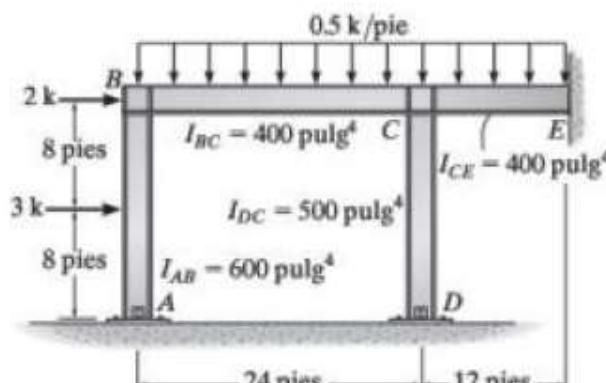
Junta	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>	<i>E</i>	
Elemento	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>CE</i>	<i>DC</i>	<i>EC</i>
DF	0	0.545	0.455	0.330	0.298	0.372	1	1
FEM Dist.			-135	135				
		73.6	61.4	-44.6	-40.2	-50.2		
TR Dist.	36.8		-22.3	30.7				
		12.2	10.1	-10.1	-9.1	-11.5		
TR Dist.	6.1		-5.1	5.1				
		2.8	2.3	-1.7	-1.5	-1.9		
TR Dist.	1.4		-0.8	1.2				
		0.4	0.4	-0.4	-0.4	-0.4		
TR Dist.	0.2		-0.2	0.2				
		0.1	0.1	-0.1	0.0	-0.1		
ΣM	44.5	89.1	-89.1	115	-51.2	-64.1		

(b)

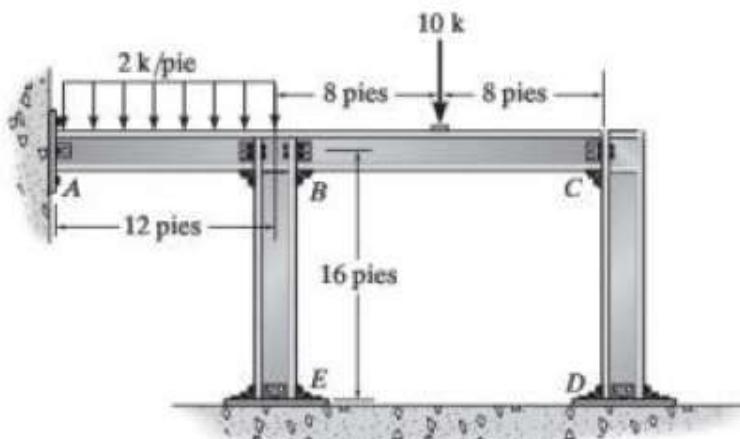


Joint	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>E</i>		<i>D</i>
Mem.	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>CE</i>	<i>EC</i>	<i>DC</i>
DF	1	0.6279	0.3721	0.2270	0.3191	0.4539	0	1
FEM	-6.0	6.0	-24.0	24.0		-6.0	6.0	
	6.0	11.30	6.70	-4.09	-5.74	-8.17		
		3.0	-2.04	3.35			-4.09	
		-0.60	-0.36	-0.76	-1.07	-1.52		
			-0.38	-0.18			-0.76	
		0.24	0.14	0.04	0.06	0.08		
			0.02	0.07			0.04	
		-0.01	-0.01	-0.02	-0.02	-0.03		
						-0.02		
$\sum M$	0	19.9	-19.9	22.4	-6.77	-15.6	1.18	0

$$Fem_{BA} = + 3PL/16 = + 3 \times 3 \times 16/16 = +9$$



***12–20.** Determine los momentos en *B* y *C*, y después dibuje el diagrama de momentos para cada elemento del marco. Suponga que los soportes en *A*, *E* y *D* están fijos. *EI* es constante.



Member Stiffness Factor and Distribution Factor.

$$K_{AB} = \frac{4EI}{L_{AB}} = \frac{4EI}{12} = \frac{EI}{3} \quad K_{BC} = K_{BE} = K_{CD} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{16} = \frac{EI}{4}$$

$$(DF)_{AB} = (DF)_{EB} = (DF)_{DC} = 0 \quad (DF)_{BA} = \frac{EI/3}{EI/3 + EI/4 + EI/4} = 0.4$$

$$(DF)_{BC} = (DF)_{BE} = \frac{EI/4}{EI/3 + EI/4 + EI/4} = 0.3$$

$$(DF)_{CB} = (DF)_{CD} = \frac{EI/4}{EI/4 + EI/4} = 0.5$$

Fixed End Moments. Referring to the table on the inside back cover,

$$(FEM)_{AB} = -\frac{wL_{AB}^2}{12} = -\frac{2(12^2)}{12} = -24 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

$$(FEM)_{BA} = \frac{wL_{AB}^2}{12} = \frac{2(12^2)}{12} = 24 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

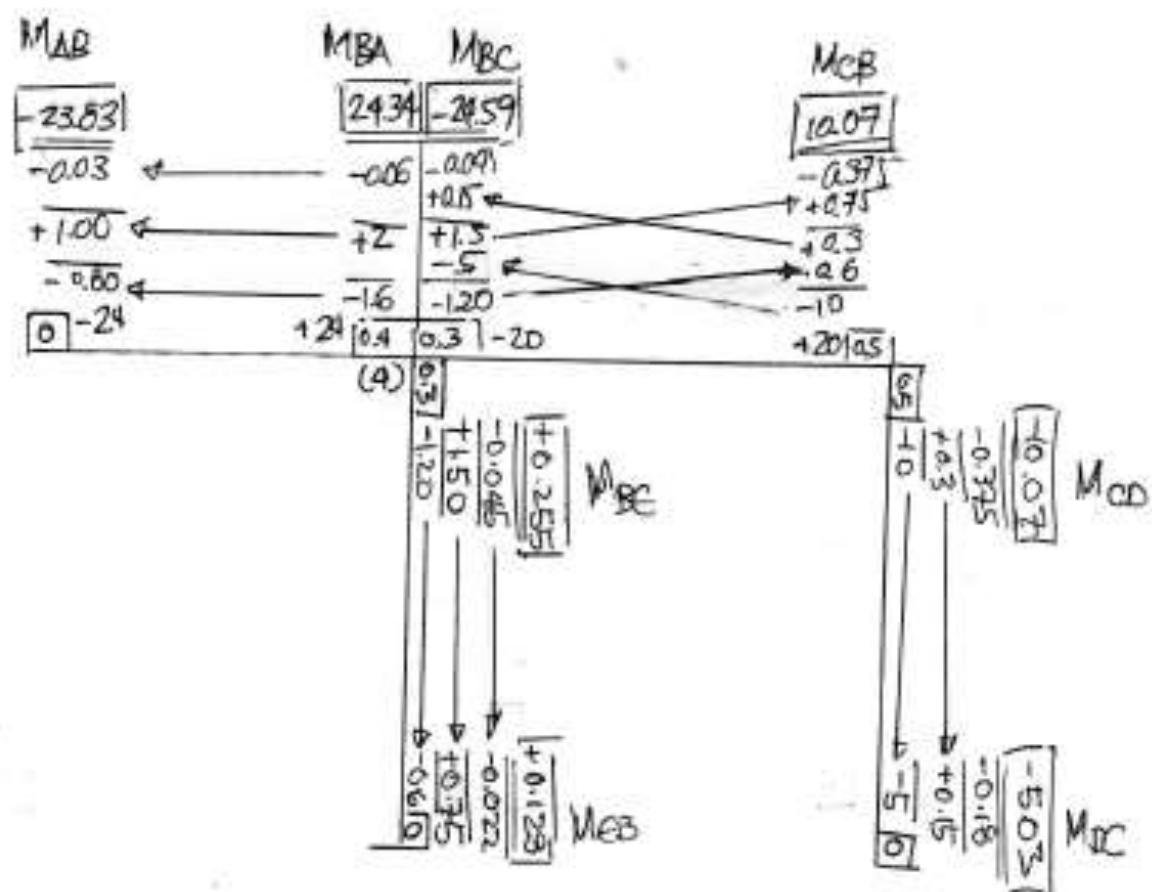
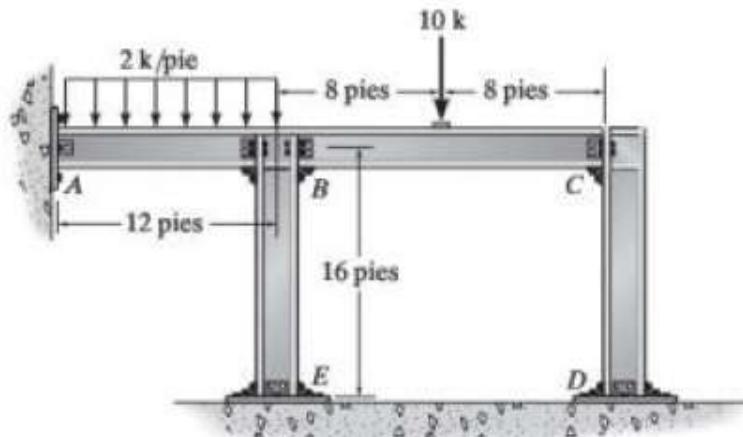
$$(FEM)_{BC} = -\frac{PL_{BC}}{8} = -\frac{10(16)}{8} = -20 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{PL_{BC}}{8} = \frac{10(16)}{8} = 20 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

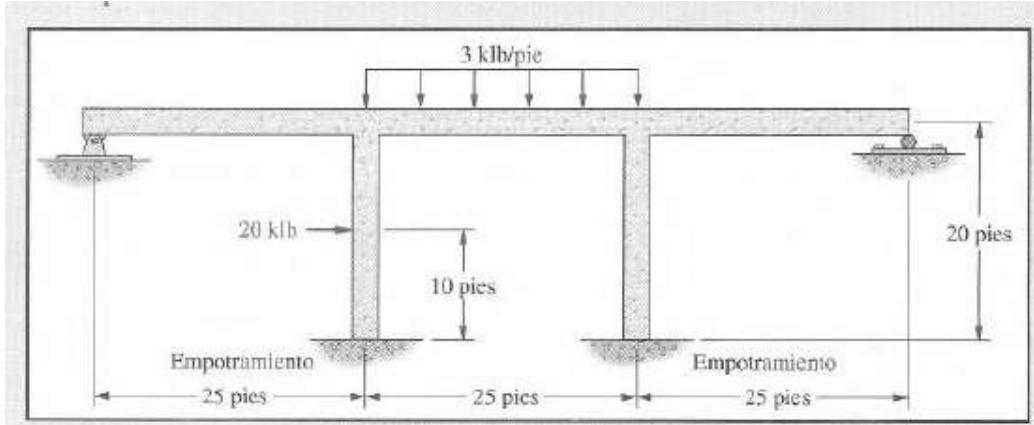
$$(FEM)_{BE} = (FEM)_{EB} = (FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = 0$$

Joint	<i>A</i>	<i>B</i>			<i>C</i>		<i>D</i>	<i>E</i>
Member	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BE</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>	<i>EB</i>
DF	0	0.4	0.3	0.3	0.5	0.5	0	0
FEM	-24	24	0	-20	20	0	0	0
Dist.		-1.60	-1.20	-1.20	-10	-10		
CO	-0.80			-5	-0.60		-5	-0.6
Dist.		2.00	1.50	1.50	0.30	0.30		
CO	1.00			0.15	0.75		0.15	0.75
Dist.		-0.06	-0.045	-0.045	-0.375	-0.375		
CO	-0.03			-0.1875	-0.0225		-0.1875	-0.0225
Dist.		0.075	0.05625	0.05625	0.01125	0.01125		
CO	0.0375			0.005625	0.028125		0.005625	0.028125
Dist.		-0.00225	-0.0016875	-0.0016875	-0.01406	-0.01406		
$\sum M$	-23.79	24.41	0.3096	-24.72	10.08	-10.08	-5.031	0.1556

Joint	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>	<i>E</i>	
Member	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BE</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>	<i>EB</i>
DF	0	0.4	0.3	0.3	0.5	0.5	0	0
FEM	-24	24	0	-20	20	0	0	0
Dist.		-1.60	-1.20	-1.20	-10	-10		
CO	-0.80			-5	-0.60		-5	-0.6
Dist.		2.00	1.50	1.50	0.30	0.30		
CO	1.00			0.15	0.75		0.15	0.75
Dist.		-0.06	-0.045	-0.045	-0.375	-0.375		
CO	-0.03			-0.1875	-0.0225		-0.1875	-0.0225
Dist.		0.075	0.05625	0.05625	0.01125	0.01125		
CO	0.0375			0.005625	0.028125		0.005625	0.028125
Dist.		-0.00225	-0.0016875	-0.0016875	-0.01406	-0.01406		
$\sum M$	-23.79	24.41	0.3096	-24.72	10.08	-10.08	-5.031	0.1556



Calcule los momentos de extremo de la estructura mostrada en la figura 21.2. Los valores de I son constantes para todos los miembros de esta estructura.



0		0.25	0.33	0.33	0.25	0
106.4	1.3		-156.2		-39.0	
10.8			35.4		4.4	
44.3			-26.0		-1.1	
50.0	0.42		8.7		-44.5	
			-3.0			
			1.0			
			-140.1			
0.0				0.42		
-50.0				-74.3		
22.2				-1.8		
5.4				-7.4		
0.6				-65.1		
-21.8						
0.0						
-32.6						
-3.7						
0.9						
-37.2						

Determine los momentos en los extremos del marco en la Fig. 16.13(a) usando el método de distribución de momentos. **Momentos de Empotre.** Usando las expresiones para los momentos de empotre, obtenemos,

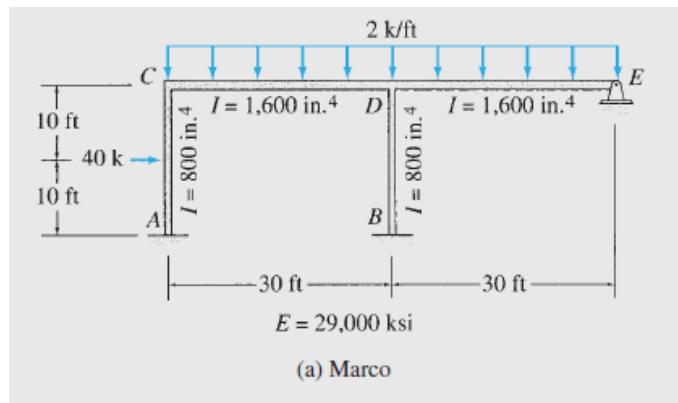
$$FEM_{AC} = +100 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{CA} = -100 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{SD} = FEM_{DS} = 0$$

$$FEM_{CD} = FEM_{DC} = +150 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{DB} = FEM_{ED} = -150 \text{ k-ft}$$



(a) Marco

Solución

Este marco fue analizado previamente analizada en el Ejemplo 15.8 por el método de la pendiente-deflexión.

Factores de Distribución. En el nodo C.

Nodo C

$$DF_{CA} = \frac{\left(\frac{800}{20}\right)}{\left(\frac{800}{20}\right) + \left(\frac{1600}{30}\right)} = 0.429 \quad DF_{CD} = \frac{\left(\frac{1600}{30}\right)}{\left(\frac{800}{20}\right) + \left(\frac{1600}{30}\right)} = 0.571$$

$$DF_{CA} + DF_{CD} = 0.429 + 0.571 = 1$$

Nodo D

$$DF_{DS} = \frac{\left(\frac{800}{20}\right)}{\left(\frac{800}{20}\right) + \left(\frac{1600}{30}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1600}{30}\right)} = 0.3$$

$$DF_{DC} = \frac{\left(\frac{1600}{30}\right)}{\left(\frac{800}{20}\right) + \left(\frac{1600}{30}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1600}{30}\right)} = 0.4$$

$$DF_{DE} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1600}{30}\right)}{\left(\frac{800}{20}\right) + \left(\frac{1600}{30}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1600}{30}\right)} = 0.3$$

$$DF_{DS} + DF_{DE} + DF_{DC} = 2(0.3) + 0.4 = 1$$

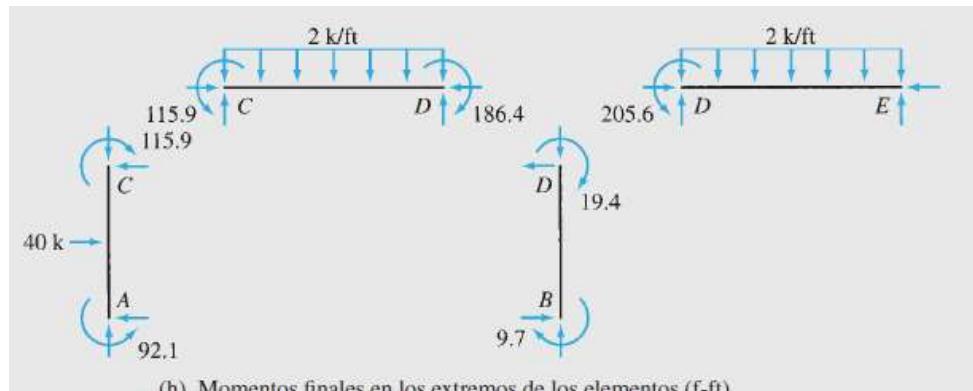
Nodo E

$$DF_{ED} = 1$$

Comprobación

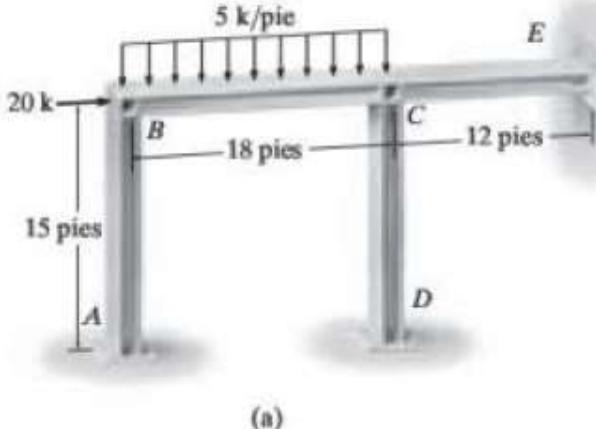
Factores de distribución	AC	CA	CD	DC	DB	DE	ED	BD
	0.429	0.571		0.4	0.3	0.3	1	
1. Momento de empotre	+100	-100	+150	-150		+150	-150	
2. Balance del nodo	- 10.7	- 21.4	- 28.6	- 14.3		+ 75	+ 150	
3. Trasporte				- 24.3	- 18.2	- 18.2		
4. Balance del nodo			- 12.2					
5. Trasporte			+ 5.2					
6. Balance del nodo	+ 2.6			+ 3.5				
7. Trasporte			+ 7	- 1.4	- 1.1	- 1.1		
8. Balance del nodo				- 0.7				
9. Trasporte				+ 0.4				
10. Balance del nodo	+ 0.2			+ 0.2				
11. Trasporte				- 0.1	- 0.1	- 0.1		
12. Momentos finales	+ 92.1	-115.9	+115.9	-186.4	-19.4	+205.6	0	

(c) Tabla de distribución de momento



(h) Momentos finales en los extremos de los elementos (f-ft)

Determine los momentos internos en las juntas del marco que se muestra en la figura 12-15a. E y D están articulados y en el punto A hay un soporte fijo. EI es constante.



(a)

SOLUCIÓN

Por inspección, el pasador en E impedirá que el marco se ladee. Los factores de rigidez de CD y CE pueden calcularse usando $K = 3EI/L$ puesto que los extremos están fijos. Además, la carga de 20 k no contribuye con un FEM porque está aplicada en la junta B . Por lo tanto,

$$K_{AB} = \frac{4EI}{15} \quad K_{BC} = \frac{4EI}{18} \quad K_{CD} = \frac{3EI}{15} \quad K_{CE} = \frac{3EI}{12}$$

$$(FEM)_{BC} = \frac{-wL^2}{12} = \frac{-5(18)^2}{12} = -135 \text{ k}\cdot\text{pie}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{5(18)^2}{12} = 135 \text{ k}\cdot\text{pie}$$

$$DF_{AB} = 0$$

$$DF_{BA} = \frac{4EI/15}{4EI/15 + 4EI/18} = 0.545$$

$$DF_{BC} = 1 - 0.545 = 0.455$$

$$DF_{CB} = \frac{4EI/18}{4EI/18 + 3EI/15 + 3EI/12} = 0.330$$

$$DF_{CD} = \frac{3EI/15}{4EI/18 + 3EI/15 + 3EI/12} = 0.298$$

$$DF_{CE} = 1 - 0.330 - 0.298 = 0.372$$

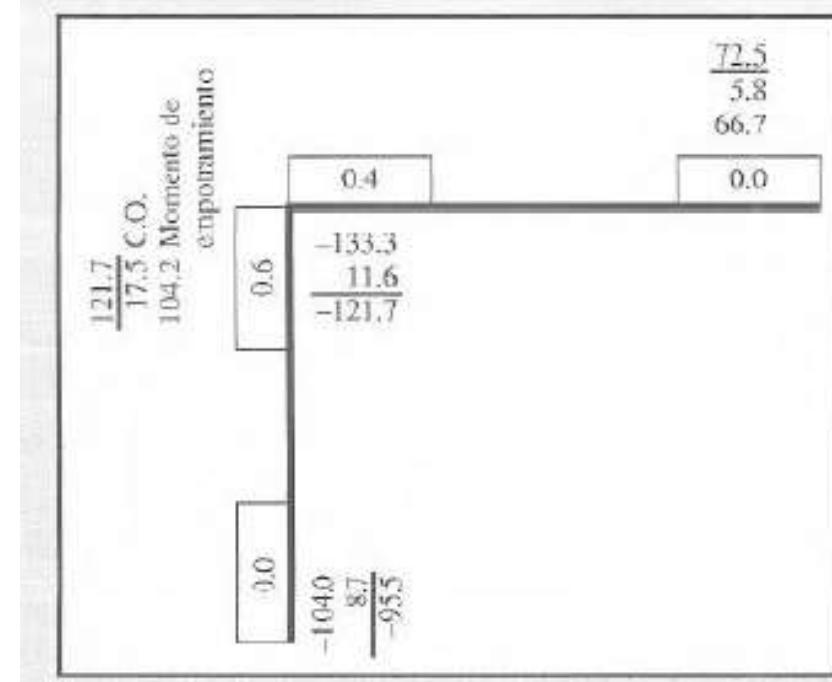
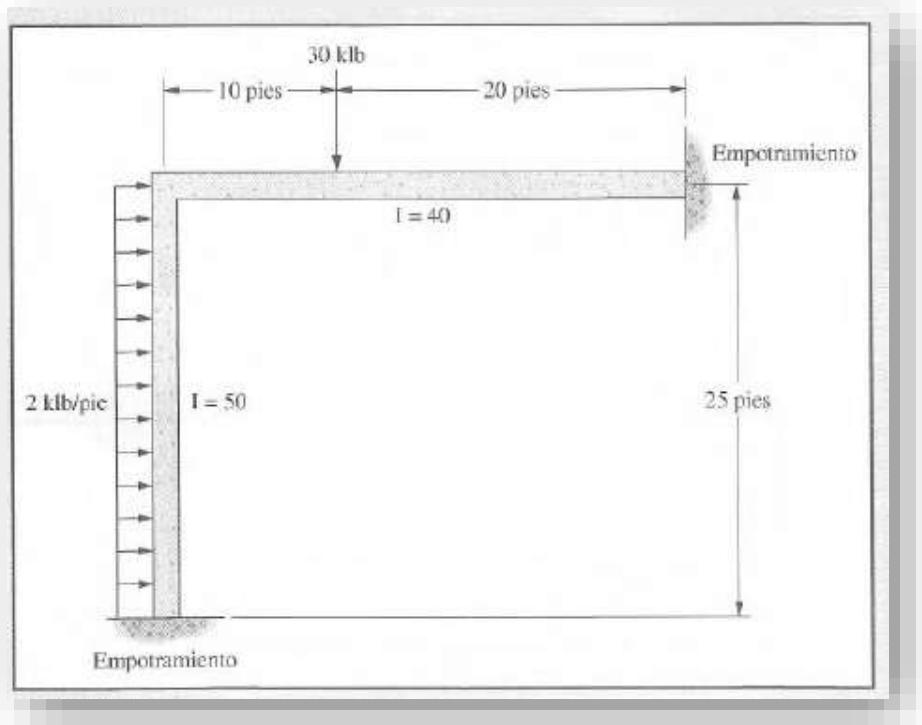
$$DF_{DC} = 1 \quad DF_{EC} = 1$$

Los datos se muestran en la tabla de la figura 12-15b. Aquí se realiza sucesivamente la distribución de momentos en las juntas B y C . Los momentos finales se muestran en la última fila.

Junta	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>	<i>E</i>	
Elemento	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>CE</i>	<i>DC</i>	<i>EC</i>
DF	0	0.545	0.455	0.330	0.298	0.372	1	1
FEM Dist.		73.6	-135 61.4	135 -44.6	-40.2	-50.2		
TR Dist.	36.8		-22.3 12.2	30.7 10.1	-10.1	-9.1	-11.5	
TR Dist.	6.1		-5.1 2.8	5.1 2.3	-1.7	-1.5	-1.9	
TR Dist.	1.4		-0.8 0.4	1.2 -0.4	-0.4	-0.4		
TR Dist.	0.2		-0.2 0.1	0.2 -0.1	0.0	-0.1		
ΣM	44.5	89.1	-89.1	115	-51.2	-64.1		

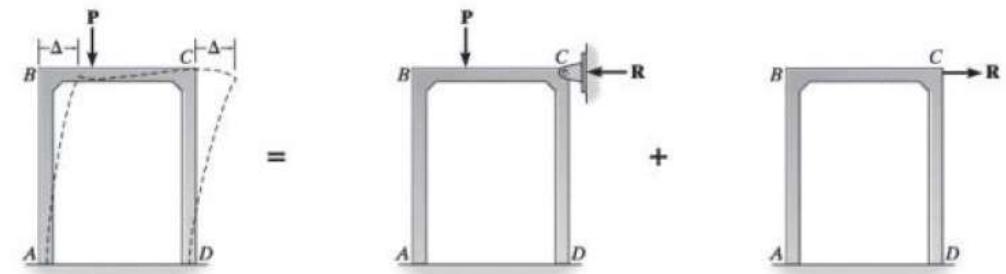
(b)

Determinar los momentos de extremo del marco que se muestra en la figura 21.1. Se muestra el valor relativo de I para cada miembro del marco.



Método de Distribución de Momentos

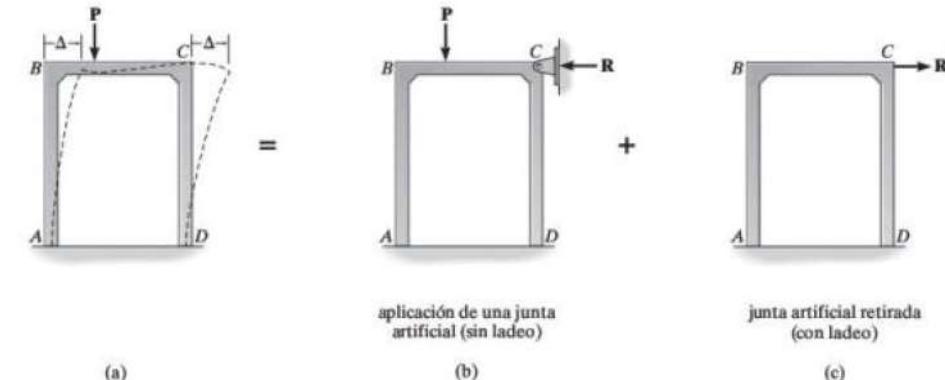
“Marcos con Desplazamiento Lateral”



Procedimiento de Análisis

Marcos con Desplazamiento Lateral

- ✓ Se analiza otro marco con desplazamiento con una fuerza R' en dirección opuesta a R , y encontrar los momentos de empotramientos debido al desplazamiento
- ✓ Para estos momentos, se asume un valor arbitrario para el análisis inicial de distribución (± 100)
- ✓ De existir columnas de diferentes alturas, de las ecuaciones de empotramiento por desplazamiento se igualan los desplazamientos asumiendo el valor del momento en una columna para encontrar el momento de la segunda columna relativa a la primera
- ✓ Se realiza la distribución de momento para el segundo marco sin cargas externas, solo están presentes los FEM debido a desplazamiento de las columnas
- ✓ Se determinan los cortantes en las bases de las columnas y hacer equilibrio en X para obtener el valor de R'



$$M = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

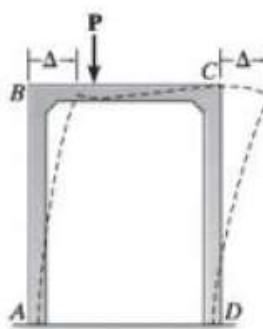
Tomando los momentos del primer marco M_1 y los del segundo M_2 los momentos finales en cada nodo se encuentran con la siguiente ecuación

$$M_{final} = M_1 + \frac{R}{R'} M_2$$

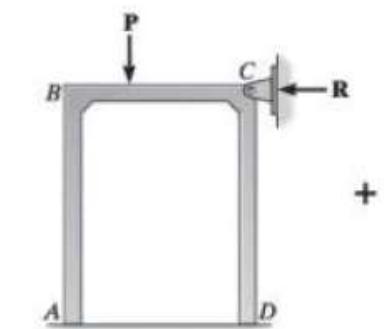
Procedimiento de Análisis

Marcos con Desplazamiento Lateral

- ✓ Se utiliza el principio de Superposición
- ✓ Primero se asume que el marco no tiene desplazamiento lateral, colocando una redundante R en el marco
- ✓ Se aplica la distribución de momento en ese marco, y luego por estática se encuentra la fuerza restrictiva R , separando cada columna y encontrando sus fuerzas internas para hacer sumatoria de fuerzas en $x = 0$

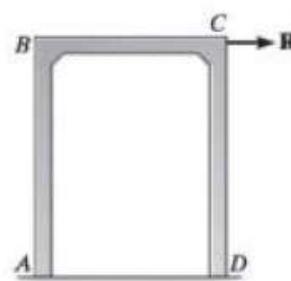


(a)



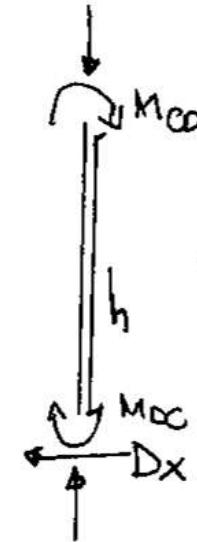
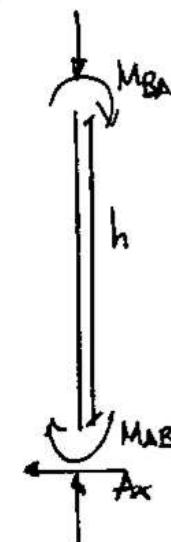
aplicación de una junta artificial (sin ladeo)

(b)



junta artificial retirada (con ladeo)

(c)



$$\sum F_x = 0 \\ R_x + A_x - D_x = 0$$

$$M = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

Tabla de Distribución- Modelo con Restricción R (Sin desplazamiento)

Junta	A	B	C	D		
Elemento	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0
FEM			-10.24	2.56		
Dist.		5.12	5.12	-1.28	-1.28	
TR Dist.	2.56		-0.64	2.56		-0.64
TR Dist.	0.16	0.32	-0.64	0.16		-0.64
TR Dist.	0.16	0.32	0.32	-1.28	-1.28	
TR Dist.	0.16	0.02	-0.04	0.16		-0.04
ΣM	2.88	5.78	-5.78	2.72	-2.72	-1.32

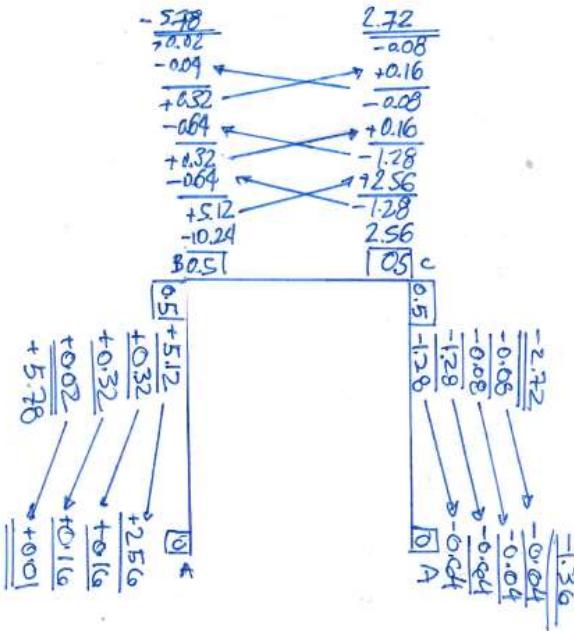


Tabla de Distribución- Modelo con Redundante R' (con desplazamiento)

Junta	A	B	C	D		
Elemento	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0
FEM	-100	-100	50	50	-100	-100
Dist.		50			50	
TR Dist.	25		25	25	-12.5	25
TR Dist.	-12.5		-12.5	-12.5	-12.5	
TR Dist.	-6.25		-6.25	-6.25	-6.25	
TR Dist.	3.125		3.125	3.125	3.125	
TR Dist.	1.56		1.56	1.56	1.56	
TR Dist.	-0.78		-0.78	-0.78	-0.78	
TR Dist.	-0.39		-0.39	-0.39	-0.39	
ΣM	-80.00	-60.00	60.00	60.00	-60.00	-80.00

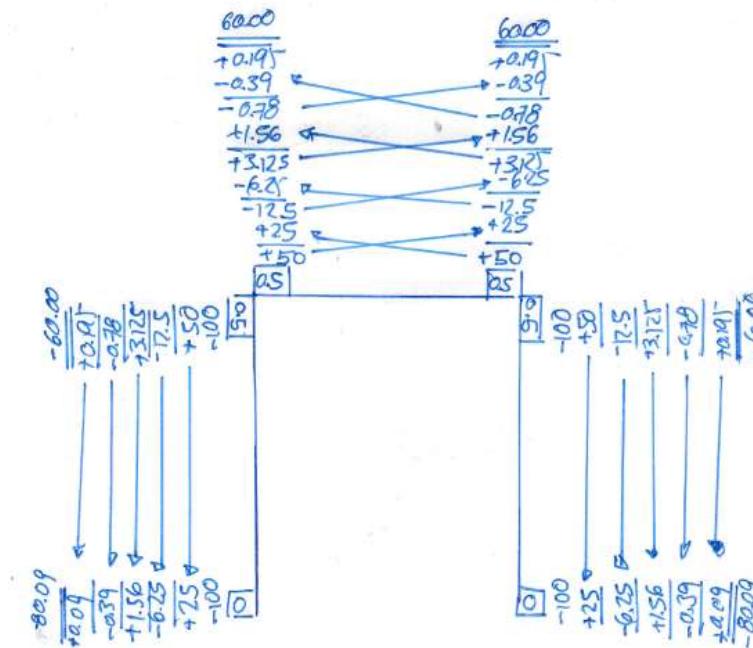
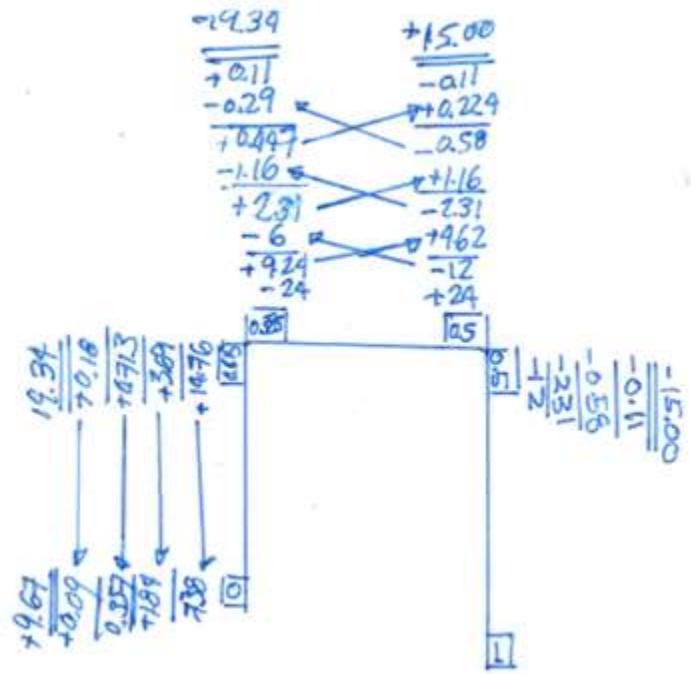
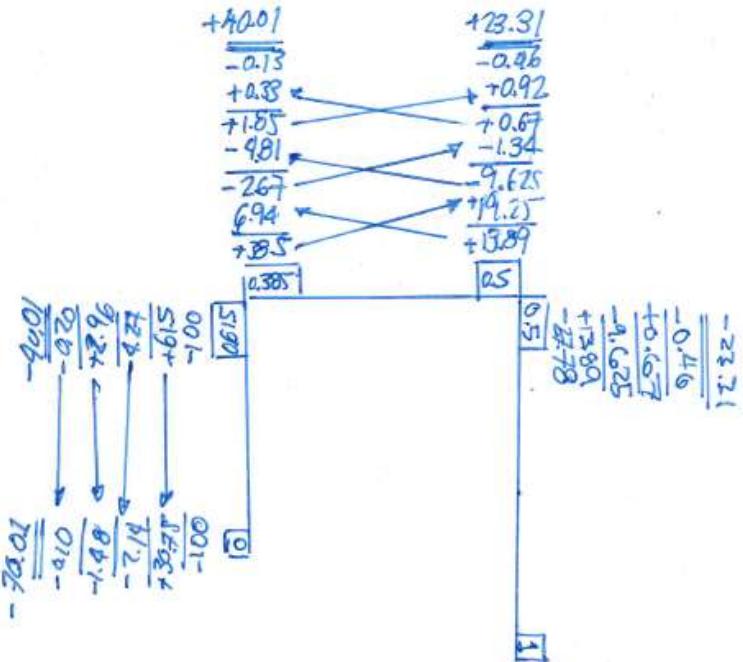


Tabla de Distribución- Modelo sin desplazamiento (restricción R)

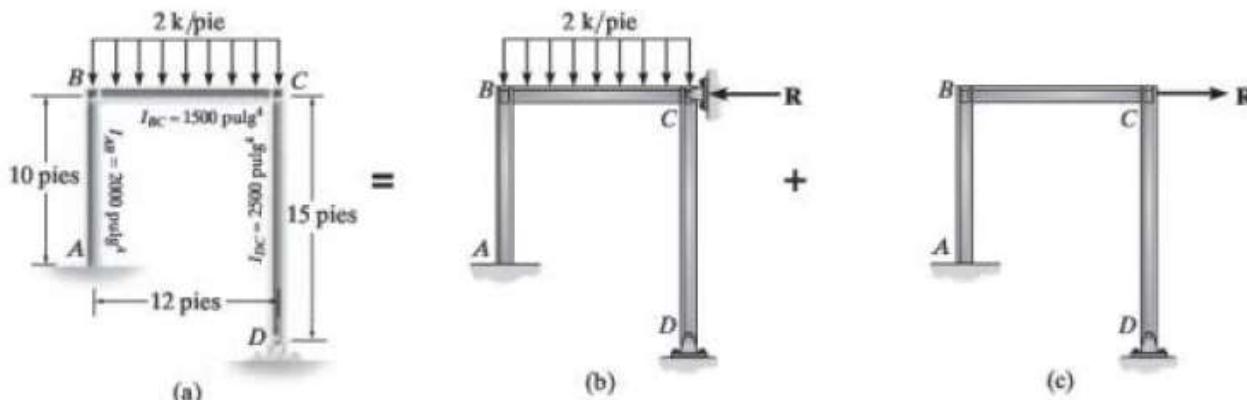
Junta	A	B	C	D		
Elemento	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	0	0.615	0.385	0.5	0.5	1
FEM			-24	24		
Dist.		14.76	9.24	-12	-12	
TR	7.38		-6	4.62		
Dist.		3.69	2.31	-2.31	-2.31	
TR	1.84		-1.16	1.16		
Dist.		0.713	0.447	-0.58	-0.58	
TR	0.357		-0.29	0.224		
Dist.		0.18	0.11	-0.11	-0.11	
ΣM	9.58	19.34	-19.34	15.00	-15.00	0

Tabla de Distribución- Modelo con desplazamiento (redundante R')

Junta	A	B	C	D		
Elemento	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	0	0.615	0.385	0.5	0.5	1
FEM	-100	-100	38.5	13.89	-27.78	
Dist.		61.5		13.89	13.89	
TR	30.75		6.94	19.25		
Dist.		-4.27	-2.67	-9.625	-9.625	
TR	-2.14		-4.81	-1.34		
Dist.		2.96	1.85	0.67	0.67	
TR	1.48		0.33	0.92		
Dist.		-0.20	-0.13	-0.46	-0.46	
ΣM	-69.91	-40.01	40.01	23.31	-23.31	0



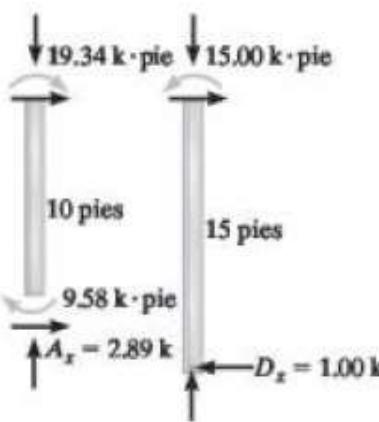
Determine los momentos en cada junta del marco que se muestra en la figura 12-19a. El momento de inercia de cada elemento se indica en la figura.



SOLUCIÓN

En primer lugar se evita un ladeo en el marco, como se muestra en la figura 12-19b. Los momentos internos en las juntas se calculan como se indica en la figura 12-19d. Aquí, el factor de rigidez del CD se calculó empleando $3EI/L$, puesto que hay un pasador en D . El cálculo de las reacciones horizontales en A y D se muestra en la figura 12-19e. Entonces, para todo el marco,

Junta	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF	0	0.615	0.385	0.5	0.5	1
FEM			-24	24		
Dist.		14.76	9.24	-12	-12	
TR	7.38		-6	4.62		
Dist.		3.69	2.31	-2.31	-2.31	
TR	1.84		-1.16	1.16		
Dist.		0.713	0.447	-0.58	-0.58	
TR	0.357		-0.29	0.224		
Dist.		0.18	0.11	-0.11	-0.11	
ΣM	9.58	19.34	-19.34	15.00	-15.00	0



$$\sum F_x = 0;$$

$$R = 2.89 - 1.00 = 1.89 \text{ k}$$

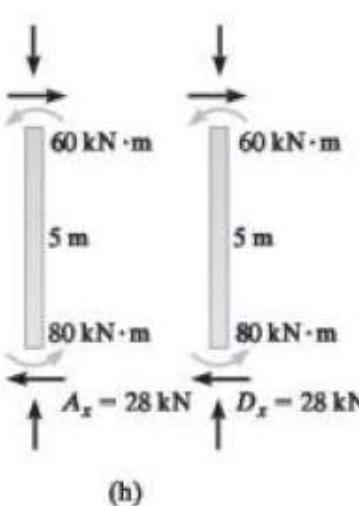
Se requiere un *signo negativo* porque el momento debe actuar *en sentido antihorario* sobre la columna para obtener una deflexión Δ' hacia la derecha. Ahora puede determinarse el valor de R' asociado con este momento de $-100 \text{ kN} \cdot \text{m}$. La distribución de momentos de los FEM se muestra en la figura 12-18g. Con base en el equilibrio, se calculan las reacciones horizontales en A y D , figura 12-18h. Así, para todo el marco se requiere

Junta	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>		
Elemento	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0
FEM	-100	-100	50	50	-100	-100
Dist.		50	50	50	50	
TR	25		25	25		25
Dist.	-12.5	-12.5	-12.5	-12.5	-12.5	
TR	-6.25		-6.25	-6.25		-6.25
Dist.	3.125	3.125	3.125	3.125	3.125	
TR	1.56		1.56	1.56		1.56
Dist.	-0.78	-0.78	-0.78	-0.78	-0.78	
TR	-0.39		-0.39	-0.39		-0.39
Dist.	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	
ΣM	-80.00	-60.00	60.00	60.00	-60.00	-80.00

(g)

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$R' = 28 + 28 = 56.0 \text{ kN}$$



(h)

Por lo tanto, $R' = 56.0 \text{ kN}$ crea los momentos tabulados en la figura 12-18g. Los momentos correspondientes causados por $R = 0.92 \text{ kN}$ pueden determinarse por proporción. Por lo tanto, el momento resultante en el marco, figura 12-18a, es igual a la *suma* de los calculados para el marco en la figura 12-18b, más la cantidad proporcional de los que se calcularon en la figura 12-18c. Se tiene

$$M_{AB} = 2.88 + \frac{0.92}{56.0}(-80) = 1.57 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{BA} = 5.78 + \frac{0.92}{56.0}(-60) = 4.79 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{BC} = -5.78 + \frac{0.92}{56.0}(60) = -4.79 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CB} = 2.72 + \frac{0.92}{56.0}(60) = 3.71 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CD} = -2.72 + \frac{0.92}{56.0}(-60) = -3.71 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{DC} = -1.32 + \frac{0.92}{56.0}(-80) = -2.63 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Tabla de Distribución- Modelo con Redundante R

Joint	A	D		C		B
Member	AD	DA	DC	CD	CB	BC
DF	0	$\frac{10}{19}$	$\frac{9}{19}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	0
FEM	-5.40	5.40	0	0	0	0
Dist.	-2.842	-2.558				
CO	-1.421			-1.279		
Dist.				0.480	0.799	
CO		0.240				0.400
Dist.		-0.126	-0.114			
CO	-0.063			-0.057		
Dist.				0.021	0.036	
CO		0.010				0.018
Dist.		-0.005	-0.005			
$\sum M$	-6.884	2.427	-2.427	-0.835	0.835	0.418

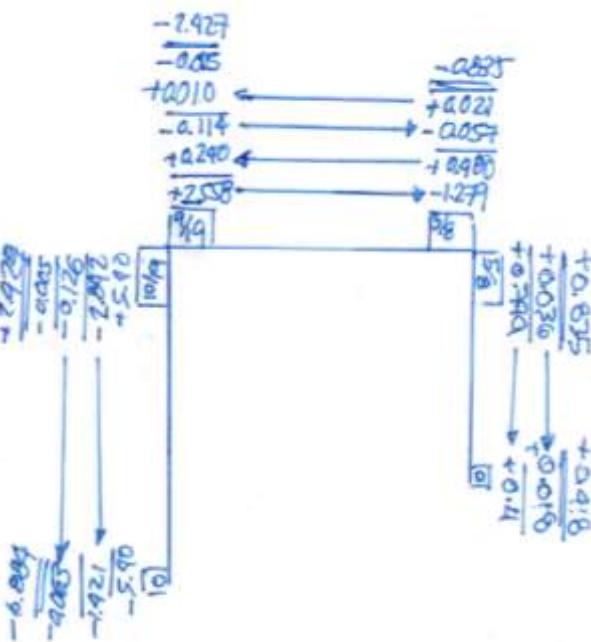
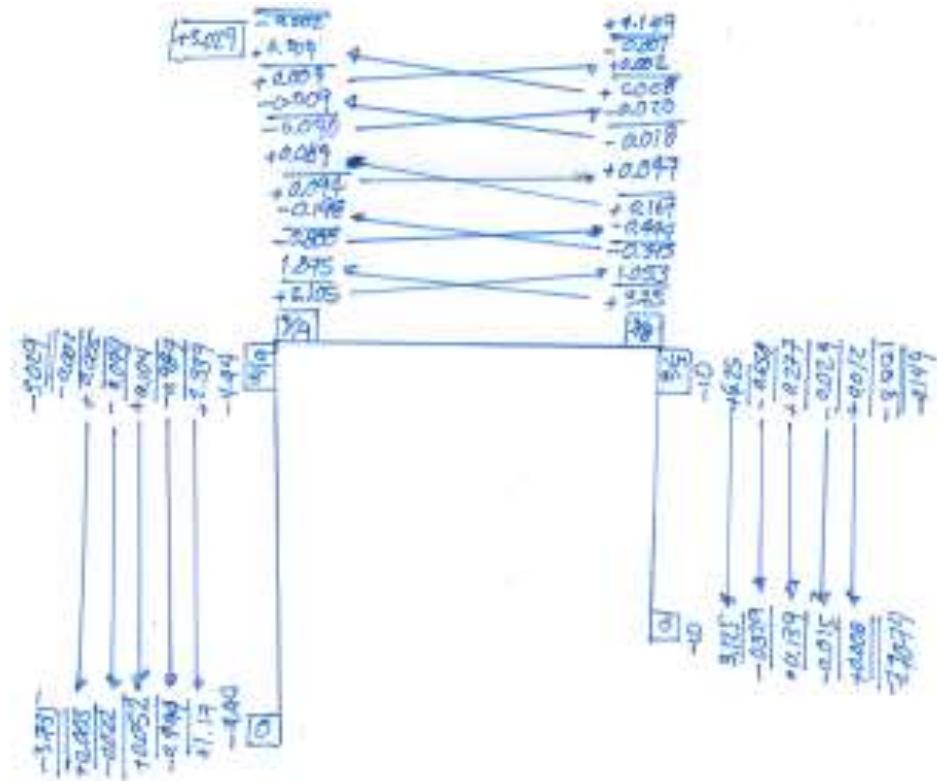
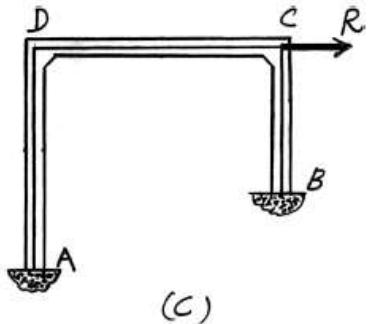


Tabla de Distribución- Modelo Redundante R'

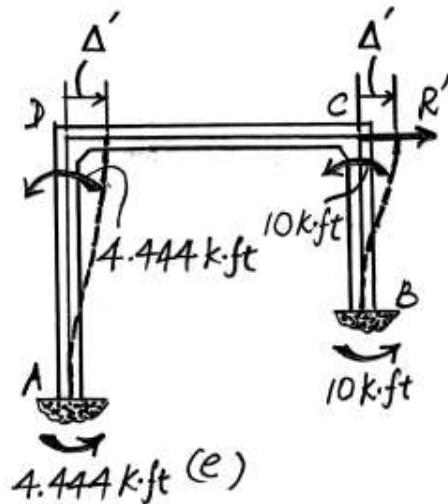
Joint	A	D		C		B
Member	AD	DA	DC	CD	CB	BC
DF	0	$\frac{10}{19}$	$\frac{9}{19}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	0
FEM	-4.444	-4.444			-10	-10
Dist.		2.339	2.105	3.75	6.25	
CO	1.170		1.875	1.053		3.125
Dist.		-0.987	-0.888	-0.395	-0.658	
CO	-0.494		-0.198	-0.444		-0.329
Dist.		0.104	0.094	0.767	0.277	
CO	0.052		0.084	0.047		0.139
Dist.		0.044	-0.040	-0.018	-0.029	
CO	-0.022		-0.009	-0.020		-0.015
Dist.		0.005	0.004	0.008	0.012	
CO	0.003		0.004	0.002		0.006
Dist.		-0.002	-0.002	-0.001	-0.001	
$\sum M$	-3.735	-3.029	3.029	4.149	-4.149	-7.074



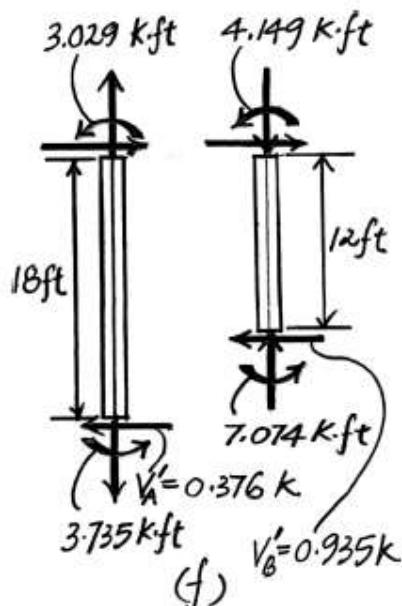


$$(\text{FEM})_{BC} = (\text{FEM})_{CB} = -10 \text{ k}\cdot\text{ft}; \quad \frac{6EI\Delta'}{L^2} = -10 \quad \Delta' = \frac{240}{EI}$$

$$(\text{FEM})_{AD} = (\text{FEM})_{DA} = -\frac{6EI\Delta'}{L^2} = -\frac{6EI(240/EI)}{18^2} = -4.444 \text{ k}\cdot\text{ft}$$



Joint	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>		
Member	<i>AD</i>	<i>DA</i>	<i>DC</i>	<i>CD</i>	<i>CB</i>	<i>BC</i>
DF	0	$\frac{10}{19}$	$\frac{9}{19}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	0
FEM Dist.	-4.444	-4.444	2.339	2.105	3.75	-10
CO Dist.	1.170		1.875	1.053		3.125
CO Dist.	-0.987		-0.888	-0.395		-0.658
CO Dist.	-0.494		-0.198	-0.444		-0.329
CO Dist.	0.052		0.084	0.047		0.139
CO Dist.	0.044		-0.040	-0.018		-0.029
CO Dist.	-0.022		-0.009	-0.020		-0.015
CO Dist.	0.005		0.004	0.008		0.012
CO Dist.	0.003		0.004	0.002		0.006
$\sum M$	-3.735	-3.029	3.029	4.149	-4.149	-7.074



$$\pm \sum F_x = 0; \quad R' - 0.376 - 0.935 = 0 \quad R' = 1.311 \text{ k}$$

$$M_{AD} = -6.884 + \left(\frac{1.656}{1.311}\right)(-3.735) = 11.6 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

$$M_{DA} = 2.427 + \left(\frac{1.656}{1.311}\right)(-3.029) = -1.40 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

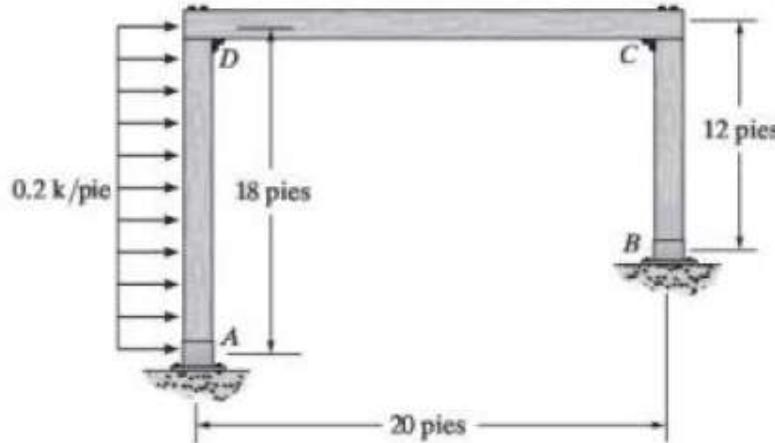
$$M_{DC} = -2.427 + \left(\frac{1.656}{1.311}\right)(3.029) = 1.40 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

$$M_{CD} = -0.835 + \left(\frac{1.656}{1.311}\right)(4.149) = 4.41 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

$$M_{CB} = 0.835 + \left(\frac{1.656}{1.311}\right)(-4.149) = -4.41 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

$$M_{CD} = 0.418 + \left(\frac{1.656}{1.311}\right)(-7.074) = -8.52 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

*12-24. Determine los momentos que actúan en los extremos de cada elemento. Suponga que las juntas están fijamente conectadas y que A y B son soportes fijos. EI es constante.



$$K_{AD} = \frac{4EI}{L_{AD}} = \frac{4EI}{18} = \frac{2EI}{9} \quad K_{CD} = \frac{4EI}{L_{CD}} = \frac{4EI}{20} = \frac{EI}{5}$$

$$K_{BC} = \frac{4EI}{L_{BC}} = \frac{4EI}{12} = \frac{EI}{3}$$

$$(DF)_{AD} = (DF)_{BC} = 0 \quad (DF)_{DA} = \frac{2EI/59}{2EI/9 + EI/5} = \frac{10}{9}$$

$$(DF)_{DC} = \frac{EI/5}{2EI/9 + EI/5} = \frac{9}{19}$$

$$(DF)_{CD} = \frac{EI/5}{EI/5 + EI/3} = \frac{3}{8} \quad (DF)_{CB} = \frac{EI/3}{EI/5 + EI/3} = \frac{5}{8}$$

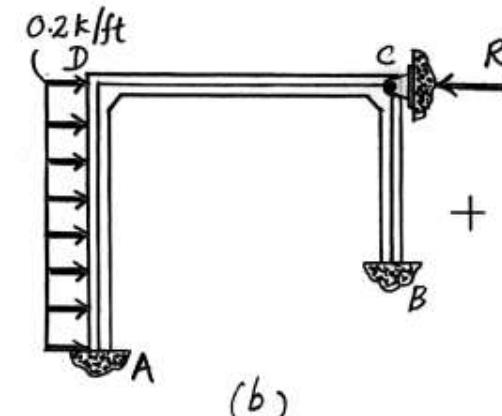
$$(FEM)_{AD} = -\frac{wL_{AD}^2}{12} = -\frac{0.2(18)^2}{12} = -5.40 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

$$(FEM)_{DA} = \frac{wL_{AD}^2}{12} = \frac{0.2(18)^2}{12} = 5.40 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

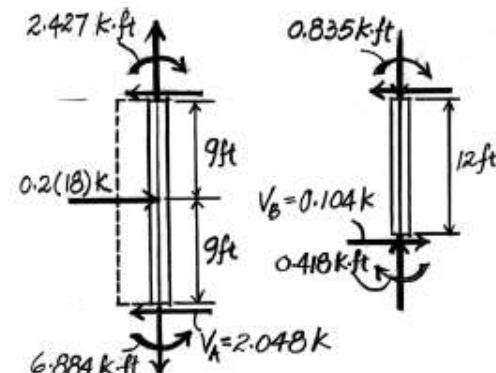
$$(FEM)_{DC} = (FEM)_{CD} = (FEM)_{CB} = (FEM)_{BC} = 0$$

Joint	D		C		B	
Member	AD	DA	DC	CD	CB	BC
DF	0	$\frac{10}{19}$	$\frac{9}{19}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	0
FEM	-5.40	5.40	0	0	0	0
Dist.		-2.842	-2.558			
CO	-1.421			-1.279		
Dist.				0.480	0.799	
CO		0.240				0.400
Dist.		-0.126	-0.114			
CO	-0.063			-0.057		
Dist.				0.021	0.036	
CO		0.010				0.018
Dist.		-0.005	-0.005			
$\sum M$	-6.884	2.427	-2.427	-0.835	0.835	0.418

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 0.2(18) + 0.104 - 2.048 - R = 0 \quad R = 1.656 \text{ k}$$

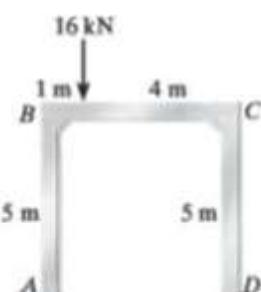


(b)

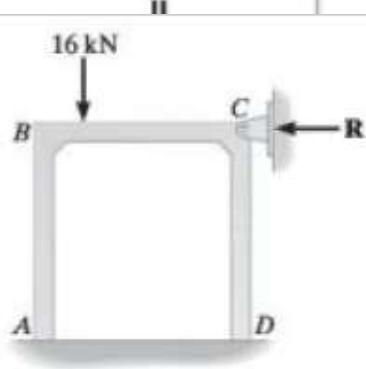


(d)

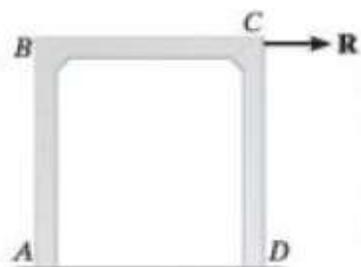
Determine los momentos en cada junta del marco que se muestra en la figura 12-18a. EI es constante.



(a)



(b)



(c)

SOLUCIÓN

En primer lugar se considerará que el marco no sufre desplazamiento lateral como se muestra en la figura 12-18b. Se tiene

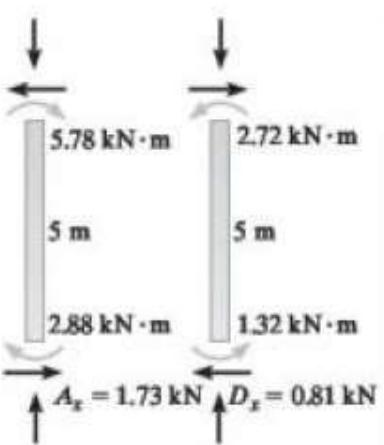
$$(FEM)_{BC} = -\frac{16(4)^2(1)}{(5)^2} = -10.24 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{16(1)^2(4)}{(5)^2} = 2.56 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

El factor de rigidez de cada claro se calcula con base en $4EI/L$ o empleando el factor de rigidez relativa I/L . Los DF y la distribución de momentos se muestran en la tabla de la figura 12-18d. Con base en estos resultados se aplican las ecuaciones de equilibrio a los diagramas de cuerpo libre de las columnas a fin de determinar A_x y D_x , figura 12-18e. A partir del diagrama de cuerpo libre de todo el marco (no se muestra), la restricción R de la junta en la figura 12-18b tiene una magnitud de

Junta	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
Elemento	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0
FEM			-10.24	2.56		
Dist.		5.12	5.12	-1.28	-1.28	
TR Dist.	2.56	0.32	-0.64	2.56	-0.64	
TR Dist.	0.16	0.32	-0.64	0.16	-0.64	
TR Dist.	0.16	0.32	-0.04	0.16	-0.04	
TR Dist.	0.16	0.02	0.02	-0.08	-0.08	
ΣM	2.88	5.78	-5.78	2.72	-2.72	-1.32

(d)

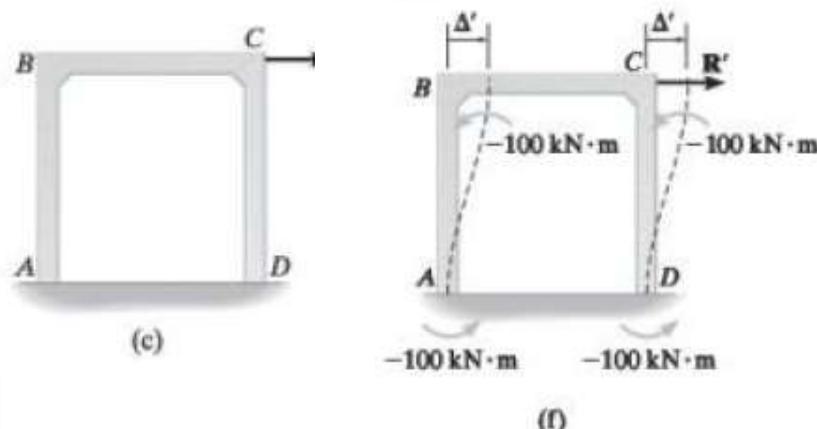


(e)

$$\Sigma F_x = 0; \quad R = 1.73 \text{ kN} - 0.81 \text{ kN} = 0.92 \text{ kN}$$

Ahora debe aplicarse un valor igual pero opuesto de $R = 0.92 \text{ kN}$ sobre el punto C del marco y es necesario calcular los momentos internos, figura 12-18c. Para resolver el problema del cálculo de estos momentos, se supondrá que se aplica una fuerza \mathbf{R}' sobre C , lo que ocasiona que el marco se desvíe Δ' , como se muestra en la figura 12-18f. Aquí las juntas en B y C se encuentran *temporalmente restringidas a la rotación*, y como resultado se determinan los momentos de extremo fijo en los extremos de las columnas con base en la fórmula de la deflexión que se encuentra en el interior de la contraportada, es decir,

$$M = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$



(c)

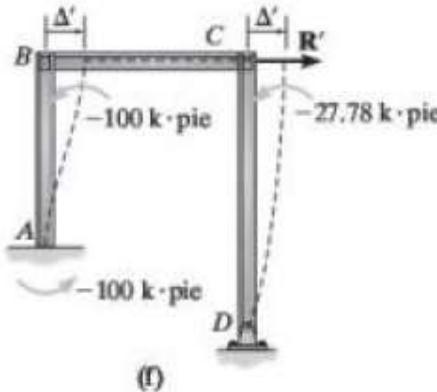
(f)

En vista de que tanto B como C se desplazan la misma cantidad Δ' , y AB y DC tienen los mismos valores de E, I y L , el FEM en AB será el mismo que en DC . Como se muestra en la figura 12-18f, se supondrá arbitrariamente que este momento de extremo fijo sea

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = -100 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

La fuerza opuesta se aplica ahora sobre el marco como se muestra en la figura 12-19c. Al igual que en el ejemplo anterior, se considerará una fuerza R' que actúa en la forma mostrada en la figura 12-19f. Como resultado, las juntas B y C se desplazan la misma cantidad Δ' . Los momentos de extremo fijo para BA se calculan a partir de

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = -\frac{6EI\Delta}{L^2} = -\frac{6E(2000)\Delta'}{(10)^2}$$



Sin embargo, con base en la tabla que se encuentra en el interior de la contraportada, para CD se tiene

$$(FEM)_{CD} = -\frac{3EI\Delta}{L^2} = -\frac{3E(2500)\Delta'}{(15)^2}$$

Si se supone que el FEM para AB es de -100 k·pie como se muestra en la figura 12-19f, el FEM correspondiente en C , que causa el mismo Δ' , se encuentra por comparación, esto es,

$$\Delta' = -\frac{(-100)(10)^2}{6E(2000)} = -\frac{(FEM)_{CD}(15)^2}{3E(2500)}$$

$$(FEM)_{CD} = -27.78 \text{ k·pie}$$

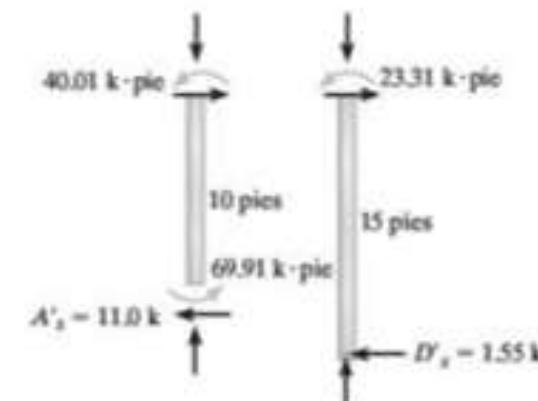
La distribución de momentos para estos FEM se tabula en la figura 12-19g. Los cálculos de las reacciones horizontales en A y D se muestran en la figura 12-19h. Entonces, para todo el marco,

Junta	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF	0	0.615	0.385	0.5	0.5	1
FEM Dist.	-100	-100 61.5	38.5	13.89	-27.78 13.89	
TR Dist.	30.75		6.94 -4.27	19.25 -2.67		
TR Dist.	-2.14		-4.81 2.96	-1.34 1.85	-9.625 0.67	-9.625 0.67
TR Dist.	1.48		-0.20 0.33	-0.13 0.92	-0.46 -0.46	-0.46
ΣM	-69.91	-40.01	40.01	23.31	-23.31	0

(g)

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$R' = 11.0 + 1.55 = 12.55 \text{ k}$$



Por lo tanto, los momentos resultantes en el marco son

$$M_{AB} = 9.58 + \left(\frac{189}{1255}\right)(-69.91) = -0.948 \text{ k·pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{BA} = 19.34 + \left(\frac{189}{1255}\right)(-40.01) = 13.3 \text{ k·pie} \quad \text{Resp.}$$

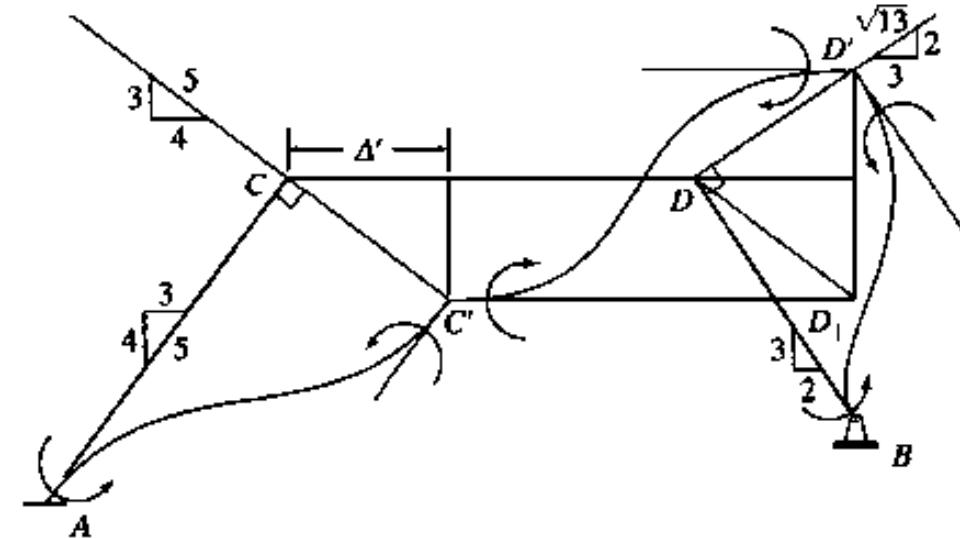
$$M_{BC} = -19.34 + \left(\frac{189}{1255}\right)(40.01) = -13.3 \text{ k·pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CB} = 15.00 + \left(\frac{189}{1255}\right)(23.31) = 18.5 \text{ k·pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CD} = -15.00 + \left(\frac{189}{1255}\right)(-23.31) = -18.5 \text{ k·pie} \quad \text{Resp.}$$

Método de Distribución de Momentos

“Marcos con Elementos
Inclinados”



AC	CA		CD		DC	DB	BD
	0.5	0.5		0.49	0.51	I	
+54.1	+54.1		-61.3	-61.3	+100	+100	
+ 1.8	+ 3.6	+ 3.6	- 9.5	+ 1.8	- 50	- 19.7	-100
+ 2.4	+ 4.8	+ 4.8	+23.6	+ 2.4	+ 24.6		
- 3	- 5.9	- 5.9	- 1.2	- 1.2	- 1.2		
+ 0.2	+ 0.3	+ 0.3	+ 1.5	+ 1.5	+ 0.2		
- 0.2	- 0.4	- 0.4	- 0.1	- 0.1	- 0.1		
+55.3	+56.5		-56.4	-55.2	+ 0.1	+ 55.2	0

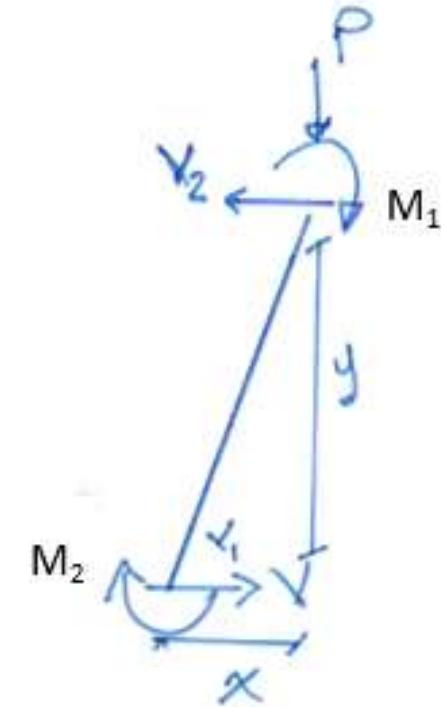
Procedimiento de Análisis

Marcos con Elementos Inclinados

- Para cálculo de R y R' se separa cada columna tomando los momentos finales de la tabla de distribución y se realiza equilibrio estático para encontrar el cortante en el apoyo para la dirección x, y luego se hace equilibrio para todo el conjunto.
- Para los momentos finales se hace los mismos ajustes que el marco regular

$$M_{final} = M_1 + \frac{R}{R'} M_2$$

En caso de no existir cargas en el interior de ningún elemento, (Solo carga lateral en un nodo). Se resolverá una sola tabla de distribución de momento , asumiendo un valor de FEM para una columna y por relación geométrica el FEM correspondiente para la otra columna y se desarrolla una tabla única, y el momento final se determina por la fórmula:



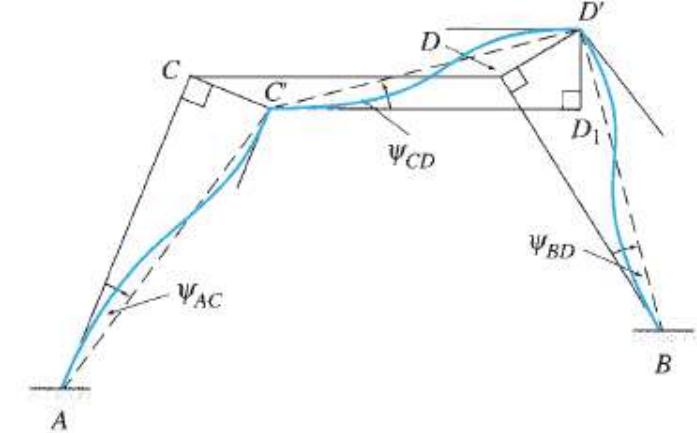
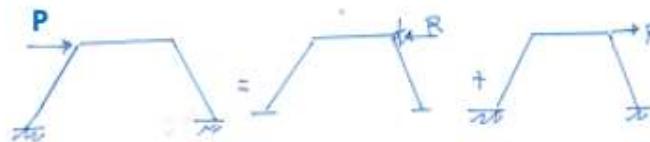
$$M_{final} = \frac{P}{R} M_o$$

P es la carga externa aplicada
y M_o es el momento resultante
de la tabla de distribución por nodo

Procedimiento de Análisis

Marcos con Elementos Inclinados

- De la misma manera de marco regulares con desplazamiento, se utiliza el principio de Superposición, colocando una redundante R en el marco con las cargas reales (restringiendo el movimiento) y una redundante R' en otro marco sin cargas con libertad de movimiento



(c) Rotación de la cuerda debido al desplazamiento lateral

$$\psi_{AC} = -\frac{CC'}{L_1} \quad \psi_{BD} = -\frac{DD'}{L_2} \quad \psi_{CD} = \frac{D_1D'}{L}$$

$$CC' = \frac{\Delta}{\cos \beta_1}$$

$$DD_2 = DD_1 \cos \beta_1 = \Delta$$

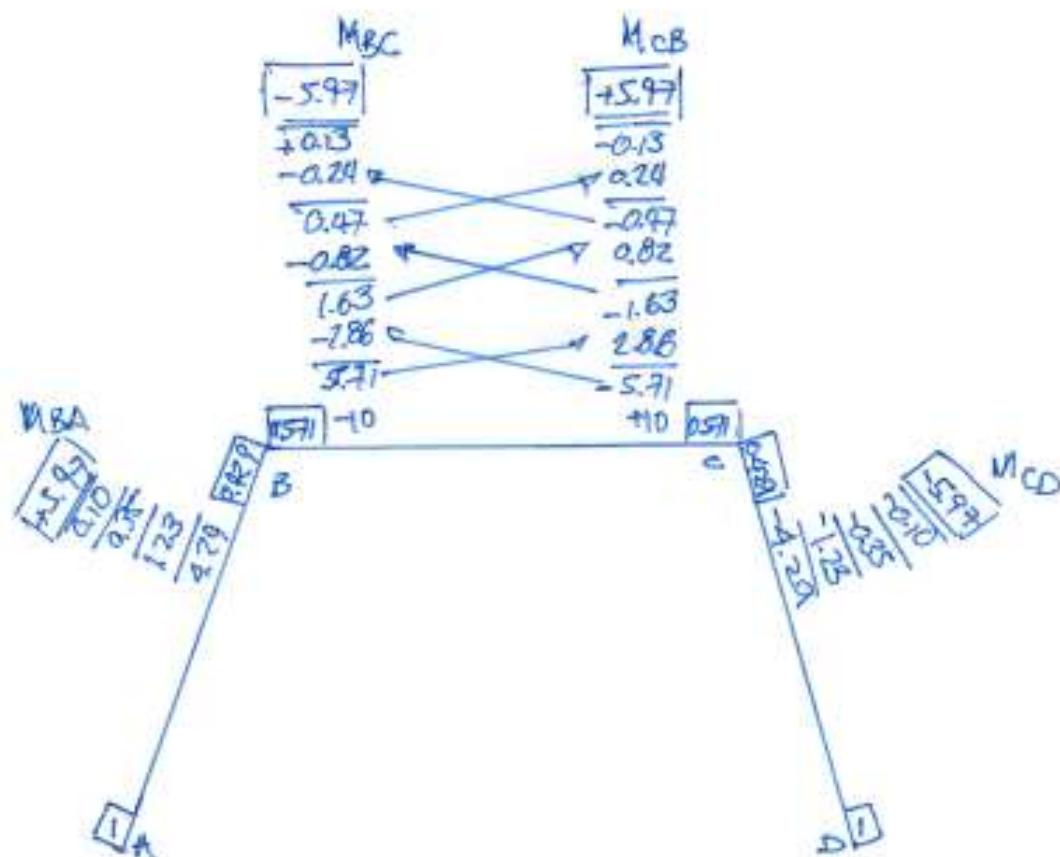
$$DD' = \frac{DD_2}{\cos \beta_2} = \frac{\Delta}{\cos \beta_2}$$

- La tabla de distribución de momento se completa igual que el marco regular estableciendo primero las rigideces, factores de distribución y FEM. El principio de distribución y traslado se conserva igual.
- Los valores de FEM se calculan igual que en el método pendiente-deflexión, tomando en cuenta las deformaciones geométricas relativas en cada elemento con los valores de FEM debido a desplazamiento = $6EI\Delta/L^2$ o $3EI\Delta/L^2$

$$D_1D' = DD_1 \sin \beta_1 + DD' \sin \beta_2 = \frac{\Delta}{\cos \beta_1} \sin \beta_1 + \frac{\Delta}{\cos \beta_2} \sin \beta_2$$

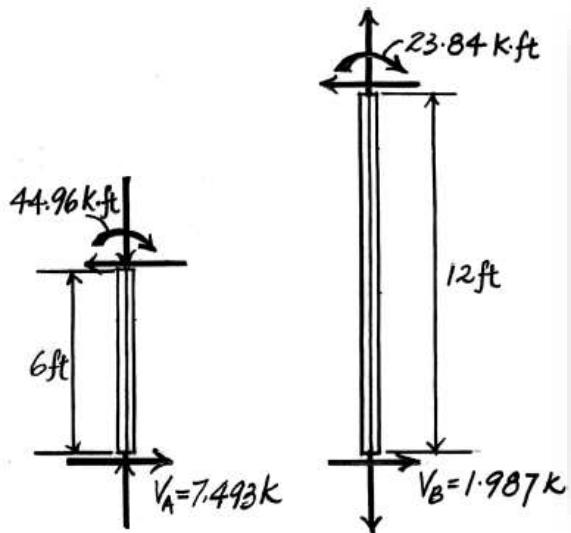
$$D_1D' = \Delta(\tan \beta_1 + \tan \beta_2)$$

Junta	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>		
Elemento	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF	1	0.429	0.571	0.571	0.429	1
FEM Dist.			-10 5.71	10 -5.71		
TR Dist.			-2.86 1.63	2.86 -1.63		
TR Dist.			-0.82 0.47	0.82 -0.47		
TR Dist.			-0.24 0.13	0.24 -0.13		
ΣM	0	5.97	-5.97	5.97	-5.97	0



Joint	A	D		C		B
Member	AD	DA	DC	CD	CB	BC
DF	1	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{5}{13}$	1
FEM Dist.	0	100	0	0	25	0
		-55.56	-44.44	-15.38	-9.62	
CO Dist.			-7.69	-22.22		
			4.27	3.42	13.67	8.55
CO Dist.			6.84	1.71		
			-3.80	-3.04	-1.05	-0.66
CO Dist.			-0.53	-1.52		
			0.29	0.24	0.94	0.58
CO Dist.			0.47	0.12		
			-0.26	-0.21	-0.07	-0.05
CO Dist.			-0.04	-0.11		
			-0.02	-0.02	0.07	0.04
$\sum M$	0	44.96	-44.96	-23.84	23.84	0

$$\therefore \sum F_x = 0; 7.493 + 1.987 - P = 0 \quad P = 9.480 \text{ k}$$

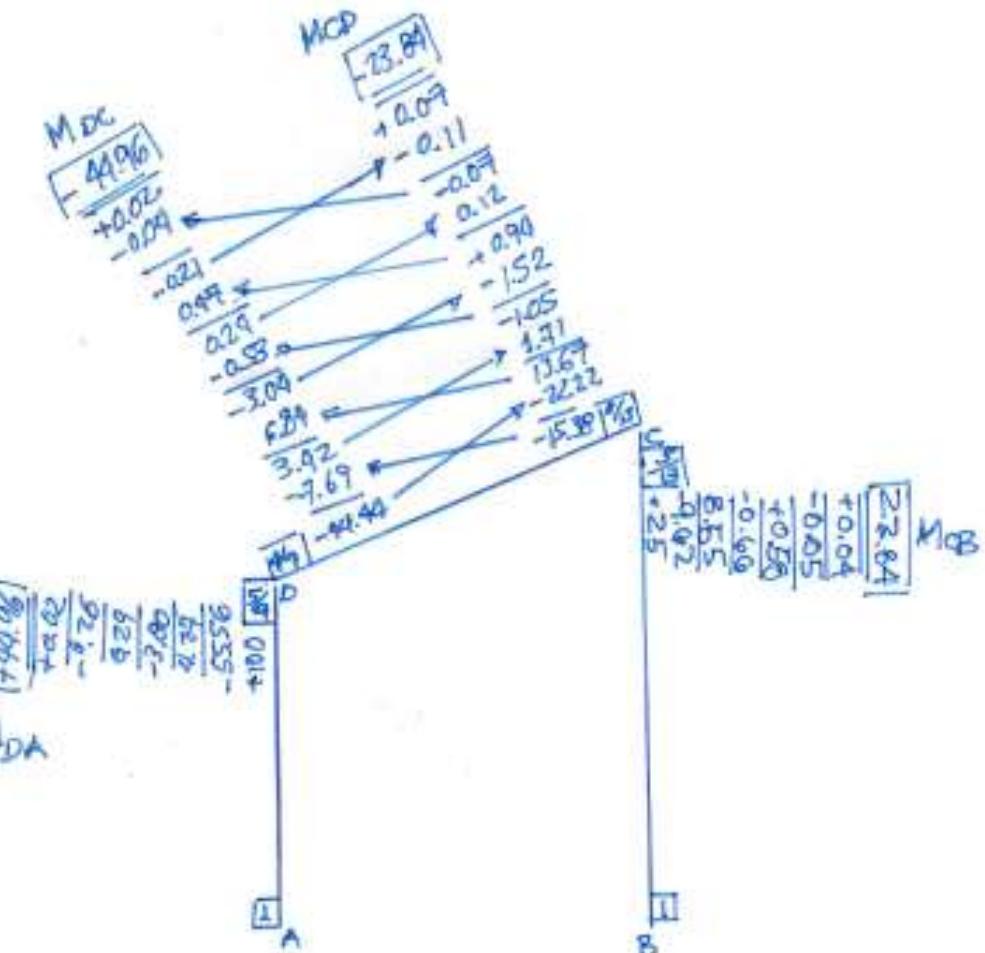


$$M_{DA} = \left(\frac{3}{9.480} \right) (44.96) = 14.2 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

$$M_{DC} = \left(\frac{3}{9.480} \right) (-44.96) = -14.2 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

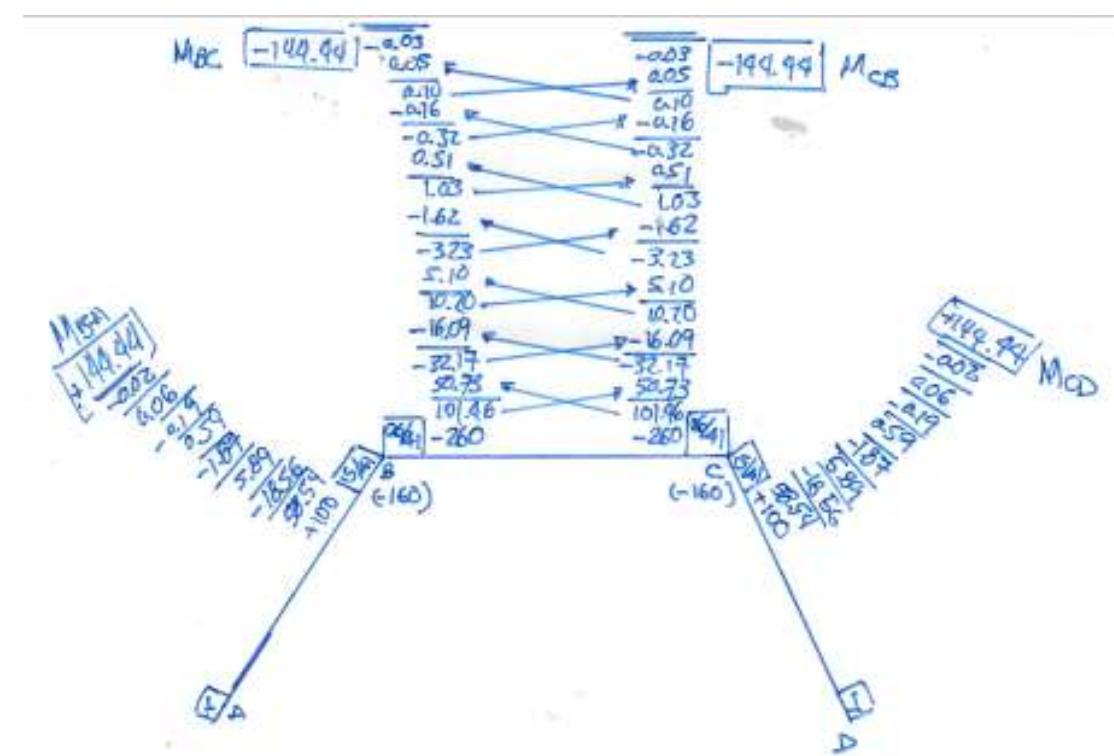
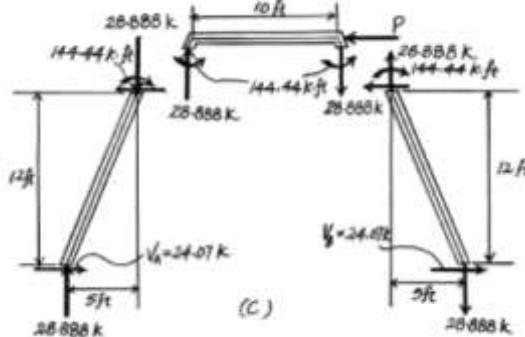
$$M_{CD} = \left(\frac{3}{9.480} \right) (-23.84) = -7.54 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

$$M_{CB} = \left(\frac{3}{9.480} \right) (23.84) = 7.54 \text{ k}\cdot\text{ft}$$



Joint	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
Member	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF	1	15/41	26/41	26/41	15/41	1
FEM	0	100	-260	-260	100	0
Dist.		58.54	101.46	101.46	58.54	
CO		50.73	50.73			
Dist.		18.56	-32.17	-32.17	-18.56	
CO		-16.09	-16.09			
Dist.		5.89	10.20	10.20	5.89	
CO		5.10	5.10			
Dist.		-1.87	-3.23	-3.23	-1.87	
CO		-1.62	-1.62			
Dist.		0.59	1.03	1.03	0.59	
CO		0.51	0.51			
Dist.		-0.19	-0.32	-0.32	-0.19	
CO		-0.16	-0.16			
Dist.		0.06	0.10	0.10	0.06	
CO		0.05	0.05			
Dist.		-0.02	-0.03	-0.03	-0.02	
$\sum M$	0	144.44	-144.44	-144.44	-144.44	0

$$\pm \sum F_x = 0; \quad 24.07 + 24.07 - P = 0 \quad P = 48.14 \text{ k}$$



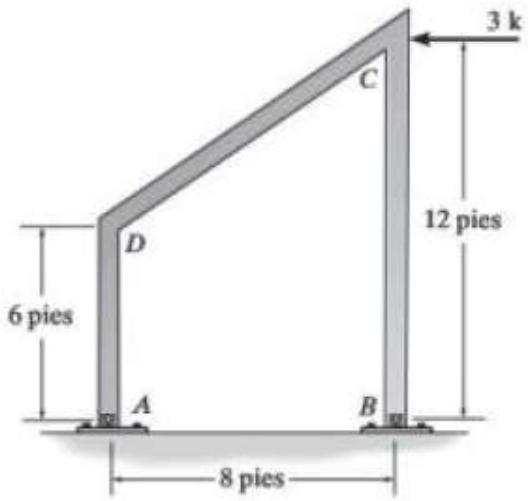
$$M_{BA} = \left(\frac{8}{48.14} \right) (144.44) = 24.0 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

$$M_{BC} = \left(\frac{8}{48.14} \right) (-144.44) = -24.0 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

$$M_{CB} = \left(\frac{8}{48.14} \right) (-144.44) = -24.0 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

$$M_{CD} = \left(\frac{8}{48.14} \right) (144.44) = 24.0 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

12-26. Determine los momentos en las juntas *C* y *D*, y después dibuje el diagrama de momentos para cada elemento del marco. Suponga que los soportes en *A* y *B* están articulados. EI es constante.



$$K_{AD} = \frac{3EI}{L_{AD}} = \frac{3EI}{6} = \frac{EI}{2} \quad K_{BC} = \frac{3EI}{L_{BC}} = \frac{3EI}{12} = \frac{EI}{4}$$

$$K_{CD} = \frac{4EI}{L_{CD}} = \frac{4EI}{10} = \frac{2EI}{5}$$

$$(DF)_{AD} = (DF)_{BC} = 1 \quad (DF)_{DA} = \frac{EI/2}{EI/2 + 2EI/5} = \frac{5}{9}$$

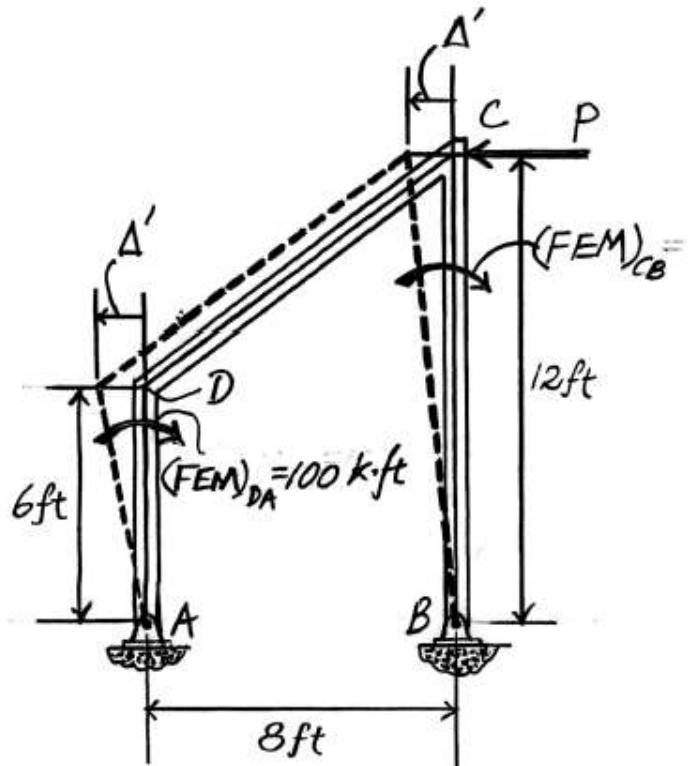
$$(DF)_{DC} = \frac{2EI/5}{EI/2 + 2EI/5} = \frac{4}{9}$$

$$(DF)_{CD} = \frac{2EI/5}{2EI/5 + EI/4} = \frac{8}{13} \quad (DF)_{CB} = \frac{EI/4}{2EI/5 + EI/4} = \frac{5}{13}$$

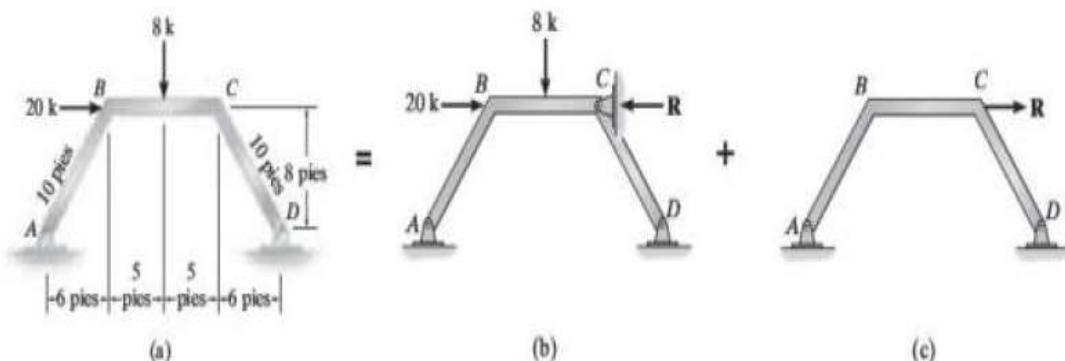
$$(FEM)_{DA} = 100 \text{ k}\cdot\text{ft}; \quad \frac{3EI\Delta'}{L_{DA}^2} = 100 \quad \Delta' = \frac{1200}{EI}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{3EI\Delta'}{L_{CB}^2} = \frac{3EI(1200/EI)}{12^2} = 25 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

Joint	<i>A</i>	<i>D</i>		<i>C</i>		<i>B</i>
Member	<i>AD</i>	<i>DA</i>	<i>DC</i>	<i>CD</i>	<i>CB</i>	<i>BC</i>
DF	1	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{5}{13}$	1
FEM	0	100	0	0	25	0
Dist.		-55.56	-44.44	* -15.38	-9.62	
CO			-7.69	* -22.22		
Dist.		4.27	3.42	* 13.67	8.55	
CO			6.84	* 1.71		
Dist.		-3.80	-3.04	* -1.05	-0.66	
CO			-0.53	* -1.52		
Dist.		0.29	0.24	* 0.94	0.58	
CO			0.47	* 0.12		
Dist.		-0.26	-0.21	* -0.07	-0.05	
CO			-0.04	* -0.11		
Dist.		-0.02	-0.02	0.07	0.04	
$\sum M$	0	44.96	-44.96	-23.84	23.84	0



Determine los momentos en cada junta del marco que se muestra en la figura 12-20a. EI es constante.



SOLUCIÓN

Primero se evita el desplazamiento lateral mediante la fuerza de restricción R , figura 12-20b. Los FEM para el elemento BC son

$$(FEM)_{BC} = -\frac{8(10)}{8} = -10 \text{ k}\cdot\text{pie} \quad (FEM)_{CB} = \frac{8(10)}{8} = 10 \text{ k}\cdot\text{pie}$$

Como los claros AB y DC están articulados en sus extremos, el factor de rigidez se calcula empleando $3EI/L$. La distribución de momentos se muestra en la figura 12-20d.

Rigidez de elementos y factores de distribución

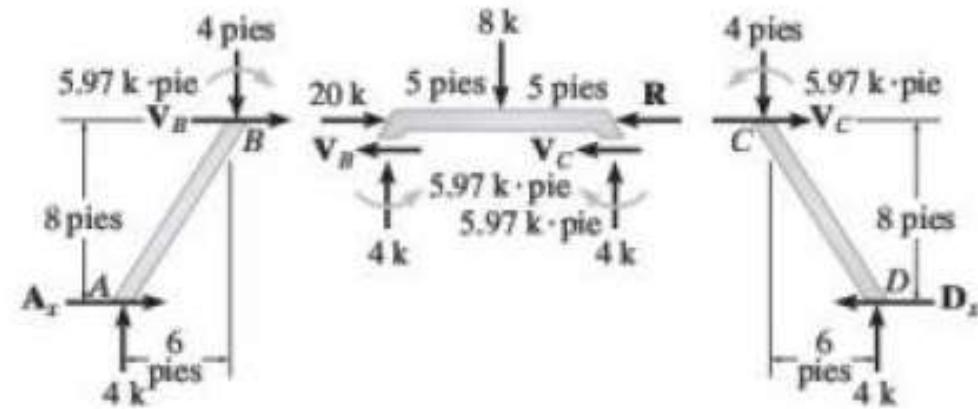
$$K_{AB} = K_{CD} = 3EI/10$$

$$K_{BC} = 4EI/10$$

$$FD_{BA} = \frac{\frac{3EI}{10}}{\frac{3EI}{10} + \frac{4EI}{10}} = 0.429$$

$$FD_{BC} = \frac{\frac{4EI}{10}}{\frac{3EI}{10} + \frac{4EI}{10}} = 0.571$$

Junta	<i>A</i>		<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
	Elemento	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF		1	0.429	0.571	0.571	0.429	1
FEM Dist.			4.29	-10 5.71	10 -5.71	-4.29	
TR Dist.			1.23	-2.86 1.63	2.86 -1.63	-1.23	
TR Dist.			0.35	-0.82 0.47	0.82 -0.47	-0.35	
TR Dist.			0.10	-0.24 0.13	0.24 -0.13	-0.10	
ΣM		0	5.97	-5.97	5.97	-5.97	0



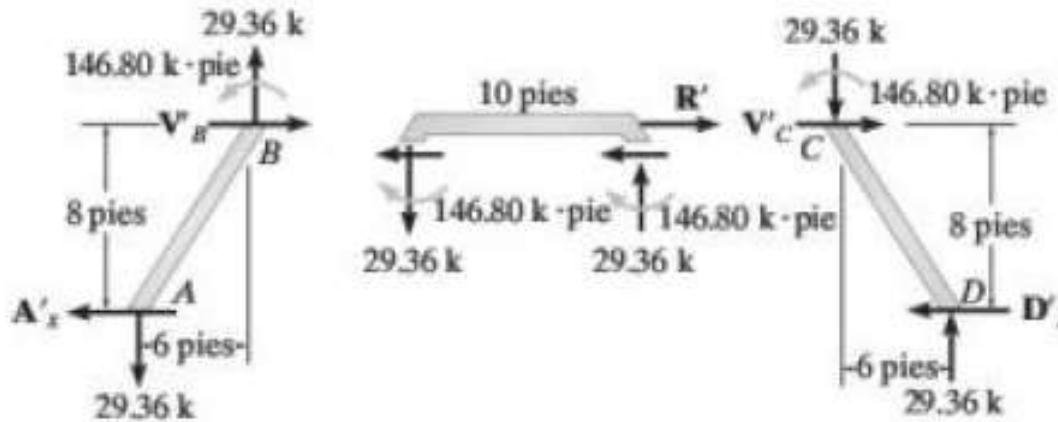
Las reacciones horizontales en A y D deben determinarse a partir de estos resultados, lo cual se hace mediante un análisis del equilibrio para cada elemento, figura 12-20e. Al sumar los momentos respecto de los puntos B y C en cada pierna, se tiene

$$\downarrow + \sum M_B = 0; \quad -5.97 + A_x(8) - 4(6) = 0 \quad A_x = 3.75 \text{ k}$$

$$\downarrow + \sum M_C = 0; \quad 5.97 - D_x(8) + 4(6) = 0 \quad D_x = 3.75 \text{ k}$$

Por lo tanto, para todo el marco,

$$\sum F_x = 0; \quad R = 3.75 - 3.75 + 20 = 20 \text{ k}$$



$$\downarrow + \sum M_B = 0; -A'_x(8) + 29.36(6) + 146.80 = 0 \quad A'_x = 40.37 \text{ k}$$

$$\downarrow + \sum M_C = 0; -D'_x(8) + 29.36(6) + 146.80 = 0 \quad D'_x = 40.37 \text{ k}$$

Entonces, para todo el marco,

$$\Sigma F_x = 0; \quad R' = 40.37 + 40.37 = 80.74 \text{ k}$$

Por lo tanto, los momentos resultantes en el marco son

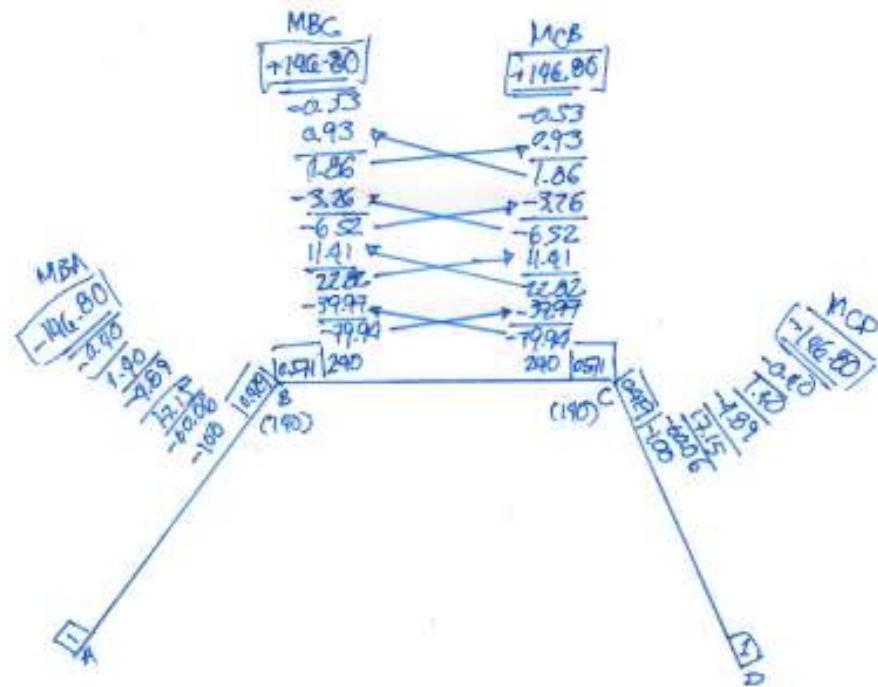
$$M_{BA} = 5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(-146.80) = -30.4 \text{ k·pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{BC} = -5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(146.80) = 30.4 \text{ k·pie} \quad \text{Resp.}$$

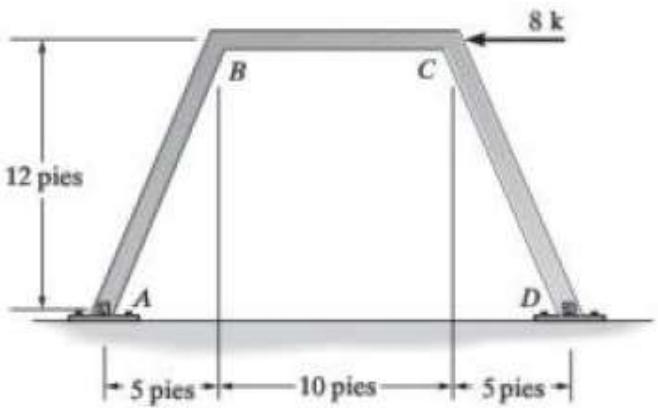
$$M_{CB} = 5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(146.80) = 42.3 \text{ k·pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CD} = -5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(-146.80) = -42.3 \text{ k·pie} \quad \text{Resp.}$$

Junta	A		B		C		D
	AB	BA	BC	CB	CD	DC	
DF	1	0.429	0.571	0.571	0.429	1	
FEM		-100	240	240	-100		
Dist.		-60.06	-79.94	-79.94	-60.06		
TR		-39.97	-39.97				
Dist.		17.15	22.82	22.82	17.15		
TR		11.41	11.41				
Dist.		-4.89	-6.52	-6.52	-4.89		
TR		-3.26	-3.26				
Dist.		1.40	1.86	1.86	1.40		
TR		0.93	0.93				
Dist.		-0.40	-0.53	-0.53	-0.40		
ΣM	0	-146.80	146.80	146.80	-146.80	0	



12-25. Determine los momentos en las juntas *B* y *C*, y después dibuje el diagrama de momentos para cada elemento del marco. Los soportes en *A* y *D* están articulados. EI es constante.

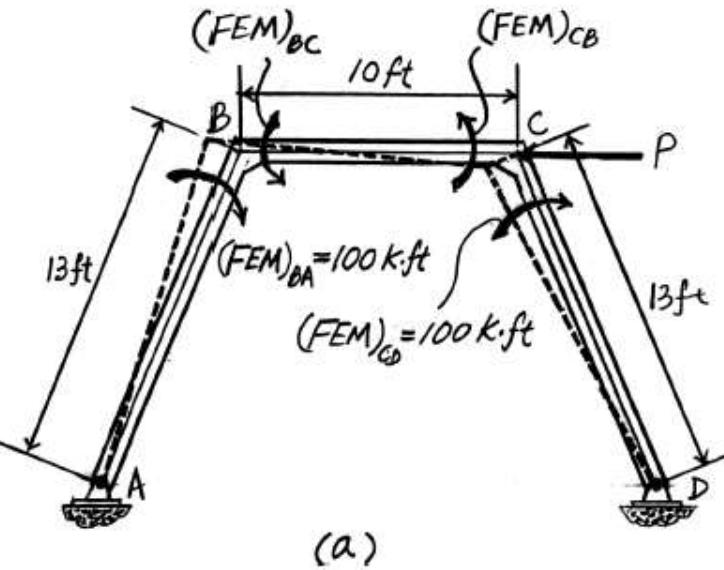


$$K_{AB} = K_{CD} = \frac{3EI}{L} = \frac{3EI}{13} \quad K_{BC} = \frac{4EI}{10} = \frac{2EI}{5}$$

$$(DF)_{AB} = (DF)_{DC} = 1 \quad (DF)_{BA} = (DF)_{CD} = \frac{3EI/13}{3EI/13 + 2EI/5} = \frac{15}{41}$$

$$(DF)_{BC} = (DF)_{CB} = \frac{2EI/5}{3EI/13 + 2EI/5} = \frac{26}{41}$$

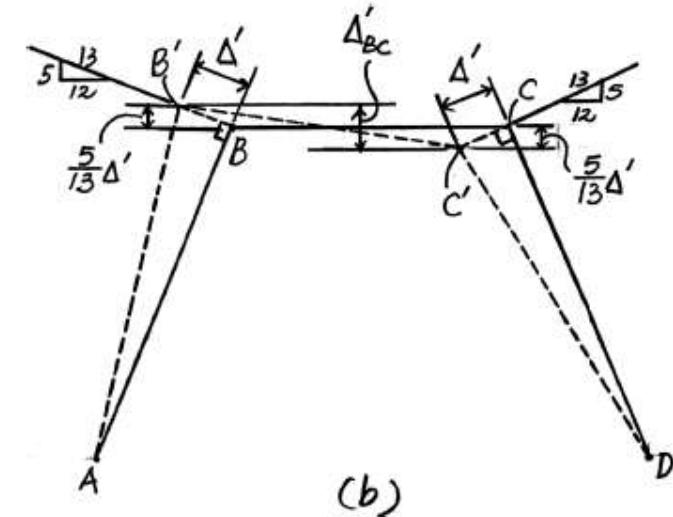
$$(FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = 100 \text{ k}\cdot\text{ft}; \quad \frac{3EI\Delta'}{L^2} = 100 \quad \Delta' = \frac{16900}{3EI}$$



(a)

$$\Delta'_{BC} = \frac{5}{13}\Delta' + \frac{5}{13}\Delta' = \frac{10}{13}\Delta'$$

$$(FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = \frac{6EI\Delta'_{BC}}{L_{BC}^2} = \frac{6EI\left(\frac{10}{13}\right)\left(\frac{16900}{3EI}\right)}{10^2} = -260 \text{ k}\cdot\text{ft}$$

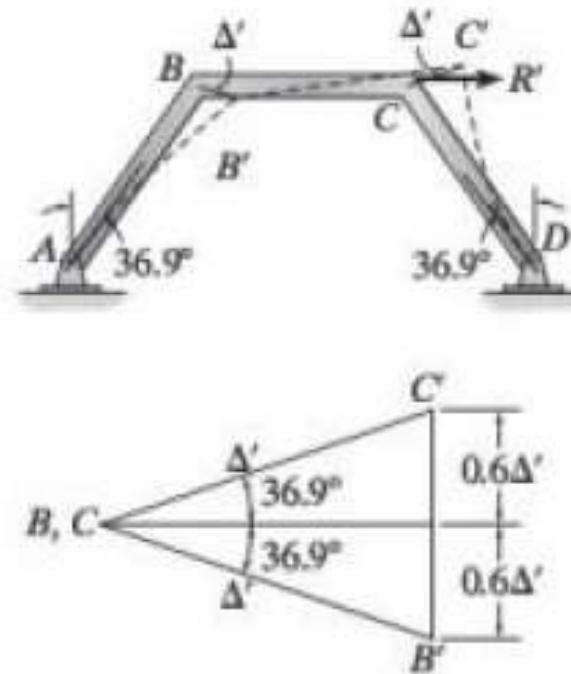


(b)

Joint	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
Member	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF	1	15/41	26/41	26/41	15/41	1
FEM	0	100	-260	-260	100	0
Dist.		58.54	101.46	101.46	58.54	
CO			50.73	50.73		
Dist.			18.56	-32.17	-32.17	-18.56
CO			-16.09	-16.09		
Dist.			5.89	10.20	10.20	5.89
CO			5.10	5.10		
Dist.			-1.87	-3.23	-3.23	-1.87
CO			-1.62	-1.62		
Dist.			0.59	1.03	1.03	0.59
CO			0.51	0.51		
Dist.			-0.19	-0.32	-0.32	-0.19
CO			-0.16	-0.16		
Dist.			0.06	0.10	0.10	0.06
CO			0.05	0.05		
Dist.			-0.02	-0.03	-0.03	-0.02
$\sum M$	0	144.44	-144.44	-144.44	-144.44	0

La fuerza opuesta \mathbf{R} se aplica ahora al marco como se muestra en la figura 12-20c. Con el fin de determinar los momentos internos desarrollados por \mathbf{R} se considerará primero que la fuerza \mathbf{R}' actúa como se muestra en la figura 12-20f. Aquí las líneas discontinuas no representan la distorsión de los elementos del marco, sino que se construyen como líneas rectas extendidas hasta las posiciones finales B' y C' desde los puntos B y C , respectivamente. Debido a la simetría del marco, el desplazamiento $BB' = CC' = \Delta'$. Además, estos desplazamientos hacen que BC gire. La distancia vertical entre B' y C' es $1.2\Delta'$, como se muestra en el diagrama de desplazamiento, figura 12-20g. Dado que cada claro experimenta desplazamientos hasta un punto extremo que ocasionan un giro en éste, se inducen momentos de extremo fijo en los claros. Dichos momentos son:

$$(FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = -3EI\Delta'/(10)^2, (FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = 6EI(1.2\Delta')/(10)^2.$$



Observe que para BA y CD los momentos son *negativos* puesto que una rotación en sentido horario del claro ocasiona un FEM con *sentido antihorario*.

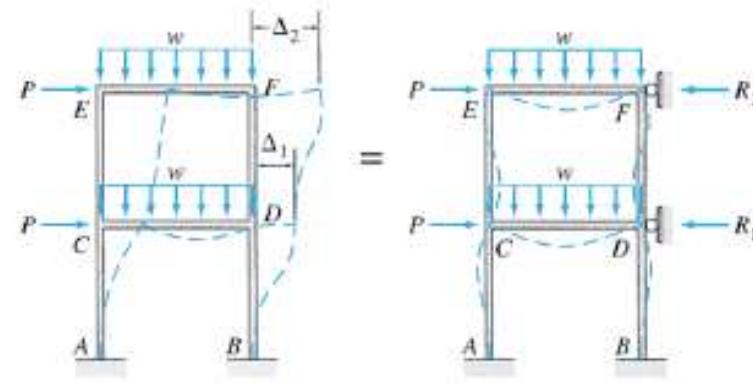
Si se asigna arbitrariamente un valor de $(FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = -100 \text{ k} \cdot \text{pie}$, entonces al igualar Δ' en las fórmulas anteriores se obtiene $(FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = 240 \text{ k} \cdot \text{pie}$. Estos momentos se aplican al marco y se distribuyen, figura 12-20h. Con los resultados anteriores, el análisis de equilibrio es como se muestra en la figura 12-20i. Para cada pierna se tiene

$$\frac{Fem_{AB} 102}{3EI} = \frac{Fem_{BC} 102}{6EIx 1.2} \quad \text{si } Fem_{AB} = -100 \therefore Fem_{BC} = 240$$

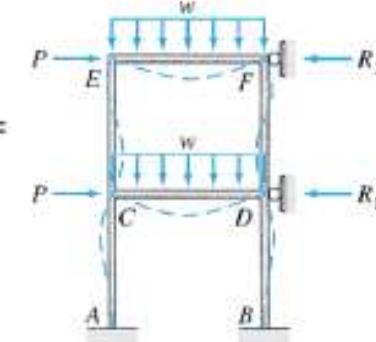
Junta	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
Elemento						
DF	1	0.429	0.571	0.571	0.429	1
FEM		-100	240	240	-100	
Dist.		-60.06	-79.94	-79.94	-60.06	
TR		-39.97	-39.97			
Dist.		17.15	22.82	22.82	17.15	
TR		11.41	11.41			
Dist.		-4.89	-6.52	-6.52	-4.89	
TR		-3.26	-3.26			
Dist.		1.40	1.86	1.86	1.40	
TR		0.93	0.93			
Dist.		-0.40	-0.53	-0.53	-0.40	
ΣM	0	-146.80	146.80	146.80	-146.80	0

Distribución de Momentos

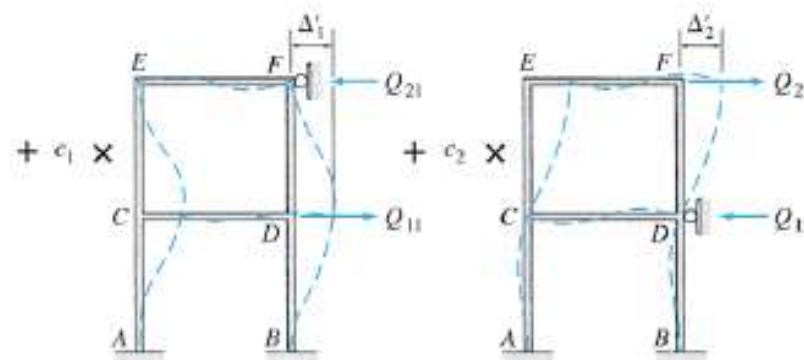
Marcos con Niveles Múltiples



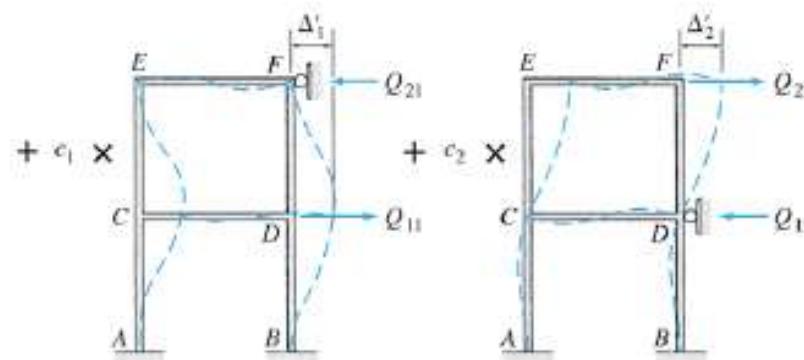
(a) Marco real momentos M



(b) Marco con desplazamiento lateral restringido – momento M_D

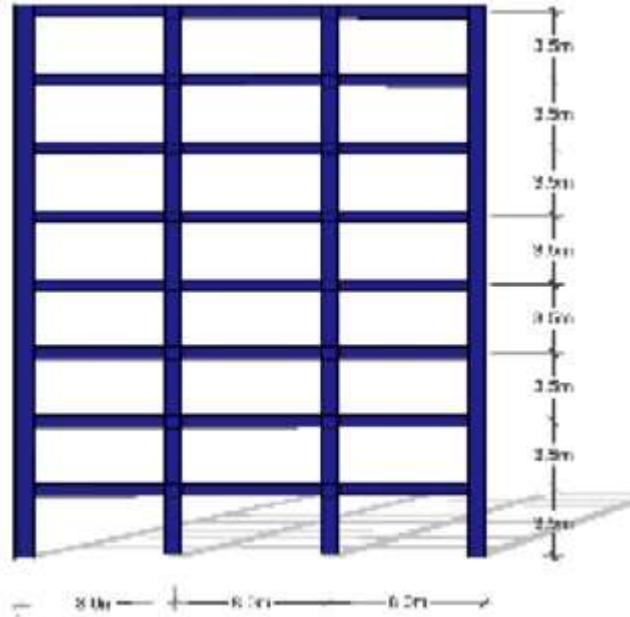


(c) Marco sujeto a traslación conocida Δ'_1 – momento M_{Q_1}



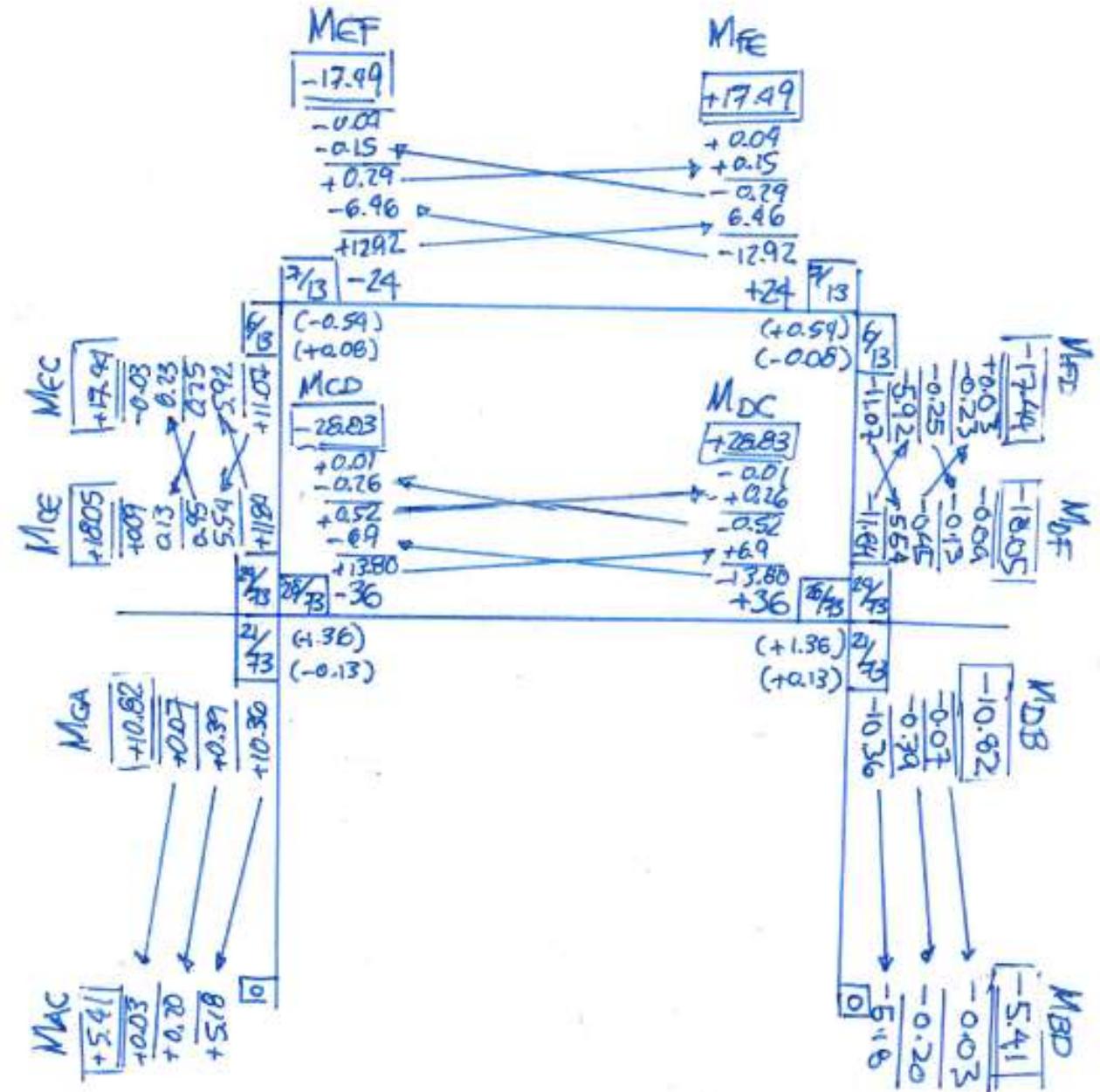
(d) Marco sujeto a traslación conocida Δ'_2 – momento M_{Q_2}

Distribución de Momento en Marcos de Múltiples Pisos sin Desplazamiento

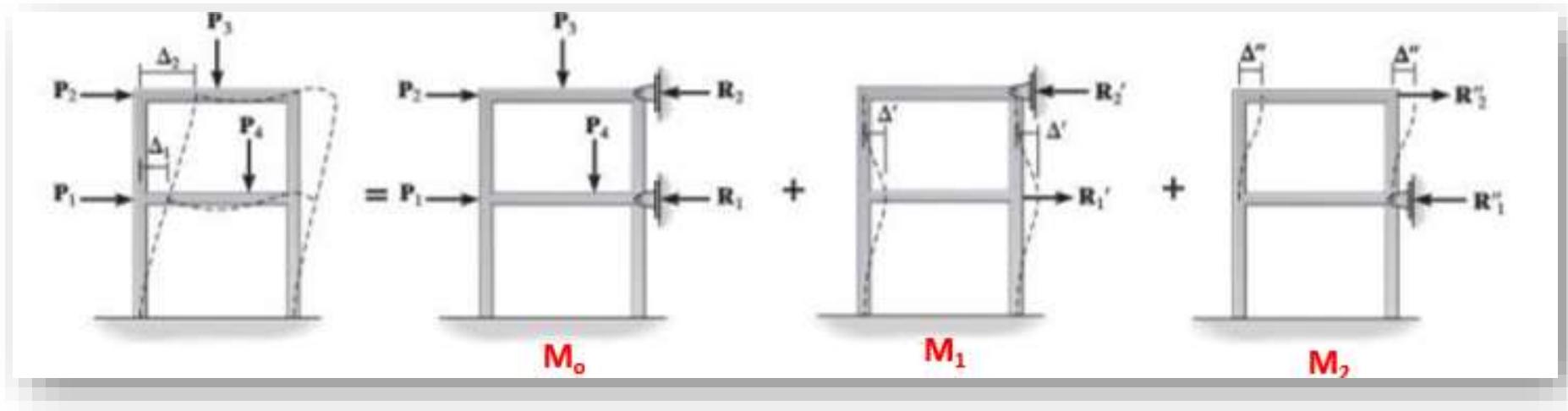


- El procedimiento es igual que los marcos de un nivel
- Se calculan los FEM correspondientes, las rigideces de los elementos y factores de distribución
- Se realizan los ciclos de distribución y traslado, tomando en cuenta el balanceo de los nodos de ser necesario
- La suma de los momentos en cada junta de los nodos en las columnas y vigas darían los momentos finales

Diagrama de Distribución y Traslado



Distribución de Momento en Marcos de Múltiples Pisos con Desplazamiento



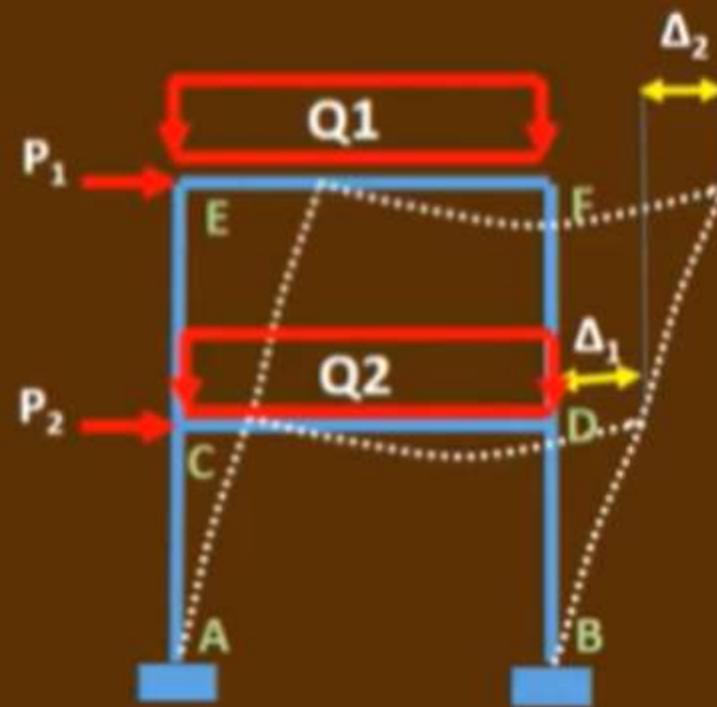
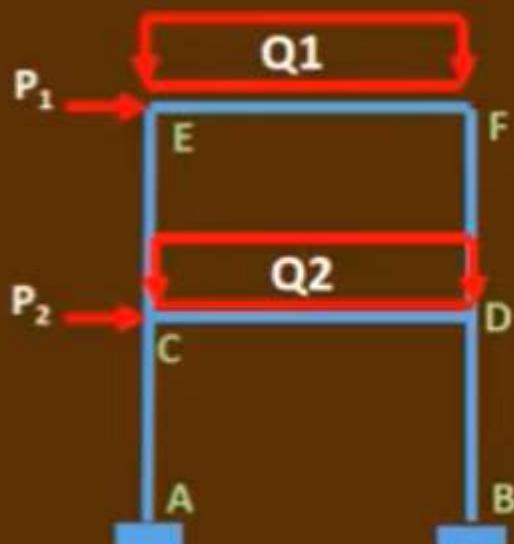
- Se realiza el análisis por superposición
- Primero, se analiza un marco con restricción total de desplazamiento, las restricciones R_1 y R_2 se determinan por medio de ecuaciones de equilibrio después de la distribución de momento y obtenidos los momentos finales
- Se retira para un segundo marco las restricción en primer nivel y se obtiene un desplazamiento Δ . Se calculan los FEM correspondientes a ese desplazamiento tomando como referencia un momento asumido para una columna

- Se calcula los *momentos* finales del segundo marco con los FEM De desplazamiento
- Se determinan R_1' y R_2' por equilibrio estático
- Se analiza un tercer marco liberando la restricción del segundo nivel, se calcula los FEM debido a su desplazamiento y se determinan los momentos finales
- Se determinan R_1'' y R_2'' por equilibrio estático
- Se determinan coeficientes de ajustes C' y C'' ecuaciones simultáneas

$$R_2 = -C'R_2' + C''R_2''$$
$$R_1 = +C'R_1' - C''R_1''$$

$$M_{\text{final}} = M_o + C'M_1 + C''M_2$$

1.- PROBLEMA A RESOLVER



2.- FASES DEL METODO - PARENTESIS

Parte 3: En caso de tener "n" niveles tendremos n constantes, que debemos calcular mediante sistemas de ecuaciones, que después de tres niveles serán matrices.

Constantes de ajuste de Q en
relación a R

$$R_1 = c_1 Q_{11} + c_2 Q_{12} + \dots + c_n Q_{1n}$$

$$R_2 = c_1 Q_{21} + c_2 Q_{22} + \dots + c_n Q_{2n}$$

.

$$R_n = c_1 Q_{n1} + c_2 Q_{n2} + \dots + c_n Q_{nn}$$

Constantes de ajuste de Q en
relación a R

$$M_{\text{finales}} = M + c_1 M_{1Q} + \dots + c_n M_{nQ}$$

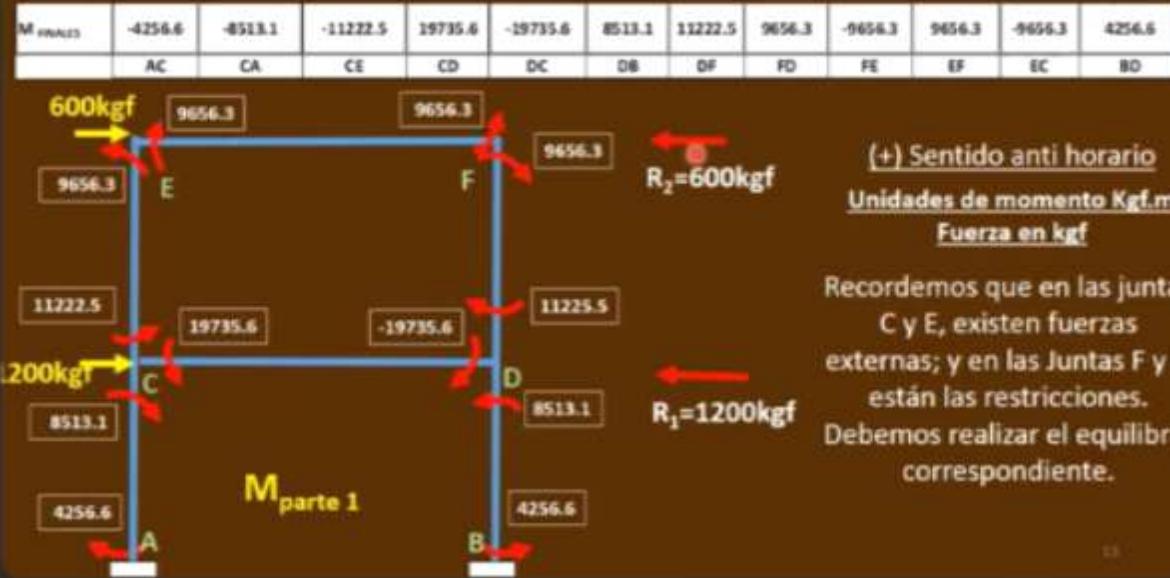
Momentos c/r

Momentos 1 vinculo

Momentos n vinculo

3.- EJEMPLO # 2

PARTE 1 DESPIECE



$$V_A = \frac{8513.1 + 11222.5}{3} = 4256.6$$

$$M_A = \frac{8513.1 + 11222.5}{3} \cdot 0.6666666666666666 = 19735.6$$

$$\sum F_y = 0$$

$$600 + 6959.6 - 6956.6 - R_2 = 0$$

$$R_2 = 600 \text{ kgf}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$600 \cdot 0.6666666666666666 + 6959.6 \cdot 0.3333333333333333 - 6956.6 \cdot 0.6666666666666666 - R_2 \cdot 0.6666666666666666 = 0$$

$$R_2 = 1200 \text{ kgf}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$1200 - R_1 = 0$$

$$R_1 = 1200 \text{ kgf}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$1200 \cdot 0.6666666666666666 - 4256.6 \cdot 1.3333333333333333 - 9656.3 \cdot 1.6666666666666666 = 0$$

$$R_1 = 1200 \text{ kgf}$$

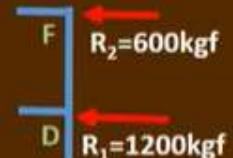
$$\sum F_y = 0$$

$$V_B = \frac{8513.1 + 11222.5}{3} = 4256.6$$

$$V_B = \frac{8513.1 + 11222.5}{3} = 4256.6$$

3.- EJEMPLO # 1

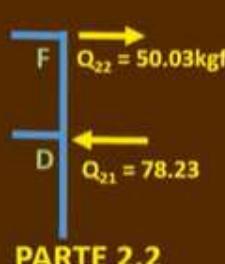
PARTE 3 – Superposición de efectos



PARTE 1



PARTE 2.1



PARTE 2.2

$$M_{\text{finales}} = M + 13.98M_{1Q} + 33.86M_{2Q}$$

PARTE 3

Constantes de ajuste de Q en relación a R

$$R_1 = c_1 Q_{11} + c_2 Q_{12}$$

$$R_2 = c_1 Q_{21} + c_2 Q_{22}$$

$$1200 = 1983.12c_1 - 783.59c_2$$

$$600 = -78.23c_1 + 50.03c_2$$

$$\underline{c_1 = 13.98}$$

$$\underline{c_2 = 33.86}$$

10

3.- EJEMPLO # 1

$$M_{\text{finales}} = M + 13.98M_{1Q} + 33.86M_{2Q}$$

PARTE 1	M_{finales}	-4256.6	-8513.1	-11222.5	19735.6	-19735.6	8513.1	11222.5	9656.3	-9656.3	9656.3	-9656.3	4256.6
----------------	----------------------------	---------	---------	----------	---------	----------	--------	---------	--------	---------	--------	---------	--------

PARTE 2.1	M_{finales} (kgf.m)	933.1	866.2	-791.3	-74.8	-74.8	866.2	-791.3	-384.1	384.1	384.1	-384.1	933.1
------------------	---------------------------------------	-------	-------	--------	-------	-------	-------	--------	--------	-------	-------	--------	-------

PARTE 2.2	M_{finales} (kgf.m)	-14.1	-28.2	44.1	-15.9	-15.9	-28.2	44.1	30.9	-30.9	-30.9	30.9	-14.1
------------------	---------------------------------------	-------	-------	------	-------	-------	-------	------	------	-------	-------	------	-------

PARTE 3	M_{finales} (kgf.m)	8310.6	2641.2	-20791.0	18149.9	-21321.3	19667.4	1654.0	5334.1	-5334.1	13978.5	-13978.5	16823.7
----------------	---------------------------------------	--------	--------	----------	---------	----------	---------	--------	--------	---------	---------	----------	---------

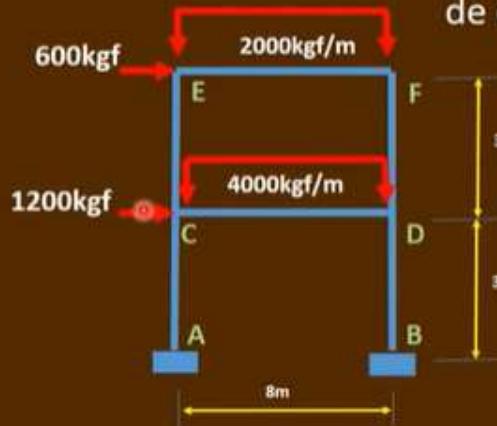
	AC	CA	CE	CD	DC	DB	DF	FD	FE	EF	EC	BD
--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

PARTE 3

3.- EJEMPLO #1.

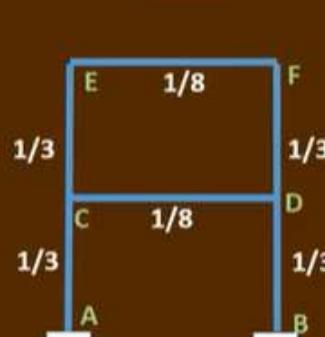
Para el marco mostrado en la figura determine los momentos en los extremos de cada barra por el método de Cross

Datos:
EI: Constante



3.- EJEMPLO # 2:

PARTE 1 - Pórtico sin desplazamiento lateral



$$K = \frac{4 EI}{L}$$



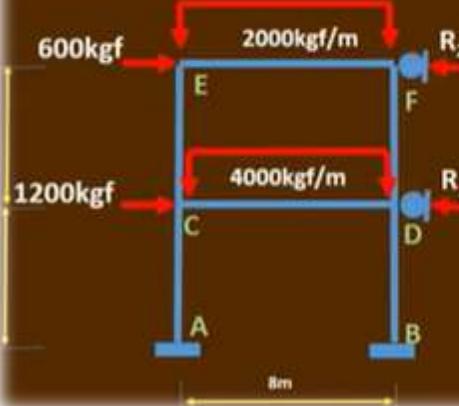
$$fd_{\text{miembro}} = \frac{K_{\text{miembro}}}{\sum K_{\text{junta}}}$$

PARTE 1

3.- EJEMPLO #1.

Parte 1:

<<RESOLVEMOS EL PROBLEMA COMO UN MARCO NO DESPLAZABLE>>



PARTE 1

3.- EJEMPLO # 2

Paso 3. Calculo de los Momentos de empotramiento

(+) Sentido anti horario
Unidades de momento Kgf.m

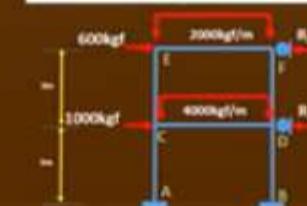
Fuerza en kgf

$$M_A = \frac{qL^2}{12}$$

$$M_B = \frac{qL^2}{12}$$



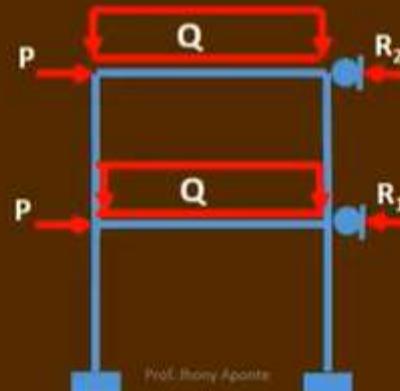
MEP



2.- FASES DEL METODO

Parte 1: Se restringe el desplazamiento lateral colocando una o mas vinculaciones, en esta parte se aplicaran las cargas externas existentes en la estructura y determinaremos la fuerza correspondiente a las restricciones colocadas (R).

<<RESOLVEMOS EL PROBLEMA COMO UN MARCO NO DESPLAZABLE>>

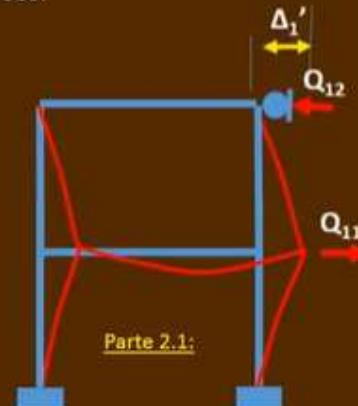


Prof. Jhony Aponte

3

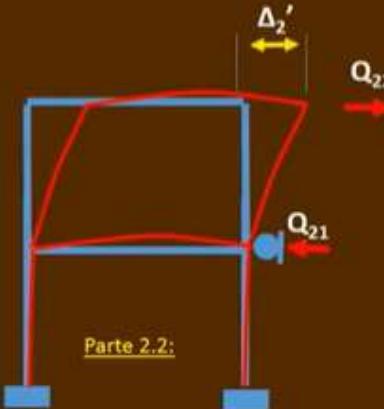
2.- FASES DEL METODO

Parte 2: Consideraremos una fuerza reactiva correspondiente a tantos vínculos colocados y aplicamos un desplazamiento arbitrario; con lo cual determinaremos, los momentos de empotramientos correspondientes y haremos la distribución de Cross.



Parte 2.1:

Prof. Jhony Aponte



Parte 2.2:

4

2.- FASES DEL METODO

Parte 3: Una vez conocidos los momentos y reacciones se realiza una superposición sumando los efectos. Teniendo en cuenta que debemos determinar constantes de ajuste, relacionando Q con R .

Constantes de ajuste de Q en relación a R

$$R_1 = c_1 Q_{11} + c_2 Q_{12}$$

$$R_2 = c_1 Q_{21} + c_2 Q_{22}$$

Constantes de ajuste de Q en relación a R

$$M_{\text{finales}} = M + c_1 M_{1Q} + c_2 M_{2Q}$$

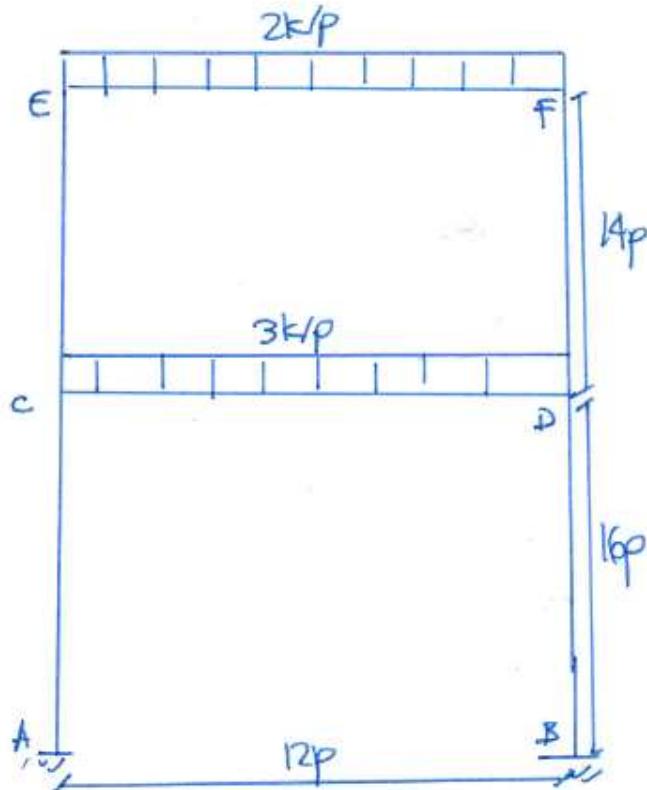
↑
↑
↓ Momentos c/r
↓ Momentos parte 2.1
↓ Momentos parte 2.2

Prof. Jhony Aponte

5

Encontrar los momentos en los extremos del marco de múltiples pisos.
Asumir EI constante

Cálculo de FEM



$$FEM_{EF} = \mp \frac{WL^2}{12} = \mp \frac{2(12)^2}{12} = \mp 24$$

$$FEM_{CD} = \mp \frac{WL^2}{12} = \mp \frac{3(12)^2}{12} = \mp 36$$

Rigidez de los Elementos

$$K_{EF} = K_{CD} = \frac{4EI}{12} = \frac{EI}{3}$$

$$K_{EC} = K_{FD} = \frac{4EI}{14} = \frac{2EI}{7}$$

$$K_{CA} = K_{DB} = \frac{4EI}{16} = \frac{EI}{4}$$

Factores de Distribución

$$F.D_{EF} = \frac{\frac{EI}{3}}{\frac{EI}{3} + \frac{2EI}{7}} = \frac{7}{13} \quad F.D_{EC} = 1 - \frac{7}{13} = \frac{6}{13}$$

$$F.D_{CD} = \frac{\frac{EI}{3}}{\frac{2EI}{7} + \frac{6}{13} + \frac{EI}{3}} = \frac{28}{73}$$

$$F.D_{EC} = \frac{\frac{26I}{7}}{\frac{26I}{7} + \frac{6}{13} + \frac{EI}{3}} = \frac{24}{73}$$

$$F.D_{CD} = 1 - \frac{28}{73} - \frac{24}{73} = \frac{21}{73}$$

3.- EJEMPLO # 2

PARTE 1

Paso 4. Calculamos el desequilibrio de cada junta

Paso 5. Equilibraremos cada junta

Paso 6. Aplicamos el factor de distribución en la junta

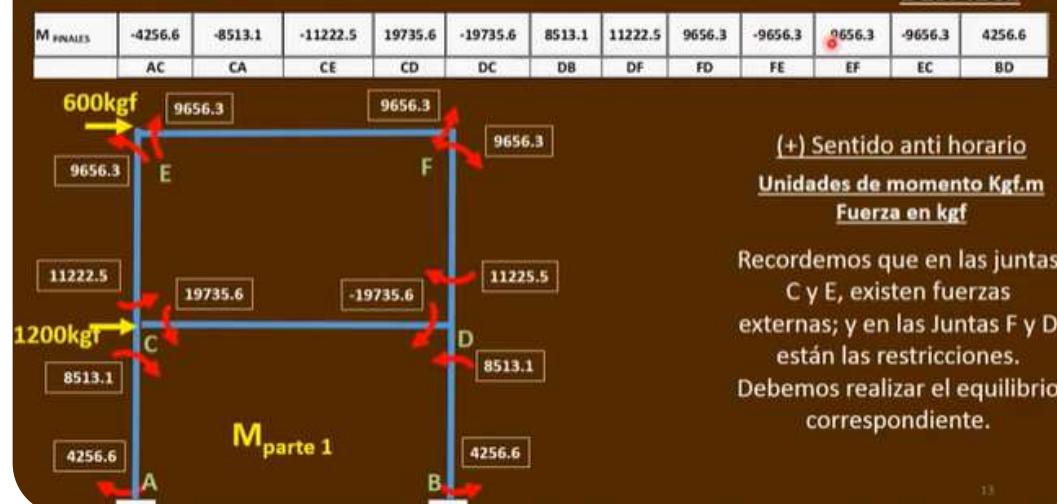
Paso 7. Aplicamos el factor de transporte

Paso 8. Repetimos desde el paso 4 el ciclo iterativo

Organicemos el proceso en una tabla Y PARA QUE SEA
SENCILLO TENGA A MANO UN DIBUJO DE LA ESTRUCTURA

3.- EJEMPLO # 2

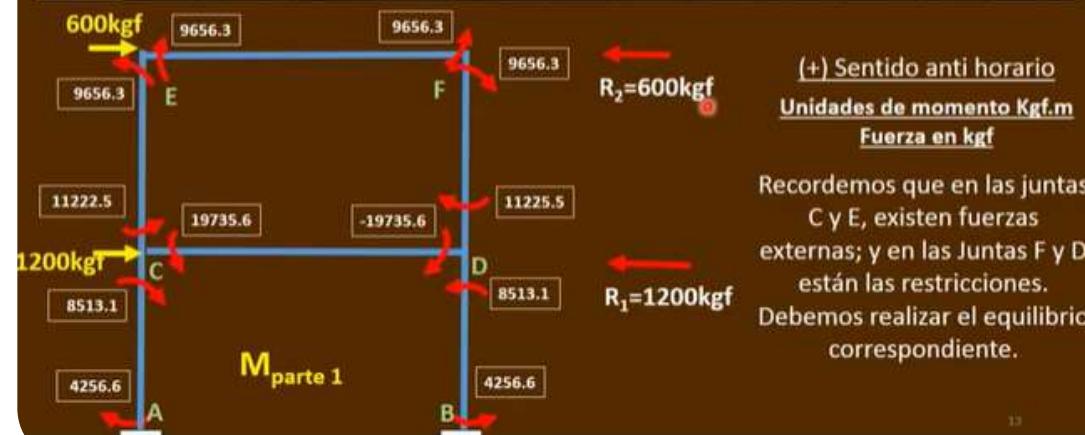
PARTE 1
DESPIECE



3.- EJEMPLO # 2

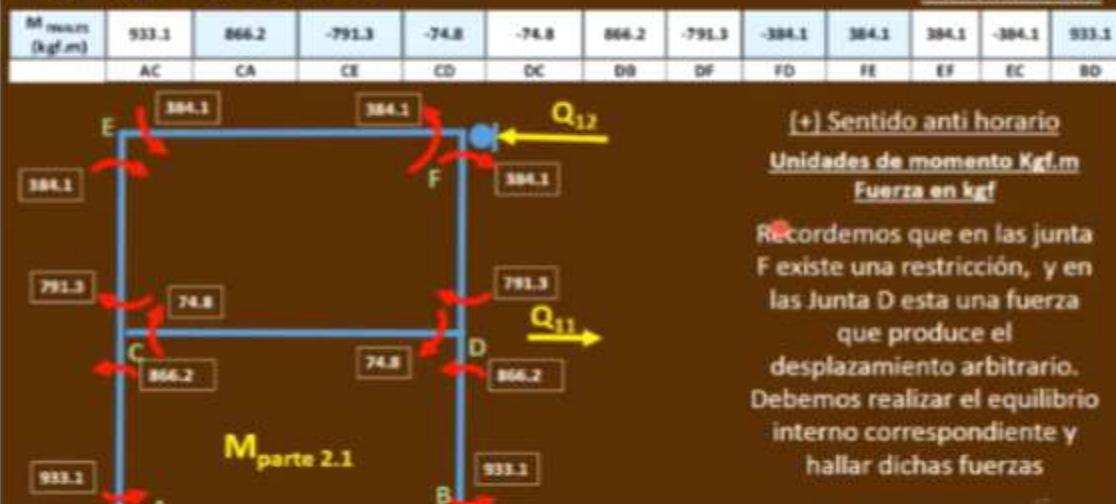
PARTE 1
DESPIECE

M FINALES	-4256.6	-8513.1	-11222.5	19735.6	-19735.6	8513.1	11222.5	9656.3	-9656.3	9656.3	-9656.3	4256.6
	AC	CA	CE	CD	DC	DB	DF	FD	FE	EF	EC	BD
M_{parte 1}												



3.- EJEMPLO # 2

PARTE 2 DESPIECE 2.1



$$V_A = \frac{866.2 + 933.1}{3} = 599.76$$

$$V_A = V_B$$

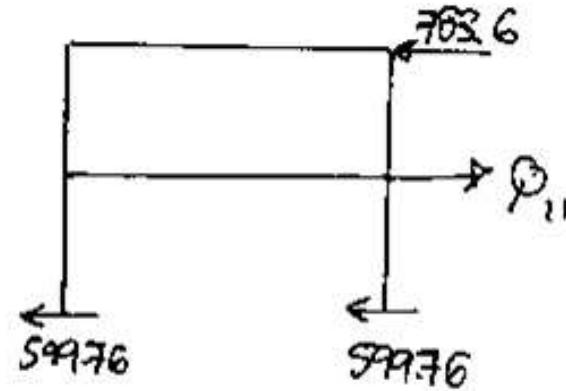
$$V_C = \frac{384.1 + 791.3}{3} = 391.8 \text{ kgf}$$

$$V_C = V_D$$

$$\sum F_x = 0$$

$$391.8 + 391.8 = Q_{12}$$

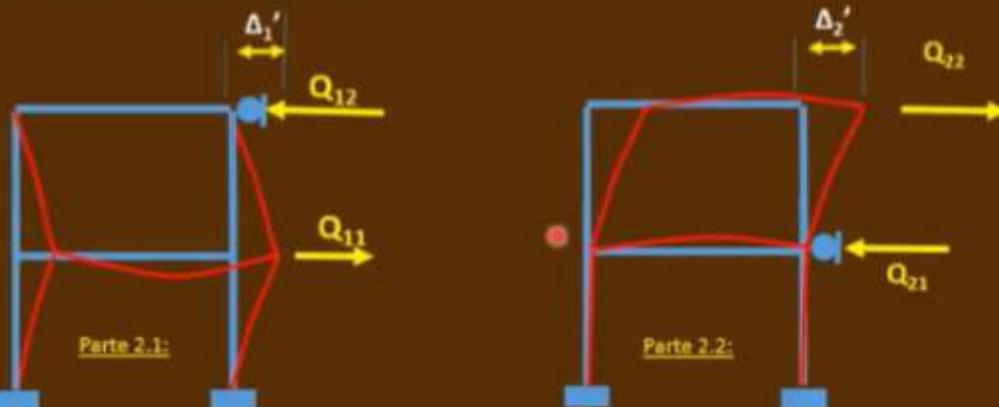
$$Q_{12} = 783.6$$



$$\underline{P_{11} = 1983.12 \text{ kgf} \longrightarrow}$$

3.- EJEMPLO # 2

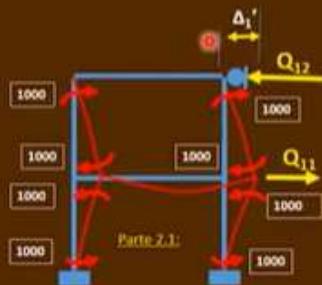
Parte 2: Momento arbitrario con lo que definimos un desplazamiento y de allí haremos la distribución de Cross.



CROSS EN PORTICO CON DESPLAZAMIENTO LATERAL NIVEL 1. ASUMO M=1000Kgf.m

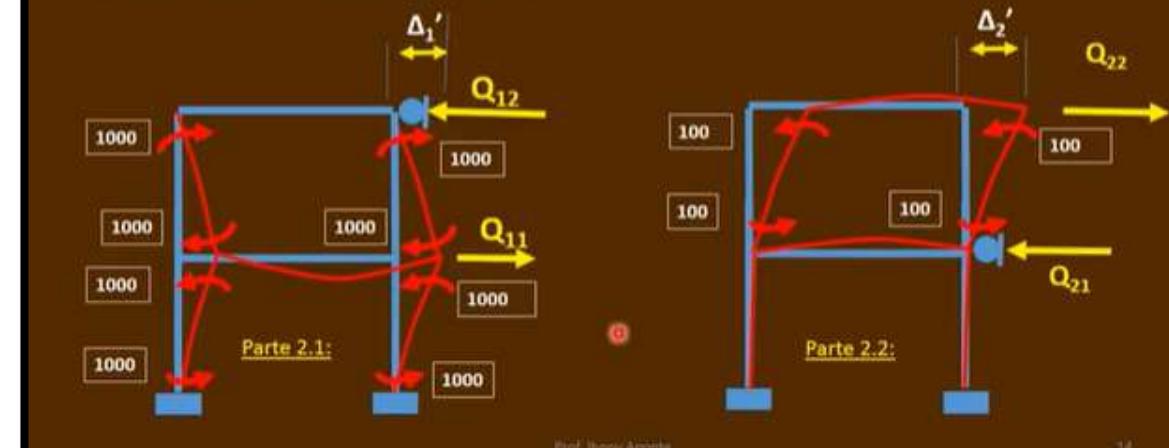
Junta	A	C		D		F		E		B		
Miembro	AC	CA	CE	CD	DC	DB	DF	FD	FE	EF	EC	BD
K _{elemento}	0.333		0.333		0.125		0.333		0.333		0.125	
FD juntas	0	0.42	0.42	0.16	0.16	0.42	0.42	0.727	0.273	0.27	0.73	0

Parte 2.1:



3.- EJEMPLO # 2

Parte 2: Momento arbitrario con lo que definimos un desplazamiento y de allí haremos la distribución de Cross.



3.- EJEMPLO # 2

**PARTE 2
DESPIECE 2.1**

M FINALES (kgf.m)	933.1	866.2	-791.3	-74.8	-74.8	866.2	-791.3	-384.1	384.1	384.1	-384.1	933.1
	AC	CA	CE	CD	DC	DB	DF	FE	EF	EC	BD	



(+) Sentido anti horario

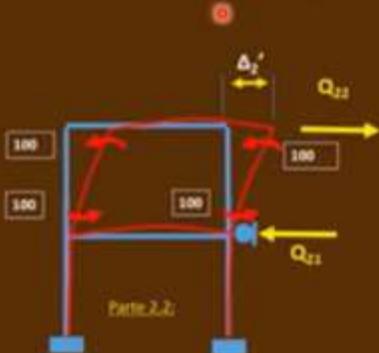
Unidades de momento Kgf.m

Fuerza en kgf

Recordemos que en las junta F existe una restricción, y en las Junta D esta una fuerza que produce el desplazamiento arbitrario. Debemos realizar el equilibrio interno correspondiente y hallar dichas fuerzas

Parte 2.2:

Junta	A	C		D		F		E		B		
Miembro	AC	CA	CE	CD	DC	DB	DF	FE	EF	EC	BD	
$K_{elemento}$	0.333	0.333	0.125	0.333	0.333	0.333	0.333	0.125	0.333	0.333	0.333	
F_D juntas	0	0.42	0.42	0.16	0.16	0.42	0.42	0.727	0.273	0.27	0.73	0



Parte 2.2:

3.- EJEMPLO # 2

PARTE 2

DESPIECE 2.2

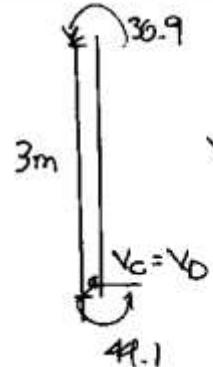
M_{FINAL} (kgf.m)	-14.1	-28.2	44.1	-35.9	-15.9	-28.2	44.1	30.9	-30.9	-30.9	30.9	-14.1
	AC	CA	CE	CD	DC	DB	DF	FD	FE	EF	EC	BD
	30.9	30.9	30.9	30.9	30.9	30.9	30.9	30.9	30.9	30.9	30.9	30.9

(+/-) Sentido anti horario

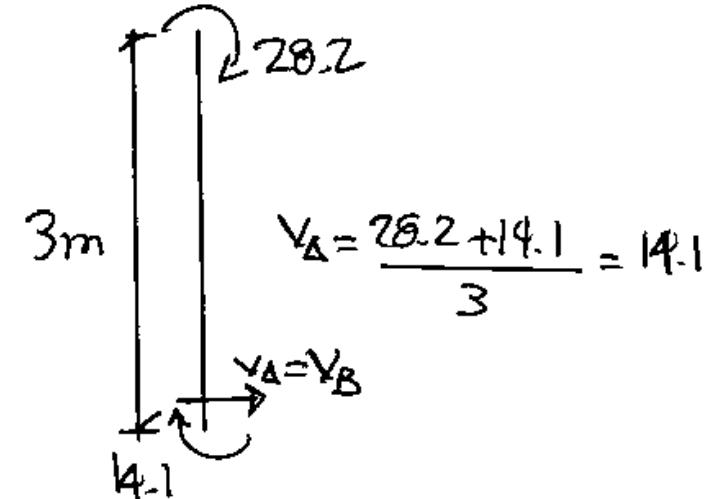
Unidades de momento Kgf.m

Fuerza en kgf

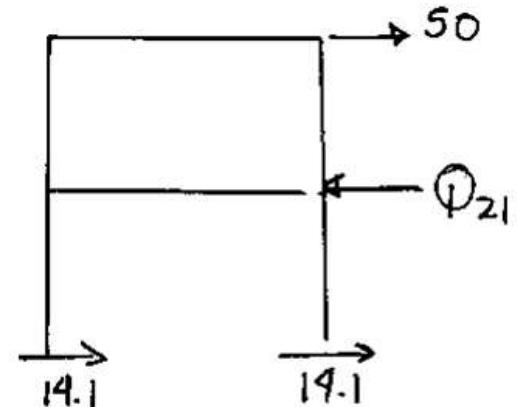
Recordemos que en la junta D existe una restricción, y en las Junta F esta una fuerza que produce el desplazamiento arbitrario Δ_2 . Debemos realizar el equilibrio interno correspondiente y hallar dichas fuerzas.



$$\sum F_x = 0 \\ Q_{22} - 2(25) = 0 \\ Q_{22} = \underline{50 \text{ kgf}} \rightarrow$$



$$\Delta = \frac{28.2 + 14.1}{3} = 14.1$$



$$Q_{21} = \underline{78.2 \text{ kgf}} \leftarrow$$

Introducción al Algebra Matricial para Estructuras

■ Elemento viga 2D

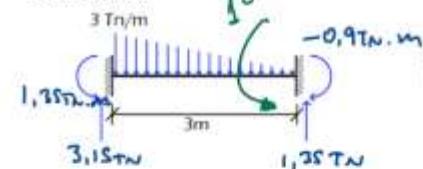
■ Para estructuras pótico 2D

$\square K_{ij}$ es la fuerza en GDL i cuando $u_j=1, u_i=0$

Guillermo Rus Carlborg

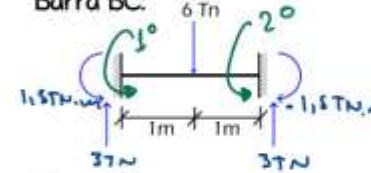
5.1. FUERZA EN BARRAS.

Barra AB:



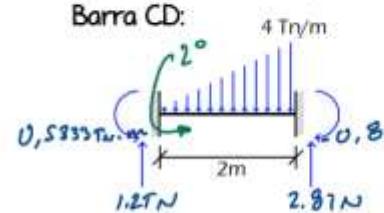
$$f_{AB} = \begin{bmatrix} 3.15 \text{ Tn} \\ 1.35 \text{ Tn.m} \\ 1.35 \text{ Tn} \\ -0.9 \text{ Tn.m} \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Barra BC:



$$f_{BC} = \begin{bmatrix} 3 \text{ Tn} \\ 1.5 \text{ Tn.m} \\ 3 \text{ Tn} \\ -1.5 \text{ Tn.m} \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Barra CD:



$$f_{CD} = \begin{bmatrix} 1.2 \text{ Trn} \\ 0.5333 \text{ Trn.m} \\ 2.8 \text{ Trn} \\ -0.8 \text{ Trn.m} \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ensamblando Matriz de Fuerza en Barras:

$$[F]_{\text{barras}} = \begin{bmatrix} -0.9 + 1.5 \\ -1.5 + 0.5333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \text{ Tn.m} \\ 2 \text{ Tn.m} \end{bmatrix}$$

$$[F]_{\text{barras}} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.9667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \text{ Tn.m} \\ 2 \text{ Tn.m} \end{bmatrix}$$



Introducción al Algebra Matricial para Análisis Estructural

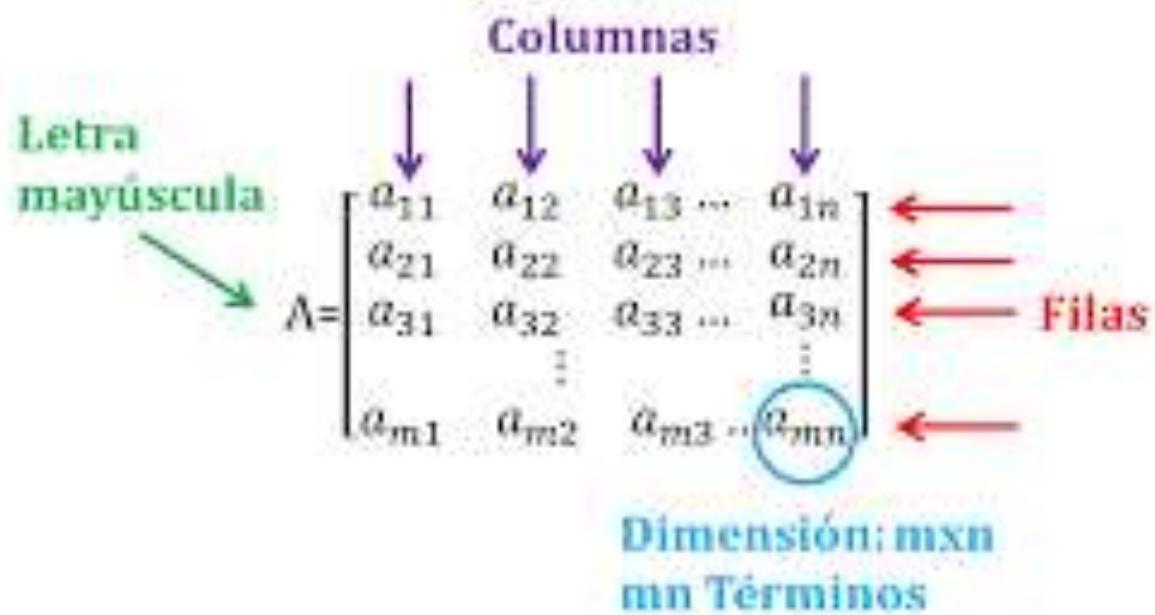
Conceptos Básicos de Algebra de Matrices

Matriz. Una *matriz* es un arreglo rectangular de números que tienen m filas y n columnas. Los números, que se denominan *elementos*, se ensamblan entre corchetes. Por ejemplo, la matriz \mathbf{A} se escribe como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se dice que esta matriz tiene un *orden* de $m \times n$ (m por n). Observe que el primer subíndice de un elemento indica la posición de su fila y el segundo subíndice indica la posición de su columna. Entonces, en general, a_{ij} es el elemento situado en la i -ésima fila y en la j -ésima columna.

Elementos de una matriz



MATRICES

De distintos tipos

Fila

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Columna

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nula

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuadrada

Pueden ser

Rectangular

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Triangular superior

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Triangular superior

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Antisimétrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Identidad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicación por un escalar. Cuando una matriz se multiplica por un escalar, cada elemento de la matriz se multiplica por el escalar. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \quad k = -6$$

entonces

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -24 & -6 \\ -36 & 12 \end{bmatrix}$$

$$k = 5 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad k \cdot A = \begin{pmatrix} 5 \times 3 & 5 \times 2 \\ 5 \times 0 & 5 \times -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$k = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad k \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 4 & 2 \times 6 \\ 2 \times 0 & 2 \times 2 & 2 \times 5 \\ 2 \times 0 & 2 \times 0 & 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 12 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$



Estas son las operaciones:

$2 \times 4 = 8$	$2 \times 0 = 0$
------------------	------------------

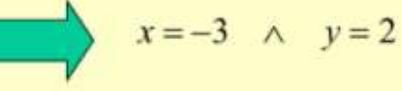
$2 \times 1 = 2$	$2 \times -9 = -18$
------------------	---------------------

Operaciones Matriciales

Igualdad de matrices. Se dice que las matrices **A** y **B** son iguales si son del mismo orden y cada uno de sus elementos correspondientes son iguales, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

entonces $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Ejemplo: $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$  $x = -3 \quad \wedge \quad y = 2$

Dada la siguiente igualdad, determina el valor de las incógnitas.

$$3 \begin{bmatrix} m+2 & n \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m-2 & -n \\ y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$3(m+2) - (m-2) = 10$$

$$3m + 6 - m + 2 = 10$$

$$2m = 10 - 6 - 2$$

$$2m = 2$$

$$m = 1$$

$$3n - (-n) = 8$$

$$3n + n = 8$$

$$4n = 8$$

$$n = 2$$

$$3 - y = 3$$

$$-y = 3 - 3$$

$$-y = 0$$

$$y = 0$$



$$\begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$



Producto de matrices

- No siempre es posible el producto de matrices.
- Para poder multiplicar dos matrices, el nº de columnas de la primera debe ser igual al nº de filas de la segunda
- El producto de matrices no es commutativo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

3×3 2×3

No se pueden multiplicar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

3×2 2×3 3×3

Si se pueden multiplicar

Una vez que sabemos la dimensión de la matriz producto, calculamos cada uno de sus elementos de la siguiente forma:

$c_{ij} \rightarrow$ fila i de la 1^a matriz \times columna j de la 2^a matriz

Ejemplo:

$c_{23} =$ fila 2 de la 1^a matriz \times columna 3 de la 2^a matriz

$$c_{23} = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 12 + 10 = 22$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

C_{23}

$C_{23} = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 22$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & 22 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Calculamos todos los elementos de la matriz producto:

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \quad c_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \quad c_{13} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2$$

$$c_{21} = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \quad c_{22} = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 \quad c_{23} = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2$$

$$c_{31} = 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 \quad c_{32} = 7 \cdot 2 + 8 \cdot 5 \quad c_{33} = 7 \cdot 3 + 8 \cdot 2$$

Finalmente nos queda el resultado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 7 \\ 4 & 33 & 22 \\ 7 & 54 & 37 \end{pmatrix}$$

Matriz transpuesta. Una matriz puede transponerse al intercambiar sus filas y columnas. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = [b_1 \ b_2 \ b_3]$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)^T = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array} \right)$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Propiedades de Matriz Transpuesta

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

$$Z_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow \text{Trasposición} \rightarrow Z^T_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 2 & 100 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{FILA 1} \\ \text{FILA 2} \\ \text{FILA 3} \end{array}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & 100 & 1 \\ 10 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{COL 1} \\ \text{COL 2} \\ \text{COL 3} \end{array}$$

Adición y sustracción de matrices. Dos matrices pueden sumarse entre sí o restar una de la otra si son del mismo orden. El resultado se obtiene al sumar o restar los elementos correspondientes. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \textcolor{blue}{\text{¡Siii!}} = \begin{pmatrix} 0+2 & 1+3 \\ 1+4 & 0+5 \\ -1+6 & -2+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

3x2 = 3x2 Si es posible 3x2 →

3x3 = 3x3 Dimensiones iguales 3x3 →

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \textcolor{red}{\text{¡Nooooo!}}$$

Dimension 3x3 ≠ 3x2 No es posible →

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 1+2 \\ 2+5 & 7+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3+7-1 & -1+2-2 \\ 2+3-3 & -4+1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 & 1-2 \\ 2-5 & 7-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3-7+1 & -1-2+2 \\ 2-3+3 & -4-1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$$

Una vez hemos resuelto el determinante, hallamos la matriz adjunta de A:

$$\text{Adjunto de } 2 = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-13) = \mathbf{-13}$$

$$\text{Adjunto de } 3 = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-5) = \mathbf{5}$$

$$\text{Adjunto de } -2 = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) = \mathbf{-7}$$

$$\text{Adjunto de } 1 = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-7) = \mathbf{7}$$

$$\text{Adjunto de } 4 = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) = \mathbf{-2}$$

$$\text{Adjunto de } 1 = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-4) = \mathbf{4}$$

$$\text{Adjunto de } 2 = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 = \mathbf{11}$$

$$\text{Adjunto de } 1 = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 = \mathbf{-4}$$

$$\text{Adjunto de } -3 = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 = \mathbf{5}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -13 & 5 & -7 \\ 7 & -2 & 4 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Una vez hemos calculado el determinante de la matriz y su adjunta, sustituimos sus valores en la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj}(A))^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -13 & 5 & -7 \\ 7 & -2 & 4 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix}^t$$

Trasponemos la matriz adjunta:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -13 & 7 & 11 \\ 5 & -2 & -4 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -13/3 & 7/3 & 11/3 \\ 5/3 & -2/3 & -4/3 \\ -7/3 & 4/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices. Dos matrices **A** y **B** pueden multiplicarse entre sí sólo si son *conformables*. Esta condición se cumple si el número de *columnas* de **A** es igual al número de *filas* de **B**. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{A-1})$$

entonces es posible determinar \mathbf{AB} , puesto que **A** tiene dos columnas y **B** tiene dos filas. Observe, sin embargo, que \mathbf{BA} no puede obtenerse. ¿Por qué?

Si la matriz **A** que tiene una orden de $(m \times n)$ se multiplica por la matriz **B** que tiene un orden de $(n \times q)$, se obtendrá una matriz **C** que tendrá un orden de $(m \times q)$, es decir,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & = & \mathbf{C} \\ (m \times n) & (n \times q) & & (m \times q) \end{array}$$

Los elementos de la matriz **C** se encuentran usando los elementos a_{ij} en **A** y b_{ij} en **B** de la siguiente manera:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (\text{A-2})$$

La metodología de esta fórmula puede explicarse mediante algunos ejemplos sencillos. Considere que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Por inspección, es posible obtener el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ puesto que las matrices son conformables, es decir, **A** tiene tres columnas y **B** tiene tres filas. A partir de la ecuación A-2, la multiplicación generará una matriz **C** que tendrá dos filas y una columna. Los resultados se obtienen de la siguiente manera:

c_{11} : Multiplique los elementos de la primera fila de **A** por los elementos correspondientes en la columna de **B** y sume los resultados; es decir,

$$c_{11} = c_1 = 2(2) + 4(6) + 3(7) = 49$$

c_{21} : Multiplique los elementos de la segunda fila de **A** por los elementos correspondientes en la columna de **B** y sume los resultados;

$$c_{21} = c_2 = -1(2) + 6(6) + 1(7) = 41$$

Así

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 49 \\ 41 \end{bmatrix}$$

Regla de Laplace

La regla de Laplace para calcular determinantes se puede aplicar para matrices cuadradas de cualquier dimensión, pero normalmente se hace para dimensión mayor que 3.

Hay dos versiones de la regla: desarrollo por una fila y desarrollo por una columna.

Consejo: desarrollar por la fila o la columna que tenga más ceros.

Desarrollo por la fila i de la matriz A de dimensión n :

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

siendo A_{ij} la matriz de dimensión $n - 1$ resultante al eliminar la fila i y la columna j de A .

Por tanto, si la matriz es dimensión n , tendremos que calcular n determinantes de matrices de dimensión $n - 1$. Esta es la razón por la que solo usamos esta regla cuando no hay otra opción (dimensión mayor que 3).

Para ver la fórmula de forma más intuitiva, observad el desarrollo por la fila 1 de una matriz de dimensión 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \times & \times & \times \\ \times & a_{22} & a_{23} \\ \times & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|R_{3 \times 3}| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -5 + 26 - 6 = 15$$

$$+ a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \times & \times & \times \\ a_{21} & \times & a_{23} \\ a_{31} & \times & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} \times & \times & \times \\ a_{21} & a_{22} & \times \\ a_{31} & a_{32} & \times \end{vmatrix}$$

Como segundo ejemplo, considere

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Una vez más, es posible encontrar el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ puesto que \mathbf{A} tiene dos columnas y \mathbf{B} tiene dos filas. La matriz \mathbf{C} resultante tiene tres filas y dos columnas. Los elementos se obtienen de la siguiente manera:

$$c_{11} = 5(2) + 3(-3) = 1 \quad (\text{primera fila de } \mathbf{A} \text{ por la primera columna de } \mathbf{B})$$

$$c_{12} = 5(7) + 3(4) = 47 \quad (\text{primera fila de } \mathbf{A} \text{ por la segunda columna de } \mathbf{B})$$

$$c_{21} = 4(2) + 1(-3) = 5 \quad (\text{segunda fila de } \mathbf{A} \text{ por la primera columna de } \mathbf{B})$$

$$c_{22} = 4(7) + 1(4) = 32 \quad (\text{segunda fila de } \mathbf{A} \text{ por la segunda columna de } \mathbf{B})$$

$$c_{31} = -2(2) + 8(-3) = -28 \quad (\text{tercera fila de } \mathbf{A} \text{ por la primera columna de } \mathbf{B})$$

$$c_{32} = -2(7) + 8(4) = 18 \quad (\text{tercera fila de } \mathbf{A} \text{ por la segunda columna de } \mathbf{B})$$

El esquema para la multiplicación sigue la aplicación de la ecuación A-2. Por lo tanto,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 47 \\ 5 & 32 \\ -28 & 18 \end{bmatrix}$$

Las siguientes reglas son aplicables a la multiplicación de matrices.

- En general, el producto de dos matrices no es comutativo:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad (\text{A-3})$$

- La ley distributiva es válida:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad (\text{A-4})$$

- La ley asociativa es válida:

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad (\text{A-5})$$

Ley Conmutativa no aplica

Ejemplo:

Vea cómo cambiar el orden afecta esta multiplicación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 1 & 1 \times 0 + 2 \times 2 \\ 3 \times 2 + 4 \times 1 & 3 \times 0 + 4 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 3 & 2 \times 2 + 0 \times 4 \\ 1 \times 1 + 2 \times 3 & 1 \times 2 + 2 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

¡Las respuestas son diferentes!

Determinante de una Matriz

El determinante de una matriz cuadrada —matriz con el mismo número de filas que de columnas— se obtiene de restar la multiplicación de los elementos de la diagonal principal de la matriz y la multiplicación de los elementos de la diagonal secundaria de la misma matriz.

Para poder realizar este cálculo necesitamos una matriz cuadrada de orden $m \times n$, donde m son las filas y n las columnas, siendo siempre $m=n$. Esto es lo que llamamos dimensión de la matriz. Para matrices de orden superior a 2×2 , el cálculo se realiza mediante las reglas de Laplace o Sarrus.

Dimensión 2x2

La matriz cuadrada de dimensión 2 tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Regla: calculamos el determinante restan el producto de los elementos de las diagonales:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Dimensión 3x3

La matriz cuadrada de dimensión 3 tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Regla: calculamos el determinante mediante la llamada **regla de Sarrus**. Una forma de aplicar la regla de Sarrus es escribir las tres columnas de la matriz seguidas de la primer y la segunda columna:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ &+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ &+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ &- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ &- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \\ &- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &[2 \cdot (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \cdot 2] - [(-3) \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 2] = \\ &= [-4 + 48 - 6] - [9 + 16 + 8] = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 162 & 0 & 30 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 & \\ 5 & 9 & 5 & 5 & 9 & \\ 9 & 0 & -6 & 9 & 0 & \\ \hline & & & -108 & -45 & 0 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 9 & 5 \\ 9 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -108 + -45 + 0 - (162 + 0 + 30) = -345$$

Matriz Inversa

Se llama matriz inversa de una matriz cuadrada A , y se expresa A^{-1} , a la única matriz que cumple que:

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$$

Es decir, la matriz inversa de A es la única matriz que al multiplicarla por ella obtenemos la matriz identidad del orden correspondiente.

La matriz inversa no siempre existe, para que exista, es condición necesaria y suficiente que el determinante de la matriz sea distinto de cero:

Matriz Identidad $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para calcular la **inversa de una matriz**, A^{-1} , hay que aplicar la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj}(A))^t$$

Donde:

- $|A|$ es el determinante de la matriz A
- $\text{Adj}(A)$ es la matriz adjunta de A
- El exponente t indica la transposición de la matriz, es decir, se tiene que transponer la matriz adjunta.

Ejemplo de cómo calcular la matriz inversa por el método de los determinantes (o de la matriz adjunta):

Invierte la siguiente matriz de dimensión 3×3 por el método de la matriz adjunta:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

La fórmula de la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj}(A))^t$$

En primer lugar resolvemos el determinante de la matriz con la regla de Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -24 + 6 - 2 + 16 - 2 + 9 = 3$$

El determinante es diferente de 0, por lo tanto, sí que se puede invertir la matriz.

Partición de matrices. Una matriz puede subdividirse en submatrices al efectuar una partición. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Aquí las submatrices son

$$\mathbf{A}_{11} = [a_{11}] \quad \mathbf{A}_{12} = [a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14}]$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Las reglas del álgebra matricial son aplicables a las matrices particionadas siempre que la partición sea conformable. Por ejemplo, las submatrices correspondientes de \mathbf{A} y \mathbf{B} pueden sumarse o restarse siempre y cuando tengan el mismo número de filas y columnas. Del mismo modo, la multiplicación de matrices es posible siempre que el respectivo número de columnas y filas de \mathbf{A} y \mathbf{B} y sus submatrices sean iguales. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|cc} 4 & 1 & -1 \\ \hline -2 & 0 & -5 \\ 6 & 3 & 8 \end{array} \right] \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline 0 & 8 \\ 7 & 4 \end{array} \right]$$

entonces el producto \mathbf{AB} existe, puesto que el número de columnas de \mathbf{A} es igual al número de filas de \mathbf{B} (tres). Del mismo modo, las matrices particionadas son conformables para la multiplicación dado que \mathbf{A} se subdivide en dos columnas y \mathbf{B} se subdivide en dos filas, es decir,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} \end{bmatrix}$$

Al multiplicar las submatrices se obtiene

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -35 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} = [6 \quad 3] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = [12 \quad 18]$$

$$\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} = [8][7 \quad 4] = [56 \quad 32]$$

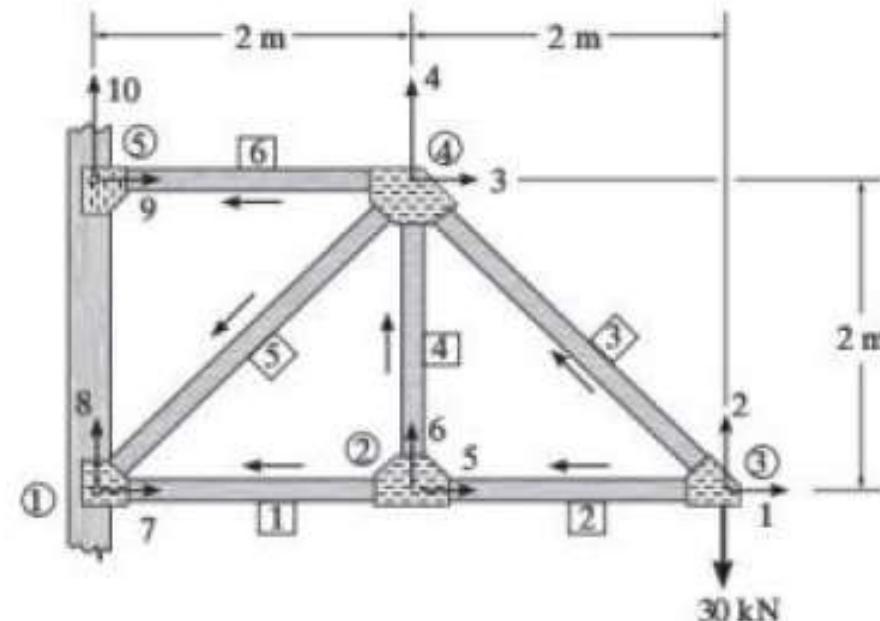
$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -35 & -20 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 56 & 32 \end{bmatrix} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -39 & -18 \\ 68 & 50 \end{bmatrix}$$



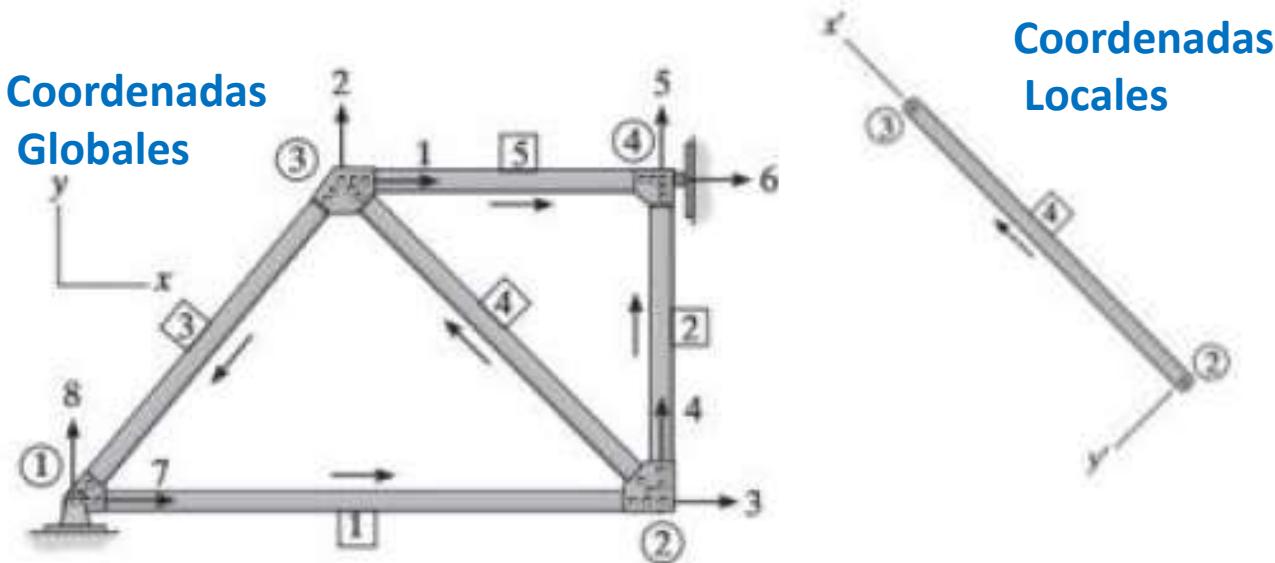
ANÁLISIS DE ARMADURAS MÉTODO DE RIGIDEZ

(Cálculo de Matriz de Rigidez)

$$K = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} N_x & N_y & F_x & F_y \\ \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y & \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y \\ -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$



Identificación del Elemento y el Nodo



- Cada elemento se especificará por un número encerrado en un cuadrado
- Los nodos se identifican con un número encerrado en un círculo
- Se especifica los nodos lejanos y cercanos mediante una flecha indicada a lo largo del elemento, con la punta de la flecha dirigida hacia el extremo lejano.

Indeterminación Cinemática

- Los grados de libertad no restringidos representan las incógnitas primarias
- Cada nodo tiene dos grados de libertad y se identifican con flechas orientadas con coordenadas globales con números
- Los números más bajos identifican los grados de desplazamientos desconocidos y los más altos los desplazamientos conocidos

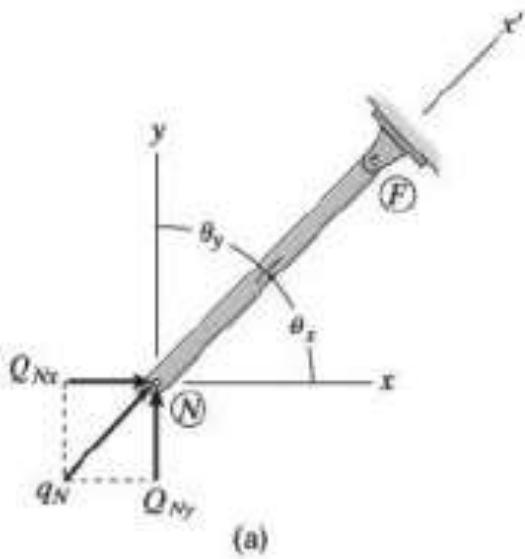
El ejemplo mostrado tiene indeterminación Cinemática de 5º grado
- 5 grados de libertad desconocidos (1- 5)

Matriz de Rigidez de la Estructura

1. Calcular la matriz local del elemento
2. Transformar matriz de fuerzas y desplazamientos a coordenadas globales
3. Integrar las matrices a una matriz global de la armadura

Matriz de transformación de Fuerzas

$$Q_{Nx} = q_N \cos \theta_x \quad Q_{Ny} = q_N \cos \theta_y$$

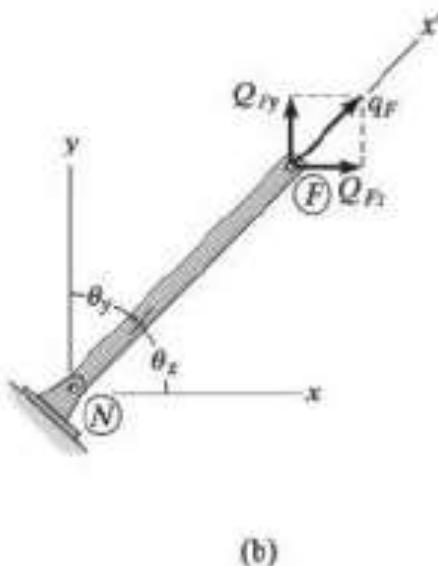


$$Q_{Fx} = q_F \cos \theta_x \quad Q_{Fy} = q_F \cos \theta_y$$

$$\begin{aligned} Q_{Nx} &= q_N \lambda_x & Q_{Ny} &= q_N \lambda_y \\ Q_{Fx} &= q_F \lambda_x & Q_{Fy} &= q_F \lambda_y \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}$$

Matriz de Transformación de Fuerzas



$$\begin{bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura. Esta matriz tiene una orden de 6×6 porque hay seis grados de libertad designados para la armadura, figura 14-7b. Los elementos correspondientes de las dos matrices anteriores se suman algebraicamente para formar la matriz de rigidez de la estructura. Quizá el proceso de ensamble es más fácil de observar si las columnas y filas numéricas faltantes en \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 se expanden con ceros para formar dos matrices de 6×6 . Entonces,

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$$

$$\mathbf{K} = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.333 & 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 1 + AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.072 & 0.096 & 0 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \end{bmatrix} 1 + AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} 6$$

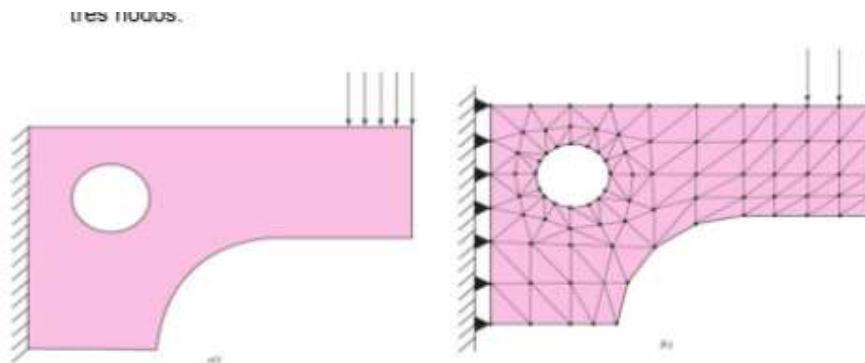
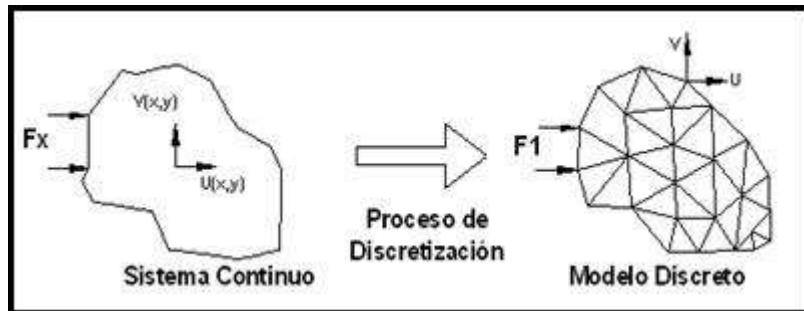
$$\mathbf{K} = AE = \begin{bmatrix} 0.405 & 0.096 & -0.333 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix}$$

Si se usa una computadora para esta operación, por lo general se empieza con una **K** donde todos los términos son cero; después, conforme se generan las matrices de rigidez globales del elemento, éstas se colocan directamente en sus respectivas posiciones elementales en la matriz **K**, en vez de desarrollar las matrices de rigidez de cada elemento y almacenarlas, para después ensamblarlas.

Fundamentos de Método de Rigidez

Es un método de análisis de desplazamiento que utiliza modelos matriciales para su desarrollo.

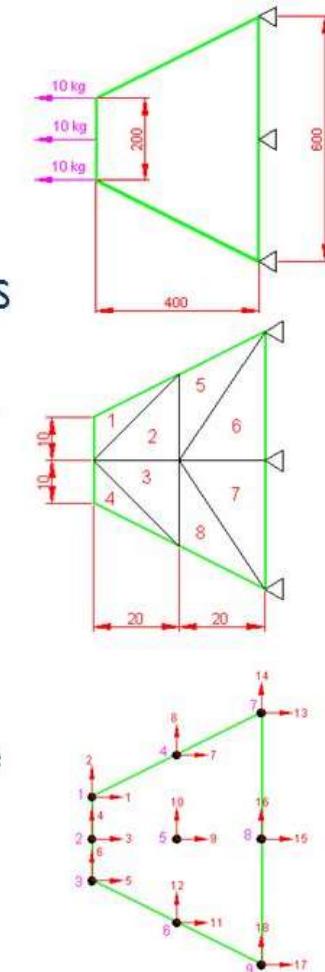
Se subdivide la estructura en una serie de elementos finitos discretos e identifica sus puntos extremos como nodos.



Para una armadura los elementos finitos son los elementos que la componen y los nodos están definidos por las juntas

Características básicas del M.E.F.

- Es una generalización del método matricial
- Discretiza la estructura en ELEMENTOS (trozos)
- Los elementos contienen puntos llamados NODOS (generalmente en los bordes)
- Los elementos que comparten nodos están unidos.
- En cada nodo tendremos unos determinados GRADOS DE LIBERTAD que definen el estado del mismo.
- Los grados de libertad en un análisis estructural simple (nuestro caso) se corresponden con DESPLAZAMIENTOS y/o GIROS de los nodos.
- **OBJETIVO:** conocer los resultados en los G.D.L. de los nodos para así saber cómo se deforma la estructura.



Matriz de global del elemento

Ecuación carga- desplazamiento del elemento

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{d}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \mathbf{D}$$

Ecuación desplazamiento transformación
de desplazamiento a coordenadas globales

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{D}$$

Ecuación carga- desplazamiento del elemento
Transformación de fuerzas a coordenadas globales

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}' \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{D}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k} \mathbf{D}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}' \mathbf{k}' \mathbf{T}$$

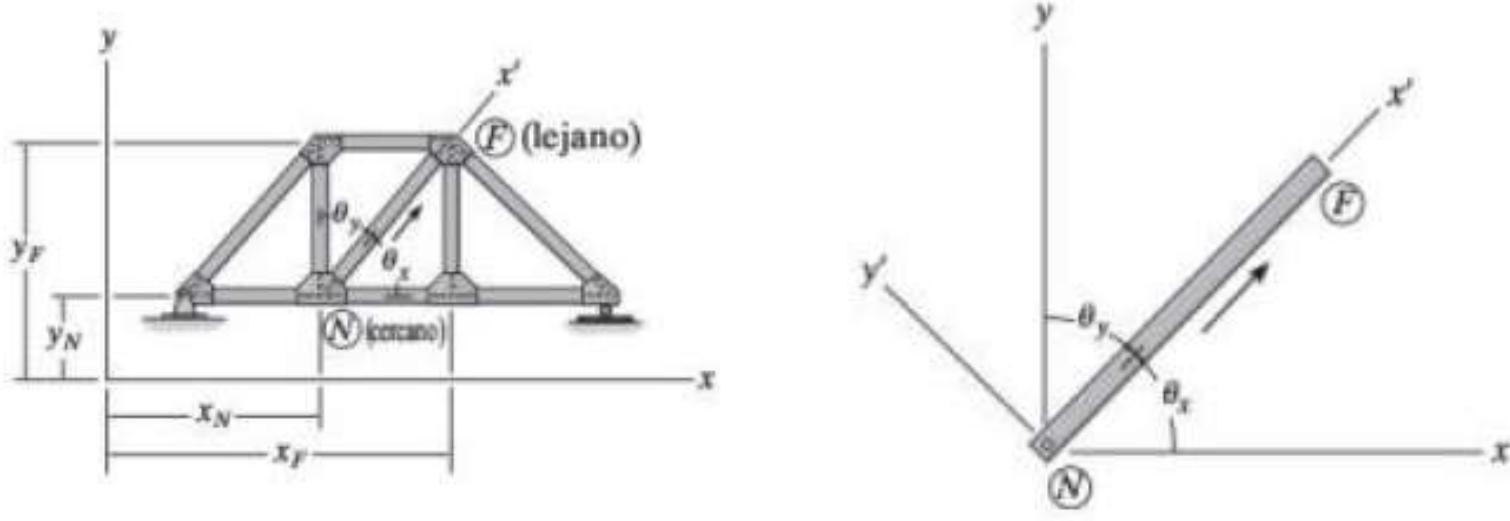
Matriz de rigidez global del elemento

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} N_x & N_y & F_x & F_y \\ N_x & \lambda_x^2 & -\lambda_x^2 & -\lambda_x \lambda_y \\ \lambda_x \lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_x \lambda_y & -\lambda_y^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x \lambda_y & \lambda_x^2 & \lambda_x \lambda_y \\ -\lambda_x \lambda_y & -\lambda_y^2 & \lambda_x \lambda_y & \lambda_y^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ F_x \\ F_y \end{matrix}$$

Matriz de global de la Estructura

- Se suman las matrices de rigidez global de cada elemento
- Se ensamblan en la suma aquellas que tengan el mismo numero en arreglo de filas y columnas de acuerdo a su grado de libertad a_{ij} en función de (N_x, N_y, F_x, F_y)

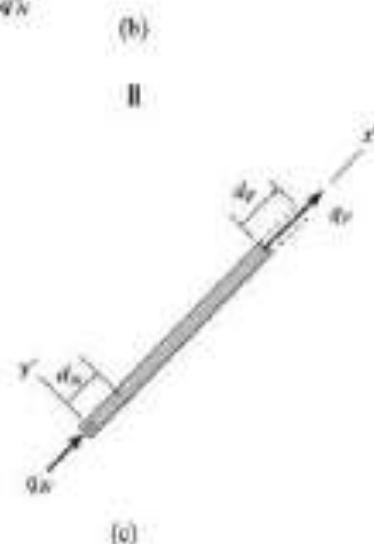
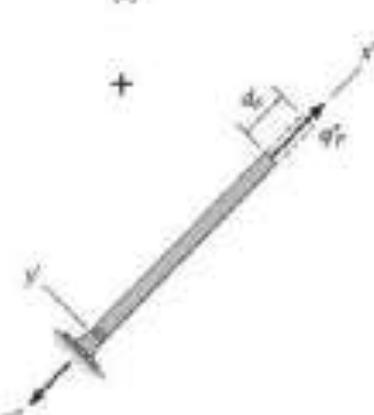
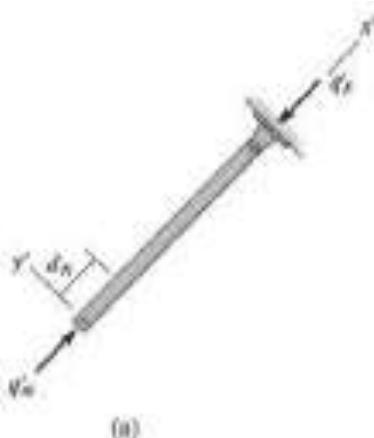
Transformación de coordenadas locales a globales



$$\lambda_x = \cos \theta_x = \frac{x_F - x_N}{L} = \frac{x_F - x_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}}$$

$$\lambda_y = \cos \theta_y = \frac{y_F - y_N}{L} = \frac{y_F - y_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}}$$

Matriz de Rigidez del Elemento



$$q'_N = \frac{AE}{L} d_N \quad q'_F = -\frac{AE}{L} d_N$$

$$q''_N = -\frac{AE}{L} d_F \quad q''_F = \frac{AE}{L} d_F$$

$$q_N = \frac{AE}{L} d_N - \frac{AE}{L} d_F$$

$$q_F = -\frac{AE}{L} d_N + \frac{AE}{L} d_F$$

$$\begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_N \\ d_F \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{d}$$

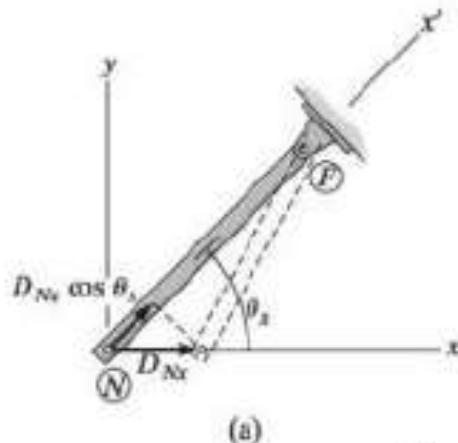
$$\mathbf{k}' = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{K}' = matriz de rigidez del elemento

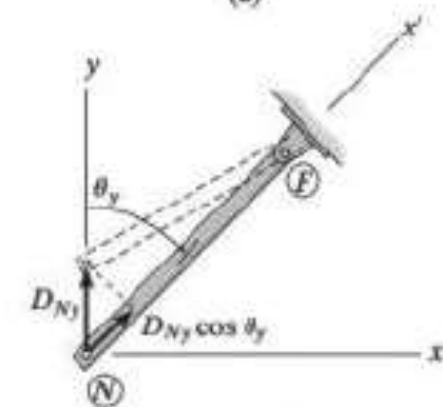
$$\mathbf{k}' = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las componentes de la matriz \mathbf{K}' son los coeficientes de influencia de rigidez del elemento

Matriz de transformación de Desplazamiento



$$d_N = D_{Nx} \cos \theta_x + D_{Ny} \cos \theta_y$$



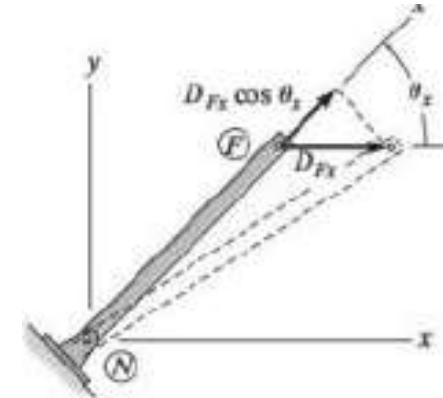
$$d_F = D_{Fx} \cos \theta_x + D_{Fy} \cos \theta_y$$

$$d_N = D_{Nx} \lambda_x + D_{Ny} \lambda_y$$

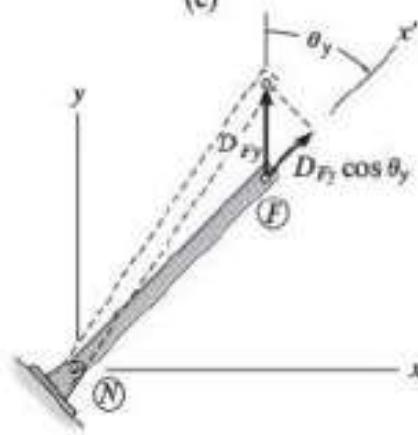
$$d_F = D_{Fx} \lambda_x + D_{Fy} \lambda_y$$

$$\begin{bmatrix} d_N \\ d_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{D}$$



(c)



(d)

T = matriz de transformación de desplazamiento

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura. Ahora, las seis matrices anteriores pueden ensamblarse en la matriz \mathbf{K} de 8×8 al sumar algebraicamente sus elementos correspondientes. Por ejemplo, puesto que $(k_{11})_1 = AE(0.1)$, $(k_{11})_2 = AE(0.035)$, $(k_{11})_3 = (k_{11})_4 = (k_{11})_5 = (k_{11})_6 = 0$, entonces, $K_{11} = AE(0.1 + 0.035) = AE(0.135)$, y así sucesivamente. Por lo tanto, el resultado final es

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 0.1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_4 = AE \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0.1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.035 \\ 0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0.035 & 0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0.035 & 0.035 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_5 = AE \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 \\ 0.035 & -0.035 & -0.035 & 0.035 \\ -0.035 & 0.035 & 0.035 & -0.035 \\ -0.035 & 0.035 & 0.035 & -0.035 \\ 0.035 & -0.035 & -0.035 & 0.035 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_3 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_6 = AE \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K} = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0.135 & 0.035 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & -0.035 & -0.035 \\ 0.035 & 0.135 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & -0.035 & -0.035 \\ 0 & 0 & 0.135 & -0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & -0.035 & 0.135 & -0.035 & 0.035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.035 & -0.035 & 0.135 & -0.035 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.035 & 0.035 & -0.035 & 0.135 & 0 & 0 \\ -0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.135 & 0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0.035 & 0.135 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Resp.

Procedimiento de análisis

El siguiente método proporciona un medio para determinar los desplazamientos y las reacciones en los apoyos desconocidos para una armadura utilizando el método de la rigidez.

Notación

- Establezca el sistema de coordenadas globales x, y . Por lo general, el origen se localiza en una junta para la cual las coordenadas de todas las demás juntas son positivas.
- Identifique cada junta y elemento en forma numérica, y especifique arbitrariamente los extremos cercano y lejano de cada elemento de manera simbólica al dirigir una flecha a lo largo del elemento con la punta dirigida hacia el extremo lejano.
- Especifique los dos números de código en cada junta, considere los *números más bajos* para identificar los *grados de libertad no restringidos*, seguidos por los *números mayores* para identificar los *grados de libertad restringidos*.
- Con base en el problema, establezca \mathbf{D}_k y \mathbf{Q}_k .

Matriz de rigidez de la estructura

- Para cada elemento, determine λ_x y λ_y , y la matriz de rigidez del elemento usando la ecuación 14-16.
- Ensamble estas matrices para formar la matriz de rigidez de toda la armadura, como se explicó en la sección 14-5. Para verificar parcialmente los cálculos, revise que las matrices de rigidez del elemento y la estructura sean *simétricas*.

Desplazamientos y cargas

- Parta la matriz de rigidez de la estructura, como lo indica la ecuación 14-18.
- Determine los desplazamientos desconocidos \mathbf{D}_u de la junta mediante la ecuación 14-21, las reacciones en los soportes \mathbf{Q}_u con base en la ecuación 14-22, y cada fuerza de elemento \mathbf{q}_F usando la ecuación 14-23.

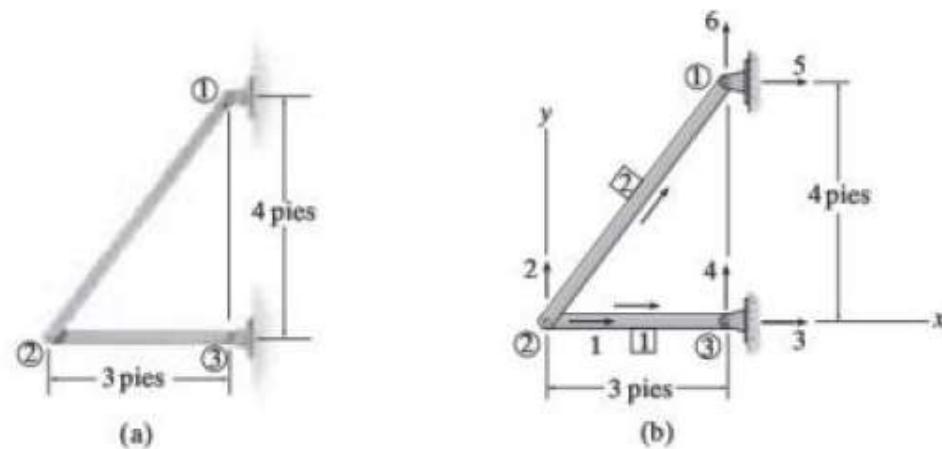
$$\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{Q}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \\ \mathbf{D}_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$$

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k$$

Determine la matriz de rigidez de la estructura para la armadura de dos elementos que se muestra en la figura 14-7a. AE es constante.



SOLUCIÓN

Por inspección, ② tendrá dos componentes de desplazamiento desconocidas, en tanto que las juntas ① y ③ estarán limitadas por el desplazamiento. En consecuencia, las componentes del desplazamiento en la junta ② se codifican numéricamente en primer lugar, seguidas por las de las articulaciones ③ y ①, figura 14-7b. El origen del sistema de coordenadas globales puede ubicarse en cualquier punto. Para mayor comodidad, se elegirá la junta ②, como se muestra. Los elementos se identifican de forma arbitraria y se trazan flechas a lo largo de los dos elementos para identificar los extremos cercano y lejano de cada elemento. Ahora pueden determinarse los cosenos directores y la matriz de rigidez para cada elemento.

Elemento 1. Como ② es el extremo cercano y ① es el extremo lejano, entonces a partir de las ecuaciones 14-5 y 14-6, se tiene

$$\lambda_x = \frac{3 - 0}{3} = 1 \quad \lambda_y = \frac{0 - 0}{3} = 0$$

Con base en la ecuación 14-16, si se divide cada término entre $L = 3$ pies, se tiene

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.333 & 0 & -0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Los cálculos pueden verificarse en parte al observar que \mathbf{k}_1 es *simétrica*. Tenga en cuenta que las filas y columnas en \mathbf{k}_1 se identifican por los grados de libertad x, y en el extremo cercano, seguidos por el extremo lejano, es decir, 1, 2, 3, 4, respectivamente, para el elemento 1, figura 14-7b. Esto se hace con el fin de identificar los términos para el ensamble posterior en la matriz \mathbf{K} .

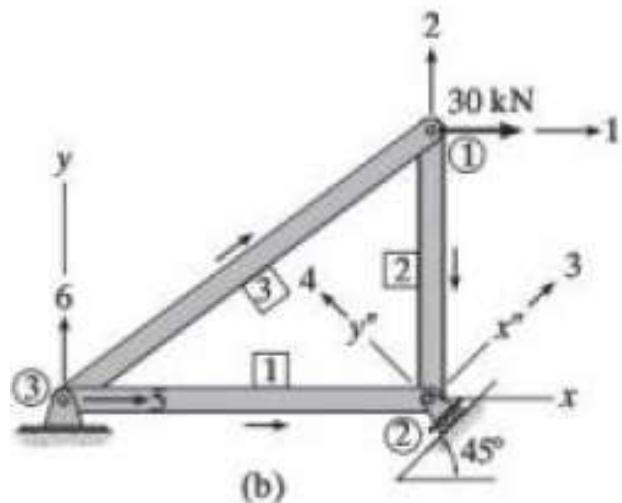
Elemento 2. Como ② es el extremo cercano y ① es el extremo lejano, se tiene

$$\lambda_x = \frac{3 - 0}{5} = 0.6 \quad \lambda_y = \frac{4 - 0}{5} = 0.8$$

Así, la ecuación 14-16 con $L = 5$ pies se convierte en

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0.072 & 0.096 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & -0.096 & -0.128 \\ -0.072 & -0.096 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Aquí las filas y columnas se identifican como 1, 2, 5, 6, puesto que estos números representan, respectivamente, los grados de libertad x , y en los extremos cercano y lejano del elemento 2.



$$\begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.128 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.4053 & -0.2357 & -0.2357 & -0.096 & -0.072 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 & 0.0417 & -0.17675 & 0 \\ 0 & -0.2357 & 0.0417 & 0.2917 & 0.17675 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & -0.17675 & 0.17675 & 0.378 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Reacciones Desconocidas

Desplazamientos Desconocidos

$$D_1 = \frac{352.5}{AE}$$

$$D_2 = \frac{-157.5}{AE}$$

$$D_3 = \frac{-127.3}{AE}$$

$$\begin{aligned} Q_4 &= 0(352.5) - 0.2357(-157.5) + 0.0417(-127.3) \\ &= 31.8 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_5 &= -0.128(352.5) - 0.096(-157.5) - 0.17675 (-127.3) \\ &= -7.5 \text{ kN} \end{aligned}$$

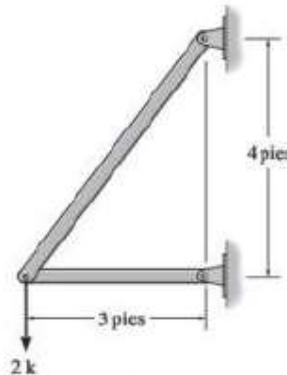
$$\begin{aligned} Q_6 &= -0.096(352.5) - 0.072(-157.5) + 0(-127.3) \\ &= -22.5 \text{ kN} \end{aligned}$$

Determine la fuerza en cada uno de los dos elementos que componen la armadura que se muestra en la figura 14-9a. AE es constante.

SOLUCIÓN

Notación. En la figura 14-9b se muestran el origen de x , y y la numeración de las juntas y los elementos. Además, los extremos cercano y lejano de todos los elementos se identifican mediante flechas y se usan números de código en cada junta. Por inspección, puede verse que los desplazamientos externos conocidos son $D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = 0$. Inclusive, las cargas externas conocidas son $Q_1 = 0$, $Q_2 = -2 \text{ k}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$



Matriz de rigidez de la estructura. Si se emplea la misma notación que se usó aquí, esta matriz ya se desarrolló en el ejemplo 14-1.

Matriz de rigidez de la estructura. Si se emplea la misma notación que se usó aquí, esta matriz ya se desarrolló en el ejemplo 14-1.

Desplazamientos y cargas. Al escribir la ecuación 14-17, $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$, para esta armadura se tiene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.405 & 0.096 & -0.333 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} \quad (1)$$

A partir de esta ecuación se puede identificar \mathbf{K}_{11} y así determinar \mathbf{D}_w . Se ve que la multiplicación de matrices, como la ecuación 14-19, resulta en

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.405 & 0.096 \\ 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0 = AE(0.405D_1 + 0.096D_2)$$

$$-2 = AE(0.096D_1 + 0.128D_2)$$

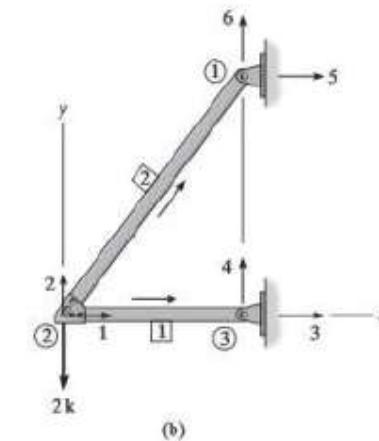
Físicamente estas ecuaciones representan $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ aplicadas a la junta ②. Despejando, se obtiene

$$D_1 = \frac{4.505}{AE} \quad D_2 = \frac{-19.003}{AE}$$

Por inspección de la figura 14-9b, de hecho se esperaría la ocurrencia de un desplazamiento hacia la derecha y hacia abajo en la junta ② según lo indican los signos positivos y negativos de estas respuestas.

Con estos resultados, ahora se obtienen las reacciones en los soportes a partir de la ecuación (1), escrita en la forma de la ecuación 14-20 (o la ecuación 14-22) como

$$\begin{bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} -0.333 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 \\ -0.096 & -0.128 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



La fuerza en cada elemento se encuentra con base en la ecuación 14-23. Empleando los datos para λ_x y λ_y en el ejemplo 14-1, se tiene

Elemento 1: $\lambda_x = 1, \lambda_y = 0, L = 3 \text{ pies}$.

$$q_1 = \frac{AE}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} [-4.505] = -1.5 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

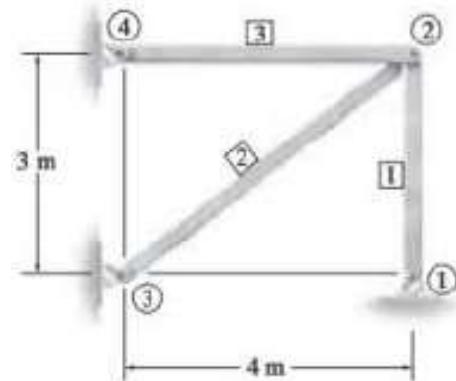
Elemento 2: $\lambda_x = 0.6, \lambda_y = 0.8, L = 5 \text{ pies}$.

$$q_2 = \frac{AE}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ -0.6 & -0.8 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} [-0.6(4.505) - 0.8(-19.003)] = 2.5 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

Por supuesto, estas respuestas pueden verificarse mediante el equilibrio, aplicado en la junta ②.

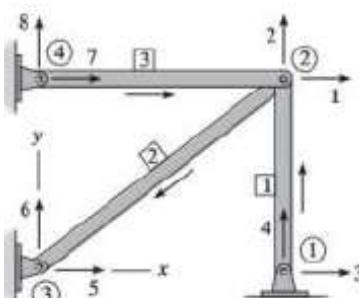
Determine la fuerza en el elemento 2 del ensamble que se muestra en la figura 14-11a si el soporte en la junta ① se asienta 25 mm hacia abajo. Considere que $AE = 8(10^3)$ kN.



SOLUCIÓN

Notación. Por comodidad, el origen de las coordenadas globales en la figura 14-11b se establece la junta ④ y, como siempre, los números más bajos del código se usan para hacer referencia a los grados de libertad no restringidos. Por lo tanto,

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -0.025 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$



(b)

Matriz de rigidez de la estructura. Con base en la ecuación 14-16, se tiene

Elemento 1: $\lambda_x = 0, \lambda_y = 1, L = 3$ m, de modo que

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Elemento 2: $\lambda_x = -0.8, \lambda_y = -0.6, L = 5$ m, entonces

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0.128 & 0.096 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.072 & -0.096 & -0.072 \\ -0.128 & -0.096 & 0.128 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Elemento 3: $\lambda_x = 1, \lambda_y = 0, L = 4$ m, entonces

$$\mathbf{k}_3 = AE \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Desplazamientos y cargas. Aquí $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$ resulta en

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.405 & 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & -0.025 \\ -0.128 & -0.096 & 0 & 0 & 0.128 & 0.096 & 0 & 0 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0556 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_8 \end{bmatrix}$$

Al ensamblar estas matrices, la matriz de rigidez de la estructura se convierte en

$$\mathbf{K} = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.405 & 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & 0 & 0 & 0.128 & 0.096 & 0 & 0 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0556 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Al desarrollar la solución para los desplazamientos, ecuación 14-19, se tiene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.378 & 0.096 \\ 0.096 & 0.405 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + AE \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene

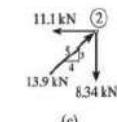
$$0 = AE[(0.378D_1 + 0.096D_2) + 0] \\ 0 = AE[(0.096D_1 + 0.405D_2) + 0.00833]$$

Al resolver estas ecuaciones simultáneamente da

$$D_1 = 0.00556 \text{ m} \\ D_2 = -0.021875 \text{ m}$$

Elemento 2: $\lambda_x = -0.8, \lambda_y = -0.6, L = 5$ m, $AE = 8(10^3)$ kN, de modo que

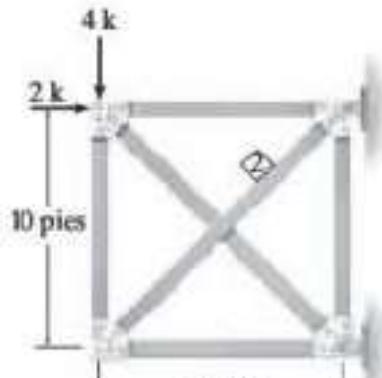
$$q_2 = \frac{8(10^3)}{5} [0.8 \quad 0.6 \quad -0.8 \quad -0.6] \begin{bmatrix} 0.00556 \\ -0.021875 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \frac{8(10^3)}{5} (0.00444 - 0.0131) = -13.9 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$



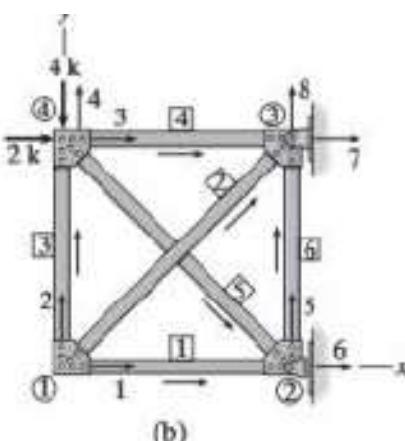
(c)

Usando el mismo procedimiento, se muestra que la fuerza en el elemento 1 es $q_1 = 8.34$ kN y en el elemento 3, $q_3 = 11.1$ kN. Los resultados se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la junta ②, figura 14-11c, la cual puede comprobarse que está en equilibrio.

Determine las reacciones en los soportes y la fuerza en el elemento 2 de la armadura que se muestra en la figura 14-10a. AE es constante.



(a)



(b)

SOLUCIÓN

Notación. Se numeran las juntas y los elementos numerados y se establece el origen de los ejes x , y en ①, figura 14-10b. Además, las flechas se usan para hacer referencia a los extremos cercano y lejano de cada elemento. Si se emplean los números de código donde los números más bajos indican los grados de libertad no restringidos, figura 14-10b, se tiene

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \quad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \\ -4 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Al expandir y calcular las reacciones en los soportes se obtiene

$$Q_6 = -4.0 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

$$Q_7 = 2.0 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

$$Q_8 = 4.0 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

Estructura de la matriz de rigidez. Esta matriz se determinó en el ejemplo 14-2 con la misma notación que en la figura 14-10b.

Desplazamientos y cargas. Para este problema $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$ es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.135 & 0.035 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & -0.035 & -0.035 \\ 0.035 & 0.135 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & -0.035 & -0.035 \\ 0 & 0 & 0.135 & -0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & -0.035 & 0.135 & -0.035 & 0.035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.035 & -0.035 & 0.135 & -0.035 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.035 & 0.035 & -0.035 & 0.135 & 0 & 0 \\ -0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.135 & 0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0.035 & 0.135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Si se multiplica de modo que pueda formularse la ecuación 14-18 del desplazamiento desconocido, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.135 & 0.035 & 0 & 0 & 0 \\ 0.035 & 0.135 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.135 & -0.035 & 0.035 \\ 0 & -0.1 & -0.035 & 0.135 & -0.035 \\ 0 & 0 & 0.035 & -0.035 & 0.135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 17.94 \\ -69.20 \\ -2.06 \\ -87.14 \\ -22.06 \end{bmatrix}$$

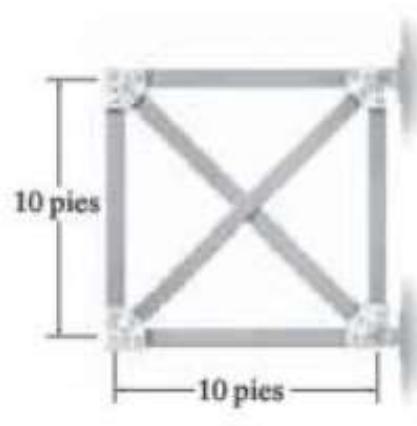
El signo negativo para Q_6 indica que la reacción en el soporte de oscilador actúa en la dirección x negativa. La fuerza en el elemento 2 se encuentra a partir de la ecuación 14-23, donde desde el ejemplo 14-2, $\lambda_x = 0.707$, $\lambda_y = 0.707$, $L = 10\sqrt{2}$ pies. Entonces,

$$q_2 = \frac{AE}{10\sqrt{2}} [-0.707 \quad -0.707 \quad 0.707 \quad 0.707] \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 17.94 \\ -69.20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

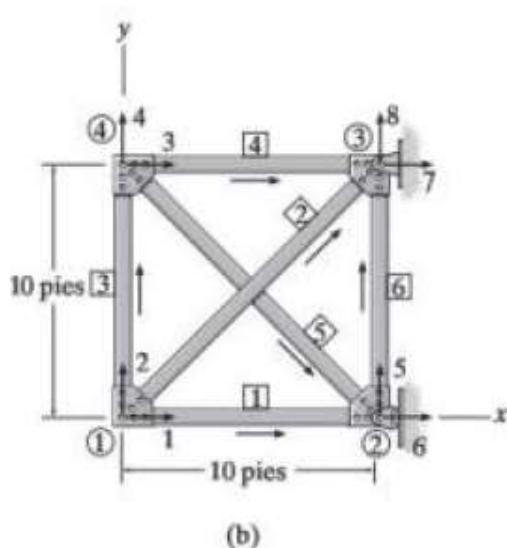
$$= 2.56 \text{ k}$$

Resp.

Determine la matriz de rigidez de la estructura para la armadura que se muestra en la figura 14-8a. AE es constante.



(a)



(b)

SOLUCIÓN

Aunque la armadura es estáticamente indeterminada de primer grado, esto no representa ninguna dificultad para la obtención de la matriz de rigidez de la estructura. Cada junta y cada elemento se identifican numéricamente en forma arbitraria, y los extremos cercano y lejano se indican mediante flechas a lo largo de los elementos. Como se muestra en la figura 14-8b, los *desplazamientos no restringidos se codifican numéricamente en primer lugar*. Hay ocho grados de libertad para la armadura y, por lo tanto, \mathbf{K} será una matriz de 8×8 . Con el fin de mantener todas las coordenadas de las juntas positivas, el origen de las coordenadas globales se elige en ①. Ahora se aplicarán las ecuaciones 14-5, 14-6 y 14-16 a cada elemento.

Elemento 1. Aquí $L = 10$ pies, de modo que

$$\lambda_x = \frac{10 - 0}{10} = 1 \quad \lambda_y = \frac{0 - 0}{10} = 0$$

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 0.1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 5 \end{matrix}$$

Elemento 2. Aquí $L = 10\sqrt{2}$ pies, por lo que

$$\lambda_x = \frac{10 - 0}{10\sqrt{2}} = 0.707 \quad \lambda_y = \frac{0 - 0}{10\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.035 \\ 0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0.035 & 0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0.035 & 0.035 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 3. Aquí $L = 10$ pies, entonces

$$\lambda_x = \frac{0 - 0}{10} = 0 \quad \lambda_y = \frac{10 - 0}{10} = 1$$

$$\mathbf{k}_3 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 4. Aquí $L = 10$ pies, de modo que

$$\lambda_x = \frac{10 - 0}{10} = 1 \quad \lambda_y = \frac{10 - 10}{10} = 0$$

$$\mathbf{k}_4 = AE \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0.1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 5. Aquí $L = 10\sqrt{2}$ pies, por lo que

$$\lambda_x = \frac{10 - 0}{10\sqrt{2}} = 0.707 \quad \lambda_y = \frac{0 - 10}{10\sqrt{2}} = -0.707$$

$$\mathbf{k}_5 = AE \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 \\ 0.035 & -0.035 & -0.035 & 0.035 \\ -0.035 & 0.035 & 0.035 & -0.035 \\ -0.035 & 0.035 & 0.035 & -0.035 \\ 0.035 & -0.035 & -0.035 & 0.035 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{matrix}$$

Elemento 6. Aquí $L = 10$ pies, entonces

$$\lambda_x = \frac{10 - 10}{10} = 0 \quad \lambda_y = \frac{10 - 0}{10} = 1$$

$$\mathbf{k}_6 = AE \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Ecuación de Rigidez de la Estructura

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{Q}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \\ \mathbf{D}_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$$

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k$$

Los números más bajos se le asignará a los grados de libertad
los grados de libertad no restringidos

$\mathbf{Q}_k, \mathbf{D}_k$ = cargas externas y desplazamientos *conocidos*; aquí las cargas existen en la armadura como parte del problema, y los desplazamientos suelen especificarse como iguales a cero debido a las limitaciones de soportes como pasadores o rodillos.

$\mathbf{Q}_u, \mathbf{D}_u$ = cargas y desplazamientos *desconocidos*; aquí las cargas representan las reacciones desconocidas en los soportes y los desplazamientos se presentan en las juntas donde el movimiento no está restringido en una dirección particular.

Ecuación de equilibrio cuando cargas externas son conocidas y $\mathbf{D}_k = 0$

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u$$

Desplazamiento desconocido

$$\mathbf{D}_u = [\mathbf{K}_{11}]^{-1}\mathbf{Q}_k$$

Reacciones

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u$$

Fuerzas desconocidas

Fuerza en el elemento

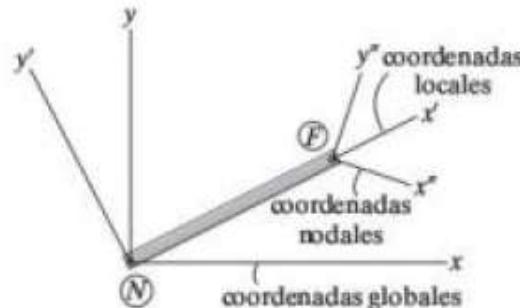
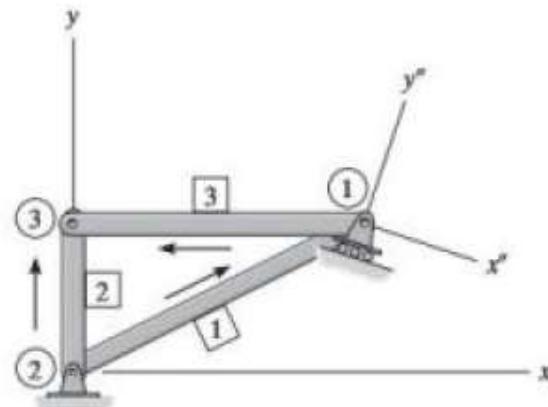
$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D}$$

$$\begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix}$$

" $q_N = -q_F$, solo es necesario encontrar un valor"

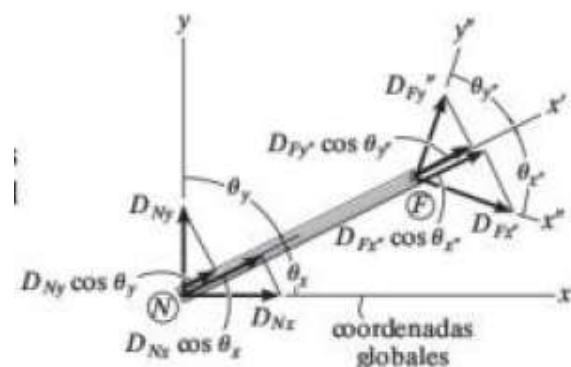
$$q_F = \frac{AE}{L} [-\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_x \quad \lambda_y] \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix}$$

Coordenadas Nodales

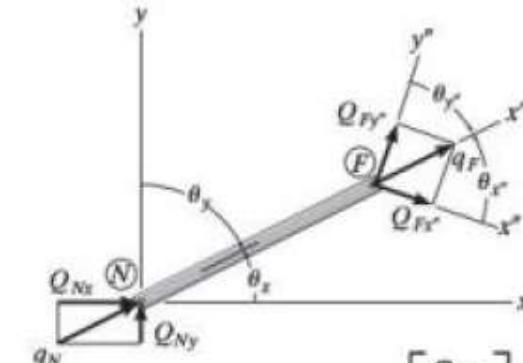


$$d_N = D_{Nx} \cos \theta_x + D_{Ny} \cos \theta_y$$

$$d_F = D_{Fx'} \cos \theta_{x'} + D_{Fy'} \cos \theta_{y'}$$



$$\begin{bmatrix} d_N \\ d_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{x'} & \lambda_{y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx'} \\ D_{Fy'} \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} Q_{Nx} &= q_N \cos \theta_x & Q_{Ny} &= q_N \cos \theta_y \\ Q_{Fx'} &= q_F \cos \theta_{x'} & Q_{Fy'} &= q_F \cos \theta_{y'} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Fx'} \\ Q_{Fy'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_{x'} \\ 0 & \lambda_{y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix}$$

Aplicando transformación de fuerzas y desplazamiento

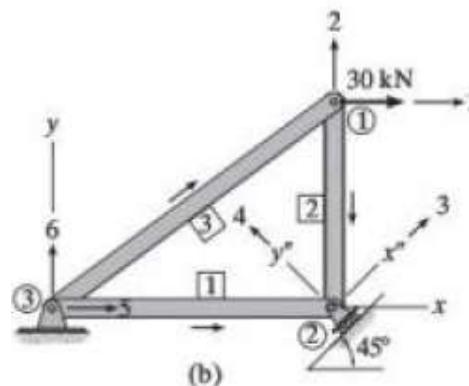
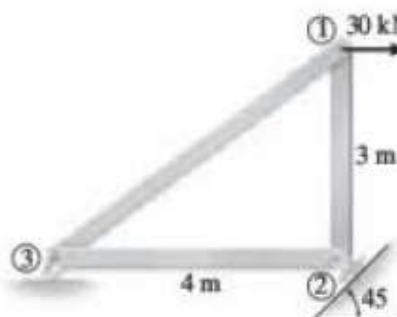
$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_{x'} \\ 0 & \lambda_{y'} \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{x'} & \lambda_{y'} \end{bmatrix}$$

Matriz global del elemento con nodos inclinados

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x \lambda_y & -\lambda_x \lambda_{x'} & -\lambda_x \lambda_{y'} \\ \lambda_x \lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_y \lambda_{x'} & -\lambda_y \lambda_{y'} \\ -\lambda_x \lambda_{x'} & -\lambda_y \lambda_{x'} & \lambda_{x'}^2 & \lambda_{x'} \lambda_{y'} \\ -\lambda_x \lambda_{y'} & -\lambda_y \lambda_{y'} & \lambda_{x'} \lambda_{y'} & \lambda_{y'}^2 \end{bmatrix}$$

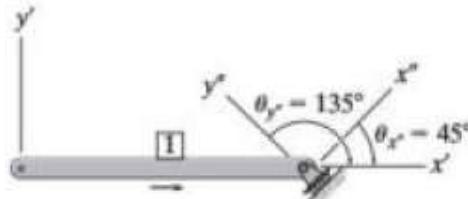
Determine las reacciones en los soportes para la armadura que se muestra en la figura 14-13a.



SOLUCIÓN

Notación. Como el soporte de rodillos en ② se encuentra sobre un plano inclinado, en este nodo deben usarse coordenadas nodales. Se numeran las juntas y los elementos y se establecen los ejes globales x , y , en el nodo ③, figura 14-13b. Observe que los números de código 3 y 4 están a lo largo de los ejes x'' , y'' , a fin de poder usar la condición de que $D_4 = 0$.

Matrices de rigidez de los elementos. Las matrices de rigidez de los elementos 1 y 2 deben desarrollarse mediante la ecuación 14-24, puesto que estos elementos tienen números de código en la dirección de los ejes globales y nodales. La matriz de rigidez para el elemento 3 se determina de la forma habitual.

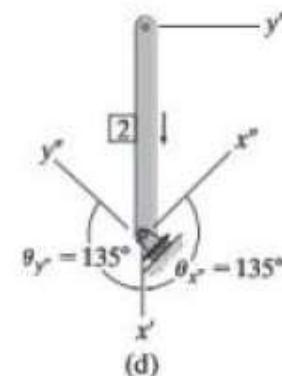


Elemento 1. Figura 14-13c, $\lambda_x = 1$, $\lambda_y = 0$, $\lambda_{x'} = 0.707$, $\lambda_{y'} = -0.707$

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 4 \\ 0.25 & 0 & -0.17675 & 0.17675 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.17675 & 0 & 0.125 & -0.125 \\ 0.17675 & 0 & -0.125 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 2. Figura 14-13d, $\lambda_x = 0$, $\lambda_y = -1$, $\lambda_{x'} = -0.707$, $\lambda_{y'} = -0.707$

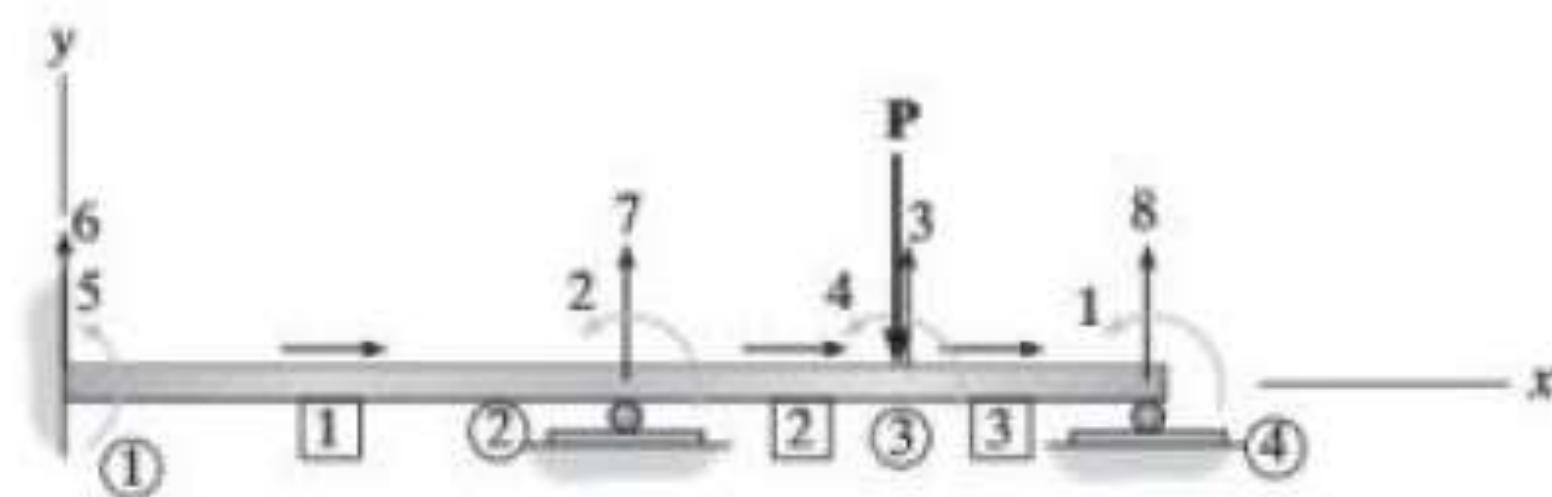
$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & -0.2357 & -0.2357 \\ 0 & -0.2357 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0 & -0.2357 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$



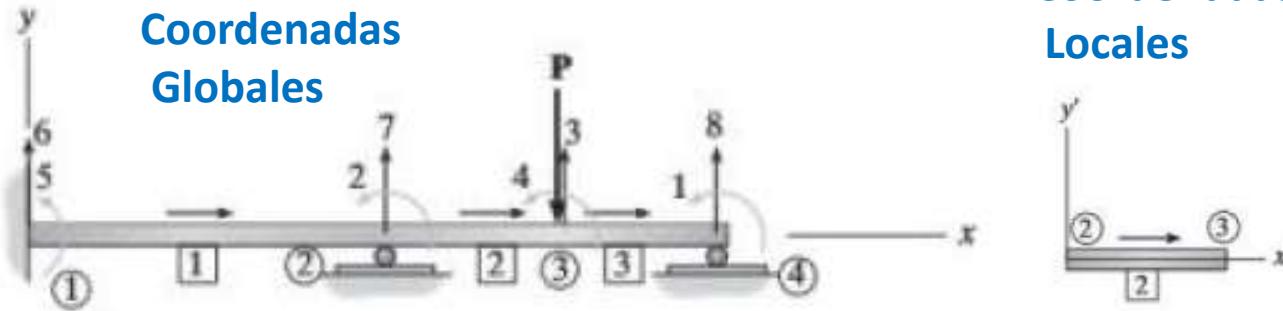
Elemento 3. $\lambda_x = 0.8$, $\lambda_y = 0.6$

$$\mathbf{k}_3 = AE \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 2 \\ 0.128 & 0.096 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.072 & -0.096 & -0.072 \\ -0.128 & -0.096 & 0.128 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Método de Rigidez en Vigas



Identificación del Elemento y el Nodo



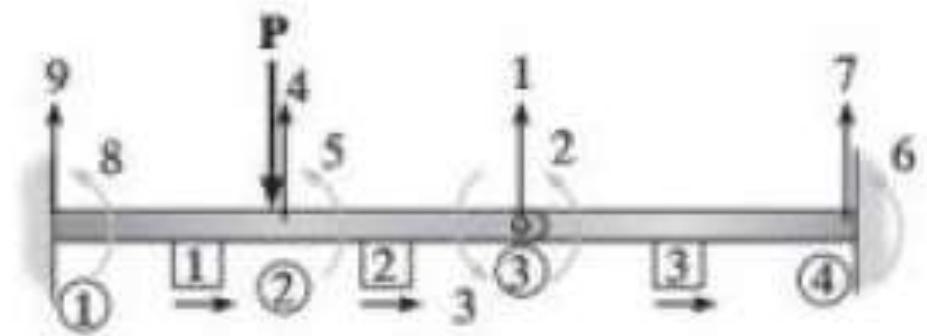
- Cada elemento se especificará por un número encerrado en un cuadrado
- Los nodos se identifican con un número encerrado en un círculo
- Se especifica los nodos lejanos y cercanos mediante una flecha indicada a lo largo del elemento, con la punta de la flecha dirigida hacia el extremo lejano.

Matriz de Rígidez de la Estructura

1. Calcular la matriz local del elemento
2. Transformar matriz de viga-elemento por los desplazamientos a matriz viga- estructura
3. Integrar las matrices a una matriz global de la armadura

Indeterminación Cinemática

- Los grados de libertad no restringidos representan las incógnitas primarias
- Cada nodo tiene dos grados de libertad (un desplazamiento vertical y una rotación) y se identifican con flechas orientadas y giros con en coordenadas globales con números
- Los números más bajos identifican los grados de desplazamientos desconocidos y los más altos los desplazamientos conocidos



Rotaciones en z'

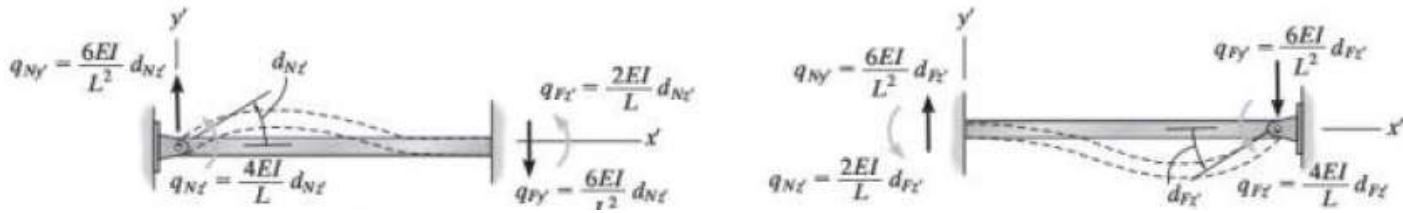
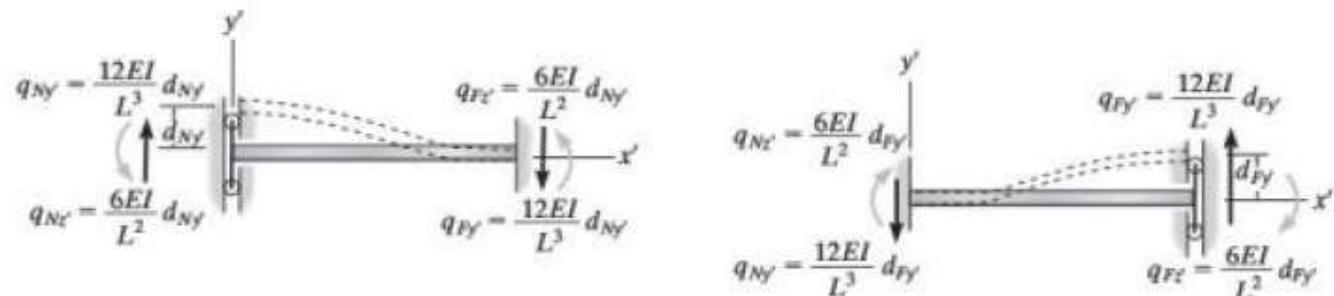
Matriz de Rigidez Viga- Elemento



convención de signos positivos

q_{ny} y q_{fy} son las fuerzas cortantes
 q_{nz} u q_{fz} son los momentos flectores

Desplazamientos en y'



Matriz de Rigidez Viga- Elemento

$$\begin{bmatrix} q_{Ny'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Fy'} \\ q_{Fz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{Ny} \\ d_{Nz} \\ d_{Fy} \\ d_{Fz} \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez de la Estructura

1. Calcular la matriz local del elemento
2. Transformar matriz de viga-elemento por los desplazamientos a matriz viga- estructura
3. Integrar las matrices a una matriz global de la armadura

Aplicación del Método de Rigidez al Análisis de Vigas

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{Q}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \\ \mathbf{D}_k \end{bmatrix}$$

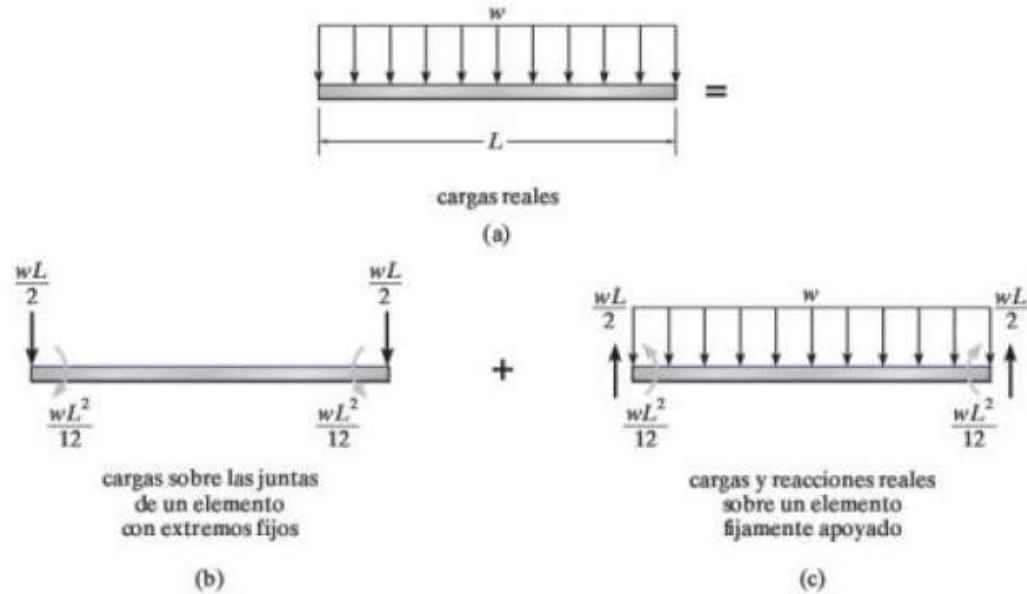
$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$$

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k$$

Fuerzas del elemento

$$\mathbf{q} = \mathbf{kd} + \mathbf{q}_0$$

Cargas Intermedias



- *Se usará el principio de superposición*
- *Sa analiza primero el efecto de la matriz con el elemento libre de carga*
- *Se analizará la viga con las cargas reales aplicadas y se encontrarán sus fuerzas en sus extremos se sumarán ambos resultados para obtener las fuerzas y los momentos en cada extremo de los elementos de ya viga*

Procedimiento de análisis

El siguiente método proporciona un medio para determinar los desplazamientos, las reacciones en los soportes y las cargas internas de los miembros o elementos finitos de una viga estáticamente determinada o estáticamente indeterminada.

Notación

- Divida la viga en elementos finitos e identifique arbitrariamente cada elemento y sus nodos. Use un número escrito dentro de un círculo para un nodo y un número escrito dentro de un cuadro para un miembro. Por lo general, un elemento se extiende entre los puntos de apoyo, los puntos de cargas concentradas y las juntas, o en los puntos donde deben determinarse las cargas internas o los desplazamientos. Además, los valores de E e I para los elementos que deben ser constantes.
- Especifique en forma simbólica los extremos cercano y lejano de cada elemento al dirigir una flecha a lo largo del elemento, con la punta dirigida hacia el extremo lejano.
- En cada punto nodal, especifique numéricamente los números de código y z . En todos los casos, use los *números de código más bajos* para identificar todos los grados de libertad no restringidos, seguidos por el resto de los números más altos para identificar los grados de libertad que están restringidos.
- Con base en el problema, establecen los desplazamientos conocidos D_k y las cargas externas conocidas Q_A . Incluya cualesquier cargas de extremo fijo *invertidas*, si un elemento soporta una carga intermedia.

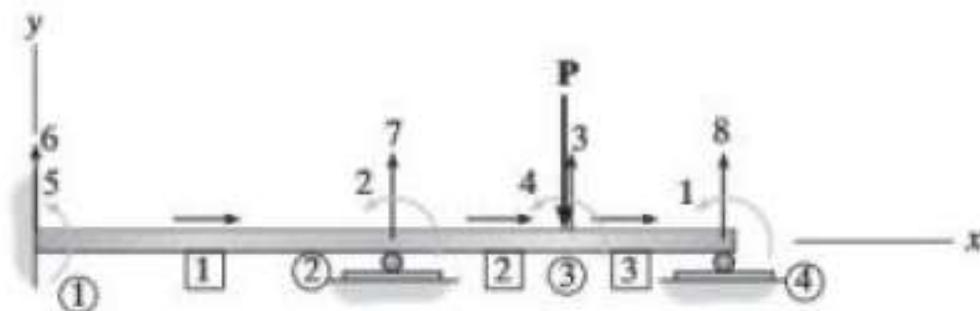
Matriz de rigidez de la estructura

- Aplique la ecuación 15-1 para determinar la matriz de rigidez para cada elemento expresada en coordenadas globales.
- Después de determinar la matriz de rigidez de cada elemento, y cuando las filas y columnas estén identificadas con los números de código adecuados, ensamble las matrices para determinar la matriz de rigidez de la estructura K . Como una comprobación parcial, las matrices de rigidez de todos los elementos y la matriz de rigidez de la estructura deben ser *simétricas*.

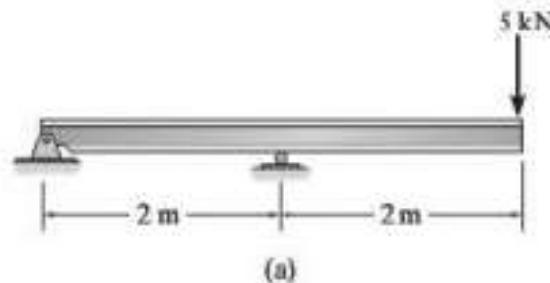
Desplazamientos y cargas

- Parta la ecuación de rigidez de la estructura y realice la multiplicación matricial con el fin de determinar los desplazamientos desconocidos D_x y las reacciones en los soportes desconocidas Q_s .
- La fuerza cortante y el momento interno q en los extremos de cada elemento de viga pueden determinarse a partir de la ecuación 15-5, tomando en cuenta las cargas de extremo fijo adicionales.

Procedimiento de Análisis



Determine las reacciones en los soportes de la viga que se muestra en la figura 15-8a. EI es constante.

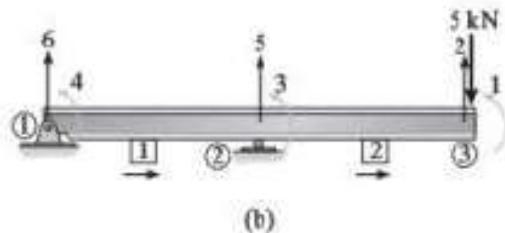


SOLUCIÓN

Notación. La viga tiene dos elementos y tres nodos, que se identifican en la figura 15-8b. Los números de código del 1 al 6 se indican de forma que los *números más bajos* 1-4 *identifican los grados de libertad no restringidos*.

Las matrices de la carga y el desplazamiento conocidos son

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad \mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$



Desplazamientos y rotaciones

$$\mathbf{k}_1 = EI \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 3 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{matrix} \quad \mathbf{k}_2 = EI \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Desplazamientos y cargas. Ahora es posible ensamblar estos elementos en la matriz de rigidez de la estructura. Por ejemplo, el elemento $\mathbf{K}_{11} = 0 + 2 = 2$, $\mathbf{K}_{55} = 1.5 + 1.5 = 3$, etcétera. Por lo tanto,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & -1.5 & 1 & 0 & 1.5 & 0 \\ -1.5 & 1.5 & -1.5 & 0 & -1.5 & 0 \\ 1 & -1.5 & 4 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & -1.5 & 0 & -1.5 & 3 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

$$0 = 2D_1 - 1.5D_2 + D_3 + 0$$

$$-\frac{5}{EI} = -1.5D_1 + 1.5D_2 - 1.5D_3 + 0$$

$$0 = D_1 - 1.5D_2 + 4D_3 + D_4$$

$$0 = 0 + 0 + D_3 + 2D_4$$

Reacciones de la viga

$$D_1 = -\frac{16.67}{EI}$$

$$D_2 = -\frac{26.67}{EI}$$

$$D_3 = -\frac{6.67}{EI}$$

$$D_4 = \frac{3.33}{EI}$$

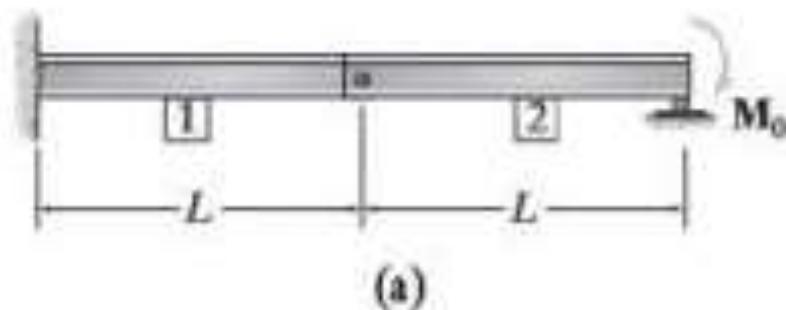
$$Q_5 = 1.5EI \left(-\frac{16.67}{EI} \right) - 1.5EI \left(-\frac{26.67}{EI} \right) + 0 - 1.5EI \left(\frac{3.33}{EI} \right)$$

$$= 10 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$Q_6 = 0 + 0 + 1.5EI \left(-\frac{6.67}{EI} \right) + 1.5EI \left(\frac{3.33}{EI} \right)$$

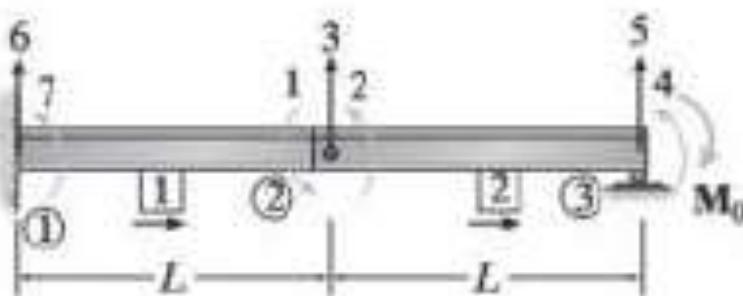
$$= -5 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Determine la fuerza cortante y el momento en el miembro 1 de la viga compuesta que se muestra en la figura 15-9a. EI es constante.



SOLUCIÓN

Notación. Cuando la viga se deforma, el pasador interno permitirá una sola deflexión, sin embargo, la pendiente de cada miembro conectado será diferente. Además, se presentará una pendiente en el rodillo. Estos cuatro grados de libertad desconocidos se etiquetan con los números de código 1, 2, 3 y 4, figura 15-9b.



$$Q_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad D_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 7 \end{matrix}$$

Matrices de rigidez de los miembros. Si se aplica la ecuación 15-1 a cada miembro, de acuerdo con los números de código que se muestran en la figura 15-9b, se tiene

$$k_1 = EI \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 1 \\ \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$$

$$k_2 = EI \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{matrix}$$

Desplazamientos y cargas. La matriz de rigidez de la estructura se forma al ensamblar los elementos de las matrices de rigidez de los miembros. Si se aplica la ecuación matricial de la estructura, resulta que

$$Q = KD$$

$$\begin{array}{c|ccccc|cc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ \hline 1 & 0 & & & & & & & D_1 & 1 \\ 2 & 0 & & & & & & & D_2 & 2 \\ 3 & 0 & & & & & & & D_3 & 3 \\ 4 & -M_0 & & & & & & & D_4 & 4 \\ \hline 5 & Q_5 & & & & & & & 0 & 5 \\ 6 & Q_6 & & & & & & & 0 & 6 \\ 7 & Q_7 & & & & & & & 0 & 7 \end{array} = EI \begin{array}{c|ccccc|cc|c} & \frac{4}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & D_1 & 1 \\ & 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 & D_2 & 2 \\ & -\frac{6}{L^2} & \frac{6}{L^2} & \frac{24}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & D_3 & 3 \\ & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 & D_4 & 4 \\ \hline & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 5 \\ & \frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & 0 & 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & 6 \\ & \frac{2}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c|ccccc|c|c}
1 & 0 & \frac{4}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & D_1 & 1 \\
2 & 0 & 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 & D_2 & 2 \\
3 & 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{6}{L^2} & \frac{24}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & D_3 & 3 \\
4 & -M_0 & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 & D_4 & 4 \\
\hline
5 & Q_5 & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 5 \\
6 & Q_6 & \frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & 0 & 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & 6 \\
7 & Q_7 & \frac{2}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & 7
\end{array} & = EI
\end{array}$$

Al multiplicar las cuatro primeras filas para determinar el desplazamiento se obtiene

$$0 = \frac{4}{L}D_1 - \frac{6}{L^2}D_3$$

$$0 = \frac{4}{L}D_2 + \frac{6}{L^2}D_3 + \frac{2}{L}D_4$$

$$0 = -\frac{6}{L^2}D_1 + \frac{6}{L^2}D_2 + \frac{24}{L^3}D_3 + \frac{6}{L^2}D_4$$

$$-M_0 = \frac{2}{L}D_2 + \frac{6}{L^2}D_3 + \frac{4}{L}D_4$$

$$D_1 = \frac{M_0 L}{2EI}$$

$$D_2 = -\frac{M_0 L}{6EI}$$

$$D_3 = \frac{M_0 L^2}{3EI}$$

$$D_4 = -\frac{2M_0 L}{3EI}$$

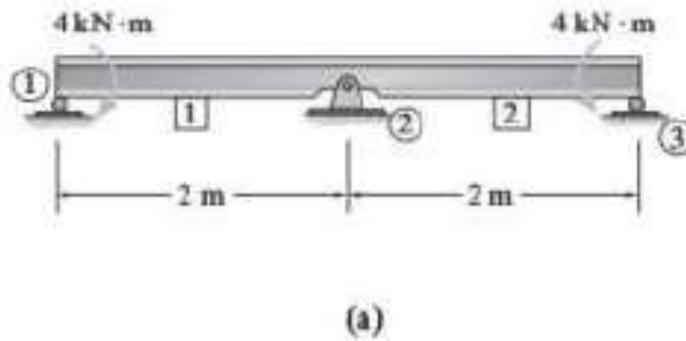
Con base en estos resultados, la reacción Q_5 se obtiene de la multiplicación de la quinta fila,

$$Q_5 = -\frac{6EI}{L^2} \left(-\frac{M_0 L}{6EI} \right) - \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{M_0 L^2}{3EI} \right) - \frac{6EI}{L^2} \left(-\frac{2M_0 L}{3EI} \right)$$

$$Q_5 = \frac{M_0}{L} \quad \text{Resp.}$$

Este resultado puede comprobarse fácilmente si se aplica la estática al miembro [2].

La viga de la figura 15-10a está sometida a los dos momentos de par. Si el soporte central ② se asienta 1.5 mm, determine las reacciones en los soportes. Suponga que los soportes de rodillo en ① y ③ pueden jalar o empujar la viga. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$ y que $I = 22 (10^{-6}) \text{ m}^4$.

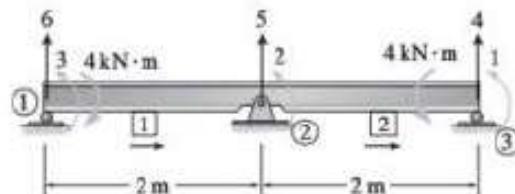


(a)

SOLUCIÓN

Notación. La viga tiene dos elementos y tres grados de libertad desconocidos. Éstos se etiquetan con los números de código más bajo, figura 15-10b. Aquí las matrices de carga y desplazamiento conocidos son

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad \mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0015 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$



Matrices de rigidez de los miembros. Las matrices de rigidez de los miembros se determinan mediante la ecuación 15-1, de acuerdo con los números de código y las direcciones de los miembros que se muestran en la figura 15-10b. Se tiene,

$$\mathbf{k}_1 = EI \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 & 2 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = EI \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{matrix}$$

Desplazamientos y cargas. Si se ensambla la matriz de rigidez de la estructura y se escribe la ecuación de rigidez de la estructura, resulta

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1.5 & 1.5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1.5 & 1.5 \\ -1.5 & -1.5 & 0 & 1.5 & -1.5 & 0 \\ 1.5 & 0 & -1.5 & -1.5 & 3 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ -0.0015 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1.5 & 1.5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1.5 & 1.5 \\ -1.5 & -1.5 & 0 & 1.5 & -1.5 & 0 \\ 1.5 & 0 & -1.5 & -1.5 & 3 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ -0.0015 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver los desplazamientos desconocidos,

$$\frac{4}{EI} = 2D_1 + D_2 + 0D_3 - 1.5(0) + 15(-0.0015) + 0$$

$$0 = 1D_1 + 4D_2 + 1D_3 - 1.5(0) + 0 + 0$$

$$\frac{-4}{EI} = 0D_1 + 1D_2 + 2D_3 + 0 - 1.5(-0.0015) + 0$$

Por lo tanto, con base en estos resultados, las reacciones en los soportes son

$$Q_4 = 200(10^6)22(10^{-6})[-1.5(0.001580) - 1.5(0) + 0 + 1.5(0) - 1.5(-0.0015) + 0] = -0.525 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

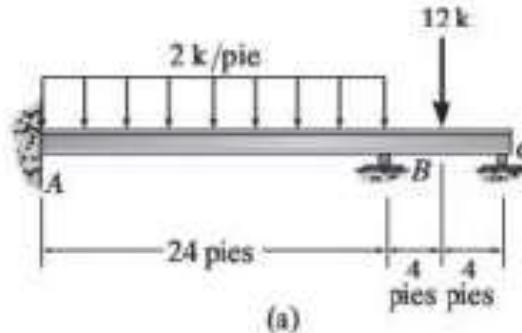
$$Q_5 = 200(10^6)22(10^{-6})[1.5(0.001580) + 0 - 1.5(-0.001580) - 1.5(0) + 3(-0.0015) - 1.5(0)] = 1.05 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$Q_6 = 200(10^6)22(10^{-6})[0 + 1.5(0) + 1.5(-0.001580) + 0 - 1.5(-0.0015) + 1.5(0)] = -0.525 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Si se sustituye $EI = 200(10^6)(22)(10^6)$ y se resuelve,

$$D_1 = 0.001580 \text{ rad}, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = -0.001580 \text{ rad}$$

Determine el momento desarrollado en el soporte A de la viga que se muestra en la figura 15-11a. Suponga que los soportes de rodillo pueden jalar o empujar la viga. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi y que $I = 510$ pulg 4 .

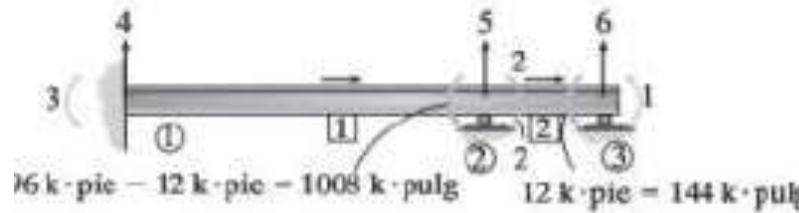


SOLUCIÓN

Notación. Aquí, la viga tiene dos grados de libertad no restringidos, identificados por los números de código 1 y 2.

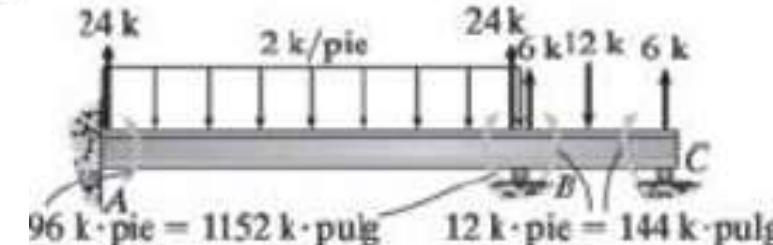
El análisis matricial requiere que la carga externa se aplique en los nodos y, por lo tanto, las cargas distribuidas y concentradas se reemplazan por sus momentos de extremo fijo equivalentes, los cuales se determinan a partir de la tabla que aparece en el interior de la contraportada. (Vea el ejemplo 11.2.) Observe que no hay cargas externas colocadas en ① y no hay fuerzas externas verticales ubicadas en ②, puesto que las reacciones en los números de código 3, 4 y 5 deben ser desconocidos en la matriz de carga. Si se usa superposición, los resultados del análisis matricial para las cargas de la figura 15-11b se modificarán posteriormente con las cargas de la figura 15-11c. A partir de la figura 15-11b, las matrices del desplazamiento conocido y la carga conocida son

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 144 \\ 1008 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$



viga que se analizará por el método de la rigidez

(b)



viga sujeta a la carga real y a las reacciones fijamente apoyadas

(c)

Matrices de rigidez de los miembros. Cada una de las dos matrices de rigidez de los miembros se determina a partir de la ecuación 15-1.

Elemento 1:

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12(29)(10^3)(510)}{[24(12)]^3} = 7.430 \quad \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 7.430 & 1069.9 & -7.430 & 1069.9 \\ 1069.9 & 205417 & -1069.9 & 102708 \\ -7.430 & -1069.9 & 7.430 & -1069.9 \\ 1069.9 & 102708 & -1069.9 & 205417 \end{bmatrix}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6(29)(10^3)(510)}{[24(12)]^2} = 1069.9$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(29)(10^3)(510)}{24(12)} = 205417$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(29)(10^3)(510)}{24(12)} = 102708$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12(29)(10^3)(510)}{[8(12)]^3} = 200.602$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6(29)(10^3)(510)}{[8(12)]^2} = 9628.91$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(29)(10^3)(510)}{8(12)} = 616\,250$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(29)(10^3)(510)}{8(12)} = 308\,125$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 & 1 \\ 200.602 & 9628.91 & -200.602 & 9628.91 \\ 9628.91 & 616\,250 & -9628.91 & 308\,125 \\ -200.602 & -9628.91 & 200.602 & -9628.91 \\ 9628.91 & 308\,125 & -9628.91 & 616\,250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos y cargas. Se requiere

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{D}$$

$$\begin{bmatrix} 144 \\ 1008 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 616\,250 & 308\,125 & 0 & 0 & 9628.91 & -9628.91 \\ 308\,125 & 821\,667 & 102\,708 & 1069.9 & 8559.01 & -9628.91 \\ 0 & 102\,708 & 205\,417 & 1069.9 & -1069.9 & 0 \\ 0 & 1069.9 & 1069.9 & 7.430 & -7.430 & 0 \\ 9628.91 & 8559.01 & -1069.9 & -7.430 & 208.03 & -200.602 \\ -9628.91 & -9628.91 & 0 & 0 & -200.602 & 200.602 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo de la manera usual,

$$144 = 616\,250D_1 + 308\,125D_2$$

$$1008 = 308\,125D_1 + 821\,667D_2$$

$$D_1 = -0.4673(10^{-3}) \text{ pulg}$$

$$D_2 = 1.40203(10^{-3}) \text{ pulg}$$

Por lo tanto,

$$Q_3 = 0 + 102\,708(1.40203)(10^{-3}) = 144 \text{ k} \cdot \text{pulg} = 12 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

El momento real en *A* debe incluir la reacción fijamente apoyada de +96 k · pie que se muestra en la figura 15-11c, junto con el resultado calculado para *Q*₃. Por tanto,

$$M_{AB} = 12 \text{ k} \cdot \text{pie} + 96 \text{ k} \cdot \text{pie} = 108 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

Aunque no es necesario aquí, puede determinarse el momento interno y la fuerza corte interna en *B* al considerar, por ejemplo, el miembro 1 y el nodo 2, figura 15-11b. El resultado requiere expandir

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{d} + (\mathbf{q}_0)_1$$

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 7.430 & 1069.9 & -7.430 & 1069.9 \\ 1069.9 & 205\,417 & -1069.9 & 102\,708 \\ -7.430 & -1069.9 & 7.430 & -1069.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.40203 \end{bmatrix} (10^{-3}) + \begin{bmatrix} 24 \\ 1152 \\ 24 \\ -1152 \end{bmatrix}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12(29)(10^3)(510)}{[8(12)]^3} = 200.602$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6(29)(10^3)(510)}{[8(12)]^2} = 9628.91$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(29)(10^3)(510)}{8(12)} = 616\,250$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(29)(10^3)(510)}{8(12)} = 308\,125$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 & 1 \\ 200.602 & 9628.91 & -200.602 & 9628.91 \\ 9628.91 & 616\,250 & -9628.91 & 308\,125 \\ -200.602 & -9628.91 & 200.602 & -9628.91 \\ 9628.91 & 308\,125 & -9628.91 & 616\,250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos y cargas. Se requiere

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{D}$$

$$\begin{bmatrix} 144 \\ 1008 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 616\,250 & 308\,125 & 0 & 0 & 9628.91 & -9628.91 \\ 308\,125 & 821\,667 & 102\,708 & 1069.9 & 8559.01 & -9628.91 \\ 0 & 102\,708 & 205\,417 & 1069.9 & -1069.9 & 0 \\ 0 & 1069.9 & 1069.9 & 7.430 & -7.430 & 0 \\ 9628.91 & 8559.01 & -1069.9 & -7.430 & 208.03 & -200.602 \\ -9628.91 & -9628.91 & 0 & 0 & -200.602 & 200.602 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo de la manera usual,

$$144 = 616\,250D_1 + 308\,125D_2$$

$$1008 = 308\,125D_1 + 821\,667D_2$$

$$D_1 = -0.4673(10^{-3}) \text{ pulg}$$

$$D_2 = 1.40203(10^{-3}) \text{ pulg}$$

Por lo tanto,

$$Q_3 = 0 + 102\,708(1.40203)(10^{-3}) = 144 \text{ k} \cdot \text{pulg} = 12 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

El momento real en *A* debe incluir la reacción fijamente apoyada de +96 k · pie que se muestra en la figura 15-11c, junto con el resultado calculado para *Q*₃. Por tanto,

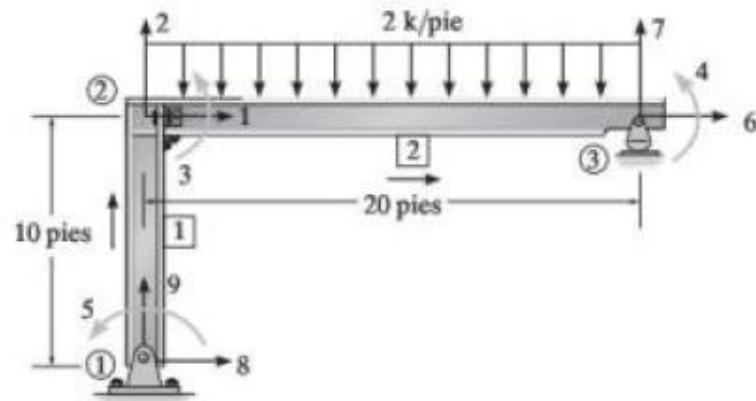
$$M_{AB} = 12 \text{ k} \cdot \text{pie} + 96 \text{ k} \cdot \text{pie} = 108 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

Aunque no es necesario aquí, puede determinarse el momento interno y la fuerza corte interna en *B* al considerar, por ejemplo, el miembro 1 y el nodo 2, figura 15-11b. El resultado requiere expandir

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{d} + (\mathbf{q}_0)_1$$

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 7.430 & 1069.9 & -7.430 & 1069.9 \\ 1069.9 & 205\,417 & -1069.9 & 102\,708 \\ -7.430 & -1069.9 & 7.430 & -1069.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.40203 \end{bmatrix} (10^{-3}) + \begin{bmatrix} 24 \\ 1152 \\ 24 \\ -1152 \end{bmatrix}$$

Análisis de Marcos Planos Método de Rigidez



Identificación del Elemento y el Nodo

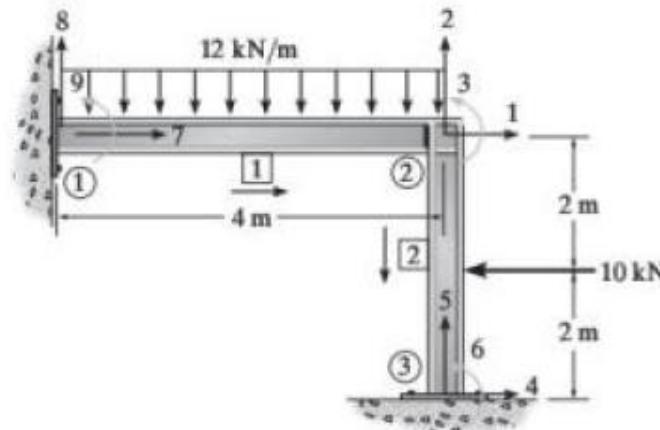
- Cada elemento se especificará por un número encerrado en un cuadrado
- Los nodos se identifican con un número encerrado en un círculo
- Se especifica los nodos lejanos y cercanos mediante una flecha indicada a lo largo del elemento, con la punta de la flecha dirigida hacia el extremo lejano.

Matriz de Rigididad de la Estructura

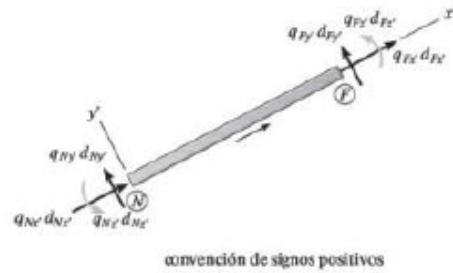
1. Calcular la matriz local del elemento
2. Transformar matriz de marco-elemento por los desplazamientos a matriz viga- estructura
3. Integrar las matrices a una matriz global del marco

Indeterminación Cinemática

- Los grados de libertad no restringidos representan las incógnitas primarias
- Cada nodo tiene tres grados de libertad (un desplazamiento vertical, uno horizontal y uno de rotación) y se identifican con flechas orientadas y giros con en coordenadas globales con números
- Los números más bajos identifican los grados de desplazamientos desconocidos y los más altos los desplazamientos conocidos



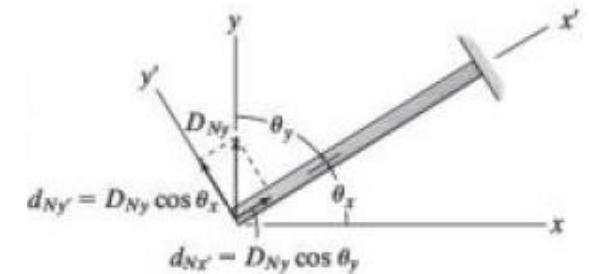
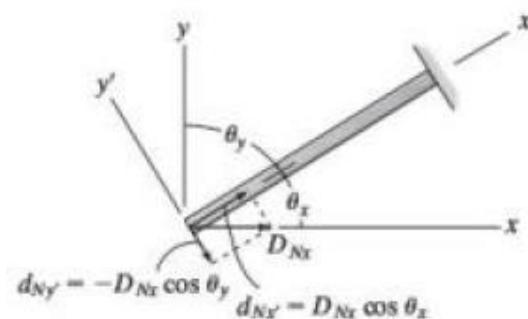
Matriz de Rígidez del Marco-Elemento



$$\begin{bmatrix} q_{Nz'} \\ q_{Ny} \\ q_{Nx} \\ q_{Fz'} \\ q_{Fy} \\ q_{Fx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{Nz'} \\ d_{Ny} \\ d_{Nx} \\ d_{Fz'} \\ d_{Fy} \\ d_{Fx} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{d}$$

Matriz de Rígidez de Transformación de Desplazamiento



$$d_{Nx'} = D_{Nx} \cos \theta_x \quad d_{Ny'} = -D_{Nx} \cos \theta_y$$

$$d_{Nx'} = D_{Ny} \cos \theta_y \quad d_{Ny'} = D_{Ny} \cos \theta_x$$

$$d_{Nz'} = D_{Nz}$$

Analizando nodo lejano

$$d_{Fx'} = D_{Fx} \cos \theta_x \quad d_{Fy'} = -D_{Fx} \cos \theta_y$$

$$d_{Fx'} = D_{Fy} \cos \theta_y \quad d_{Fy'} = D_{Fy} \cos \theta_x$$

$$d_{Fz'} = D_{Fz}$$

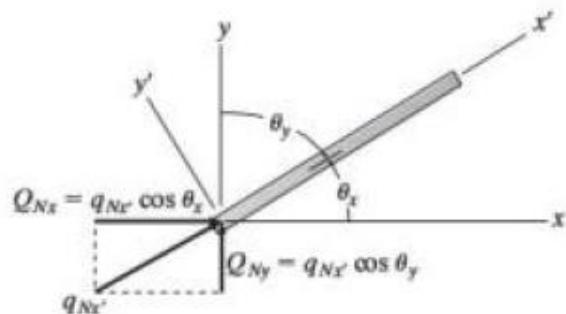
**“T”, Matriz de transformación
de desplazamiento del elemento**

$$\begin{bmatrix} d_{Nx'} \\ d_{Ny'} \\ d_{Nz'} \\ d_{Fx'} \\ d_{Fy'} \\ d_{Fz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Nz} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \\ D_{Fz} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{D}$$

$$\lambda_x = \cos \theta_x, \lambda_y = \cos \theta_y$$

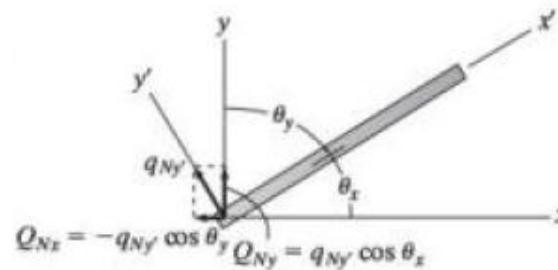
Matriz de Rígidez de Transformación de Fuerzas



$$Q_{Nx} = q_{Nx'} \cos \theta_x \quad Q_{Ny} = q_{Nx'} \cos \theta_y$$

$$Q_{Nx} = -q_{Ny'} \cos \theta_y \quad Q_{Ny} = q_{Ny'} \cos \theta_x$$

$$Q_{Nz} = q_{Nz'}$$



$$Q_{Nx} = -q_{Ny'} \cos \theta_x \quad Q_{Ny} = q_{Ny'} \cos \theta_x$$

Analizando nodo lejano

$$Q_{Fx} = q_{Fx'} \cos \theta_x \quad Q_{Fy} = q_{Fx'} \cos \theta_y$$

$$Q_{Fx} = -q_{Fy} \cos \theta_y \quad Q_{Fy} = q_{Fy'} \cos \theta_x$$

$$Q_{Fz} = q_{Fz'}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}$$

“ \mathbf{T}^T ” Matriz de transformación de fuerzas del elemento

$$\begin{bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Nz} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \\ Q_{Fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & -\lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & -\lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{Nx'} \\ q_{Ny'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Fx'} \\ q_{Fy'} \\ q_{Fz'} \end{bmatrix}$$

Matriz de Rígidez Global del Elemento

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{D}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{d} \quad \mathbf{y} \mathbf{d} = \mathbf{T} \mathbf{D}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k} \mathbf{D}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{D}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_z & F_x & F_y & F_z \\ \left(\frac{AE}{L} \lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y^2 \right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y & -\left(\frac{AE}{L} \lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y^2 \right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y \\ \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & \left(\frac{AE}{L} \lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_x^2 \right) & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & -\left(\frac{AE}{L} \lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_x^2 \right) & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \lambda_y & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_x & \frac{2EI}{L} \\ & & & & & \\ \left(\frac{AE}{L} \lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y^2 \right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & \frac{6EI}{L^2} \lambda_y & \left(\frac{AE}{L} \lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y^2 \right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & \frac{6EI}{L^2} \lambda_y \\ -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & -\left(\frac{AE}{L} \lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_x^2 \right) & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_x & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \lambda_x \lambda_y & \left(\frac{AE}{L} \lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_x^2 \right) & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \lambda_y & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_x & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{array}$$

- El ensamblaje de cada matriz global marco-elemento se hace de la misma forma que en vigas
- Se utiliza la misma ecuación matricial fuerza- desplazamiento que en vigas y armaduras
- Los desplazamientos y fuerzas desconocidas se encontrarán de forma matricial siguiendo el mismo procedimiento que en las vigas

Procedimiento de análisis

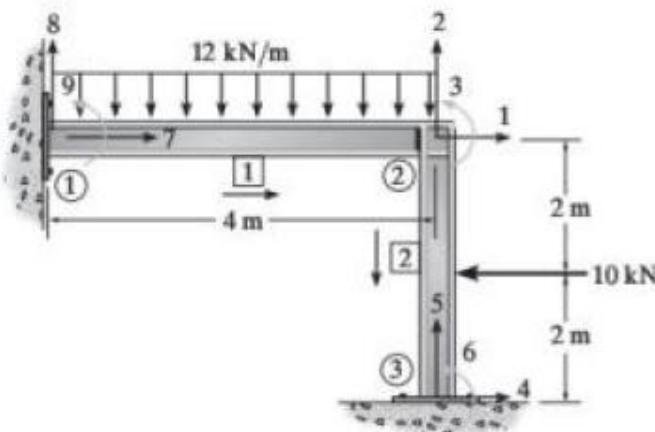
El siguiente método proporciona un medio para encontrar los desplazamientos, las reacciones en los soportes y las cargas internas de los elementos que forman marcos estáticamente determinados e indeterminados.

Notación

- Divida la estructura en elementos finitos e identifique arbitrariamente cada elemento y sus nodos. Por lo general, los elementos se extienden entre puntos de apoyo, puntos donde se aplican cargas concentradas, esquinas o juntas o entre los puntos donde deben determinarse las cargas internas o los desplazamientos.
- Establezca el sistema global de coordenadas x, y, z , por lo general situado convenientemente con el origen en un punto nodal sobre uno de los elementos y los ejes ubicados de modo que todos los nodos tengan coordenadas positivas.
- En cada punto nodal del marco, especifique numéricamente los tres componentes de codificación x, y, z . En todos los casos use los *números de código más bajos* para identificar todos los *grados de libertad no restringidos*, seguidos por el resto de los *números de código más altos* para identificar los *grados de libertad restringidos*.
- Con base en el problema, establezca los desplazamientos conocidos D_A y las cargas externas conocidas Q_k . Al definir Q_k , asegúrese de incluir cualquier carga de extremo fijo *invertida* si un elemento soporta una carga intermedia.

Matriz de rigidez de la estructura

- Aplique la ecuación 16-10 para determinar la matriz de rigidez para cada elemento expresada en coordenadas globales. En particular, los cosenos directores λ_x y λ_y se determinan a partir de las coordenadas x, y de los extremos del elemento, ecuaciones 14-5 y 14-6.
- Después de escribir cada matriz de rigidez de los elementos, y luego de identificar las seis filas y columnas con los números de código cercanos y lejanos, las matrices se unen para formar la matriz de rigidez de la estructura K . Como una comprobación parcial, todas las matrices de rigidez de los elementos y de la estructura deben ser *simétricas*.



Desplazamientos y cargas

- Haga una partición de la matriz de rigidez, como lo indica la ecuación 14-18. Una expansión posterior conduce a

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_r$$

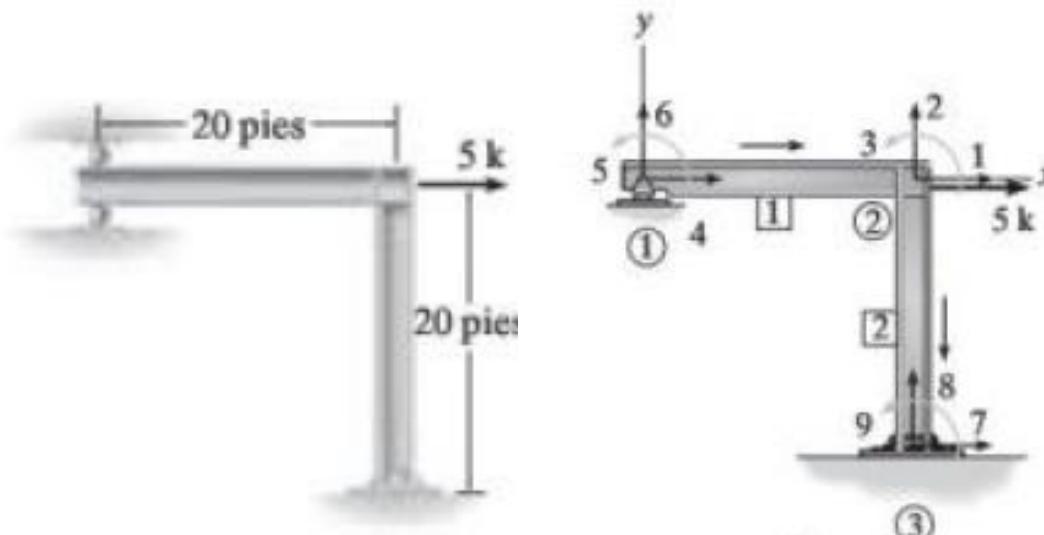
$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_r$$

Los desplazamientos desconocidos \mathbf{D}_u se determinan a partir de la primera de estas ecuaciones. Con base en estos valores, las reacciones en los soportes \mathbf{Q}_u se calculan a partir de la segunda ecuación. Por último, las cargas internas \mathbf{q} en los extremos de los elementos pueden calcularse a partir de la ecuación 16-7, es decir,

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D}$$

Si los resultados de cualesquier incógnitas se calculan como cantidades negativas, esto indica que actúan en las direcciones coordinadas negativas.

Determine las cargas en las juntas de la estructura de dos elementos que se muestra en la figura 16-4a. Considere que $I = 500 \text{ pulg}^4$, $A = 10 \text{ pulg}^2$, y $E = 29(10^3) \text{ ksi}$ para ambos elementos.



SOLUCIÓN

Notación. Por inspección, el marco tiene dos elementos y tres nodos, que se identifican como se muestra en la figura 16-4b. El origen del sistema global de coordenadas se encuentra en ①. Los números de código en los nodos se especifican *numerando en primer lugar los grados de libertad no restringidos*. A partir de las restricciones en ① y ③, y de la carga aplicada, se tiene

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \quad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura. Los siguientes términos son comunes a ambas matrices de rigidez de los elementos:

$$\frac{AE}{L} = \frac{10[29(10^3)]}{20(12)} = 1208.3 \text{ k/pulg}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12[29(10^3)(500)]}{[20(12)]^3} = 12.6 \text{ k/pulg}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6[29(10^3)(500)]}{[20(12)]^2} = 1510.4 \text{ k}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4[29(10^3)(500)]}{20(12)} = 241.7(10^3) \text{ k-pulg}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2[29(10^3)(500)]}{20(12)} = 120.83(10^3) \text{ k-pulg}$$

Elemento 1:

$$\lambda_x = \frac{20 - 0}{20} = 1 \quad \lambda_y = \frac{0 - 0}{20} = 0$$

Al sustituir los datos en la ecuación 16-10, se tiene

$$\mathbf{k}_1 = \left[\begin{array}{cccccc} 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1208.3 & 0 & 0 & -1208.3 & 0 & 0 \\ 0 & 12.6 & 1510.4 & 0 & -12.6 & 1510.4 \\ 0 & 1510.4 & 241.7(10^3) & 0 & -1510.4 & 120.83(10^3) \\ -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 & 0 \\ 0 & -12.6 & -1510.4 & 0 & 12.6 & -1510.4 \\ 0 & 1510.4 & 120.83(10^3) & 0 & -1510.4 & 241.7(10^3) \end{array} \right] \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Las filas y las columnas de esta matriz de 6×6 se identifican por los tres números de código x , y , z , primero en el extremo cercano y después en el extremo lejano, es decir, 4, 6, 5, 1, 2, 3, respectivamente, figura 16-4b. Esto se hace para el ensamble posterior de los elementos.

Elemento 2:

$$\lambda_x = \frac{20 - 20}{20} = 0 \quad \lambda_y = \frac{-20 - 0}{20} = -1$$

Al sustituir los datos en la ecuación 16-10 resulta

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 12.6 & 0 & 1510.4 & -12.6 & 0 & 1510.4 \\ 0 & 1208.3 & 0 & 0 & -1208.3 & 0 \\ 1510.4 & 0 & 241.7(10^3) & -1510.4 & 0 & 120.83(10^3) \\ -12.6 & 0 & -1510.4 & 12.6 & 0 & -1510.4 \\ 0 & -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 \\ 1510.4 & 0 & 120.83(10^3) & -1510.4 & 0 & 241.7(10^3) \end{bmatrix}$$

Como es usual, la identificación de columnas y filas se hace con referencia a los tres números de código en la secuencia x, y, z para los extremos cercano y lejano, respectivamente; es decir, 1, 2, 3 y después 7, 8, 9, figura 16-4b.

La matriz de rigidez de la estructura se determina al ensamblar \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 . El resultado, que se muestra partido como $\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{D}$, es

Desplazamientos y cargas. Se expande para determinar los desplazamientos resulta

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1220.9 & 0 & 1510.4 & -1208.3 & 0 \\ 0 & 1220.9 & -1510.4 & 0 & -1510.4 \\ 1510.4 & -1510.4 & 483.3(10^3) & 0 & 120.83(10^3) \\ -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 \\ 0 & -1510.4 & 120.83(10^3) & 0 & 241.7(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.696 \text{ pulg} \\ -1.55(10^{-3}) \text{ pulg} \\ -2.488(10^{-3}) \text{ rad} \\ 0.696 \text{ pulg} \\ 1.234(10^{-3}) \text{ rad} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1220.9 & 0 & 1510.4 & -1208.3 & 0 & 0 & -12.6 & 0 & 1510.4 \\ 0 & 1220.9 & -1510.4 & 0 & -1510.4 & -12.6 & 0 & -1208.3 & 0 \\ 1510.4 & -1510.4 & 483.3(10^3) & 0 & 120.83(10^3) & 1510.4 & -1510.4 & 0 & 120.83(10^3) \\ -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1510.4 & 120.83(10^3) & 0 & 241.7(10^3) & 1510.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12.6 & 1510.4 & 0 & 1510.4 & 12.6 & 0 & 0 & 0 \\ -12.6 & 0 & -1510.4 & 0 & 0 & 0 & 12.6 & 0 & -1510.4 \\ 0 & -1208.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 \\ 1510.4 & 0 & 120.83(10^3) & 0 & 0 & 0 & -1510.4 & 0 & 241.7(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Con base en estos resultados, las reacciones en los soportes se determinan a partir de la ecuación (1) de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -12.6 & 1510.4 & 0 & 1510.4 \\ -12.6 & 0 & -1510.4 & 0 & 0 \\ 0 & -1208.3 & 0 & 0 & 0 \\ 1510.4 & 0 & 120.83(10^3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.696 \\ -1.55(10^{-3}) \\ -2.488(10^{-3}) \\ 0.696 \\ 1.234(10^{-3}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.87 \text{ k} \\ -5.00 \text{ k} \\ 1.87 \text{ k} \\ 750 \text{ k} \cdot \text{pulg} \end{bmatrix} \text{ Resp.}$$

Las cargas internas en el nodo ② pueden determinarse al aplicar la ecuación 16-7 en el elemento 1. Aquí \mathbf{k}_1' se define mediante la ecuación 16-1 y \mathbf{T}_1 por medio de la ecuación 16-3. Así,

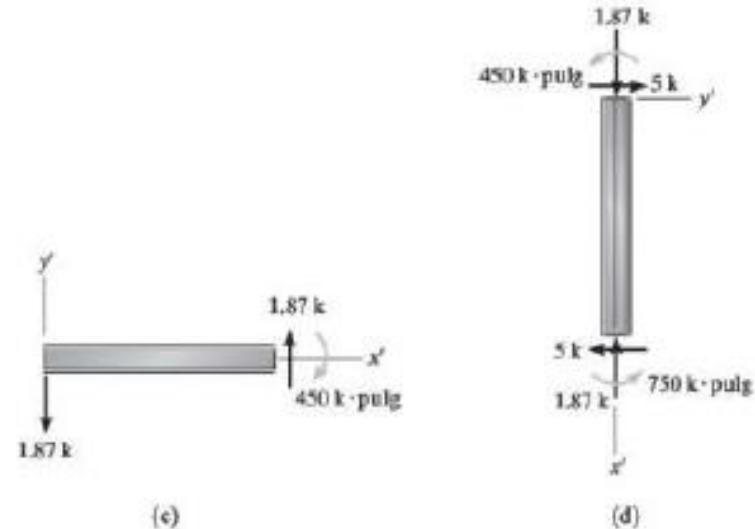
$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{k}_1 \mathbf{T}_1 \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1208.3 & 0 & 0 & -1208.3 & 0 & 0 \\ 0 & 12.6 & 1510.4 & 0 & -12.6 & 1510.4 \\ 0 & 1510.4 & 241.7(10^3) & 0 & -1510.4 & 120.83(10^3) \\ -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 & 0 \\ 0 & -12.6 & -1510.4 & 0 & 12.6 & -1510.4 \\ 0 & 1510.4 & 120.83(10^3) & 0 & -1510.4 & 241.7(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.696 \\ 0 \\ 1.234(10^{-3}) \\ 0.696 \\ -1.55(10^{-3}) \\ -2.488(10^{-3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Tenga en cuenta la disposición adecuada de los elementos en las matrices como lo indican los números de código a lo largo de las columnas y las filas. Al resolver se obtiene

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_6 \\ q_5 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.87 \text{ k} \\ 0 \\ 0 \\ 1.87 \text{ k} \\ -450 \text{ k} \cdot \text{pulg} \end{bmatrix} \text{ Resp.}$$

Los resultados anteriores se muestran en la figura 16-4c. Las direcciones de estos vectores están en concordancia con las direcciones positivas definidas en la figura 16-1. Además, el origen de los ejes locales x', y', z' se encuentra en el extremo cercano del elemento. De manera similar, el diagrama de cuerpo libre del elemento 2 es como se muestra en la figura 16-4d.

Los resultados anteriores se muestran en la figura 16-4c. Las direcciones de estos vectores están en concordancia con las direcciones positivas definidas en la figura 16-1. Además, el origen de los ejes locales x', y', z' se encuentra en el extremo cercano del elemento. De manera similar, el diagrama de cuerpo libre del elemento 2 es como se muestra en la figura 16-4d.



16-1. Determine la matriz de rigidez de la estructura **K** para el marco. Suponga que ① y ③ están fijos. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 300(10^6) \text{ mm}^4$ y $A = 10(10^3) \text{ mm}^2$ para cada elemento.

16-2. Determine las reacciones en los soportes fijos ① y ③. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 300(10^6) \text{ mm}^4$ y $A = 10(10^3) \text{ mm}^2$ para cada elemento.

The origin of the global coordinate system will be set at joint ①.

For member [1] and [2], $L = 4\text{m}$

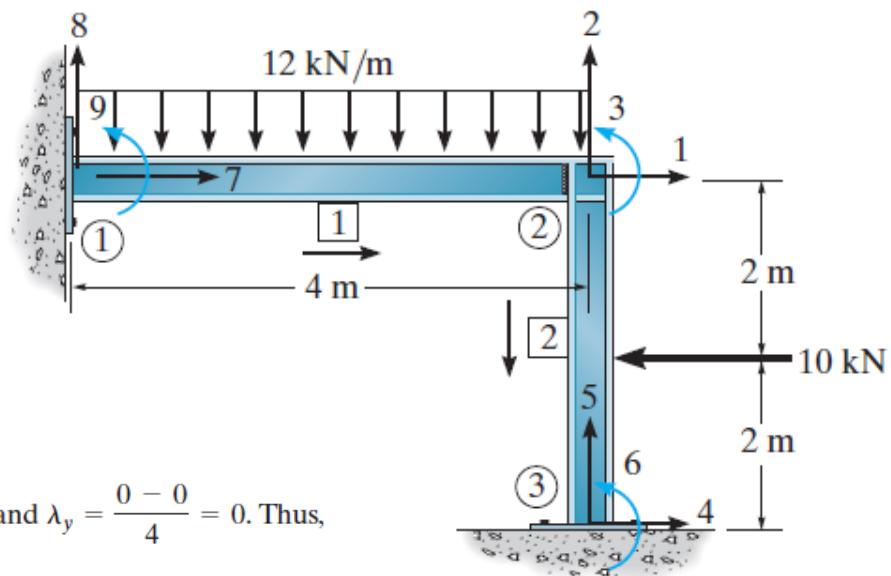
$$\frac{AE}{L} = \frac{0.01[200(10^9)]}{4} = 500(10^6) \text{ N/m}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12[200(10^9)][300(10^{-6})]}{4^3} = 11.25(10^6) \text{ N/m}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6[200(10^9)][300(10^{-6})]}{4^2} = 22.5(10^6) \text{ N}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4[200(10^9)][300(10^{-6})]}{4} = 60(10^6) \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2[200(10^9)][300(10^{-6})]}{4} = 30(10^6) \text{ N}\cdot\text{m}$$



For member [1], $\lambda_x = \frac{4 - 0}{4} = 1$ and $\lambda_y = \frac{0 - 0}{4} = 0$. Thus,

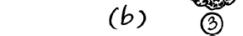
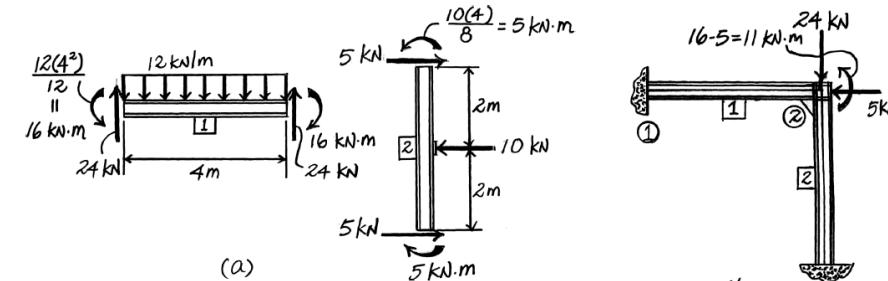
$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 500 & 0 & 0 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 11.25 & 22.5 & 0 & -11.25 & 22.5 \\ 0 & 22.5 & 60 & 0 & -22.5 & 30 \\ -500 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & -11.25 & -22.5 & 0 & 11.25 & -22.5 \\ 0 & 22.5 & 30 & 0 & -22.5 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} (10^6)$$

For member [2], $\lambda_x = \frac{4 - 4}{4} = 0$ and $\lambda_y = \frac{-4 - 0}{4} = -1$. Thus,

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 11.25 & 0 & 22.5 & -11.25 & 0 & 22.5 \\ 0 & 500 & 0 & 0 & -500 & 0 \\ 22.5 & 0 & 60 & -22.5 & 0 & 30 \\ -11.25 & 0 & -22.5 & 11.25 & 0 & -22.5 \\ 0 & -500 & 0 & 0 & 500 & 0 \\ 22.5 & 0 & 30 & -22.5 & 0 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} (10^6)$$

Structure Stiffness Matrix. It is a 9×9 matrix since the highest code number is 9. Thus,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 511.25 & 0 & 22.5 & -11.25 & 0 & 22.5 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 511.25 & -22.5 & 0 & -500 & 0 & 0 & -11.25 & -22.25 \\ 22.5 & -22.5 & 120 & -22.5 & 0 & 30 & 0 & 22.5 & 30 \\ -11.25 & 0 & -22.5 & 11.25 & 0 & -22.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -500 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22.5 & 0 & 30 & -22.5 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & -11.25 & 22.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.25 & 22.5 \\ 0 & -22.5 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25.5 & 60 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 (10^6) \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$



$$Q_k = \begin{bmatrix} -5(10^3) \\ -24(10^3) \\ 11(10^3) \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad \text{and} \quad D_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Loads-Displacement Relation. Applying $\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{D}$,

$$\begin{bmatrix} -5(10^3) \\ -24(10^3) \\ 11(10^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 511.25 & 0 & 22.5 & -11.25 & 0 & 22.5 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 511.25 & -22.5 & 0 & -500 & 0 & 0 & -11.25 & -22.5 \\ 22.5 & -22.5 & 120 & -22.5 & 0 & 30 & 0 & 22.5 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad (10^6)$$

From the matrix partition, $\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$,

$$-5(10^3) = (511.25D_1 + 22.5D_3)(10^6)$$

$$-24(10^3) = (511.25D_2 - 22.5D_3)(10^6)$$

$$11(10^3) = (22.5D_1 - 22.5D_2 + 120D_3)(10^6)$$

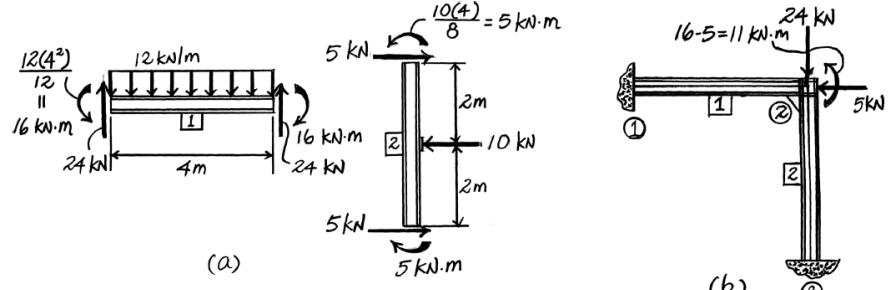
Solving Eqs. (1) to (3),

$$D_1 = -13.57(10^{-6}) \text{ m} \quad D_2 = -43.15(10^{-6}) \text{ m} \quad D_3 = 86.12(10^{-6}) \text{ rad}$$

Loads-Displacement Relation. Applying $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$,

$$\begin{bmatrix} -5(10^3) \\ -24(10^3) \\ 11(10^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 511.25 & 0 & 22.5 & -11.25 & 0 & 22.5 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 511.25 & -22.5 & 0 & -500 & 0 & 0 & -11.25 & -22.5 \\ 22.5 & -22.5 & 120 & -22.5 & 0 & 30 & 0 & 22.5 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad (10^6)$$

$$\begin{bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.25 & 0 & -22.5 & 11.25 & 0 & -22.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -500 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22.5 & 0 & 30 & -22.5 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & -11.25 & 22.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.25 & 22.5 \\ 0 & -22.5 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22.5 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad (10^6)$$



Using these results and applying $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k$,

$$Q_4 = -11.25(10^6)(-13.57)(10^{-6}) + (-22.5)(10^6)(86.12)(10^{-6}) = -1.785 \text{ kN}$$

$$Q_5 = -500(10^6)(-43.15)(10^{-6}) = 21.58 \text{ kN}$$

$$Q_6 = 22.5(10^6)(-13.57)(10^{-6}) + 30(10^6)(86.12)(10^{-6}) = 2.278 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$Q_7 = -500(10^6)(-13.57)(10^{-6}) = 6.785 \text{ kN}$$

$$Q_8 = -11.25(10^6)(-43.15)(10^{-6}) + 22.5(10^6)(86.12)(10^{-6}) = 2.423 \text{ kN}$$

$$Q_9 = -22.5(10^6)(-43.15)(10^{-6}) + 30(10^6)(86.12)(10^{-6}) = 3.555 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Superposition these results to those of FEM shown in Fig. a,

$$R_4 = -1.785 + 5 = 3.214 \text{ kN} = 3.21 \text{ kN} \rightarrow$$

$$R_5 = 21.58 + 0 = 21.58 \text{ kN} = 21.6 \text{ kN} \uparrow$$

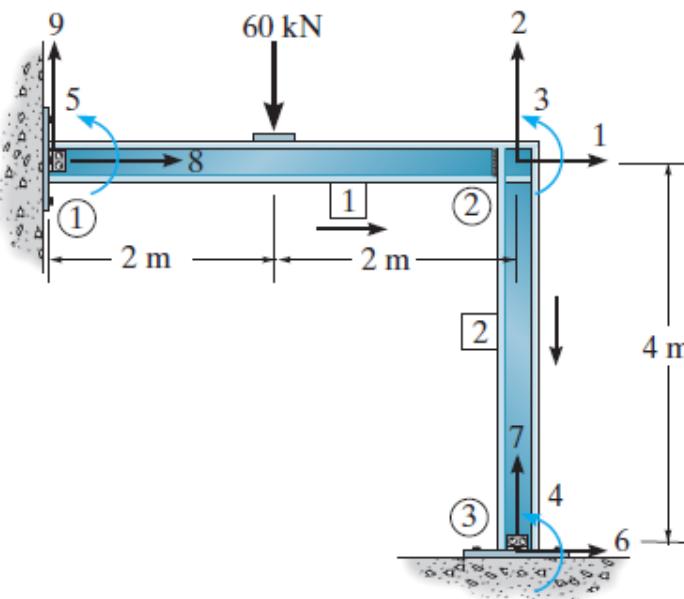
$$R_6 = 2.278 - 5 = -2.722 \text{ kN} \cdot \text{m} = 2.72 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$$

$$R_7 = 6.785 + 0 = 6.785 \text{ kN} = 6.79 \text{ kN} \rightarrow$$

$$R_8 = 2.423 + 24 = 26.42 \text{ kN} = 26.4 \text{ kN} \uparrow$$

$$R_9 = 3.555 + 16 = 19.55 \text{ kN} \cdot \text{m} = 19.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$$

16-6. Determine las reacciones en los soportes articulados ① y ③. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 350(10^6) \text{ mm}^4$ y $A = 15(10^3) \text{ mm}^2$ para cada elemento.



Member Stiffness Matrices. The origin of the global coordinate system will be set at joint ①. For member [1] and [2], $L = 4\text{m}$.

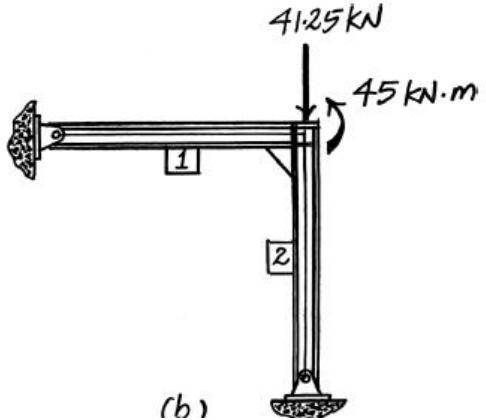
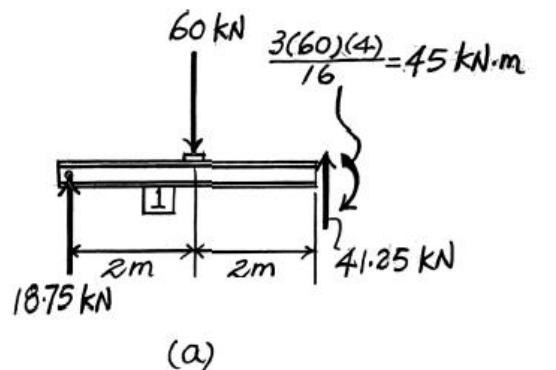
$$\frac{AE}{L} = \frac{0.015[200(10^9)]}{4} = 750(10^6) \text{ N/m}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12[200(10^9)][350(10^{-6})]}{4^3} = 13.125(10^6) \text{ N/m}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{4[200(10^9)][350(10^{-6})]}{4^2} = 26.25(10^6) \text{ N}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4[200(10^9)][350(10^{-6})]}{4} = 70(10^6) \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2[200(10^9)][350(10^{-6})]}{4} = 35(10^6) \text{ N}\cdot\text{m}$$



For member [1], $\lambda_x = \frac{4 - 0}{4} = 1$ and $\lambda_y = \frac{0 - 0}{4} = 0$. Thus,

$$k_1 = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 750 & 0 & 0 & -750 & 0 & 0 \\ 0 & 13.125 & 26.25 & 0 & -13.125 & 26.25 \\ 0 & 26.25 & 70 & 0 & -26.25 & 35 \\ -750 & 0 & 0 & 750 & 0 & 0 \\ 0 & -13.125 & -26.25 & 0 & 13.125 & -26.25 \\ 0 & 26.25 & 35 & 0 & -26.25 & 70 \end{bmatrix} \begin{matrix} 8 \\ 9 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} 10^6 \end{matrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 4 \\ 13.125 & 0 & 26.25 & -13.125 & 0 & 26.25 \\ 0 & 750 & 0 & 0 & -750 & 0 \\ 26.25 & 0 & 70 & -26.25 & 0 & 35 \\ -13.125 & 0 & -26.25 & 13.125 & 0 & -26.25 \\ 0 & -750 & 0 & 0 & 750 & 0 \\ 26.25 & 0 & 35 & -26.25 & 0 & 70 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} 10^6 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 763.125 & 0 & 26.25 & 26.25 & 0 & -13.125 & 0 & -750 & 0 \\ 0 & 763.125 & -26.25 & 0 & -26.25 & 0 & -750 & 0 & -13.125 \\ 26.25 & -26.25 & 140 & 35 & 35 & -26.25 & 0 & 0 & 26.25 \\ 26.25 & 0 & 35 & 70 & 0 & -26.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -26.25 & 35 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 26.25 \\ -13.125 & 0 & -26.25 & -26.25 & 0 & 13.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -750 & 0 & 0 & 0 & 750 & 0 & 0 & 0 \\ -750 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 750 & 0 & 0 \\ 0 & -13.125 & 26.25 & 0 & 26.25 & 0 & 0 & 0 & 13.125 \end{bmatrix} \quad (10^6)$$

Known Nodal Loads and Deflections. The nodal load acting on the unconstrained degree of freedom (code numbers 1, 2, 3, 4, and 5) are shown in Fig. a and Fig. b.

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -41.25(10^3) \\ 45(10^3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Loads-Displacement Relation. Applying $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -41.25(10^3) \\ 45(10^3) \\ 0 \\ 0 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 763.125 & 0 & 26.25 & 26.25 & 0 & -13.125 & 0 & -750 & 0 \\ 0 & 763.125 & -26.25 & 0 & -26.25 & 0 & -750 & 0 & -13.125 \\ 26.25 & -26.25 & 140 & 35 & 35 & -26.25 & 0 & 0 & 26.25 \\ 26.25 & 0 & 35 & 70 & 0 & -26.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -26.25 & 35 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 26.25 \\ -13.125 & 0 & -26.25 & -26.25 & 0 & 13.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -750 & 0 & 0 & 0 & 750 & 0 & 0 & 0 \\ -750 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 750 & 0 & 0 \\ 0 & -13.125 & 26.25 & 0 & 26.25 & 0 & 0 & 0 & 13.125 \end{bmatrix} \quad (10^6) \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

From the matrix partition, $\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$,

$$0 = (763.125D_1 + 26.25D_3 + 26.25D_4)(10^6) \quad (1)$$

$$-41.25(10^3) = (763.125D_2 - 26.25D_3 - 26.25D_5)(10^6) \quad (2)$$

$$45(10^3) = (26.25D_1 - 26.25D_2 + 140D_3 + 35D_4 + 35D_5)(10^6) \quad (3)$$

$$0 = (26.25D_1 + 35D_3 + 70D_4)(10^6) \quad (4)$$

$$0 = (-26.25D_2 + 35D_3 + 70D_5)(10^6) \quad (5)$$

Solving Eqs. (1) to (5)

$$D_1 = -7.3802(10^{-6}) \quad D_2 = -47.3802(10^{-6}) \quad D_3 = 423.5714(10^{-6})$$

$$D_4 = -209.0181(10^{-6}) \quad D_5 = -229.5533(10^{-6})$$

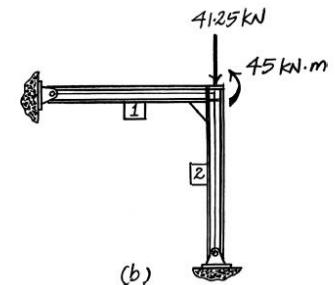
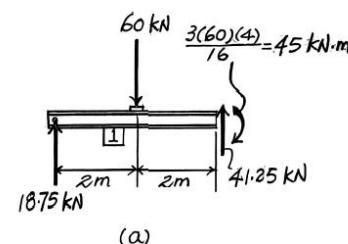
Superposition these results to those of FEM shown in Fig. a,

$$R_6 = -5.535 \text{ kN} + 0 = 5.54 \text{ kN}$$

$$R_7 = 35.535 + 0 = 35.5 \text{ kN}$$

$$R_8 = 5.535 + 0 = 5.54 \text{ kN}$$

$$R_9 = 5.715 + 18.75 = 24.5 \text{ kN}$$



Using these results and applying $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k$,

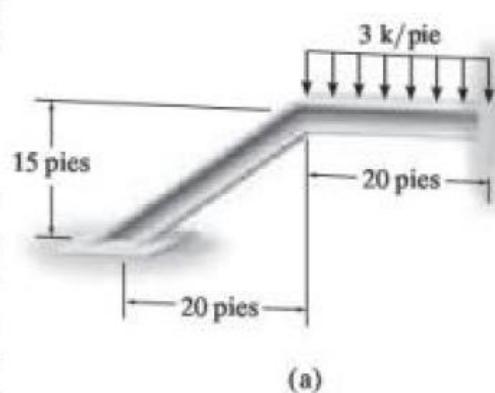
$$Q_6 = (-13.125)(10^6) - 7.3802(10^{-6}) - 26.25(10^6)423.5714(10^{-6}) - 26.25(10^6) - 209.0181(10^{-6}) + 0 = -5.535 \text{ kN}$$

$$Q_7 = -750(10^6) - 47.3802(10^{-6}) + 0 = 35.535 \text{ kN}$$

$$Q_8 = -750(10^6) - 7.3802(10^{-6}) + 0 = 5.535 \text{ kN}$$

$$Q_9 = -13.125(10^6) - 47.3802(10^{-6}) + 26.25(10^6) + 423.5714(10^{-6}) + 26.25(10^6) - 229.5533(10^{-6}) + 0 = 5.715 \text{ kN}$$

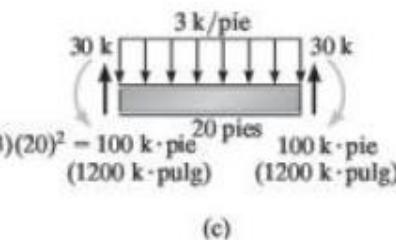
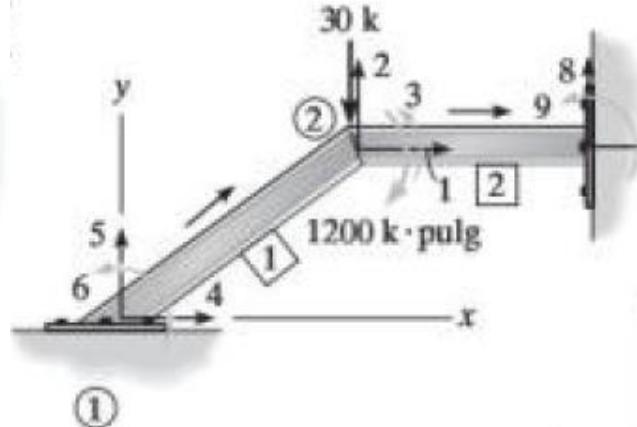
Determine las cargas en los extremos de cada elemento de la estructura que se muestra en la figura 16-5a. Considere que $I = 600$ pulg 4 , $A = 12$ pulg 2 y $E = 29(10^3)$ ksi p



SOLUCIÓN

Notación. Para llevar a cabo un análisis matricial, la carga distribuida que actúa sobre el elemento horizontal será reemplazada por momentos y fuerzas cortantes equivalentes en los extremos calculados con base en la estática y en la tabla que se encuentra en el interior de la contraportada. (Tenga en cuenta que no hay ninguna fuerza externa de 30 k o momento de 1200 k · pulg ubicados en ③ puesto que las reacciones en los números de código 8 y 9 deben ser desconocidos en la matriz de carga.) Después, mediante superposición, los resultados obtenidos para el marco de la figura 16-5b se modificarán para este elemento con base en las cargas mostradas en la figura 16-5c.

Como se muestra en la figura 16-5b, los nodos y los elementos están numerados y el origen del sistema de coordenadas globales se coloca en el nodo ①. Como de costumbre, los números de código se especifican con números asignados primero a los grados de libertad no restringidos. Por lo tanto,



$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -30 & 2 \\ -1200 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Elemento 1:

$$\frac{AE}{L} = \frac{12[29(10^3)]}{25(12)} = 1160 \text{ k/pulg}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12[29(10^3)]600}{[25(12)]^3} = 7.73 \text{ k/pulg}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6[29(10^3)]600}{[25(12)]^2} = 1160 \text{ k}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4[29(10^3)]600}{25(12)} = 232(10^3) \text{ k · pulg}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2[29(10^3)]600}{25(12)} = 116(10^3) \text{ k · pulg}$$

$$\lambda_x = \frac{20 - 0}{25} = 0.8 \quad \lambda_y = \frac{15 - 0}{25} = 0.6$$

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 745.18 & 553.09 & -696 & -745.18 & -553.09 & -696 & 5 \\ 553.09 & 422.55 & 928 & -553.09 & -422.55 & 928 & 5 \\ -696 & 928 & 232(10^3) & 696 & -928 & 116(10^3) & 6 \\ -745.18 & -553.09 & 696 & 745.18 & 553.09 & 696 & 1 \\ -553.09 & -422.55 & -928 & 553.09 & 422.55 & -928 & 2 \\ -696 & 928 & 116(10^3) & 696 & -928 & 232(10^3) & 3 \end{bmatrix}$$

Elemento 2:

$$\frac{AE}{L} = \frac{12[29(10^3)]}{20(12)} = 1450 \text{ k/pulg}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12[29(10^3)]600}{[20(12)]^3} = 15.10 \text{ k/pulg}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6[29(10^3)]600}{[20(12)]^2} = 1812.50 \text{ k}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4[29(10^3)]600}{20(12)} = 2.90(10^5) \text{ k} \cdot \text{pulg}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2[29(10^3)]600}{[20(12)]} = 1.45(10^5) \text{ k} \cdot \text{pulg}$$

$$\lambda_x = \frac{40 - 20}{20} = 1 \quad \lambda_y = \frac{15 - 15}{20} = 0$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 1450 & 0 & 0 & -1450 & 0 & 0 \\ 0 & 15.10 & 1812.50 & 0 & -15.10 & 1812.50 \\ 0 & 1812.50 & 290(10^3) & 0 & -1812.50 & 145(10^3) \\ -1450 & 0 & 0 & 1450 & 0 & 0 \\ 0 & -15.10 & -1812.50 & 0 & 15.10 & -1812.50 \\ 0 & 1812.50 & 145(10^3) & 0 & -1812.50 & 290(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccc|ccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 0 & 2195.18 & 553.09 & 696 & -745.18 & -553.09 & 696 & -1450 & 0 & 0 & D_1 \\ -30 & 553.09 & 437.65 & 884.5 & -553.09 & -422.55 & -928 & 0 & -15.10 & 1812.50 & D_2 \\ -1200 & 696 & 884.5 & 522(10^3) & -696 & 928 & 116(10^3) & 0 & -1812.50 & 145(10^3) & D_3 \\ Q_4 & -745.18 & -553.09 & -696 & 745.18 & 553.09 & -696 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_5 & -553.09 & -422.55 & 928 & 553.09 & 422.55 & 928 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_6 & 696 & -928 & 116(10^3) & -696 & 928 & 232(10^3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_7 & -1450 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1450 & 0 & 0 & 0 \\ Q_8 & 0 & -15.10 & -1812.50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15.10 & -1812.50 & 0 \\ Q_9 & 0 & 1812.50 & 145(10^3) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1812.50 & 290(10^3) & 0 \end{array} \right] \quad (1)$$

Desplazamientos y cargas. Si se expande para determinar los desplazamientos, y se resuelve, resulta

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ -1200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2195.18 & 553.09 & 696 \\ 553.09 & 437.65 & 884.5 \\ 696 & 884.5 & 522(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0247 \text{ pulg} \\ -0.0954 \text{ pulg} \\ -0.00217 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

A partir de estos resultados, las reacciones en los soportes se determinan con base en la ecuación (1) de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -745.18 & -553.09 & -696 \\ -553.09 & -422.55 & 928 \\ 696 & -928 & 116(10^3) \\ -1450 & 0 & 0 \\ 0 & -15.10 & -1812.50 \\ 0 & 1812.50 & 145(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0247 \\ -0.0954 \\ -0.00217 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.85 \text{ k} \\ 24.63 \text{ k} \\ -145.99 \text{ k} \cdot \text{pulg} \\ -35.85 \text{ k} \\ 5.37 \text{ k} \\ -487.60 \text{ k} \cdot \text{pulg} \end{bmatrix}$$

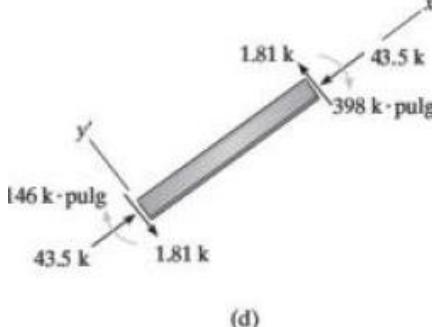
Las cargas internas pueden determinarse desde la ecuación 16-7 aplicada a los elementos 1 y 2. En el caso del elemento 1, $\mathbf{q} = \mathbf{k}'_1 \mathbf{T}_1 \mathbf{D}$, donde \mathbf{k}'_1 se determina a partir de la ecuación 16-1 y \mathbf{T}_1 con base en la ecuación 16-3. Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1160 & 0 & 0 & -1160 & 0 & 0 \\ 0 & 7.73 & 1160 & 0 & -7.73 & 1160 \\ 0 & 1160 & 232(10^3) & 0 & -1160 & 116(10^3) \\ -1160 & 0 & 0 & 1160 & 0 & 0 \\ 0 & -7.73 & -1160 & 0 & 7.73 & -1160 \\ 0 & 1160 & 116(10^3) & 0 & -1160 & 232(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0247 \\ -0.0954 \\ -0.00217 \end{bmatrix}$$

Aquí los números de código indican las filas y columnas de los extremos cercano y lejano de los elementos, respectivamente; es decir, 4, 5, 6, y después 1, 2, 3, figura 16-5b. Entonces,

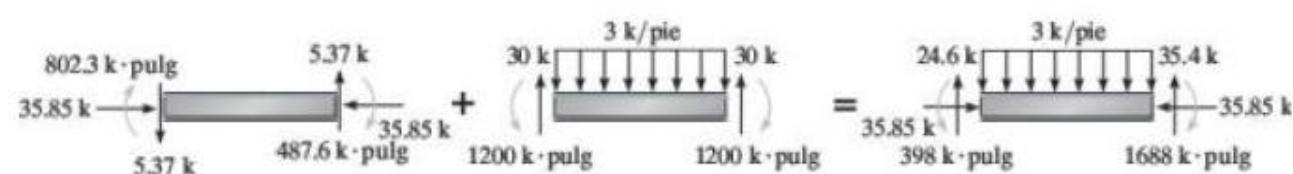
$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43.5 \text{ k} \\ -1.81 \text{ k} \\ -146 \text{ k} \cdot \text{pulg} \\ -43.5 \text{ k} \\ 1.81 \text{ k} \\ -398 \text{ k} \cdot \text{pulg} \end{bmatrix}$$

Resp.

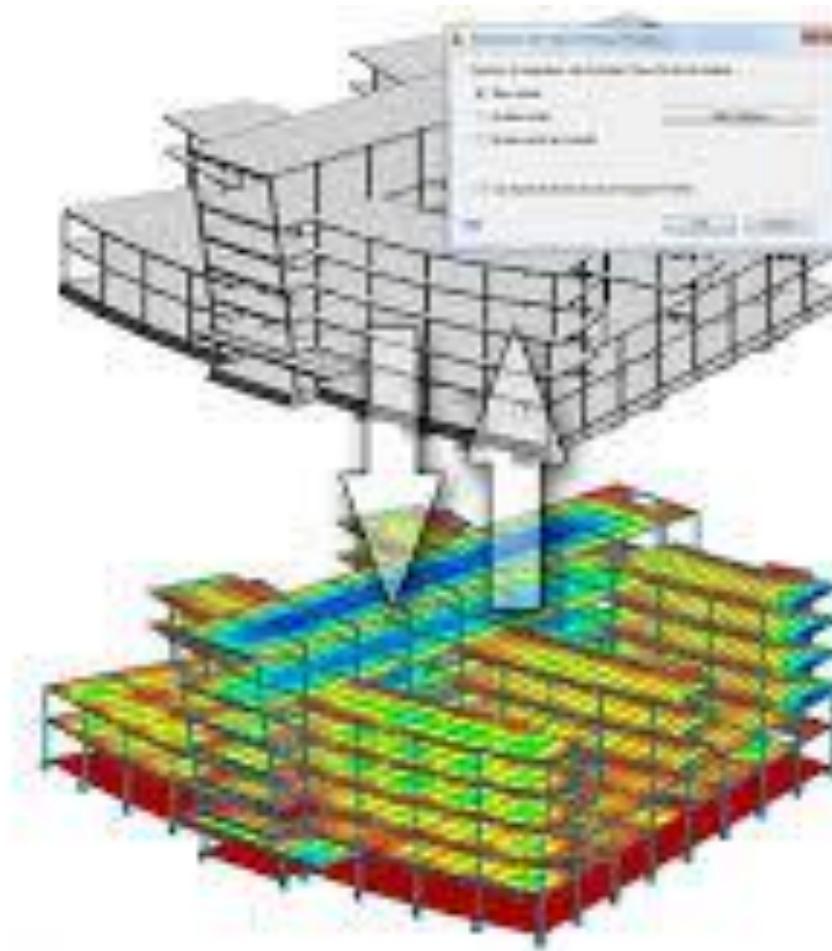


Estos resultados se muestran en la figura 16-5d.

Para el elemento 2 se realiza un análisis similar. Los resultados se muestran en la parte izquierda de la figura 16-5e. Para este elemento es necesario superponer las cargas de la figura 16-5c, de modo que los resultados finales del elemento 2 se muestran a la derecha.

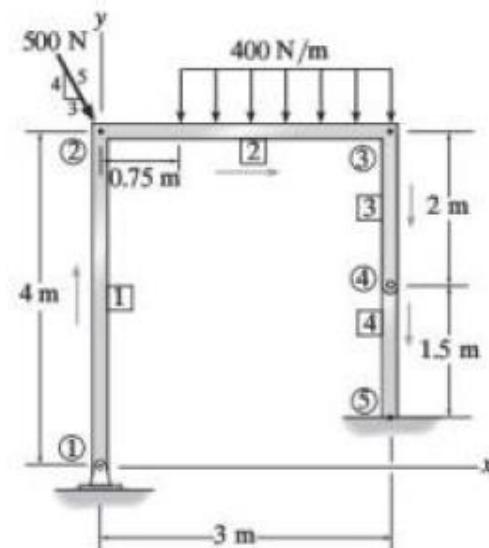
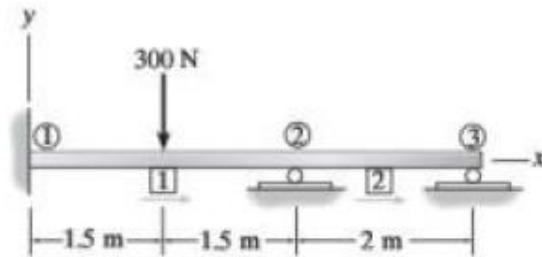
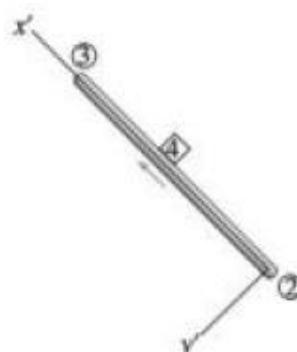
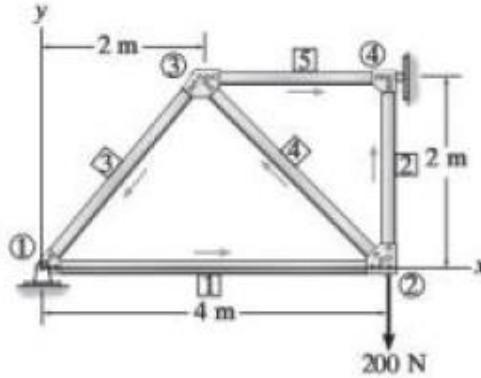


Uso de Software en Anális Estructur



Pasos Preliminares

- *Identificación de Elementos y Nodos*
- *Coordenadas Globales y Locales*



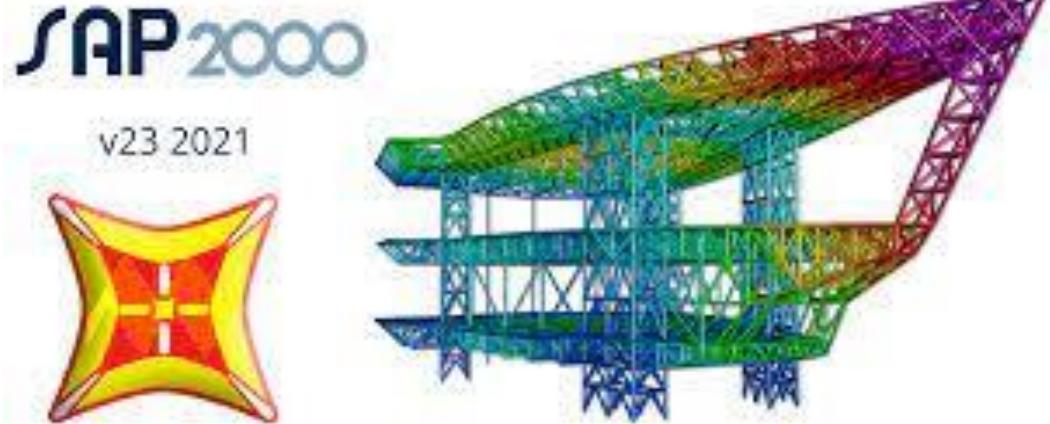
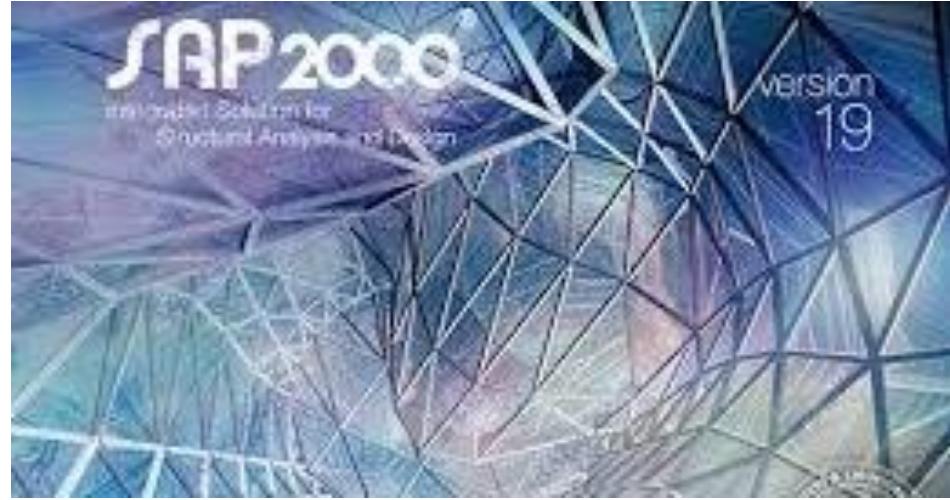
Operación del Programa

- *Información de la Estructura en General*
- *Sistema Estructural a usar*
- *Datos del Nodo*
- *Datos del Elemento*
- *Datos del Soporte*
- *Datos de la Carga*
- *Resultados*



Sap 2000

SAP2000 es un programa de elementos finitos, con interfaz gráfico 3D orientado a objetos, preparado para realizar, de forma totalmente integrada, la modelación, análisis y dimensionamiento de lo más amplio conjunto de problemas de ingeniería de estructuras.

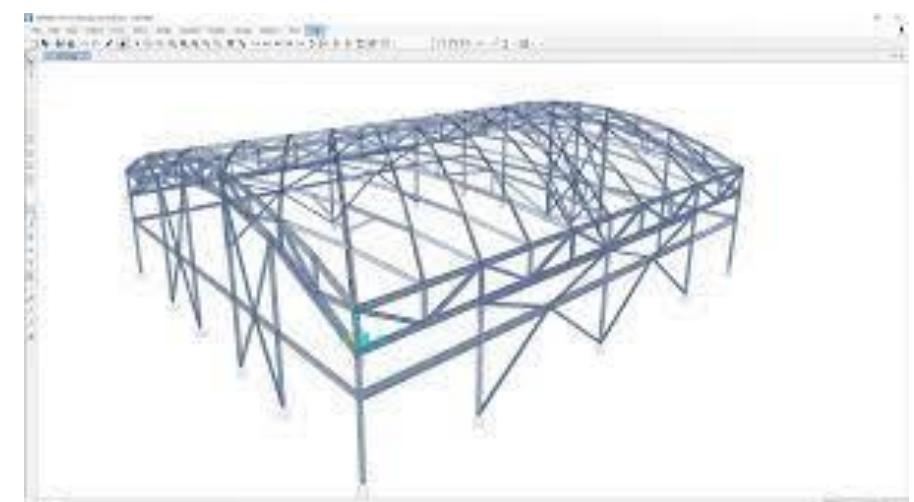
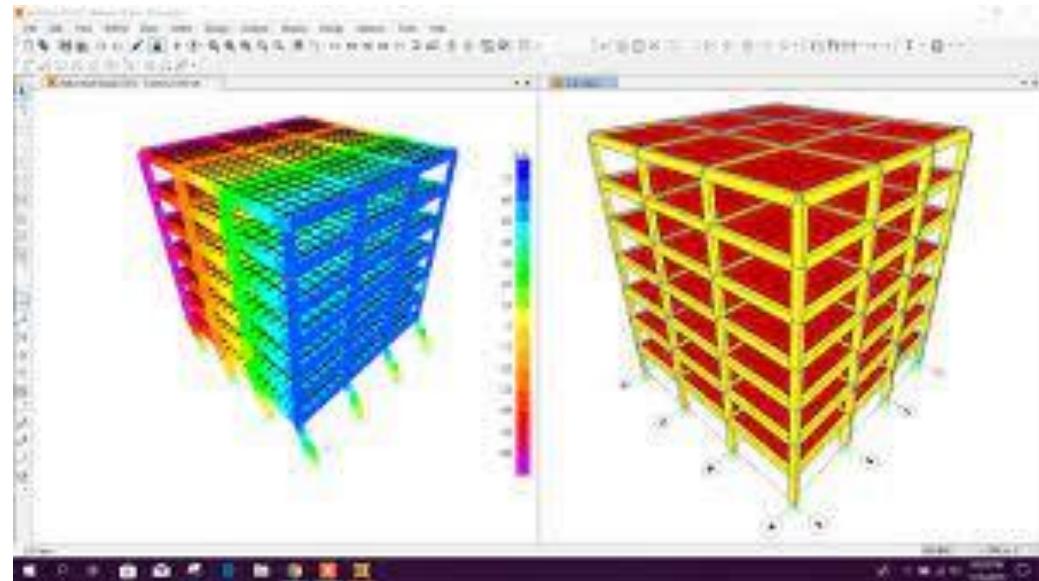


La versatilidad del software permite utilizarlo en el dimensionamiento de puentes, edificios, estadios, presas, estructuras industriales, estructuras marítimas y todo tipo de infraestructura que necesite ser analizada y dimensionada.

Con respecto a las acciones, es posible generar automáticamente cargas de sismo, viento y vehículos, y posteriormente, hacer el dimensionamiento y comprobación automática de estructuras de hormigón armado, perfiles metálicos, de aluminio y conformados en frío, a través de las normativas Europeas, Americanas, Canadienses, Turcas, Indias, Chinas, y otras.

Características- Sap 2000

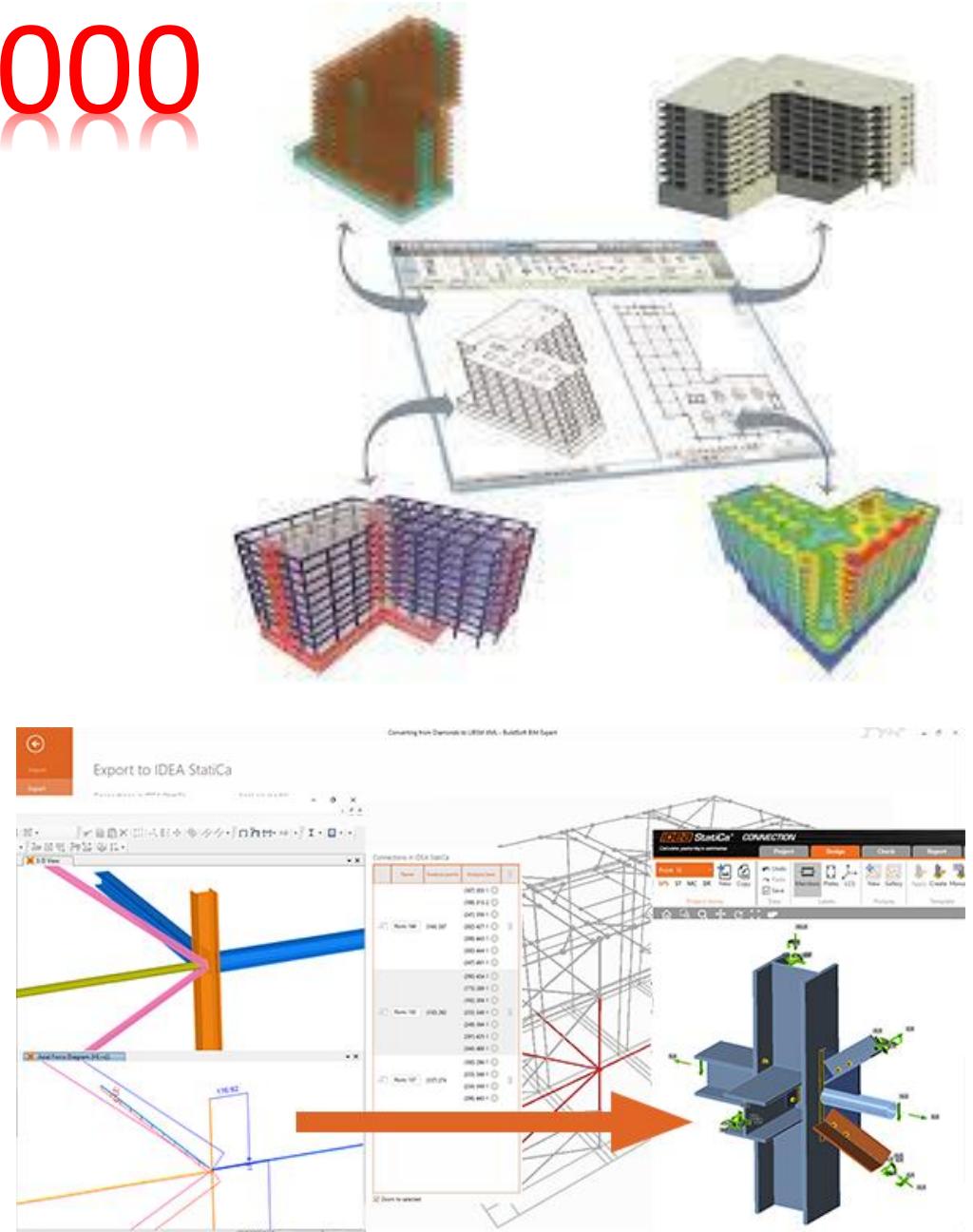
- Una ventana, varias vistas: ofrece una interfaz única para modelar, analizar, dimensionar y generar informes de cálculo
 - Modelado: Selección de plantillas para iniciar rápidamente un nuevo modelo, facilidad en definir vistas personalizadas, sistemas de cuadrícula etc.
 - Componentes estructurales: Nudos, objetos de barras, cables, pretensado, rótulas...
 - Acciones: Sismo, viento, olas, desplazamiento, temperatura, tensión...
 - Análisis: Estático, dinámico...
 - Dimensionamiento: Estructuras metálicas, hormigón, aluminio, conformadas en frío...
 - Reportes: Es posible obtener informes preformateados que incluyen todos los datos del modelo, resultados de análisis y de dimensionamiento.
 - Herramientas: Dispone de diferentes optimizadores.
 - Importación y exportación: Interoperabilidad con varios programas como Autodesk Revit Structure, Tekla Structures, AutoCAD (DXF/DWG), CIS/2, IFC y SDN



Tecnología BIM y Sap 2000

Las ventajas de utilizar SAP2000 dentro de la metodología BIM son:

- Aumento de la eficacia: permiten el intercambio de modelos entre los varios equipos de proyecto, principalmente arquitectos e ingenieros, a través de la compatibilidad con productos BIM.
- Flexibilidad de trabajo: Posibilidad de iniciar un modelo con un programa CSI y exportarlo a otro producto BIM o viceversa.
- Integración con API: La integración con los principales programas BIM se ha realizado a través de API (*Application Programming Interface*) para garantizar un mayor nivel de compatibilidad.



Requisitos del Sistema



Procesador

- Mínimo: Intel Pentium 4 o AMD Athlon 64
- Recomendado: Intel Core i5/i7/i9 de 9^a generación, AMD Ryzen 5/7/9 con arquitectura Zen 2 o mejor CPU de escritorio
- Se requiere una CPU de 64 bits

Sistema operativo

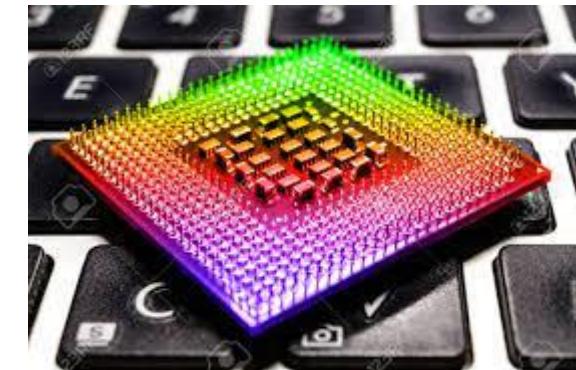
- Microsoft® Windows 8.1 o Microsoft® Windows 10
- procesador de 64 bits

Espacio en disco

- 6 GB para instalar el software.
- Se requerirá espacio adicional para ejecutar y almacenar archivos de modelo y resultados de análisis, dependiendo del tamaño de los modelos
- Recomendado: Unidad de estado sólido (SSD) PCIe de 500 GB o más. No se recomiendan unidades externas y de red.

Tarjeta de vídeo

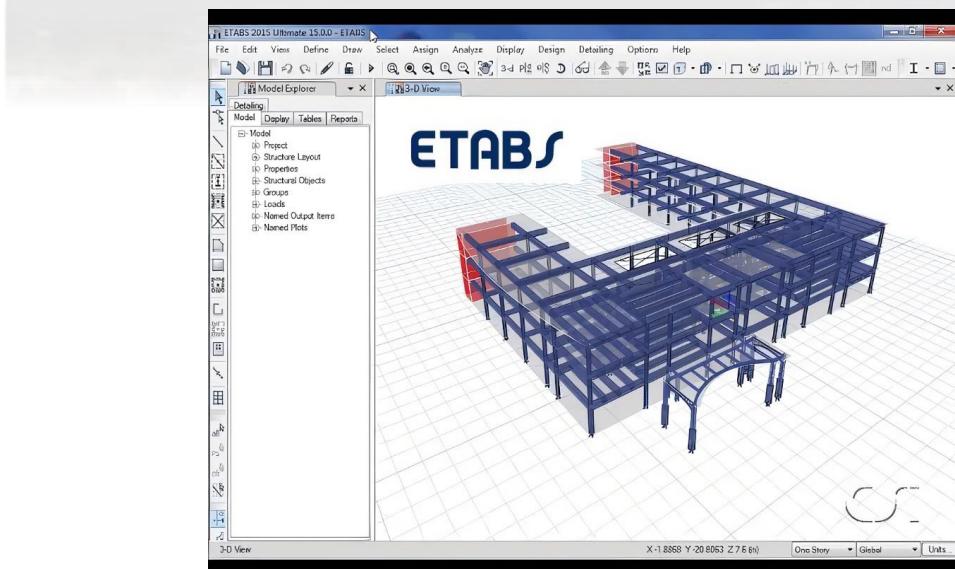
- Mínimo: Admite una resolución de 1024 por 768 y colores de 16 bits para el modo gráfico estándar (GDI +)
- Recomendado: Tarjeta de vídeo discreta con GPU NVIDIA o equivalente y RAM de gráficos dedicada (512 Mb o mayor) para el modo de gráficos DirectX. La tarjeta debe ser compatible con DirectX 11.
- El modo de gráficos DirectX utiliza completamente la aceleración de hardware proporcionada por una GPU y una RAM de gráficos dedicada.
- Para una mejor calidad de los gráficos en términos de suavizado y grosor de línea, las capacidades de dibujo ráster del dispositivo deben admitir el sesgo de profundidad heredado.



Memoria

- Mínimo: 8 GB de RAM
- El tamaño del problema que se puede resolver y las velocidades para la recuperación de soluciones y respuestas aumentan considerablemente con más RAM.

Etabs



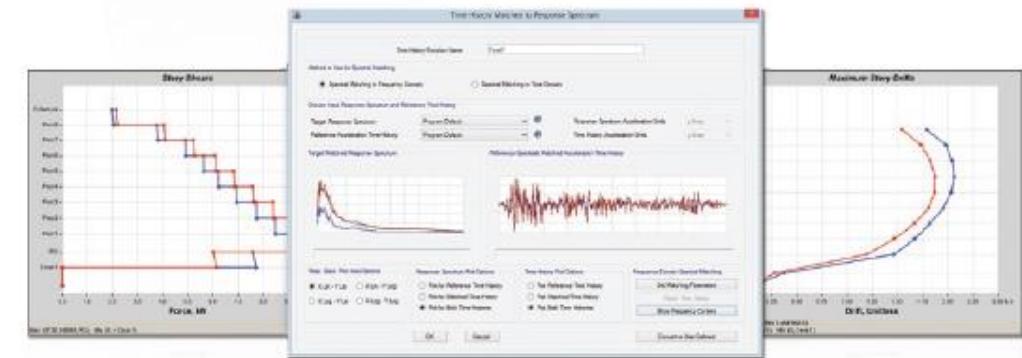
ETABS es un programa que se utiliza para el análisis estructural y el dimensionamiento de edificios.

Así, podrás encontrar múltiples opciones para experimentar con una amplia gama de materiales. Del mismo modo, podrás hacer diseños esquemáticos e informes de tu proyectos.

Por otro lado, el programa también cuenta con visualización 3D y gráficos explicativos para diseñar edificaciones de albañilería confinada y de concreto armado, por ejemplo.

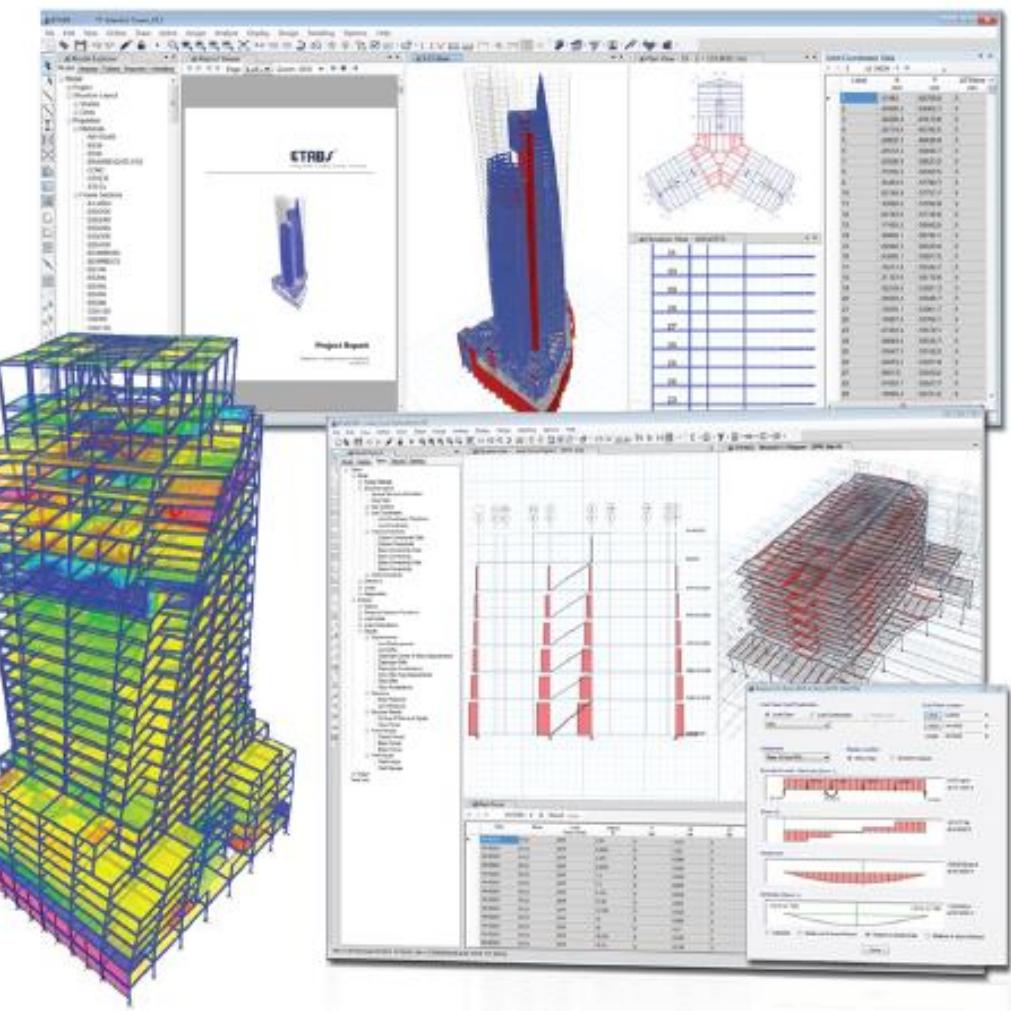
A diferencia de otros softwares, en ETABS podrás ir paso a paso en el modelado a detalle de estructuras. Además, si tienes algún diseño en CAD también podrás convertir en ETABS o utilizarlo como plantilla modelo.

Otras novedades que trae este programa son el modelamiento no lineal y el análisis sísmico terrestre de las estructuras.



Características principales de ETABS

- Simulación sismo terrestre
- Con ETABS podrás hacer simulaciones sismo terrestres.
- Se ingresa los datos del sismo para evaluar si la edificación es apta para ser construida, ya que deben cumplir con ciertos parámetros como los que señala la norma técnica de Diseño sismorresistente.
- Las estructuras deben tener un límite de deformación que dependerá del material y diseño utilizado. No se deben deformar demasiado, ya que de ocurrir un sismo será inevitable que se desmoronen completamente.
- El programa evalúa la calidad de la edificación sometiéndola a diversas pruebas de sismo resistencia. De esta manera, identifica posibles fallas y predice el estado posterior de la estructura.
- Los movimientos sísmicos hacen posible la obtención de datos relevantes para los ingenieros, quienes podrán establecer los índices de calidad del modelo.



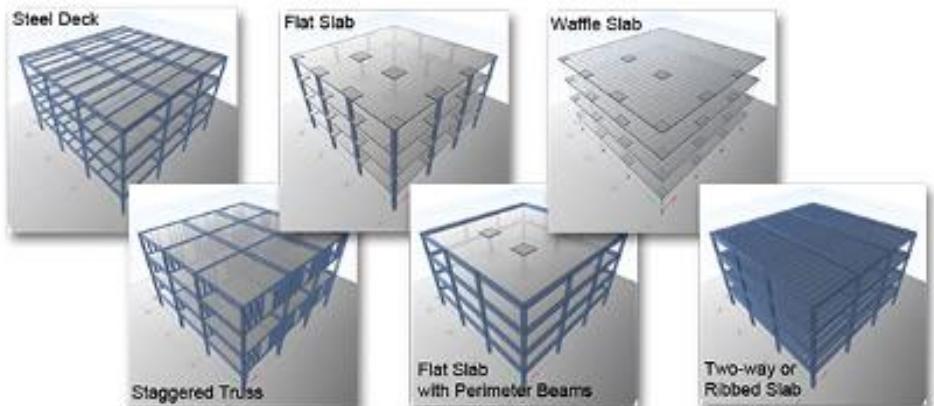
Amplia selección de plantillas

Este programa tiene una diversa selección de plantillas para agilizar el modelado de estructuras. Se puede definir malla y cuadrícula, número de pisos.

También, se pueden establecer las secciones de los elementos estructurales, el peso propio y sobrecarga.

Algunos ejemplos de plantillas pre definidas son:

- Steel deck (tablero de acero).
- Flat slab (losa plana).
- Waffle slab (losa reticular).
- Staggered truss (escalonada).
- Flat slab with perimeter beams (losa plana con vigas perimetrales).
- Two way or ribbed slab (losa bidireccional).

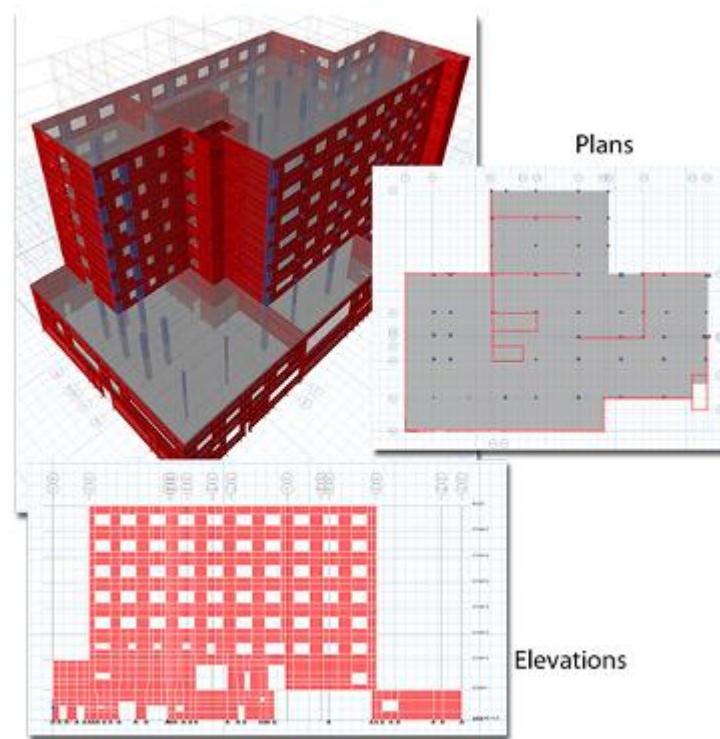


Plantas y alzados

Las plantas y alzados o también llamados “Plans and Elevations” se pueden observar mediante las vistas que genera el programa de manera automática por cuadrícula.

También, podrás configurar tus propias vistas con la opción “Developed Elevation”.

Por otro lado, con la herramienta “Plans and Elevations Views” se podrá acceder a vistas en 2D y 3D.

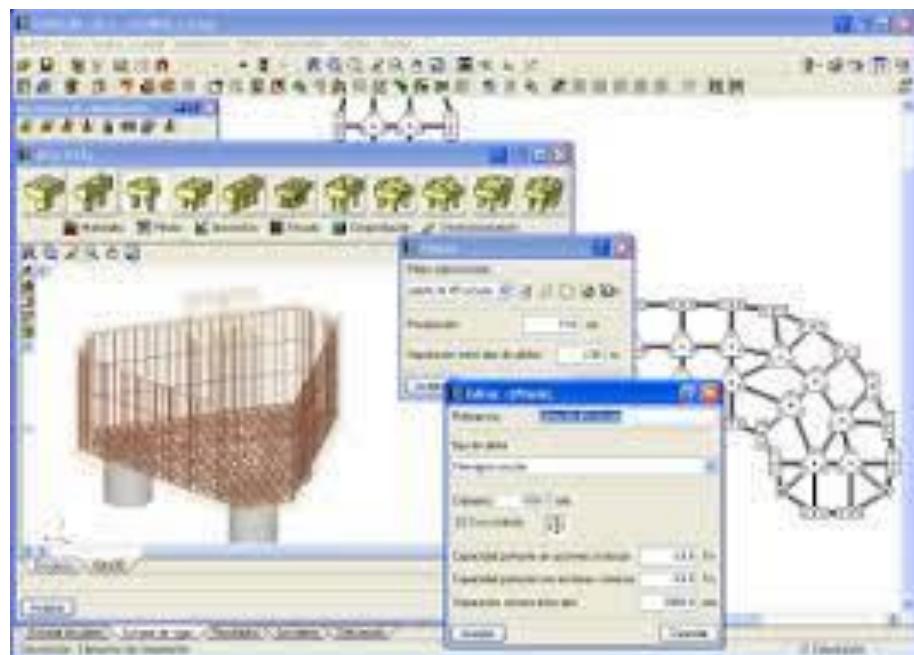
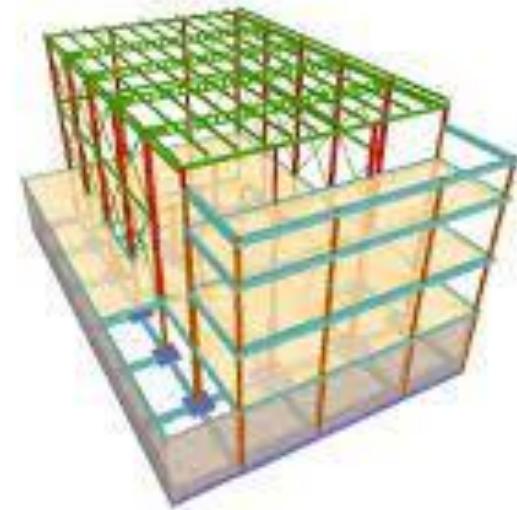


CYPECAD

CYPECAD realiza el diseño, cálculo y dimensionado de estructuras para edificación y obra civil, sometidas a acciones horizontales, verticales y a la acción del fuego.

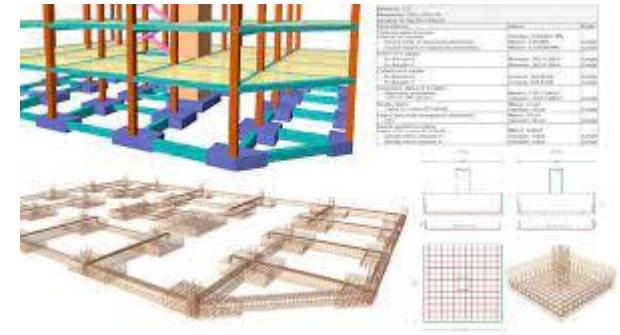
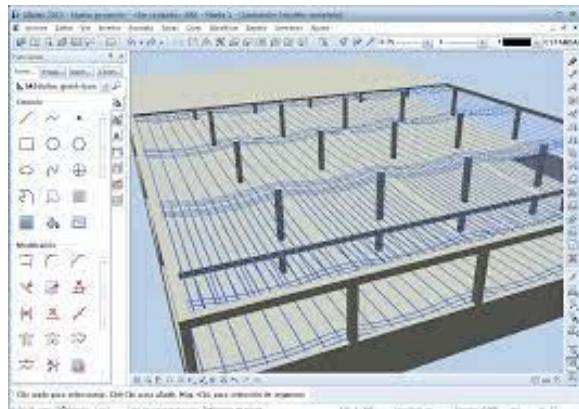
Calcula y dimensiona:

- Soportes**
Pilares (de hormigón, metálicos, mixtos y de madera), Pantallas (de hormigón) y Muros (de hormigón, fábrica y bloque)
- Vigas**
De hormigón, metálicas, mixtas
- Forjados**
Unidireccionales, Placas aligeradas, Losas mixtas, Reticulares, Losas macizas, Postesados (unidireccionales, reticulares y losas)
- Estructuras de nudos y barras**
De hormigón, acero, aluminio, madera y material genérico (este último sólo cálculo de esfuerzos).
- Cimentaciones**
Losas, vigas de cimentación, zapatas y encepados
- Uniones metálicas**
Soldadas y atornilladas (incluidas las placas de anclaje).
- Láminas planas**
Cálculo de esfuerzos de láminas de hormigón, acero laminado, acero conformado, aluminio o material genérico.



Características- CYPECAD

- Cálculo avanzado de cimentaciones superficiales.
- Zapatas aisladas y continuas -incluye vigas centradoras y de atado-.
- Vigas de cimentación.
- Losas de cimentación.
- Encepados -incluye vigas centradoras y de atado-.
- Comprobación de punzonamiento.
- Pantallas.
- Pilares: hormigón, metálicos y mixtos – de hormigón y acero-.
- Vigas: hormigón, metálicos y madera.
- Ménsulas cortas.
- Forjados de viguetas: “in situ”, prefabricadas, metálicas y madera.

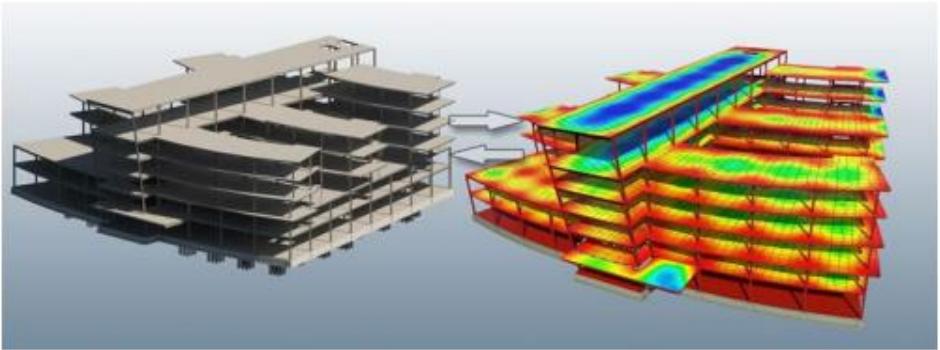


- Unidireccional -viguetas de hormigón genéricas-.
- Losas: macizas, mixtas, postensadas para edificación.
- Muros de: bloques de hormigón, edificación, tensión plana.
- Placas aligeradas.
- Placas de anclaje.
- Escaleras.
- Reticular.
- Uniones: soldadas/atornilladas. Celosías planas con perfiles tubulares.
- Interacción de la estructura con los elementos constructivos.
- Comprobación de resistencia al fuego.
- Sistemas de protección colectiva.
- Exportación a: CIS/2, TecnoMetal 4D, Tekla .
- Introducción automática de obras: DXF, DWG y modelos CAD/BIM.

Robot

Características

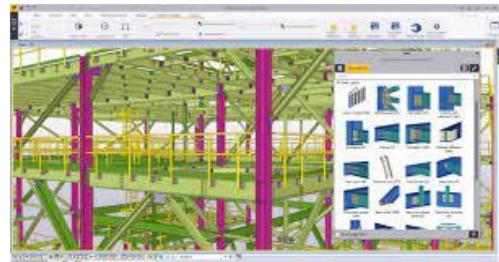
- Flujos de trabajo integrados con BIM: Intercambia datos con Revit y otras herramientas de diseño (mas adelante te cuento más).
- Simulación de carga de viento: Prueba las cargas de viento durante el diseño para evitar cambios costosos.
- Amplias capacidades de análisis: Prueba el comportamiento de estructuras estáticas, modales y no lineales.
- Malla automática de elementos finitos: Crea una malla de elementos finitos avanzada de alta calidad para obtener resultados de análisis más precisos.
- Estándares de diseño específicos del país: Trabaja con formas de sección específicas del país y normativa de construcción en imperial o métrico para la verificación de normativa.
- API abierta y flexible: Crea estructuras paramétricas personalizadas, extrae resultados directamente y amplía las capacidades de análisis y verificación de código.



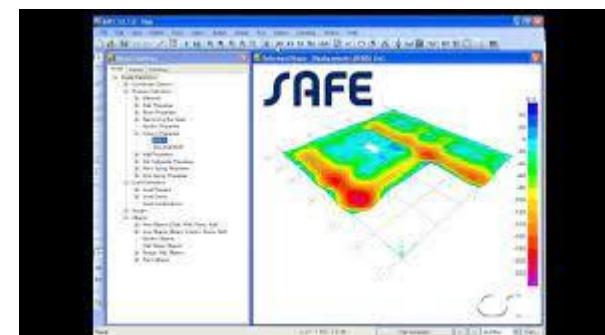
STAAD PRO



Tekla



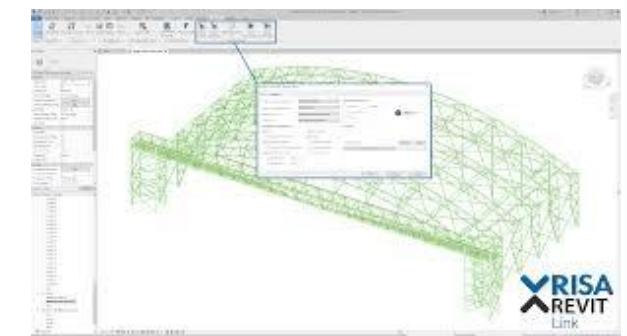
Midas



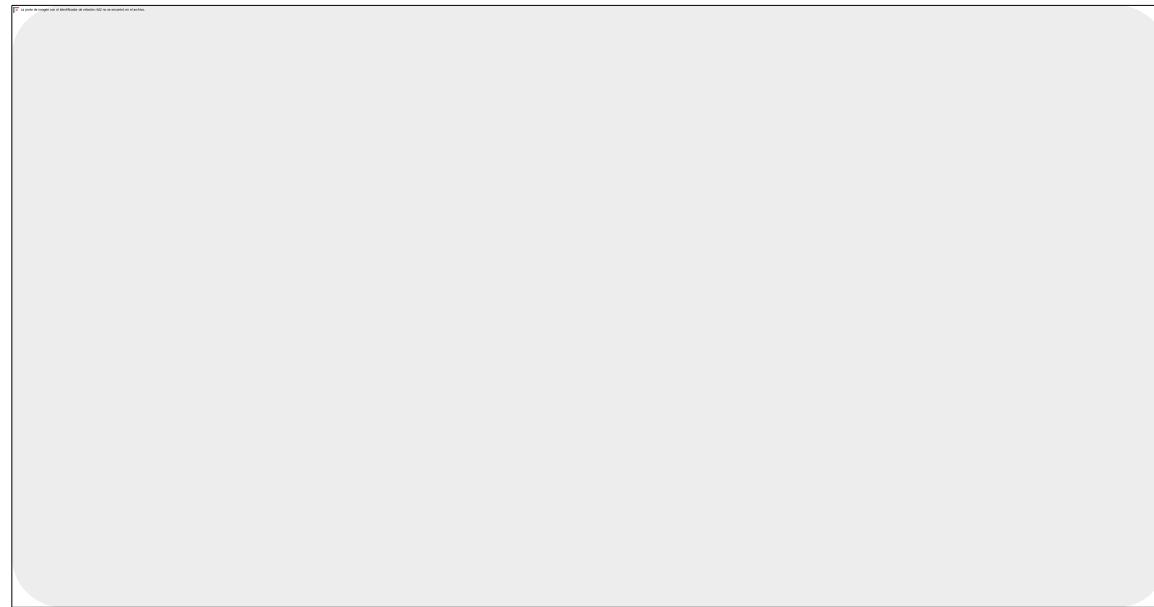
Adapt

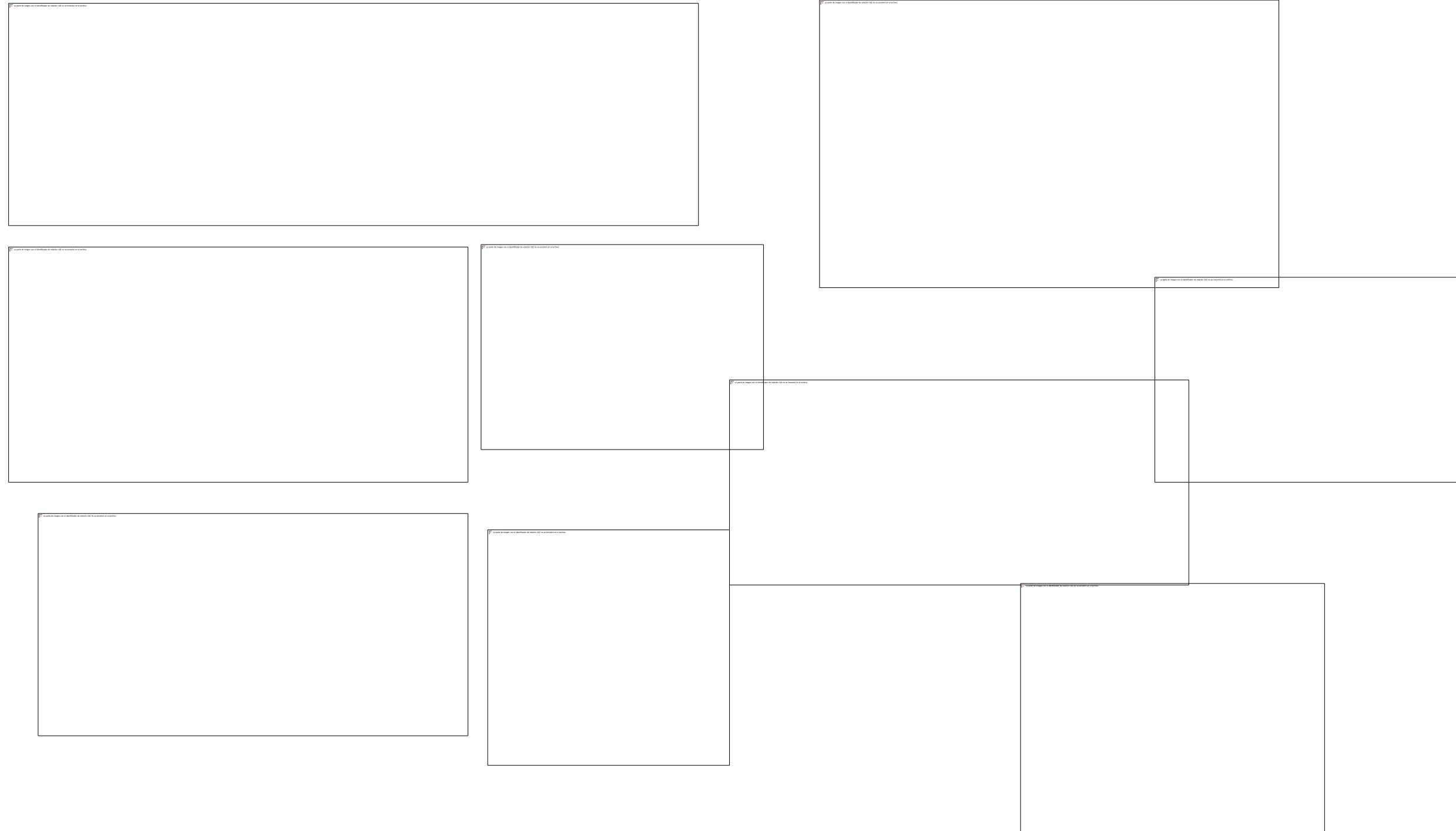


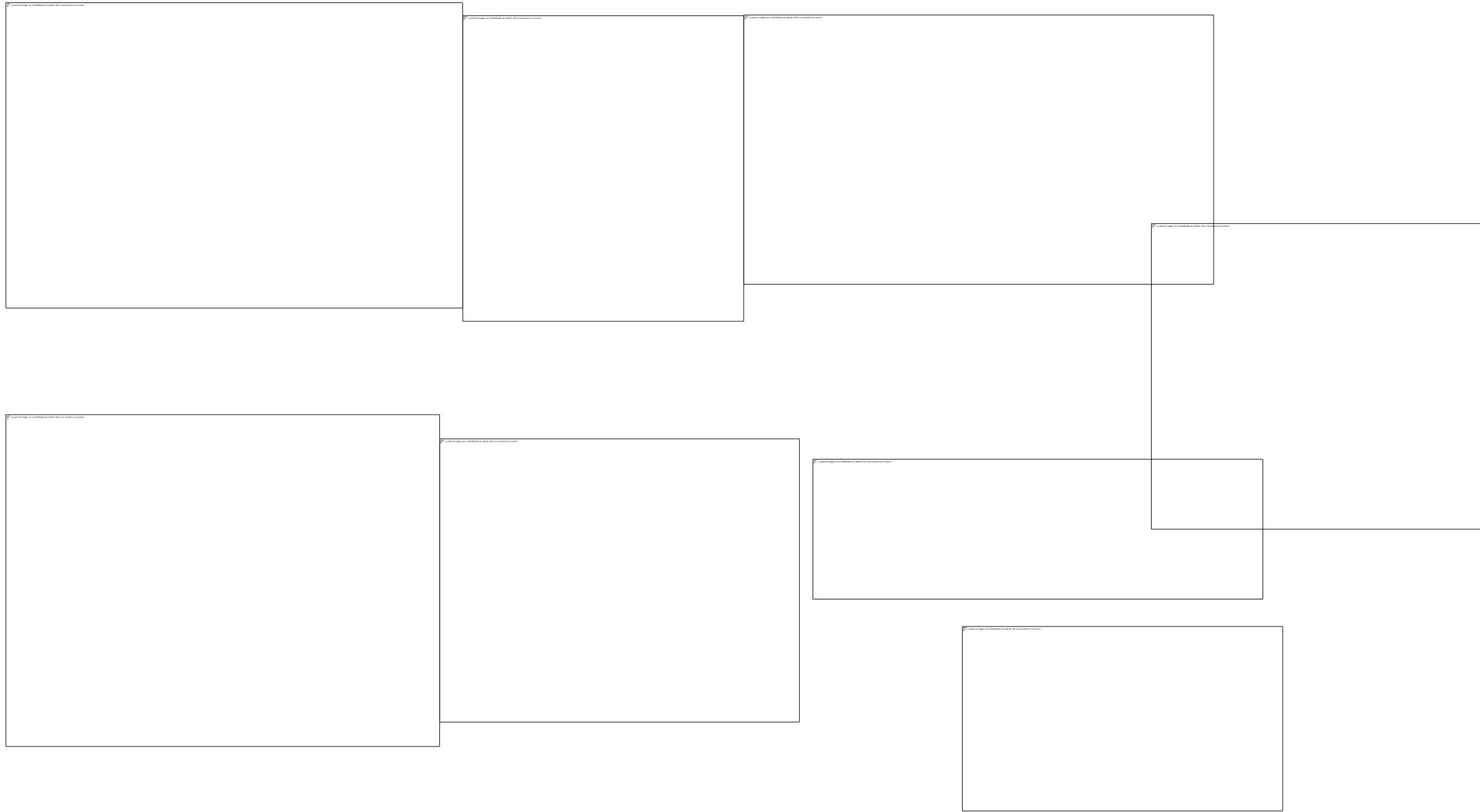
Risa 3D



Introducción al Uso de Sap 2000





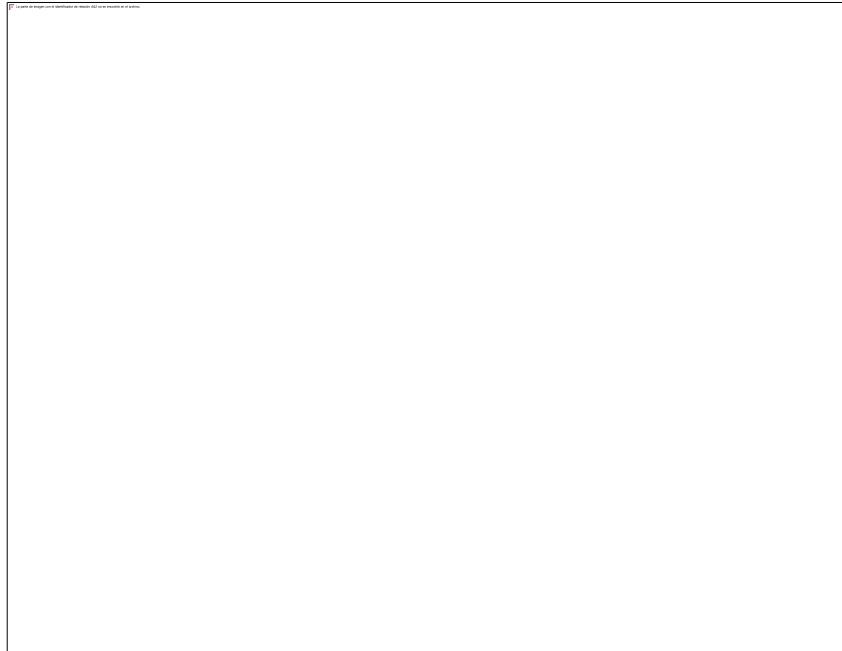
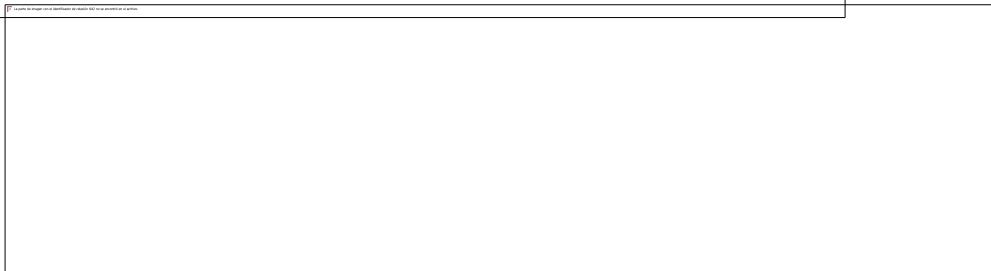


Aspectos Básicos del Sap 2000

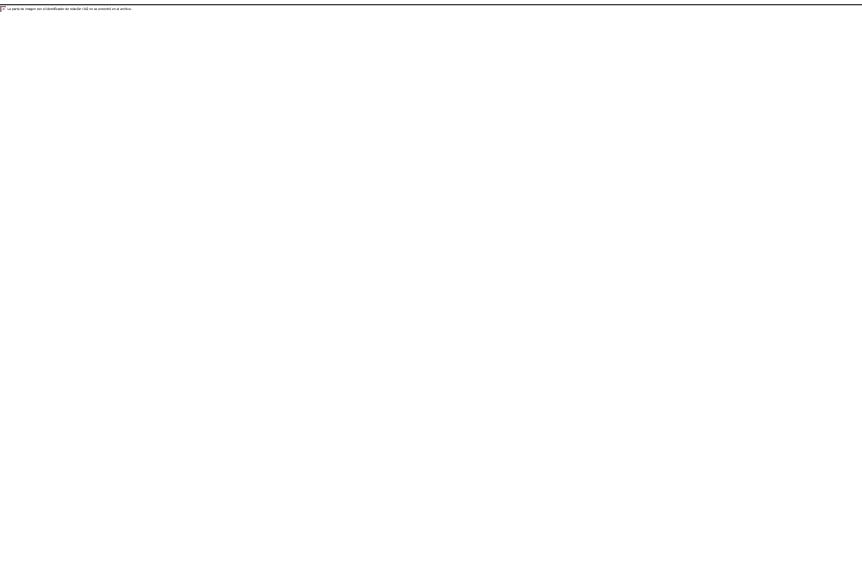
1. Pantalla Inicial



Lista General de Menús en Pantalla



Descripción de Iconos en Pantalla



2. Archivos

Condiciones de Inicio de nuevo modelo

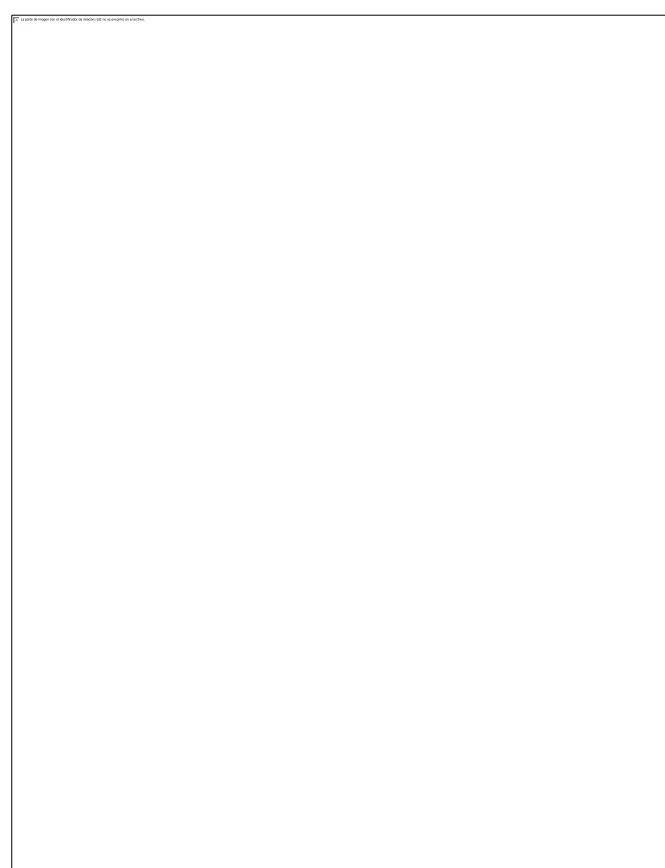
Por medio de Plantillas

Por medio de Pantalla en Blanco

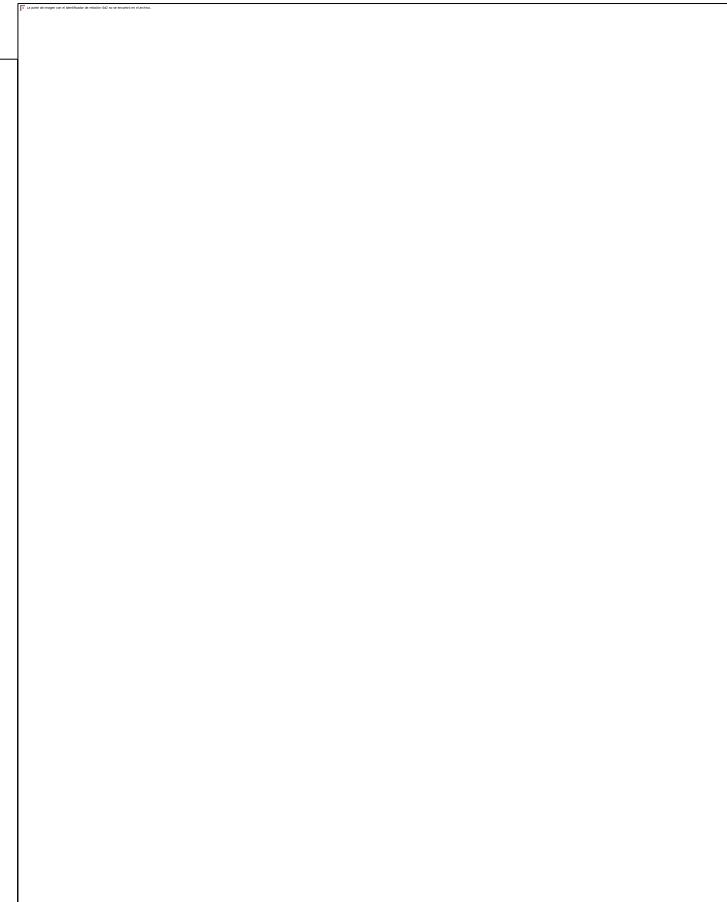


Por medio de Líneas de Grid

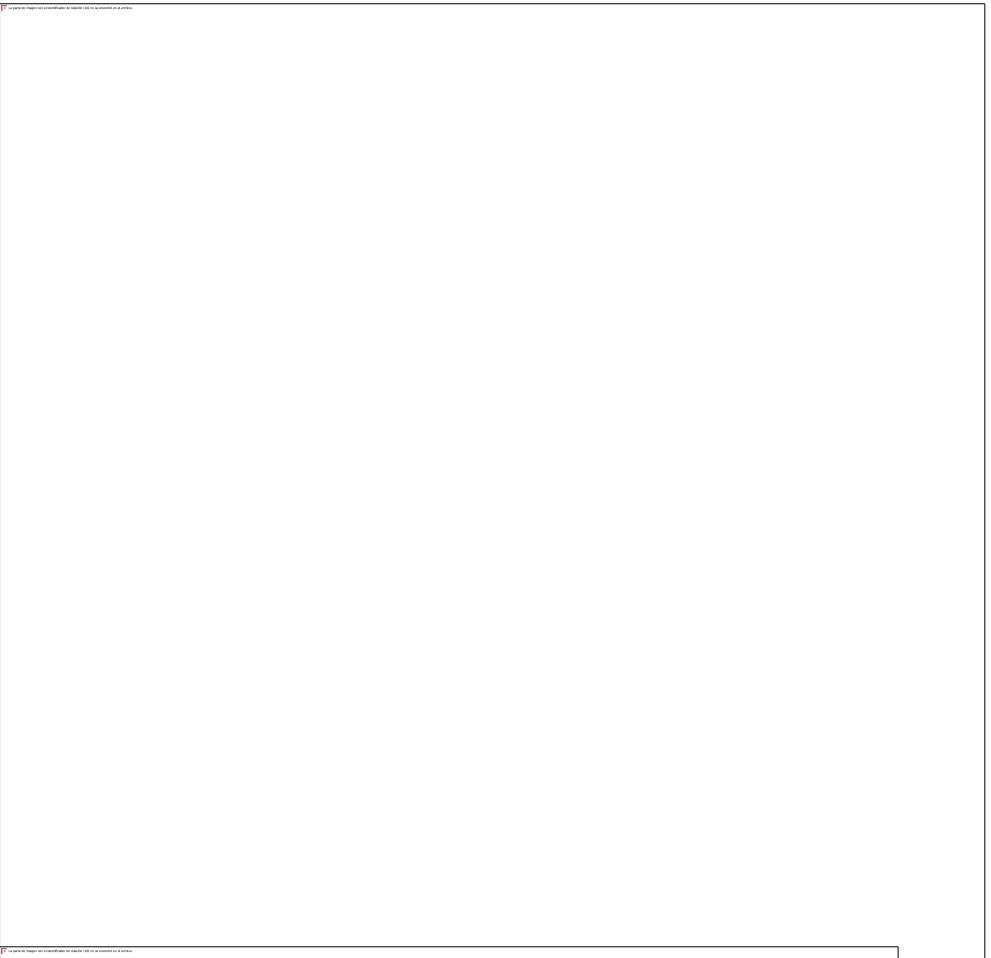
Coordenadas cartesianas



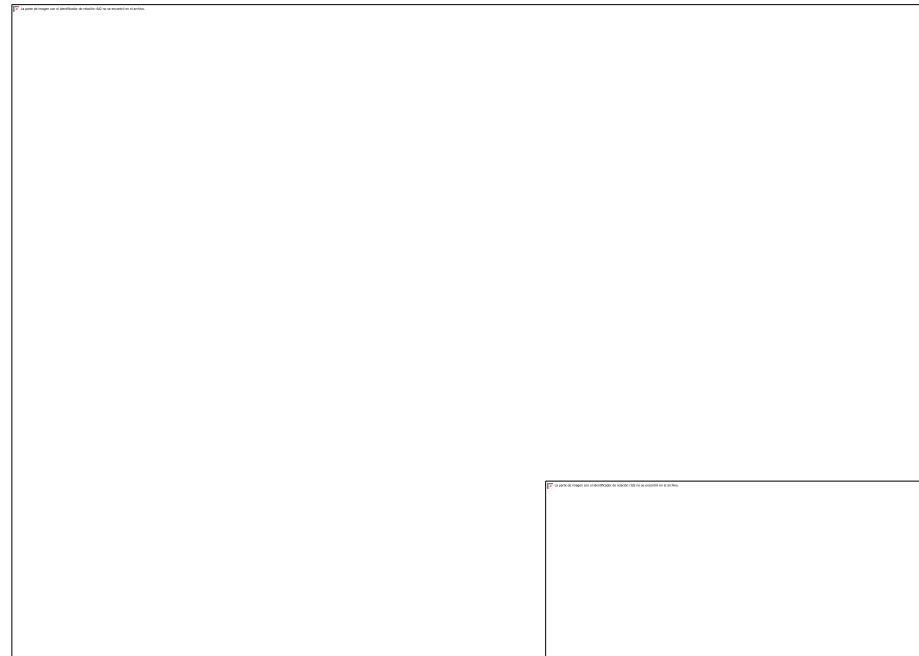
Coordenadas Cilíndricas



Definición de Líneas de Grid



Importar y Exportar archivos



Comandos de Edición e Impresión

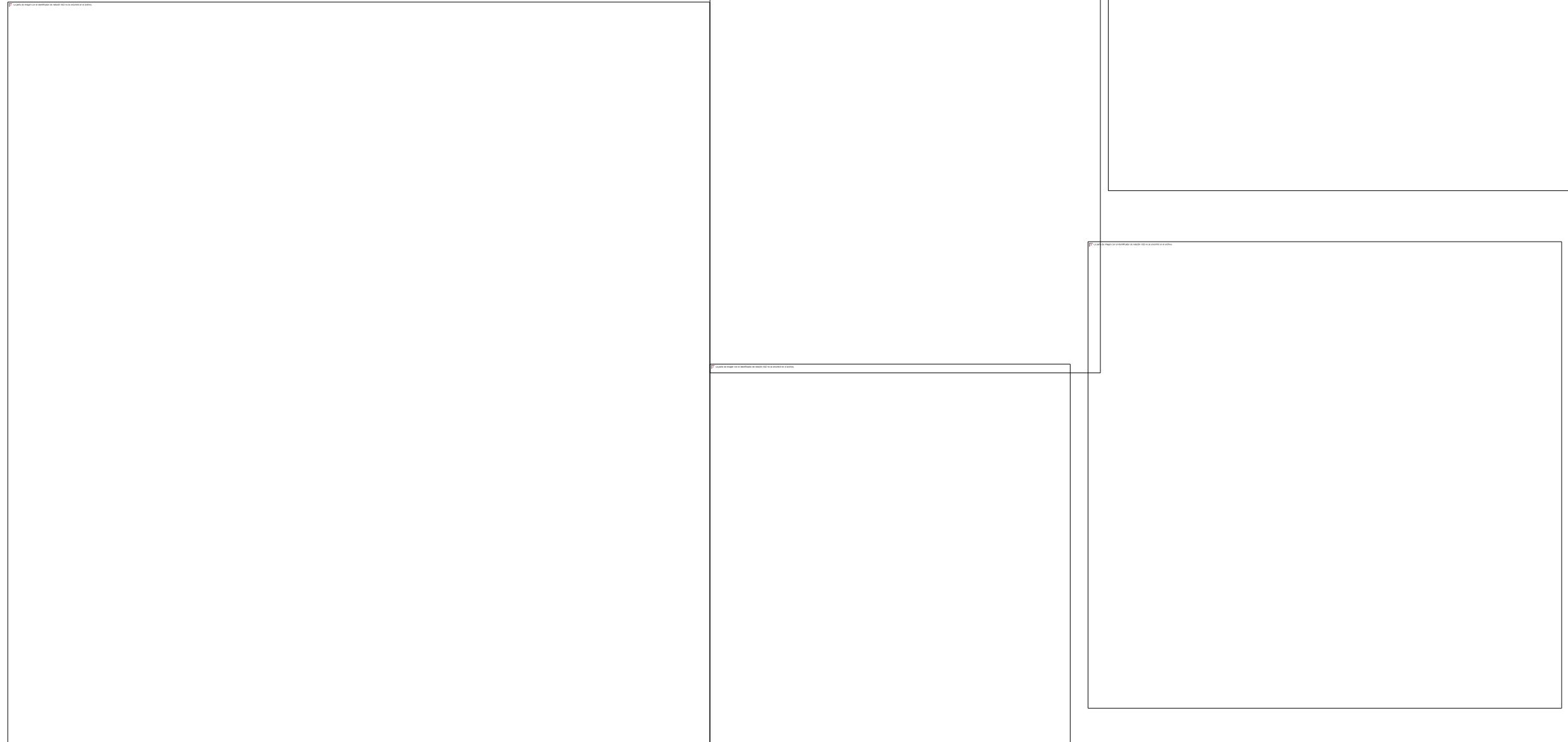
- Configuración de Impresión
- Impresión de Ventana
- Impresión de Tablas
- Configuración y Generación de Reportes
- Captura de Imagen

[Ver Manual SAP 2000](#)

3. Comandos de Edición

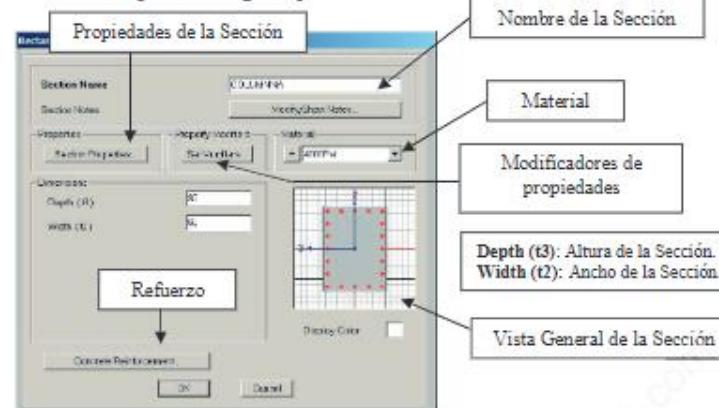
4. Comandos de Vista

5. Comandos de Definición



Vigas de Concreto

.- Sección Tipo: Rectangular para Columnas.

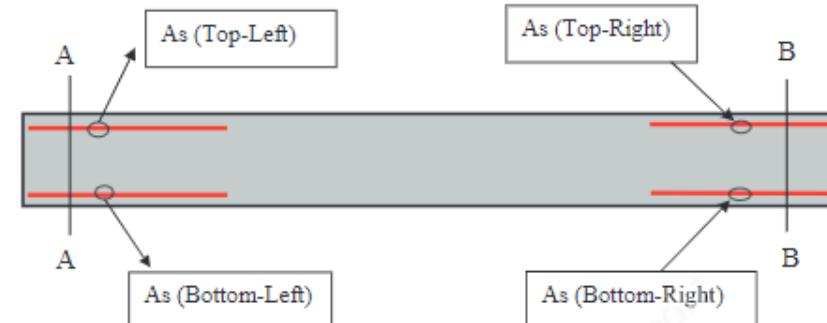


Reinforcement Data

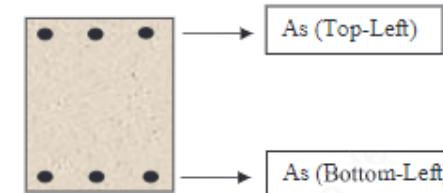
Rebar Material	Longitudinal Bars: A615Gr60
Confinement Bars (Ties)	A615Gr60
Design Type	
<input checked="" type="radio"/> Column (P-M2-M3 Design)	<input type="radio"/> Beam (M3 Design Only)
Reinforcement Configuration	
<input checked="" type="radio"/> Rectangular	<input type="radio"/> Ties
<input type="radio"/> Circular	<input type="radio"/> Sprio
Longitudinal Bars - Rectangular Configuration	
Clear Cover for Confinement Bars	4.
Number of Longt Bars Along 3-dir Face	5
Number of Longt Bars Along 2-dir Face	7
Longitudinal Bar Size	#6
Confinement Bars	
Confinement Bar Size	#3
Lugardinal Spacing of Confinement Bars	10.
Number of Confinement Bars in 3-dir	3
Number of Confinement Bars in 2-dir	4
Check/Design	
<input checked="" type="radio"/> Reinforcement to be Checked	<input type="radio"/> Reinforcement to be Designed
OK Cancel	

Es importante destacar que el diámetro de la barra Longitudinal sólo se toma en cuenta si se utiliza la opción "Be Checked", es decir, si se va a checar la sección con el acero de refuerzo indicado.

Esquema de Disposición de Aceros Reales a Flexión

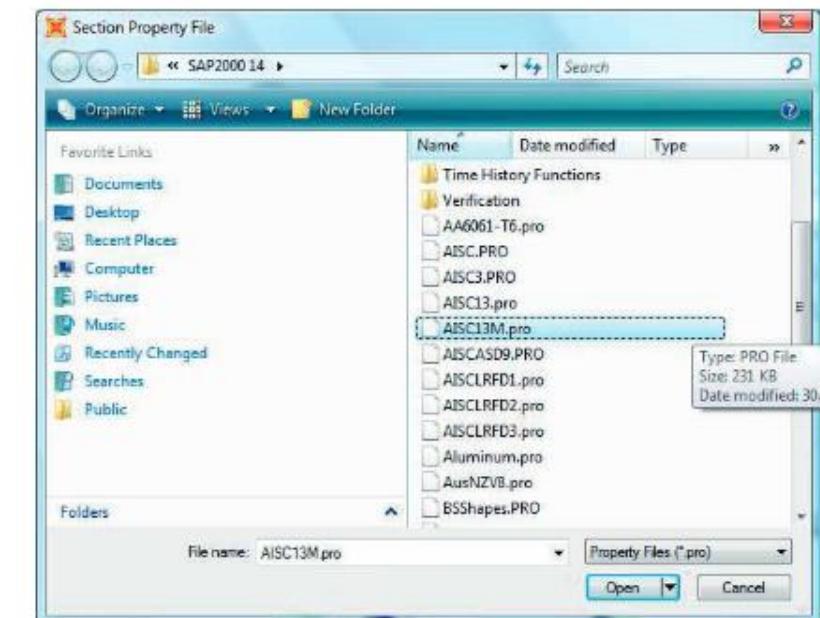


Sección A-A

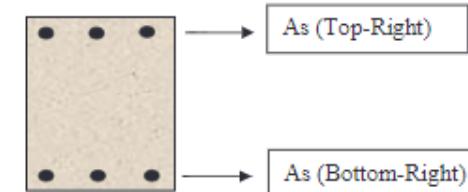


➤ Importar Secciones en Acero.

Una vez seleccionado el tipo de Sección (Wide Flange, Pipe, Angle, etc) debemos ir a la carpeta donde se encuentran las listas de Perfiles que trae el programa de manera predeterminada c:/Program Files/Computer and Structures/SAP2000 14 y buscar las secciones .PRO

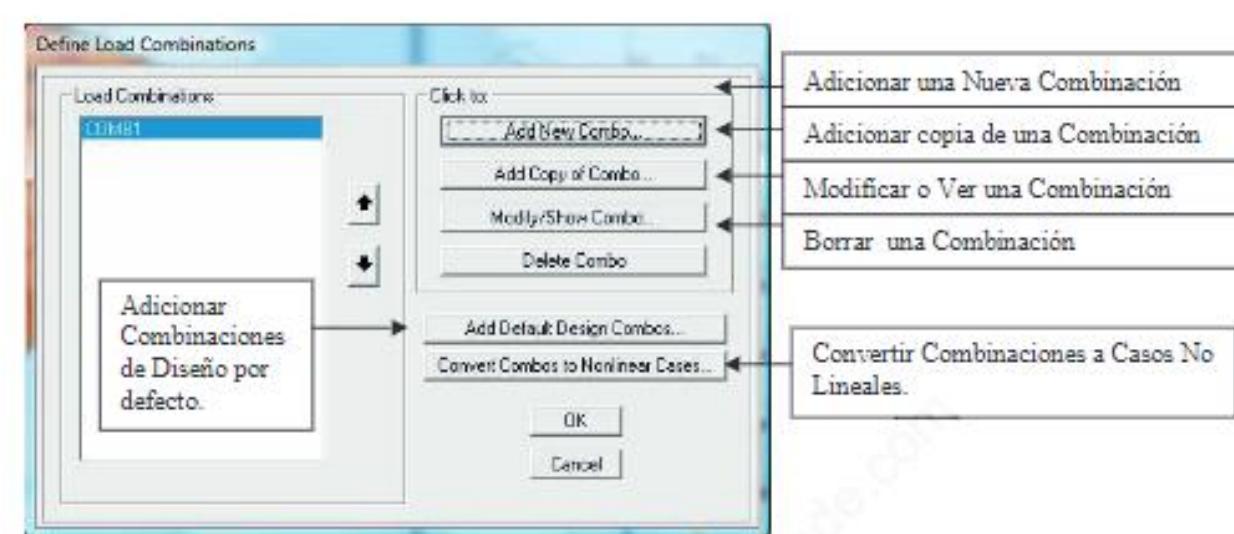
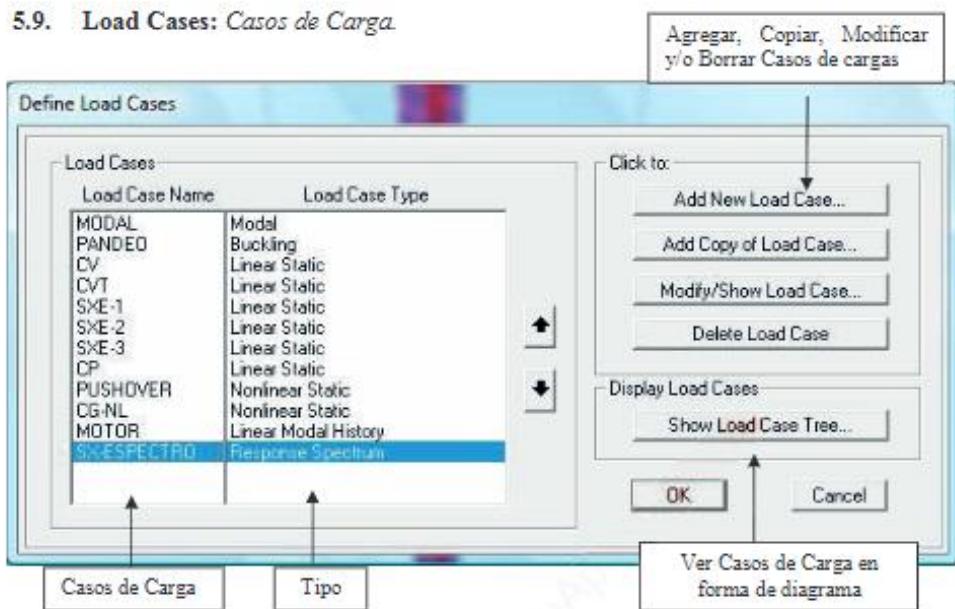


Sección B-B

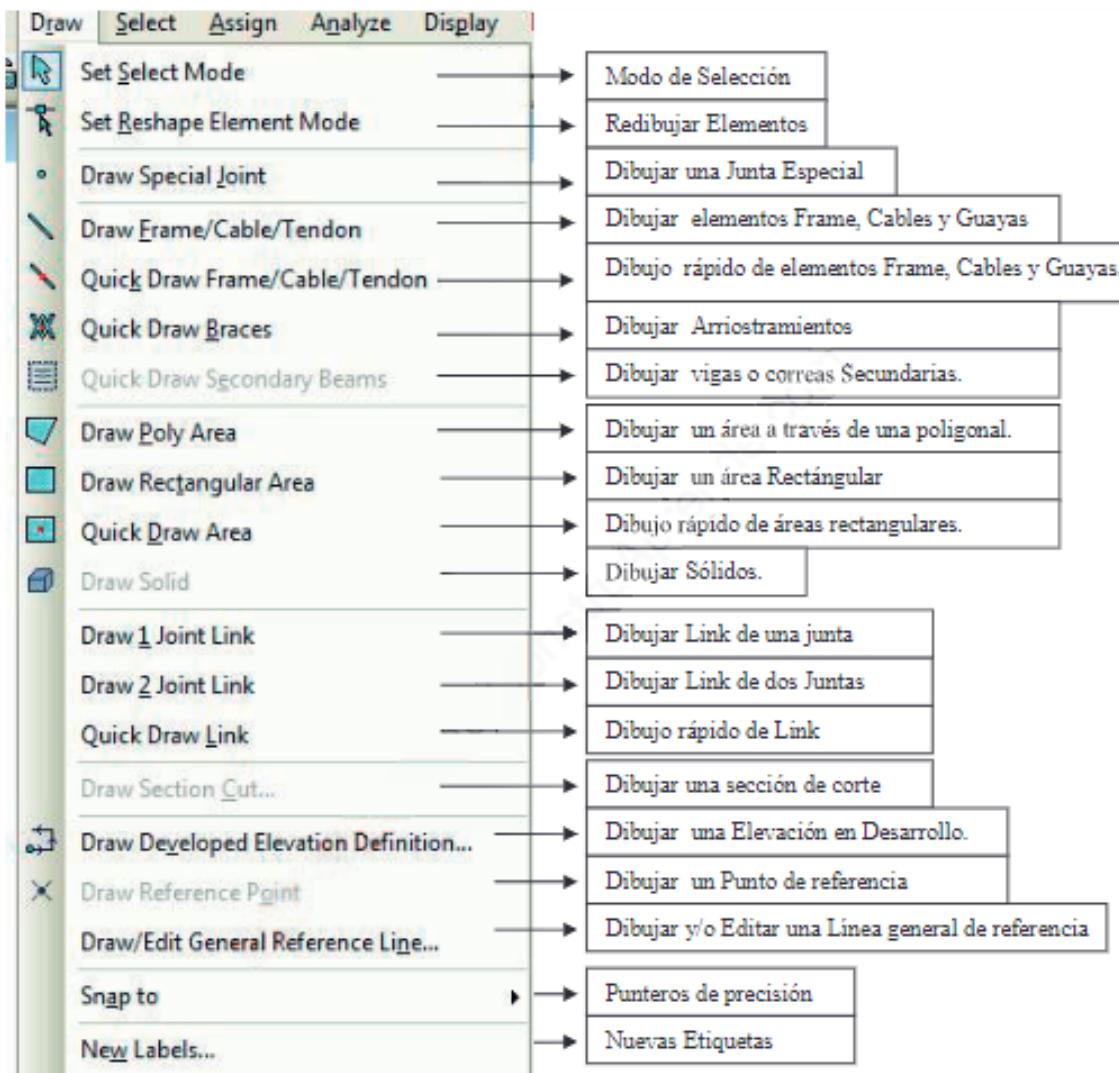


Casos de Carga y Combinación de Cargas

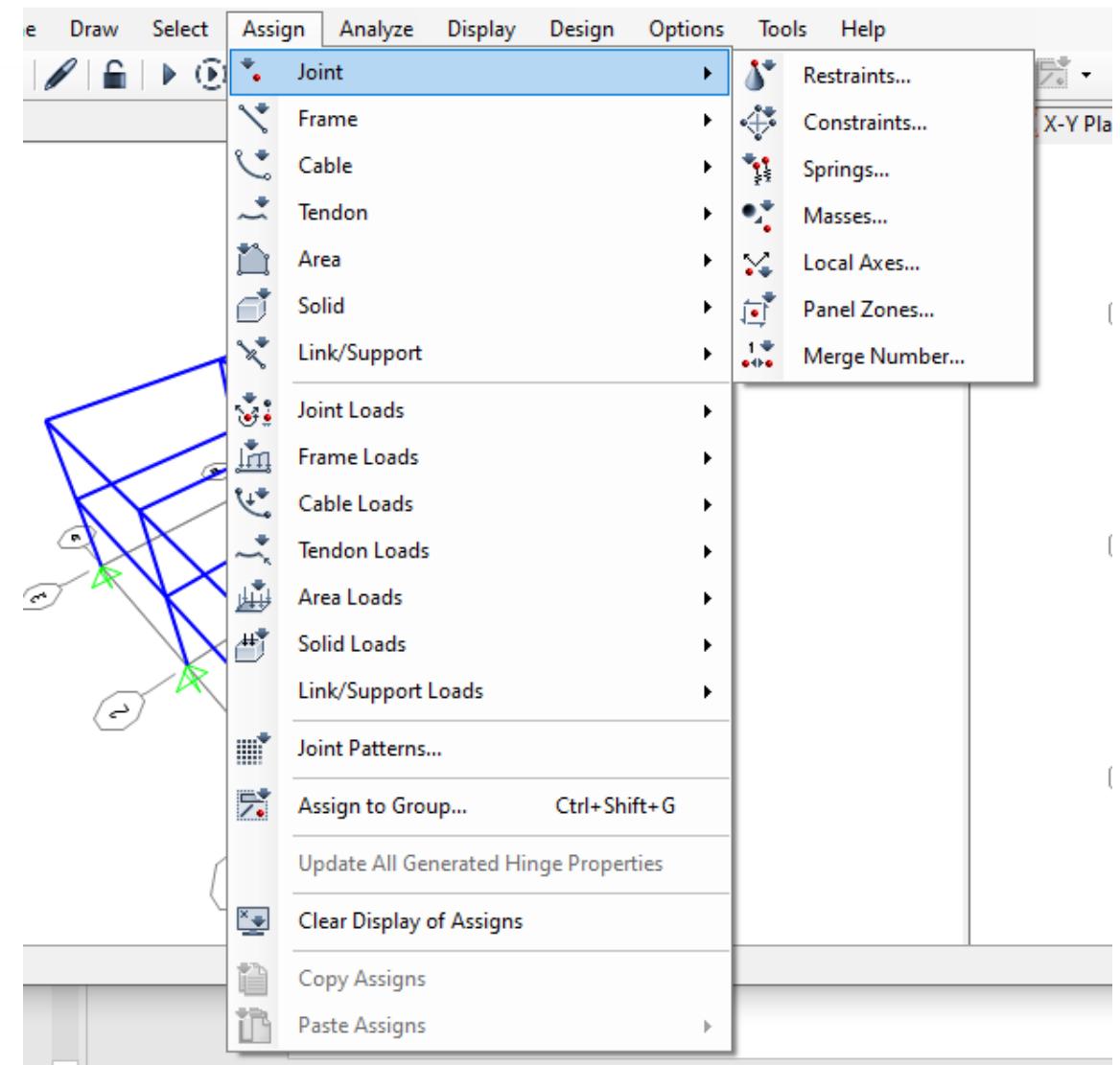
5.9. Load Cases: Casos de Carga



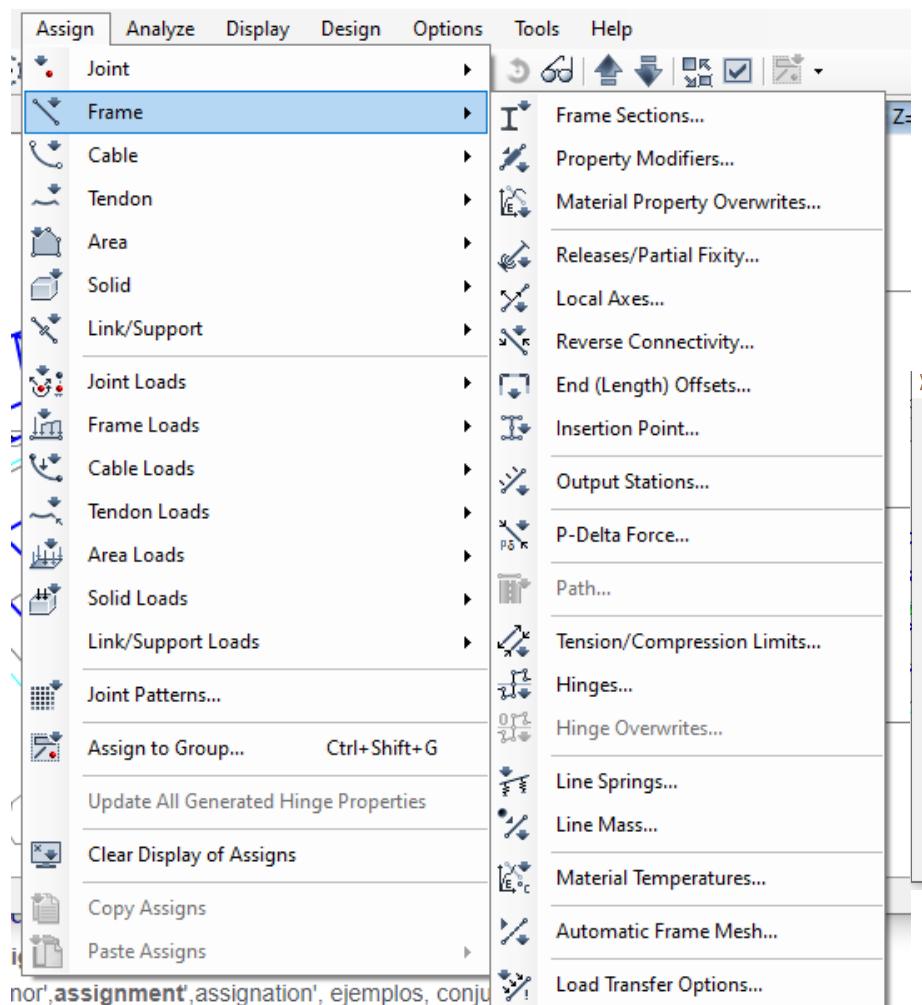
6. Comandos de Dibujo



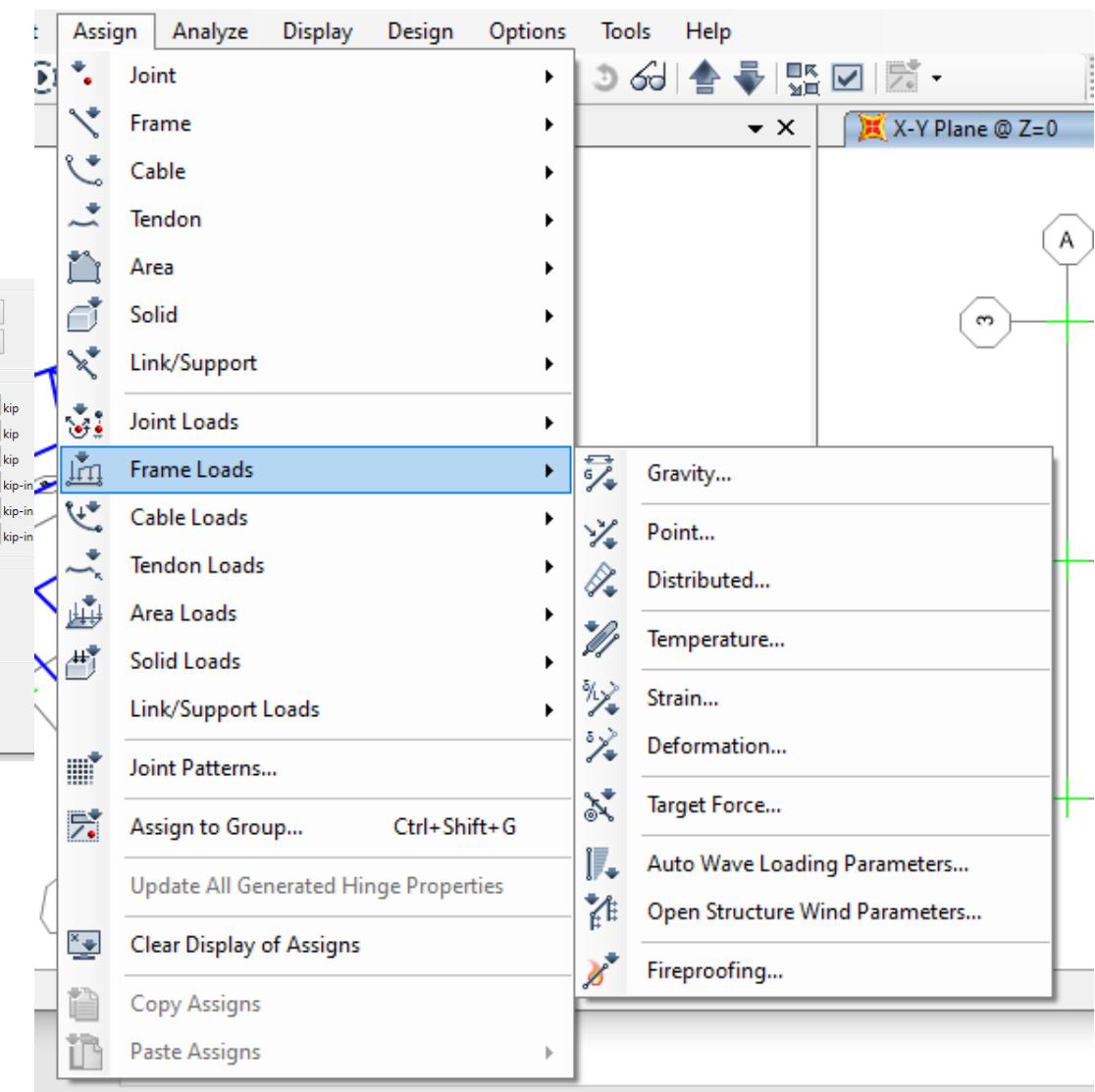
7. Comandos de Asignación de Datos. Condiciones de Soporte



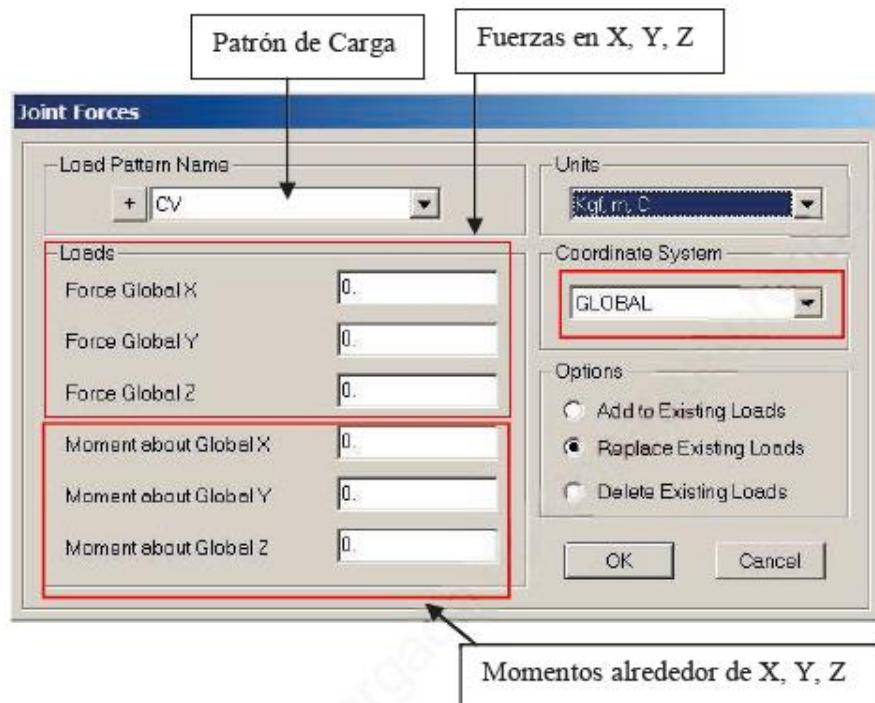
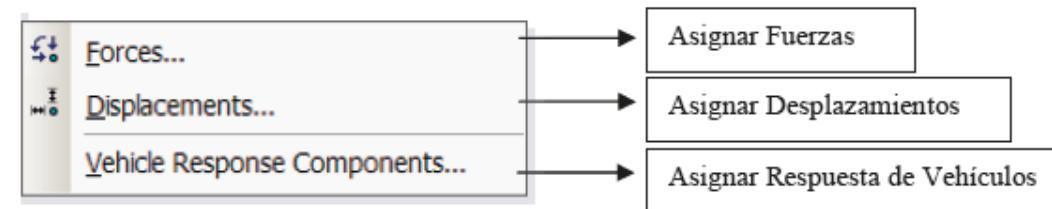
7. Comandos de Asignación de Datos. Marcos



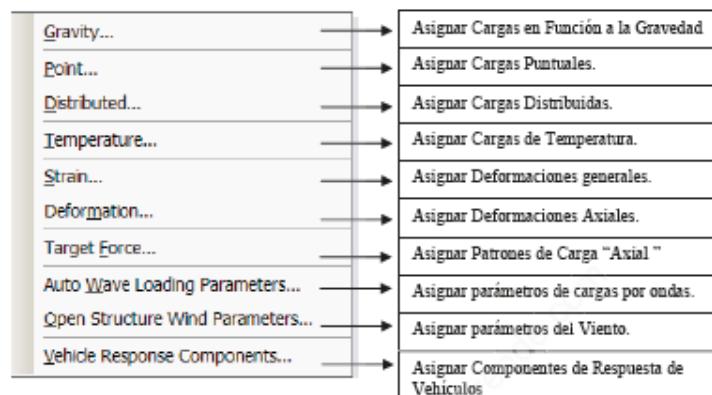
Introducción de cargas en Nodos y Elementos



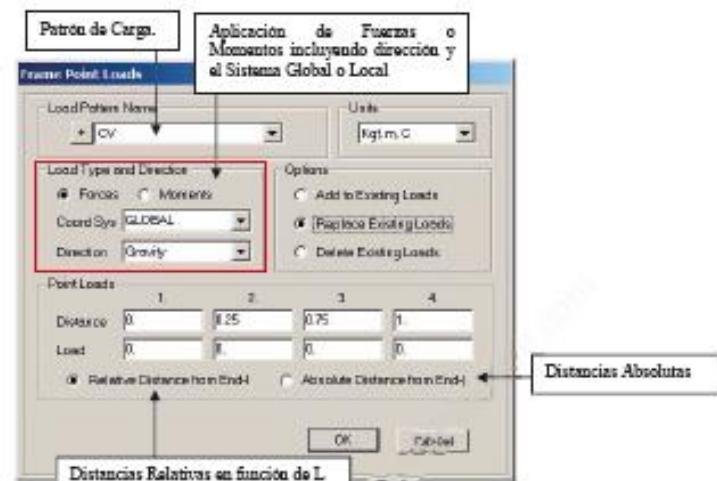
8.7. Joint Loads: Asignar Cargas a Juntas.



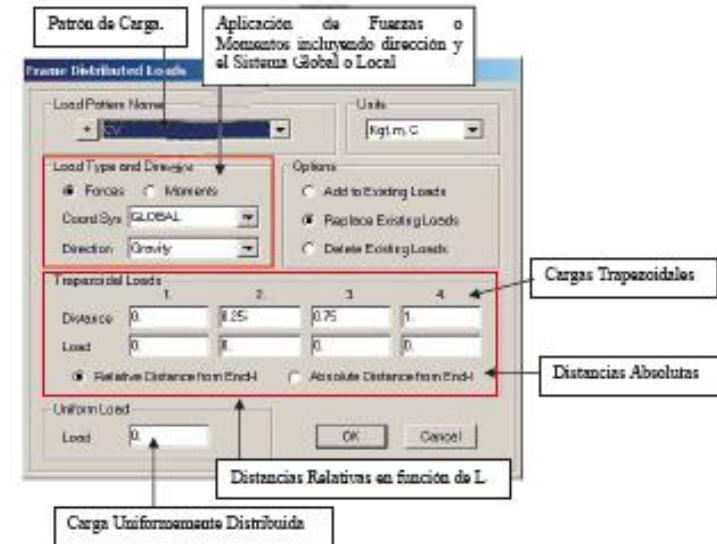
8.8. Frame Loads: Asignar Cargas a Elementos de Pórtico "Frames"



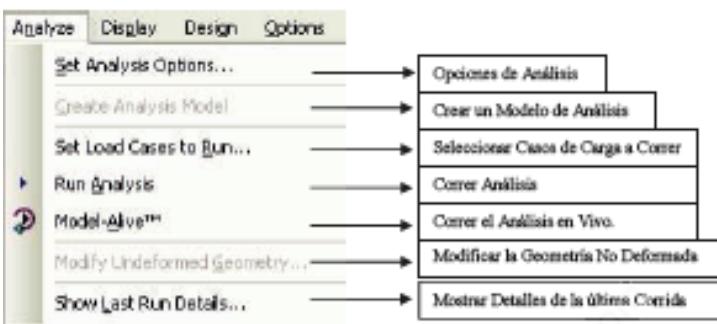
8.8.2. Points: Asignar Cargas Puntuales.



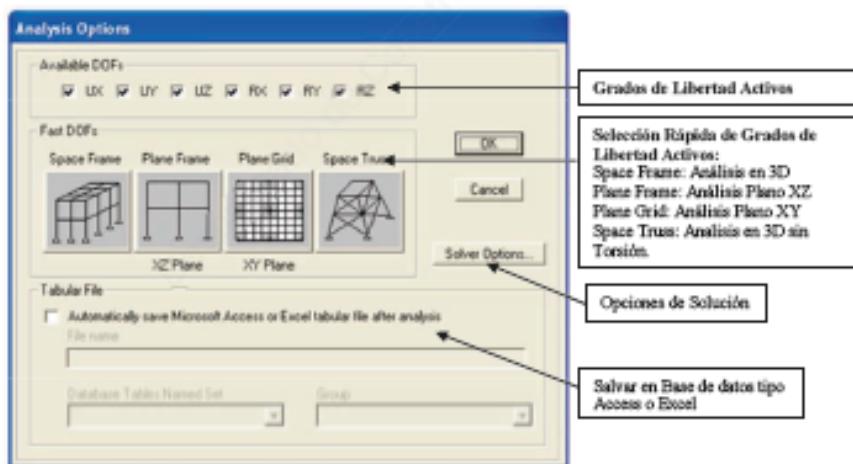
8.8.3. Distributed: Asignar Cargas Distribuidas.



8. Comandos de Ejecución del Programa

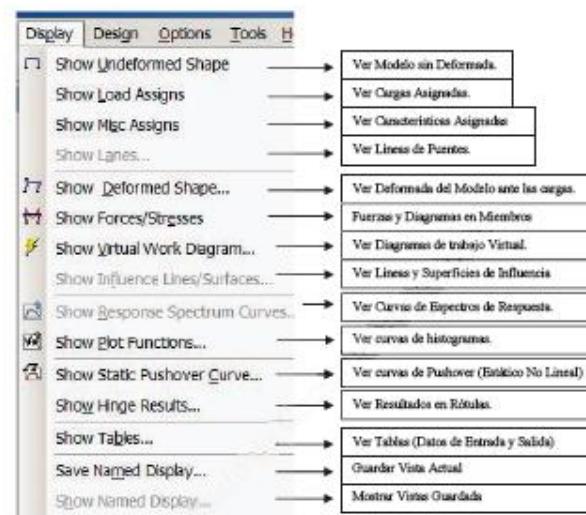


1. Set Analysis Options: Opciones de Análisis. Análisis Plano o Espacial. Análisis Dinámico. Efecto P-Delta.

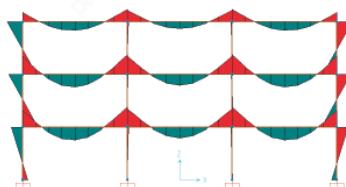
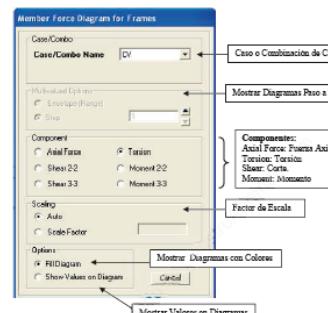


9. Comandos para mostrar datos introducidos y resultados del programa

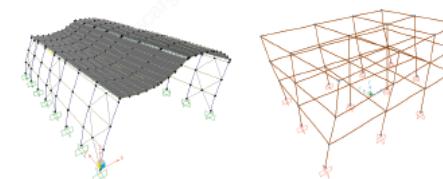
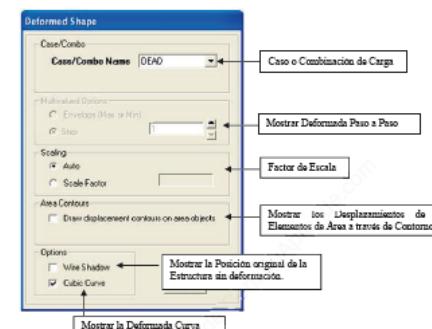
10. Menú Display: Mostrar.



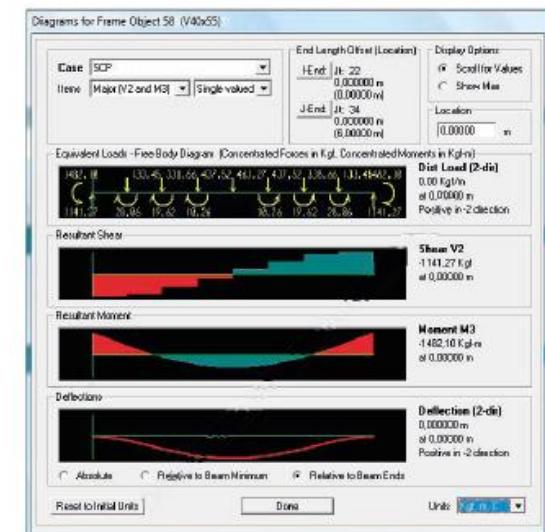
10.4.2. Frame/Cables: Fuerzas en elementos de Pórtico "Frame" y Cables.



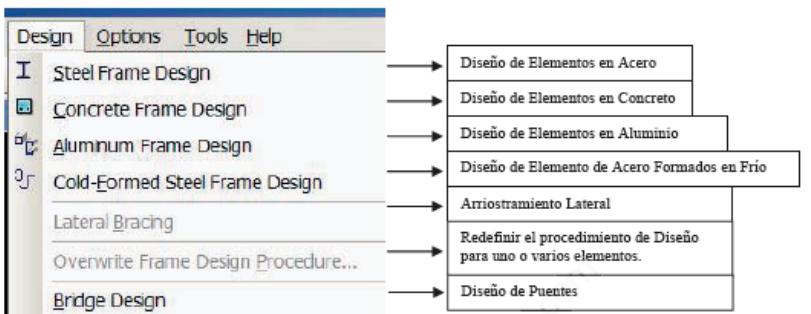
10.3. Show Deformed Shape: Ver Deformada del Modelo.



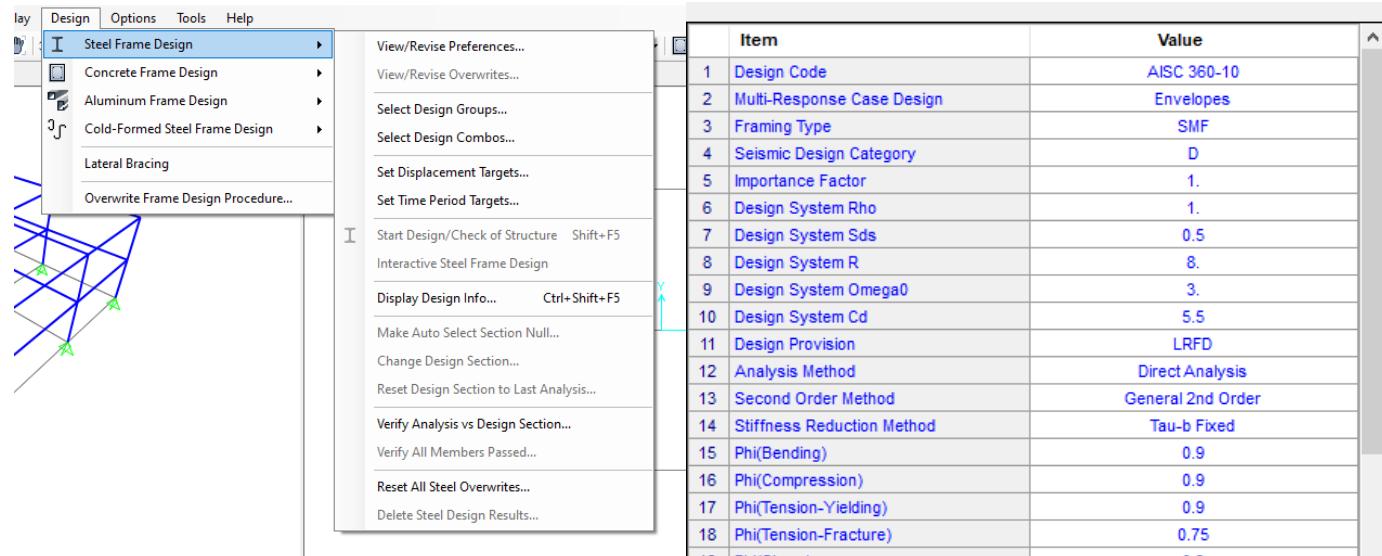
Si se selecciona un elemento y se hace click en el botón derecho de mouse, se tiene:



Comandos para Diseño



View/Revise Preferences...	Ver y/o Redefinir Preferencias del Diseño
View/Revise Overwrites...	Ver y/o Redefinir Parámetros de Diseño
Select Design Groups...	Seleccionar Grupos de Diseño
Select Design Combos...	Seleccionar Combinaciones de Diseño
Set Displacement Targets...	Límites de Desplazamiento Lateral
Set Time Period Targets...	Establecer Límites para períodos de formas modales
Start Design/Check of Structure	Comenzar el diseño y/o Chequeo de la Estructura
Interactive Steel Frame Design	Diseño Interactivo de elementos en Acero
Display Design Info...	Mostrar Información del Diseño
Make Auto Select Section Null...	Anular la sección definida por Auto-Selección
Change Design Section...	Cambiar la Sección de Diseño
Reset Design Section to Last Analysis...	Borrar las Secciones de Diseño del Último Análisis
Verify Analysis vs Design Section...	Verificar la Sección de Análisis Vs Sección de Diseño
Verify all Members Passed...	Verificar Todos los elementos que Satisfacen
Reset All Steel Overwrites...	Borrar definiciones de los parámetros en Acero
Delete Steel Design Results...	Borrar los resultados del Diseño en Acero



Item	Value
1 Design Code	ACI 318-14
2 Multi-Response Case Design	Envelopes
3 Number of Interaction Curves	24
4 Number of Interaction Points	11
5 Consider Minimum Eccentricity?	Yes
6 Seismic Design Category	D
7 Design System Rho	1.
8 Design System Sds	0.5
9 Phi (Tension Controlled)	0.9
10 Phi (Compression Controlled Tied)	0.65
11 Phi (Compression Controlled Spiral)	0.75
12 Phi (Shear and/or Torsion)	0.75
13 Phi (Shear Seismic)	0.6
14 Phi (Joint Shear)	0.85
15 Pattern Live Load Factor	0.75
16 Utilization Factor Limit	0.95

Item	Value
1 Design Code	AISC 360-10
2 Multi-Response Case Design	Envelopes
3 Framing Type	SMF
4 Seismic Design Category	D
5 Importance Factor	1.
6 Design System Rho	1.
7 Design System Sds	0.5
8 Design System R	8.
9 Design System Omega0	3.
10 Design System Cd	5.5
11 Design Provision	LRFD
12 Analysis Method	Direct Analysis
13 Second Order Method	General 2nd Order
14 Stiffness Reduction Method	Tau-b Fixed
15 Phi(Bending)	0.9
16 Phi(Compression)	0.9
17 Phi(Tension-Yielding)	0.9
18 Phi(Tension-Fracture)	0.75
19 Phi(Shear)	0.9
20 Phi(Shear-Short Webbed Rolled I)	1.
21 Phi(Torsion)	0.9
22 Ignore Seismic Code?	No
23 Ignore Special Seismic Load?	No

Item	Value
1 Design Code	ACI 318-14
2 Multi-Response Case Design	ACI 318-14
3 Number of Interaction Curves	ACI 318-11
4 Number of Interaction Points	ACI 318-08/IBC2009
5 Consider Minimum Eccentricity?	AS 3600-09
6 Seismic Design Category	BS8110 97
7 Design System Rho	CSA A23.3-14
8 Design System Sds	CSA A23.3-04
9 Phi (Tension Controlled)	Eurocode 2-2004
10 Phi (Compression Controlled Tied)	Hong Kong CP 2013
11 Phi (Compression Controlled Spiral)	Indian IS 456-2000
12 Phi (Shear and/or Torsion)	Italian NTC 2008
13 Phi (Shear Seismic)	KBC 2009
14 Phi (Joint Shear)	Mexican RCDF 2004
15 Pattern Live Load Factor	NZS 3101:2006
16 Utilization Factor Limit	Singapore CP 65:99
	SP 63.13330.2012
	TS 500-2000
	0.75
	0.95

Seleccionar Combinaciones de Diseño

Design Load Combinations Selection

Load Combinations for Design

Select Type of Design Load Combination
Load Combination Type: Strength

Select Load Combinations
List of Load Combinations: COMB3, COMB4, COMB5, COMB6, COMB7, COMB8, COMB9
Design Load Combinations: COMB1, COMB10, COMB11, COMB12, COMB2
Buttons: Add >, <- Remove, Show...

Automatic Design Load Combinations:
 Automatically Generate Code-Based Design Load Combinations
Buttons: Set Automatic Design Load Combination Data..., OK, Cancel

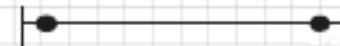
Tipo de Combinación:

Strength: Fuerzas
Deflection: Flecha

Combinaciones Agregadas

Lista de Combinaciones

Generar Combinaciones Automáticamente por el Código de Diseño

ACI 318-05/IRC 2003 BEAM SECTION DESIGN Type: Swag Special Units: Kgf-cm (Shear Details)					
Level : P1S01	L:500.000	B:40.000	bf:40.000		
Element : B25	D:55.000	ds:0.000	dob:5.000		
Station Len : 475.000	E:253185.065	Fo:250.000	Lt.M.L. Fac.=1.000		
Section ID : UNEV55	Fy=42000.000	Fys=42000.000			
Cosbo ID : UDC003					
Phi(Bending):	0.900				
Phi(Shear):	0.750				
Phi(Seis Shear):	0.600				
Phi(Torsion):	0.750				
					
Cortes por Capacidad con el acero de cálculo					
SHEAR/TORSION DESIGN FOR U2 and T					
Rebar: Rebar: Rebar: Design: Design: Design:	Rebar: Rebar: Rebar: Design: Design: Design:	Rebar: Rebar: Design: Design: Design:	Rebar: Rebar: Design: Design: Design:		
Uu: 0.132	At: 0.012	A1: 8.395	Uu: 16627.817	At: 38530.8401024199.737	A1: 0.000
Design Forces					
Factored: Factored: Capacity: Gravity:	Factored: Factored: Capacity: Gravity:	Capacity: Gravity:	Capacity:		
Uu: 16627.817-2163051.40	Mu: 10333.501	Up: 2402.424	Up: 0.000		
As(Bot): 6.696	As(Top): 12.194	Mpos: 2859778.222	Mneg: 0.000		
Corte por Gravedad					
Capacidad Momento (Izquierda) con el acero de cálculo					
Capacidad Momento (Derecha) con el acero de cálculo					
Si el Corte por capacidad es superior al corte gravitacional implica que $\delta Vc = 0$					
Design Basic					
Design: Concrete Area: Area Tensile Rein:	Design: Concrete Area: Area Tensile Rein:	Strength: Fys:	Strength Limit. Reduc:		
Uu: 16627.817	Ac: 2000.000	Rg: 2280.000	Fcs: 250.000		
As: 6.696	At: 12.2181684881.8742955273.607	Rst: 6.696	Factor: 1.000		
Shear Rebar Design					
Stress: Concrete Epcry: Upper Limit: Rebar Area:	Stress: Concrete Epcry: Upper Limit: Rebar Area:	Shear: PhiXUs:	Shear: PhiXUs:		
V: 8.314	Uc: 5.831	Us: 33.548	PhiXUs: 16627.817		
Torsion Capacity					
Torsion: Critical: Concrete Area:	Torsion: Critical: Concrete Area:	Perimeter: Pm:	Perimeter: Pm:		
Tu: 0.000	PhiXUn:	PhiXUn:	PhiXUn:		

Opciones de Configuración

