

Síntesis del Programa de la Asignatura

(Fundamento Legal: Artículo 89 del Decreto Ejecutivo 539 de 30 de agosto de 2018)

1. DATOS GENERALES:

Facultad: Arquitectura y Diseño	Escuela: Arquitectura Estructural	Período:2022-7C
Denominación de la asignatura: Diseño Estructural II		Abrev.: EST Código:5762
Créditos: 4	Horas dedicación:5	Teóricas:3 Prácticas:2 Total de horas por semana:5
Prerrequisitos: Diseño Estructural I- 5761		Ubicación en el plan de estudio: 10 cuatrimestre
Área de Formación:		
Pregrado y Grado	General: <input type="checkbox"/> Integración <input type="checkbox"/> Servicio Social	<input type="checkbox"/>
	Profesional: <input type="checkbox"/> Básica <input type="checkbox"/> Apoyo <input checked="" type="checkbox"/> Especialidad <input type="checkbox"/> Libre Elección	
Postgrado	<input type="checkbox"/> Integración e Investigación <input type="checkbox"/> Especialidad	
Docente: Alonso González L.	Teléfono:	Celular:6213-8766

2. DESCRIPCIÓN:

Este curso que es la continuación del curso de Diseño Estructural I empieza con los conceptos de, esbeltez de columnas y se establecen las fórmulas de diseño para columnas esbeltas en marcos arriostrados y no arriostrados, seguido de diseño e zapatas aisladas con momentos aplicados en la base de la estructura. Continua con la presentación de diversos métodos de diseño para losas reforzadas en dos direcciones y termina en la introducción de un nuevo tipo de estructura, la estructura de concreto presforzada. En esta última sección se determinan las características del concreto y el refuerzo, el análisis de esfuerzos, resistencia a capacidad última, esfuerzo cortante, deformaciones en fin , todo el análisis de diseño usado en concreto reforzado aplicado en este nuevo tipo de refuerzo, terminando con algunas consideraciones en el anclaje y lasas postensadas.

3. COMPETENCIAS:

3.1 Competencias Genéricas:

COMPETENCIA	Nivel de desempeño que aplica a la asignatura
Comunicación	Reelaborar la información recibida y expresarla lógicamente a través de medios orales, escritos y gráficos. <ul style="list-style-type: none"> • Expresión verbal, escrita, comunicación en otro idioma
Liderazgo Intelectual	Evaluando las propias propuestas profesionales en función de sus alcances y limitaciones para la solución de problemas globales. <ul style="list-style-type: none"> • Conciencia de la dignidad de la persona. • Conciencia ecológica. • Experiencia estética.

Aprendizaje Colaborativo y en Equipo	Escuchar y participar en la organización del trabajo y asumir responsablemente la tarea que corresponda en un equipo de trabajo <ul style="list-style-type: none"> • Planeación • Trabajo en Equipo • Liderazgo Colaborativo
Innovación y Cambio	Ponderar y valorar las fortalezas y debilidades, así como las expectativas y convicciones personales para adecuarlas al contexto y tomar opciones éticas fundamentadas. - Responsabilidad y compromiso
Visión Humanista	Problematizar la realidad y explorar alternativas de respuesta <ul style="list-style-type: none"> • Pensamiento crítico y creativo • Solución de problemas
Manejo de Sí	Cuestionar lo dado y anticipar alternativas desde diferentes escenarios. - Imaginación y creatividad. - Hab. de proyección/previsión (anticipación).

3.2 Competencias Específicas:

3.2.1 De la carrera (de acuerdo al Perfil del Egresado por competencias)

APRENDER A CONOCER

- Desarrollar la habilidad de reducir los problemas a una serie de problemas componentes más sencillos que puedan analizarse y combinarse fácilmente para dar la solución del problema inicial.
- Presentar los resultados de manera clara, lógica y limpia, junto con una metodología eficaz para la descomposición y solución de problemas.
- Crear un enfoque disciplinado que es tan necesario en la mayoría de los trabajos técnicos de ingeniería.

APRENDER A HACER

- Utilizar la compresión general del movimiento de los cuerpos para relacionar los conceptos de velocidad y aceleración, y analizar las fuerzas de los cuerpos en problemas básicos de ingeniería.
- Identificar el método para resolver problemas ingenieriles que involucran cinemática, segunda ley de newton y conservación de energía.
- Identificar problemas de eficiencia de máquinas y darle solución con conceptos básicos de dinámica

APRENDER A SER

- Debe tener sentido de responsabilidad
- Saber trabajar en equipo
- Deber tener espíritu creativo e innovador
- Saber buscar y analizar información
- Saber tomar decisiones
- Debe ser puntual
- Debe ser organizado

APRENDER A VIVIR

- Tener una visión humanista, ecológica con alto sentido social para comprender, interpretar y proponer soluciones a los problemas sociales y generar condiciones más justas y plenamente humanas.

SABER EMPRENDER

- Poner en práctica todo el conocimiento adquirido, experiencias y circunstancias para innovar y crear conocimiento para mejora de la industria de la construcción.
- Proactivo en la toma de decisiones y capaz de desarrollar su propia empresa relacionada con las competencias adquiridas

3.2.2 De la asignatura

APRENDER A CONOCER

- Definir la relación de esbeltez en marcos arriostrados y no arriostrados
- Describir el comportamiento del refuerzo en losas reforzadas en dos direcciones
- Definir los conceptos básicos para el diseño de elementos de concreto presforzado

APRENDER A HACER

- Calcular el refuerzo en columnas de marcos de concreto reforzado arriostrados y no arriostrados
- Diseñar losas reforzadas en dos direcciones por métodos elásticos y resistencia última
- Analizar vigas presforzadas sometidas a flexión
- Diseñar vigas a flexión por el método de carga balanceada.
- Verificar el cortante y deformación en vigas de concreto presforzado.
- Calcular el acero de refuerzo en losas de concreto reforzado.

APRENDER A SER

- Debe tener sentido de responsabilidad
- Saber trabajar en equipo
- Deber tener espíritu creativo e innovador
- Saber buscar y analizar información
- Saber tomar decisiones
- Debe ser puntual
- Debe ser organizado

APRENDER A VIVIR

- Tener una visión humanista, ecológica con alto sentido social para comprender, interpretar y proponer soluciones a los problemas sociales y generar condiciones más justas y plenamente humanas que se puedan generar el desarrollo de un proyecto integral de concreto reforzado integral con columnas esbeltas y losas planas, ya sea reforzadas o pretensadas.

SABER EMPRENDER

- Saber integrar cada uno de los conocimientos adquiridos previamente en los cursos aprobados de estática, resistencia de materiales y análisis estructural para el diseño de elementos estructurales de concreto presforzados
- Debe estar en la capacidad de diseñar en forma general una edificación de concreto reforzado y presforzados tomando como referencia los conceptos adquiridos
- Saber buscar la información requerida para un proyecto completo de diseño estructural de concreto preforzado

4. CONTENIDOS:

Tema N° 1. Diseño de Columnas a Flexión

- 1.1 Columnas bajo carga axial y momento
- 1.2 Carga balanceada de columna
- 1.3 Diseño de columnas con curva de interacción
- 1.4 Conceptos de esbeltez

- 1.5 Definición de marco con o sin desplazamiento lateral
- 1.6 Determinación de valores K con nomogramas y ecuaciones
- 1.7 Análisis y diseño de columnas con amplificación de momento de primer orden
- 1.8 Análisis y diseño de columnas con amplificación de momento de segundo
- 1.9 Concepto de Flexión Biaxial
- 1.10. Ecuación de Bresler
- 1.10 Problemas de aplicación.

Tema N° 2. Diseño de losas reforzadas en dos direcciones

- 2.1 Concepto de losas en dos direcciones
- 2.2. Método directo
- 2.3. Método del portal equivalente
- 2.4. Método de resistencia última
- 2.5 Detalles de unión viga-columna

Tema N° 3. Concreto presforzado

- 3.1 Conceptos Básicos del presfuerzo
- 3.2 Materiales usados
- 3.3 Cálculo de esfuerzos
- 3.4 Pérdidas en presfuerzo
- 3.5 Análisis de secciones a flexión
- 3.6 Diseño a flexión- Método de carga balanceada
- 3.7 Esfuerzo cortante, adherencia
- 3.8 Deformaciones
- 3.9 Anclaje en los extremos
- 4 Consideraciones de diseño de losas postensadas

2. METODOLOGÍA:

- ✓ Sesiones de preguntas y respuestas
- ✓ Técnica ABP (aprendizaje en base a problemas)
- ✓ Talleres y tareas individuales
- ✓ Investigaciones
- ✓ Exámenes parciales
- ✓ Examen Final

3. EVALUACIÓN:

ASPECTOS	ACTIVIDAD	VALORES (%)
PARCIALES	3 exámenes parciales	40
TAREAS Y TALLERES	Entrega de problemas de cada módulo avanzado	10

PORAFOLIO	Un portafolio de evidencias de lo impartido durante el curso	10
INVESTIGACIÓN	Desarrollo y sustentación de una investigación	10
EXAMEN FINAL	1 examen final	30
Total		100

4. BIBLIOGRAFÍA:

- Edward Nawy. **PRESTRESSED CONCRETE**. Prentice Hall Editorial, 5^a Edición. U.S.A., 2009.
- MCCORMACK, JACK C.. **DISEÑO DE CONCRETO REFORZADO**. Editora Alfaomega. 10^a edición. México, 2018.
- NILSON, ARTHUR. **Design of Concrete Structures**. Editora McGraw-Hill. United States, 15th edition, 2016.

PROGRAMA ANALÍTICO DE ASIGNATURA

1. DATOS GENERALES:

Facultad: Arquitectura y Diseño		Escuela: Arquitectura Estructural		Período: 2022-7C
Denominación de la asignatura: Diseño Estructural II			Abrev.: CIV	Código: 5762
Créditos: 4	Horas dedicación: 3	Teóricas:2	Prácticas:	Total de horas por semana:5
Prerrequisitos: Diseño Estructural I- 5761		Ubicación en el plan de estudio: 10 cuatrimestre		
Área de Formación: Especialidad				
Pregrado y Grado	General:	<input type="checkbox"/> Integración	<input type="checkbox"/>	Servicio Social
	Profesional:	<input type="checkbox"/> Básica	<input type="checkbox"/> Apoyo	<input checked="" type="checkbox"/> Especialidad <input type="checkbox"/> Libre Elección
Postgrado		<input type="checkbox"/> Integración e Investigación	<input type="checkbox"/>	Especialidad
Docente: Alonso González Lezcano		Teléfono: 775-9619		Celular : 62138766

2. DESCRIPCIÓN:

Este curso que es la continuación del curso de Diseño Estructural I empieza con los conceptos de, esbeltez de columnas y se establecen las fórmulas de diseño para columnas esbeltas en marcos arriostrados y no arriostrados, seguido de diseño e zapatas aisladas con momentos aplicados en la base de la estructura. Continua con la presentación de diversos métodos de diseño para losas reforzadas en dos direcciones y termina en la introducción de un nuevo tipo de estructura, la estructura de concreto presforzada. En esta última sección se determinan las características del concreto y el refuerzo, el análisis de esfuerzos, resistencia a capacidad última, esfuerzo cortante, deformaciones en fin , todo el análisis de diseño usado en concreto reforzado aplicado en este nuevo tipo de refuerzo, terminando con algunas consideraciones en el anclaje y losas postensadas.

3. COMPETENCIAS:

3.1. Competencias Genéricas:

COMPETENCIA	Nivel de desempeño que aplica a la asignatura
Comunicación	Expresión oral y escrita
Liderazgo Intelectual	Pensamiento crítico y creativo, Solución de problemas
Aprendizaje Colaborativo y en Equipo	Planeación y Trabajo en Equipo
Innovación y Cambio	Capacidad de Adaptación y asunción de riesgos
Visión Humanista	Conciencia ecológica
Manejo de Sí	Responsabilidad y Compromiso

3.2. Competencias Específicas:

- **De la carrera (de acuerdo al Perfil del Egresado por competencias).** No aplica para asignaturas de Pregrado y Grado del área de Integración, Servicio Social y Electivas Generales)

APRENDER A CONOCER

- Determina los métodos constructivos ideales para las obras de construcción.
- Reconoce las condiciones físicas reales y específicas del sitio y sus alrededores.
- Interpreta el enfoque técnico y administrativo apropiado para ejecutar el proyecto.
- Reconoce las normas, estudios y requerimientos ambientales relacionados a proyectos de construcción.
- Identifica materiales y sistemas constructivos de acuerdo a los recursos disponibles y los requerimientos del proyecto.

APRENDER A HACER

- Diseña planos y especificaciones de obras de construcción para realización de proyectos.
- Elabora presupuestos para proyectos.
- Prepara planes de inspecciones y mantenimiento de acuerdo a las necesidades físicas del proyecto.
- Formula el plan de ejecución y administración de proyecto para cumplir con los parámetros, costos, calidad y tiempo.
- Verifica el cumplimiento de las normas ambientales para el logro de la sostenibilidad.
- Ejecuta la administración de los proyectos de construcción con altos valores éticos.
- Formula estrategias por actividad para la optimización de los recursos disponibles en el proyecto.
- Aplica las normas técnicas y mejores prácticas de construcción en la ejecución del proyecto.
- Inspecciona las obras de construcción para que cumplan con el enfoque técnico estipulado.
- Ejecuta los planes de calidad preparados para la obra de construcción.

- Controla la ejecución del proyecto dando seguimiento continuo a las actividades en desarrollo.
- Presupuesta detalladamente los costos del proyecto.

APRENDER A SER

- Aplica el código de ética en la elaboración de los diseños y los planos.
- Actúa con respeto a las normas legales en la etapa de planeación del proyecto de construcción.
- Domina el lenguaje técnico para la mejor comunicación de las partes involucradas o para la solución de problemas durante la ejecución del plan.
- Actúa con liderazgo en la organización de los equipos de trabajo para el cumplimiento de los objetivos del proyecto.

APRENDER A VIVIR

- Considera los métodos constructivos incorporando las normas de seguridad nacionales e internacionales que afectan el entorno.
- Comprende las necesidades de todos los interesados y su interacción con el entorno.
- Considera las normas ambientales en la formulación de los planes.
- Informa responsablemente sobre las condiciones reales de la obra para salvaguardar la seguridad humana y de ambiente.
- Respeta los códigos de construcción y normas de seguridad para salvaguardar la integridad de los usuarios.
- Empatiza con las partes interesadas del proyecto.
- Dirige proyectos incorporando la tecnología oportuna que satisfagan el diseño y los requerimientos necesarios para el bienestar social y del ambiente.

SABER EMPRENDER

- Incorpora la innovación con nuevas tecnologías de diseño amigables con el ambiente.
- Transforma eficientemente el proceso de levantamiento de requerimientos y planificación del proyecto a realizar.
- Propone procesos para mitigar el impacto negativo de la construcción de obras civiles en la comunidad.

▪ **De la asignatura**

APRENDER A CONOCER

- Concepto de esbeltez de columnas
- La diferencia de marcos arriostrados y no arriostrados
- Ubicación de refuerzo de losas reforzadas en dos direcciones
- Conceptos básicos del acero de presfuerzo
- Procedimiento de diseño a flexión y cortante de elementos presforzados

APRENDER A HACER

- Diseñar columnas esbeltas en marcos arriostrados y no arriostrados
- Calcular el acero de refuerzo de losas reforzadas en dos direcciones
- Diseñar vigas y losas presforzadas

APRENDER A SER

- Debe tener sentido de responsabilidad
- Saber trabajar en equipo
- Deber tener espíritu creativo e innovador
- Saber buscar y analizar información
- Saber tomar decisiones
- Debe ser puntual
- Debe ser organizado

APRENDER A VIVIR

- Tener una visión humanista, ecológica con alto sentido social para comprender, interpretar y proponer soluciones a los problemas sociales y generar condiciones más justas y plenamente humanas que se puedan generar el desarrollo de un proyecto en donde se usen conceptos de diseño de estructuras de concreto reforzado y presforzado

SABER EMPRENDER

- Identificar la aplicación de los problemas relacionados con diseño de concreto reforzado y presforzado con las diferentes áreas de la ingeniería civil.
- Integrar cada uno de los conocimientos adquiridos previamente en los cursos aprobados para la solución de diseños integrales de concreto reforzado y presforzados

4. CONTENIDOS POR TEMA:

1. CONTENIDOS:

I. Columnas esbeltas

- a) Conceptos de esbeltez
- b) Definición de marco con o sin desplazamiento lateral
- c) Determinación de valores K con nomogramas y ecuaciones
- d) Análisis y diseño de columnas con amplificación de momento de primer orden
- e) Análisis y diseño de columnas con amplificación de momento de segundo orden
- f) Flexión biaxial de columnas

II. *Diseño de losas en dos direcciones*

- a) Concepto de losas en dos direcciones
- b) Método directo
- c) Método del portal equivalente
- d) Método de resistencia última
- e) Detalles de unión viga-columna

III. *Diseño de Elementos Presforzados*

- a) Conceptos Básicos del presfuerzo
- b) Materiales usados
- c) Cálculo de esfuerzos
- d) Pérdidas en presfuerzo
- e) Análisis de secciones a flexión
- a) Diseño a flexión- Método de carga balanceada
- f) Esfuerzo cortante, adherencia
- b) Deformaciones
- c) Anclaje en los extremos
- d) Consideraciones de diseño de losas postensadas

5. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS Y DE APRENDIZAJE:

- Clase Expositiva complementada con resolución de problemas
- Aprendizaje Basado en Problemas
- Talleres grupales y tareas
- Investigaciones
- Exámenes parciales y final
- Uso de software estructural

6. PLANIFICACIÓN SEMANAL:

SEMANA	CONTENIDOS	TÉCNICA	ACTIVIDAD (en función del alumno)	RECURSOS	EVALUACIÓN	COMPETENCIAS
1	<p>Flexo-Compresión de Columnas</p> <ul style="list-style-type: none"> • Columna Corta bajo Carga Axial y Momento • Carga balanceada de columna. Esfuerzos de Columna bajo carga excéntrica • Diseño de Columnas con curvas de Interacción 	<ul style="list-style-type: none"> • Clase expositiva • Taller 	<ul style="list-style-type: none"> • Desarrollo de problemas en clase 	<ul style="list-style-type: none"> • Libro de texto • Plataforma Teams • Código ACI 318 • Tablas de diagramas de interacción columnas • Open Board 	<ul style="list-style-type: none"> • Sumativa-Taller 	<ul style="list-style-type: none"> • Calcular el refuerzo de columnas bajo carga axial y momento • Encontrar carga balanceada y esfuerzos bajo carga excéntrica

2	<p>Columnas Esbeltas</p> <ul style="list-style-type: none"> • Concepto de esbeltez • Definición de marco con o sin desplazamiento lateral • Determinación de valores K • Análisis y Diseño de columnas esbeltas en marcos arriostrados y no arriostrados lateralmente 	<ul style="list-style-type: none"> • Clase expositiva 	<ul style="list-style-type: none"> • Tareas y taller 	<ul style="list-style-type: none"> • Libro de texto, tablero, marcador, código ACI 318 • Open Board 	<ul style="list-style-type: none"> • Diagnóstica (conversatorio y lluvia de ideas) • Sumativa (tareas talleres) 	<ul style="list-style-type: none"> • Determinar la relación de esbeltez para columnas en marcos arriostrados y no arriostrados. • Dimensionar y calcular el acero de refuerzo de columnas esbeltas
3	<p>Flexión Biaxial</p> <ul style="list-style-type: none"> • Concepto de flexión biaxial • Ecuación de Bresler • Problemas de aplicación 	<ul style="list-style-type: none"> • Clase expositiva 	<ul style="list-style-type: none"> • Tareas y taller 	<ul style="list-style-type: none"> • Libro de Texto • Marcador • Multimedia • REP-2014 • Open Board 	<ul style="list-style-type: none"> • Sumativa Tareas 	<ul style="list-style-type: none"> • Diseñar columnas sometidas a flexión biaxial,
4-6	<p>Diseño de losas en dos direcciones. Método directo</p> <ul style="list-style-type: none"> • Comportamiento de losa reforzada en dos direcciones • Tipos de losas • Método directo con vigas • Método directo sin vigas • Trasmisión de esfuerzos por cortante y momento en losas y columnas • Refuerzo por cortante en losas 	<ul style="list-style-type: none"> • Clase expositiva 	<ul style="list-style-type: none"> • Taller grupal 	<ul style="list-style-type: none"> • Libro de Texto • Marcador • Multimedia • REP-2014 • Open Board 	<ul style="list-style-type: none"> • Sumativa-Tareas • Examen Parcial 1 	<ul style="list-style-type: none"> • Diseño de losas reforzadas en dos direcciones con vigas y son vigas • Verificar resistencia a cortante de losas

7	Diseño de losas en dos direcciones. Método del portal equivalente <ul style="list-style-type: none"> • Concepto de portal equivalente • Distribución de momentos • Cálculo de refuerzo 	<ul style="list-style-type: none"> • Clase expositiva 	<ul style="list-style-type: none"> • Taller grupal 	<ul style="list-style-type: none"> • Libro de Texto • Marcador • Multimedia • REP-2014 • Open Board 	<ul style="list-style-type: none"> • Tareas 	<ul style="list-style-type: none"> • Análisis de losas en dos direcciones por el método del portal equivalente
8	Método de Resistencia última. Detalle de conexión <ul style="list-style-type: none"> • Introducción. Teorema del límite superior e inferior • Reglas para líneas de influencia • Análisis mediante equilibrio de segmentos • Análisis mediante trabajo virtual • Transferencia de momentos a columnas • Aberturas en losas 	<ul style="list-style-type: none"> • Clase expositiva 	<ul style="list-style-type: none"> • Investigación • Examen parcial 1 que incluye los temas de fuerza sísmica 	<ul style="list-style-type: none"> • Libro de Texto • Marcador • REP-2014 • Open Board 	<ul style="list-style-type: none"> • Exposición de investigación 	<ul style="list-style-type: none"> • Analiza el comportamiento losas reforzadas de concreto por el método de resistencia ultima

9-10	<p>Diseño de elementos presforzados. materiales, cálculo de esfuerzos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Concepto básico de presfuerzo • Materiales usados • Cálculo de esfuerzos 	<ul style="list-style-type: none"> • Clase expositiva 	<ul style="list-style-type: none"> • Taller grupal 	<ul style="list-style-type: none"> • Libro de Texto • Marcador • REP-2014 • Open Board 	<ul style="list-style-type: none"> • Taller • Examen parcial 2 	<ul style="list-style-type: none"> • Describir el comportamiento de elementos presforzados y las características de sus componentes • Calcular los esfuerzos a flexión de una viga de concreto reforzado en sus diferentes estados de carga
11-12	<p>Análisis y Diseño de elementos presforzados a flexión</p> <ul style="list-style-type: none"> • Análisis elástico a flexión • Resistencia a flexión • Presfuerzo parcial • Diseño a flexión por el método de la carga balanceada 	<ul style="list-style-type: none"> • Clase expositiva 	<ul style="list-style-type: none"> • Taller grupal 	<ul style="list-style-type: none"> • Libro de Texto • Marcador • REP-2014 • Open Board 	<ul style="list-style-type: none"> • Taller • Tareas 	<ul style="list-style-type: none"> • Calcular la resistencia a flexión de vigas de concreto reforzado • Diseñar de elementos presforzados a flexión

13-14	Diseño de Elementos presforzados. Pérdidas en presfuerzo, Esfuerzo Cortante, deformaciones y anclajes <ul style="list-style-type: none"> • Pérdidas en presfuerzo • Ecuaciones básicas para diseño a cortante • Deformaciones • Zona de anclaje • Consideraciones en losas postensadas 	<ul style="list-style-type: none"> • Clase expositiva 	<ul style="list-style-type: none"> • Taller grupal 	<ul style="list-style-type: none"> • Libro de Texto • Marcador • REP-2014 • Open Board 	<ul style="list-style-type: none"> • Tareas • Examen Parcial 3 	<ul style="list-style-type: none"> • Verificar la resistencia a cortante de elementos presforzados • Analizar las deformaciones de vigas presforzadas • Analizar la distribución de refuerzo en losas postensadas
-------	--	--	---	--	---	--

7. EVALUACIÓN:

ASPECTOS	ACTIVIDAD	VALORES (%)
Exámenes Parciales	3 exámenes	40
Tareas	Tareas y asignaciones en clase	10
Investigación	2 trabajos de investigación grupal con exposición y entrega	10
Portafolio	Evidencias física del material asignados en clase	10
Examen Final	1 examen que comprende los temas impartidos en el curso	30
Total		100

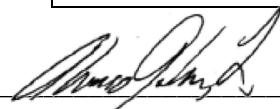
8. BIBLIOGRAFÍA:

BIBLIOGRAFÍA GENERAL:

- Edward Nawy. PRESTRESSED CONCRETE. Prentice Hall Editorial, 5^a Edición. U.S.A., 2009.
- Jack McCormack. DISEÑO DE CONCRETO REFORZADO. Editorial Alfaomega. 10^a edición. México. 2018
- Arthur Nilson. DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO. Editorial Mc Graw_Hill 15^a edición. México, 2016

OTROS RECURSOS:

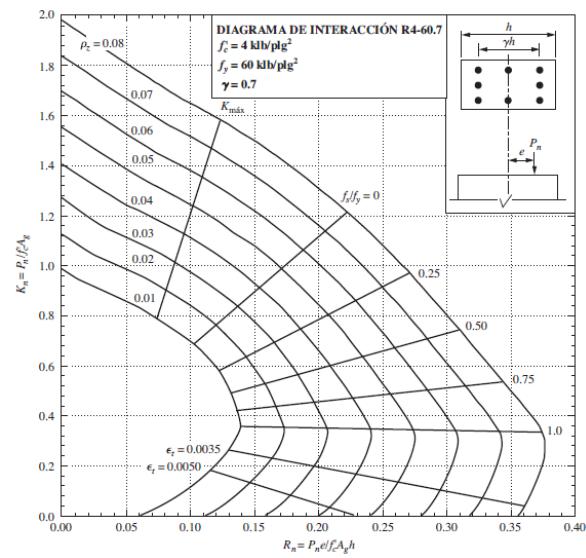
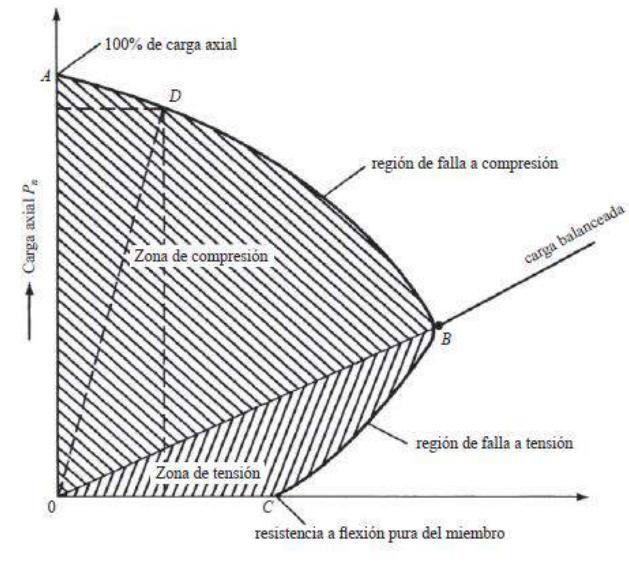
- Código ACI 318
- REP-2014



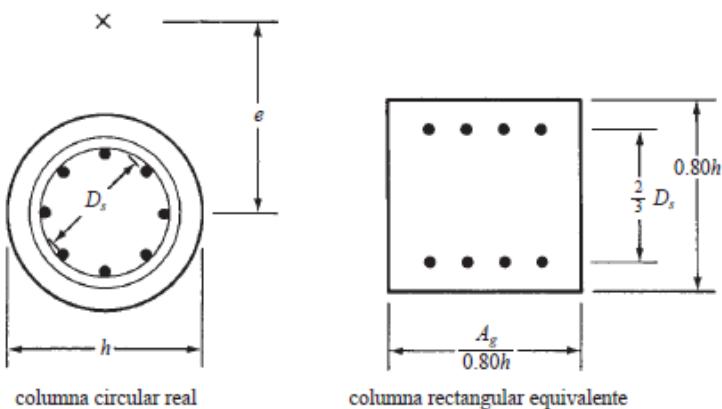
16/1/2022

Documentado por (firma del profesor y fecha)

Revisado por el Director (a) de Escuela (firma y fecha)

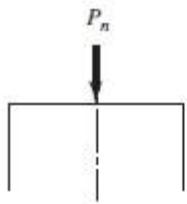


Diseño de Columnas Cortas Sometidas a Carga Axial y Flexión

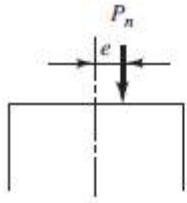


Carga Axial y Flexión

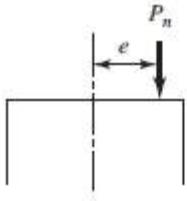
El efecto del momento se toma en consideración cuando su excentricidad “e” es mayor que $0.10h$ para columnas con estribos y $0.05h$ para columnas zunchadas



- a) Carga axial grande que causa falla del concreto por aplastamiento con todas las varillas alcanzando su fluencia en compresión.

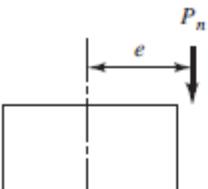


- b) Carga axial grande y un momento pequeño pero toda la sección transversal a compresión. La falla ocurre por aplastamiento del concreto y todas las varillas trabajan a compresión.

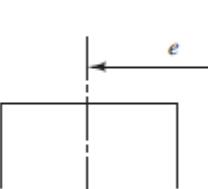


- c) Carga axial grande, con momentos mayores que en b). Las varillas en el lado opuesto a la carga están a tensión sin llegar al esfuerzo de fluencia. La falla ocurre por aplastamiento del concreto.

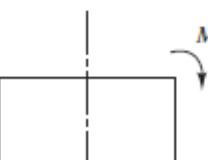
Las columnas se flexionarán bajo la acción de los momentos y estos formarán compresión en un lado de la columna y tensión en el otro.



- d) Condición de carga balanceada; las varillas a tensión alcanzan su esfuerzo de fluencia al mismo tiempo que el concreto en el lado a compresión que falla a $0.85f'_c$ por aplastamiento.



- e) Un momento grande, con carga axial relativamente menor; la falla se inicia por fluencia de las varillas a tensión.



- f) Momento flexionante grande; la falla ocurre como en una viga.

Centroide Plástico

La excentricidad de la carga de una columna es la distancia de la carga al centroide plástico de la columna.

El centroide plástico representa la posición de la fuerza resultante producida por el concreto y el acero. Es el punto de la sección transversal de la columna a través del cual la carga resultante de la columna debe pasar para producir una deformación unitaria uniforme en el instante de falla

Se supone que todo el concreto está trabajando a compresión de $0.85f'_c$ y el acero fy en compresión.

En secciones simétricas el centroide plástico es igual al centroide geométrico

Si no es simétricas el centroide plástico se obtiene por medio de momentos desde un punto de referencia

EJEMPLO 10.1

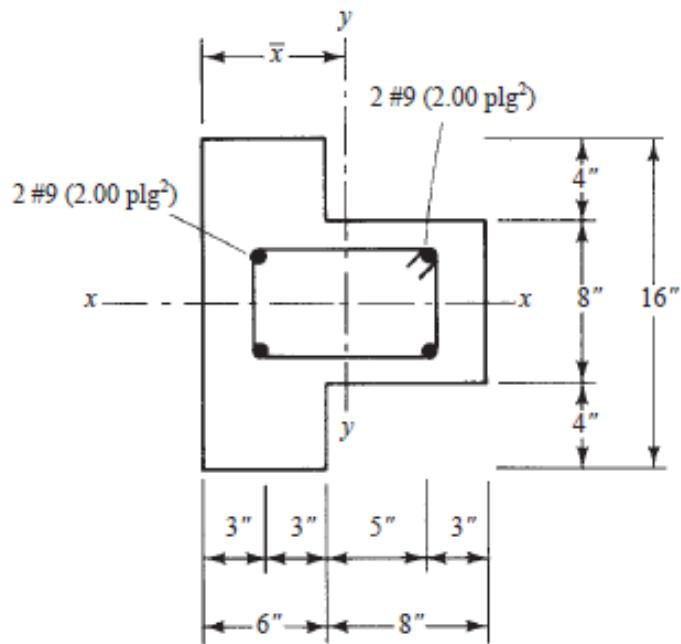
Determinar el centroide plástico de la columna T mostrada en la figura 10.2 si $f'_c = 4\,000 \text{ lb/plg}^2$ y $f_y = 60\,000 \text{ lb/plg}^2$.

SOLUCIÓN

El centroide plástico se sitúa sobre el eje x como se muestra en la figura 10.2 debido a la simetría. La columna se divide en dos rectángulos, el izquierdo de $16'' \times 6''$ y el derecho de $8'' \times 8''$. Se supone que C_1 es la compresión total en el rectángulo izquierdo de concreto, C_2 es la compresión total en el rectángulo derecho y C'_s es la compresión total en las varillas de refuerzo.

$$C_1 = (16)(6)(0.85)(4) = 326.4 \text{ klb}$$

$$C_2 = (8)(8)(0.85)(4) = 217.6 \text{ klb}$$



Al calcular C'_s , se sustraen el concreto donde las varillas están ubicadas; es decir,

$$C'_s = (4.00)(60 - 0.85 \times 4) = 226.4 \text{ klb}$$

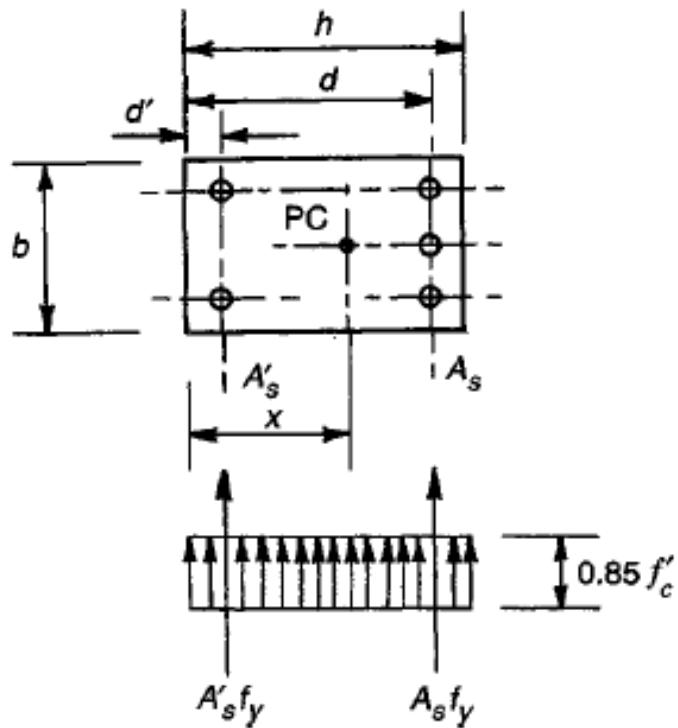
$$\text{Compresión total} = P_n = 326.4 + 217.6 + 226.4 = 770.4 \text{ klb}$$

Tomando momentos respecto al borde izquierdo de la columna

$$-(326.4)(3) - (217.6)(10) - (226.4)(7) + (770.4)(\bar{x}) = 0$$

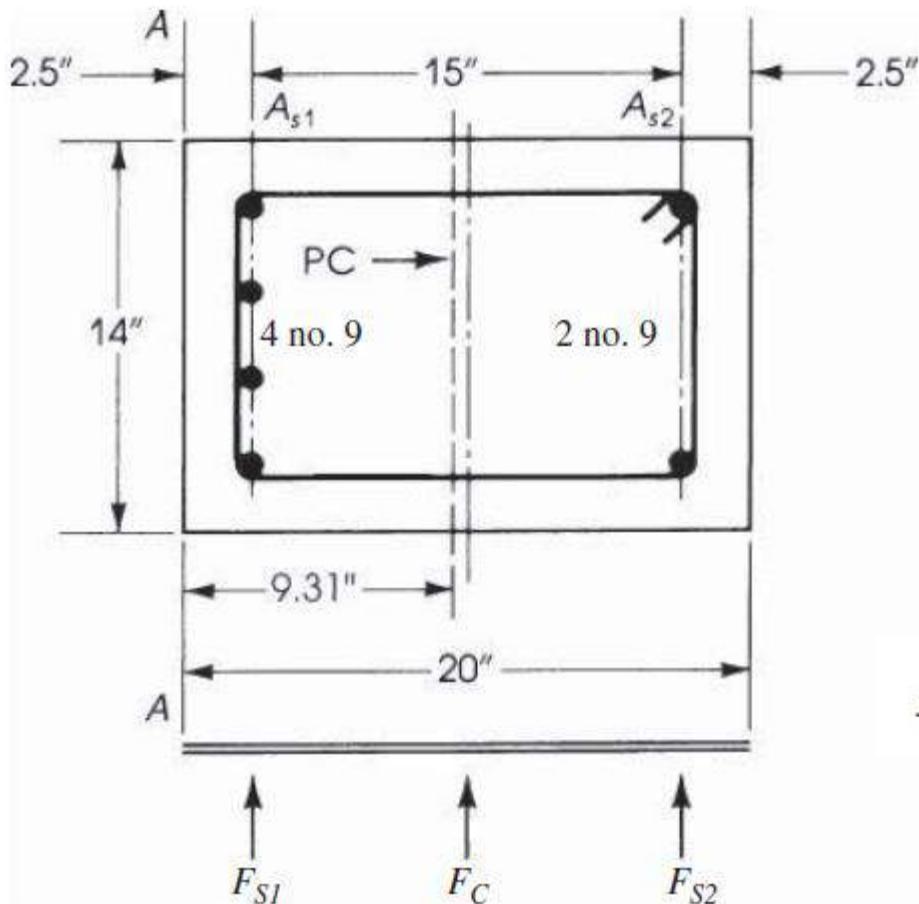
$$\underline{\underline{x = 6.15''}}$$

Centroide Plástico para refuerzo asimétrico



$$x = \frac{0.85f'_c b h^2 / 2 + A_s f_y d + A'_s f_y d'}{0.85f'_c b h + A_s f_y + A'_s f_y}$$

Calcular el centroide plástico de la figura dada. $f'c = 4\text{ksi}$ y $f_y = 60\text{ksi}$



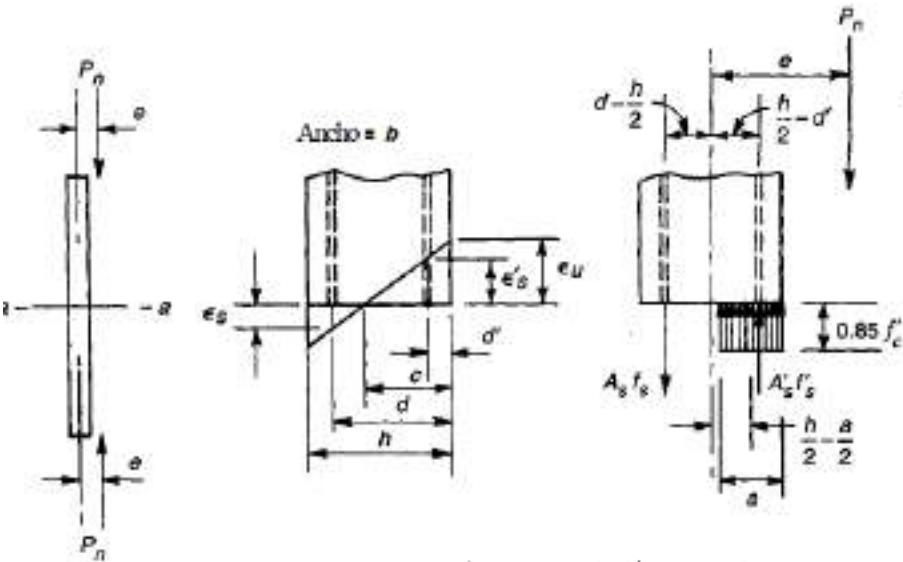
$$\begin{aligned}F_c &= \text{force in concrete} = (0.85f'_c)A_g \\&= (0.85 \times 4) \times 14 \times 20 = 952 \text{ K}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{s1} &= A_{s1}f_y = 4 \times 60 = 240 \text{ K} \\F_{s2} &= A_{s2}f_y = 2 \times 60 = 120 \text{ K}\end{aligned}$$

Momento alrededor de A-A

$$x = \frac{(952 \times 10) + (240 \times 2.5) + (120 \times 17.5)}{952 + 240 + 120} = 9.31 \text{ in.}$$

Resistencia Nominal de Columnas



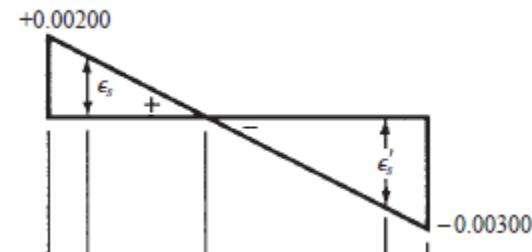
$$M_n = P_n e = 0.85 f'_c a b \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + A'_s f'_s \left(\frac{h}{2} - d' \right) + A_s f_s \left(d - \frac{h}{2} \right)$$

$$T_s = e_s A_s f_y$$

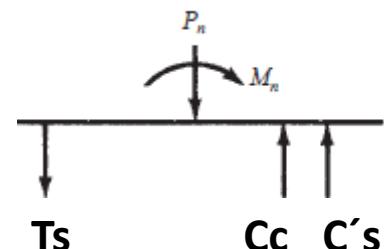
$$C_c = 0.85 f' c a b$$

$$C'_s = A_s f_y - 0.85 f' c A'_s$$

- Dibujar diagrama de deformación unitaria asumiendo $e_c = -0.003$ y el otro extremo a tensión es $e_t = 0.002$



- Determinar c , e'_s y e_s
- Calcular a , T_s , C_c , C'_s y ubicarlos en diagrama de cargas

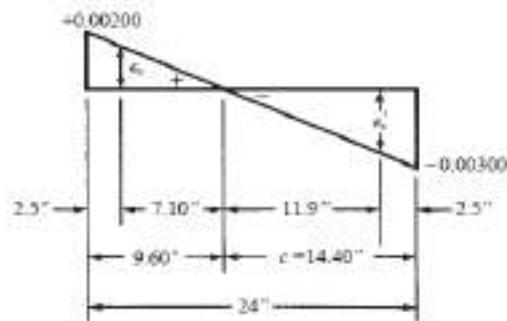
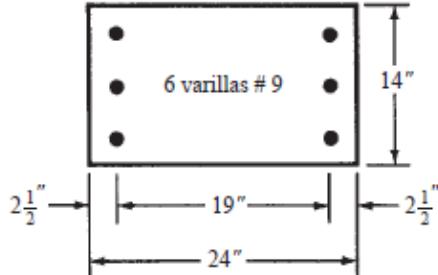


- Hacer $\sum F_v = 0$ para encontrar P_n
- Hacer $\sum M = 0$ para encontrar M_n

"P_n y M_n se ubican en el centroide plástico"

EJEMPLO 10.2

Se supone que la columna en la figura 10.4 tiene una deformación unitaria en su borde a compresión igual a -0.00300 y una deformación unitaria a tensión de +0.00200 en su otro borde. Determinar los valores de P_n y M_n que causan esta distribución de deformaciones unitarias si $f_y = 60 \text{ klb/plg}^2$ y $f'_c = 4 \text{ klb/plg}^2$.



SOLUCIÓN

Determine los valores de c y de las deformaciones unitarias en el acero ϵ'_c y ϵ_t , por proporciones con referencia al diagrama de deformaciones unitarias mostrado en la figura 10.5.

$$c = \left(\frac{0.00300}{0.00300 + 0.00200} \right) (24) = 14.40 \text{ plg}$$

$$\epsilon'_c = \left(\frac{11.90}{14.40} \right) (0.00300) = 0.00248 > 0.00207 \quad \therefore \text{el acero cede}$$

$$\epsilon_t = \left(\frac{7.10}{9.60} \right) (0.00200) = 0.00148 \quad \text{el acero no cede}$$

En los siguientes cálculos, C_c es la compresión total en el concreto, C'_s es la compresión total en el acero a compresión y T_s es la tensión total en el acero a tensión. Cada uno de estos valores se calcula a continuación.

El lector debe observar que C'_s se reduce en $0.85/4$ para tomar en cuenta el concreto desplazado por el acero a compresión.

$$a = (0.85)(14.40) = 12.24 \text{ plg}$$

$$C_c = (0.85)(12.24)(14)(4.0) = -582.62 \text{ klb}$$

$$C'_s = (60)(3.0) - (0.85)(3.0)(4.0) = -169.8 \text{ klb}$$

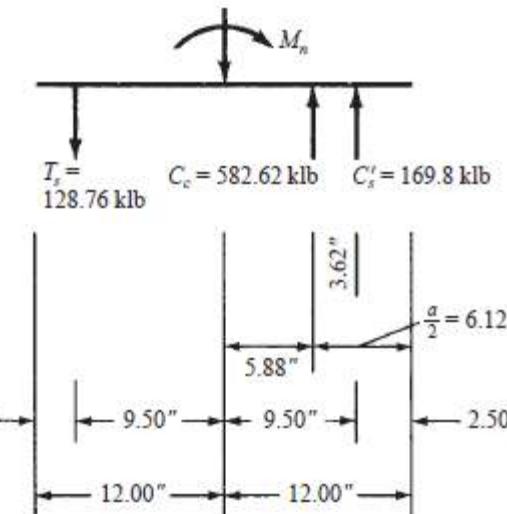
$$T_s = (0.00148)(29\,000)(3.0) = +128.76 \text{ klb}$$

Por estática, P_n y M_n se determinan con ayuda de la figura 10.6, donde se muestran los valores de C_c , C'_s y T_s .

$$\Sigma F = 0$$

$$-P_n + 169.8 + 582.62 - 128.76 = 0$$

$$P_n = 623.7 \text{ klb}$$



$$\Sigma M = 0 \text{ respecto al acero de tensión}$$

$$(623.7)(9.50) + M_n - (582.62)(15.38) - (169.8)(19.00) = 0$$

$$M_n = 6\,261.3 \text{ plg-klb} = 521.8 \text{ pie-klb}$$

Pn y Mn son las cargas resistentes de la columna

$$\begin{aligned} P_n &= 0.85f'_c(A_g - A_s) + A_sf_y \\ &= (0.85)(4.0)(14 \times 24 - 6.00) + (6.00)(60) \\ &= 1\,482 \text{ klb} \end{aligned}$$

Falla Balanceada

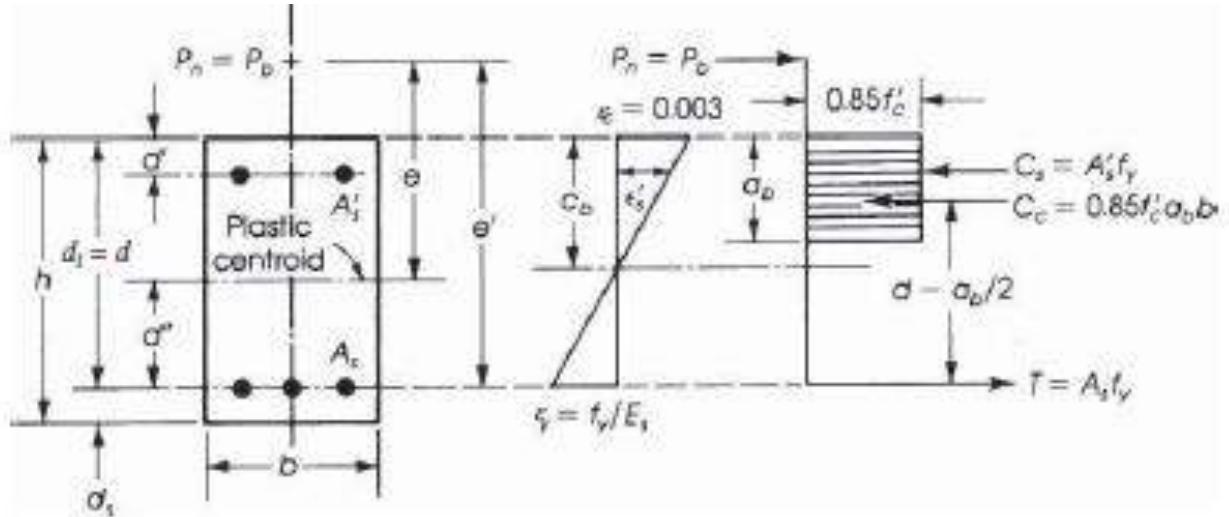
**Una columna con falla
balanceada el extremo a
compresión $e_c = -0.003$ y el
extremo a tensión llegará a
la cedencia
simultáneamente $e_y = f_y/E_s$**

$$\frac{c_b(\text{balanced})}{d_l} = \frac{0.003}{0.003 + f_y/E_s}$$

$$c_b = \frac{87d_t}{87 + f_y}$$

$$a_b = \beta_1 c_b = \left(\frac{87}{87 + f_v} \right) \beta_1 d_t$$

donde β_1 para $f'c < 4000$ y se reduce 0.05 por cada incremento de 1000psi en $f'c$



$$f'_s = 87 \left(\frac{c - d'}{c} \right) \leq f_y$$

Usar f_s 's = f_y si el acero ha cedido

$$P_b = 0.85f'_\varepsilon ab + A'_z(f'_z - 0.85f'_\varepsilon) - A_y f_y$$

$$P_b e_b = C_c \left(d - \frac{a}{2} - d'' \right) + C_s (d - d' - d'') + T d''$$

$$e_b = \frac{M_b}{P_b}$$

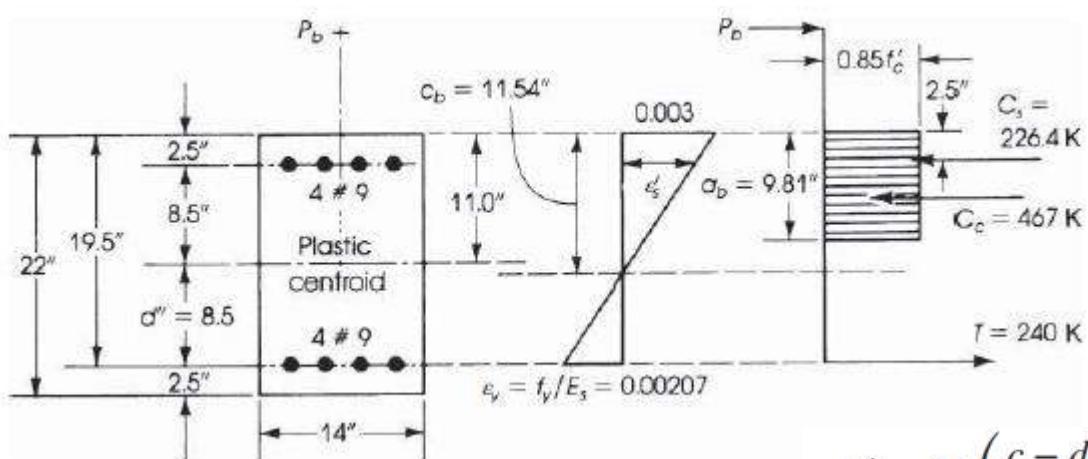
$$P_b e_b = M_b = 0.85 f'_c ab \left(d - \frac{a}{2} - d'' \right) + A'_s (f_y - 0.85 f'_c)(d - d' - d'') + A_s f_y d''$$

“ Si $P_n > Pb$ domina compresión”

“ Se puede asumir falla a compresión si $e < 2d/3$ ”

Determine para la figura mostrada P_b , M_b y e_b . $F_c = 4\text{si}$ y $F_y = 60\text{ksi}$

$$P_b = C_c + C_s - T = 467 + 226.4 - 240 = 453.4 \text{ K}$$



$$\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{60}{29,000} = 0.00207$$

$$c_b = \frac{87}{87 + f_y} d_t = \frac{87}{87 + 60} (19.5) = 11.54 \text{ in.}$$

$$a_b = 0.85c_b = 0.85 \times 11.54 = 9.81 \text{ in.}$$

$$\frac{\epsilon'_s}{0.003} = \frac{c - d'}{c} = \frac{11.54 - 2.5}{11.54}$$

$$\varepsilon' = 0.0023.$$

$$C_s = A'_s(f_y - 0.85f'_c) = 4(60 - 3.4) = 226.4 \text{ K}$$

$$T = A_s f_y = 4 \times 60 = 240 \text{ K}$$

$$C_c = 0.85f'_c ab = 0.85 \times 4 \times 9.81 \times 14 = 467 \text{ K}$$

$$M_b = P_b e_b = C_c \left(d - \frac{a}{2} - d'' \right) + C_s (d - d' - d'') + T d''$$

d''= 8.5pulg

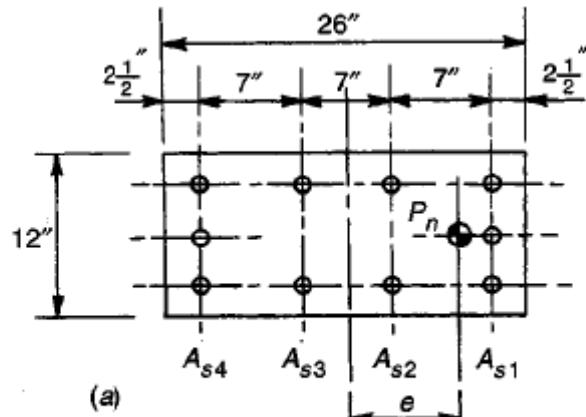
$$M_b = 453.4e_b = 467 \left(19.5 - \frac{9.81}{2} - 8.5 \right) + 226.4(19.5 - 2.5 - 8.5) + 240 \times 8.5 \\ \equiv 6810.8 \text{ K} \cdot \text{in.} \equiv 567.6 \text{ K} \cdot \text{ft}$$

$$e_b = \frac{M_b}{P_b} = \frac{6810.8}{453.4} = 15.0 \text{ in.}$$

Para condición balanceada

$\phi = 0.65$, $\phi P_b = 294.7$ K, and $\phi M_b = 368.9$ K.ft.

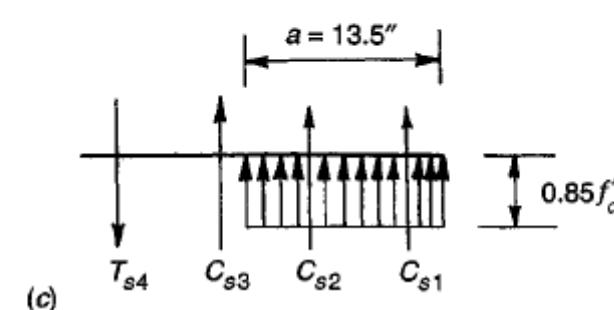
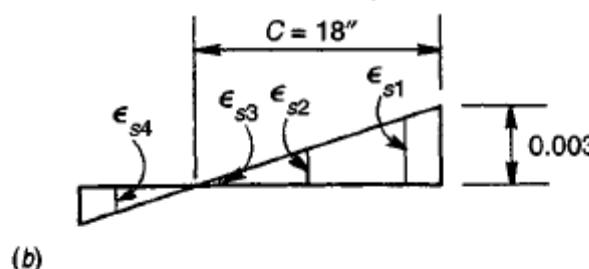
Ejemplo 8.2. Análisis de una columna excéntrica con refuerzo distribuido. La columna de la figura 8.11a está reforzada con diez barras No.11 distribuidas alrededor del perímetro, como se muestra. La carga P_n se aplica con una excentricidad e con respecto al eje más fuerte. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 6000 \text{ lb/pulg}^2$ y $f_y = 75 \text{ klb/pulg}^2$. Encuentre la carga y el momento correspondientes al punto de falla con un eje neutro a $c = 18$ pulg desde la cara derecha.



$$\begin{array}{ll} \epsilon_{s1} = 0.00258 & f_{s1} = 75.0 \text{ klb/pulg}^2 \text{ a compresión} \\ \epsilon_{s2} = 0.00142 & f_{s2} = 41.2 \text{ klb/pulg}^2 \text{ a compresión} \\ \epsilon_{s3} = 0.00025 & f_{s3} = 7.3 \text{ klb/pulg}^2 \text{ a compresión} \\ \epsilon_{s4} = 0.00091 & f_{s4} = 26.4 \text{ klb/pulg}^2 \text{ a tensión} \end{array}$$

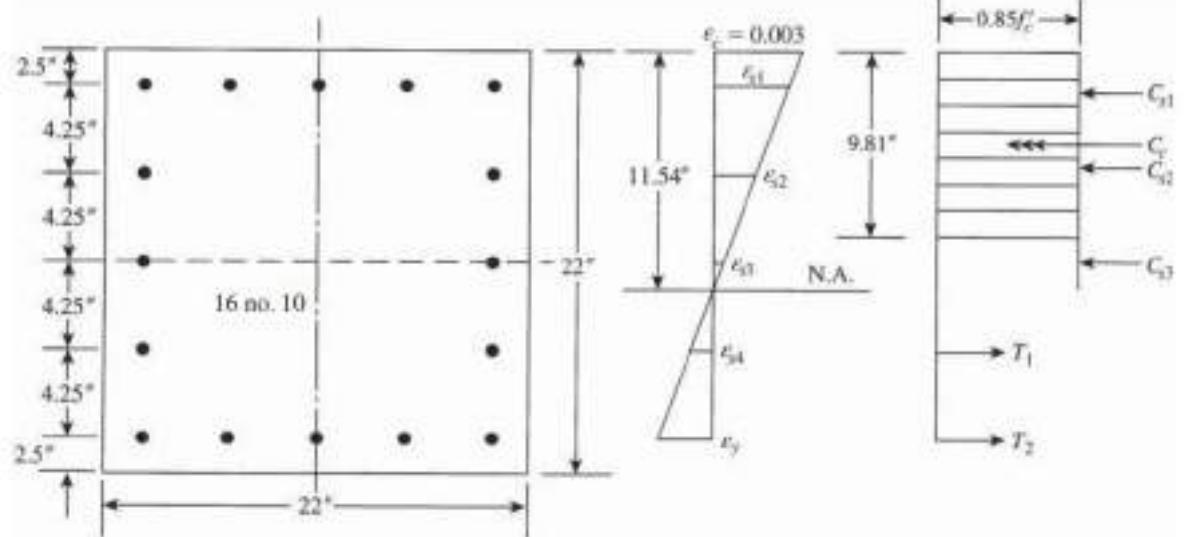
$$\begin{aligned} C_{s1} &= 4.68 \times 75.0 = 351 \text{ klb} \\ C_{s2} &= 3.12 \times 41.2 = 129 \text{ klb} \\ C_{s3} &= 3.12 \times 7.3 = 23 \text{ klb} \\ T_{s4} &= 4.68 \times 26.4 = 124 \text{ klb} \end{aligned}$$

$$C = 0.85 \times 6 \times 13.5 \times 12 = 826 \text{ kips}$$



$$\begin{aligned} P &= 826 + 351 + 129 + 23 - 124 = 1205 \text{ klb} \\ M &= 826(13 - 6.75) + 351(13 - 2.5) + 129(13 - 9.5) - 23(13 - 9.5) + 124(13 - 2.5) \\ &= 10,520 \text{ klb-pulg} \\ &= 877 \text{ klb-pie} \end{aligned}$$

Determine para la figura mostrada P_b , M_b y e_b . $F'c = 4\text{ksi}$ y $Fy = 60\text{ksi}$



$$c_b = \left(\frac{87}{87 + f_y} \right) d_t = \left(\frac{87}{87 + 60} \right) 19.5 = 11.54 \text{ in.}$$

$$a_b = 0.85(11.54) = 9.81 \text{ in.}$$

$$C_c = 0.85f'_e ab = 0.85(4)(9.81)(22) = 733.8 \text{ K.}$$

$$f'_s = 87 \left(\frac{c - d'}{c} \right) = 87 \left(\frac{11.54 - 2.5}{11.54} \right) = 68.15 \text{ ksi} > 60 \text{ ksi}$$

$$C_{s1} = A'_s(f_y - 0.85f'_c) = 6.35(60 - 0.85 \times 4) = 359.4 \text{ K}$$

$$f_{s2} = 87 \left(\frac{11.54 - 2.5 - 4.25}{11.54} \right) = 36.11 \text{ ksi}$$

$$C_{s2} = 2(1.27)(36.11 - 0.85 \times 4) = 83.1 \text{ K}$$

$$f_{s3} = 4.07 \text{ ksi} \text{ and } C_{s3} = 2(1.27)(4.07 - 0.85 \times 4) = 1.7 \text{ K.}$$

$$\epsilon_{s4} = 964.50 \times 10^{-6} \quad f_{s4} = 28 \text{ ksi}$$

$$T_1 = 2(1.27)(28) = 71 \text{ K} \quad T_2 = A_s f_y = 6.35(60) = 381 \text{ K}$$

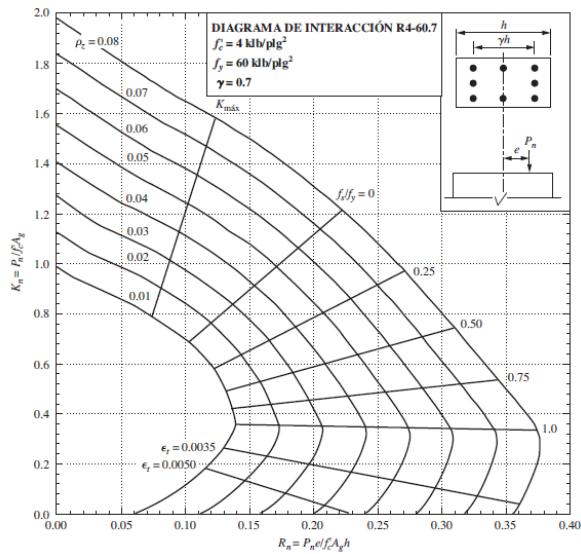
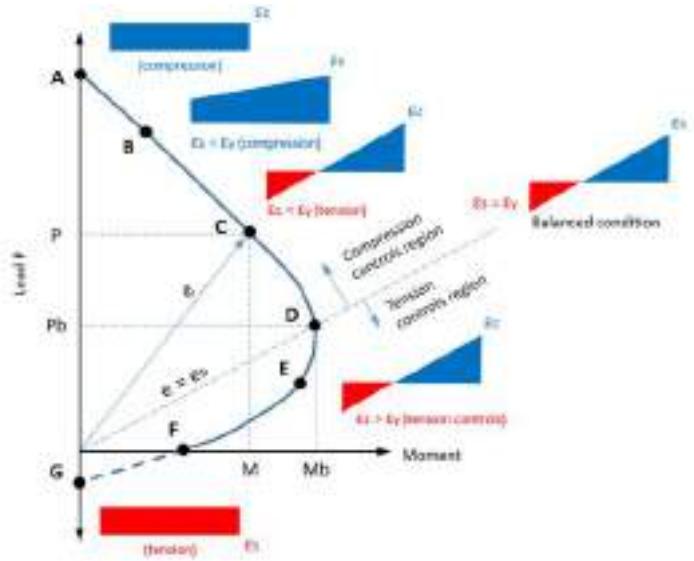
$$P_b = C_c + \sum C_s - \sum T.$$

$$P_b = 733.8 + (359.4 + 83.1 + 1.7) - (71 + 381) \\ = 726 \text{ K}$$

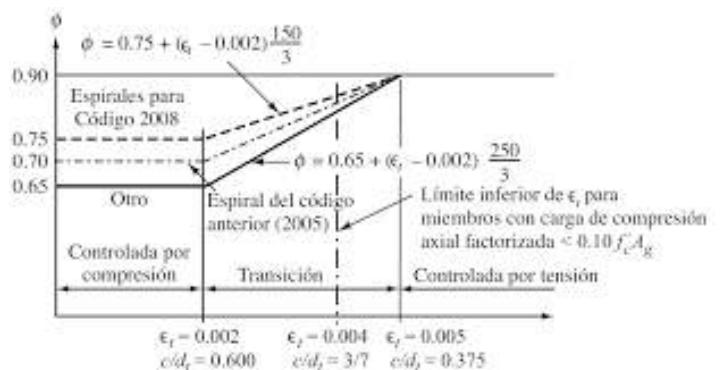
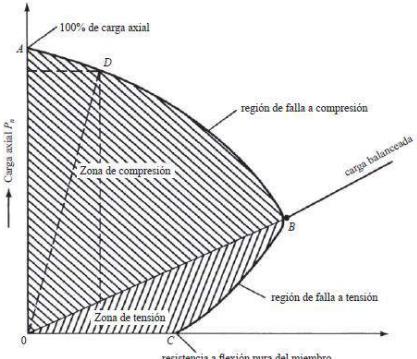
$$M_b = 733.8(6.095) + 359.4(8.5) + 83.1(4.25) + 71(4.25) + 381(8.5) \\ = 11,421 \text{ K} \cdot \text{in.} = 952 \text{ K} \cdot \text{ft}$$

$$e_b = \frac{M_b}{P_b} = 15.735 \text{ in.}$$

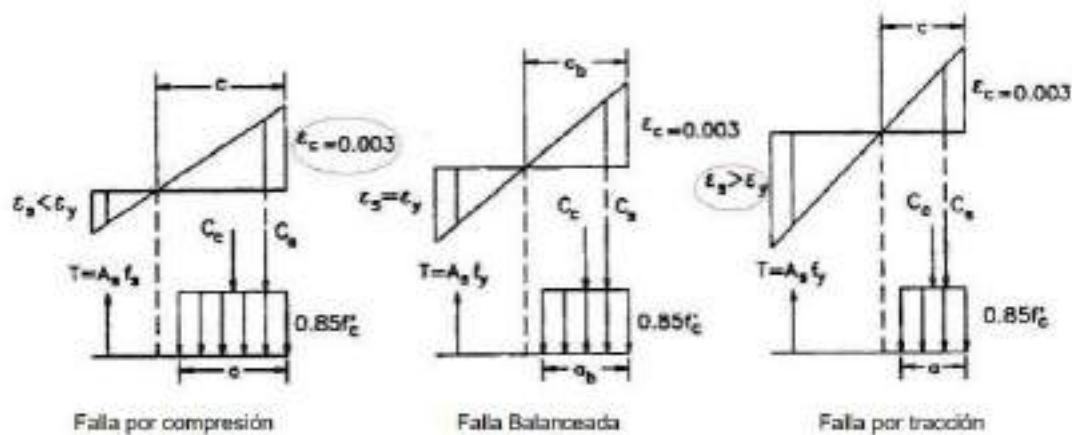
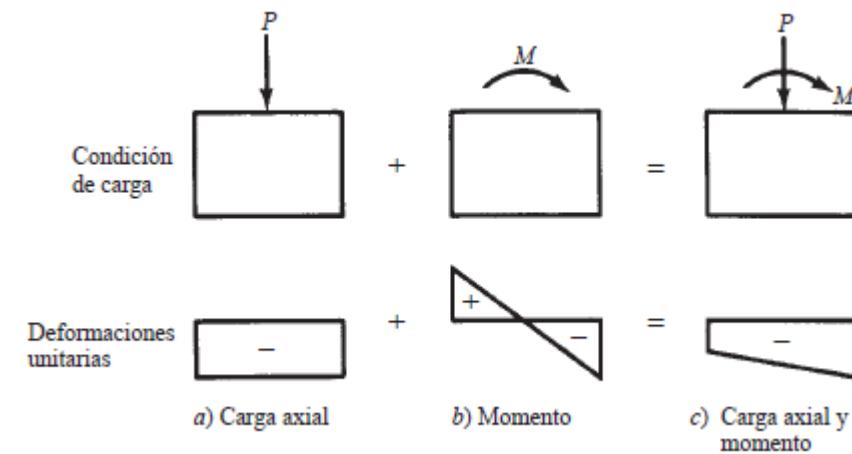
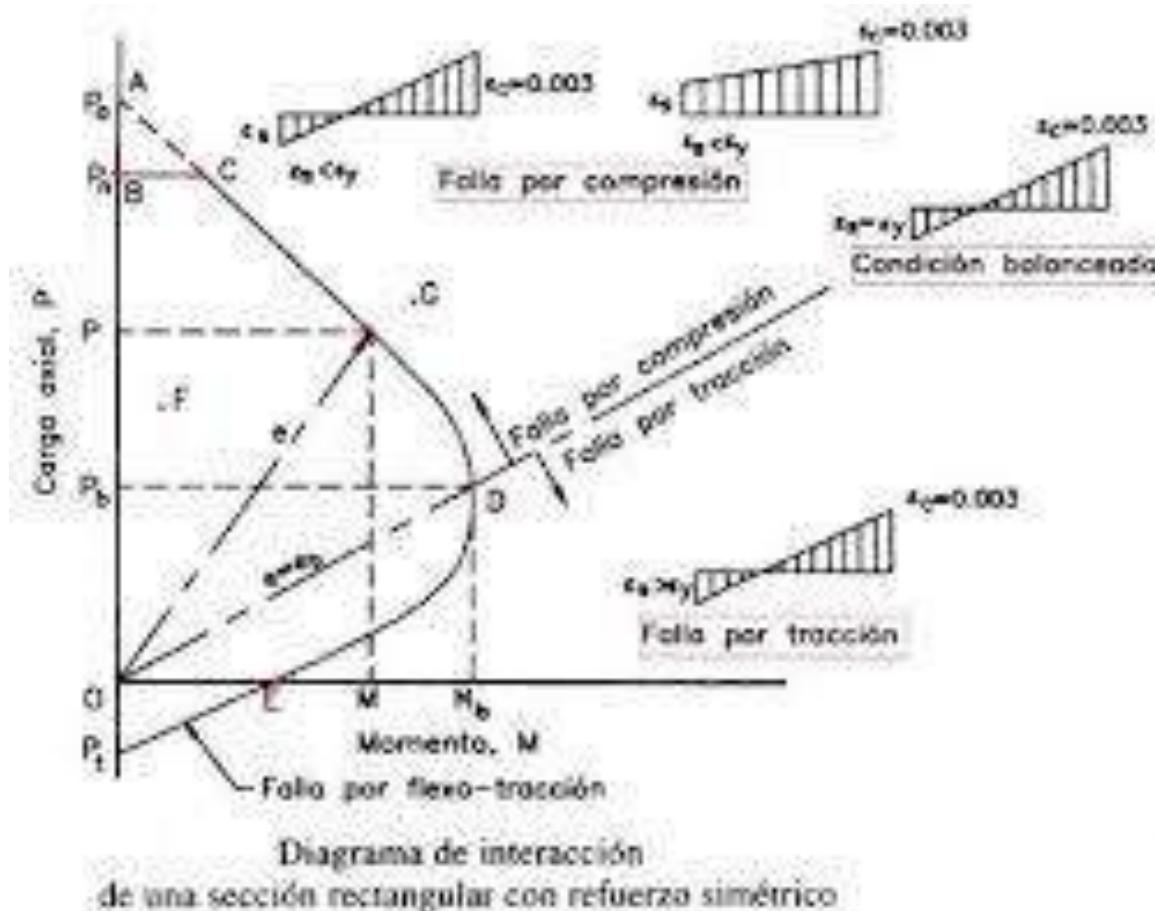
$$\phi P_b = 0.65 P_b = 472 \text{ K} \quad \text{and} \quad \phi M_b = 0.65 M_b = 618.8 \text{ K} \cdot \text{ft}$$



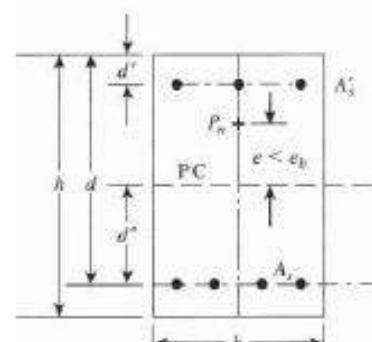
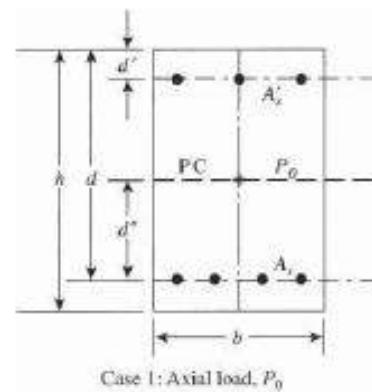
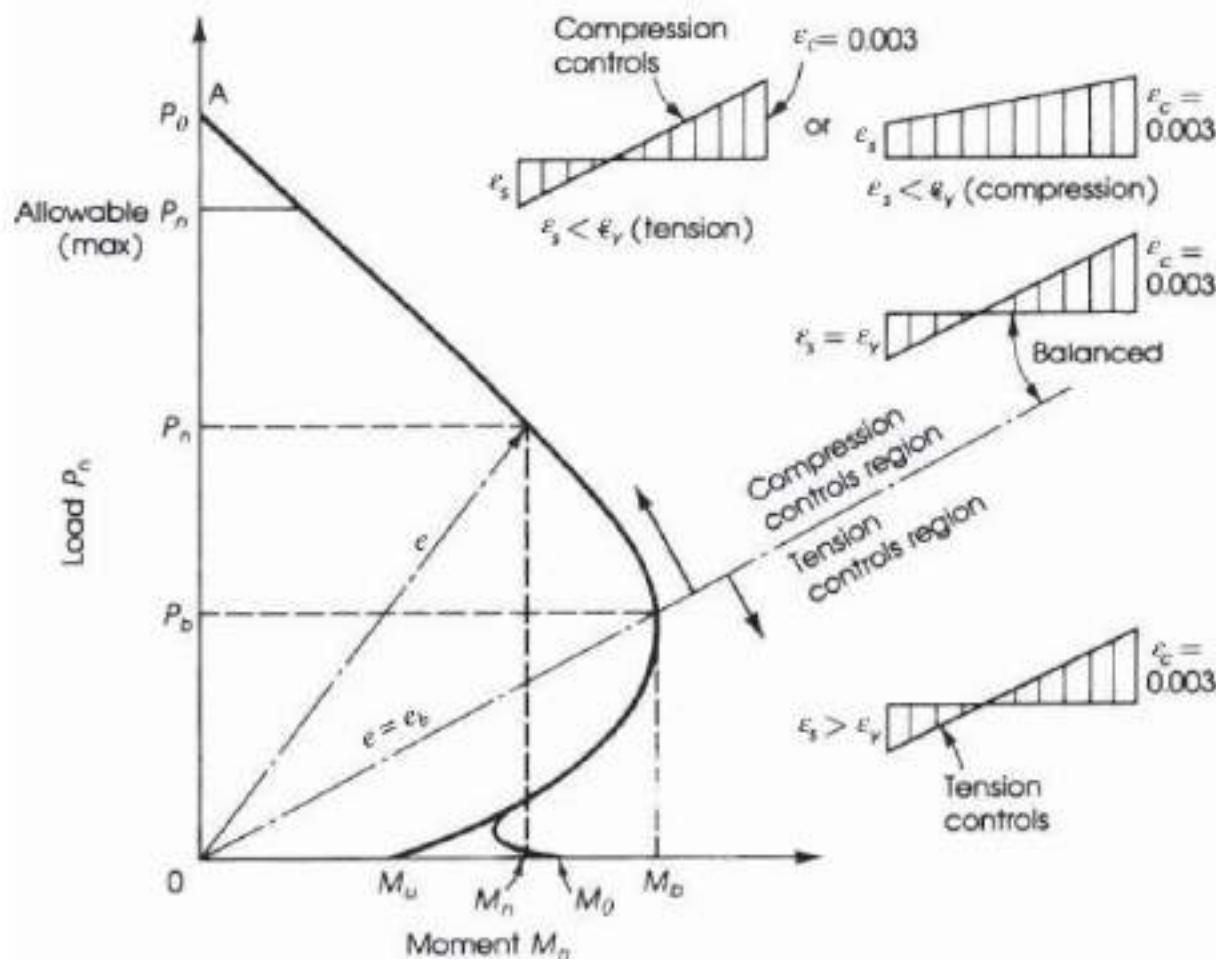
Diseño de Columnas Cortas Sometidas a Carga Axial y Flexión Uso de Diagramas de Interacción



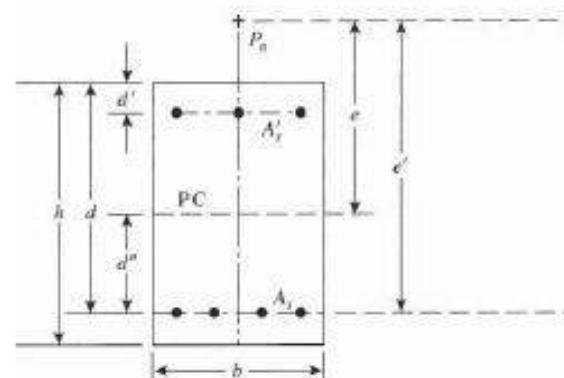
Desarrollo de Diagramas de Interacción



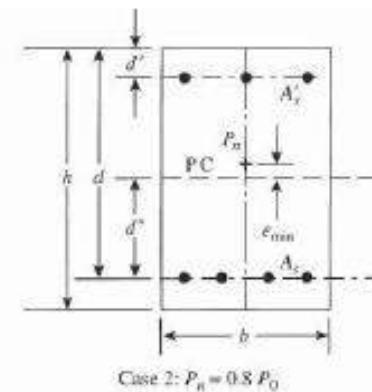
Casos de carga crítico en curvas de interacción



Case 3: Compression controls, $P_n > P_b$



Case 5: Tension controls, $P_n < P_b$



Case 6: Pure moment, $P_n = 0$

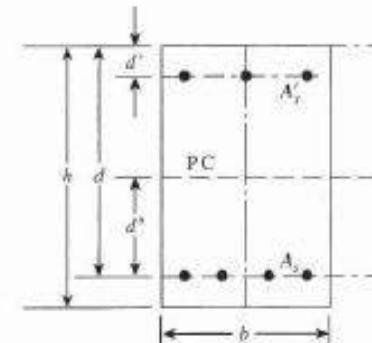
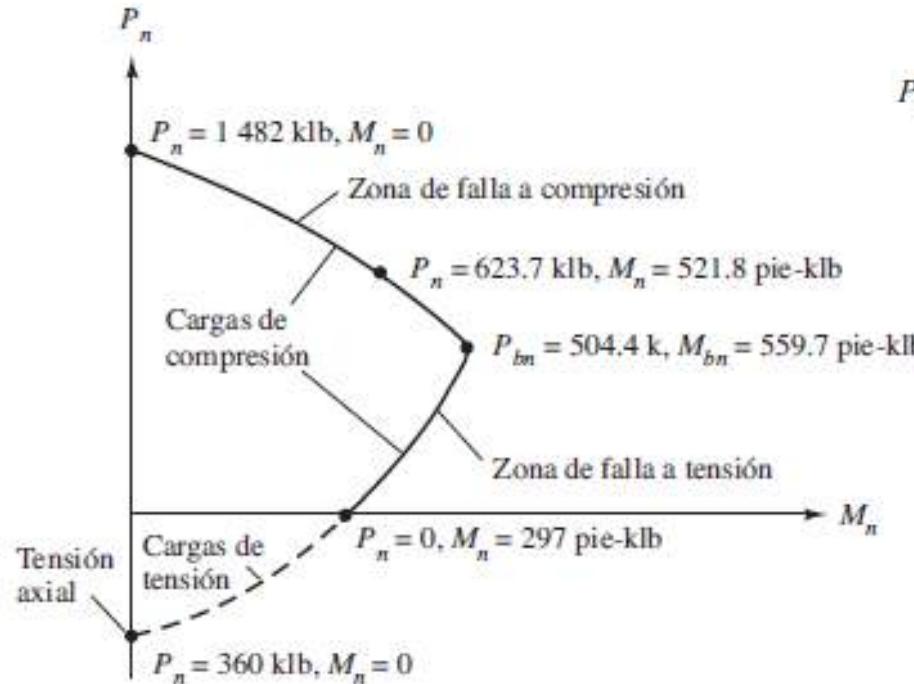


Diagrama de Interacción para ejemplo 10.2

P_n y *M_n* son las cargas resistentes de la columna
del problema 10.2



Tensión Pura

$$P_n = A_s f_y = (6.0)(60) = 360 \text{ klb}$$

Compresión Pura

$$\begin{aligned}P_n &= 0.85f'_c(A_g - A_s) + A_s f_y \\&= (0.85)(4.0)(14 \times 24 - 6.00) + (6.00)(60) \\&= 1 482 \text{ klb}\end{aligned}$$

Cargas balanceadas

Una deformación unitaria 0.003 del concreto en un extremo y del otro lado el acero de refuerzo tiene una deformación f_y/E_s

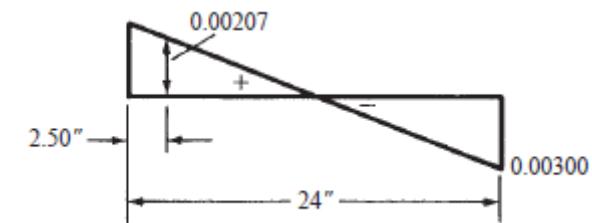
Momento Puro,

$$P_n = 0$$

Se desarrolla como una viga de doble refuerzo

$$M_n = 297 \text{ k-pie}$$

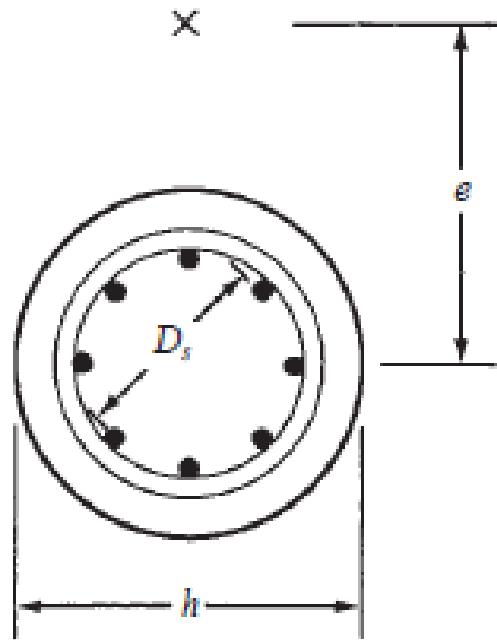
Las cargas son nominales



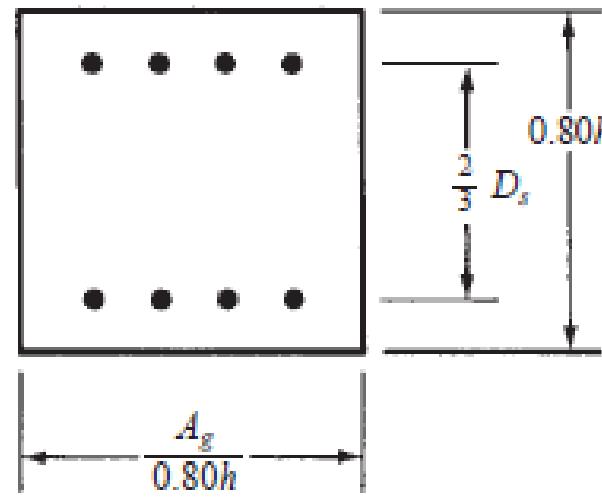
$$f_y/29 \times 10^3 = 60/29 \times 10^3 = 0.00207$$

$$P_n = 504.4 \text{ klb} \text{ y } M_n = 559.7 \text{ pie-klb.}$$

Reemplazo de una columna circular a una cuadrada equivalente

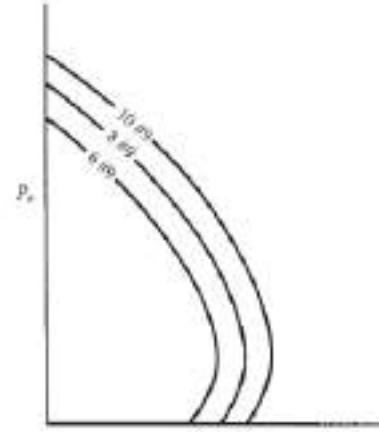
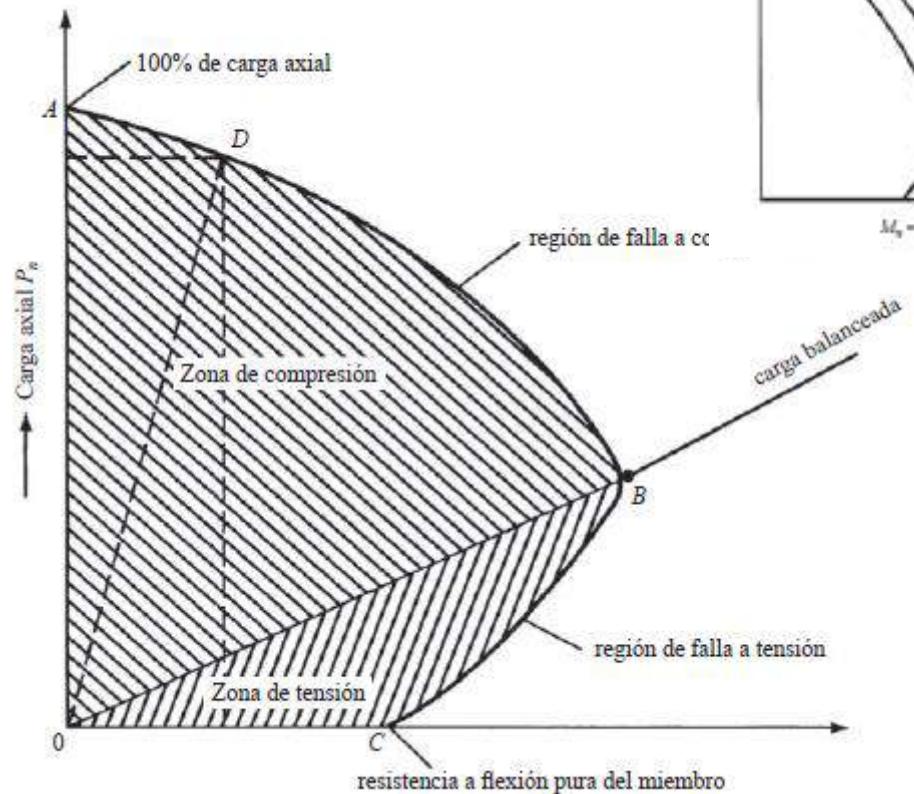


columna circular real



columna rectangular equivalente

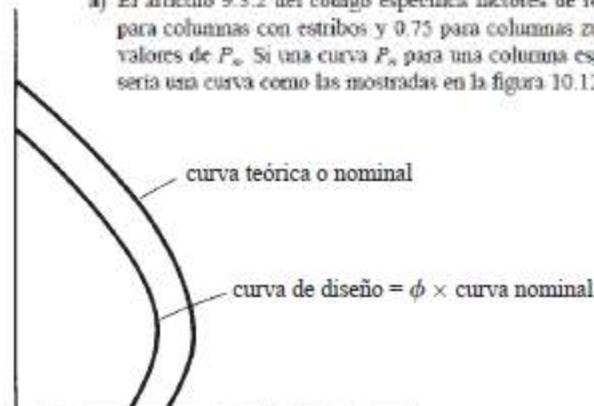
Uso de Diagramas de Interacción



$$P_u = \phi P_{n\max} \text{ para columnas con estribos} = 0.80\phi[0.85f'_c(A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \text{ (Ecuación 10-2, ACI)}$$

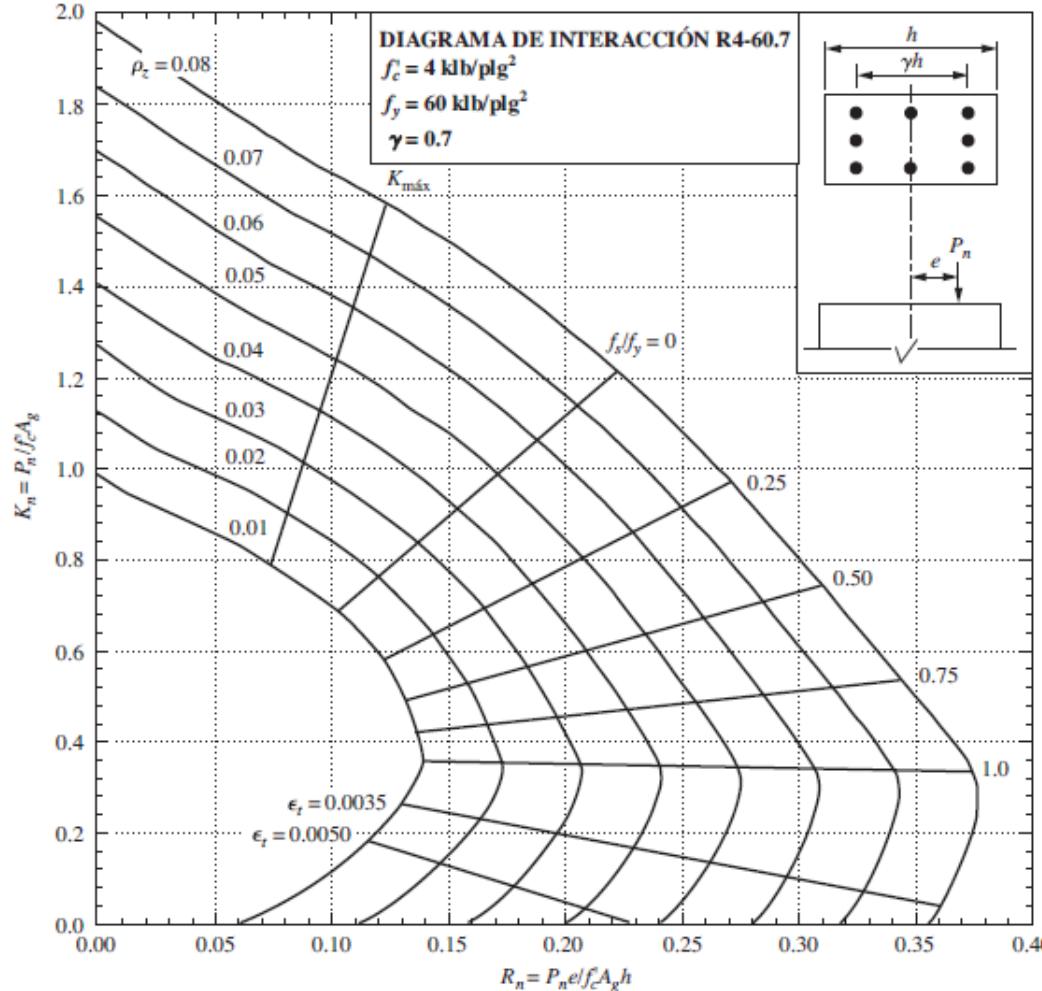
$$P_u = \phi P_{n\max} \text{ para columnas zunchadas} = 0.85\phi[0.85f'_c(A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \text{ (Ecuación 10-1, ACI)}$$

- a) El artículo 9.3.2 del código especifica factores de reducción de resistencia o factores ϕ (0.65 para columnas con estribos y 0.75 para columnas zunchadas) que deben multiplicarse por los valores de P_u . Si una curva P_n para una columna específica se multiplicara por ϕ el resultado sería una curva como las mostradas en la figura 10.12.



Apéndice A. Gráficas 2 -13 Libro de Texto

Graficas de Interacción de Diseño



Asegúrese de que la ilustración de la columna en el lado derecho superior de la curva de interacción usada concuerda con la columna que se está considerando. En otras palabras, ¿se tienen varillas en dos caras de la columna o sobre las cuatro caras? Si se seleccionan las curvas equivocadas, las respuestas pueden ser incorrectas.

- Identificar la gráfica que aplica a la columna
- Las secciones en las gráficas son rectangulares y circulares, con refuerzo en dos caras y 4 caras, con diferentes valores de γ
- Obtener los valores de P_n y M_n de los datos del problema $P_n = P_u/\varphi$, $M_n = M_u/\varphi$
- Encontrar la excentricidad $e = M_n/P_n$ y “ γ ”
- Sacar los valores de K_n y R_n y ubicar los valores en la gráfica que corresponda
- Prolongar los puntos horizontalmente y verticalmente en la gráfica hasta que coincidan
- El punto indicará el % de acero de la columna
- Cada gráfica esta compuesta de 8 grupo de curvas, que indican la variación del % de 1- 8.
- El % encontrado se multiplica por el área de la columna y se obtiene la cantidad de acero requerida

Tamaño Estimado de Columnas

Columnas con Estribo

$$A_{g(\text{trial})} \geq \frac{P_u}{0.40(f'_c + f_y\rho_g)}$$

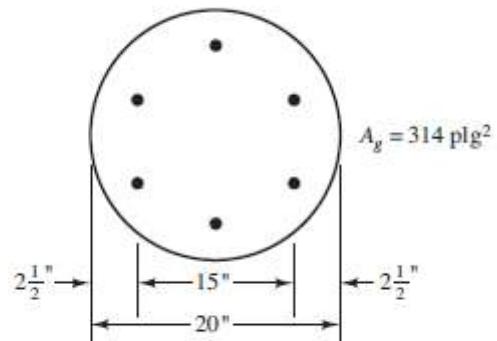
Columnas con Espiral

$$Ag = \frac{P_u}{0.6f'c}$$

$$A_{g(\text{trial})} \geq \frac{P_u}{0.50(f'_c + f_y\rho_g)}$$

EJEMPLO 10.5

Usando las gráficas de interacción de columnas del ACI, seleccione el refuerzo para la columna redonda corta zunchada mostrada en la figura 10.19 si $f'_c = 4\,000 \text{ lb/plg}^2$; $f_y = 60\,000 \text{ lb/plg}^2$; $P_u = 500 \text{ klb}$ y $M_u = 225 \text{ pie-klb}$.



$$e = \frac{(12)(225)}{500} = 5.40 \text{ plg}$$

$$P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{500}{0.75} = 666.7 \text{ klb}$$

$$K_n = \frac{P_n}{f'_c A_g} = \frac{666.7}{(4)(314)} = 0.531$$

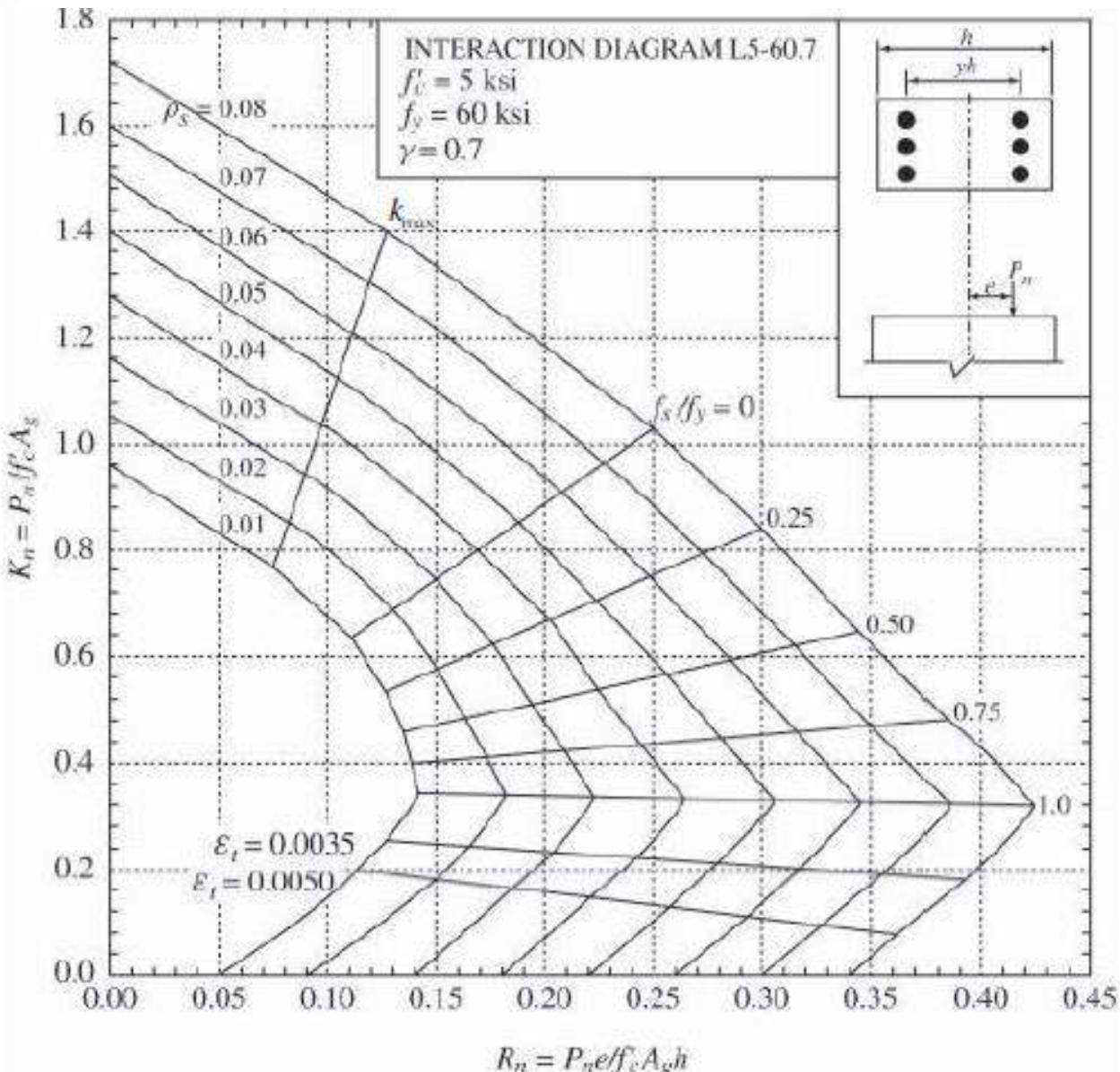
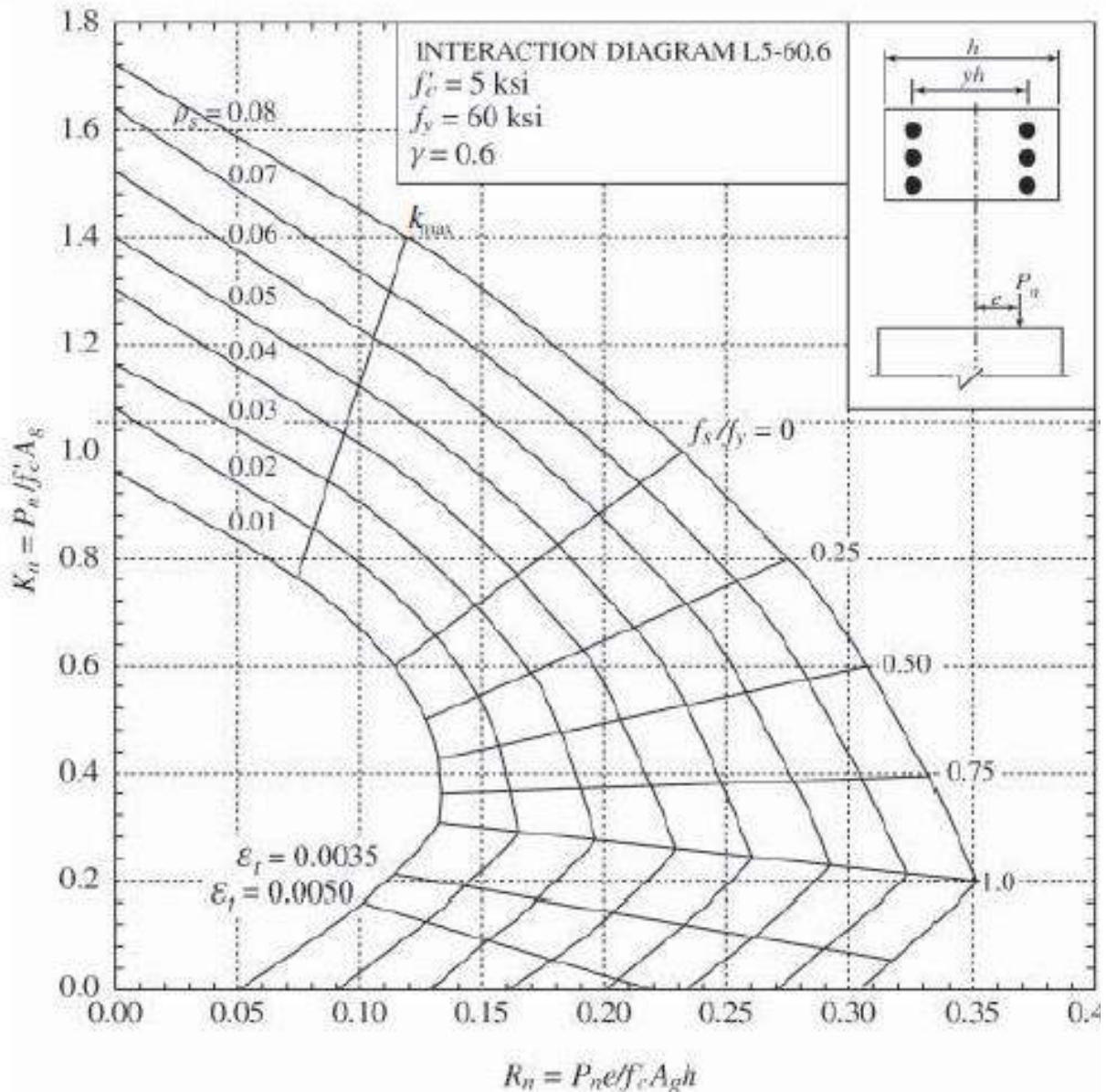
$$R_n = \frac{P_n e}{f'_c A_g h} = \frac{(666.7)(5.40)}{(4)(314)(20)} = 0.143$$

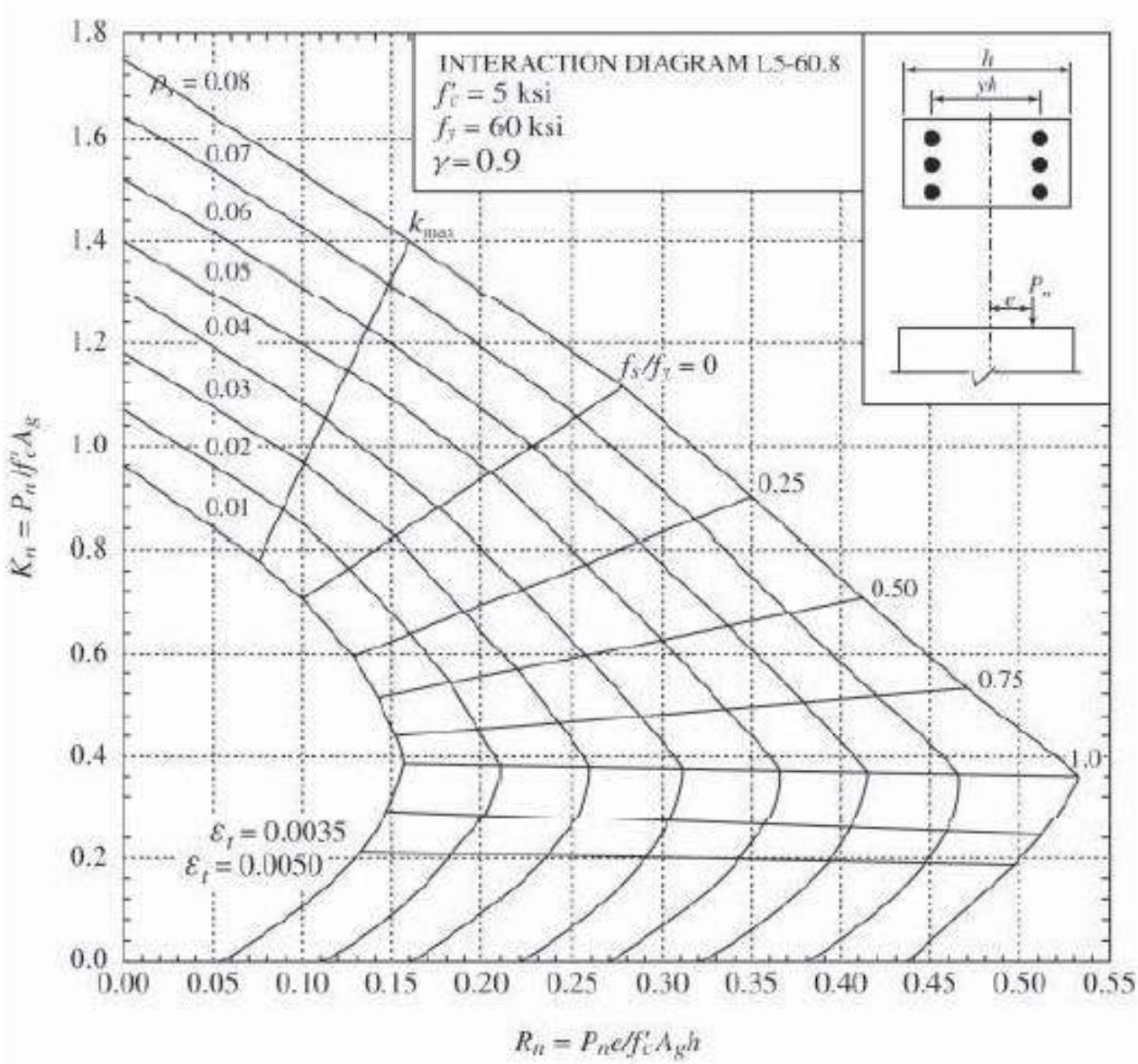
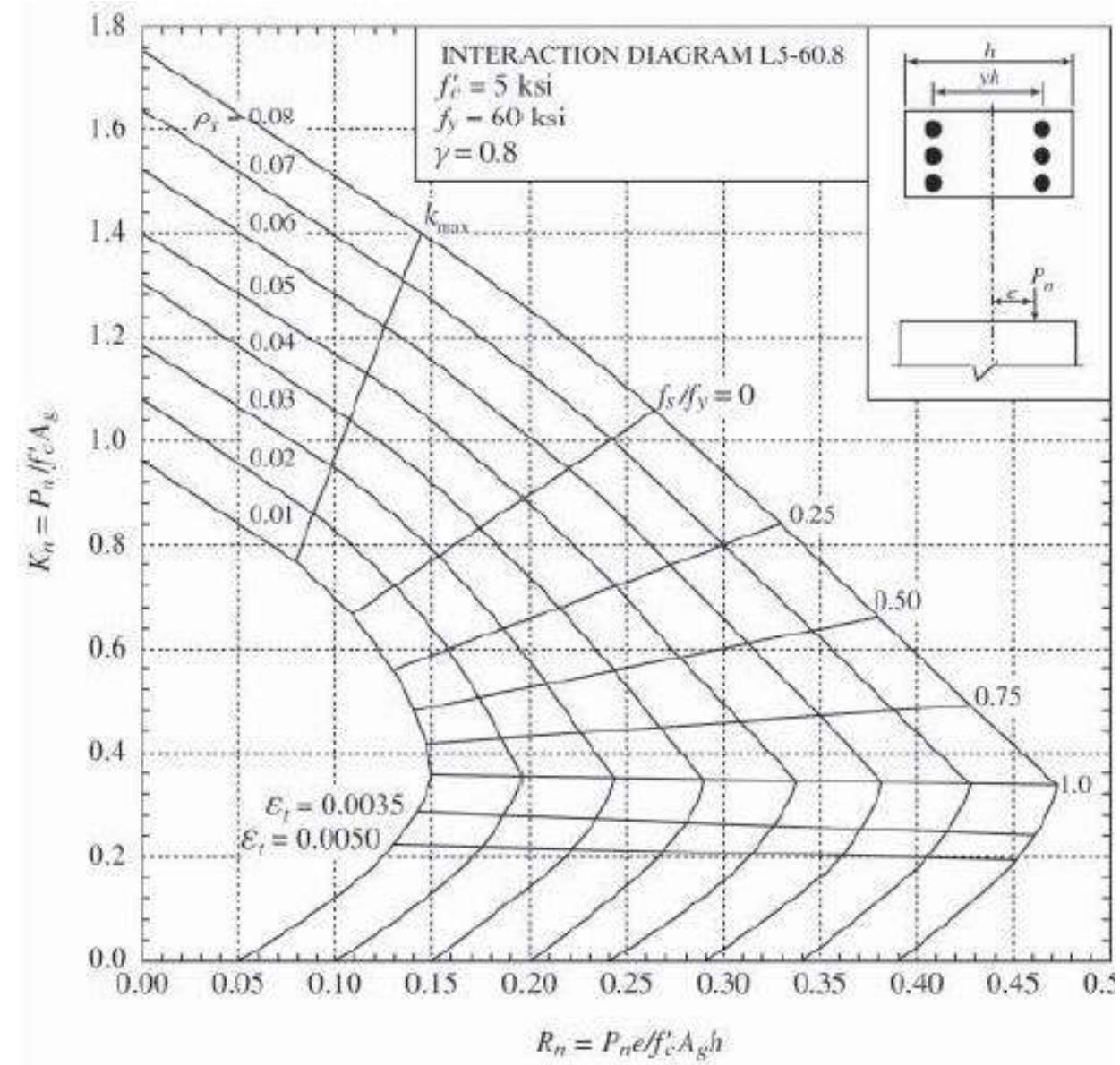
$$\gamma = \frac{15}{20} = 0.75$$

Por interpolación entre las gráficas 11 y 12 del apéndice A, ρ_g resulta ser igual a 0.0235 y $\frac{f_y}{f'_c} < 1.0$.

$$\rho A_g = (0.0235)(314) = 7.38 \text{ plg}^2$$

Use 8 varillas del #9 = 8.00 plg²

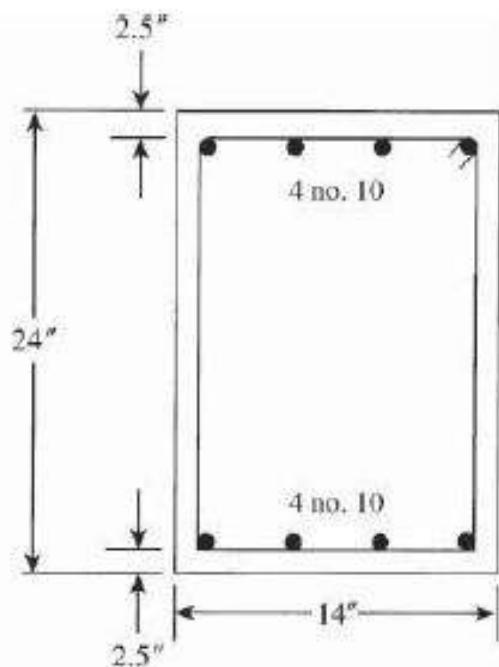




Probar con $e_t = 0.0015$

$$\varepsilon_t = 0.0015, f_s = 0.0015 (29,000) = 43.5 \text{ ksi}$$

Usando los diagramas de interacción determine la resistencia de la columna ϕP_n de la columna corta que se muestra, actuando con una excentricidad $e=12\text{pulg}$. Usar $f'_c = 5\text{ksi}$ y $f_y = 60\text{ksi}$



$$H = 24 \text{ in}$$

$$\gamma h = 24 - 2 \times 2.5 = 19 \text{ in}$$

$$\gamma = 19/24 = 0.79$$

$$\rho = 8(1.27)/(14 \times 24) = 0.030.$$

De la gráfica

$e < d$ controla compresión

Asumir

$$\varepsilon_t = 0.002, f_s/f_y = 1.0$$

$$K_n = 0.36 = P_n/(5 \times 14 \times 24)$$

$$P_n = 605 \text{ K}$$

$$K_n = 0.36, R_n = K_n (e/h) = 0.36 (12/24) = 0.18$$

$$\rho = 0.018 < 0.03 \quad P_n > 605 \text{ K}$$

$$\frac{f_s}{f_y} = \frac{43.5}{60} = 0.725 \quad \rho = 0.03 \quad K_n = 0.44$$

$$0.44 = \frac{P_n}{5 \times 14 \times 24} \quad P_n = 740 \text{ K}$$

$$K_n = 0.44, R_n = 0.44 \left(\frac{12}{24} \right) = 0.22$$

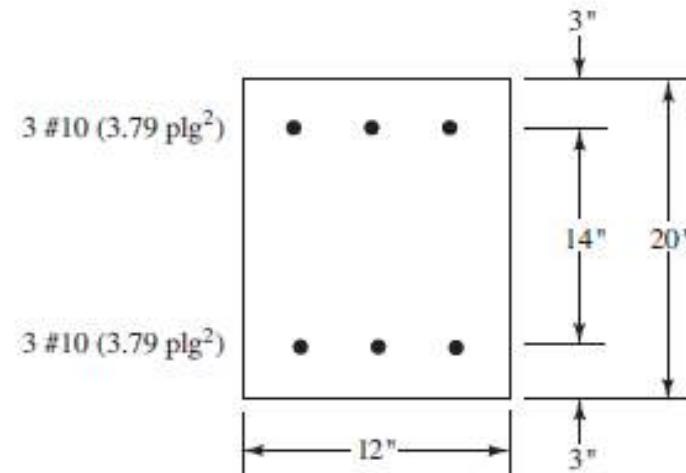
$$\rho = 0.03 \quad P_n = 740 \text{ K}$$

$$\phi P_n = 0.65(740) = 480 \text{ K}$$

$$\phi M_n = 480(12/12) = 480k-p$$

EJEMPLO 10.7

Usando las curvas de interacción apropiadas, determine el valor de P_n para la columna corta con estribos mostrada en la figura 10.20 si $e_x = 10"$. Suponga $f'_c = 4\,000 \text{ lb/plg}^2$ y $f_y = 60\,000 \text{ lb/plg}^2$.



$$\frac{e}{h} = \frac{10}{20} = 0.500$$

$$\rho_g = \frac{(2)(3.79)}{(12)(20)} = 0.0316$$

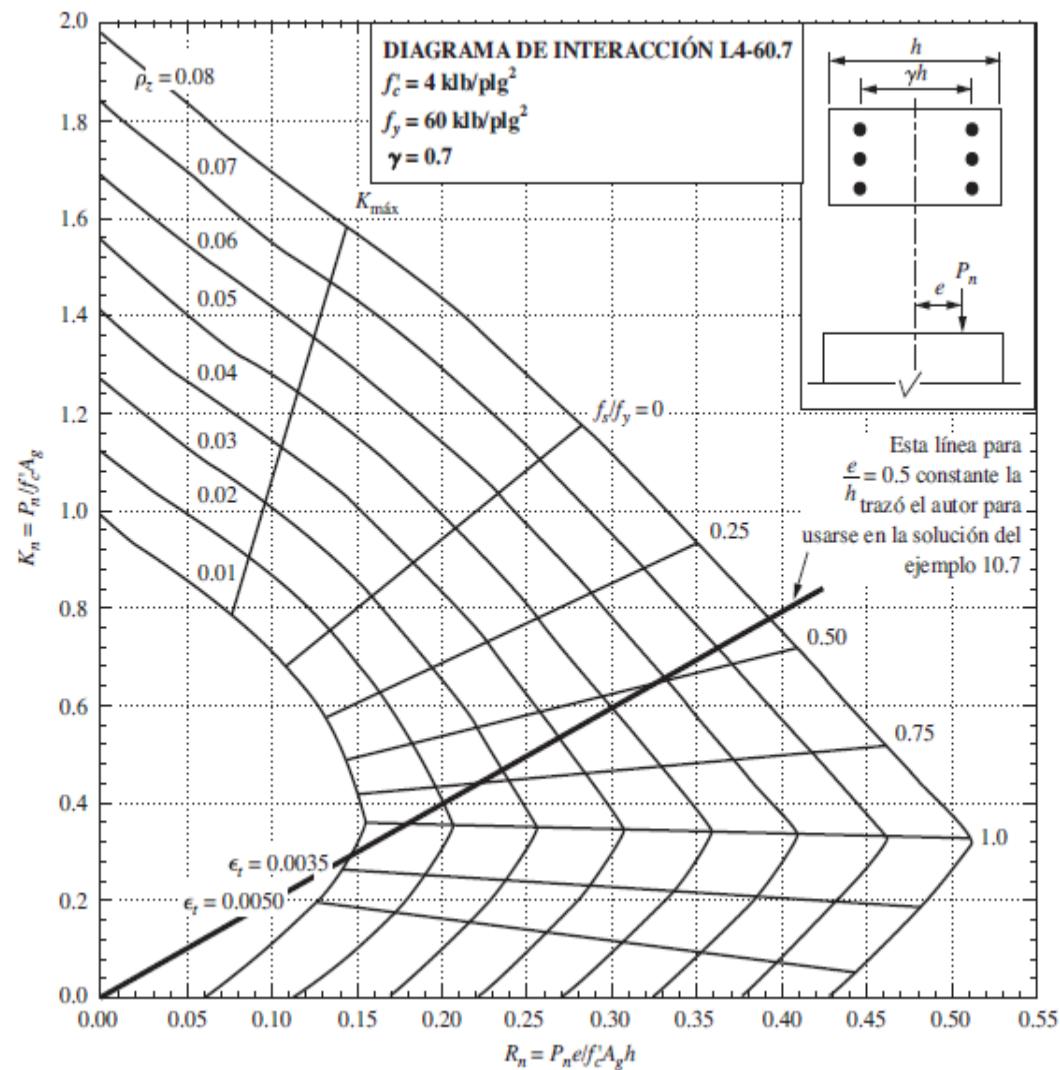
$$\gamma = \frac{14}{20} = 0.700$$

Representando gráficamente una línea recta por el origen y la intersección de los valores supuestos de K_n y R (digamos 0.8 y 0.4, respectivamente).

Para ρ_g de 0.0316 leemos el valor de R_n

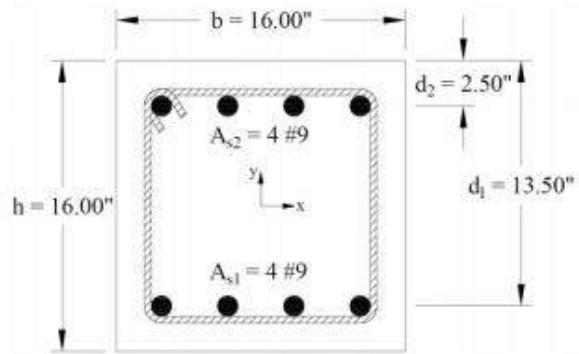
$$R_n = \frac{P_n e}{f'_c A_g h} = 0.24$$

$$P_n = \frac{(0.24)(4)(12 \times 20)(20)}{10} = 460.8 \text{ kib}$$



Ejemplo de Diagrama de Interacción de Columna

Para la columna mostrada desarrollar diagrama de interacción de columna determinado los 7 puntos de control



Design Data

$$f'_c = 5000 \text{ psi}$$

$$f_y = 60,000 \text{ psi}$$

Cover = 2.5 in. to the center of the reinforcement

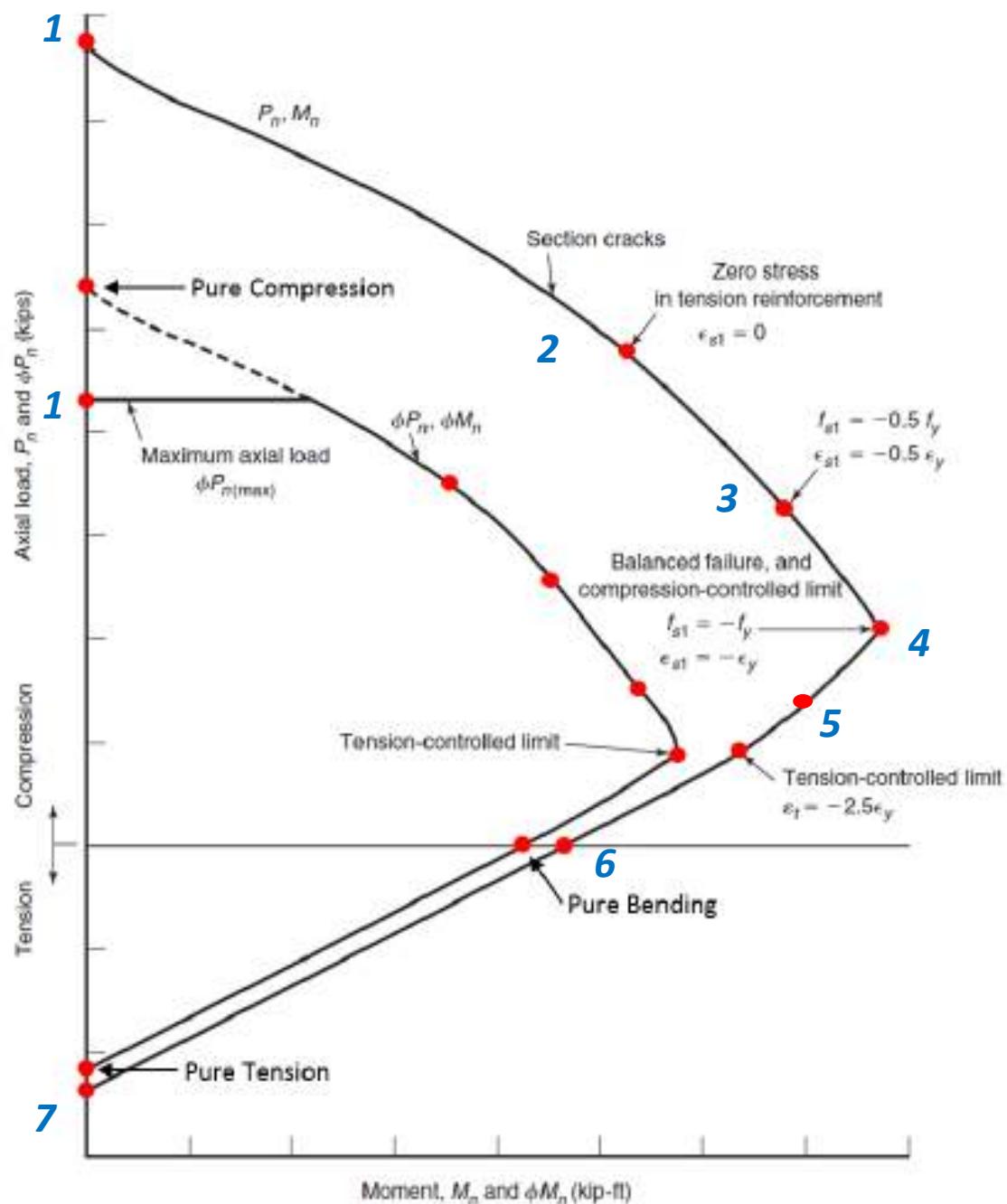
Column 16 in. x 16 in.

Top reinforcement = 4 #9

Bottom reinforcement = 4 #9

Puntos de control

1. Compresión Pura
2. Esfuerzo de barras cerca de zona de tensión ($f_s=0$)
3. Esfuerzo de barras cerca de zona de tensión $0.5f_y$ ($f_s=-0.5f_y$)
4. Esfuerzo de barras cerca de zona de tensión = f_y ($f_s=-f_y$)
5. Esfuerzos de barras en tensión con $e = 0.005$
6. Flexión Pura
7. Tensión Pura



1. Compresión Pura

$$P_o = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}$$

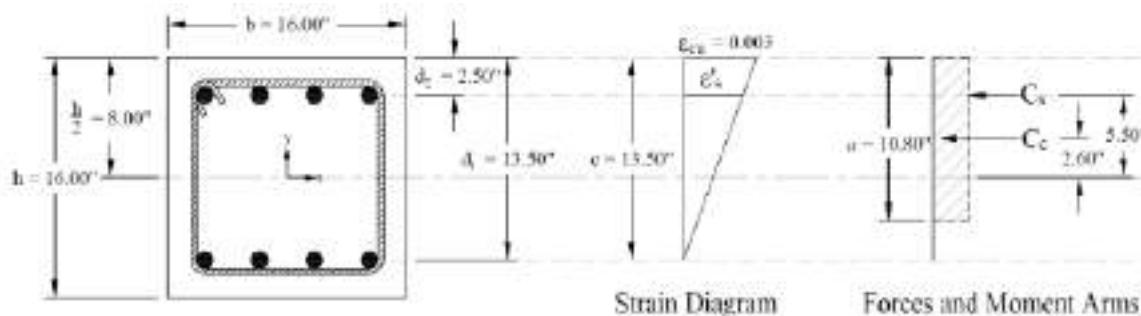
$$P_o = 0.85 \times 5000 \times (16 \times 16 - 8 \times 1.00) + 60000 \times 8 \times 1.00 = 1,530 \text{ kips}$$

$$\phi = 0.65$$

$$\phi P_o = 0.65 \times 1,530 = 997 \text{ kips}$$

$$\phi P_{n,max} = 0.80 \times \phi P_o = 0.80 \times 997 = 798 \text{ kips}$$

2. Esfuerzo de barras cerca de zona de tensión (fs=0)



$$c = d_1 = 13.5 \text{ in.}$$

$$\beta_l = 0.85 - \frac{0.05 \times (f'_c \times 4000)}{1000} = 0.85 - \frac{0.05 \times (5000 - 4000)}{1000} = 0.80$$

$$a = \beta_l \times c = 0.80 \times 13.5 = 10.80 \text{ in.}$$

$$\varepsilon_s = 0$$

$$\therefore \phi = 0.65$$

$$\varepsilon_m = 0.003$$

$$\varepsilon'_s = (c - d_2) \times \frac{\varepsilon_{cu}}{c} = (13.50 - 2.5) \times \frac{0.003}{13.50} = 0.00244 \text{ (Compression)} > \varepsilon_y = \frac{F_y}{E_s} = \frac{60}{29,000} = 0.00207$$

$$C_c = 0.85 \times f'_c \times a \times b = 0.85 \times 5,000 \times 10.80 \times 16 = 734.4 \text{ kip}$$

$$f_s = 0 \text{ psi} \rightarrow T_s = f_s \times A_{s1} = 0 \text{ kip} \quad \text{Since } \varepsilon'_s > \varepsilon_y \rightarrow \text{compression reinforcement has yielded}$$

$$\therefore f'_s = f_y = 60,000 \text{ psi}$$

$$C_s = (f'_s - 0.85 f'_c) \times A_{s2} = (60,000 - 0.85 \times 5,000) \times 4 = 223 \text{ kip}$$

$$P_n = C_c + C_s - T_s = 734.4 + 223 - 0 = 957 \text{ kip}$$

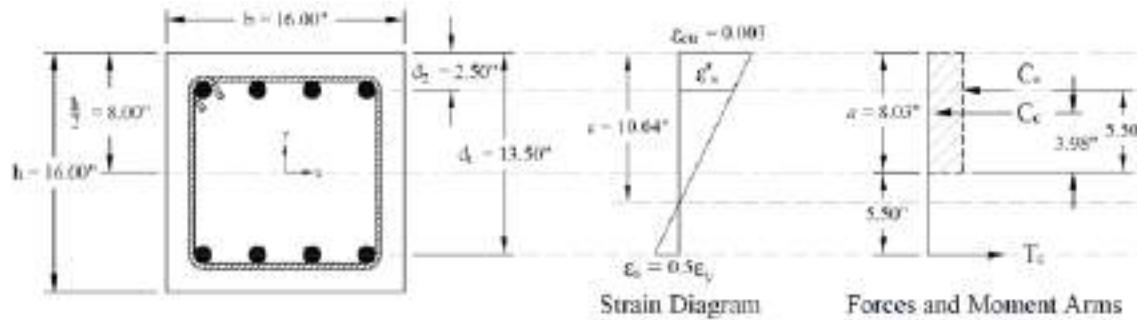
$$\phi P_n = 0.65 \times 957 = 622 \text{ kip}$$

$$M_n = C_c \times \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + C_s \times \left(\frac{h}{2} - d_2 \right) + T_s \times \left(d_1 - \frac{h}{2} \right)$$

$$M_n = 734.4 \times \left(\frac{16}{2} - \frac{10.80}{2} \right) + 223 \times \left(\frac{16}{2} - 2.5 \right) + 0 \times \left(13.50 - \frac{16}{2} \right) = 261 \text{ kip.ft}$$

$$\phi M_n = 0.65 \times 261 = 170 \text{ kip.ft}$$

3. Esfuerzo de barras cerca de zona de tensión 0.5fy (fs=-0.5fy)



$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{60}{29,000} = 0.00207$$

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_y}{2} = \frac{0.00207}{2} = 0.00103 < \varepsilon_y \rightarrow \text{tension reinforcement has not yielded}$$

$$\therefore \phi = 0.65$$

$$\varepsilon_{cu} = 0.003$$

$$c = \frac{d_1}{\varepsilon_s + \varepsilon_{cu}} \times \varepsilon_{cu} = \frac{13.50}{0.00103 + 0.003} \times 0.003 = 10.04 \text{ in.}$$

$$a = \beta_1 \times c = 0.80 \times 10.04 = 8.03 \text{ in.}$$

$$\beta_1 = 0.85 - \frac{0.05 \times (f_c' \times 4000)}{1000} = 0.85 - \frac{0.05 \times (5000 - 4000)}{1000} = 0.80$$

$$\varepsilon_c' = (c - d_2) \times \frac{0.003}{c} = (10.04 - 2.5) \times \frac{0.003}{10.04} = 0.00225 \text{ (Compression) } > \varepsilon_y$$

$$C_c = 0.85 \times f_c' \times a \times b = 0.85 \times 5,000 \times 8.03 \times 16 = 546.1 \text{ kip}$$

$$f_s = \varepsilon_s \times E_s = 0.00103 \times 29,000,000 = 30,000 \text{ psi}$$

$$T_s = f_s \times A_{s1} = 30,000 \times 4 = 120 \text{ kip}$$

Since $\varepsilon_s' > \varepsilon_y \rightarrow \text{compression reinforcement has yielded}$

$$\therefore f_s' = f_y = 60,000 \text{ psi}$$

$$C_s = (f_s' - 0.85 f_c') \times A_{s2} = (60,000 - 0.85 \times 5,000) \times 4 = 223 \text{ kip}$$

$$P_n = C_c + C_s - T_s = 546.1 + 223 - 120 = 649 \text{ kip}$$

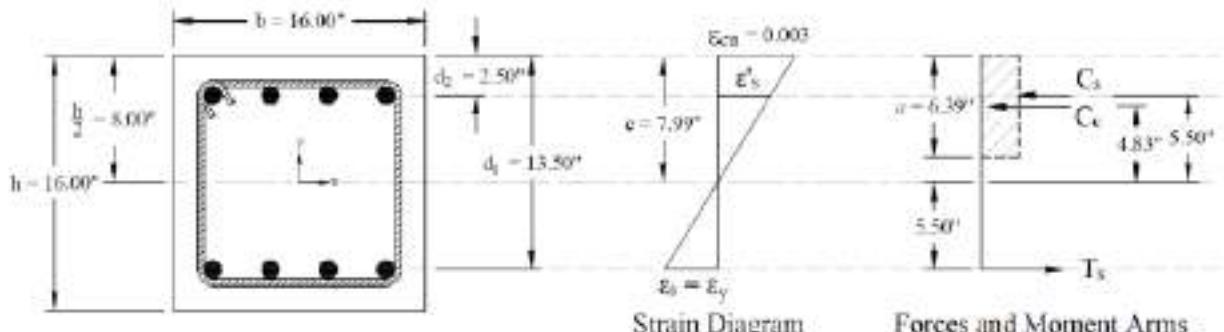
$$\phi P_n = 0.65 \times 649 = 422 \text{ kip}$$

$$M_n = C_c \times \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + C_s \times \left(\frac{h}{2} - d_2 \right) + T_s \times \left(d_1 - \frac{h}{2} \right)$$

$$M_n = 546.1 \times \left(\frac{16}{2} - \frac{8.03}{2} \right) + 223 \times \left(\frac{16}{2} - 2.5 \right) + 120 \times \left(13.50 - \frac{16}{2} \right) = 339 \text{ kip.ft}$$

$$\phi M_n = 0.65 \times 339 = 220 \text{ kip.ft}$$

4. Esfuerzo de barras cerca de zona de tensión = fy(fs=-fy)



$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{60}{29,000} = 0.00207$$

$\varepsilon_s = \varepsilon_y = 0.00207 \rightarrow$ tension reinforcement has yielded

$$\therefore \phi = 0.65$$

$$\varepsilon_{au} = 0.003$$

$$c = \frac{d_1}{\varepsilon_s + \varepsilon_{au}} \times \varepsilon_{au} = \frac{13.50}{0.00207 + 0.003} \times 0.003 = 7.99 \text{ in.}$$

$$a = \beta_1 \times c = 0.80 \times 7.99 = 6.39 \text{ in.}$$

$$\beta_1 = 0.85 - \frac{0.05 \times (f'_c \times 4000)}{1000} = 0.85 - \frac{0.05 \times (5000 \times 4000)}{1000} = 0.80$$

$$\varepsilon'_s = (c - d_2) \times \frac{0.003}{c} = (7.99 - 2.5) \times \frac{0.003}{7.99} = 0.00206 \text{ (Compression) } < \varepsilon_y$$

$$C_c = 0.85 \times f'_c \times a \times b = 0.85 \times 5,000 \times 6.39 \times 16 = 434.6 \text{ kip}$$

$$f_s = f_y = 60,000 \text{ psi}$$

$$T_s = f_y \times A_{s1} = 60,000 \times 4 = 240 \text{ kip}$$

Since $\varepsilon'_s < \varepsilon_y \rightarrow$ compression reinforcement has not yielded

$$\therefore f'_s = \varepsilon'_s \times E_s = 0.00206 \times 29,000,000 = 59,778 \text{ psi}$$

$$C_s = (f'_s - 0.85f'_c) \times A_{s2} = (59,778 - 0.85 \times 5,000) \times 4 = 222.1 \text{ kip}$$

$$P_n = C_c + C_s - T_s = 434.6 + 222.1 - 240 = 417 \text{ kip}$$

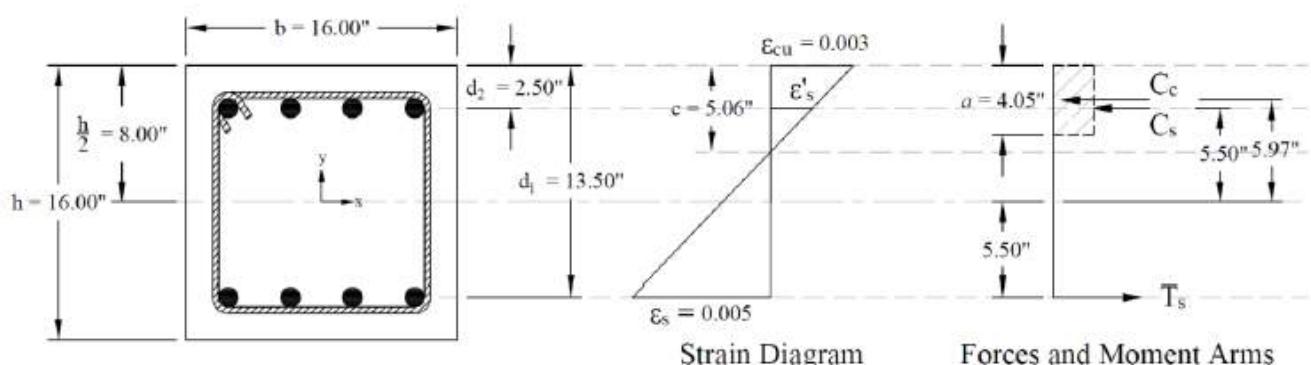
$$\phi P_n = 0.65 \times 417 = 271 \text{ kip}$$

$$M_n = C_c \times \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + C_s \times \left(\frac{h}{2} - d_2 \right) + T_s \times \left(d_1 - \frac{h}{2} \right)$$

$$M_n = 434.6 \times \left(\frac{16}{2} - \frac{6.39}{2} \right) + 222.1 \times \left(\frac{16}{2} - 2.5 \right) + 240 \times \left(13.50 - \frac{16}{2} \right) = 386 \text{ kip.ft}$$

$$\phi M_n = 0.65 \times 386 = 251 \text{ kip.ft}$$

5. Esfuerzos de barras en tensión con $e = 0.005$



$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{60}{29,000} = 0.00207$$

$$\varepsilon_{au} = 0.003$$

$$\varepsilon_s = 0.005 > \varepsilon_y \rightarrow \text{tension reinforcement has yielded}$$

$$c = \frac{d_1}{\varepsilon_s + \varepsilon_{au}} \times \varepsilon_{au} = \frac{13.50}{0.005 + 0.003} \times 0.003 = 5.06 \text{ in.}$$

$$\therefore \phi = 0.9$$

$$a = \beta_1 \times c = 0.80 \times 5.06 = 4.05 \text{ in.}$$

$$\beta_1 = 0.85 - \frac{0.05 \times (f'_c \times 4000)}{1000} = 0.85 - \frac{0.05 \times (5000 - 4000)}{1000} = 0.80$$

$$\varepsilon'_s = (c - d_2) \times \frac{0.003}{c} = (5.06 - 2.5) \times \frac{0.003}{5.06} = 0.00152 \text{ (Compression) } < \varepsilon_y$$

$$C_c = 0.85 \times f'_c \times a \times b = 0.85 \times 5,000 \times 4.05 \times 16 = 275.4 \text{ kip}$$

$$f_s = f_y = 60,000 \text{ psi}$$

$$T_s = f_y \times A_{s1} = 60,000 \times 4 = 240 \text{ kip}$$

Since $\varepsilon'_s < \varepsilon_y \rightarrow$ compression reinforcement has not yielded

$$\therefore f'_s = \varepsilon'_s \times E_s = 0.00152 \times 29,000,000 = 44,037 \text{ psi}$$

$$C_s = (f'_s - 0.85 f_c) \times A_{s2} = (44,037 - 0.85 \times 5,000) \times 4 = 159.1 \text{ kip}$$

$$P_n = C_c + C_s - T_s = 275.4 + 159.1 - 240 = 195 \text{ kip}$$

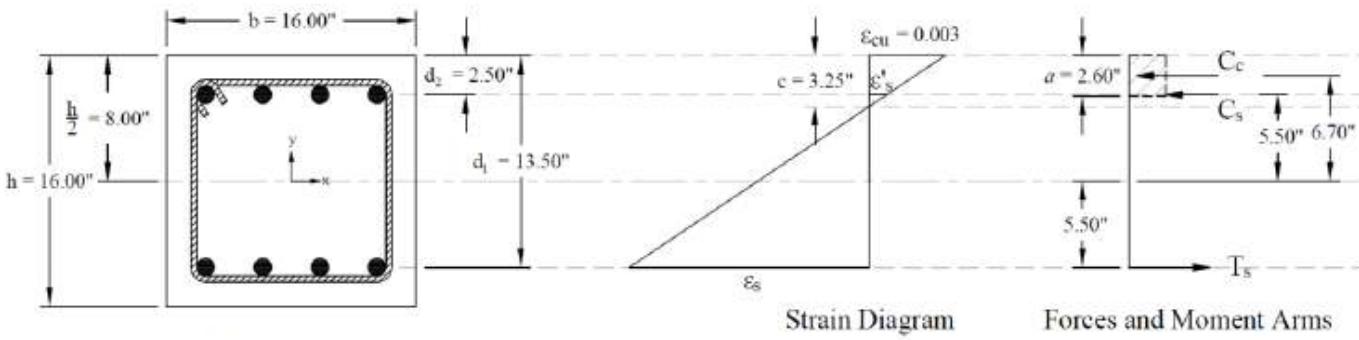
$$\phi P_n = 0.90 \times 195 = 175 \text{ kip}$$

$$M_n = C_c \times \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + C_s \times \left(\frac{h}{2} - d_2 \right) + T_s \times \left(d_1 - \frac{h}{2} \right)$$

$$M_n = 275.4 \times \left(\frac{16}{2} - \frac{4.05}{2} \right) + 159.1 \times \left(\frac{16}{2} - 2.5 \right) + 240 \times \left(13.50 - \frac{16}{2} \right) = 320 \text{ kip.ft}$$

$$\phi M_n = 0.90 \times 320 = 288 \text{ kip.ft}$$

6. Flexión Pura, $P_n = 0$



Try $c = 3.25 \text{ in.}$

$$a = \beta_1 \times c = 0.80 \times 3.25 = 2.60 \text{ in.}$$

$$\beta_1 = 0.85 - \frac{0.05 \times (f'_c \times 4000)}{1000} = 0.85 - \frac{0.05 \times (5000 \times 4000)}{1000} = 0.80$$

$$\varepsilon_{au} = 0.003$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{60}{29,000} = 0.00207$$

$$\varepsilon_s = (d_1 - c) \times \frac{0.003}{c} = (13.50 - 3.25) \times \frac{0.003}{3.25} = 0.00946 \text{ (Tension) } > \varepsilon_y$$

$$\therefore \phi = 0.9$$

$$\varepsilon'_s = (c - d_2) \times \frac{0.003}{c} = (3.25 - 2.5) \times \frac{0.003}{3.25} = 0.00069 \text{ (Compression) } < \varepsilon_y$$

$$C_c = 0.85 \times f'_c \times a \times b = 0.85 \times 5,000 \times 2.6 \times 16 = 176.8 \text{ kip}$$

$$f_s = f_y = 60,000 \text{ psi}$$

$$T_s = f_y \times A_{s1} = 60,000 \times 4 = 240 \text{ kip}$$

Since $\varepsilon'_s < \varepsilon_y \rightarrow$ compression reinforcement has not yielded

$$\therefore f'_s = \varepsilon'_s \times E_s = 0.00069 \times 29,000,000 = 20,077 \text{ psi}$$

$$C_s = (f'_s - 0.85f'_c) \times A_{s2} = (20,077 - 0.85 \times 5,000) \times 4 = 63.3 \text{ kip}$$

$$P_n = C_c + C_s - T_s = 176.8 + 63.3 - 240 \approx 0 \text{ kip} \rightarrow \phi P_n \approx 0 \text{ kip}$$

The assumption that $c = 3.25$ in. is correct

$$M_n = C_c \times \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + C_s \times \left(\frac{h}{2} - d_2 \right) + T_s \times \left(d_1 - \frac{h}{2} \right)$$

$$M_n = 176.8 \times \left(\frac{16}{2} - \frac{2.60}{2} \right) + 63.3 \times \left(\frac{16}{2} - 2.5 \right) + 240 \times \left(13.50 - \frac{16}{2} \right) = 238 \text{ kip.ft}$$

$$\phi M_n = 0.90 \times 238 = 214 \text{ kip.ft}$$

7. Tensión Pura

$$P_{nt} = f_y \times (A_{s1} + A_{s2}) = 60,000 \times (4 + 4) = 480 \text{ kip}$$

$$\phi = 0.9$$

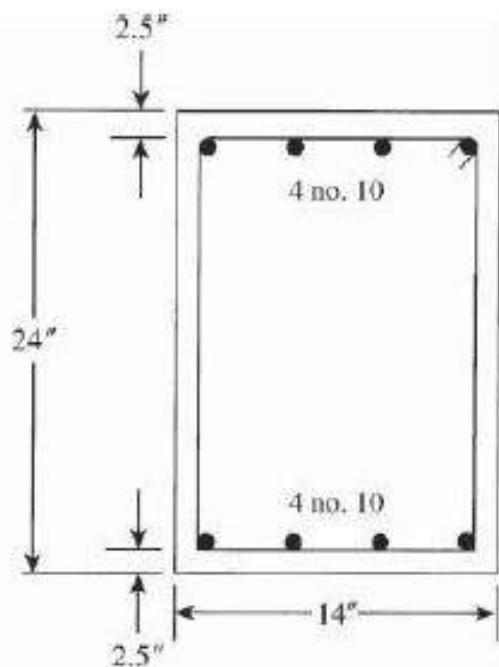
$$\phi P_{nt} = 0.90 \times 480 = 432 \text{ kip}$$

$$M_n = \phi M_n = 0 \text{ kip.ft}$$

Probar con $e_t = 0.0015$

$$\varepsilon_t = 0.0015, f_s = 0.0015 (29,000) = 43.5 \text{ ksi}$$

Usando los diagramas de interacción determine la resistencia de la columna ϕP_n de la columna corta que se muestra, actuando con una excentricidad $e=12\text{pulg}$. Usar $f'_c = 5\text{ksi}$ y $f_y = 60\text{ksi}$



$$H = 24 \text{ in}$$

$$\gamma h = 24 - 2 \times 2.5 = 19 \text{ in}$$

$$\gamma = 19/24 = 0.79$$

$$\rho = 8(1.27)/(14 \times 24) = 0.030.$$

De la gráfica

$e < d$ controla compresión

Asumir

$$\varepsilon_t = 0.002, f_s/f_y = 1.0$$

$$K_n = 0.36 = P_n/(5 \times 14 \times 24)$$

$$P_n = 605 \text{ K}$$

$$K_n = 0.36, R_n = K_n (e/h) = 0.36 (12/24) = 0.18$$

$$\rho = 0.018 < 0.03 \quad P_n > 605 \text{ K}$$

$$\frac{f_s}{f_y} = \frac{43.5}{60} = 0.725 \quad \rho = 0.03 \quad K_n = 0.44$$

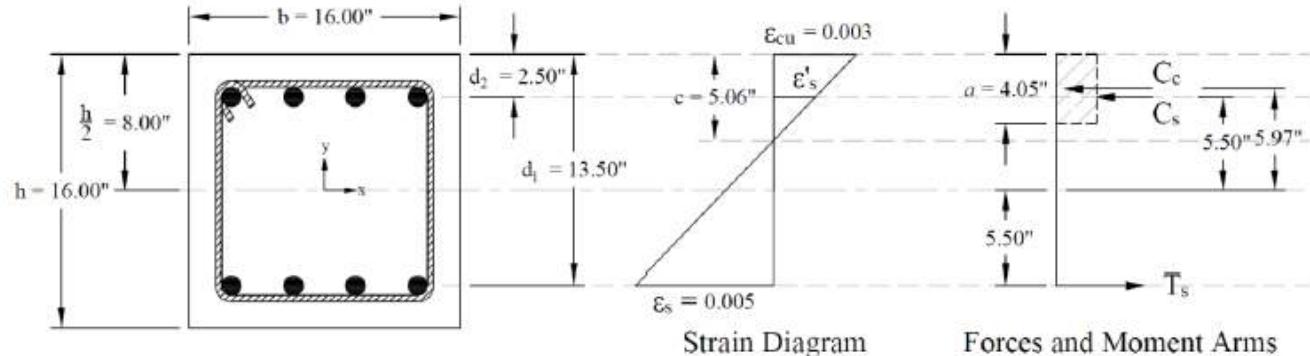
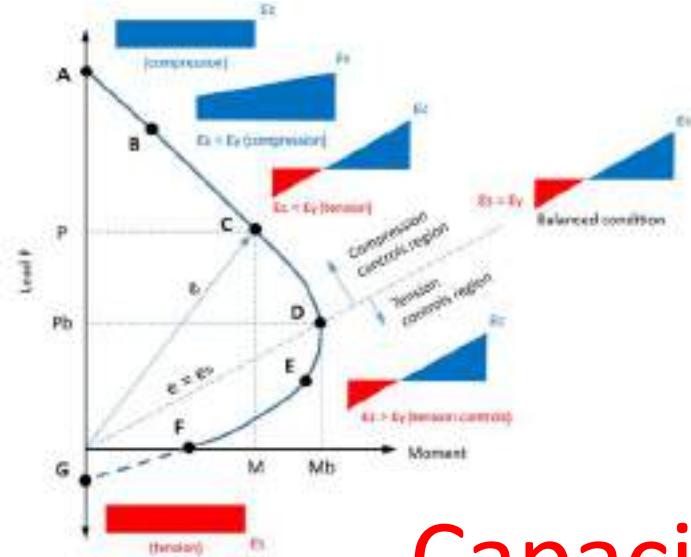
$$0.44 = \frac{P_n}{5 \times 14 \times 24} \quad P_n = 740 \text{ K}$$

$$K_n = 0.44, R_n = 0.44 \left(\frac{12}{24} \right) = 0.22$$

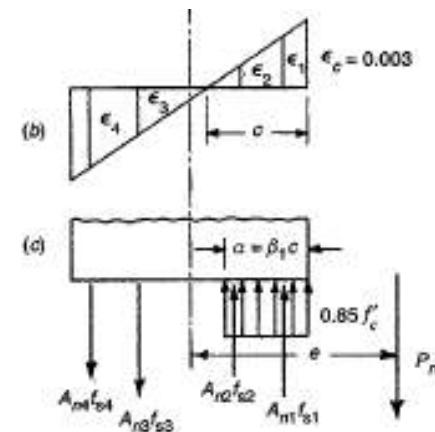
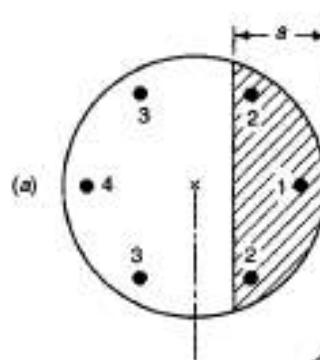
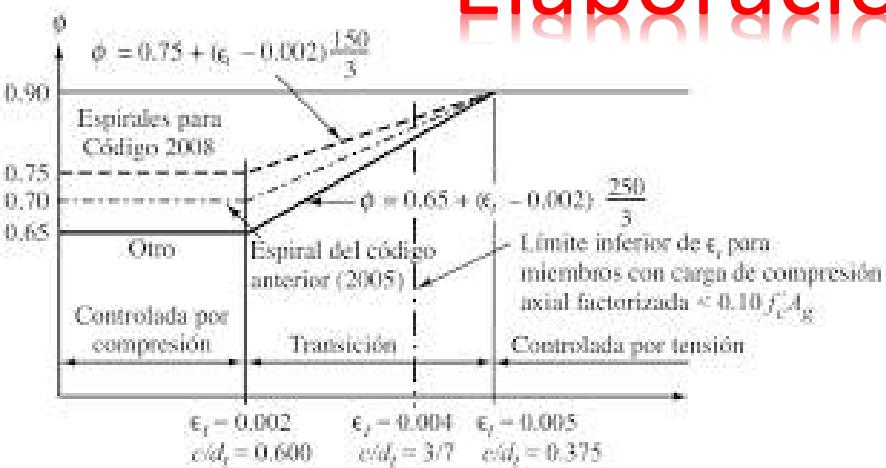
$$\rho = 0.03 \quad P_n = 740 \text{ K}$$

$$\phi P_n = 0.65(740) = 480 \text{ K}$$

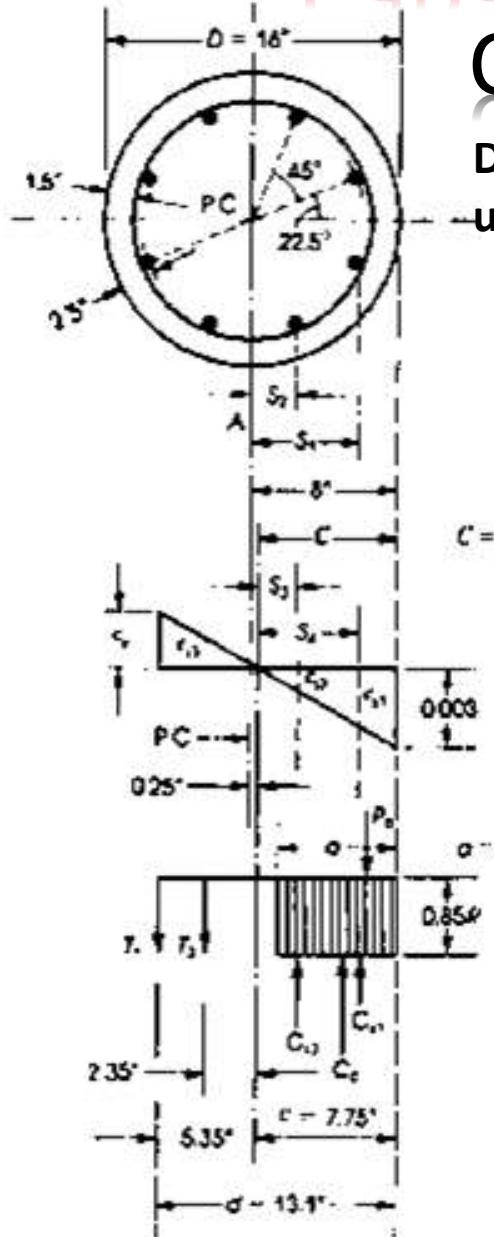
$$\phi M_n = 480(12/12) = 480k-p$$



Capacidad Resistente de Columnas Circulares Columnas a Tensión Elaboración de Diagrama de Interacción



Capacidad de carga para Columna Circular



Condición balanceada

Determinar la carga y momento balanceado P_b y M_b para una columna de 16" de diámetro, $f'c = 4\text{ksi}$ y $f_y = 60\text{ksi}$

Propiedad del segmento circular

$$S = 8 - 2.5 = 5.5 \text{ in.}$$

$$S_1 = S \cos 22.5\text{deg} = 5.1 \text{ in.}$$

$$S_2 = S \cos 67.5\text{deg} = 2.1 \text{ in.}$$

$$d = 8 + 5.1 = 13.1 \text{ in.}$$

$$S_3 = 1.85 \text{ in.}$$

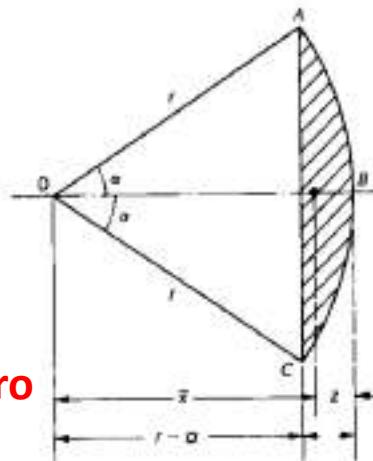
Determinación del eje neutro

$$d_i = 13.1 \text{ in.} \quad \epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} \quad (E_s = 29,000 \text{ k})$$

$$\frac{c_b}{d} = \frac{0.003}{0.003 + \epsilon} = \frac{0.003}{0.003 + f/E_c} = \frac{87}{87 + f}$$

$$c_b = \frac{87}{87 + 60}(13.1) = 7.75 \text{ in.}$$

$$a_s = 0.85 \times 7.75 = 6.59 \text{ in.}$$



Área del segmento circular

$$r^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$

Localización de \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \frac{r \sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$Z = r - \bar{x}$$

$$r \cos \alpha = r - a \quad \text{or} \quad \cos \alpha = \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

$$\cos \alpha = \left(1 - \frac{6.59}{8}\right) = 0.176$$

$$\alpha = 79.85^\circ \quad \sin \alpha = 0.984 \quad \alpha = 1.394 \text{ rad.}$$

$$\text{Área} = (8)^2(1.394 - 0.984 \times 0.176)$$

= 78,12 in.

$$\bar{x} = \left(\frac{2}{3}\right) \frac{8(0.984)^3}{1.394 - 0.984 \times 0.176} = 4.16 \text{ in.}$$

$$Z \equiv r - \bar{x} = 8 - 4.16 = 3.84 \text{ in.}$$

Calculo de fuerza a compresión del concreto

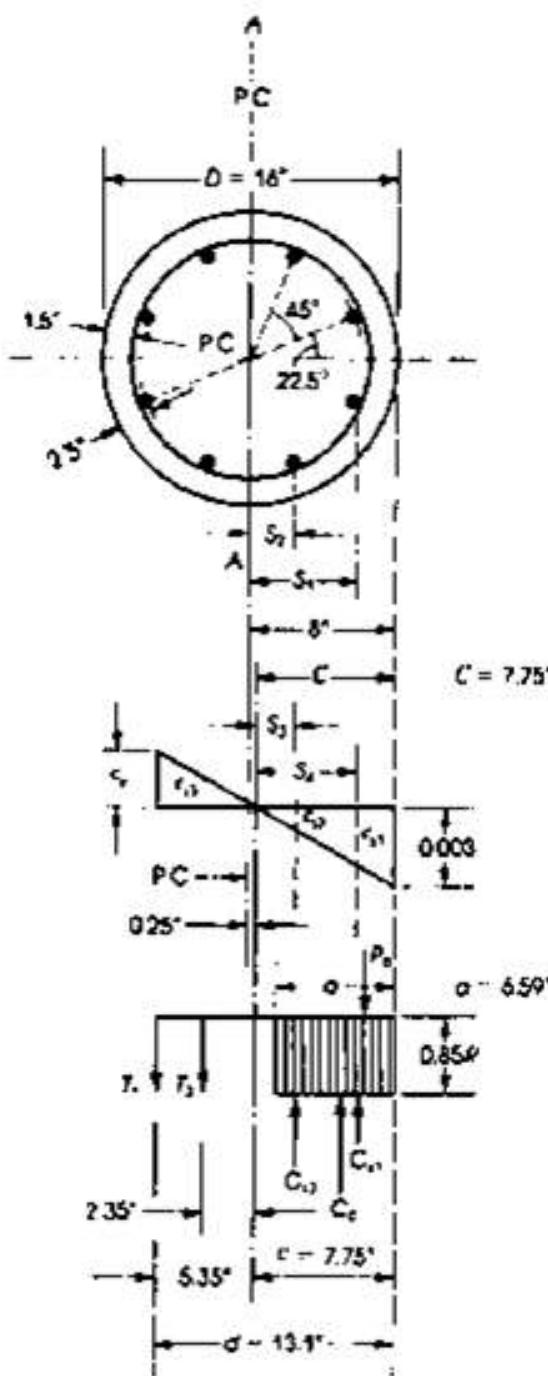
$$C_c = 0.85f'_c \times \text{area of segment}$$

$$= 0.85 \times 4 \times 78.12 = 265.6 \text{ K}$$

Cálculo de fuerzas a tensión y compresión del acero

$$\varepsilon = e_y = 0.00207 \quad f_s = f_y = 60 \text{ ksi}$$

$$T_1 = 2 \times 60 = 120 \text{ K}$$



Cálculo de fuerzas a tensión y compresión del acero

$$\epsilon = e_y = 0.00207 \quad f_s = f_y = 60 \text{ ksi}$$

$$T_1 = 2 \times 60 = 120 \text{ K}$$

$$\epsilon_{s3} = \frac{2.35}{5.35} \epsilon_y = \frac{2.35}{5.35} \times 0.00207 = 0.00091$$

$$f_{s3} = 0.00091 \times 29,000 = 26.4 \text{ ksi}$$

$$T_2 = 26.4 \times 2 = 52.8 \text{ K}$$

$$\epsilon_{s1} = \frac{4.85}{7.75} \times 0.003 = 0.000188$$

$$f_{s1} = 0.000188 \times 29,000 = 54.5 \text{ ksi} < 60 \text{ ksi}$$

$$C_{s1} = 2(54.5 - 3.4) = 102.2 \text{ K}$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{1.85}{7.75} \times 0.003 = 0.000716$$

$$f_{s2} = 0.000716 \times 29,000 = 20.8 \text{ ksi}$$

$$C_{s2} = 2(20.8 - 3.4) = 34.8 \text{ K}$$

Cálculo de P_b

$$P_b = C_c + \Sigma C_s - \Sigma T (\varphi = 0.75).$$

$$P_b = 265.6 + (102.2 + 34.8) - (120 + 52.8) = 230 \text{ K}$$

$$\epsilon_t = 0.002 \quad \text{and} \quad \phi = 0.65$$

$$\phi P_b = 149.5 \text{ K}$$

Cálculo de M_b

$$M_b = P_b e_b = C_c \times 4.16 + C_{s1} \times 5.1 + C_{s2} \times 2.1 + T_1 \times 5.1 + T_2 \times 2.1 \\ = 2422.1 \text{ K} \cdot \text{in.} = 201.9 \text{ K} \cdot \text{ft}$$

$$\phi M_b = 131.2 \text{ K} \cdot \text{ft}$$

$$e_b = \frac{2422.1}{230} = 10.5 \text{ in.}$$

Capacidad de carga para Columna Circular para fallas en compresión

Asumir valores de $C > C_b$ o $a > a_b$

Calcular con el mismo procedimiento de falla balanceada P_{n1}

$$P_{n1} = C_c + \sum C_s - \sum T.$$

Calculando momento con respecto al centroide plástico encontrar P_{n2}

$$P_{n2} = M_n/e$$

Si los valores de P_{n1} y P_{n2} no están cerca en un rango de 1% repetir cálculos

Controla compresión

$$e < e_b \text{ or } P_n > P_b$$

Del ejemplo anterior con para cargas balanceadas

1. Se asume $e = 6$ " $< e_b = 10.5$ "
2. Se asume $c = 9$ " $> c_b = 7.75$ ", $a = 7.65$ "
3. Calcular $\bar{x} = 3.585$ " $Z = 4.415$ " y área del segmento = 94.93 pulg²
4. Calcular fuerzas $C_c = 322.7k$, $C_{s1} = 110.7k$, $C_{s2} = 53.1k$, $T_1 = 21.6k$, $T_2 = 78.9k$
5. Calcular $P_{n1} = C_c + \sum C_s - \sum T = 386K$
6. Tomando momento alrededor del centroide plástico $M_n = 191k\cdot p$, $P_{n2} = M_n/6 = 382$, el cual esta cerca de P_{n1} . $P_n = P_{n2}$ y multiplicar por $\varphi = 0.70$

Se puede calcular P_n de forma aproximada

$$P_n = \frac{A_g f'_c}{9.6he/(0.8h + 0.67D_s)^2 + 1.18} + \frac{A_{st} f_y}{3e/D_s + 1}$$

$$A_g = \frac{\pi}{4} h^2 = \frac{\pi}{4} (16)^2 = 201.1 \text{ in.}^2$$

$$h = 16 \text{ in.} \quad D_s = 16 - 5 = 11.0 \text{ in.} \quad A_{st} = 8 \times 1 = 8 \text{ in.}^2$$

$$P_n = \frac{201.1 \times 4}{9.6 \times 16 \times 6 / (0.8 \times 16 + 0.67 \times 11)^2 + 1.18} + \frac{8 \times 60}{3 \times 6 / 11 + 1} \\ = 415.5 \text{ K}$$

Diseño de Columnas para falla a Tensión

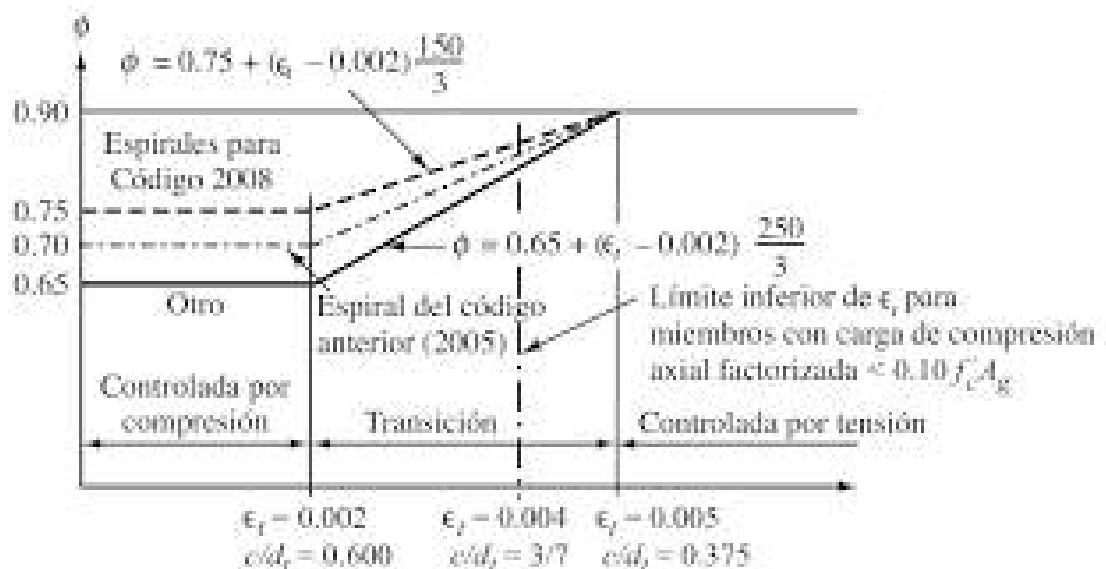
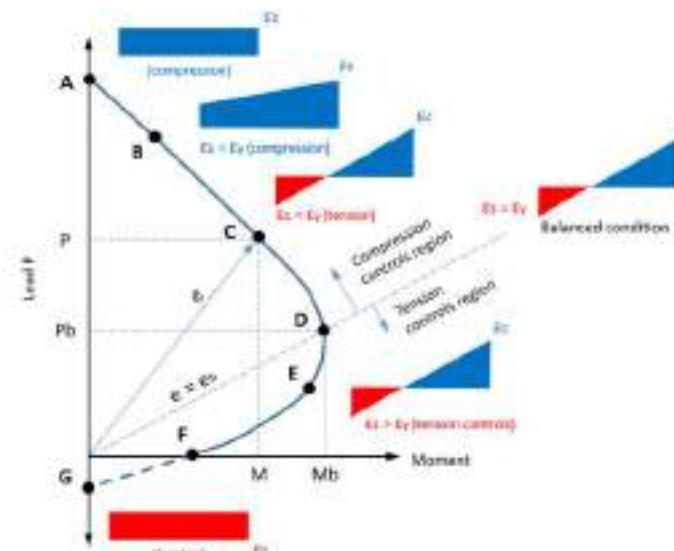
- La falla a tensión ocurre cuando $P_n < P_b$ o la excentricidad $e > e_b$*
- P_u y M_u son dados, y se requiere el tamaño de la columna y el refuerzo*
- Se puede asumir que controla la tensión cuando la relación M_u/P_u es mayor que 1.75 para secciones $h < 24"$ y 2.0 para $h > 24"$.*

Asumir inicialmente $A_s = A'_s$

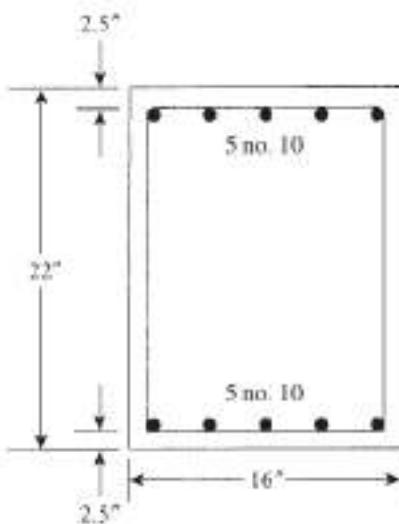
$$A_s = A'_s = \frac{P_n(e - h/2 + a/2)}{f_y(d - d')}$$

Asumiendo $a = 0.4d$ y $P_u = \phi P_n$

$$A_s = A'_s = \frac{P_u(e - 0.5h + 0.2d)}{\phi f_y(d - d')}$$



Determinar el refuerzo necesario para una sección 16" x22" para soportar una carga factorizada $P_u = 257\text{k}$ y un momento factorizado $M_u = 643\text{k-p}$.
Usar $f'c = 4\text{ksi}$ y $f_y = 60\text{ksi}$



- Asumir $A_s = A'_s$ y $f's = f_y$**

$$A_s = A'_s = \frac{P_u(e - 0.5h + 0.2d)}{\phi f_y(d - d')}$$

$$A_s = A'_s = \frac{257(30 - 0.5 \times 22 + 0.2 \times 19.5)}{0.9(60)(17.0)} = 6.41 \text{ in.}^2$$

Usar 5 #10 para refuerzo a tensión e igual refuerzos para compresión

$$\rho_g = 2(6.35)(16 \times 22) = 0.036.$$

Porcentaje de acero 1% < ρ < 8%

Encontrar a con $Aa^2 + Ba + C = 0$

$$e' = e + d - h/2 = 38.5"$$

$$A = 0.425f'cb = 27.2 \quad B = 2A(e' - d) = 1033.6$$

$$C = A's (f_y \cdot 0.85f'c)(e' - d + d') - Asf_ye' = -6941.2$$

$$a = 5.82 \quad y \quad c = a/0.85 = 6.85$$

$$f'_s = 87 \left(\frac{c - d'}{c} \right) = 87 \left(\frac{6.85 - 2.5}{6.85} \right) = 55.26 \text{ ksi}$$

Recalculando a con $f's$

$$C = A'_s(f'_s - 0.85f'_c)(e' - d + d') - A_s f_y e' = -7351$$

$$a = 6.13 \quad y \quad c = a/0.85 = 7.21$$

$$f'_s = 87 \left(\frac{c - 2.5}{c} \right) = 56.83 \text{ ksi}$$

Cálculo de fuerzas

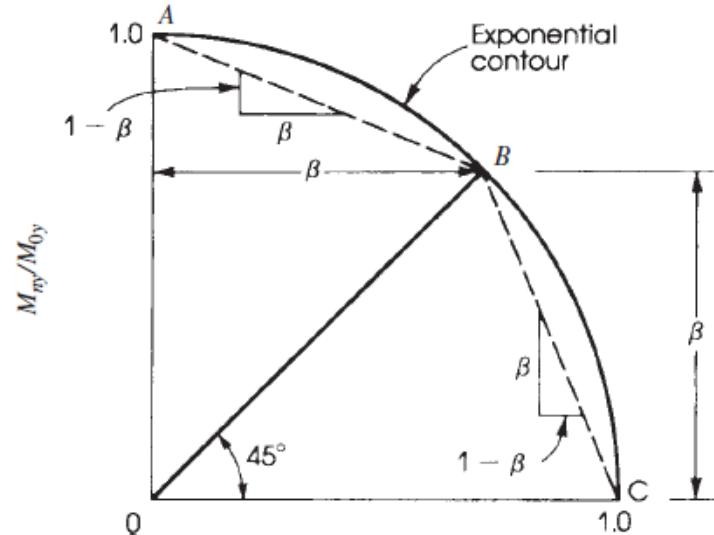
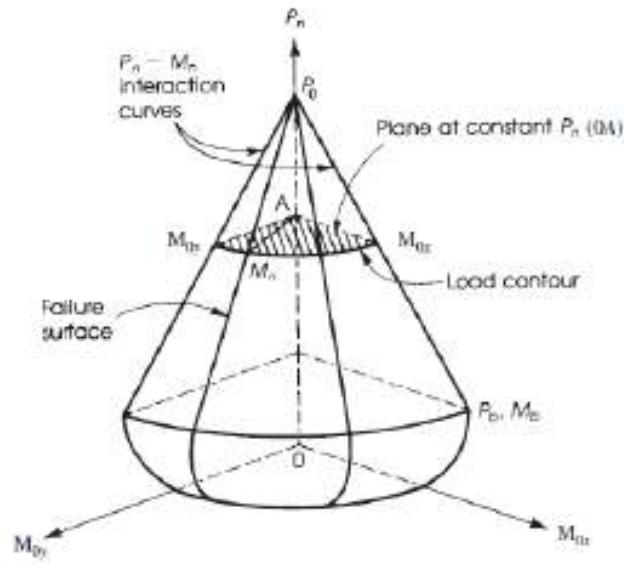
$$C_c = 0.85(4)(6.13)(16) = 333.5 \text{ K} \quad C_s = A'_s(f'_s - 0.85f'_c) = 6.35(57 - 0.85 \times 4) \\ = 340.4 \text{ K} \quad T = A_e f_v = 6.35(60) = 381 \text{ K}$$

$$P_n = C_c + C_s - T = 292.9 \text{ K.}$$

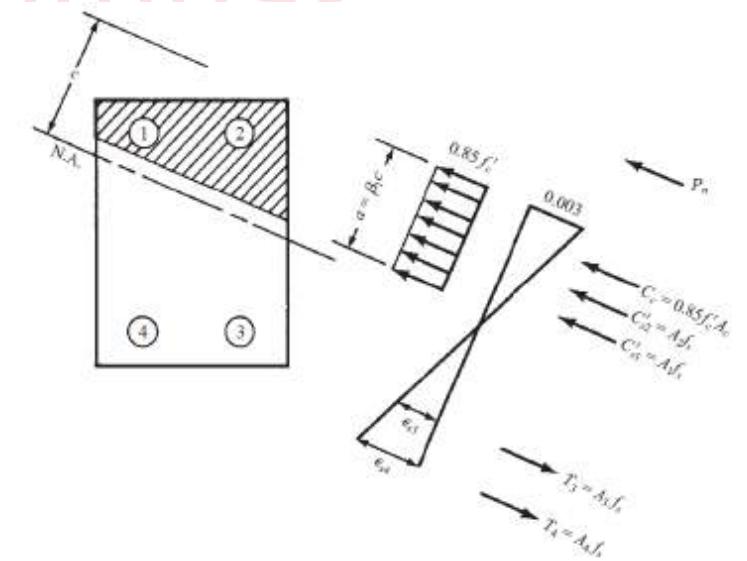
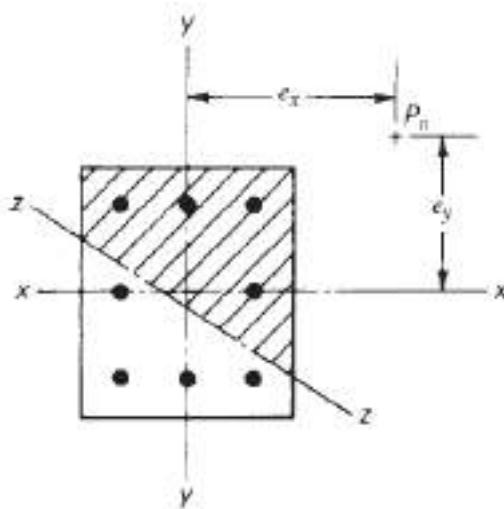
$$\epsilon_t = [(d_t - c)/c] 0.003 = 0.00511$$

$$\epsilon_t = 0.00511 > 0.005, \phi = 0.9$$

$$\phi P_n = 0.9(292.9) = 263.6 \text{ K} > 257 \text{ K.}$$



Flexión Biaxial de Columnas



Flexión Biaxial

"La flexión se da en ambos ejes"

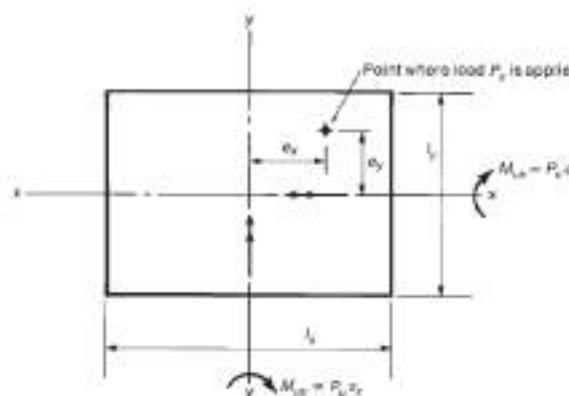
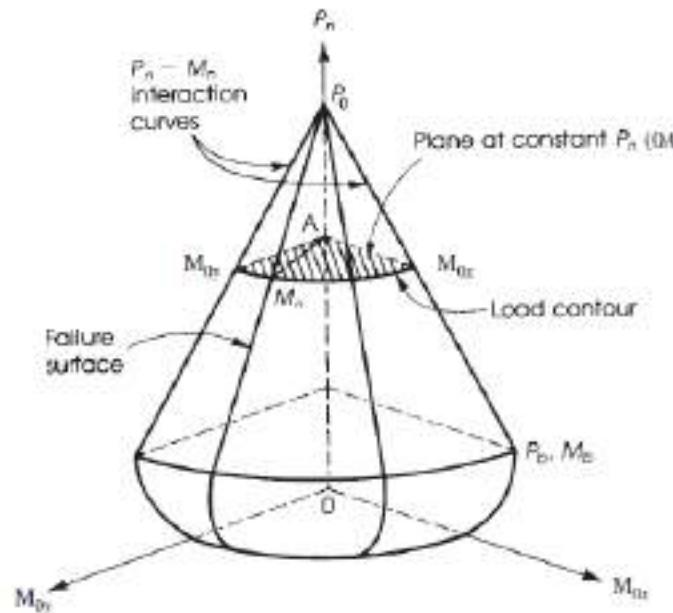
- Columnas de esquinas
- Estribos de Puentes
- Columnas que soportan vigas de fachada muy pesadas
- Vaciados monolíticos en marcos en dos direcciones

Para Columnas Circulares

$$M_u = \sqrt{(M_{ux})^2 + (M_{uy})^2} = P_u e$$

$$e = \sqrt{(e_x)^2 + (e_y)^2} = \frac{M_u}{P_u}$$

Para Secciones diferentes a Circulares
usar interacción tridimensional



Corte en un Plano

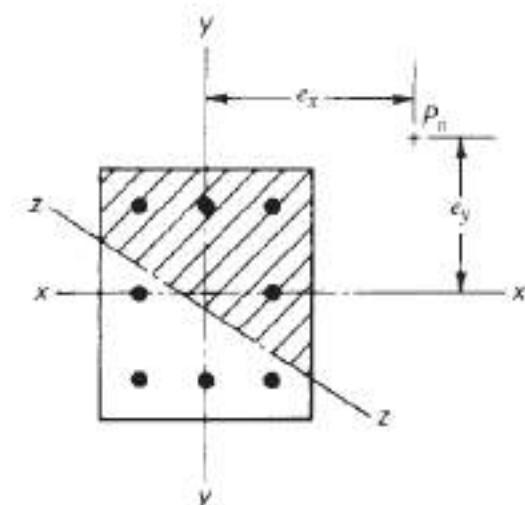
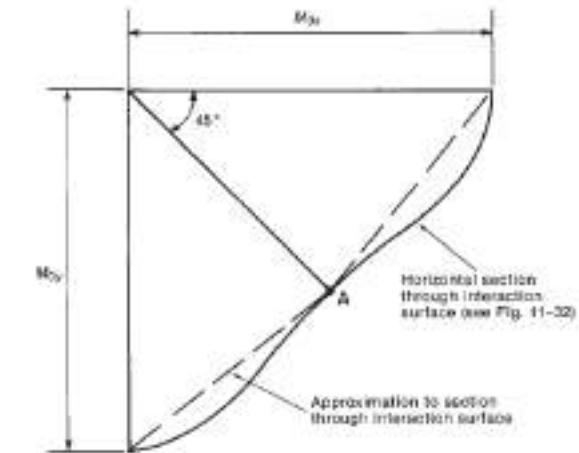
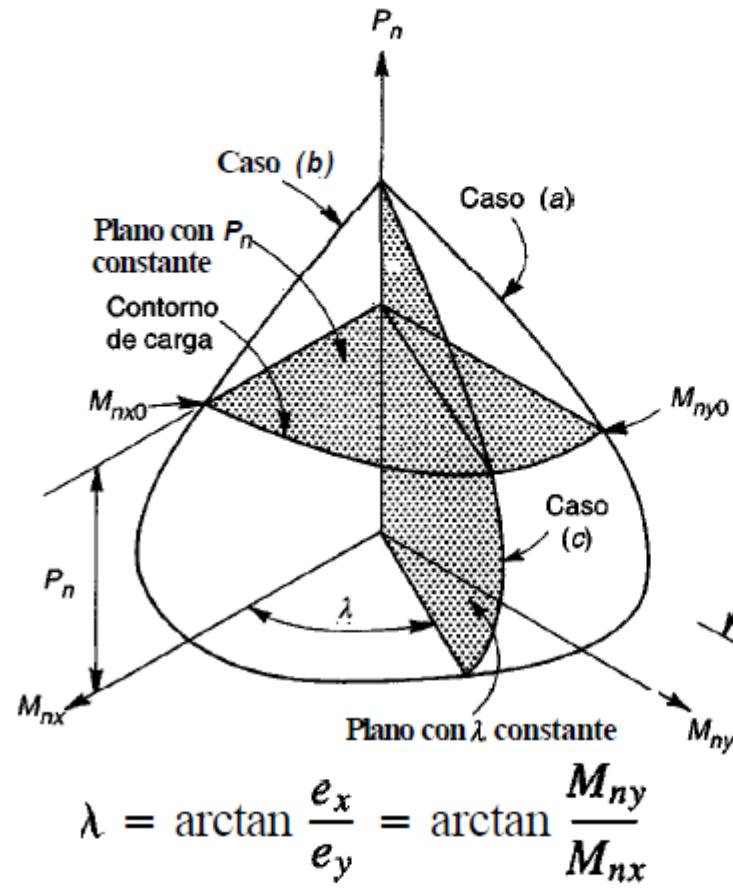
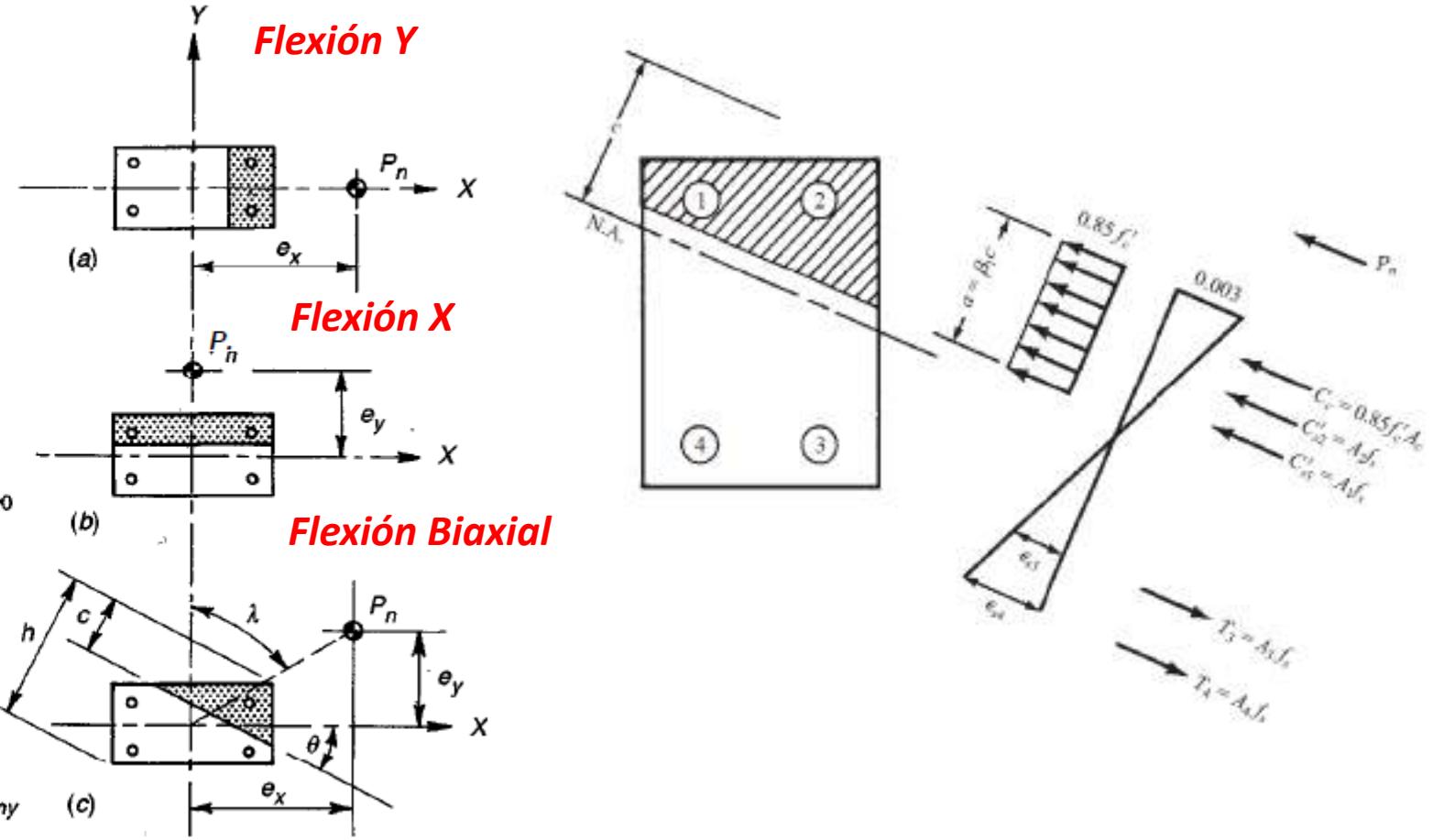


Diagrama de Interacción Biaxial

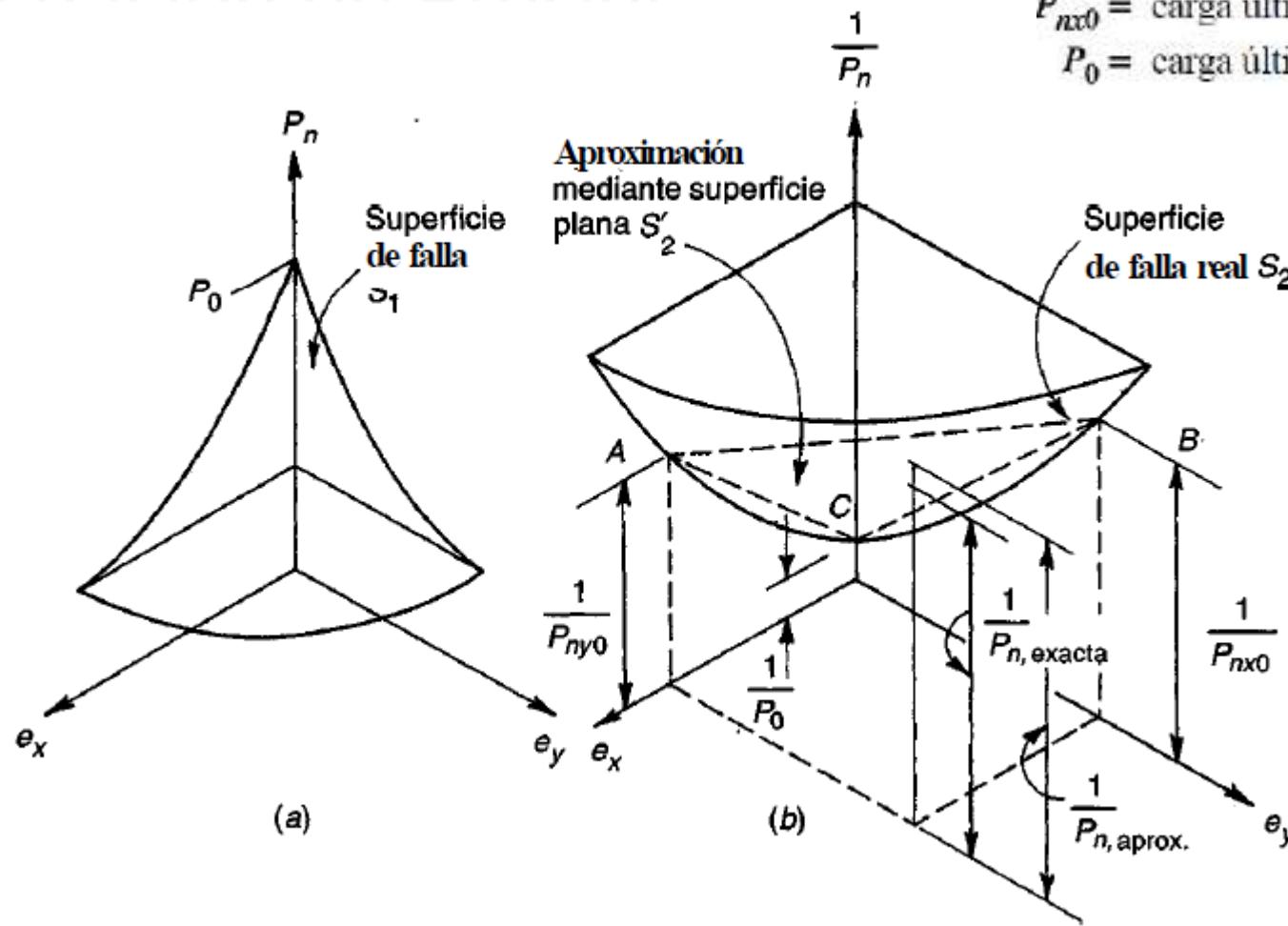


Distribución General de Esfuerzos



Método de la Carga Inversa

Ecuación de Bresler



$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_{nx0}} + \frac{1}{P_{ny0}} - \frac{1}{P_0}$$

P_n = valor aproximado de la carga última en flexión biaxial con excentricidades e_x y e_y
 P_{ny0} = carga última cuando sólo está presente la excentricidad e_y ($e_x = 0$)
 P_{nx0} = carga última cuando sólo está presente la excentricidad e_x ($e_y = 0$)
 P_0 = carga última para la columna cargada concéntricamente

$$P_o = 0.85f'cA_g + f_yA_s$$

$$P_n > 0.10P_o$$

"La ecuación no es válida para elementos en tensión"

Los valores de P_{ny0} y P_{nx0} se obtiene con ayuda de gráficos de interacción

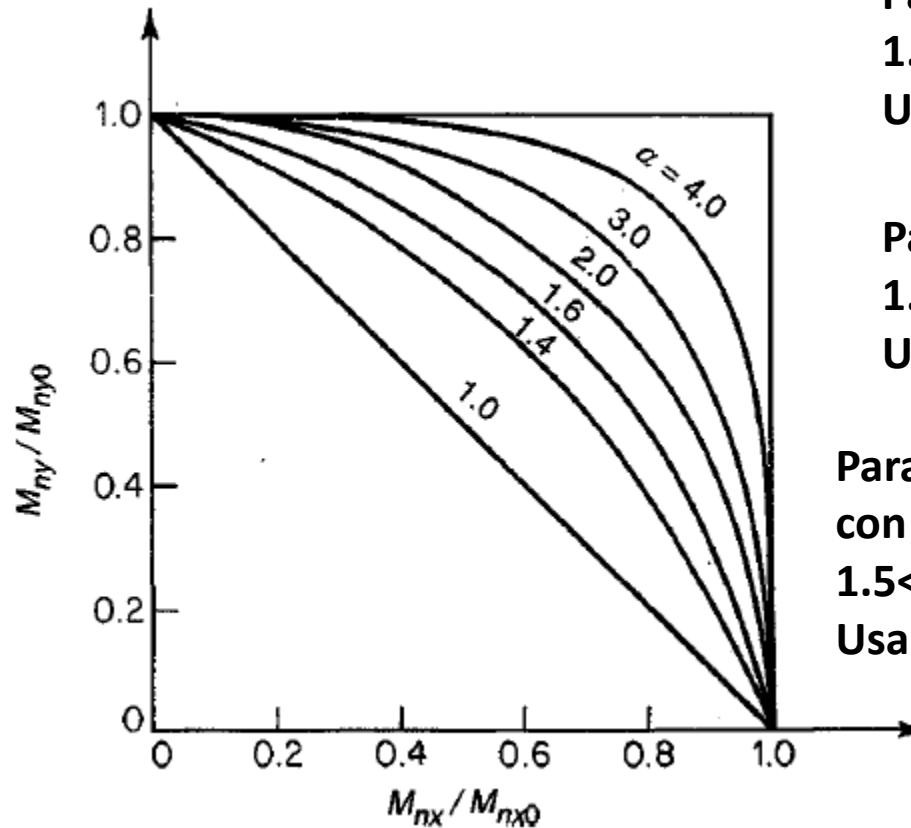
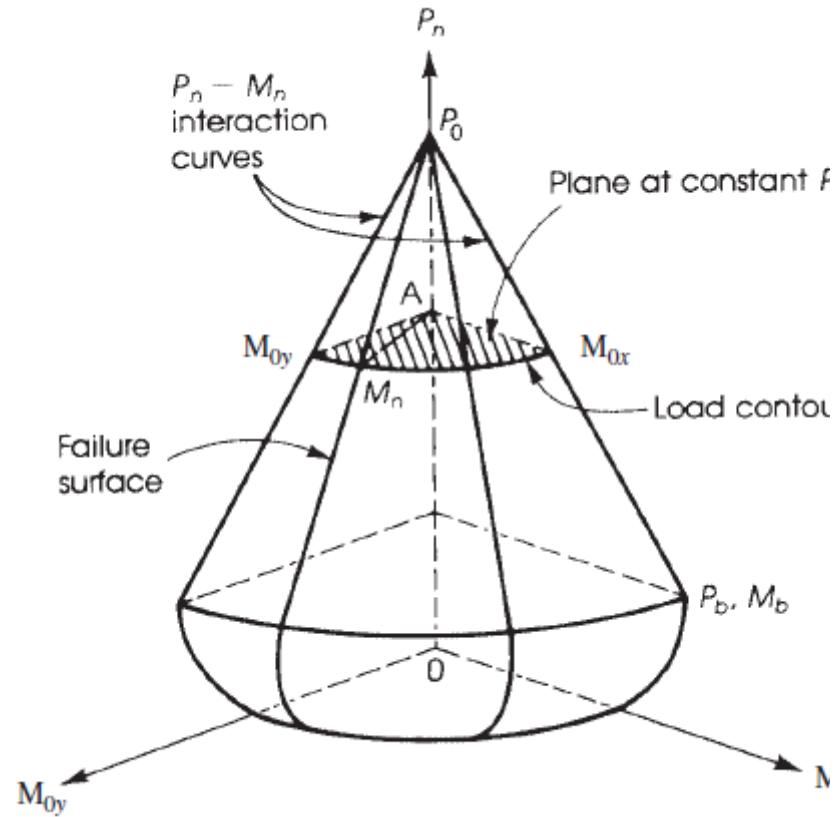
Si $P_n < 0.10P_o$

$$\frac{M_{ux}}{M_x} + \frac{M_{uy}}{M_y} \leq 1.0$$

$$\frac{M_{nx}}{M_{0x}} + \frac{M_{ny}}{M_{0y}} \leq 1.0$$

Método del Contorno de Carga

$$\left(\frac{M_{nx}}{M_{0x}}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{M_{ny}}{M_{0y}}\right)^{\alpha_2} = 1.0$$



Para secciones rectangulares

$1.15 < \alpha < 1.55$

Usar $\alpha = 1.5$

Para secciones cuadradas

$1.5 < \alpha < 2.0$

Usar $\alpha = 1.75$

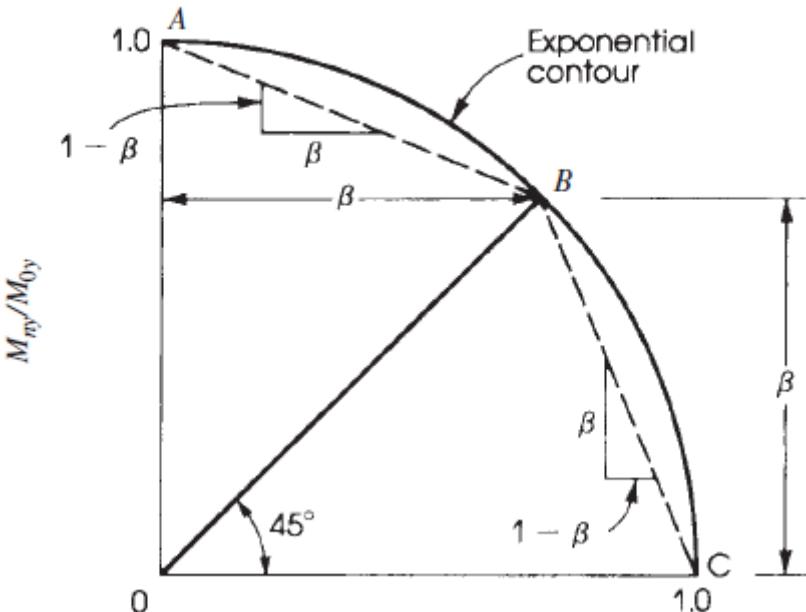
Para secciones cuadradas

con refuerzo en 4 caras

$1.5 < \alpha < 2.0$

Usar $\alpha = 1.50$

Método del Contorno de Carga Parme



$$\frac{M_{ny}}{M_{0y}} > \frac{M_{nx}}{M_{0x}}$$

$$\frac{M_{ny}}{M_{0y}} + \frac{M_{nx}}{M_{0x}} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) = 1$$

$$\frac{M_{ny}}{M_{0y}} < \frac{M_{nx}}{M_{0x}}$$

$$\frac{M_{nx}}{M_{0x}} + \frac{M_{ny}}{M_{0y}} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) = 1$$

El contorno de carga puede ser aproximado por las dos líneas punteadas AB y BC. La pendiente de la línea AB es $(1-\beta)/\beta$ y la pendiente de la línea BC es $\beta/(1-\beta)$

El valor de β depende de P_n/P_o como de las propiedades de la sección.

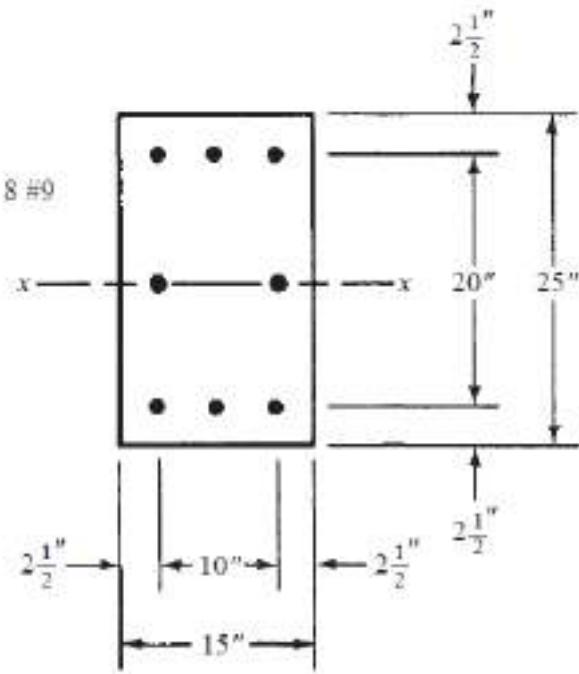
$0.55 < \beta < 0.7$ y se puede usar $\beta = 0.65$ para propósito de diseño

Refuerzo uniformemente distribuido en 4 caras

$$M_{ny} + M_{nx} \left(\frac{b}{h} \right) \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \approx M_{0y}$$

$$M_{nx} + M_{ny} \left(\frac{h}{b} \right) \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \approx M_{0x}$$

Determinar la capacidad de diseño P_{ni} de la columna corta con estribo mostrada en la figura, sometida a flexión biaxial. $F'c = 4000\text{psi}$, $Fy = 60000\text{psi}$, $e_y = 16''$ y $e_x = 8''$



Para flexión en x

$$\gamma = \frac{20}{25} = 0.80$$

$$\rho_g = \frac{8.00}{(15)(25)} = 0.0213$$

$$\frac{e}{h} = \frac{16}{25} = 0.64$$

Dibujando una línea de $e/h=0.64$ constante en la gráfica 8 del apéndice A

$$R_n = \frac{P_n e}{f'_c A_g h} = 0.185$$

$$P_n = \frac{(4)(15 \times 25)(25)(0.185)}{16} = 434 \text{ klb}$$

Para flexión en y

$$\gamma = \frac{10}{15} = 0.667$$

$$\rho_g = \frac{8.00}{(15)(25)} = 0.0213$$

$$\frac{e}{h} = \frac{8}{15} = 0.533$$

Dibujando una línea de $e/h=0.533$ constante en la gráfica 6 y 7 del apéndice A. $\gamma = 0.667$

$$R_n = \frac{P_{ny} e}{f'_c A_g h} = 0.163$$

$$P_{ny} = \frac{(4)(15 \times 25)(15)(0.163)}{8} = 458 \text{ klb}$$

Capacidad por carga axial

$$P_o = (0.85)(4.0)(15 \times 25) + (8.00)(60) = 1755 \text{ klb}$$

Usando la ecuación de Bresler para P_{ni}

$$\frac{1}{P_{ni}} = \frac{1}{P_{nx}} + \frac{1}{P_{ny}} - \frac{1}{P_o}$$

$$\frac{1}{P_{ni}} = \frac{1}{434} + \frac{1}{458} - \frac{1}{1755}$$

$$\frac{1755}{P_{ni}} = 4.044 + 3.832 - 1$$

$$P_{ni} = \underline{\underline{255.3 \text{ klb}}}$$

Diseñar una columna circular de 16" de diámetro sujeta a flexión biaxial. Dado $P_u = 200k$, $M_{ux} = 1000k \cdot p$, $M_{uy} = 700k \cdot p$
 $f'c = 4ksi$, $f_y = 60 ksi$

Usando la gráfica

$\rho = 1.8\%$ de la gráfica

$$A_{st} = 0.018 \times 200.96 = 3.62 \text{ pulg}^2$$

For spiral column $\phi = 0.75$

$$\text{Nominal load} = 200/0.75 = 266.67 K$$

$$\text{Nominal moment capacity about } x \text{ axis } M_{nx} = 1000/0.75 = 1333.33 K \cdot \text{in.}$$

$$\text{Nominal moment capacity about } y \text{ axis } M_{ny} = 700/0.75 = 933.33 K \cdot \text{in.}$$

$$M_{nr} = \sqrt{M_{nx}^2 + M_{ny}^2} = \sqrt{1333^2 + 933^2} = 1627.54 K \cdot \text{in.}$$

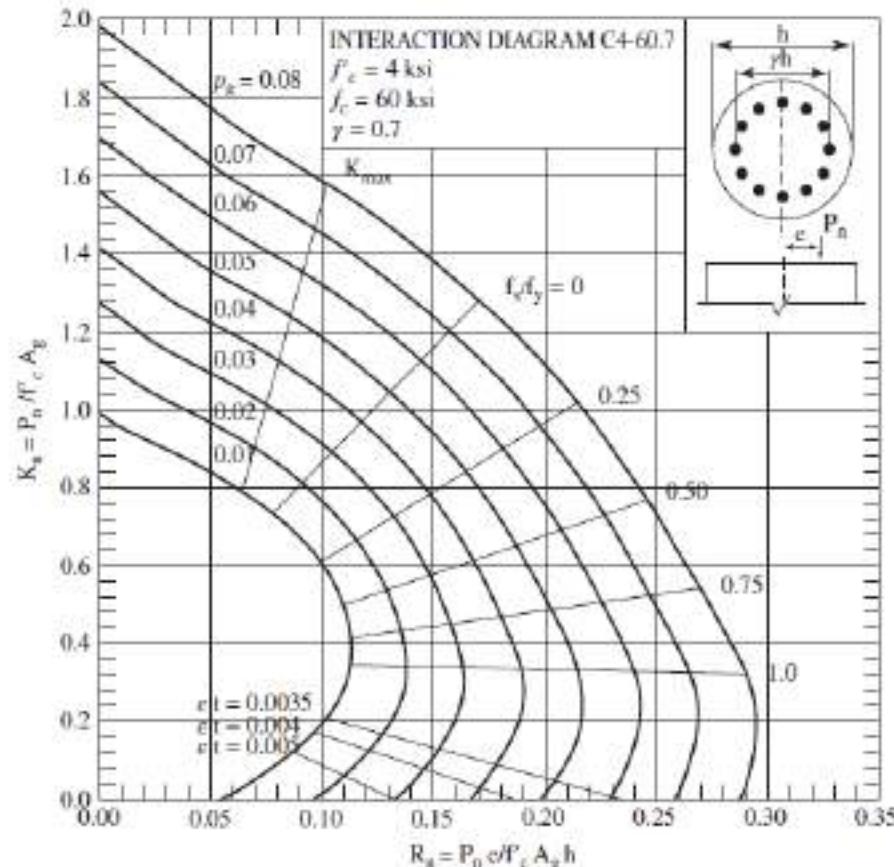
$$A_g = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3.14 \times 16^2}{4} = 200.96 \text{ in.}^2$$

$$k_n = \frac{P_n}{f'_c A_g} = \frac{266.67}{4 \times 200.96} = 0.33$$

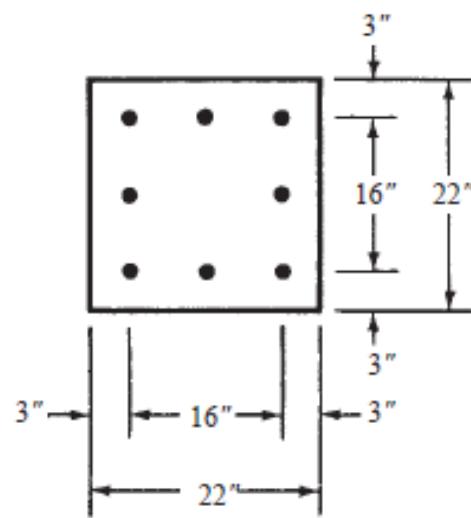
$$R_n = \frac{M_n}{f'_c A_g h} = \frac{1627.54}{4 \times 200.96 \times 15} = 0.13$$

$$\gamma = \frac{h - 5}{h} = \frac{16 - 5}{16} = 0.69$$

9 # 6 $A_{sr} = 3.96 \text{ pulg}^2$



Seleccionar el refuerzo necesario para la columna corta cuadrada con estribos mostrada en la figura 10.24 para lo siguiente: $P_D = 100 \text{ klb}$, $P_L = 200 \text{ klb}$, $M_{DX} = 50 \text{ pie-klb}$, $M_{LY} = 110 \text{ pie-klb}$, $M_{DY} = 40 \text{ pie-klb}$, $M_L = 90 \text{ pie-klb}$, $f'_c = 4000 \text{ lb/plg}^2$ y $f_y = 60000 \text{ lb/plg}^2$.



$$P_u = (1.2)(100) + (1.6)(200) = 440 \text{ klb}$$

$$\frac{P_u}{f'_c A_g} = \frac{440}{(4)(484)} = 0.227$$

$$\frac{440}{0.65} = 677 \text{ klb}$$

$$M_{ux} = (1.2)(50) + (1.6)(110) = 236 \text{ pie-klb}$$

$$\frac{236}{0.65} = 363 \text{ pie-klb}$$

$$M_{uy} = (1.2)(40) + (1.6)(90) = 192 \text{ pie-klb}$$

$$\frac{192}{0.65} = 295 \text{ pie-klb}$$

$$M_{nx} + M_{ny} = 363 + 295 = 658 \text{ pie-klb}$$

$$e_x = e_y = \frac{(12)(658)}{677} = 11.66''$$

$$\gamma = \frac{16}{22} = 0.727$$

$$\rho_g = 0.0235$$

$$A_s = (0.0235)(22)(22) = 11.37 \text{ plg}^2$$

Use 8 #11 = 12.50 plg²

Verificando con la ecuación de Bresler

$$P_{ni} = 804 \text{ klb} > 677 \text{ klb}$$

Para esto se usa la excentricidad real en cada dirección

$$e_x = 12 \times 363 / 677 = 6.43''$$

$$e_y = 12 \times 295 / 677 = 5.22''$$

Para columnas cuadradas $M_{ndiseño} = M_{nx} + M_{ny}$
 $e = e_x = e_y = M_{ndiseño} / P_n$

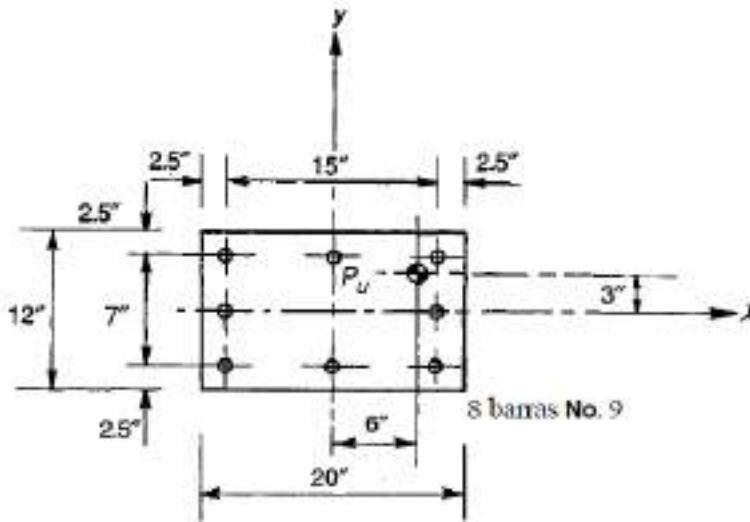
Para columnas rectangulares $M_{ndiseño} = M_{nx} + M_{ny}$
Se multiplica por la relación b/h y se diseña en la dirección débil

La columna de 12"x 20" que se muestra en la figura está reforzada con 8 barras #9. Se le aplica una carga mayorada P_u de 275kips con excentricidades $ey = 3"$ y $ex = 6"$. La resistencia de los materiales son $f'_c = 4ksi$ y $f_y=60ksi$. Verifique si la sección es adecuada por el método de contorno de carga

Dirección x

$$\gamma = 15/20 = 0.75 \quad \rho = 8/(12 \times 20) = 0.033$$

$$K_n = 423 / (4 \times 12 \times 20) = 0.444 \quad e/h = 3/12 = 0.4$$



Dirección y

$$P_n = P_u / 0.65 = 423$$

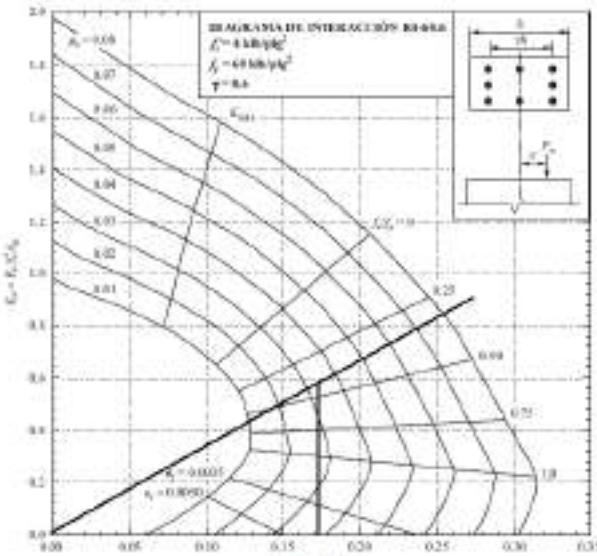
$$K_p = 423 / (4 \times 12 \times 20) = 0.444$$

$$\gamma = 7/12 = 0.583 \text{ usar } 0.6$$

$$\rho = 8/(12 \times 20) = 0.033$$

$$e/h = 6/20 = 0.3$$

De la grafica 6



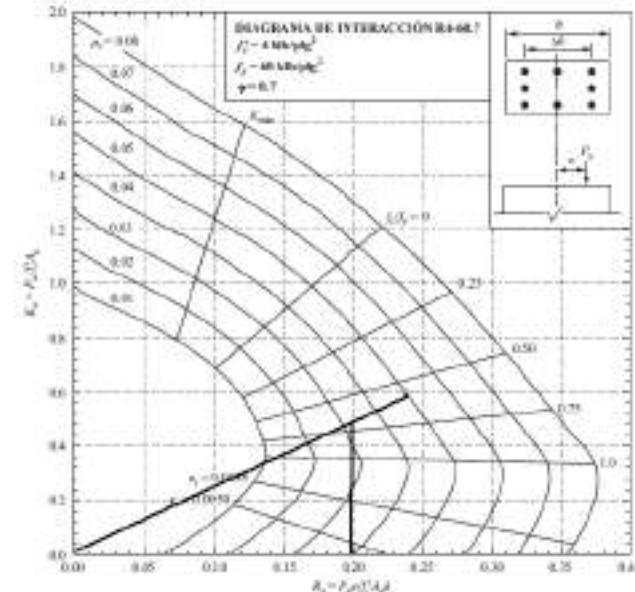
$$R_n = 0.1710 = P_{nx}/f'_c A_{gh}$$

$$P_{\text{ext}} = M_{\text{ext}} \times 0.171 \times 4 \times 12 \times 20 \times 20 = 3283 \text{ k-pulg}$$

$$My = 275 \times 6 = 1650 \text{ k-pulg}$$

$$M_{\text{ux}} = 275 \times 3 = 825 \text{ k-pulg}$$

De la grafica 7 y 8



$$R_n = 0.195 = P_{ney}/f'cA_{gh}$$

$$M_{nx0} = 0.195 \times 4 \times 12 \times 20 \times 12 = 2246 \text{ k-pulg}$$

Método de Excentricidad Equivalente

La excentricidad e_x y e_y se puede reemplazar por una excentricidad e_{ox} y diseñar la columna para flexión en una dirección

$$P_u/f'_c A_g > 0.4$$

$$M_{uy} = P_u e_x \quad M_{ux} = P_u e_y$$

$$\alpha = \left(1.3 - \frac{P_u}{f'_c A_g} \right) \frac{f_y + 40,000}{100,000} \geq 0.5$$

Si $\frac{e_x}{\ell_x} \geq \frac{e_y}{\ell_y}$

Sino se cumple entonces $e_{oy} = e_y + \alpha e_x \ell_y / \ell_x$

$$e_{ox} = e_x + \frac{\alpha e_y \ell_x}{\ell_y}$$

“Este método se limita a secciones que son simétricas en los dos ejes y su relación L_x/L_y esté entre 0.5 y 2.0”

$$P_u/f'_c A_g \leq 0.4,$$

$$\alpha = \left(0.5 + \frac{P_u}{f'_c A_g} \right) \frac{f_y + 40,000}{100,000} \geq 0.6$$

Diseñar una columna que resista una carga axial $P_u = 250\text{kips}$, $M_{ux} = 55\text{k-pie}$ y $M_{uy} = 110\text{k-pie}$. Usar $f_y = 60\text{ksi}$ y $f'c = 4\text{ksi}$. Usar método de excentricidad equivalente

$$\begin{aligned} A_{g(\text{trial})} &\geq \frac{P_u}{0.40(f'_c + f_y\rho_g)} \\ &\geq \frac{250}{0.40(4 + 60 \times 0.015)} \\ &\geq 128 \text{ in.}^2 \text{ or } 11.3 \text{ in. square} \end{aligned}$$

Recubrimiento de 2.5"

$$\gamma = \frac{(16 - 2 \times 2.5)}{16} = 0.69$$

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{M_{uy}}{P_u} \\ &= \frac{110 \times 12}{250} = 5.28 \text{ in.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_y &= \frac{M_{ux}}{P_u} \\ &= \frac{55 \times 12}{250} = 2.64 \text{ in.} \end{aligned}$$

Asumir $\rho = 0.015$

$$e_x/\ell_x \geq e_y/\ell_y$$

$$\frac{P_u}{f'_c A_g} = \frac{250}{4 \times 256} = 0.244 < 0.4$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(0.5 + \frac{P_u}{f'_c A_g} \right) \left(\frac{f_y + 40,000}{100,000} \right) \\ &= (0.5 + 0.244) \left(\frac{60,000 + 40,000}{100,000} \right) \\ &= 0.744 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{ox} &= e_x + \frac{\alpha e_y \ell_x}{\ell_y} \\ &= \left(5.28 + 0.744 \times 2.64 \times \frac{16}{16} \right) = 7.24 \text{ in.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{oy} &= P_u e_{ox} \\ &= 250 \times 7.24 = 1810 \text{ kip-in.} \end{aligned}$$

$$P_n = 250/0.65 = 384.61\text{k}$$

$$K_n = 384.61/(4 \times 16 \times 16) = 0.375$$

$$R_n = 0.375 \times 7.24 / 16 = 0.17$$

$$\Upsilon = 0.69$$

Usando las gráficas $\rho = 1.75$

$$A_s = 0.0175 \times 16 \times 16 = 4.48 \text{ pulg}^2$$

**Sección cuadrada de 16x16
8# 8**

Ejemplo. Ecuación Recíproca de Bresler

The section of a short tied column is 16 × 24 in. and is reinforced with eight no. 10 bars distributed as shown in Fig. 11.29. Determine the design load on the section ϕP_n if it acts at $e_x = 8$ in. and $e_y = 12$ in. Use $f'_c = 5$ ksi, $f_y = 60$ ksi, and the Bresler reciprocal equation.

Solution

- Determine the uniaxial load capacity P_{nx} about the x -axis when $e_y = 12$ in. In this case, $b = 16$ in., $h = 24$ in., $d = 21.5$ in., $d' = 2.5$ in., and $A_s = A'_s = 3.81$ in.². The solution will be performed using statics following the steps of Examples 11.2 and 11.4 for balanced and compression-control conditions.

- For the balanced condition,

$$c_b = \left(\frac{87}{87 + f_y} \right) d = \left(\frac{87}{147} \right) 21.5 = 12.72 \text{ in.}$$

$$a_b = 0.80(12.72) = 10.18 \text{ in. } (\beta_1 = 0.8 \text{ when } f'_c = 5 \text{ ksi})$$

$$C_c = 0.85f'_c a_b = 692.3 \text{ K} \quad f'_s = 87 \left(\frac{c - d'}{c} \right) = 69.9 \text{ ksi}$$

Then $f'_s = 60$ ksi.

$$C_s = A'_s(f_y - 0.85f'_c) = 212.4 \text{ K} \quad T = A_s f_y = 228.6 \text{ K}$$

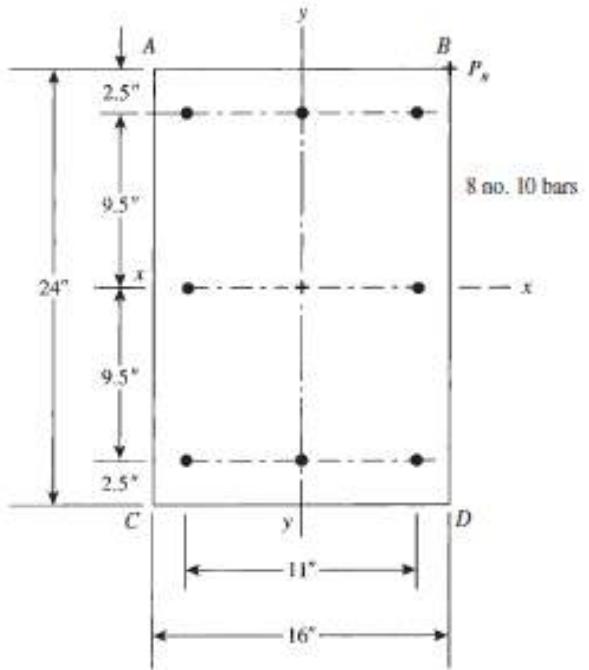
$$P_{0x} = C_c + C_s - T = 676.1 \text{ K}$$

$$\phi P_{bx} = 0.65P_{0x} = 439.5 \text{ K} \quad (\phi = 0.65 \text{ for } \epsilon_t = 0.002)$$

- For $e_y = 12$ in. < $d = 21.5$ in., assume compression failure and follow the steps of Example 11.4 to get $a = 10.65$ in. and $c = a/0.8 = 13.31$ in. > $c_b = 12.72$ in. Thus, compression controls.

Check

$$f'_s = 87 \left(\frac{c - d'}{c} \right) = 70 \text{ ksi} > f_y$$



Therefore, $f'_s = 60$ ksi. Check

$$f_s = 87 \left(\frac{d - c}{c} \right) = 53.53 \text{ ksi} > 60 \text{ ksi}$$

Calculate forces: $C_c = 0.85f'_c a_b = 724.2 \text{ K}$, $C_s = A'_s(f_y - 0.85f'_c) = 212.4 \text{ K}$, $T = A_s f_y = 203.95 \text{ K}$, $P_{nx} = C_c + C_s - T = 732.6 \text{ K}$. $P_{nx} > P_{bx}$, so this is a compression failure case as assumed.

$$\epsilon_t = \left(\frac{d - c}{c} \right) 0.003 = 0.00185$$

$$\epsilon_t < 0.002 \quad \phi = 0.65$$

$$P_{ax} = \phi P_{nx} = 476.2 \text{ K}$$

- Take moments about A_s using Eq. 11.11,

$$d'' = 9.5 \text{ in.} \quad e' = 21.5 \text{ in.}$$

$$P_{nx} = \frac{1}{e'} \left[C_c \left(d - \frac{a}{2} \right) + C_s(d - d') \right] = 732.6 \text{ K}$$

2. Determine the uniaxial load capacity P_{ny} about the y-axis when $e_x = 8$ in. In this case, $b = 24$ in., $h = 16$ in., $d = 13.5$ in., $d' = 2.5$ in., and $A_s = A'_s = 3.81$ in.² The solution will be performed using statics, as explained in step 1.

a. Balanced condition:

$$c_b = \left(\frac{87}{87 + f_y} \right) d = \left(\frac{87}{147} \right) 13.5 = 7.99 \text{ in.} \quad a_b = 0.8(7.99) = 6.39 \text{ in.}$$

$$C_c = 0.85f'_c ab = 651.8 \text{ K}$$

$$f'_s = 87 \left(\frac{c - d'}{c} \right) = 59.8 \text{ ksi}$$

$$C_s = A'_s(f'_s - 0.85f'_c) = 211.6 \text{ K}$$

$$T = A_s f_y = 228.6 \text{ K}$$

In a balanced load, $P_{bu} = C_c + C_s - T = 634.8$ K, $\phi P_{bu} = 0.65$, and $P_{by} = 444.4$ K.

- b. For $e_x = 8$ in., assume compression failure case and follow the steps of Example 11.4 to get $a = 6.65$ in. and $c = a/0.8 = 8.31$ in. > c_b (compression failure). Check

$$f'_s = 87 \left(\frac{c - d'}{c} \right) = 60.8 \text{ ksi}$$

Therefore, $f'_s = 60$ ksi. Check

$$f_s = 87 \left(\frac{d - c}{c} \right) = 54.3 \text{ ksi}$$

Calculate forces: $C_c = 0.85f'_c ab = 678.3$ K, $C_s = A'_s(60 - 0.85f'_c) = 212.4$ K, $T = A_s f_s = 206.9$ K, $P_{ny} = C_c + C_s - T = 683.3$ K, and $\phi P_{ny} = P_{uy} = 0.65 P_{ny} = 444.5$ K. Because $P_{ny} > P_{by}$, compression failure occurs, as assumed:

$$\epsilon_t = \left(\frac{d - c}{c} \right) 0.003 = 0.00187$$

$$\epsilon_t < 0.002 \quad \phi = 0.65$$

$$P_{uy} = \phi P_{ny} = 444.5 \text{ K}$$

c. Take moments about A_s using Eq. 11.11:

$$d'' = 5.5 \text{ in.} \quad e' = 13.5 \text{ in.}$$

$$P_{eo} = \frac{1}{e'} \left[C_c \left(d - \frac{d}{2} \right) + C_s(d - d') \right] = 683.8 \text{ K}$$

3. Determine the theoretical axial load P_{eo} :

$$P_{eo} = 0.85f'_c A_s + A_s(f_y - 0.85f'_c)$$

$$= 0.85(5)(16 \times 24) + 10.16(60 - 0.85 \times 5) = 2198.4 \text{ K} \quad \phi P_{eo} = 0.65 P_{eo} = 1429 \text{ K}$$

4. Using the Bresler equation (Eq. 11.31), multiply by 100:

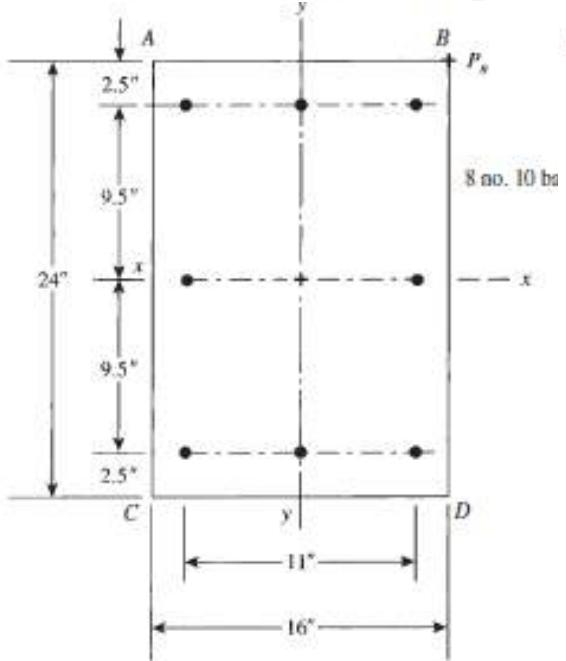
$$\frac{100}{P_s} = \frac{100}{476.2} + \frac{100}{444.5} - \frac{100}{1429} = 0.365$$

$$P_s = 274 \text{ K} \quad \text{and} \quad P_a = \frac{P_s}{0.65} = 421.5 \text{ K}$$

Ejemplo. Método de Contorno de Carga Parme

Example 11.20

Determine the nominal design load, P_n , for the column section of the previous example using the Parme load contour method; see Fig. 11.30.



Solution

- Assume $\beta = 0.65$. The uniaxial load capacities in the direction of x and y axes were calculated in Example 11.19:

$$P_{ux} = 476.2 \text{ K} \quad P_{uy} = 444.5 \text{ K} \quad P_{nx} = 732.6 \text{ K} \quad P_{ny} = 683.8 \text{ K}$$

- The moment capacity of the section about the x -axis is

$$M_{0x} = P_{nx} e_y = 732.6 \times 12$$

The moment capacity of the section about the y -axis is

$$M_{0y} = P_{ny} e_x = 683.8 \times 8 \text{ K} \cdot \text{in}$$

- Let the nominal load capacity be P_n . The nominal design moment on the section about the x -axis is

$$M_{nx} = P_n e_y = P_n \times 12 \text{ K} \cdot \text{in.}$$

and that about the y -axis is

$$M_{ny} = P_n e_x = 8P_n$$

- Check if $M_{ny}/M_{0y} > M_{nx}/M_{0x}$:

$$\frac{8P_n}{683.8 \times 8} > \frac{12P_n}{732.6 \times 12} \quad \text{or} \quad 1.463 \times 10^{-3}P_n > 1.365 \times 10^{-3}P_n$$

Then $M_{ny}/M_{0y} > M_{nx}/M_{0x}$. Therefore, use Eq. 11.34.

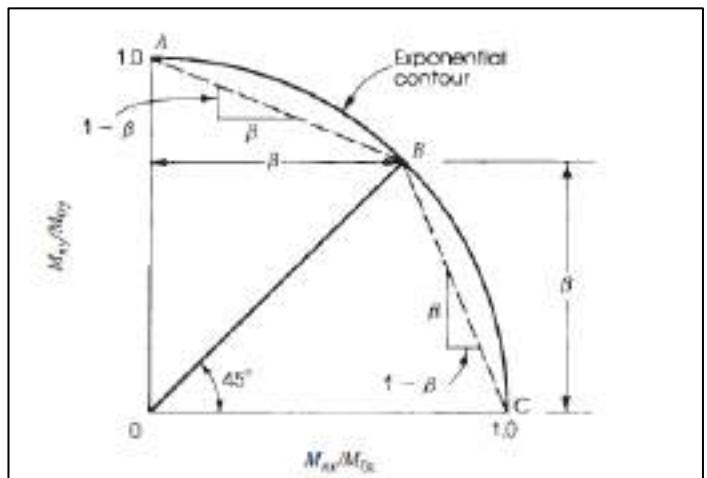
$$5. \quad \frac{8P_n}{683.8 \times 8} + \frac{12P_n}{732.6 \times 12} \left(\frac{1 - 0.65}{0.65} \right) = 1$$

Multiply by 1000 to simplify calculations.

$$1.463P_n + 0.735P_n = 1000$$

$$P_n = 455 \text{ K} \quad P_u = \phi P_n = 295.75 \text{ K} \quad (\phi = 0.65)$$

Note that P_u is greater than the value of 274 K obtained by the Bresler reciprocal method (Eq. 11.31) in the previous example by about 8%.



$$\frac{M_{ny}}{M_{0y}} > \frac{M_{nx}}{M_{0x}}$$

$$\frac{M_{ny}}{M_{0y}} + \frac{M_{nx}}{M_{0x}} \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \right) = 1$$

$$\frac{M_{ny}}{M_{0y}} < \frac{M_{nx}}{M_{0x}}$$

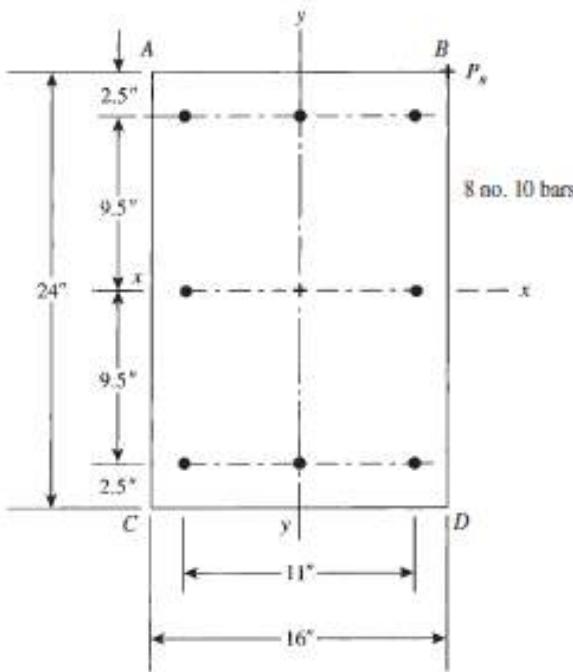
$$\frac{M_{nx}}{M_{0x}} + \frac{M_{ny}}{M_{0y}} \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \right) = 1$$

Ejemplo. Método de Ecuación de Superficie de Falla

Cálculo de Mb

Example 11.21

Determine the nominal design load, P_n , for the column section of Example 11.19 using the equation of failure surface.



2. Compute P_b and M_b using Eqs. 11.6 and Eqs. 11.8 about the x and y axes, respectively.

a. About the x -axis,

$$a_{bx} = \frac{87d_t}{87 + f_y} = \frac{87(21.5)}{87 + 60} = 12.72 \text{ in.}$$

$$a_{bx} = 0.8(12.72) = 10.18 \text{ in.}$$

$$f'_s = 87 \left(\frac{c - d'}{c} \right) = 69.9 \text{ ksi} \quad f'_s = 60 \text{ ksi}$$

$$d''_x = 9.5 \text{ in.} \quad A_s = A'_s = 3.81 \text{ in.}^2$$

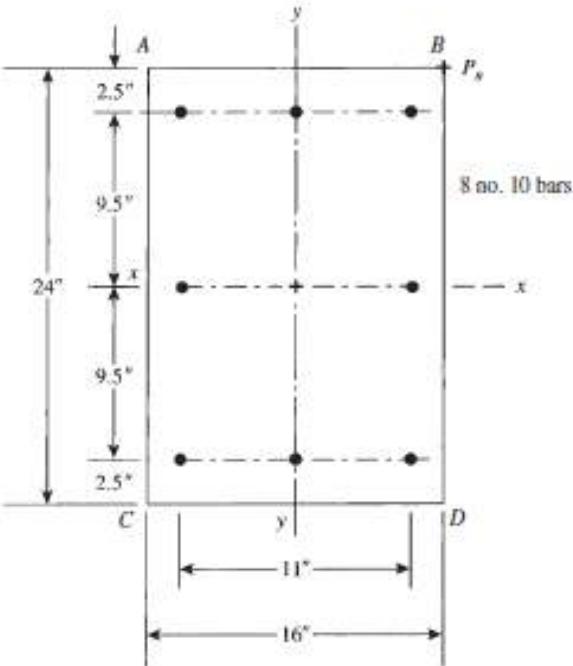
$$\begin{aligned} P_{bx} &= 0.85f'_s a_x b + A'_s(f_y - 0.85f'_c) - A_s f_y \\ &= 0.85(5)(10.18)(16) + 3.81(60 - 0.85 \times 5) - 3.81(60) \\ &= 676.1 \text{ K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{bx} &= 0.85(5)(10.18)(16) \left(21.5 - \frac{10.18}{2} - 9.5 \right) \\ &\quad + 3.81(60 - 0.85 \times 5) \times (21.5 - 2.5 - 9.5) + 3.81(60)(9.5) \\ &= 8973 \text{ K} \cdot \text{in.} = 747.8 \text{ K} \cdot \text{ft} \end{aligned}$$

1. Compute

$$\begin{aligned} P_0 &= 0.85f'_c(A_g - A_{st}) + A_{st}f_y \\ &= 0.85(5)(16 \times 24 - 10.16) + (10.16 \times 60) \\ &= 2198.4 \text{ K} \end{aligned}$$

$$P_b e_b = M_b = 0.85f'_c ab \left(d - \frac{a}{2} - d'' \right) + A'_s(f_y - 0.85f'_c)(d - d' - d'') + A_s f_y d''$$



3. Compute the nominal balanced load for biaxial bending, P_{bb} :

$$\tan \alpha = \frac{M_{ny}}{M_{nx}} = \frac{P_n e_x}{P_n e_y} = \frac{e_x}{e_y} = \frac{8}{12} \quad \alpha = 33.7^\circ$$

$$\frac{P_{bx} - P_{by}}{90^\circ} = \frac{\Delta P_b}{90^\circ - \alpha^\circ} \quad \text{or} \quad \frac{676.1 - 634.8}{90} = \frac{\Delta P_b}{90 - 33.7}$$

$$\Delta P_b = 25.8 \text{ K}$$

$$P_{bb} = P_{by} + \Delta P_b = 634.8 + 25.8 = 660.6 \text{ K}$$

b. About the y-axis: $d_t = 13.5 \text{ in.}$, $d''_y = 5.5 \text{ in.}$, $A_s = A'_s = 3.81 \text{ in.}^2$

$$c_{by} = \frac{87(13.5)}{87 + 60} = 7.99 \text{ in.}$$

$$a_{by} = 0.8(7.99) = 6.39 \text{ in.} \quad f'_s = 87 \left(\frac{c - d'}{c} \right) = 59.8 \text{ ksi}$$

$$P_{by} = 0.85(5)(6.39)(24) + 3.81(59.8 - 0.85 \times 5) - 3.81(60) \\ = 634.8 \text{ K}$$

$$M_{by} = 0.85(5)(6.39)(24) \left(13.5 - \frac{6.39}{2} 5.5 \right) \\ + 3.81(59.8 - 0.85 \times 5)(13.5 - 2.5 - 5.5) + 3.81(60)(5.5) \\ = 5557.3 \text{ K} \cdot \text{in.} = 463 \text{ K} \cdot \text{ft}$$

4. Compute P_n from the equation of failure surface:

$$\frac{P_n - 660.6}{2198.4 - 660.6} + \left(\frac{P_n \times 12}{8973} \right)^{1.5} + \left(\frac{P_n \times 8}{5557.3} \right)^{1.5} = 1.0$$

Multiply by 1000 and solve for P_n :

$$(0.65P_n - 429.85) + 0.0489P_n^{1.5} + 0.0546P_n^{1.5} = 1000$$

$$0.65P_n + 0.1035P_n^{1.5} = 1429.85$$

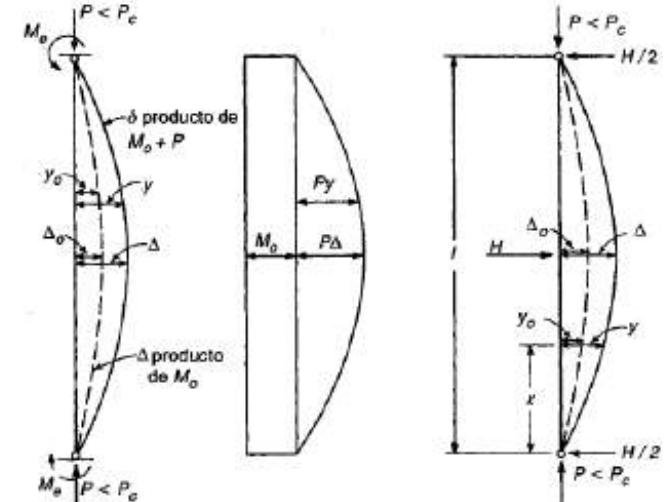
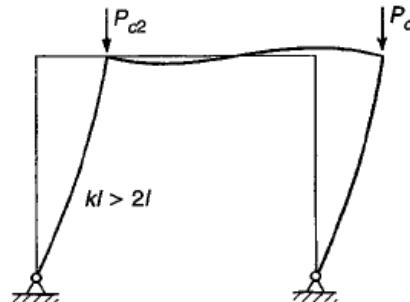
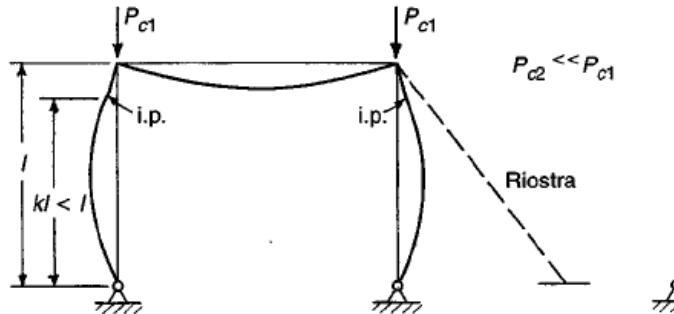
By trial, $P_n = 487 \text{ K}$. Because $P_n < P_{bb}$, it is a tension failure case for biaxial bending, and thus $P_0 = -2198.4 \text{ K}$ (to keep the first term positive).

$$1000 \left(\frac{P_n - 660.9}{-2198.4 - 660.9} \right) + 0.0489P_n^{1.5} + 0.0546P_n^{1.5} = 1000$$

$$0.35P_n + 0.1035P_n^{1.5} = 769.1$$

$$P_n = 429 \text{ K} \quad \text{and} \quad P_u = 0.65P_n = 278.8 \text{ K}$$

Note: The strength capacity, ϕP_n , of the same rectangular section was calculated using the Bresler reciprocal equation (Example 11.19), Parme method (Example 11.20), and Hsu method (Example 11.21) to get $\phi P_n = 421.5$, 455, and 429 K, respectively. The Parme method gave the highest value for this example.



Columnas Esbeltas

Marcos sin Desplazamiento Lateral

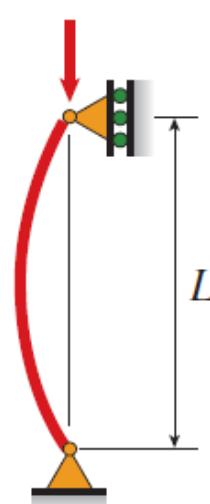
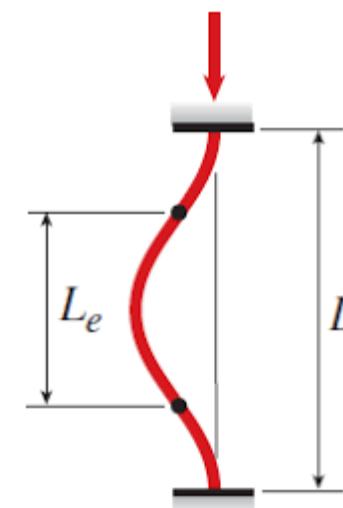
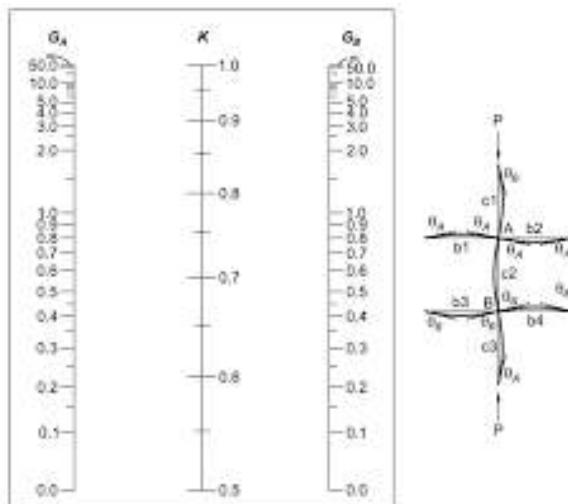
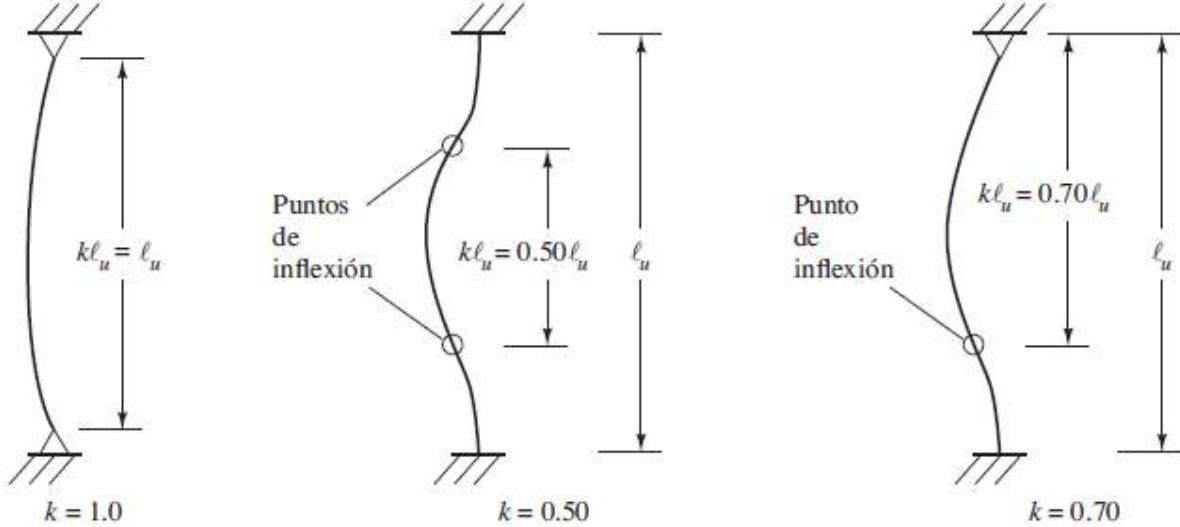


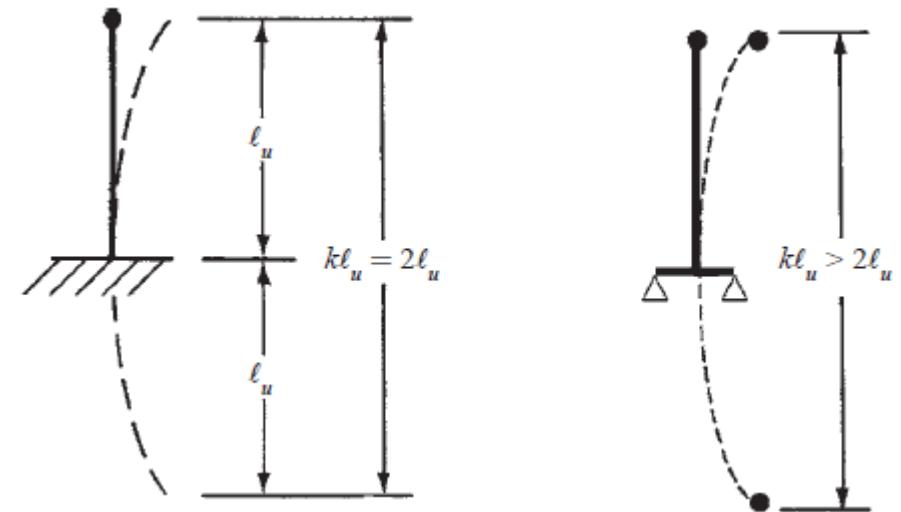
Fig. C-C2.3. Añadido de char—sidero resistido (braced frame).

Longitud Efectiva de Columnas

Marco sin desplazamiento lateral



Marco con desplazamiento lateral



Determinación de Factores K mediante Nomogramas

1. Se calculan los factores de rigidez en cada extremo de la columna

$$\psi_A, \psi_B = \frac{\sum EI_c}{\sum EI_v}$$

2. Tomando en cuenta la suma de la rigidez de todas las columnas que llegan a un nodo entre la suma de las rigidez de las vigas que llegan a ese nodo.

3. Esto se hace para cada extremo de la columna

4. Se toma la sección del nomograma para marcos arriostrados o no arriostrados según sea el caso

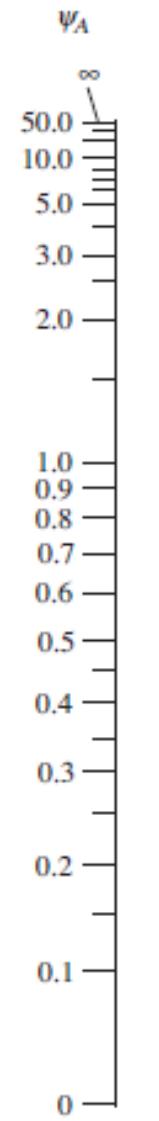
5. Se ubican los puntos en el nomograma ψ_A para el nodo superior y ψ_B para el nodo inferior

6. Se traza una línea recta entre ψ_A y ψ_B y se toma el valor obtenido en la intersección de la línea vertical como valor de "K"

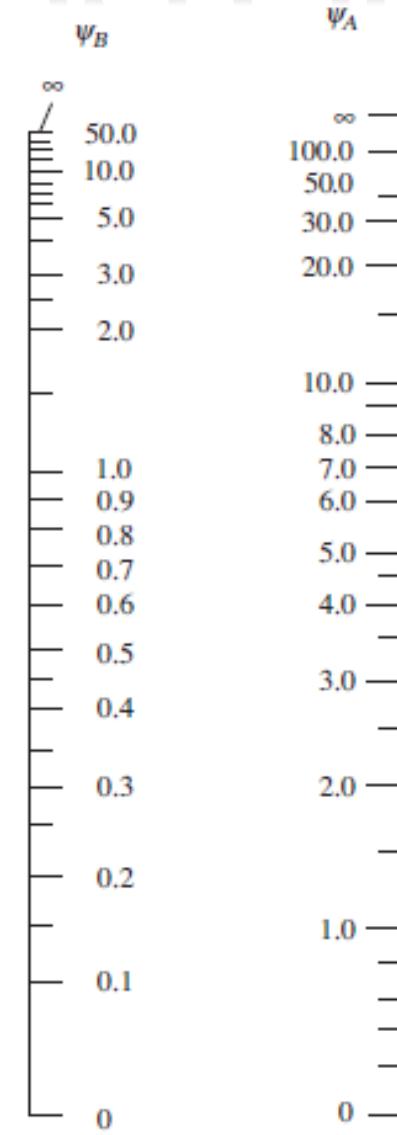
“Si un extremo está articulado $\psi = \infty$ y si está empotrado $\psi = 0$. Para diseño se asumirá que en la articulación $\psi = 10$ y en el empotramiento $\psi = 1.0$ ”

“El momento de inercia de las columnas se tomará 0.70 Ig para tomar en cuenta la condición de agrietamiento y de 0.35 Ig para las vigas”

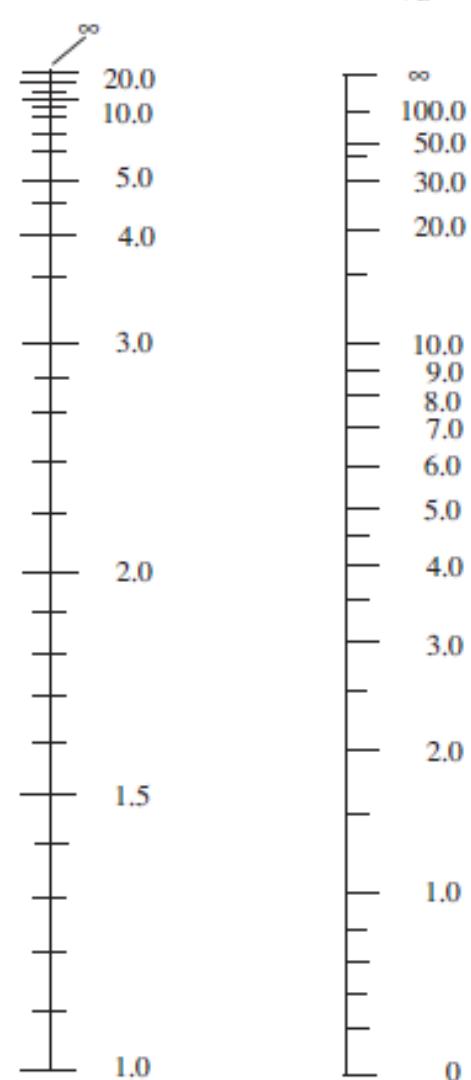
Nomogramas para calculo de factor K



a) Marcos riestrados



b) Marcos no riestrados



Determinación de Factores K mediante ecuaciones

Para miembros a compresión arriostrados

$$\psi_A, \psi_B = \frac{\sum EI_c}{\sum EI_v}$$

$$k = 0.7 + 0.05(\psi_A + \psi_B) \leq 1.0$$

$$k = 0.85 + 0.05 \psi_{min} \leq 1.0$$

ψ_{min} es el menor valor entre ψ_A y ψ_B

El menor de los dos valores de K

Para miembros a compresión no arriostrados

Si $\psi_m < 2$

$$k = \frac{20 - \psi_m}{20} \sqrt{1 + \psi_m}$$

Si $\psi_m \geq 2$

$$k = 0.9 \sqrt{1 + \psi_m}$$

ψ_m es el valor promedio entre ψ_A y ψ_B

Para miembros a compresión no arriostrados articulados en un extremo

$$k = 2.0 + 0.3\psi$$

Propiedades Especiales de los miembros

Módulo de Elasticidad

$E_c = w_c^{1.5} 33 \sqrt{f'_c}$ para valores de w_c entre 90 y 155 lb/pie³ o $57\ 000 \sqrt{f'_c}$ para concreto de peso normal.

Momento de Inercia

Vigas	$0.35I_g$
Columnas	$0.70I_g$
Muros no agrietados	$0.70I_g$
Muros agrietados	$0.35I_g$
Placas planas y losas planas	$0.25I_g$

Momento de Inercia alternativo para columnas y muros

$$I = \left(0.80 + 25 \frac{A_{st}}{A_g} \right) \left(1 - \frac{M_u}{P_u h} - 0.5 \frac{P_u}{P_0} \right) I_g \leq 0.875 I_g$$

$$I > 0.35 I_g$$

Momento de Inercia alternativo para vigas y losas

Área

$$1.0A_g$$

$$I + (0.10 + 25\rho) \left(1.2 - 0.2 \frac{b_w}{d} \right) I_g \leq 0.5 I_g$$

$$I > 0.25 I_g$$

Determinación de esbeltez de una columna

$$\text{Relación de esbeltez} = \frac{Kl_u}{r}$$

*Se puede tomar como diseño
K=1.0 para marcos arriostrados y
K = 1.2 para marcos no arriostrados*

Marcos con desplazamiento lateral

Se ignora la esbeltez si

$$kl_u/r < 22$$

El radio de giro es 0.25D para columnas redondas y 0.289(dimensión de pandeo)
Pero se toma como diseño = 0.3 (dimensión de pandeo)

Marcos sin desplazamiento lateral

Se desprecia la esbeltez si

$$\frac{kl_u}{r} \leq 34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \quad \text{iNo debe ser mayor de 40}$$

M_1 es el momento menor factorizado en el extremo
Y es positivo cuando la deformación de la columna es
Simple (en forma de C) y negativo cuando tiene (forma
de S)

M_2 es el momento mayor factorizado del extremo de la columna

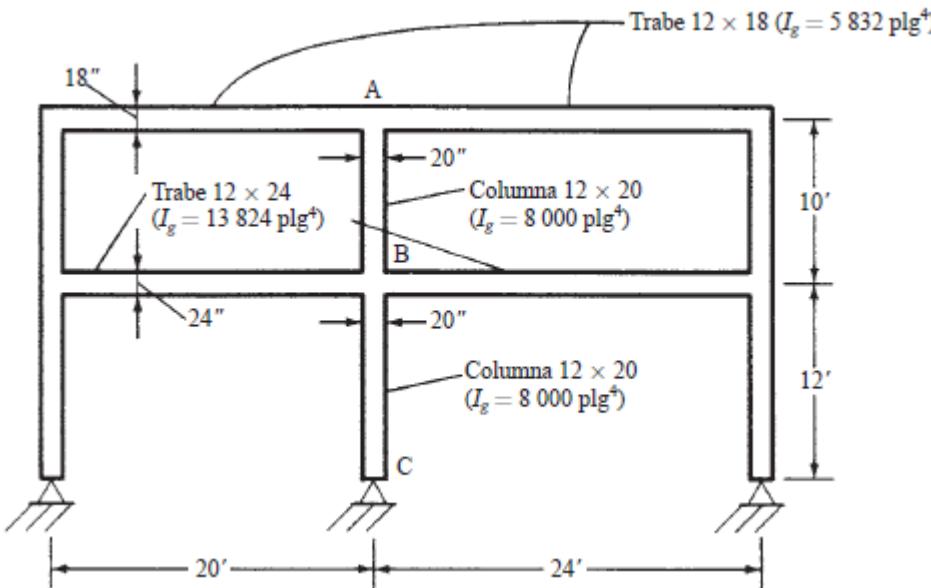
"Los efectos de segundo orden no deben exceder en 40% los efectos de primer orden"

¿Cómo evitar Columnas Esleltas?

- En columnas de marcos arriostrados L_u/h menor de 10 en planta baja y 14 en pisos superiores
- En columnas de marcos no arriostrados L_u/h menor de 6

Ejemplo 1

- a) Con ayuda de los nomogramas de la figura 11.3, calcular el factor de longitud efectiva para la columna AB del marco rierostrado de la figura 11.4. Consideré sólo flexión en el marco del plano.
- b) Calcular la relación de esbeltez de la columna AB. ¿Es una columna corta o esbelta? La relación de esbeltez máxima permisible para una columna corta sin arriostramiento es 22, como se describirá en la sección 11.9 de este capítulo. Los momentos de extremo en la columna son $M_1 = 45$ pie-klb y $M_2 = 75$ pie-klb, resultando en curvatura simple.

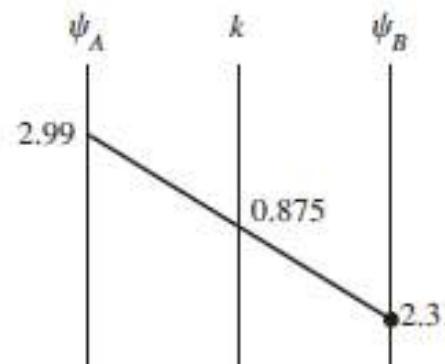


a) Factor de longitud efectiva para la columna AB

Usando los Momentos de Inercia Reducidos de 11.6b) y aplicando el método descrito en la sección 11.4

$$\psi_A = \frac{0.7 \times 8000}{\left[\frac{0.35 \times 5832}{12 \times 20} + \frac{0.35 \times 5832}{12 \times 24} \right]} = 2.99$$

$$\psi_B = \frac{0.7 \times 8000 + 0.7 \times 8000}{\left[\frac{0.35 \times 13824}{12 \times 20} + \frac{0.35 \times 13824}{12 \times 24} \right]} = 2.31$$



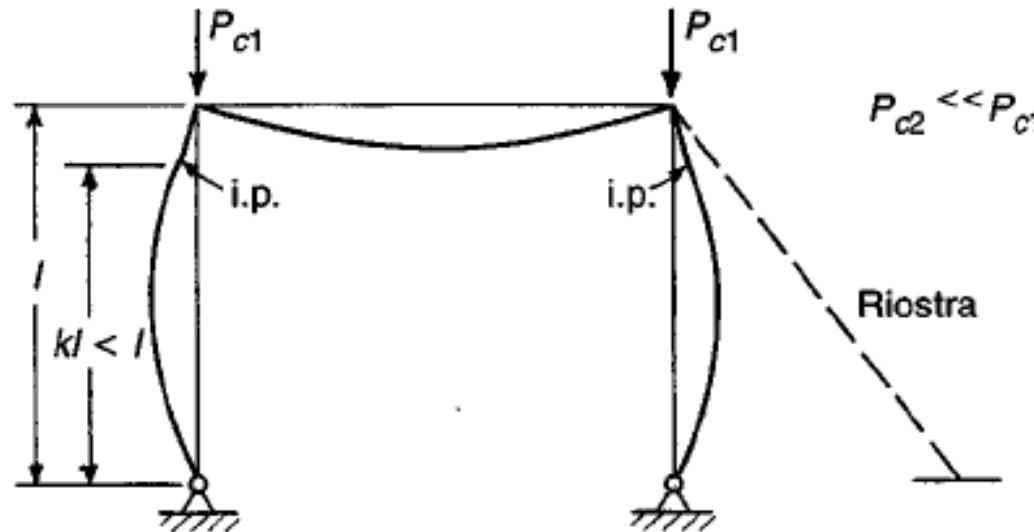
b) ¿Es una columna esbelta?

$$\ell_u = 10 \text{ pies} - \frac{9+12}{12} = 8.25 \text{ pies}$$

$$\frac{k\ell_u}{r} = \frac{(0.875) \times (12 \times 8.25)}{0.3 \times 20} = 14.44 < \text{Máximo } \frac{k\ell_u}{r} \text{ para una columna corta en un marco arriostrado mediante la ecuación 10-7 del ACI} = 34 - 12 \left(\frac{+45}{+75} \right) = 26.8$$

∴ No es una columna esbelta

Marco Arriostrado

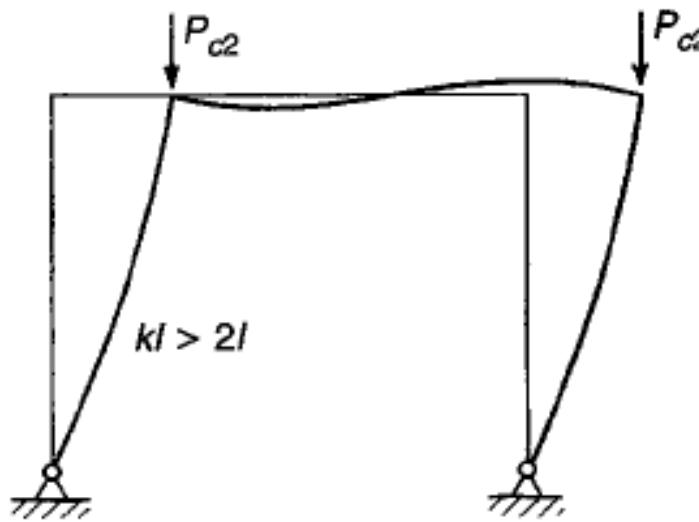


Elementos estructurales muy rígidos
Para resistir el movimiento lateral
Ejemplo. (muros de cortante)

Índice de Estabilidad

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_u \ell_c} \leq 0.05 \text{ es marco arriostrado}$$

Marco No Arriostrado



Generalmente sistema viga-columna

"El marco es arriostrado si los efectos de amplificación de segundo orden son 5% o menos que los del primer orden"

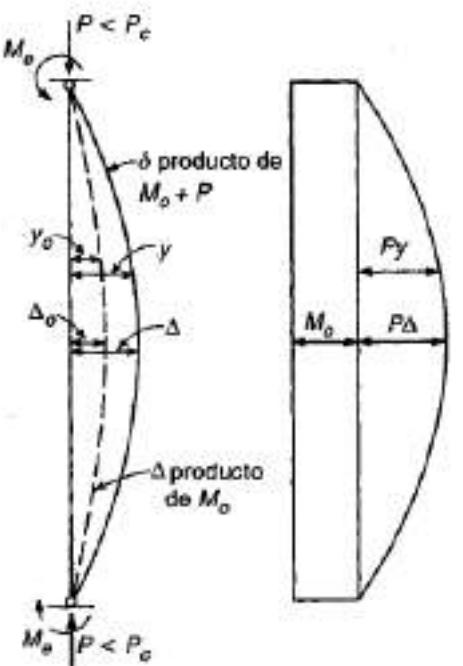
ΣP_u = carga vertical total factorizada para todas las columnas en el piso considerado.

Δ_o = deflexión lateral de primer orden determinada elásticamente debido a V_u en la parte superior del piso en cuestión con respecto a la parte inferior de ese mismo piso.

V_u = fuerza cortante horizontal total factorizada del piso considerado.

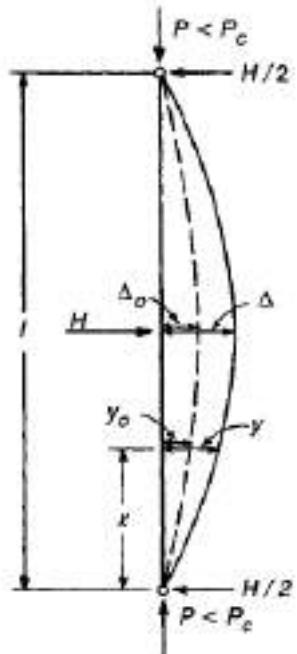
ℓ_c = altura de un miembro a compresión en un marco medida de centro a centro de los nudos del marco.

Amplificación de Momento en Columnas en Marcos Arriostrados



$$M = M_o + Py$$

$$y = y_o \frac{1}{1 - P/P_c}$$



$$M_{\max} = M_o + P\Delta = M_o + P\Delta_o \frac{1}{1 - P/P_c}$$

$$M_{\max} = M_o \frac{1}{1 - P/P_c}$$

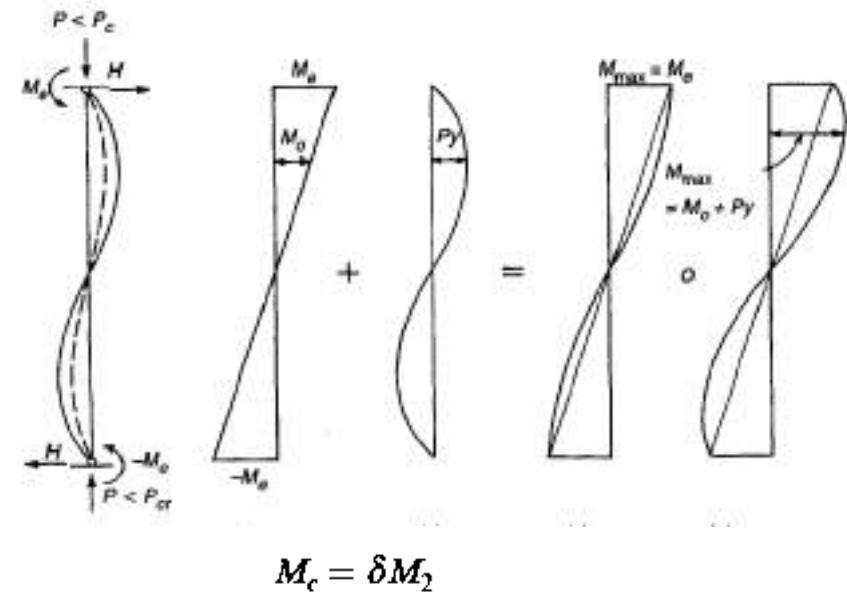
$$P_c = \frac{\pi^2 E t I}{(kl)^2}$$

$$M_{2\min} = P_u(15 + 0.03h)$$

$M_{2\min} = P_u(15 + 0.03h)$, donde h está en mm, así como el número 15

Factor de Amplificación

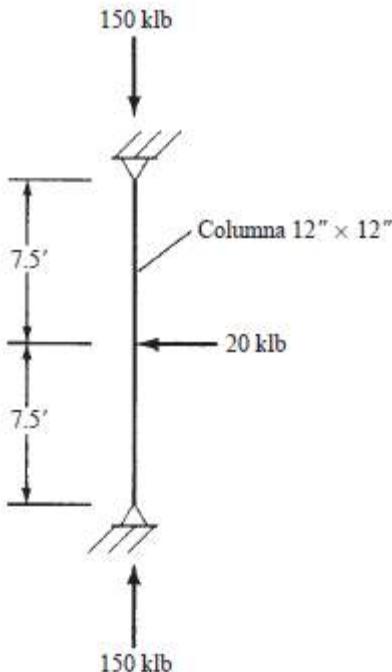
$$\delta = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75P_c}} \geq 1.0$$



$$M_c = \delta M_2$$

Ejemplo 2

- Calcular el momento primario en la columna mostrada en la figura 11.6 debido a la carga lateral de 20 klb.
- Determinar el momento total estimado, incluyendo el momento secundario debido a la deflexión lateral, usando el factor de amplificación apropiado justamente presentado. $E = 3.16 \times 10^3$ klb/plg². Suponer $k = 1.0$ y $\ell_u = 15$ pies.



- Momento primario debido a la carga lateral:

$$M_u = \frac{(20)(15)}{4} = \underline{\underline{75 \text{ pie-klb}}}$$

- Momento total incluyendo el momento secundario:

$$\begin{aligned} P_c &= \text{carga de pandeo de Euler} = \frac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2} \\ &= \frac{(\pi^2)(3160)\left(\frac{1}{12} \times 12 \times 12^3\right)}{(1.0)(12 \times 15)^2} = 1663.4 \text{ klb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Momento amplificado} &= 75 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_c}} \\ &= 75 \frac{1}{1 - \frac{150}{1663.4}} = \underline{\underline{82.4 \text{ pie-klb}}} \end{aligned}$$

Cálculo de factor de Amplificación de Momento

Marco Arriostado

1. $E_c = 57\,000\sqrt{f'_c}$ para concreto de peso normal
2. I_g = momento de inercia total de la sección transversal de la columna respecto al eje centroidal bajo consideración.
3. $E_s = 29 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$.
4. I_{se} = momento de inercia del refuerzo respecto al eje centroidal de la sección. (Este valor = la suma de cada área de varilla multiplicada por el cuadrado de su distancia al eje centroidal del miembro en compresión.)
5. El término β_{dns} considera la reducción de la rigidez causada por cargas axiales sostenidas y es aplicable solamente a marcos sin desplazamiento lateral. Se define como la relación de la carga axial sostenida factorizada máxima dividida por la carga axial factorizada total asociada con la misma combinación de carga. Siempre se supone que tiene signo positivo y nunca se permite que exceda de 1.0.
6. Selección de EI

$$EI = \frac{(0.2E_c I_g + E_s I_{se})}{1 + \beta_{dns}}$$

Cuando se conoce la sección y refuerzo

$$EI = \frac{0.4E_c I_g}{1 + \beta_{dns}}$$

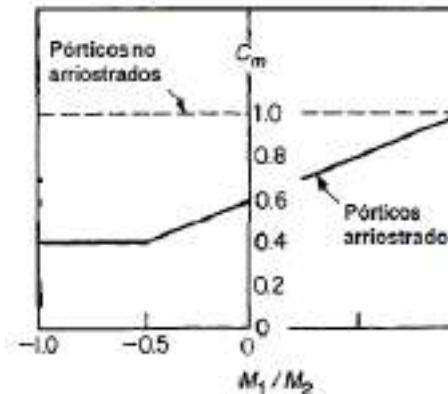
Cuando no se conoce la sección y refuerzo

7. Carga de Pandeo de Euler

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k \ell_a)^2}$$

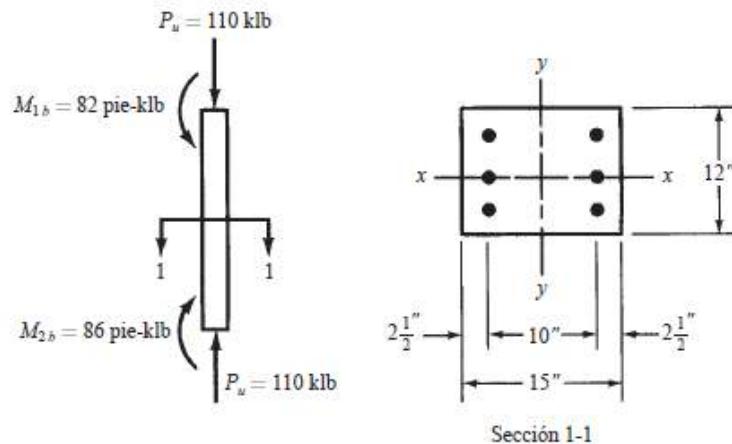
8. Factor de Modificación de Momento

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4$$



Ejemplo 3

La columna con estribos de la figura 11.7 se ha diseñado aproximadamente con las dimensiones de 12 plg × 15 plg. Se usará en un marco ríofractado contra desplazamientos laterales. La columna se flexiona con curvatura simple alrededor de su eje y y tiene una ℓ_u de 16 pies. Si $k = 0.83$, $f_y = 60\,000 \text{ lb/plg}^2$, y $f'_c = 4\,000 \text{ lb/plg}^2$, determinar el refuerzo requerido. Considerar sólo la flexión en el plano del marco. Obsérvese también que la carga muerta axial no factorizada P_D es de 30 klb y el concreto es de peso normal.



1. ¿Es una columna esbelta?

$$\frac{k\ell_u}{r} \text{ máximo para columnas cortas} = 34 - 12 \frac{M_1}{M_2} = 34 - 12 \left(\frac{+82}{+86} \right) = 22.56$$

$$\frac{k\ell_u}{r} \text{ real} = \frac{(0.83)(12 \times 16)}{0.3 \times 15} = 35.41 > 22.56$$

2. Es una columna esbelta $k\ell_u/r$:

$$2. E_c = 57\,000 \sqrt{f'_c} = 57\,000 \sqrt{4\,000} = 3\,605\,000 \text{ lb/plg}^2 = 3.605 \times 10^3 \text{ klb/p}$$

$$3. I_g = \left(\frac{1}{12}\right)(12)(15)^3 = 3\,375 \text{ plg}^4$$

$$4. \beta_d = \frac{\text{carga muerta axial factorizada}}{\text{carga axial total factorizada}} = \frac{(1.2)(30)}{110} = 0.327$$

5. Como el refuerzo no se ha seleccionado, debemos usar la segunda expresión para EI .

$$EI = \frac{0.4E_c I_g}{1 + \beta_d} = \frac{(0.4)(3\,605)(3\,375)}{1 + 0.327} = 3.67 \times 10^6 \text{ klb-plg}^2$$

$$6. P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2} = \frac{(\pi^2)(3.67 \times 10^6)}{(0.83 \times 12 \times 16)^2} = 1\,426 \text{ klb}$$

$$7. C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} = 0.6 + 0.4 \left(\frac{+82}{+86} \right) = 0.981$$

$$8. \delta = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75P_c}} = \frac{0.981}{1 - \frac{110}{(0.75)(1\,426)}} = 1.09$$

$$9. M_{2,\min} = P_u(0.6 + 0.03h) = 110(0.6 + 0.03 \times 15) = 115.5 \text{ plg-klb} = 9.6 \text{ pie-klb}$$

$$10. M_c = \delta M_2 = (1.09)(86) = 93.7 \text{ pie-klb}$$

$$11. e \text{ amplificado} = \delta e = \frac{(12)(93.7)}{110} = 10.22 \text{ plg}$$

12. $\lambda = \frac{10}{15} = 0.667 \therefore \rho_g$ se determina por interpolación entre los valores presentados en el apéndice A, gráficas 2 y 3.

$$P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{110}{0.65} = 169.23 \text{ klb}$$

$$K_n = \frac{P_n}{f'_c A_g} = \frac{169.23}{(4)(12 \times 15)} = 0.235$$

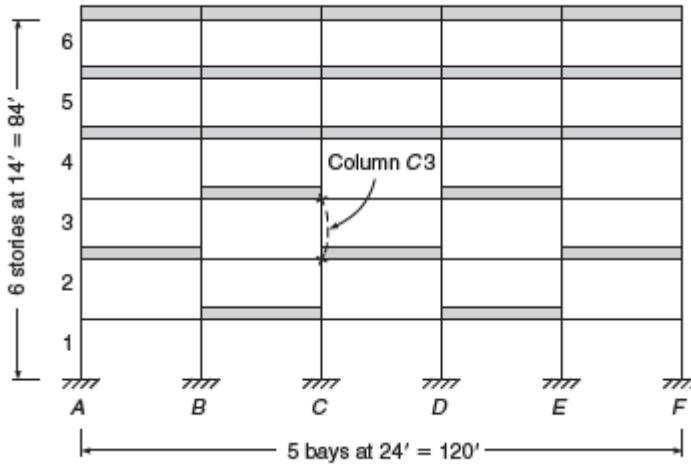
$$R_n = \frac{P_n}{f'_c A_g} \frac{\delta e}{h} = (0.235) \left(\frac{10.22}{15} \right) = 0.160$$

$$\rho_g = 0.0160$$

$$A_g = (0.0160)(12)(15) = 2.88 \text{ plg}^2$$

Use 4 varillas #8 (3.14 plg^2)

Ejemplo 9.1. Diseño de una columna esbelta en un pórtico arriostrado. La figura 9.14 presenta una vista en elevación del pórtico de un edificio de concreto de varios pisos, con vigas de 48 pulg de ancho y 12 pulg de altura, en todas las líneas de columna que sostienen losas de entrepiso y de cubierta en dos direcciones. La altura libre de las columnas es de 13 pies. Las columnas interiores se han predimensionado tentativamente de 18 × 18 pulg y las exteriores de 16 × 16 pulg. El pórtico está arriostrado efectivamente contra desplazamiento lateral mediante los núcleos de escaleras y de ascensores, que incluyen muros de concreto monolíticos con los entrepisos, localizados en las esquinas del edificio (no aparecen en la figura). La estructura se va a someter a cargas verticales muertas y vivas. Los cálculos tentativos y adelantados mediante análisis de primer orden indican que la distribución de cargas vivas de la figura 9.14, si se tiene en cuenta una distribución completa de la carga en la cubierta y en los pisos superiores, y con una distribución en forma de tablero de ajedrez en la zona adyacente a la columna C3, produce los máximos momentos con curvatura simple en esta columna y casi la máxima carga axial. Las cargas muertas actúan sobre todas las luces. Los valores de cargas de servicio para las fuerzas axiales y los momentos causados por las cargas muertas y vivas para la columna interior típica C3 son los siguientes:



Carga muerta	Carga viva
$P = 230 \text{ klb}$	$P = 173 \text{ klb}$
$M_u = 2 \text{ klb-pie}$	$M_2 = 108 \text{ klb-pie}$
$M_u = -2 \text{ klb-pie}$	$M_1 = 100 \text{ klb-pie}$

Solución

$$P_u = 1.2 \times 230 + 1.6 \times 173 = 553 \text{ kips}$$

$$M_u = 1.2 \times 2 + 1.6 \times 108 = 175 \text{ ft-kips}$$

La columna queda sometida a curvatura doble cuando actúa la carga muerta sola y a curvatura simple cuando actúa la carga viva.

Diseñe la columna C3 según el método de amplificación de momentos del Código ACI. Utilice $f'_c = 4000 \text{ lb/pulg}^2$ y $f_y = 60,000 \text{ lb/pulg}^2$.

Asumiendo K= 1

$$\frac{k\ell_u}{r} = \frac{1.0 \times 13 \times 12}{0.3 \times 18} = 28.9$$

$$34 + 12 \frac{M_1}{M_2} = 34 + 12 \left(-\frac{1.2 \times (-2) + 1.6 \times 100}{1.2 \times 2 + 1.6 \times 108} \right) = 23.2$$

"La columna es esbelta"

Inercia y Rigidez de Columnas

$$0.7I_g = 0.7 \times 18 \times 18^3 / 12 = 6124 \text{ in}^4$$

$$I/\ell_c = 6124 / (14 \times 12) = 36.5 \text{ in}^3$$

Inercia y Rigidez de Vigas

$$0.35I_g = 0.35 \times 2 \times 48 \times 12^3 / 12 = 4838$$

$$I/\ell = 4838 / (24 \times 12) = 16.8 \text{ in}^3$$

$$\psi_a = \psi_b = \frac{36.5 + 36.5}{16.8 + 16.8} = 2.17$$

Del nomograma K = 0.87

$$\frac{k\ell_u}{r} = \frac{0.87 \times 13 \times 12}{0.3 \times 18} = 25.1$$

Recalculando K/r se mantiene esbelta la columna

Momento Minimo

$$M_{2,\min} = P_u(0.6 + 0.03h) = 553 \times (0.6 + 0.03 \times 18)/12 = 53 \text{ ft-kips}$$

$$M_1 = 1.2 \times (-2) + 1.6 \times 100 = 158 \text{ ft-kips}$$

$$M_2 = 1.2 \times 2 + 1.6 \times 108 = 175 \text{ ft-kips}$$

Factor de modificación C_m

$$C_m = 0.6 - 0.4 \frac{M_1}{M_2} = 0.6 - 0.4 \left(-\frac{158}{175} \right) = 0.96$$

$$\beta_{dns} = \frac{1.2 \times 230}{1.2 \times 230 + 1.6 \times 173} = 0.50$$

$$(EI)_{eff} = \frac{0.4E_c I_g}{1 + \beta_{dns}} = \frac{0.4 \times 3.60 \times 10^6 \times 18 \times 18^3/12}{1 + 0.50} = 8.40 \times 10^9 \text{ in}^2\text{-lb}$$

Carga crítica de Pandeo

$$P_c = \frac{\pi^2 (EI)_{eff}}{(k\ell_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 8.40 \times 10^9}{(0.87 \times 13 \times 12)^2} = 4.50 \times 10^6 \text{ lb}$$

Factor de Amplificación

$$\delta = \frac{C_m}{1 - P_u/0.75P_c} = \frac{0.96}{1 - 553/(0.75 \times 4500)} = 1.15$$

Cargas de Diseño

$$P_u = 553 \text{ kips}$$

$$M_c = \delta M_2 = 1.15 \times 175 = 201 \text{ ft-kips.}$$

$$\gamma = 15/18 = 0.833$$

$$P_n = 553/0.65 = 850.76 \text{ k}$$

$$M_n = 201/0.65 = 309.23 \text{ k-p}$$

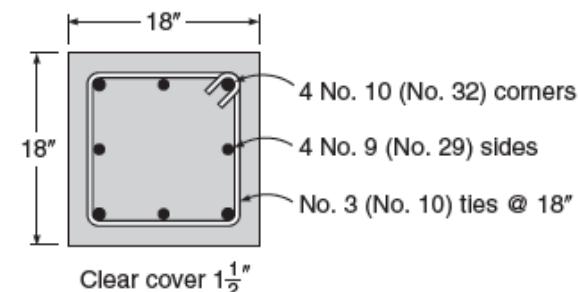
$$K_n = 850.76 / (4 \times 18 \times 18) = 0.65$$

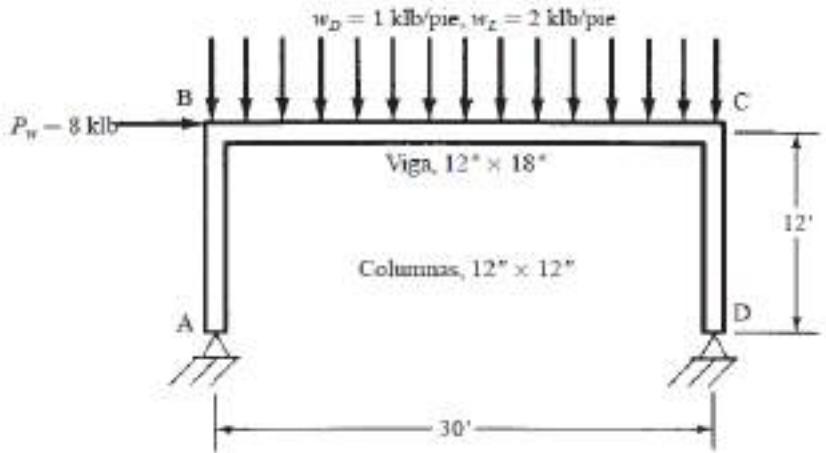
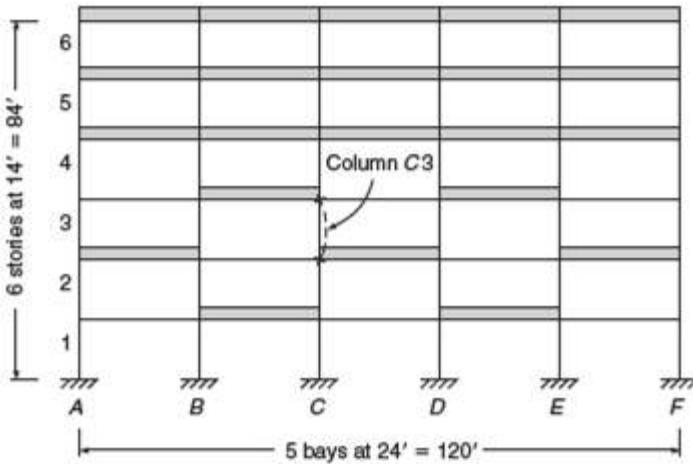
$$e = 12 \times 309.23 / 850.76 = 4.36''$$

$$R_n = 0.65 \times 4.36 / 18 = 0.157$$

De la gráfica $\rho = 2.6\%$

$$A_{st} = 0.026 \times 324 = 8.42 \text{ in}^2$$





COLUMNAS ESBELTAS

Marcos No Arriostrados

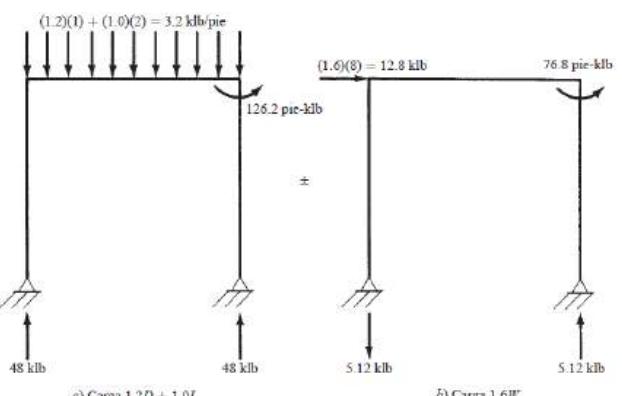
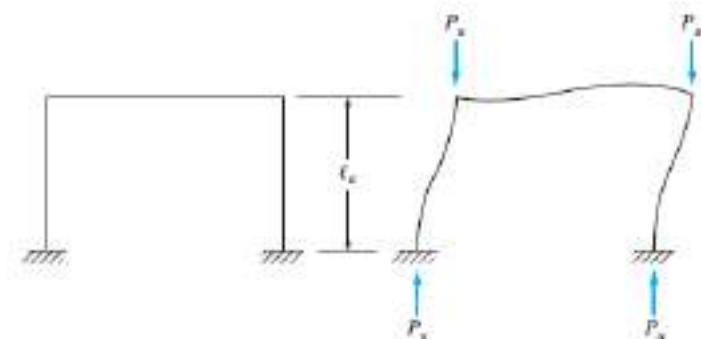


Figura 11.11

Amplificación de Momentos en marcos con Desplazamiento Lateral

“El marco es arriostrado si los efectos de amplificación de segundo orden son 5% o menos que los del primer orden”

Se ignora la esbeltez si

$$k\ell_u/r < 22$$

Momentos de Diseño

$$M_1 = M_{1ns} + \delta_s M_{1s}$$

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s}$$

M_{1ns} y M_{2ns} son los momentos debido a gravedad y no necesitan ser amplificados

Cálculo de δ_s

$$\delta_s = \frac{1}{1-Q} \geq 1 \quad \text{y } \delta_s \leq 1.5 \quad \text{y } Q \leq 1/3$$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_c}} \geq 1$$

$\sum P_u = \text{todas las cargas verticales del piso}$

$\sum P_c = \text{todas las cargas de pandeo del piso}$

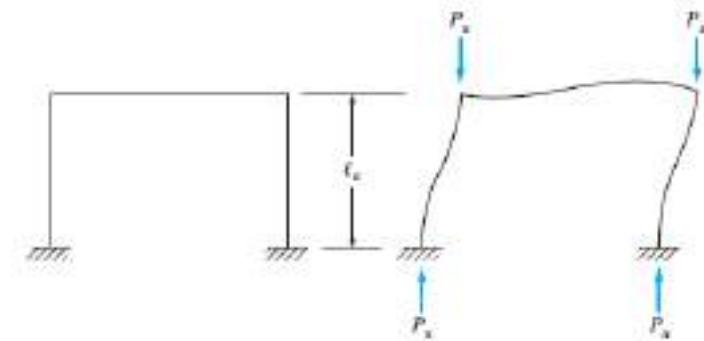
Combinaciones de Carga

$$U = 1.2D + 1.6L$$

$$U = 1.2D + 1.6(L, \text{ or } S \text{ or } R) + 0.5W$$

$$U = 1.2D + 1.0W + 1.0L + 0.5(L, \text{ or } S \text{ or } R)$$

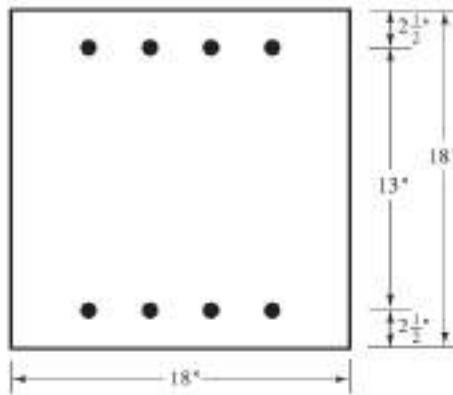
$$U = 0.9D + 1.0W$$



Índice de Estabilidad

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_u \ell_e} \leq 0.05 \text{ es marco arriostrado}$$

Seleccionar las varillas de refuerzo usando el método de amplificación del momento para la columna no riestrada de 18 plg \times 18 plg mostrada en la figura 11.8 si $\ell_u = 17.5$ pies, $k = 1.3$, $f_y = 60 \text{ klb/plg}^2$ y $f'_c = 4 \text{ klb/plg}^2$. Un análisis de primer orden ha resultado en los siguientes momentos y cargas axiales:



$$P_D = 300 \text{ klb} \quad M_D = 48 \text{ klb-pie}$$

$$P_L = 150 \text{ klb} \quad M_L = 25 \text{ klb-pie}$$

$$P_W = 170 \text{ klb} \quad M_W = 29 \text{ klb-pie}$$

¿Es una columna esbelta? (ACI 10.13.2)

$$\frac{k \ell_u}{r} = \frac{(1.3)(12)(17.5)}{(0.3)(18)} = 50.55 > 22$$

Calculo del Momento Amplificado

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\Sigma P_u}{0.75 \Sigma P_c}}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{12\,000}{(0.75)(60\,000)}} = 1.364$$

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s}$$

$$= 97.6 + (1.364)(89.6) = 219.8 \text{ pie-klb}$$

¿Es $M_{2m} \geq$ valor mínimo permitido en la sección 10.10.6.5 del ACI?

Combinación de carga- Gravedad

$$P_U = 1.2P_D + 1.6P_L = 1.2(300) + 1.6(150) = 600 \text{ klb}$$

$$M_U = 1.2M_D + 1.6M_L = 1.2(48) + 1.6(25) = 97.6 \text{ klb-pie} = M_{2ns}$$

Selección del Refuerzo

$$\gamma = \frac{13}{18} = 0.722 \text{ con referencia a la figura 11.8}$$

$$P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{542}{0.65} = 833.8$$

$$e = \frac{(12)(219.8)}{542} = 4.87$$

$$K_n = \frac{P_n}{f'_c A_g} = \frac{833.8}{(4)(18 \times 18)} = 0.643$$

$$R_n = \frac{P_n}{f'_c A_g} e = (0.643) \left(\frac{4.87}{18} \right) = 0.174$$

Combinación de carga- Lateral

$$P_U = 0.9P_D + 1.6P_W = 0.9(300) + 1.6(170) = 542 \text{ klb}$$

$$M_U = 0.9M_D + 1.6M_W = 0.9(48) + 1.6(20) = 89.6 \text{ klb-pie} = M_{2s}$$

$$M_{2\min} = P_u(0.6 + 0.03h)$$

$$= (544)(0.6 + 0.03 \times 18) = 620.2 \text{ plg-klb}$$

$$= 51.7 \text{ pie-klb} < 97.6 \text{ pie-klb}$$

$\Sigma P_u = 12\,000$ para todas las columnas del piso

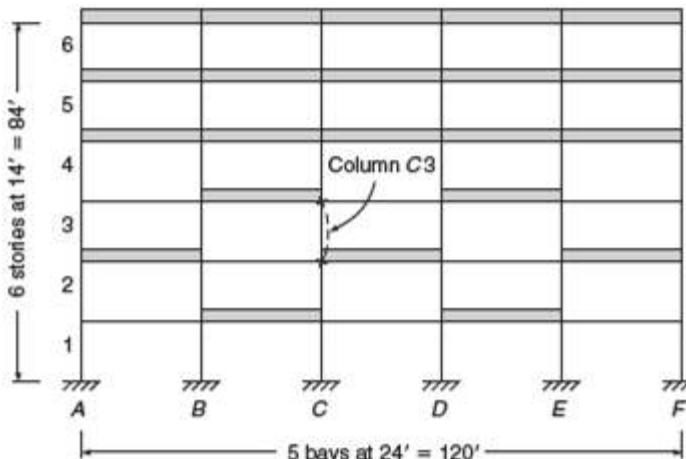
Por la interpolación entre las gráficas 3 y 4 del apéndice A, encontramos $\rho_2 = 0.023$

$\Sigma P_c = 60\,000$ para todas las columnas del piso

$$A_z = \rho_2 A_g = (0.023)(18 \times 18) = 7.45$$

Use 8 varillas #9 (9.00)

Para el marco no arriostrado que se muestra en la figura, Se diseño de forma preliminar las columnas para un marco arriostrado, dando como resultado para las columnas interiores de 18" x 18", 4 barras #10 en las esquinas y 4 #9 en los centros de cada lado. Para las columnas exteriores de 16" x 16" un refuerzo de 8 # 8. El edificio está sometido a cargas de gravedad viva y muerta, y a cargas de viento. Un análisis de primer orden adelantado para cargas de servicio da los siguientes resultados para el tercer piso:



La deflexión relativa para el cortante en el tercer piso $V = 90k$ es 1.25
Debe diseñarse la columna C3 tomando en cuenta la condición crítica, tomando f'_c 4000psi y f_y 60000 psi

$$V_{\text{viento}} = 90k$$

$$\Delta_o = 1.25$$

Columnas A3 y F3

$$P_u = 1.2 \times 115 + 1.0 \times 90 = 228 \text{ kips}$$

Columnas B3,C3, D3 y E3

$$P_u = 1.2 \times 230 + 1.0 \times 173 = 449 \text{ kips}$$

$$\Sigma P_u = 2 \times 228 + 4 \times 449 = 2252 \text{ kips}$$

$$Q = \frac{\Sigma P_u \Delta_o}{V_{us} \ell_c} = \frac{2252 \times 1.25}{90 \times 14 \times 12} = 0.19$$

Combinación de carga gravedad

$$U = 1.2D + 1.6L$$

Combinación de carga + viento

$$U = 1.2D + 1.0W + 1.0L$$

Inercia y Rígidez de Columnas

$$0.7I_g = 0.7 \times 18 \times 18^3 / 12 = 6124 \text{ in}^4$$

$$I/\ell_c = 6124 / (14 \times 12) = 36.5 \text{ in}^3$$

Inercia y Rígidez de Vigas

$$0.35I_g = 0.35 \times 2 \times 48 \times 12^3 / 12 = 4838$$

$$I/\ell = 4838 / (24 \times 12) = 16.8 \text{ in}^3$$

$$\psi_a = \psi_b = \frac{36.5 + 36.5}{16.8 + 16.8} = 2.17$$

Cols. A3 and F3

$$115 \text{ kips}$$

$$90 \text{ kips}$$

$$\pm 48 \text{ kips}$$

$$9 \text{ kips}$$

Cols. B3 and E3

$$230 \text{ kips}$$

$$173 \text{ kips}$$

$$\pm 29 \text{ kips}$$

$$18 \text{ kips}$$

Cols. C3 and D3

$$230 \text{ kips}$$

$$173 \text{ kips}$$

$$\pm 10 \text{ kips}$$

$$18 \text{ kips}$$

$$2 \text{ ft-kips}$$

$$108 \text{ ft-kips}$$

$$\pm 126 \text{ ft-kips}$$

$$-2 \text{ ft-kips}$$

$$100 \text{ ft-kips}$$

$$\pm 112 \text{ ft-kips}$$

K = 1.64 usando el nomograma

$$\frac{k\ell_u}{r} = \frac{1.64 \times 13 \times 12}{0.3 \times 18} = 47.4 > 22$$

"es una columna esbelta"

$$\delta_s = \frac{1}{1 - Q} = \frac{1}{1 - 0.19} = 1.23$$

Momentos por Gravedad

$$M_{1ns} = 1.2 \times (-2) + 1.0 \times 100 = 98 \text{ ft-kips}$$

$$M_{2ns} = 1.2 \times 2 + 1.0 \times 108 = 110 \text{ ft-kips}$$

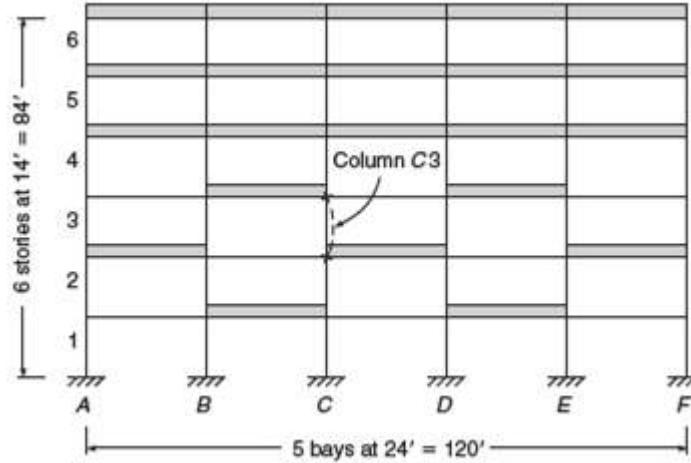
Momentos por Carga Lateral

$$M_{1s} = -112 \text{ ft-kips}$$

$$M_{2s} = 126 \text{ ft-kips}$$

$$\delta_s M_{1s} = 1.23 \times (-112) = -138 \text{ ft-kips}$$

$$\delta_s M_{2s} = 1.23 \times 126 = 155 \text{ ft-kips}$$



Columnas A3 y F3

$$I = 0.7I_g = 0.7 \times 16 \times 16^3/12 = 3823 \text{ in}^4$$

$$I/\ell_c = 3823/(14 \times 12) = 22.8 \text{ in}^3$$

$$I = 4838 \text{ in}^4 \quad I/\ell_c = 16.8 \text{ in}^3 \quad \text{Para la viga}$$

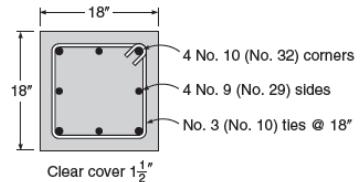
$$\psi_a = \psi_b = \frac{22.8 + 22.8}{16.8} = 2.71$$

$$K = 1.77$$

$$(EI)_{eff} = 0.2E_cI_g + E_fI_w = 0.2 \times 3.6 \times 10^6 \times 16 \times 16^3/12 + 29 \times 10^6 \times 6 \times 0.79 \times 5.6^2 = 8.24 \times 10^9 \text{ in}^2\text{-lb}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 (EI)_{eff}}{(k\ell_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 8.24 \times 10^9}{(1.77 \times 13 \times 12)^2} = 1.07 \times 10^6 \text{ lb}$$

Diseño Preliminar C3



Columnas B3, C3, D3 y E3

$$(EI)_{eff} = 0.2 \times 3.6 \times 10^6 \times 18 \times 18^3/12 + 29 \times 10^6 (4 \times 1.27 \times 6.4^2 + 2 \times 1.0 \times 6.5^2) = 14.8 \times 10^9 \text{ in}^2\text{-lb}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 14.8 \times 10^9}{(1.64 \times 13 \times 12)^2} = 2.23 \times 10^6 \text{ lb}$$

$$\delta_s M_{1s} = 1.37 \times (-112) = -153 \text{ ft-kips}$$

$$\delta_s M_{2s} = 1.37 \times 126 = 173 \text{ ft-kips}$$

$$\Sigma P_c = 2 \times 1070 + 4 \times 2230 = 11,060 \text{ kips}$$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \Sigma P_u / 0.75 \Sigma P_c} = \frac{1}{1 - 2252 / (0.75 \times 11,060)} = 1.37$$

Se toma el valor más conservador para el diseño

$$M_1 = 98 - 153 = -55 \text{ k-p}$$

$$M_2 = 110 + 173 = 283 \text{ k-p}$$

$$P_u = 449 \text{ k}$$

$$M_u = 283 \text{ k-p}$$

$$P_n = 449 / 0.65 = 690.77 \text{ k}$$

$$M_n = 283 / 0.65 = 435.38 \text{ k}$$

$$K_n = P_n / f'cA_g = 690.77 / (4 \times 18 \times 18) = 0.53$$

$$e = 12 \times 435.38 / 690.77 = 7.56 \text{ pulg}$$

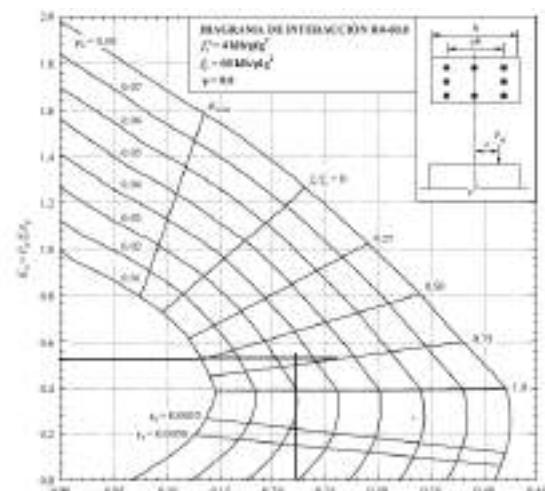
$$\gamma = 15 / 18 = 0.83$$

$$R_n = 0.53 \times 7.56 / 18 = 0.222$$

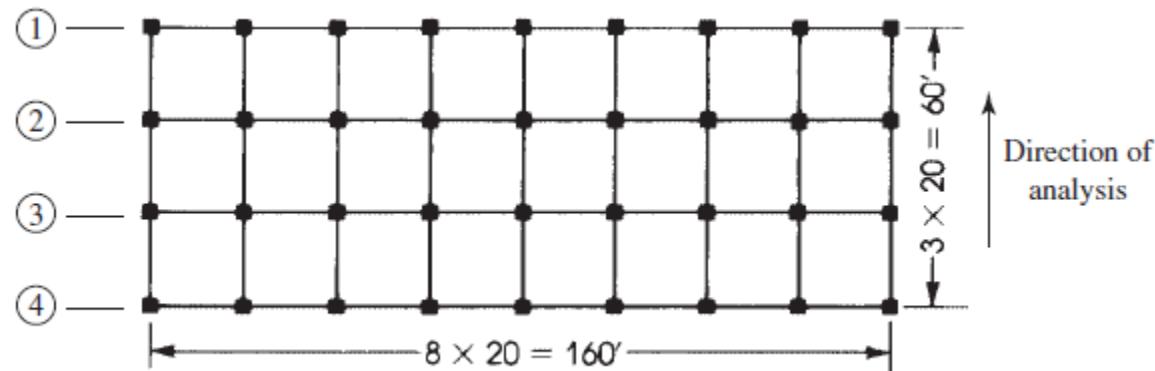
$$\rho \approx 3.5\%$$

$$A_s = 0.035 \times 18 \times 18 = 11.34 \text{ pulg}^2$$

Usar 8# 11



Diseñe una columna cuadrada interior para el primer piso de un edificio de oficina de 8 pisos. La altura libre del primer piso es de 16 pies, y la altura de los otros pisos es de 11 pies. El diseño del edificio tiene 24 vigas y las columnas no están arriostradas contra desplazamiento lateral. f_c 5ksi y f_y de 60ksi. Asuma una carga de columna exterior de $2/3$ de la columna interior y la carga de una columna de esquina de $1/3$ de columna interior.



Axial dead load = 300 K

Axial live load = 100 K

Axial wind load = 0 K

Dead – load moments = $32 \text{ K} \cdot \text{ft}$ (top) and $54 \text{ K} \cdot \text{ft}$ (bottom)

Live – load moments = $20 \text{ K} \cdot \text{ft}$ (top) and $36 \text{ K} \cdot \text{ft}$ (bottom)

Wind – load moments = $50 \text{ K} \cdot \text{ft}$ (top) and $50 \text{ K} \cdot \text{ft}$ (bottom)

Asumir sección 18"x18"

EI/l for beams = $360 \times 10^3 \text{ K} \cdot \text{in.}$

Cargas de Gravedad Factorizadas

$$P_u = 1.2D + 1.6L = 1.2(300) + 1.6(100) = 520 \text{ K}$$

$$M_{u,top} = M_{1ns} = 1.2M_D + 1.6M_L = 1.2(32) + 1.6(20) = 70.4 \text{ K} \cdot \text{ft}$$

$$M_{u,bottom} = M_{2ns} = 1.2M_D + 1.6M_L = 1.2(54) + 1.6(36) = 122.4 \text{ K} \cdot \text{ft}$$

Cargas de Gravedad + Viento Factorizadas

$$P_u = (1.2D + 1.0L + 1.6W)$$

$$= [1.2(300) + 1.0(100) + 0] = 460 \text{ K}$$

$$M_{u,top} = 1.2M_D + 1.0M_L + 1.6M_w$$

$$= 1.2(32) + 1.0(20) + 1.6(50) = 138.4 \text{ K} \cdot \text{ft} \text{ (top total)}$$

$$M_{u,bottom} = 1.2M_D + 1.0M_L + 1.6M_w$$

$$= 1.2(54) + 1.0(36) + 1.6(50) = 180.8 \text{ K} \cdot \text{ft} \text{ (bottom total)}$$

$$M_{u,ts} = 1.6M_w = 1.6 \times 50 = 80 \text{ K} \cdot \text{ft} \text{ (top sway)}$$

$$e = \frac{M_u}{P_u} \quad e = \frac{122.4 \times 12}{520} = 2.82 \text{ in.}$$

$$e = \frac{180.8 \times 12}{460} = 4.72 \text{ in.}$$

$$e_{\min} = 0.6 + 0.03h = 0.6 + 0.03(18) = 1.14 \text{ in.}$$

$$e > e_{\min}$$

Rigidez de Columnas

$$I_g = \frac{(18)^4}{12} = 8748 \text{ in.}^4 \quad E_c = 4.03 \times 10^6 \text{ psi}$$

Para $h = 16$ pies

$$\frac{EI}{l_c} = \frac{(0.7)(8748)(4.03 \times 10^6)}{16 \times 12} = 128.5 \times 10^6$$

Para $h = 11$ pies

$$\frac{EI}{l_c} = \frac{(0.7)(8748)(4.03 \times 10^6)}{11 \times 12} = 187 \times 10^6$$

Rigidez Vigas

$$EI_g/l_b = 360 \times 10^6, I = 0.35I_g$$

$$EI/l_b = 0.35EI_g/l_c = 126 \times 10^6.$$

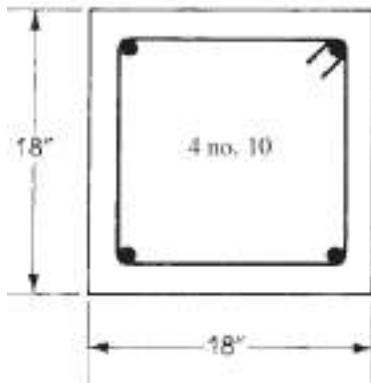
Para 18 columnas interiores para ejes 2 y 3

$$\psi(\text{top}) = \frac{\sum(EI/l_c)}{\sum(EI/l_b)} = \frac{128.5 + 187}{2(126)} = 1.25$$

$$\psi(\text{bottom}) = 0 \quad K = 1.2$$

$$\frac{Kl_u}{r} = \frac{1.2(16 \times 12)}{0.3 \times 18} = 42.7 > 22$$

“La columna es esbelta”



Diseño preliminar de columna

Cálculo de P_c

$$E_c = 4.03 \times 10^3 \text{ ksi} \quad E_s = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$$

$$I_g = 8748 \text{ in.}^4 \quad I_{se} = 4 \times 1.27 \left(\frac{18 - 5}{2} \right)^2 = 214 \text{ in.}^4$$

Asumir $B_{ds} = 0.9$

$$EI = \frac{0.2E_c I_g + E_s I_{se}}{1 + \beta_{ds}}$$

$$= \frac{0.2(4.03 \times 10^3 \times 8748) + 29 \times 10^3(214)}{1 + 0.9} = 13.25 \times 10^6 \text{ K} \cdot \text{in.}^2$$

$$P_c = \frac{\pi^2(13.25 \times 10^6)}{(1.2 \times 16 \times 12)^2} = 2461.11 \text{ K}$$

Para 18 columnas interiores para ejes 1 y 4

$$\psi(\text{top}) = \frac{128.5 + 187}{126} = 2.5$$

$$\psi(\text{bottom}) = 0 \quad K = 1.3$$

$$\frac{Kl_u}{r} = \frac{1.3(16 \times 12)}{0.3(18)} = 46.2 > 22$$

“La columna es esbelta”

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(Kl_u)^2} = \frac{\pi^2(13.25 \times 10^6)}{(1.3 \times 16 \times 12)^2} = 2097 \text{ K}$$

Para 14 columnas interiores, 18 exteriores y 4 de esquinas

$$\sum P_u = 14(460) + 18 \left(\frac{2}{3} \times 460 \right) + 4 \left(\frac{1}{3} \times 460 \right) = 12,573 \text{ K}$$

$$\sum P_c = 18(2461) + 18(2097) = 82046 \text{ K}$$

$$\delta_s = \frac{1.0}{1 - 12,573/(0.75 \times 82046)} = 1.26 \geq 1.0$$

$$M_c = M_{u,bs} + \delta_s M_{u,bs} = (100.8) + 1.26(80) = 201.34 \text{ K} \cdot \text{ft}$$

$$P_u = 460 \text{ K and } M_c = 201.34 \text{ K} \cdot \text{ft.}$$

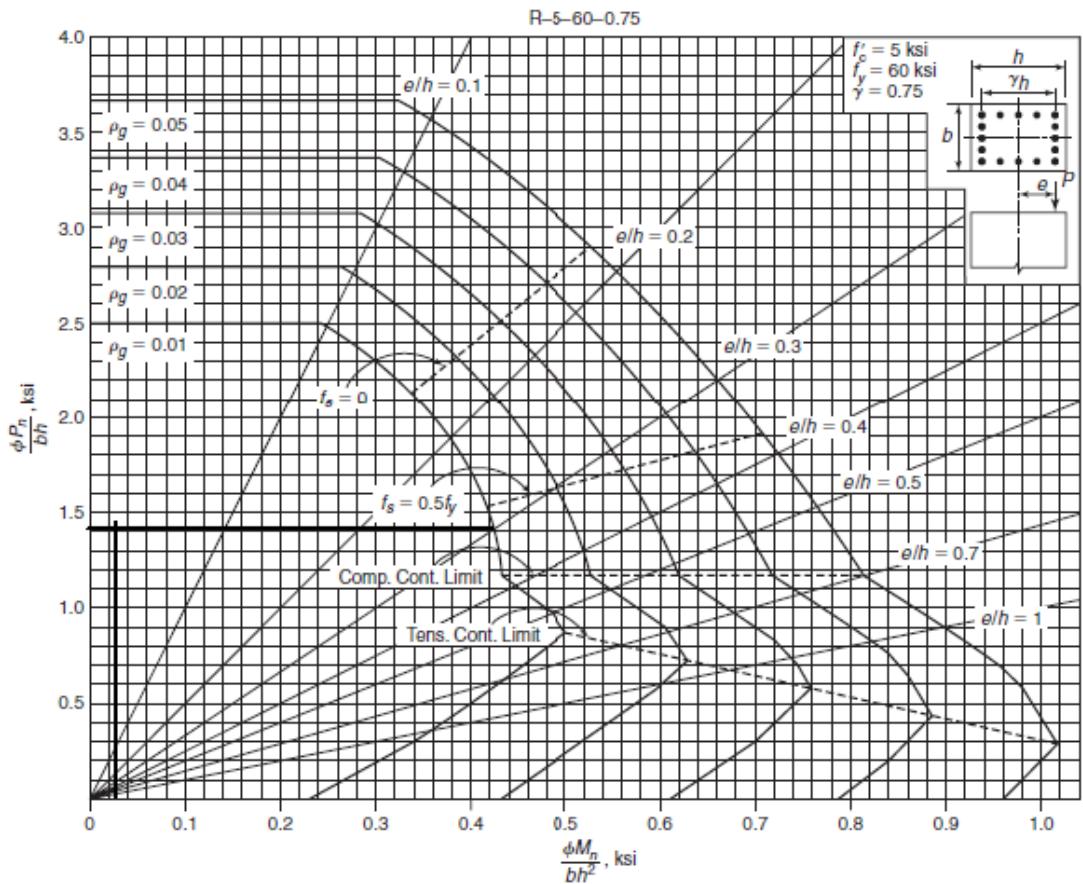
$$P_n = 460/0.65 = 707.7 \text{ k}$$

$$M_n = 201.34/0.65 = 309.75 \text{ K-p}$$

$$\theta P_n/bh = 1.41$$

$$\theta M_n/bh^2 = 0.034$$

$$\gamma = 13/18 = 0.72$$

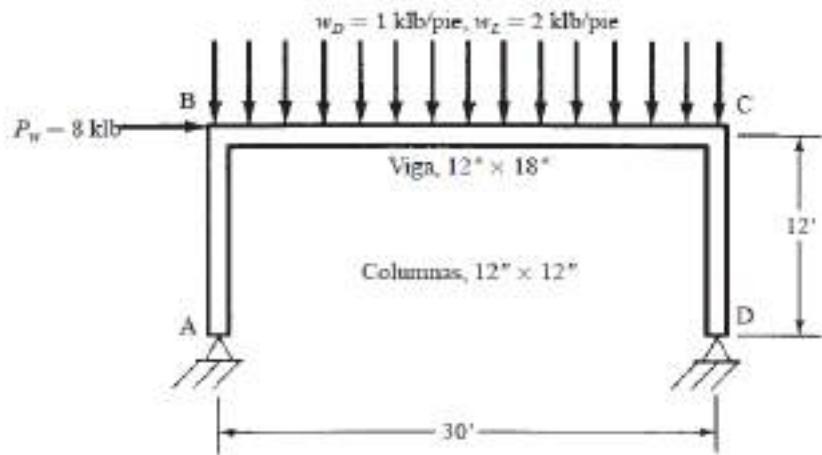


$$\rho \approx 1\%$$

$$As = 0.01 \times 18 \times 18 = 3.24 \text{ pulg}^2$$

**Usar 8#6 o 4# 9 para sección de 18" x 18"
para f'c de 5000psi**

Determinar los momentos y las fuerzas axiales que deben usarse para el diseño de la columna CD del marco sin rostrar de la figura 11.9. Consideré la flexión sólo en el plano del marco. Los tamaños supuestos de los miembros mostrados en la figura se usan para los análisis dados en el problema. $f_y = 60\,000 \text{ lb/plg}^2$ y $f'_c = 4\,000 \text{ lb/plg}^2$. Para este ejemplo, los autores consideraron los casos de factor de carga de las ecuaciones 9-1, 9-4 y 9-6 del ACI. Para otras situaciones tendrán que considerarse otras ecuaciones apropiadas de factor de carga del ACI.



1. Determinar el factor de longitud efectiva para el caso de desplazamiento usando $0.35 I_g$ para la trabe y $0.70 I_g$ para las columnas.

$$I_{\text{columna}} = (0.70) \left(\frac{1}{12} \right) (12)(12)^3 = 1\,210 \text{ plg}^4$$

Notese que si la carga lateral fuera sostenida, I_{columna} sería dividido entre $(1 + \beta_d)$.

$$I_{\text{trabe}} = (0.35) \left(\frac{1}{12} \right) (12)(18)^3 = 2\,041 \text{ plg}^4$$

$$\phi_d = \frac{1\,210}{2\,041} = 1.48$$

$\phi_d = \infty$ para extremos articulados

$k = 1.95$ de la figura 11.3(b)

(Para propósitos prácticos, usar 10)

2. ¿Es una columna esbelta?

$$\ell_a = 12 - \frac{9}{12} = 11.25 \text{ pies}$$

Máx $\frac{k\ell_a}{4}$ para que sea una columna corta — 22 en marcos no rostrados

$$\frac{k\ell_a}{r} = \frac{(1.95)(12 \times 11.25)}{0.3 \times 12} = 73.12 > 22$$

∴ Es una columna esbelta

3. Considerar el caso de carga $U = 1.2D + 1.6L$ (véase la figura 11.10).

- a) ¿Son los momentos en las columnas \geq que el mínimo del ACI?

$$e_{\min} = 0.6 + 0.03 \times 12 = 0.96 \text{ plg}$$

$$M_{2\text{Min}} = (66)(0.96) = 63.36 \text{ plg-klb} = 5.28 \text{ pie-klb} < 173.5 \text{ pie-klb} \text{ (véase la figura 11.10)}$$

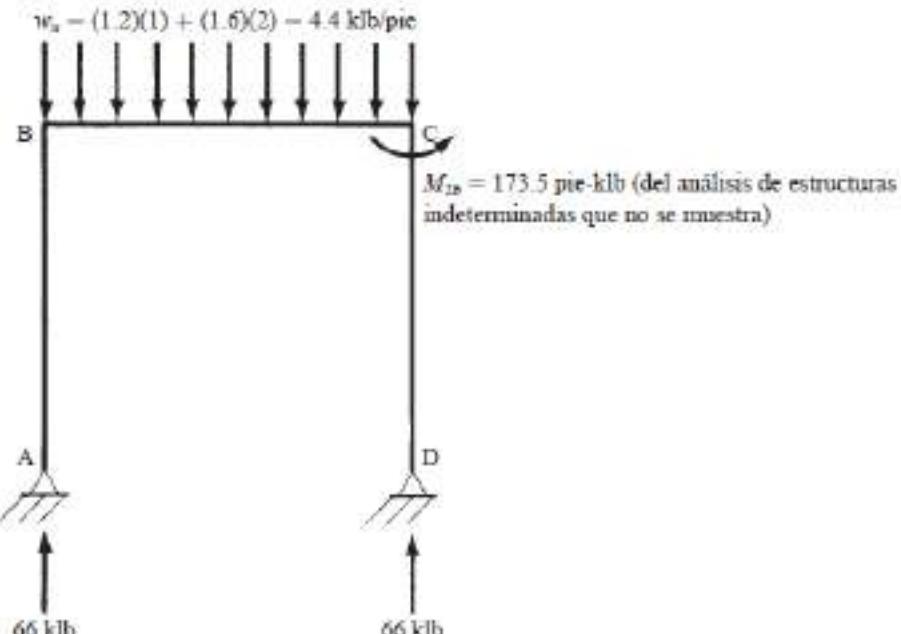


Figura 11.10 Carga $1.2D + 1.6L$.

b) Calcular el factor de amplificación δ :

$$E_c = 57\,000\sqrt{4\,000} = 3\,605\,000 \text{ lb/plg}^2 = 3\,605 \text{ klb/plg}^2$$

$$\beta_d = \frac{(1.2)(1)}{(1.2)(1) + (1.6)(2)} = 0.273$$

$$EI = \frac{(0.4)(3\,605)(1\,728)}{1 + 0.273} = 1.96 \times 10^6 \text{ klb-plg}^2$$

Suponiendo conservadoramente que $k = 1.0$ para calcular P_c

$$P_c = \frac{(\pi^2)(1.96 \times 10^6)}{(1.0 \times 12 \times 11.25)^2} = 1\,061 \text{ klb}$$

$$C_m = 0.6 + (0.4) \left(\frac{-0}{+173.5} \right) = 0.6$$

$$\delta_{us} = \frac{0.6}{1 - \frac{66}{(0.75)(1\,061)}} = 0.65 < 1.0$$

c) Calcular el factor de amplificación δ_s :

Usando $k = 1.95$ tal como está dada para determinar P_c

$$P_c = \frac{(\pi^2)(1.96 \times 10^6)}{(1.95 \times 12 \times 11.25)^2} = 279.1 \text{ klb}$$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\Sigma P_u}{0.75 \Sigma P_c}} = \frac{1}{1 - \frac{(2)(66)}{(0.75)(2 \times 279.1)}} = 1.46$$

d) Calcular el momento amplificado:

$$M_c = (1.0)(173.5) + (1.47)(0) = \underline{\underline{173.9 \text{ pie-klb}}}$$

4. Considerar el caso de carga $U = (1.2D + 1.0L + 1.6W)$ como se especifica en la sección 9.2.1(b) del código ACT. Los resultados del análisis se muestran en la figura 11.11.

a) ¿Son los momentos en las columnas \geq que los mínimos del ACT?

$$c_{min} = 0.6 + 0.03 \times 12 = 0.96 \text{ plg}$$

$$M_{2,min} = (48)(0.96) = 46.08 \text{ plg-klb} = 3.84 \text{ pie-klb} < 126.2 \text{ pie-klb}$$

OK

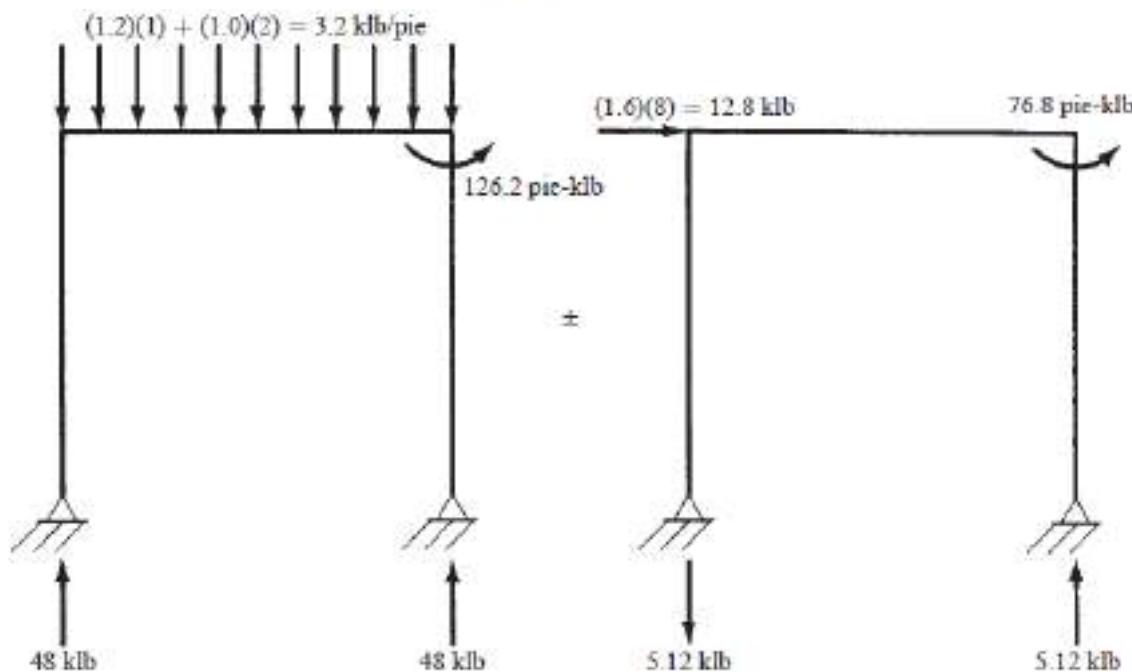
b) Calcular δ :

β_{sd} , EI y P_c son los mismos que antes

$$C_m = 0.6 + 0.4 \left(\frac{-0}{+14} \right) = 0.6$$

$$\delta = \frac{0.6}{1 - \frac{48 + 5.12}{0.75 \times 1\,061}} = 0.64$$

Use 1.0



a) Carga $1.2D + 1.0L$

b) Carga $1.6W$

Figura 11.11

c) Calcular δ_2 :

$$\beta_{des} = \frac{1.2D}{1.2D + 1.0L + 1.6W} = \frac{18}{18 + 30 + 5.12} = 0.339$$

$$EI = \frac{(0.4)(3605)(1728)}{1 + 0.339} = 1.86 \times 10^6 \text{ klb-plg}^2$$

$$P_c = \frac{(\pi^2)(1.86 \times 10^6)}{(1.95 \times 12 \times 11.25)^2} = 264.9 \text{ klb}$$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{(2)(48) + 5.12 - 5.12}{0.75 \times 2 \times 264.9}} = 1.32$$

d) Calcular el momento amplificado:

$$M_c = (1.0)(126.2) + (1.32)(76.8) = \underline{\underline{227.6 \text{ pie-klb}}}$$

5. Considerar el caso de carga $0.9D + 1.6W$. Los resultados del análisis se muestran en la figura 11.12.

a) ¿Son los momentos en las columnas \geq que los mínimos del ACI?

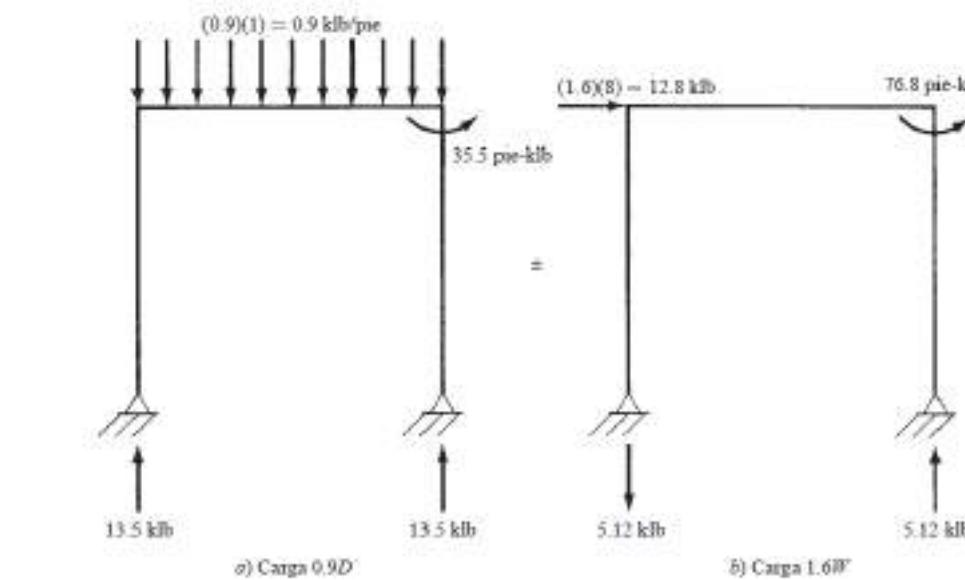
$$e_{min} = 0.6 + (0.03)(12) = 0.96 \text{ plg}$$

$$M_{2 min} = (13.5)(0.96) = 12.96 \text{ plg-klb} = 1.08 \text{ pie-klb} < 35.5 \text{ pie-klb}$$

b) Calcular δ :

$$\beta_{des} = \frac{0.9D}{0.9D + 1.6W} = \frac{13.5}{13.5 + 5.12} = 0.725$$

$$EI = \frac{(0.4)(3605)(1728)}{1 + 0.725} = 1.44 \times 10^6 \text{ klb-plg}^2$$



c) Calcular δ_2 :

$$P_c = \frac{(\pi^2)(1.44 \times 10^6)}{(1.00 \times 12 \times 11.25)^2} = 780 \text{ klb}$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 \left(\frac{-0}{35.5} \right) = 0.6$$

$$\delta = \frac{0.6}{1 - \frac{13.5 + 13.5}{0.75 \times 2 \times 780}} = 0.61 < 1.0$$

OK

d) Calcular el momento:

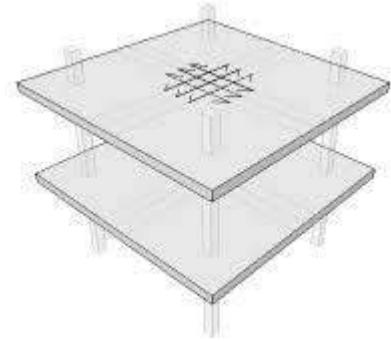
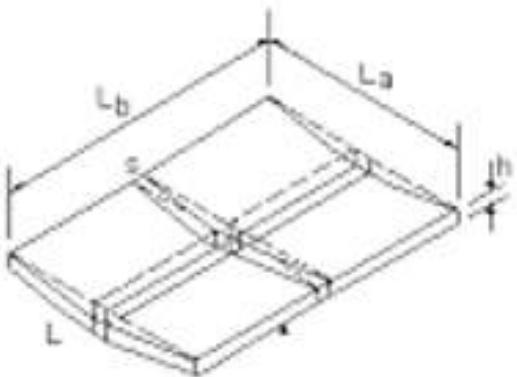
$$M_c = (1.0)(35.5) + (1.05)(76.8) = \underline{\underline{116.1 \text{ pie-klb}}}$$

6. Resumen de los momentos y las cargas axiales que deben usarse en el diseño:

Carga I: $P_u = 66 \text{ klb}$, $M_c = 173.5 \text{ pie-klb}$

Carga II: $P_u = 48 + 5.12 = 53.12 \text{ klb}$, $M_c = 227.6 \text{ pie-klb}$

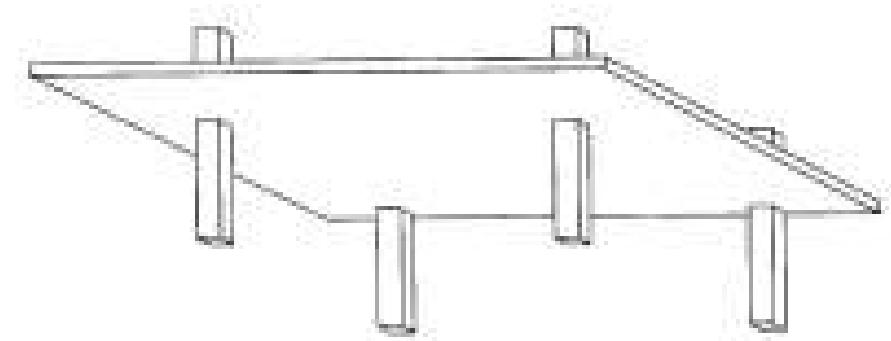
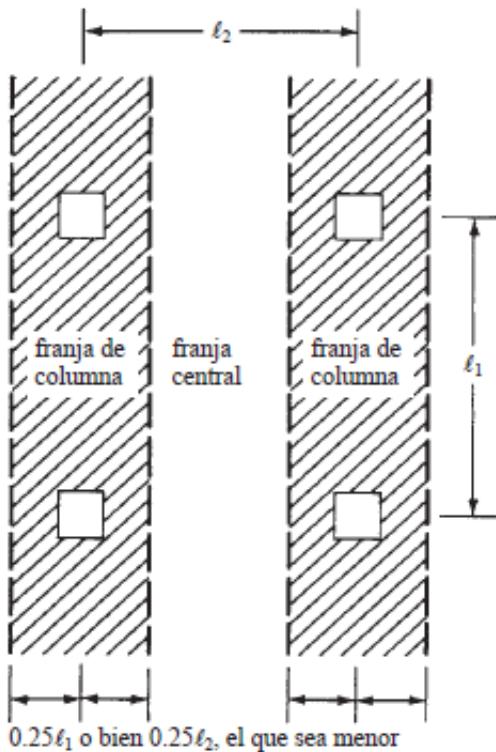
Carga III: $P_u = 13.5 + 5.12 = 18.62 \text{ klb}$, $M_c = 116.1 \text{ pie-klb}$



Losa Reforzada en Dos Direcciones

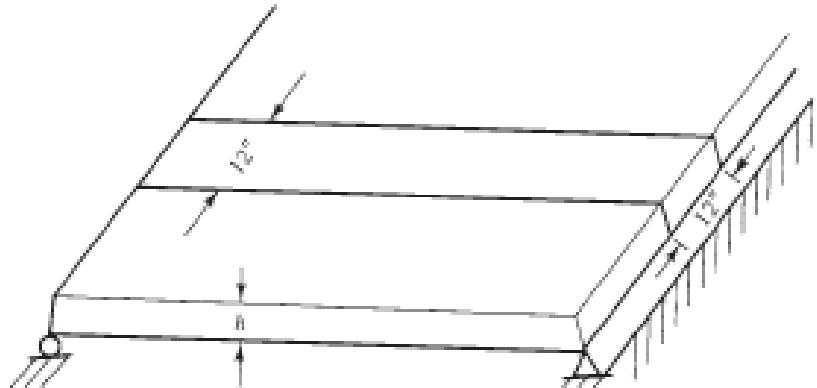
Método Directo

Losa Plana Sin Vigas



Refuerzo de Losa en Una y Dos Direcciones

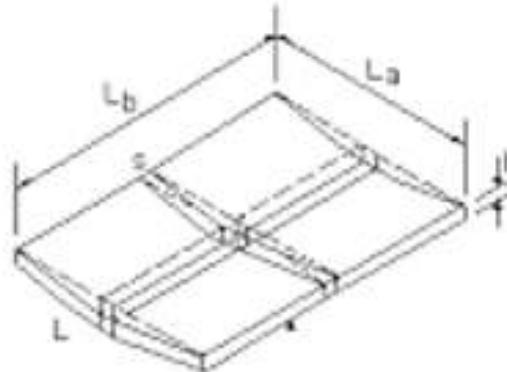
Refuerzo en una dirección



Losa Apoyada en dos bordes

Refuerzo en dos direcciones

Losa Apoyada en cuatro bordes



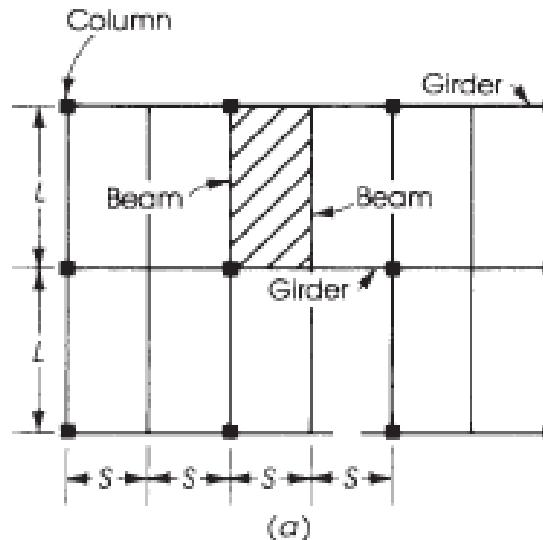
Si $L_b/L_a > 2$

Refuerzo en una dirección

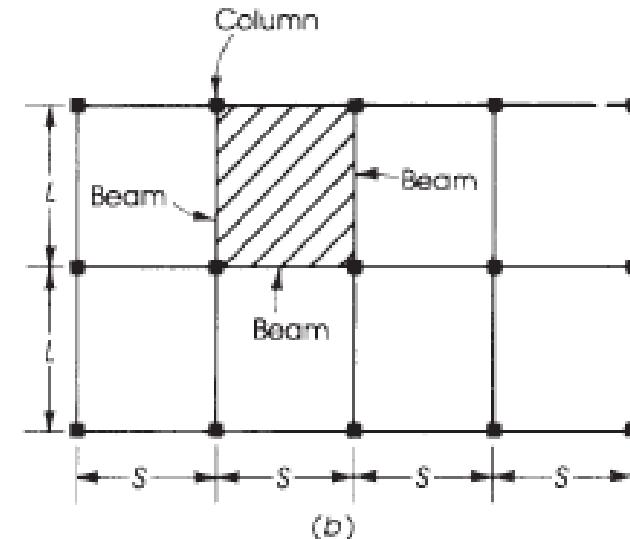
Si $L_b/L_a < 2$

Refuerzo en dos direcciones

Refuerzo en una dirección

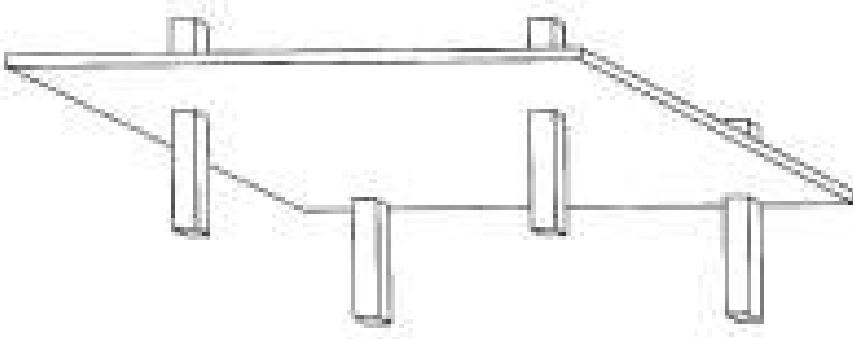


Refuerzo en dos direcciones



Tipo de Losas Reforzadas en Dos Direcciones

Losa Placa Plana



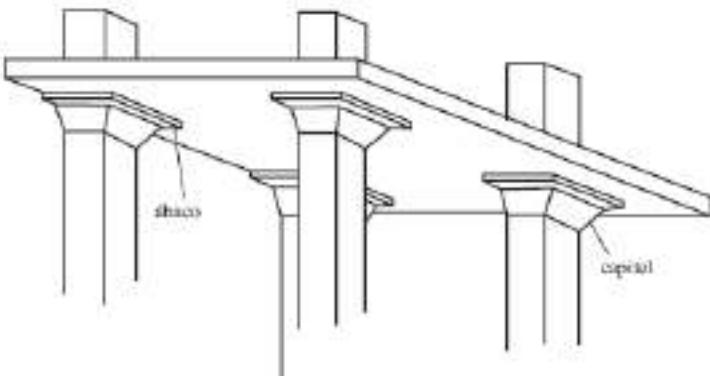
Las placas planas son las más adecuadas para un tramo de 20 a 25 pies y cargas vivas entre 60 a 100lb/pie².

Las ventajas de adoptar placas planas incluyen encofrado de bajo costo, techo plano expuesto y producción rápida.

Las placas planas tienen una capacidad de corte baja y una rigidez relativamente baja, lo que puede causar una deflexión notable.

Las placas planas se utilizan ampliamente en la construcción como losa de hormigón armado o pretensado.

Losa Plana con capitel /ábaco



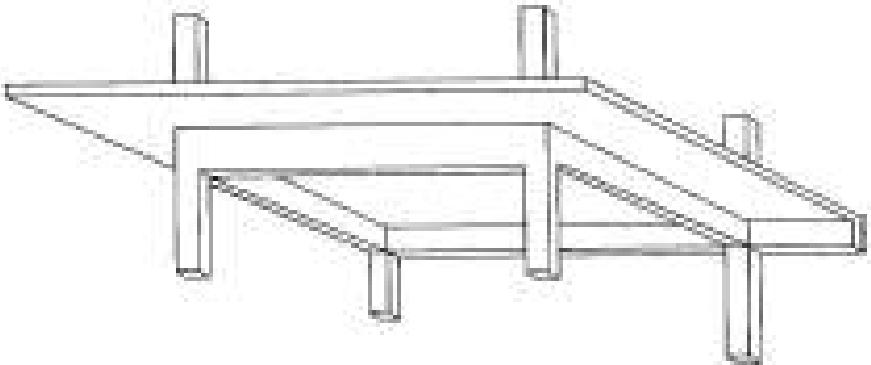
Las placas planas son las más adecuadas para un tramo de 20 a 30 pies y cargas vivas entre 80 a 150lb/pie².

Necesitan más formaletas que las placas planas, especialmente en columnas con capiteles.

En la mayoría de los casos, solo se utilizan paneles abatibles sin capitel de columnas.

Tipo de Losas Reforzadas en Dos Direcciones

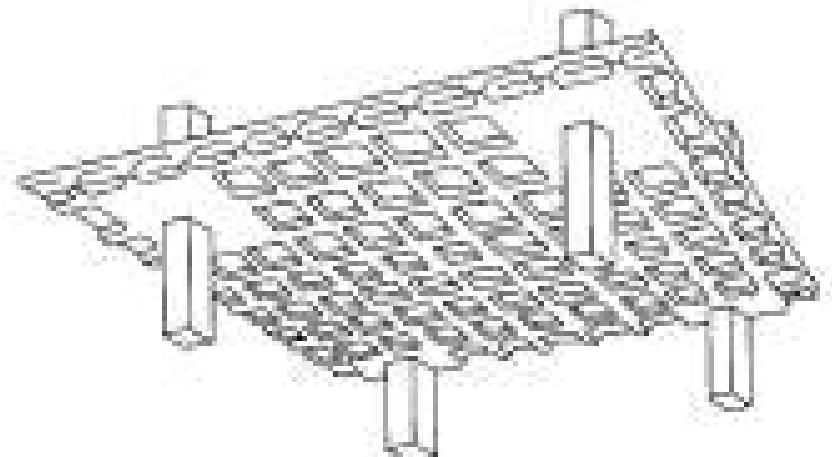
Losa con Vigas



Las placas planas son las más adecuadas para un tramo de 20 a 30 pies y cargas vivas entre 60 a 120lb/pie².

Las vigas incrementan la rigidez de la losa, produciendo deformaciones relativamente bajas. Encofrado adicional para las vigas es requerido

Losa de Casetones



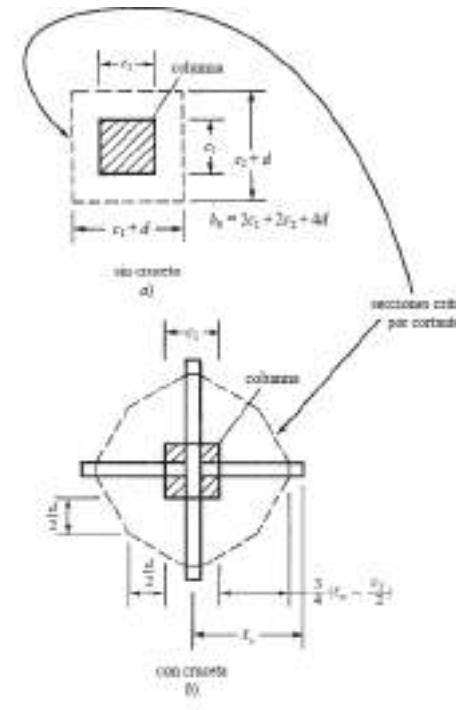
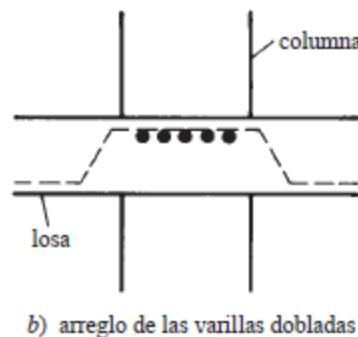
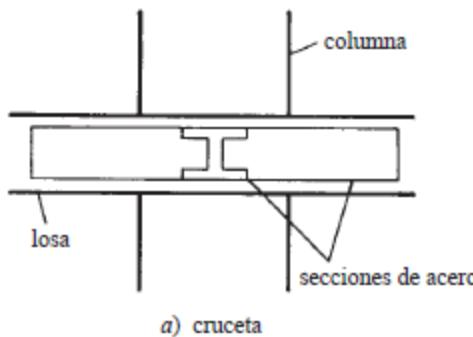
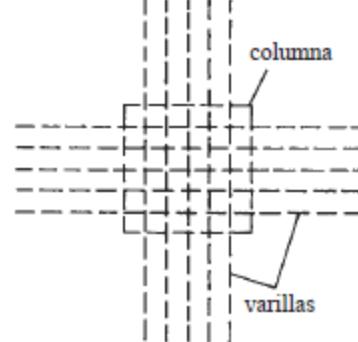
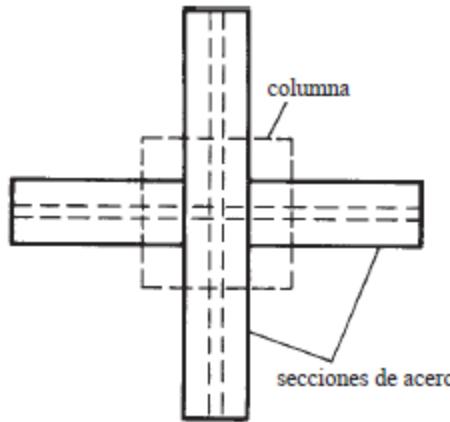
Las placas planas son las más adecuadas para un tramo de 30 a 48 pies y cargas vivas entre 80 a 150lb/pie².

Soportan cargas más pesadas que las placas planas y tienen atractivos techos de exposición. El encofrado, incluido el uso de vanos, es bastante caro.

Resistencia por Cortante

En las losas en dos direcciones soportadas por vigas o muros, las fuerzas cortantes se calculan a una distancia d de las caras de los muros o vigas. El valor de ϕV_c es, como en el caso de vigas, $\phi 2\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$. Generalmente, la fuerza cortante no es un problema en este tipo de losas.

Refuerzo Adicional en Losas Planas

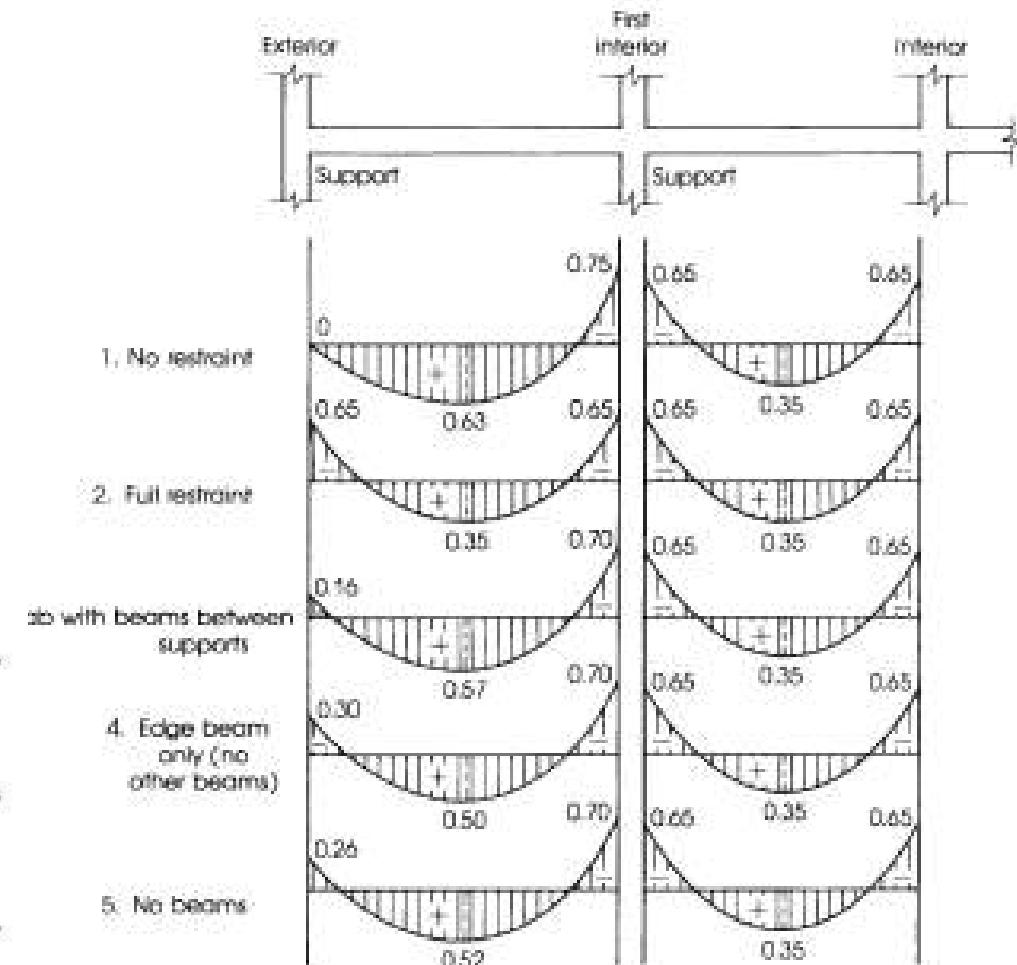
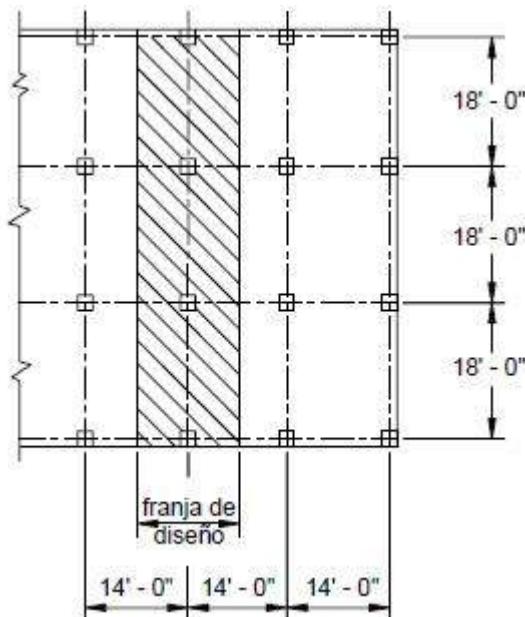
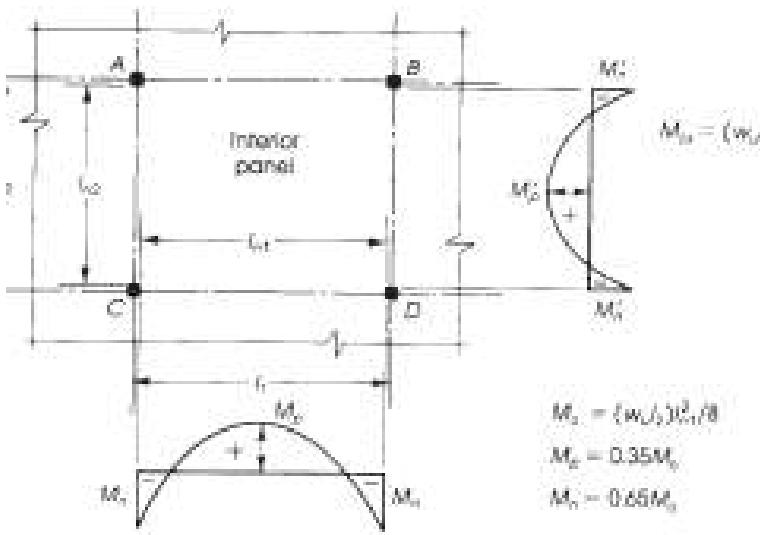


Hay dos tipos de cortante que deben considerarse en el diseño de losas y placas planas. Tales son los mismos dos tipos que se consideraron en las zapatas de columnas: el cortante directo (en un sentido) y el cortante por penetración (en dos sentidos). Para el análisis del cortante directo, se considera que la losa actúa como una viga ancha entre los apoyos. Las secciones críticas se toman a una distancia d de la cara de la columna o de su capitel. Para el cortante por penetración, la sección crítica se toma a una distancia $d/2$ de la cara de la columna, capitel o ábaco y la resistencia por cortante, igual que en las zapatas, es $\phi 4\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$.

Métodos de Diseño

Método Directo

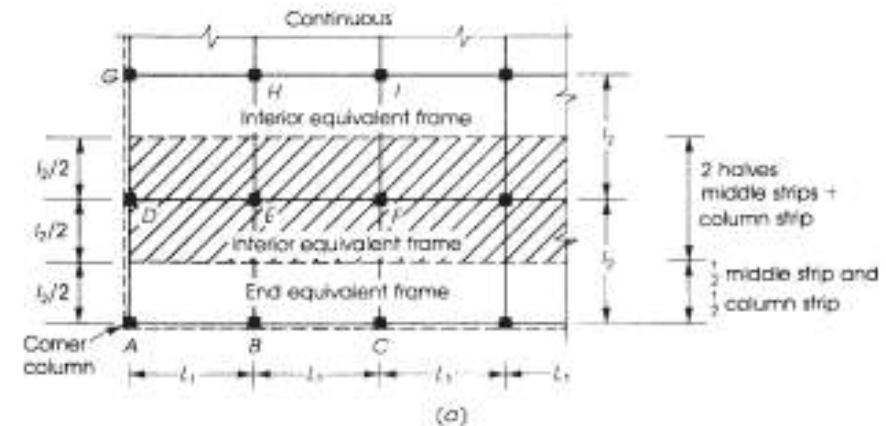
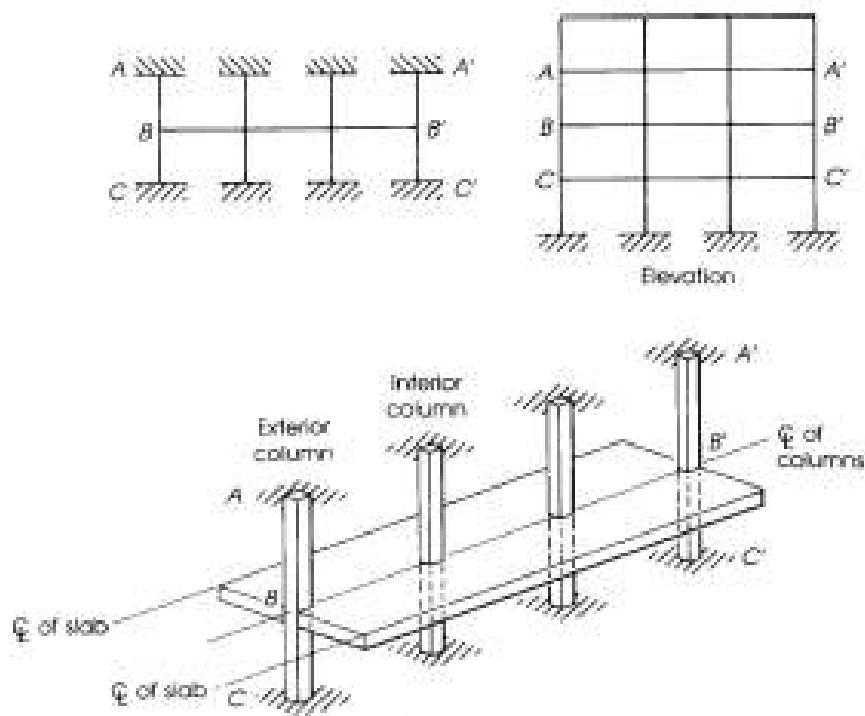
El código (13.6) da un procedimiento con el cual puede determinarse un conjunto de coeficientes de momento. En efecto, el método consiste en un análisis por distribución de momentos de un solo ciclo de la estructura con base en *a*) las rigideces por flexión estimadas de las losas, vigas (si existen) y columnas y *b*) las rigideces por torsión de las losas y vigas (si existen) transversales a la dirección en que los momentos por flexión están siendo determinados. Algunos tipos de coeficientes de momentos se han usado satisfactoriamente por muchos años en el diseño de losas. Sin embargo, no conducen a resultados satisfactorios en losas con dimensiones y patrones de carga asimétricos.



Métodos de Diseño

Método del Portal Equivalente

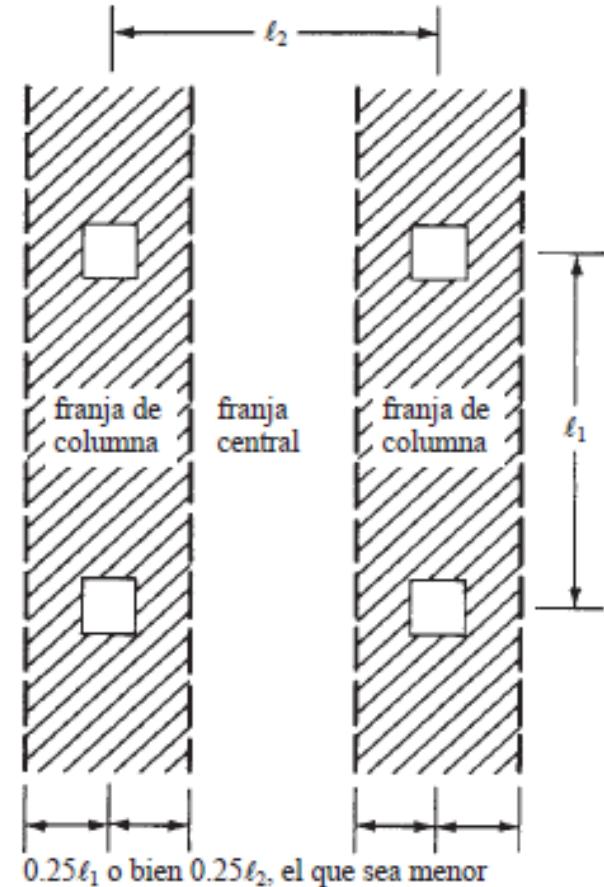
En este método, una porción de la estructura se considera aislada, como se muestra en la figura 16.2 y se analiza de manera parecida a como se trató el marco del edificio del ejemplo 14.2. En este método se usan las mismas rigideces que se usaron en el método directo de diseño. El método del marco equivalente, que es muy satisfactorio para marcos simétricos, así como para estructuras de dimensiones o cargas no comunes, se presenta en el capítulo 17 de este libro.



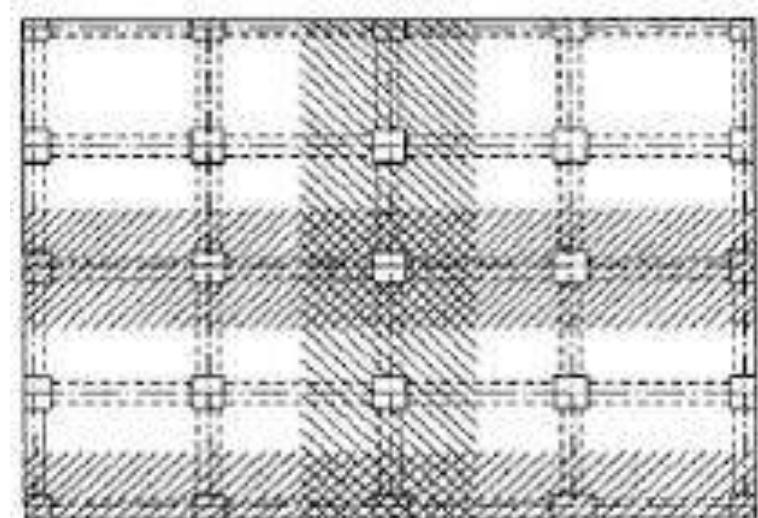
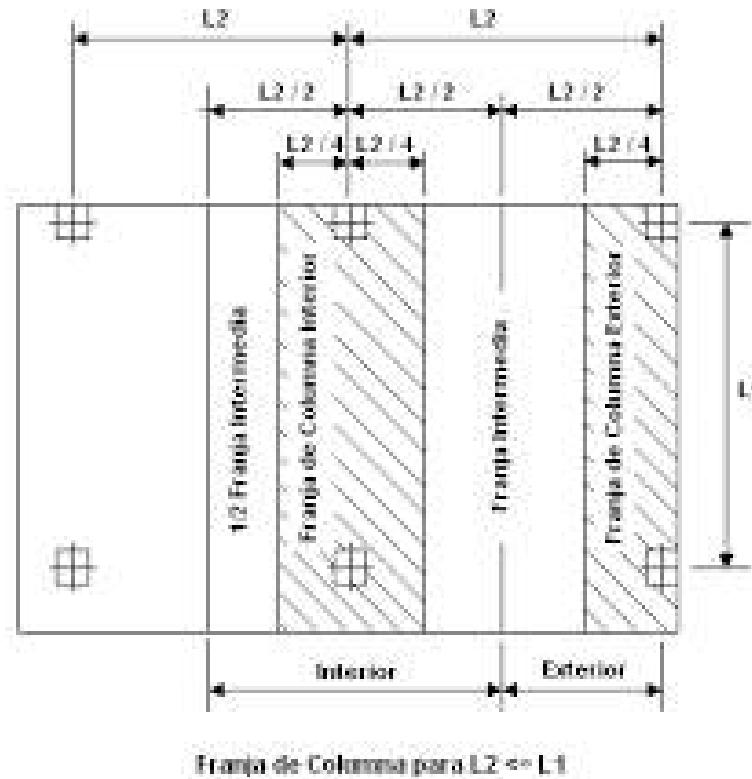
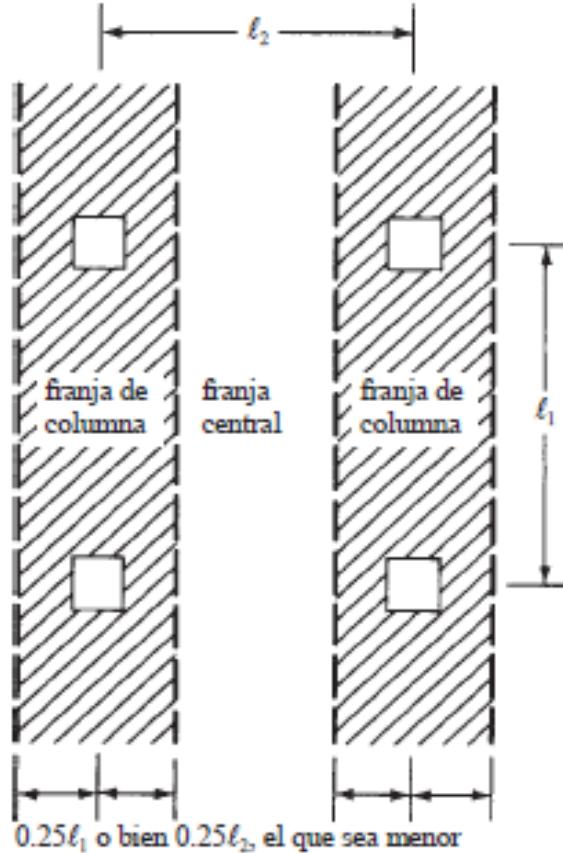
Limitaciones del Método Directo

1. Tiene que haber por lo menos tres claros continuos en cada dirección.
2. Los tableros deben ser rectangulares, con la longitud del lado mayor de cualquier tablero no mayor que 2.0 veces la longitud del lado menor, midiendo las longitudes de centro a centro de los apoyos.
3. Las longitudes de claros sucesivos en cualquier dirección no deben diferir en más de un tercio del claro más grande.
4. Las columnas no deben estar situadas con una excentricidad mayor que 10% de la longitud del claro en la dirección de la excentricidad desde cualquier eje entre las líneas centrales de columnas sucesivas.
5. La carga viva no factorizada no deberá ser mayor que dos veces la carga muerta no factorizada. Todas las cargas deben ser de gravedad y deben estar distribuidas uniformemente sobre un tablero completo.
6. Si un tablero está soportado en todos sus lados por vigas, la rigidez relativa de esas vigas en las dos direcciones perpendiculares, determinada con la siguiente expresión, no deberá ser menor que 0.2 ni mayor que 5.0.

$$\frac{\alpha_{f1} \ell_2^2}{\alpha_{f2} \ell_1^2}$$



Franja de Columna y Franja Transversal



Limitaciones de Espesor y Requisitos de Rigidez

Espesor mínimo para losas sin vigas

Esfuerzo de fluencia, f_y , lb/plg ^{2*}	Sin ábacos [†]		Con ábacos [†]			
	Tableros exteriores		Tableros interiores	Tableros exteriores		Tableros interiores
	Sin vigas de borde	Con vigas de borde [‡]		Sin vigas de borde	Con vigas de borde [‡]	
40 000	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{40}$	$\frac{\ell_n}{40}$
60 000	$\frac{\ell_n}{30}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$
75 000	$\frac{\ell_n}{28}$	$\frac{\ell_n}{31}$	$\frac{\ell_n}{31}$	$\frac{\ell_n}{31}$	$\frac{\ell_n}{34}$	$\frac{\ell_n}{34}$

Los valores seleccionados de la tabla deben ser mayores que:

1. Losas sin ábacos en tableros, 5 plg.
2. Espesores de esas losas con ábacos fuera de los tableros, 4 plg.

Relación de rigidez a flexión

$$\alpha_f = \frac{E_{cb}I_b}{E_{cs}I_s}$$

Donde

E_{cb} = módulo de elasticidad del concreto de la viga

E_{cs} = módulo de elasticidad del concreto de la columna

I_b = momento de inercia total respecto al eje centroidal de una sección formada por la viga y la losa a cada lado de la viga, que se extiende a una distancia igual a la proyección de la viga arriba o debajo de la losa (la que sea mayor) pero sin exceder cuatro veces el espesor de la losa (ACI 13.2.4)

I_s = momento de inercia de la sección total de la losa respecto al eje centroidal e igual a $h^3/12$ veces el ancho de la losa, donde el ancho es el mismo que para α .

*Para valores de esfuerzos de fluencia del acero de refuerzo entre los valores dados en la tabla, el espesor mínimo se determinará por interpolación lineal.

[†]Los ábacos se definen en las secciones 13.3.7 y 13.2.5 del ACI.

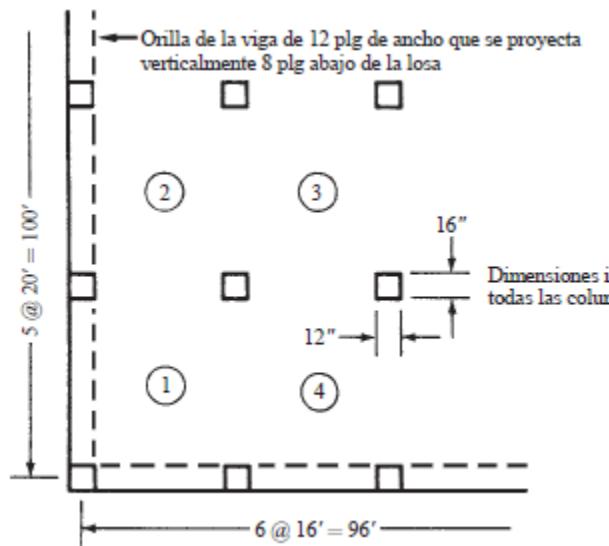
[‡]Losas con vigas entre columnas a lo largo de bordes exteriores. El valor de α_f para la viga de borde no será menor que 0.8.

[§]Para construcción en dos direcciones ℓ_n es la longitud del claro libre en la dirección larga, medida cara a cara de los apoyos en las losas sin vigas y cara a cara de las vigas u otros apoyos en otros casos.

Para losas planas $\alpha=0$

EJEMPLO 16.1

Usando el código ACI, determinar el espesor total mínimo permisible requerido para las losas en los tableros ③ y ② para el sistema de piso mostrado en la figura 16.6. Se usan vigas de borde alrededor del perímetro del edificio, que son de 12 plg de ancho y se extienden verticalmente 8 plg debajo de la losa, como se muestra en la figura 16.7. Se extienden también 8 plg dentro de la losa como lo requiere la sección 13.2.4 del ACI. No se usarán ábacos y el concreto en la losa es el mismo que el usado en las vigas de borde. $f_y = 60\,000 \text{ lb/plg}^2$.



SOLUCIÓN Para el tablero interior ③

$$\alpha_f = 0 \text{ (ya que los tableros interiores no tienen vigas perimetrales)}$$

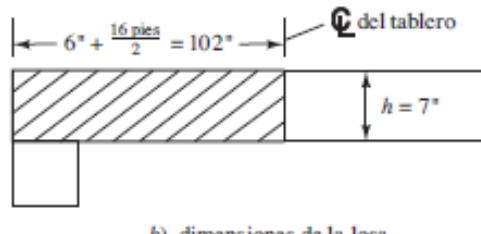
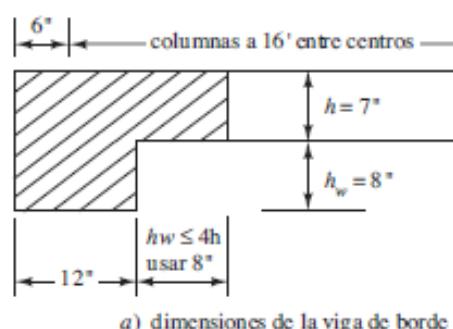
$$l_a = 20 - \frac{16}{12} = 18.67 \text{ pies (distancia libre entre columnas)}$$

$$h_{\min} \text{ de la tabla 16.1} = \frac{l_a}{33}$$

$$= \frac{18.67}{33} = 0.566 \text{ pie} = 0.79 \text{ plg}$$

De acuerdo con la sección 9.5.3.2 no puede ser menor que 5 plg

Pruebe con 7 plg



Para el tablero exterior ②

Suponemos $h = 7$ plg y calculamos α_f con referencia a la figura 16.7(a). El centroide de la sección hachurada de la viga se localiza por estática a 6.55 plg desde la parte superior.

$$I_b = \left(\frac{1}{3}\right)(20)(6.55)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)(12)(8.45)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)(8)(0.45)^3$$

$$= 4\,287 \text{ plg}^4$$

$$I_x = \left(\frac{1}{12}\right)(102)(7)^3 = 2\,915.5 \quad \text{Véase la figura 16.7(b)}$$

$$\alpha = \frac{EI_b}{EI_x} = \frac{(E)(4\,287)}{(E)(2\,915.5)} = 1.47 > 0.8$$

∴ Se trata de una viga de borde como se define en el pie de página de la tabla 16.1.

$$h_{\min} = \frac{l_a}{33} = \frac{20 - \frac{16}{12}}{33} = 0.566 \text{ pie} = 6.79 \text{ plg}$$

Intentar con 7 plg

Espesor mínimo para losas con vigas

1. Para $\alpha_{fm} \leq 0.2$, los espesores mínimos se obtienen como se hizo para las losas sin vigas interiores, con claros entre sus soportes.
2. Para $0.2 \leq \alpha_{fm} \leq 2.0$, el espesor no debe ser menor que 5 plg o bien

$$h = \frac{\ell_n \left(0.8 + \frac{f_y}{200\,000} \right)}{36 + 5\beta(\alpha_{fm} - 0.2)} \quad (\text{Ecuación 9-12, ACI})$$

3. Para $\alpha_{fm} > 2.0$, el espesor no debe ser menor que 3.5 plg o bien

$$h = \frac{\ell_n \left(0.8 + \frac{f_y}{200\,000} \right)}{36 + 9\beta} \quad (\text{Ecuación 9-13, ACI})$$

donde ℓ_n y f_y están en pulgadas y en lb/plg², respectivamente.

ℓ_n = el claro libre en la dirección larga, medido cara a cara, de a) las columnas para losas sin vigas y b) las vigas para losas con vigas

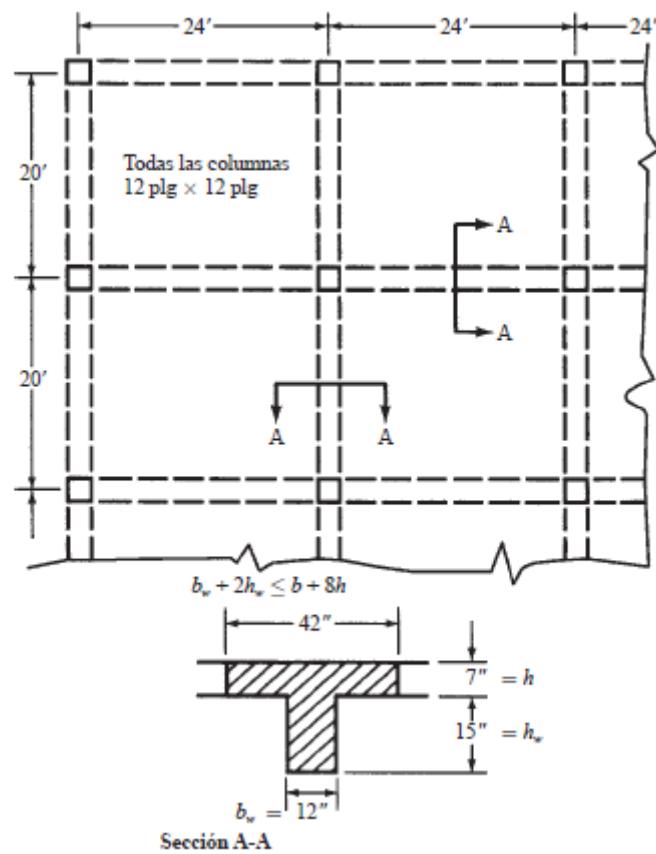
β = relación del claro libre largo al corto

α_{fm} = valor promedio de las relaciones de las rigideces de viga a losa, en todos los lados de un tablero

***“Para tableros con bordes discontinuos
 α debe ser mayor que 0.8 o los espesores
calculados con las ecuaciones 9-12 y
9-13 se incrementan en un 10%”***

EJEMPLO 16.2

Se ha supuesto que la losa en dos direcciones mostrada en la figura 16.8 tiene un espesor de 7 plg. La sección A-A en la figura muestra la sección transversal de la viga. Revise las ecuaciones ACI para determinar si el espesor de la losa es satisfactorio para un tablero interior. $f'_c = 3\,000 \text{ lb/plg}^2$, $f_y = 60\,000 \text{ lb/plg}^2$, concreto de peso normal.



SOLUCIÓN

(Usando el mismo concreto para vigas y losas)

Cálculo de α_1 para el claro largo (horizontal) para las vigas interiores

I_s = momento de inercia total de la losa de 20 pies de ancho

$$= \left(\frac{1}{12}\right)(12 \times 20)(7)^3 = 6\,860 \text{ plg}^4$$

I_b = momento de inercia total I de la sección transversal de la viga T mostrada en la figura 16.8 respecto al eje centroidal = 18 060 plg⁴

$$\alpha_1 = \frac{E I_b}{E I_s} = \frac{(E)(18\,060)}{(E)(6\,860)} = 2.63$$

Cálculo de α_2 para vigas interiores largas

$$I_s \text{ para la losa de 24 pies de ancho} = \left(\frac{1}{12}\right)(12 \times 24)(7)^3 = 8\,232 \text{ plg}^4$$

$$h = \frac{\ell_n \left(0.8 + \frac{f_y}{200\,000} \right)}{36 + 9\beta}$$

$$\ell_{n\text{largo}} = 24 - 1 = 23 \text{ pie}$$

$$\ell_{n\text{corto}} = 20 - 1 = 19 \text{ pie}$$

$$\beta = \frac{23}{19} = 1.21$$

$$h = \frac{(23) \left(0.8 + \frac{60\,000}{200\,000} \right)}{36 + (9)(1.21)} = 0.540 \text{ pie} = 6.47 \text{ plg}$$

Usar losa de 7 plg

Determinación del espesor de la losa según la sección 9.5.3.3 del ACI

$$\alpha_{fm} = 2.41 > 2$$

∴ Use la ecuación 9-13 del ACI

Distribución de Momento en Losas

$$M_o = \frac{(q_u \ell_2)(\ell_1)^2}{8}$$

En esta expresión ℓ_1 es la longitud del claro, centro a centro, de soportes en la dirección en la que se toman los momentos y ℓ_2 es la longitud del claro transversal a ℓ_1 , medida también entre centros de soportes.

$$M_f = f_1 f_2 M_o$$

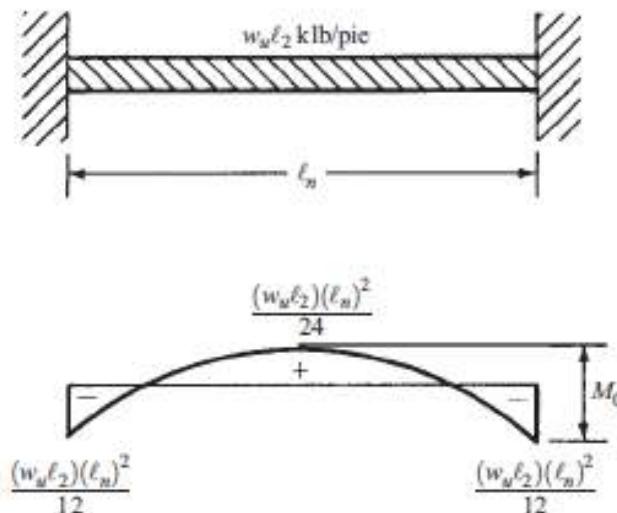
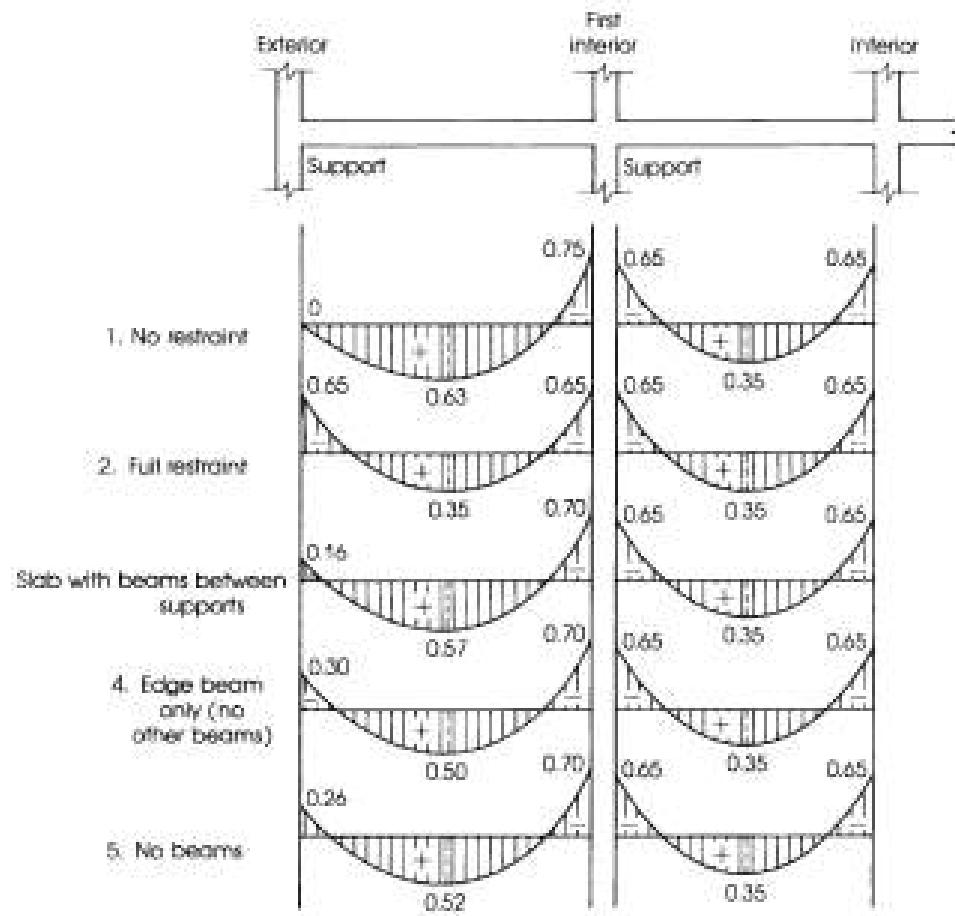
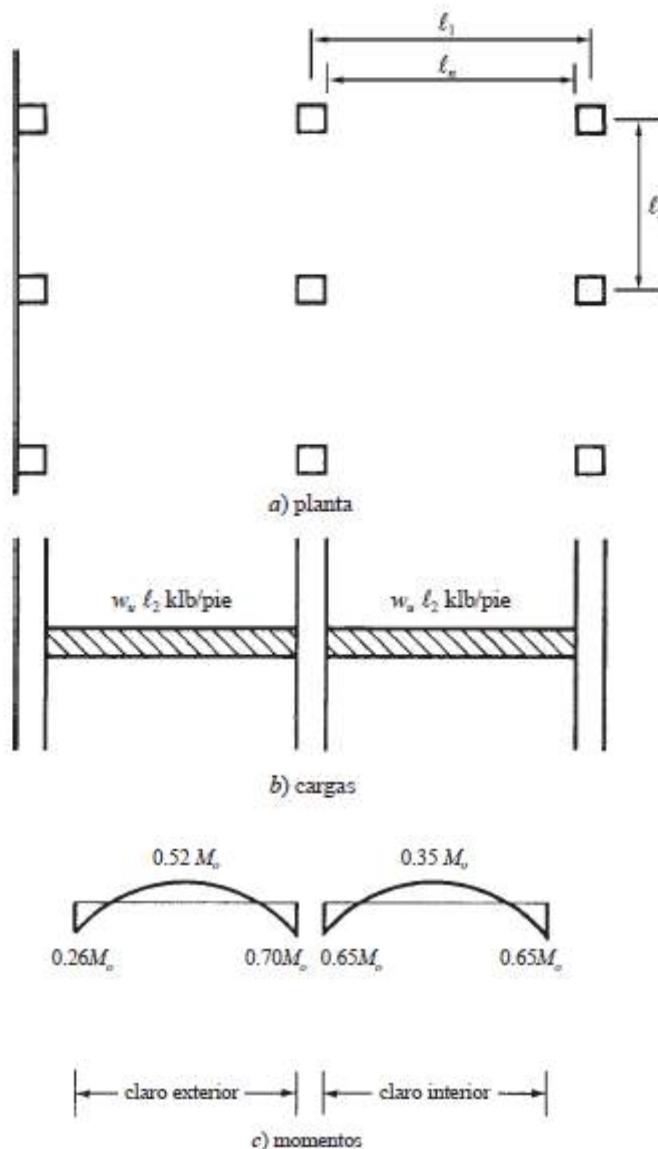


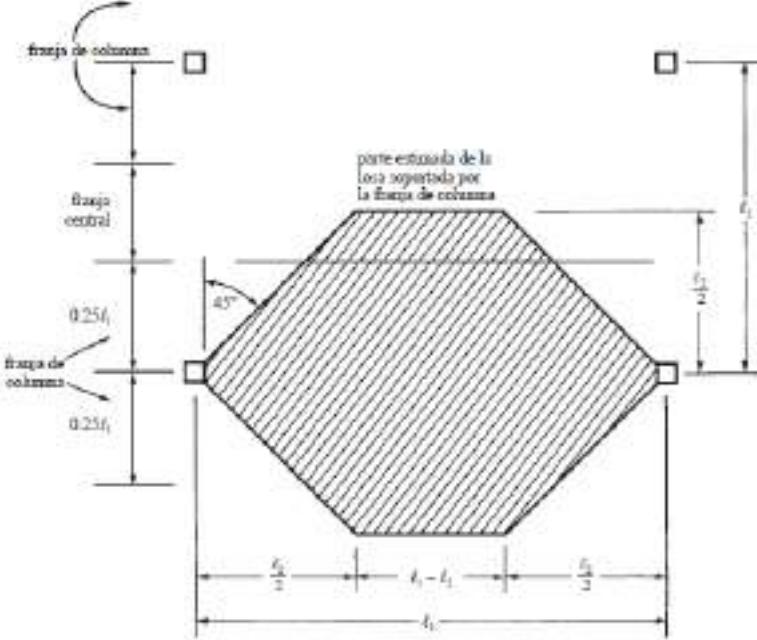
Tabla de factor de distribución primario de losas continuas (f_1)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	Borde exterior no restringido	Losa con vigas entre todos los soportes	Sin viga de borde	Con viga de borde	Borde exterior totalmente restringido
Momento interior factorizado negativo	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65
Momento factorizado positivo	0.63	0.57	0.52	0.50	0.35
Momento exterior factorizado negativo	0	0.16	0.26	0.30	0.65

Ejemplo de Distribución en Losa Plana sin Vigas de Borde



Distribución de Momento franjas de columnas y losas (factor f_2)



$$\%_{\text{col ext}}^- = 100 - 10\beta_t + 12\left(\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1}\right)\left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

$$\%^+ = 60 + 30\left(\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1}\right)\left(1.5 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

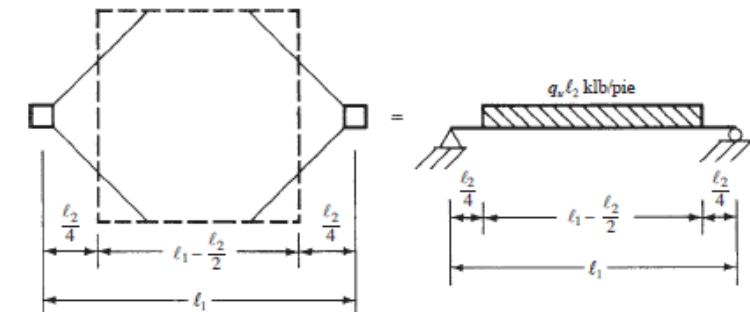
Tabla 16.3 Porcentajes del momento interior negativo de diseño que debe resistir la franja de columnas.

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	0.5	1.0	2.0
$\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1} = 0$	75	75	75
$\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	90	75	45

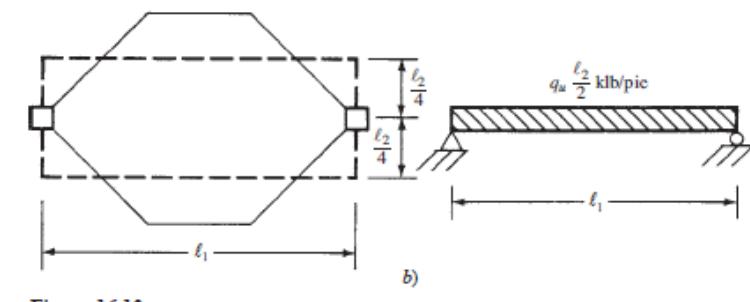
$$\%_{\text{col int}}^- = 75 + 30\left(\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1}\right)\left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

Tabla 16.4 Porcentajes del momento exterior negativo de diseño que debe resistir una franja de columnas.

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$		0.5	1.0	2.0
$\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1} = 0$	$\beta_t = 0$	100	100	100
	$\beta_t \geq 2.5$	75	75	75
$\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	$\beta_t = 0$	100	100	100
	$\beta_t \geq 2.5$	90	75	45



a)



b)

Tabla 16.5 Porcentajes de momento positivo de diseño que debe resistir la franja de columnas.

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	0.5	1.0	2.0
$\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1} = 0$	60	60	60
$\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	90	75	45

En las tres ecuaciones anteriores, si $\beta_t > 2.5$, use 2.5 y si $\alpha_{f1}\ell_2/\ell_1 > 1$, use 1.

En la sección 13.6.5, el código requiere que a la viga se le asigne 85% del momento de la franja de columnas si $\alpha_{f1}(\ell_2/\ell_1) \geq 1.0$. Si $\alpha_{f1}(\ell_2/\ell_1)$ tiene un valor entre 1.0 y 0, el momento asignado a la viga se determina por interpolación lineal entre 85 y 0%. La parte del momento no asignado a la viga se asigna a la losa en la franja de columnas.

$$\%_{\text{col int}}^- = 75 + 30\left(\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1}\right)\left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

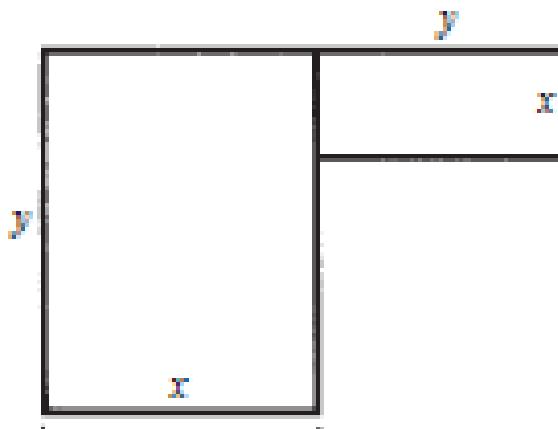
$$\%_{\text{col ext}}^- = 100 - 10\beta_t + 12\left(\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1}\right)\left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

$$\%^+ = 60 + 30\left(\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1}\right)\left(1.5 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

Constante de Rígidez Torsional β_t

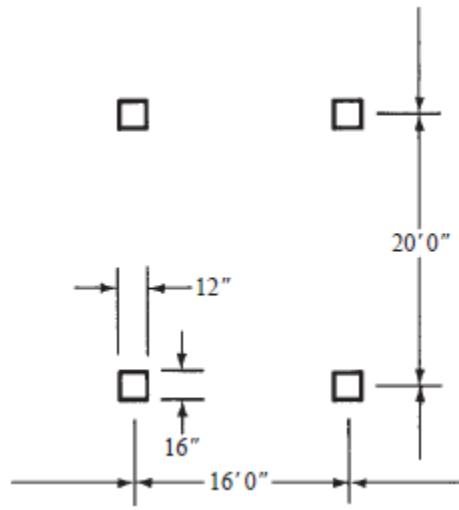
$$\beta_t = \frac{E_{ch}C}{2E_{cr}I_s}$$

$$C = \Sigma \left(1 - 0.63 \frac{x}{y}\right) \frac{x^3 y}{3}$$



EJEMPLO 16.3

Diseñar una placa interior plana para la estructura considerada en el ejemplo 16.1. Esta placa se muestra en la figura 16.13. Supóngase una carga viva de servicio igual a 80 lb/pie², una carga muerta de servicio igual a 110 lb/pie² (incluyendo el peso de la losa), $f_y = 60\,000$ lb/plg², $f'_c = 3\,000$ lb/plg², concreto de peso normal y altura de las columnas igual a 12 pies.

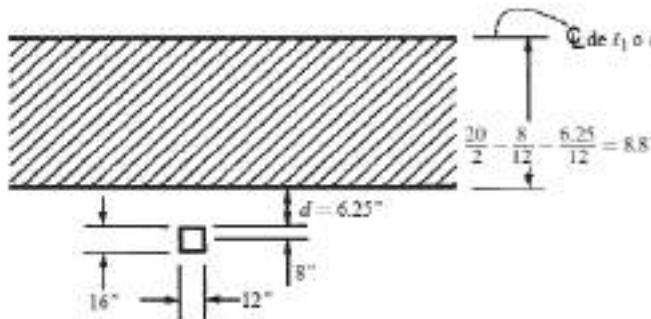


SOLUCIÓN

Estimar el espesor de la losa

Cuando se revisa el cortante, la losa de 7 plg que se estimó en el ejemplo 16.1 no es suficiente. Una alternativa es incrementar f'_c a un valor mayor que 3 000 lb/plg², el cual es una resistencia bastante baja. Sin embargo, incrementaremos el espesor de la losa. Los cálculos para la losa de 7 plg de espesor son los mismos que los que siguen para el espesor de losa de 7.5 plg, con la excepción del cambio de espesor de la losa.

: Probar con una losa de 7½ plg



Determinar el espesor requerido por cortante

Usando d para el cortante igual al promedio estimado de los valores d en las dos direcciones obtenemos

$$d = 7.50'' - \frac{3''}{4} \text{ recubrimiento} - 0.50'' = 6.25''$$

$$q_u = (1.2)(110) + (1.6)(80) = 260 \text{ lb/pie}^2$$

Revisar el cortante por penetración alrededor de la columna

$$b_o = (2)(16 + 6.25) + (2)(12 + 6.25) = 81''$$

$$V_{u2} = \left[(20)(16) - \left(\frac{16 + 6.25}{12} \right) \left(\frac{12 + 6.25}{12} \right) \right] (0.260) \\ = 82.47 \text{ klb} = 82\,470 \text{ lb}$$

$$\phi V_c = (0.75)(1.0)(4\sqrt{3\,000})(81)(6.25)$$

$$= 83\,185 \text{ lb} > 82\,470 \text{ lb}$$

OK

Revisar el cortante directo o cortante de viga (rara vez controla en los sistemas de piso de dos direcciones)

Usando las dimensiones mostradas en la figura 16.14 obtenemos

$$V_{u1} = (8.81)(260) = 2\,291 \text{ lb para un ancho de } 12''$$

$$\phi V_c = \phi 2\lambda\sqrt{f'_c}bd$$

$$= (0.75)(1.0)(2\sqrt{3\,000})(12)(6.25)$$

$$= 6\,162 \text{ lb} > 2\,291 \text{ lb}$$

OK

Use $h = 7\frac{1}{2}$

Calcular los momentos estáticos en las direcciones larga y corta

$$M_{ot} = \frac{q_u \ell_2 \ell_n^2}{8} = \frac{(0.260)(16)(20 - \frac{16}{12})^2}{8} = 181.2 \text{ pie-klb}$$

$$M_{os} = \frac{q_u \ell_1 \ell_n^2}{8} = \frac{(0.260)(20)(16 - \frac{12}{12})^2}{8} = 146.2 \text{ pie-klb}$$

Asignar los momentos estáticos a las franjas de columnas y franja central y seleccionar el refuerzo

El momento estático se divide en momentos positivo y negativo de acuerdo con el artículo 13.6.2 del ACI. Ya que éste es un tablero interior, el 65% del momento estático total es negativo y el 35% es positivo. Véase también el lado derecho de la figura 16.10(c). Si este ejemplo fuera un claro extremo, entonces el momento estático total se dividiría en valores positivo y negativo de acuerdo con la tabla 16.2.

El siguiente paso es dividir los momentos determinados en el párrafo anterior entre las franjas de columnas y la central. Nuevamente, como éste es un tablero interior, es aplicable la tabla 16.3. Como $\alpha_f l_1 = 0$ (no hay vigas interiores), 75% del momento va a la franja de columnas. Este valor es independiente de ℓ_2/ℓ_1 para el caso en el cual no hay vigas interiores. El 25% restante del momento se asigna a la franja central, la mitad en cada lado de la franja de columnas. Se usa la tabla 16.5 para determinar qué tanto del momento positivo total se asigna a la franja de columnas. En este caso, como $\alpha_f l_1 = 0$, 60% va a la franja de columnas y el restante 40% se asigna a la franja central, cada mitad en un lado de la franja de columnas.

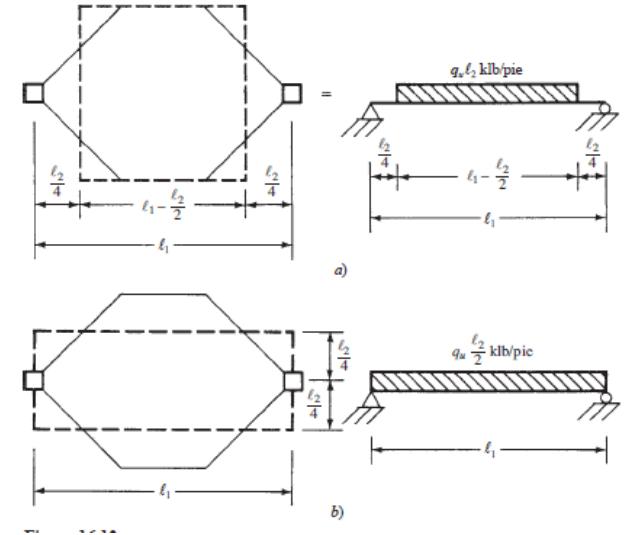
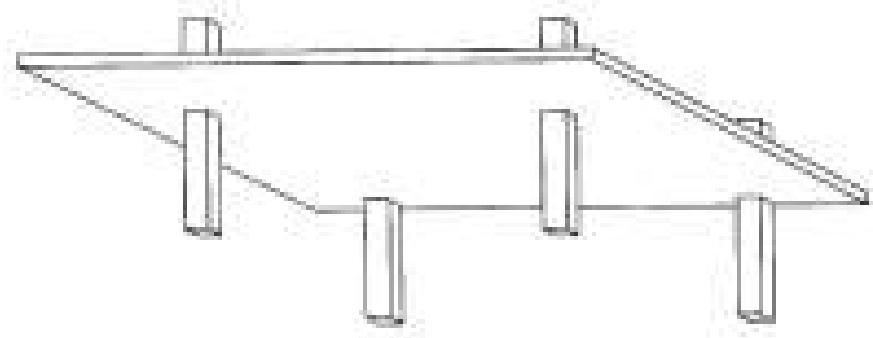
Estos cálculos pueden arreglarse convenientemente, como en la tabla 16.6. Esta tabla es muy similar a la que se usa para el diseño de la losa continua en una dirección del capítulo 14. Para ayudar en la interpretación de la tabla 16.6, se estudiarán los resultados numéricos de la primera columna. El primero es la determinación de M_u . En este cálculo se usa el factor 0.65 del artículo 13.6.2 del ACI y el factor 0.75 de la tabla 16.3, ambos aplicados al momento estático total de 181.2 pie-klb. La división de este valor de $M_u = -88.4$ pie-klb entre ϕbd^2 ($\phi = 0.9$, $b = 8$ pies = 96 plg, $d = 6.5$ plg) conduce a $M_u/\phi bd^2 = 290.6$ lb/plg². De la tabla A12, $\rho = 0.00516$ (por interpolación). *El área del acero de refuerzo en la franja de columnas es $A_s = \rho bd = 0.00516(96)(6.5) = 3.22$ plg².* Se escoge una selección de varilla de 17 varillas del #4, teniendo un A_s total = 3.34 plg². Los conceptos restantes en la tabla 16.6 siguen un procedimiento similar.

Al seleccionar de las tablas los diferentes porcentajes de momentos para las franjas de columnas e intermedias de esta losa observe que $\alpha_f = 0$.

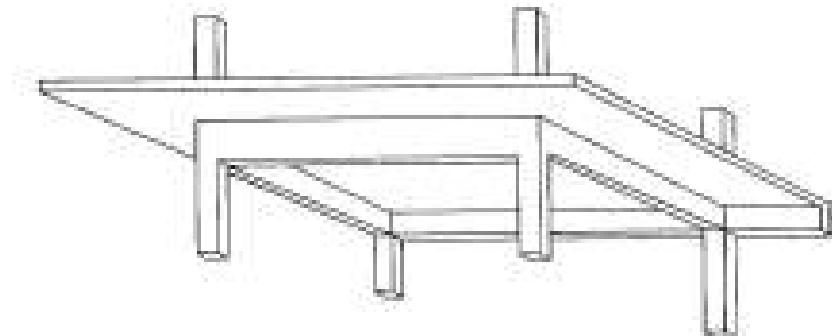
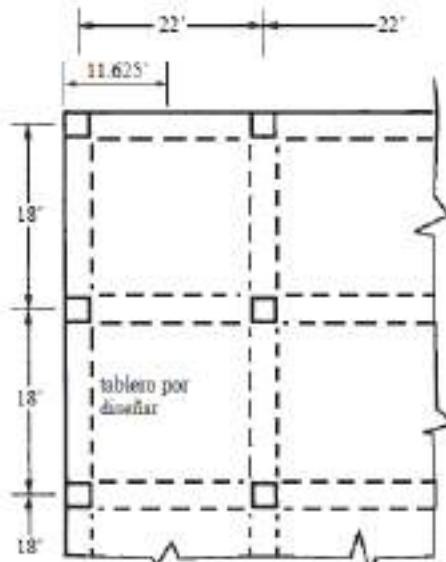
	Claro largo (d estimada = 6.50")				Claro corto (d estimada = 6.00")			
	Franja de columna (8')		Franja central (8')		Franja de columna (8')		Franja central (12')	
	-	+	-	+	-	+	-	+
M_u	(0.65)(0.75) (181.2) = -88.4 pie-klb	(0.35)(0.60) (181.2) = +38.1	(0.65)(181.2) -88.4 = -29.4 pie-klb	(0.35)(181.2) -38.1 = +25.3 pie-klb	(0.65)(0.75) (146.2) = -71.3 pie-klb	(0.35)(0.60) (146.2) = +30.7 pie-klb	(0.65)(146.2) -71.3 = -23.8 pie-klb	(0.35)(146.2) -30.7 = +20.5 pie-klb
$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	290.6 lb/plg ²	125.2 lb/plg ²	97.6 lb/plg ²	83.2 lb/plg ²	275.1 lb/plg ²	118.4 lb/plg ²	61.2	52.7 lb/plg ²
ρ^*	0.00516bd	0.00214bd	0.0018bh	0.0018bh	0.00486bd	0.00202bd	0.0018bh	0.0018bh
A_s	3.22 plg ²	1.34 plg ²	1.30 plg ²	1.30 plg ²	2.80 plg ²	1.16 plg ²	1.94 plg ²	1.94 plg ²
Varillas seleccionadas	17 #4	7 #4	7 #4	7 #4	15 #4	6 #4	10 #4	10 #4

*Los valores no deberán ser menores que los mínimos por temperatura y contracción de 0.0018bh.

Activar Wind.



Diseño de Losas en Dos Direcciones sin Vigas y con vigas



Distribución de Momento en Losas

$$M_o = \frac{(q_u \ell_2)(\ell_1)^2}{8}$$

En esta expresión ℓ_1 es la longitud del claro, centro a centro, de soportes en la dirección en la que se toman los momentos y ℓ_2 es la longitud del claro transversal a ℓ_1 , medida también entre centros de soportes.

$$M_f = f_1 f_2 M_o$$

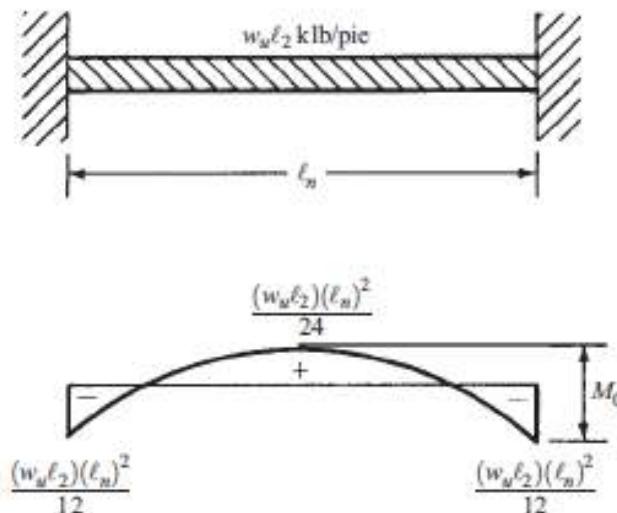
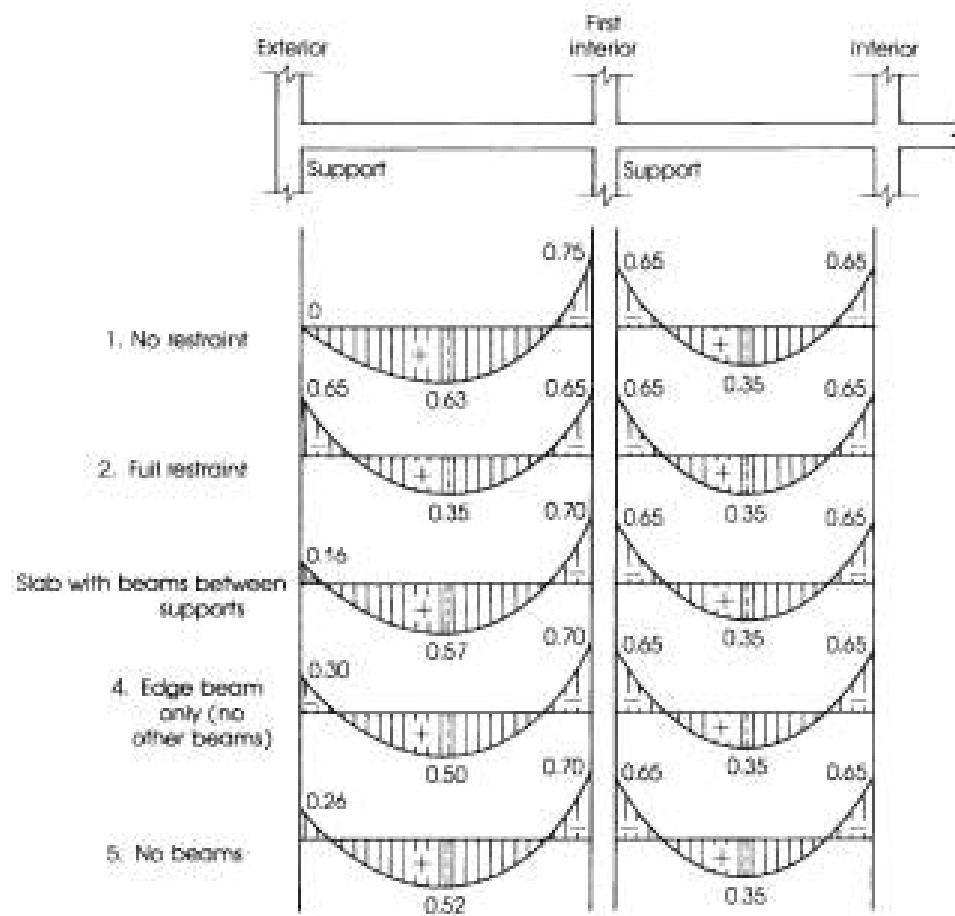
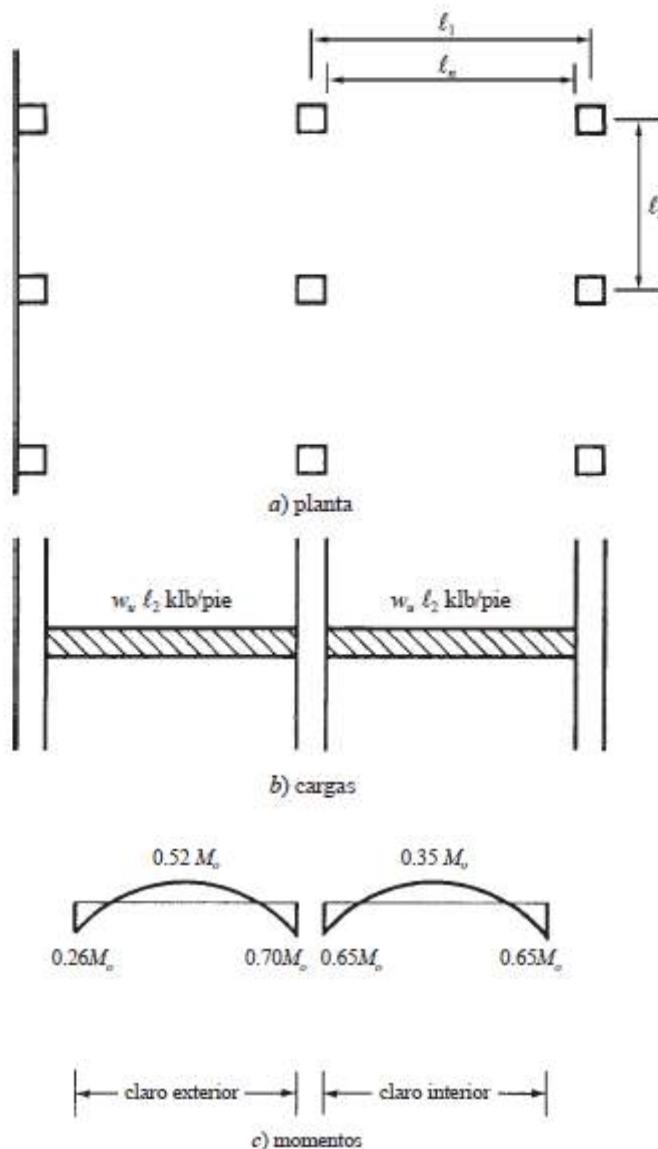


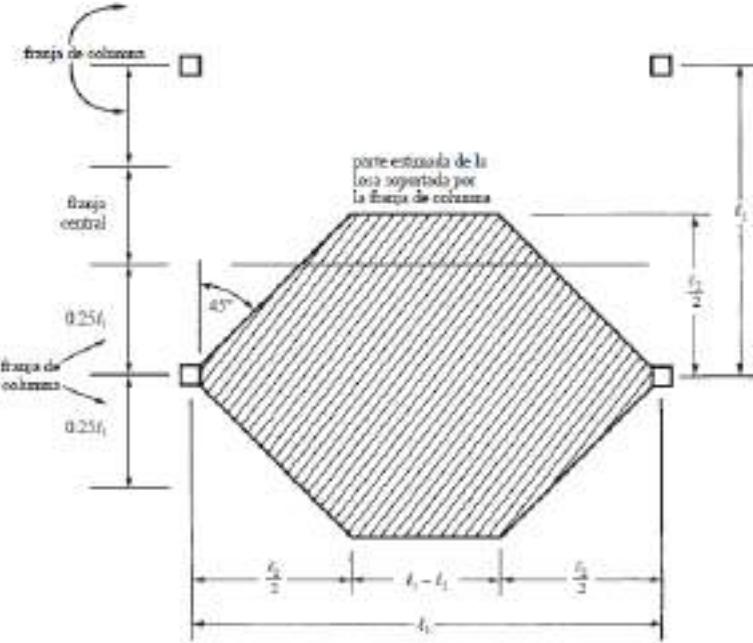
Tabla de factor de distribución primario de losas continuas (f_1)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	Borde exterior no restringido	Losa con vigas entre todos los soportes	Sin viga de borde	Con viga de borde	Borde exterior totalmente restringido
Momento interior factorizado negativo	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65
Momento factorizado positivo	0.63	0.57	0.52	0.50	0.35
Momento exterior factorizado negativo	0	0.16	0.26	0.30	0.65

Ejemplo de Distribución en Losa Plana sin Vigas de Borde



Distribución de Momento franjas de columnas y losas (factor f_2)



$$\%_{\text{col ext}}^- = 100 - 10\beta_t + 12\left(\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1}\right)\left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

$$\%^+ = 60 + 30\left(\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1}\right)\left(1.5 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

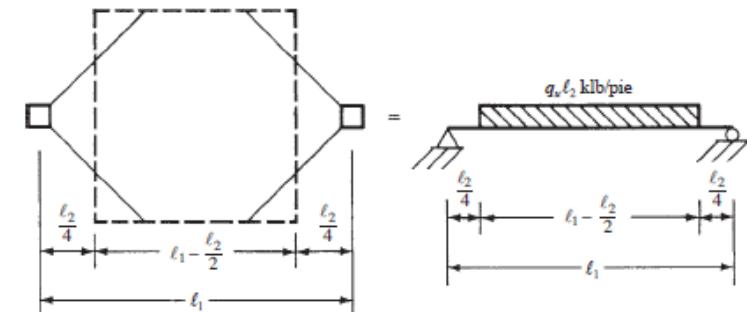
Tabla 16.3 Porcentajes del momento interior negativo de diseño que debe resistir la franja de columnas.

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	0.5	1.0	2.0
$\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1} = 0$	75	75	75
$\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	90	75	45

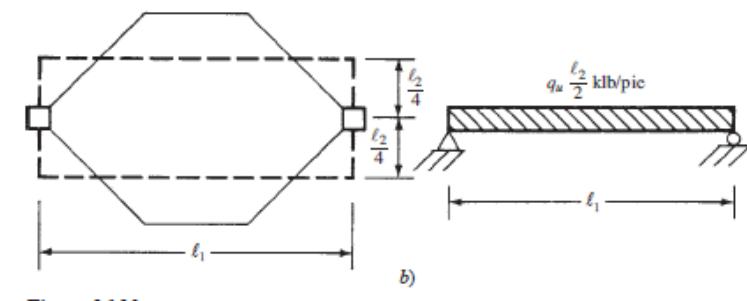
$$\%_{\text{col int}}^- = 75 + 30\left(\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1}\right)\left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

Tabla 16.4 Porcentajes del momento exterior negativo de diseño que debe resistir una franja de columnas.

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$		0.5	1.0	2.0
$\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1} = 0$	$\beta_t = 0$	100	100	100
	$\beta_t \geq 2.5$	75	75	75
$\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	$\beta_t = 0$	100	100	100
	$\beta_t \geq 2.5$	90	75	45



a)



b)

Tabla 16.5 Porcentajes de momento positivo de diseño que debe resistir la franja de columnas.

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	0.5	1.0	2.0
$\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1} = 0$	60	60	60
	90	75	45
$\frac{\alpha_f 1 \ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	90	75	45
	90	75	45

En las tres ecuaciones anteriores, si $\beta_t > 2.5$, use 2.5 y si $\alpha_{f1}\ell_2/\ell_1 > 1$, use 1.

En la sección 13.6.5, el código requiere que a la viga se le asigne 85% del momento de la franja de columnas si $\alpha_{f1}(\ell_2/\ell_1) \geq 1.0$. Si $\alpha_{f1}(\ell_2/\ell_1)$ tiene un valor entre 1.0 y 0, el momento asignado a la viga se determina por interpolación lineal entre 85 y 0%. La parte del momento no asignado a la viga se asigna a la losa en la franja de columnas.

$$\%_{\text{col int}}^- = 75 + 30\left(\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1}\right)\left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

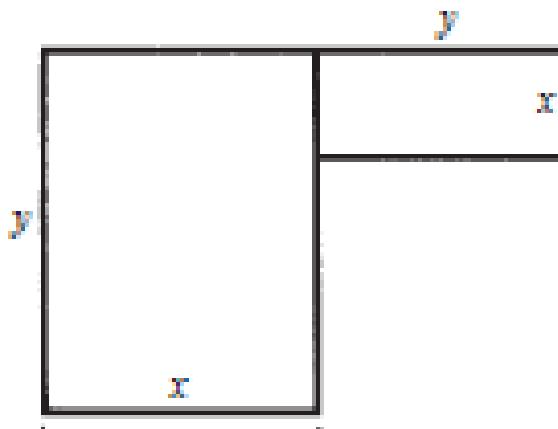
$$\%_{\text{col ext}}^- = 100 - 10\beta_t + 12\left(\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1}\right)\left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

$$\%^+ = 60 + 30\left(\frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1}\right)\left(1.5 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

Constante de Rígidez Torsional β_t

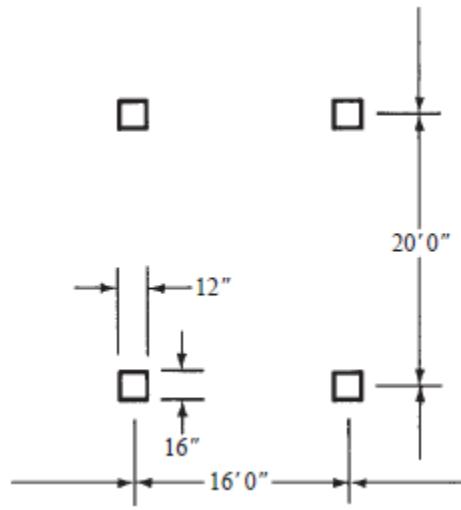
$$\beta_t = \frac{E_{ch}C}{2E_{cr}I_s}$$

$$C = \Sigma \left(1 - 0.63 \frac{x}{y}\right) \frac{x^3 y}{3}$$



EJEMPLO 16.3

Diseñar una placa interior plana para la estructura considerada en el ejemplo 16.1. Esta placa se muestra en la figura 16.13. Supóngase una carga viva de servicio igual a 80 lb/pie², una carga muerta de servicio igual a 110 lb/pie² (incluyendo el peso de la losa), $f_y = 60\,000$ lb/plg², $f'_c = 3\,000$ lb/plg², concreto de peso normal y altura de las columnas igual a 12 pies.

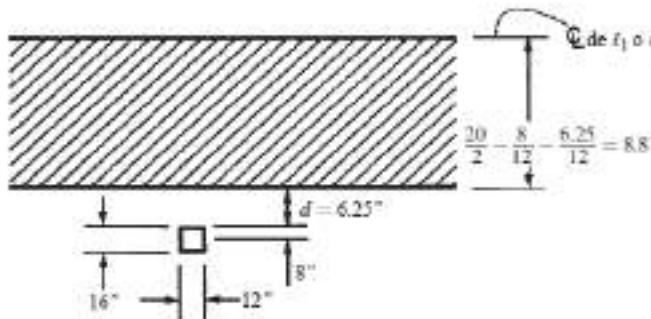


SOLUCIÓN

Estimar el espesor de la losa

Cuando se revisa el cortante, la losa de 7 plg que se estimó en el ejemplo 16.1 no es suficiente. Una alternativa es incrementar f'_c a un valor mayor que 3 000 lb/plg², el cual es una resistencia bastante baja. Sin embargo, incrementaremos el espesor de la losa. Los cálculos para la losa de 7 plg de espesor son los mismos que los que siguen para el espesor de losa de 7.5 plg, con la excepción del cambio de espesor de la losa.

: Probar con una losa de 7½ plg



Determinar el espesor requerido por cortante

Usando d para el cortante igual al promedio estimado de los valores d en las dos direcciones obtenemos

$$d = 7.50'' - \frac{3''}{4} \text{ recubrimiento} - 0.50'' = 6.25''$$

$$q_u = (1.2)(110) + (1.6)(80) = 260 \text{ lb/pie}^2$$

Revisar el cortante por penetración alrededor de la columna

$$b_o = (2)(16 + 6.25) + (2)(12 + 6.25) = 81''$$

$$V_{u2} = \left[(20)(16) - \left(\frac{16 + 6.25}{12} \right) \left(\frac{12 + 6.25}{12} \right) \right] (0.260) \\ = 82.47 \text{ klb} = 82\,470 \text{ lb}$$

$$\phi V_c = (0.75)(1.0)(4\sqrt{3\,000})(81)(6.25)$$

$$= 83\,185 \text{ lb} > 82\,470 \text{ lb}$$

OK

Revisar el cortante directo o cortante de viga (rara vez controla en los sistemas de piso de dos direcciones)

Usando las dimensiones mostradas en la figura 16.14 obtenemos

$$V_{u1} = (8.81)(260) = 2\,291 \text{ lb para un ancho de } 12''$$

$$\phi V_c = \phi 2\lambda\sqrt{f'_c}bd$$

$$= (0.75)(1.0)(2\sqrt{3\,000})(12)(6.25)$$

$$= 6\,162 \text{ lb} > 2\,291 \text{ lb}$$

OK

Use $h = 7\frac{1}{2}$

Calcular los momentos estáticos en las direcciones larga y corta

$$M_{ot} = \frac{q_u \ell_2 \ell_n^2}{8} = \frac{(0.260)(16)(20 - \frac{16}{12})^2}{8} = 181.2 \text{ pie-klb}$$

$$M_{os} = \frac{q_u \ell_1 \ell_n^2}{8} = \frac{(0.260)(20)(16 - \frac{12}{12})^2}{8} = 146.2 \text{ pie-klb}$$

Asignar los momentos estáticos a las franjas de columnas y franja central y seleccionar el refuerzo

El momento estático se divide en momentos positivo y negativo de acuerdo con el artículo 13.6.2 del ACI. Ya que éste es un tablero interior, el 65% del momento estático total es negativo y el 35% es positivo. Véase también el lado derecho de la figura 16.10(c). Si este ejemplo fuera un claro extremo, entonces el momento estático total se dividiría en valores positivo y negativo de acuerdo con la tabla 16.2.

El siguiente paso es dividir los momentos determinados en el párrafo anterior entre las franjas de columnas y la central. Nuevamente, como éste es un tablero interior, es aplicable la tabla 16.3. Como $\alpha_f l_1 = 0$ (no hay vigas interiores), 75% del momento va a la franja de columnas. Este valor es independiente de ℓ_2/ℓ_1 para el caso en el cual no hay vigas interiores. El 25% restante del momento se asigna a la franja central, la mitad en cada lado de la franja de columnas. Se usa la tabla 16.5 para determinar qué tanto del momento positivo total se asigna a la franja de columnas. En este caso, como $\alpha_f l_1 = 0$, 60% va a la franja de columnas y el restante 40% se asigna a la franja central, cada mitad en un lado de la franja de columnas.

Estos cálculos pueden arreglarse convenientemente, como en la tabla 16.6. Esta tabla es muy similar a la que se usa para el diseño de la losa continua en una dirección del capítulo 14. Para ayudar en la interpretación de la tabla 16.6, se estudiarán los resultados numéricos de la primera columna. El primero es la determinación de M_u . En este cálculo se usa el factor 0.65 del artículo 13.6.2 del ACI y el factor 0.75 de la tabla 16.3, ambos aplicados al momento estático total de 181.2 pie-klb. La división de este valor de $M_u = -88.4$ pie-klb entre ϕbd^2 ($\phi = 0.9$, $b = 8$ pies = 96 plg, $d = 6.5$ plg) conduce a $M_u/\phi bd^2 = 290.6$ lb/plg². De la tabla A12, $\rho = 0.00516$ (por interpolación). El área del acero de refuerzo en la franja de columnas es $A_s = \rho bd = 0.00516(96)(6.5) = 3.22$ plg². Se escoge una selección de varilla de 17 varillas del #4, teniendo un A_s total = 3.34 plg². Los conceptos restantes en la tabla 16.6 siguen un procedimiento similar.

Al seleccionar de las tablas los diferentes porcentajes de momentos para las franjas de columnas e intermedias de esta losa observe que $\alpha_f = 0$.

	Claro largo (d estimada = 6.50")				Claro corto (d estimada = 6.00")			
	Franja de columna (8')		Franja central (8')		Franja de columna (8')		Franja central (12')	
	-	+	-	+	-	+	-	+
M_u	(0.65)(0.75) (181.2) = -88.4 pie-klb	(0.35)(0.60) (181.2) = +38.1	(0.65)(181.2) -88.4 = -29.4 pie-klb	(0.35)(181.2) -38.1 = +25.3 pie-klb	(0.65)(0.75) (146.2) = -71.3 pie-klb	(0.35)(0.60) (146.2) = +30.7 pie-klb	(0.65)(146.2) -71.3 = -23.8 pie-klb	(0.35)(146.2) -30.7 = +20.5 pie-klb
$\frac{M_u}{\phi bd^2}$	290.6 lb/plg ²	125.2 lb/plg ²	97.6 lb/plg ²	83.2 lb/plg ²	275.1 lb/plg ²	118.4 lb/plg ²	61.2	52.7 lb/plg ²
ρ^*	0.00516bd	0.00214bd	0.0018bh	0.0018bh	0.00486bd	0.00202bd	0.0018bh	0.0018bh
A_s	3.22 plg ²	1.34 plg ²	1.30 plg ²	1.30 plg ²	2.80 plg ²	1.16 plg ²	1.94 plg ²	1.94 plg ²
Varillas seleccionadas	17 #4	7 #4	7 #4	7 #4	15 #4	6 #4	10 #4	10 #4

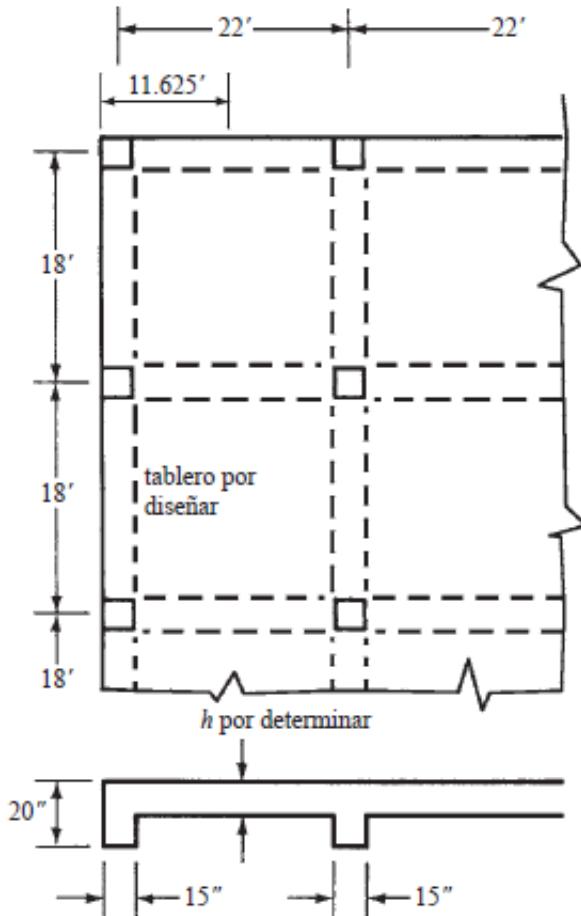
*Los valores no deberán ser menores que los mínimos por temperatura y contracción de 0.0018bh.

Activar Wind.

EJEMPLO 16.4

Determinar los momentos negativo y positivo requeridos para el diseño del tablero exterior de una estructura de losa en dos direcciones con vigas, mostrada en la figura 16.17. La losa soportará una carga viva de 120 lb/pie² y una carga muerta de 100 lb/pie², incluido el peso propio de la losa. Las columnas son de 15 plg × 15 plg y 12 pies de altura. La losa estará soportada por vigas a lo largo del eje de columnas con la sección transversal mostrada. Calcular el espesor de la losa y revisar el esfuerzo cortante si $f'_c = 3\,000 \text{ lb/plg}^2$ y $f_y = 60\,000 \text{ lb/plg}^2$.

SOLUCIÓN



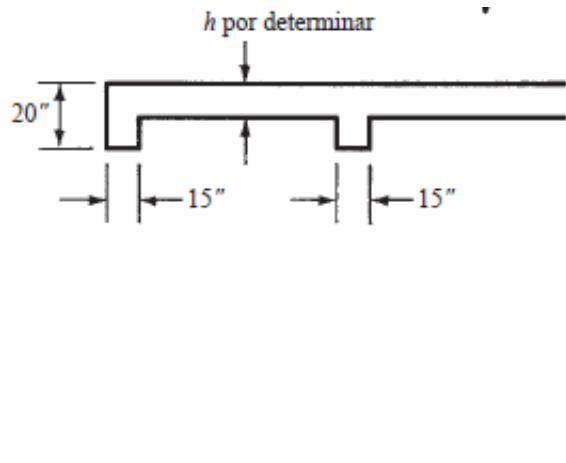
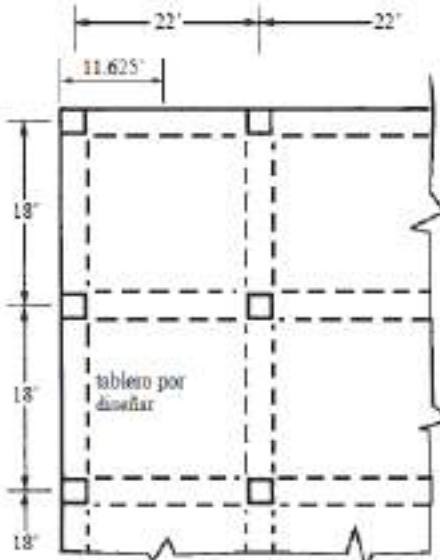
1. Revisión de las restricciones del código ACI (13.6.1). Estas restricciones, que se estudiaron en la sección 16.7 de este libro, se satisfacen. Los primeros cinco de estos criterios se satisfacen fácilmente por inspección. El sexto requiere los siguientes cálculos.
2. Espesor mínimo requerido por el código (9.5.3)
 - a) Suponemos $h = 6 \text{ plg}$
 - b) Proyección efectiva del patín de la viga del eje de columnas según lo especifica el código (13.2.4)

$$= 4h_f = (4)(6) = 24'' \text{ o } h - h_f = 20 - 6 = \underline{\underline{14''}}$$

- c) Momentos de inercia totales de las vigas T. Los siguientes valores son los momentos totales de inercia de las vigas de borde e interiores calculados, respectivamente, en relación con sus ejes centroidales. Muchos proyectistas usan valores aproximados para estos momentos de inercia, I_s , con resultados casi idénticos para los espesores de las losas. Una práctica común es usar 2 veces el momento de inercia total del alma (usando un peralte que va de la parte superior de la losa al fondo del alma) en vigas interiores y 1.5 veces el momento de inercia total del alma en vigas de borde.

$$I \text{ para vigas de borde} = 13\,468 \text{ plg}^4$$

$$I \text{ para vigas interiores} = 15\,781 \text{ plg}^4$$



Para la viga interior de 22 pies (con ancho de losa de 18 pies)

$$I_s = \left(\frac{1}{12}\right)(12 \times 18)(6)^3 = 3888 \text{ plg}^4$$

$$\alpha_f = \frac{15781}{3888} = 4.06$$

$$\alpha_f \text{ promedio} = \alpha_{fm} = \frac{5.36 + 3.32 + (2)(4.06)}{4} = 4.20$$

$$\beta = \text{relación del claro largo al claro corto} = \frac{22 - \frac{15}{12}}{18 - \frac{15}{12}} = 1.24$$

- d) Calculamos los valores α (donde α es la relación de la rigidez de la sección de la viga a la rigidez de una losa cuyo ancho está comprendido entre los ejes de los tableros adyacentes, si existen, a cada lado de la viga).

$$\text{Para la viga de borde } \left(\text{ancho} = \frac{1}{2} \times 22 + \frac{7.5}{12} = 11.625 \text{ pies} \right)$$

$$I_s = \left(\frac{1}{12}\right)(12 \times 11.625)(6)^3 = 2511 \text{ plg}^4$$

$$\alpha_f = \frac{13468}{2511} = 5.36$$

Para la viga interior de 18 pies (con ancho de losa de 22 pies)

$$I_s = \left(\frac{1}{12}\right)(12 \times 22)(6)^3 = 4752 \text{ plg}^4$$

$$\alpha_f = \frac{15781}{4752} = 3.32$$

- e) Ahora que hemos determinado los valores de α_f en las dos direcciones perpendiculares, ahora podemos revisar la sexta y última limitación para el uso del método de diseño directo (13.6.1.6, ACI).

$$\frac{\alpha_{f1}\ell_2^2}{\alpha_{f2}\ell_1^2} = \frac{4.06(18)^2}{3.32(22)^2} = 0.818$$

Como este valor se encuentra entre 0.2 y 5.0, esta condición se satisface. Observe que las direcciones que se designan como ℓ_1 y ℓ_2 son arbitrarias. Si ℓ_1 se hubiera usado como la dirección corta, el cálculo anterior simplemente se invertiría y la relación habría sido 1.22 en vez de 0.818. Este valor también habría estado entre los límites de 0.2 y 5.0.

Tabla 16.3 Porcentajes del momento interior negativo de diseño que debe resistir la franja de columnas.

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	0.5	1.0	2.0
$\frac{a_{f1}\ell_2}{\ell_1} = 0$	75	75	75
$\frac{a_{f1}\ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	90	75	45

f) Límites de grosor según la sección 9.5.3 del código

$$t_e = 22.0 - \frac{15}{12} = 20.75 \text{ pies}$$

Como $a_{f1} > 2.0$, usar la ecuación 9-13 del ACI.

$$h = \frac{t_e \left(0.8 + \frac{f_y}{200,000} \right)}{36 + 9\beta}$$

$$= \frac{(12)(20.75) \left(0.8 + \frac{60,000}{200,000} \right)}{36 + (9)(1.24)} = 5.81 \text{ plg}$$

h no debe ser menor que 3.5 plg (según la sección 9.5.3(c) del ACI)

Intentar con $h = 6$ plg (el cortante se verificará después)

3. Momentos para la dirección del claro corto centrado en el eje de columnas interiores

$$q_u = (1.2)(100) + (1.6)(120) = 312 \text{ lb/pie}^2$$

$$M_o = \frac{(q_u t_1)(t_a)^2}{8} = \frac{(0.312)(22)(16.75)^2}{8} = 241 \text{ pie-klb}$$

a) Dividiendo este momento estático de diseño en porciones negativa y positiva, según la sección 13.6.3.2 del código

$$\text{momento negativo de diseño} = (0.65)(241) = -157 \text{ pie-klb}$$

$$\text{momento positivo de diseño} = (0.35)(241) = +84 \text{ pie-klb}$$

b) Asignar estos momentos interiores a franjas de columna y viga, según la sección 13.6.4 del código

$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{22}{18} = 1.22$$

$$a_{f1} = a_f \text{ en la dirección del claro corto} = 3.32$$

$$a_{f1} \frac{\ell_2}{\ell_1} = (3.32)(1.22) = 4.05$$

$$\%^+ = 60 + 30 \left(\frac{a_{f1}\ell_2}{\ell_1} \right) \left(1.5 - \frac{\ell_2}{\ell_1} \right)$$

La porción del momento negativo interior que va a ser resistido por la franja de columna, según la tabla 16.3 de este capítulo, por interpolación es $(0.68)(-157) = -107$ pie-klb. Este resultado también puede obtenerse de la ecuación

$$\%_{\text{col int}}^- = 75 + 30 \left(\frac{a_{f1}\ell_2}{\ell_1} \right) \left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_1} \right) = 75 + 30(1) \left(1 - \frac{22}{18} \right) = 68.3\%$$

$$M_{\text{col int}}^- = 0.683(-157) = 107 \text{ pie-klb}$$

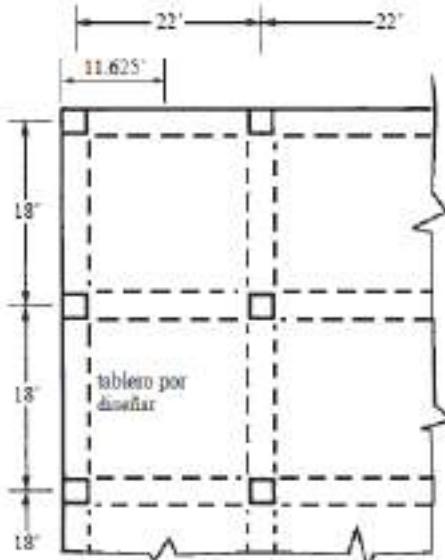
Observe que como $a_{f1}\ell_2/\ell_1 = 4.05 > 1$, se usó un valor de 1 en la ecuación anterior.

De estos -107 pie-klb se asigna 85% a la viga (artículo 13.6.5 del código) o sea -91 pie-klb y 15% a la losa o sea -16 pie-klb. El momento negativo restante, $157 - 107 = 50$ pie-klb, se asigna a la franja central.

La porción del momento positivo interior que va a ser resistido por la franja de columna, según la tabla 16.5 de este capítulo, por interpolación es: $(0.68)(+84) = +57$ pie-klb. El valor de 68% también se puede obtener de la ecuación de la tabla 16.5. De estos 57 pie-klb, se asignan 85% a la viga (código 13.6.5) o sea +48 pie-klb y 15% a la losa o sea +9 pie-klb. El momento positivo restante, $84 - 57 = 27$ pie-klb, va a la franja central.

Tabla 16.5 Porcentajes de momento positivo de diseño que debe resistir la franja de columnas.

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	0.5	1.0	2.0
$\frac{a_{f1}\ell_2}{\ell_1} = 0$	60	60	60
$\frac{a_{f1}\ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	90	75	45



4. Momentos para la dirección del claro corto, centrando en la viga de borde

$$M_o = \frac{(q_u l_2)(l_n)^2}{8} = \frac{(0.312)(11.625)(16.75)^2}{8} = 127 \text{ pie-klb}$$

- a) Dividiendo este momento estático de diseño en porciones negativa y positiva, según la sección 13.6.3.2 del código

$$\text{momento negativo de diseño} = (0.65)(127) = -83 \text{ pie-klb}$$

$$\text{momento positivo de diseño} = (0.35)(127) = +44 \text{ pie-klb}$$

- b) Asignando estos momentos exteriores a franjas de columna y viga, según la sección 13.6.4 del código

$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{22}{18} = 1.22$$

$$\alpha_{f1} = \alpha_f \text{ para la viga de borde} = 5.36$$

$$\alpha_f \frac{\ell_2}{\ell_1} = (5.36)(1.22) = 6.54$$

5. La porción del momento negativo exterior que va a ser resistido por la franja de columna, según la tabla 16.4 de este capítulo, por interpolación es $(0.68)(-83) = -56$ pie-klb. De estos -56 pie-klb se asigna 85% a la viga (código 13.6.5) o sea -48 pie-klb y 15% a la losa o sea -8 pie-klb. El momento negativo restante, $83 - 56 = -27$ pie-klb, se asigna a la franja central.

La porción del momento exterior positivo que va a ser resistido por la franja de columna, según la tabla 16.5 o la ecuación para la tabla 16.5, es $(0.68)(+44) = +30$ pie-klb. De estos 30 pie-klb se asignan 85% a la viga o sea $+26$ pie-klb y 15% a la losa o sea $+5$ pie-klb. El momento positivo restante, $44 - 30 = +14$ pie-klb, se asigna a la franja central.

En la tabla 16.7 se presenta un resumen de los momentos en el claro corto.

Tabla 16.4 Porcentajes del momento exterior negativo de diseño que debe resistir una franja de columnas.

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$		0.5	1.0	2.0
$\frac{\alpha_f \ell_2}{\ell_1} = 0$	$\beta_t = 0$	100	100	100
	$\beta_t \geq 2.5$	75	75	75
$\frac{\alpha_f \ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	$\beta_t = 0$	100	100	100
	$\beta_t \geq 2.5$	90	75	45

Tabla 16.5 Porcentajes de momento positivo de diseño que debe resistir la franja de columnas.

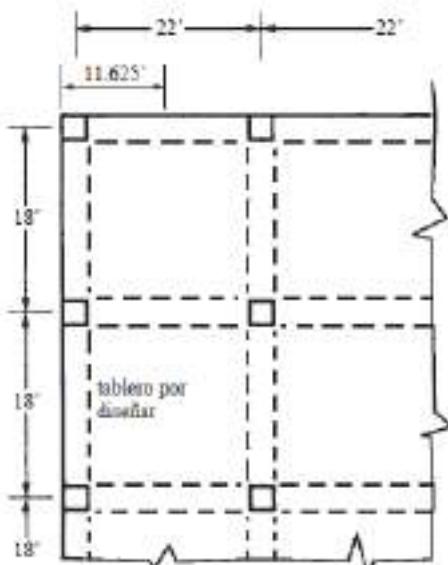
$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	0.5	1.0	2.0
$\frac{\alpha_f \ell_2}{\ell_1} = 0$	60	60	60
$\frac{\alpha_f \ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	90	75	45

Tabla 16.7 Momentos en el claro corto (pie-klb).

	Momentos en franja de columna		Momentos en la franja central de la losa
	Viga	Losa	
Franja interior losa-viga			
	Negativo	-91	-16
Franja exterior losa-viga	Positivo	+48	+9
	Negativo	-48	-9
	Positivo	+26	+5

6. Momentos en la dirección del claro largo

$$M_o = \frac{(q_u \ell_2)(\ell_n)^2}{8} = \frac{(0.312)(18)(20.75)^2}{8} = 302.3 \text{ pie-klb}$$



a) De la tabla 16.2 de este capítulo (código 13.6.3.3.) para un claro extremo con vigas entre soportes interiores:

$$\text{Momento negativo interior factorizado} = 0.70M_o = -(0.70)(302.3) = -212 \text{ pie-klb}$$

$$\text{Momento positivo factorizado} = 0.57M_o = +(0.57)(302.3) = 172 \text{ pie-klb}$$

$$\text{Momento negativo exterior factorizado} = 0.16M_o = -(0.16)(302.3) = -48 \text{ pie-klb}$$

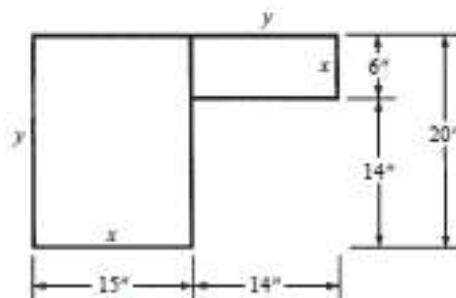
Estos momentos factorizados pueden modificarse 10% de acuerdo con la sección 13.6.7 del código, pero esta reducción se desprecia aquí.

b) Asignación de estos momentos a las franjas de columna y viga

$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{18}{22} = 0.818$$

$$\alpha_f = \alpha_{f1} \text{ para la viga de } 22' = 4.06$$

$$\alpha_f \frac{\ell_2}{\ell_1} = (4.06)(0.818) = 3.32$$



$$\begin{aligned} C &= [1 - 0.63(\frac{15}{20})] \frac{(15^3)(20)}{3} \\ &\quad + [1 - 0.63(\frac{6}{14})] \frac{(6^3)(14)}{3} \\ &= 12,605 \text{ plg}^4 \end{aligned}$$

Figura 16.18 Evaluación de C .

A continuación se da una expresión para β_t . Es la relación de la rigidez a torsión de la sección de una viga de borde, a la rigidez a flexión de una losa de ancho igual a la longitud del claro de la viga medida entre centros de soportes.

$$\beta_t = \frac{E_{cb}C}{2E_{cr}I_x}$$

La ecuación contiene un término C , que es una propiedad del área de la sección transversal del brazo de torsión, al estimar la resistencia a torsión.

$$C = \Sigma \left(1 - 0.63 \frac{x}{y}\right) \frac{x^3 y}{3}$$

donde x es la longitud del lado corto de cada rectángulo y y es la longitud del lado largo de cada rectángulo. La viga exterior considerada aquí se describe en la sección 13.2.4 del código ACI y se muestra en la figura 16.18, junto con el cálculo de C . La sección transversal de la viga puede dividirse en rectángulos de otra manera, pero la configuración mostrada conduce al mayor valor de C .

$$\beta_t = \frac{E_{cb}C}{2E_{cr}I_x} = \frac{(E_c)(12,605)}{(2)(E_c)(3,888)} = 1.62$$

Tabla 16.2 Distribución del momento total en el claro en un claro extremo (código ACI, 13.6.3.3).

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	Borde exterior no restringido	Losa sin vigas entre soportes interiores	Sin viga de borde	Con viga de borde	Borde exterior totalmente restringido
Momento interior factorizado negativo	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65
Momento factorizado positivo	0.63	0.57	0.52	0.50	0.35
Momento exterior factorizado negativo	0	0.16	0.26	0.30	0.65

La porción del momento interior negativo de diseño asignado a la franja de columnas, de la tabla 16.3, por interpolación o mediante la ecuación es $(0.80)(-212) = -170$ pie-klb. De estos -170 pie-klb se asigna 85% a la viga (13.6.5 del código) o sea -145 pie-klb y 15% a la losa o sea -26 pie-klb. El momento negativo restante, $-212 + 170 = -42$ pie-klb, se asigna a la franja central.

Tabla 16.3 Porcentajes del momento interior negativo de diseño que debe resistir la franja de columnas.

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	0.5	1.0	2.0
$\frac{a_f \ell_2}{\ell_1} = 0$	75	75	75
$\frac{a_f \ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	90	75	45

Tabla 16.8 Momentos en el claro largo (pie-klb).

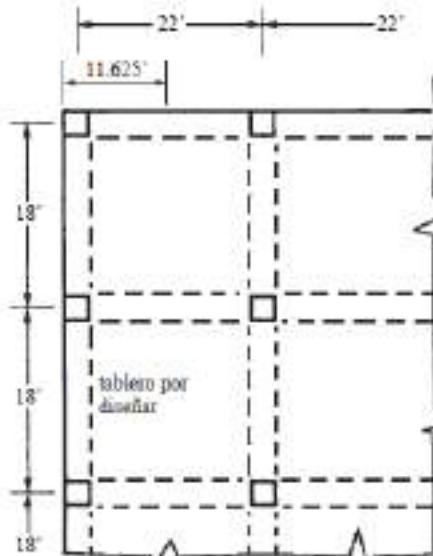
	Momentos en franja de columna		Momentos en la franja central de la losa
	Viga	Losa	
Negativo interior	-145	-26	-42
Positivo	+117	+21	+34
Negativo exterior	-36	-6	-6

$$\%_{\text{col ext}} = 100 - 10\beta_t + 12\left(\frac{a_f \ell_2}{\ell_1}\right)\left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$$

La porción del momento positivo de diseño que debe resistir la franja de columnas, de acuerdo con la tabla 16.5, es $(0.80)(172) = +138$ pie-klb. De estos 138 pie-klb se asigna 85% a la viga o sea $(0.85)(138) = 117$ pie-klb y 15% a la losa o sea $+21$ pie-klb. El momento positivo restante, $172 - 138 = 34$ pie-klb, se asigna a la franja central.

La porción del momento negativo exterior asignado a la franja de columna se obtiene por media interpolación doble de la tabla 16.4 y es $(0.86)(-48) = -42$ pie-klb. De estos -42 pie-klb se asigna 85% a la viga o sea -36 pie-klb y 15% a la losa o sea -6 pie-klb. El momento negativo restante, -6 pie-klb, se asigna a la franja central.

En la tabla 16.8 se presenta un resumen de los momentos del claro largo.



7. Revisión de la resistencia por cortante en la losa a una distancia d de la cara de la viga. Se supone que la fuerza cortante es producida por la carga sobre el área tributaria mostrada en la figura 16.19, considerando una franja de 12 plg de ancho como se indica.

$$d \text{ promedio} = h - \text{recubrimiento} - \text{un diámetro de la varilla} = 6.00 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 4.75 \text{ plg}$$

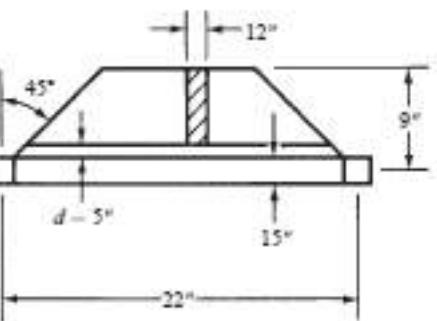
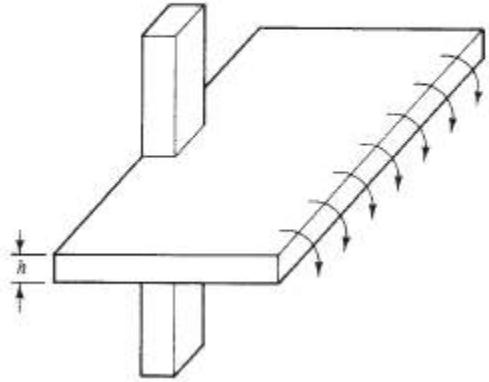


Figura 16.19

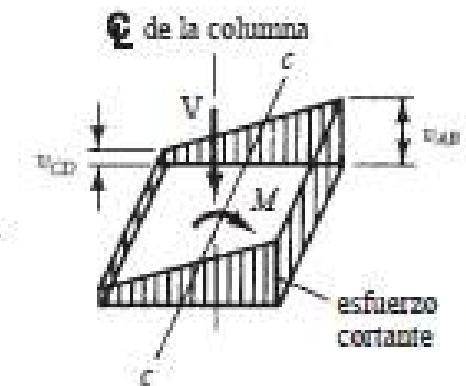
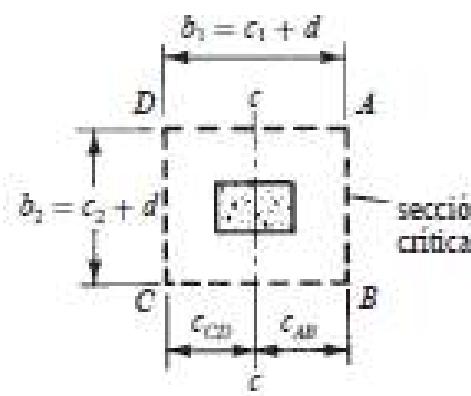
$$V_u = [0.312]\left(9 - \frac{7.5}{12} - \frac{4.75}{12}\right) = 2.49 \text{ kib} = 2490 \text{ lb}$$

$$\phi V_c = (0.75)(1.0)(2\sqrt{3000})(12)(4.75) = 4684 \text{ lb} > 2490 \text{ lb}$$

OK



Trasmisión de Momentos y Cortantes entre Losas y Columnas



Trasmisión de Momentos entre Losas y Columnas

La carga máxima que soporta una losa en dos direcciones depende de la resistencia de la unión entre la columna y la losa

Trasmisión de carga losa a columna

- *Carga por Cortante de la losa a la columna a través de un Área alrededor de la columna*
- *Momentos de transferencia de losa a columna (ocasionan esfuerzos cortantes adicionales)*

Factor de Transferencia de Momento (losa-columna)

$$M_{\text{transf}} = 0.3M_o$$

M_o = Momento estático factorizado de la losa

Transferencia por flexión

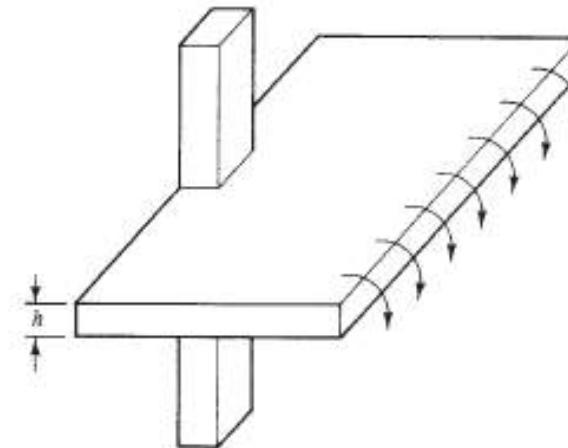
$$\gamma_f M_{\text{transf}}$$

$$\gamma_f = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}}$$

“Cuando no hay vigas , el momento total de la tiene que transferirse a la columna ”

Transferencia de Momento

- Por flexión
- Por cortante excéntrica, a una distancia $d/2$ de cara de columna



“La transferencia tiene lugar dentro de un ancho efectivo de losa entre las líneas situadas a 1,5 veces espesor de la losa o el ábaco, en las caras opuestas externas de la columna ”

Trasmisión a Cortante y Flexión de Momentos

Transferencia por flexión

$$\gamma_f M_{transf}$$

b_1 = longitud del perímetro por cortante (c_1+d) perpendicular al eje de flexión

b_2 = longitud del perímetro por cortante (c_2+d) paralelo al eje de flexión

Transferencia por cortante

$$\gamma_v M_{transf}$$

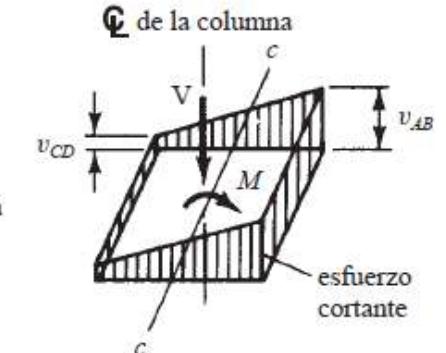
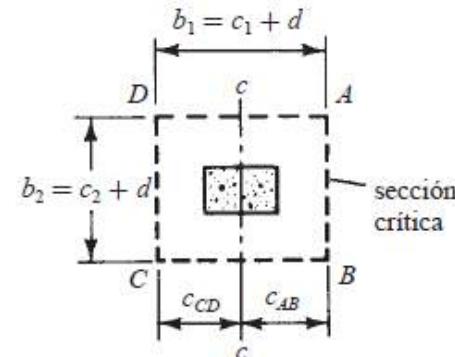
$$\gamma_v = 1 - \gamma_f$$

“Los esfuerzos por cortante debido a transferencia de momento varían linealmente respecto al centroide de la sección crítica y deben sumarse a los cortantes factorizados.”

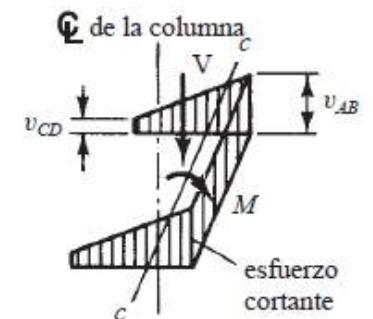
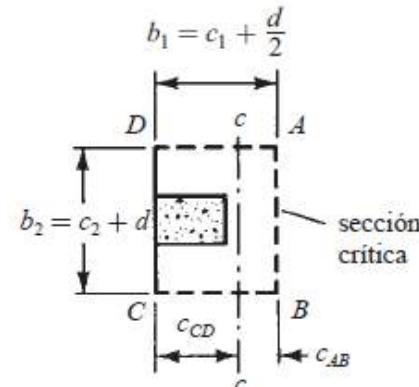
Los esfuerzos cortantes resultantes no deben exceder a $\frac{\phi V_c}{b_w d}$ para miembros sin refuerzo a cortante

los esfuerzos cortantes resultantes no deben exceder a $\frac{\phi(Vc+Vs)}{b_w d}$ para miembros con refuerzo a cortante , que sean crucetas de cortante

$$\gamma_f = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}}$$



a) columna interior



b) columna de borde

Esfuerzos Combinados de Cortante y Flexión

$$v_u \text{ a lo largo de } AB = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\gamma_v M_u c_{AB}}{J_c}$$

$$v_u \text{ a lo largo de } CD = \frac{V_u}{A_c} - \frac{\gamma_v M_u c_{CD}}{J_c}$$

A_c = área de concreto para la sección crítica supuesta

J_c = Momento polar de Inercia respecto al eje z-z de las áreas de cortante localizadas alrededor de la periferia de la sección crítica

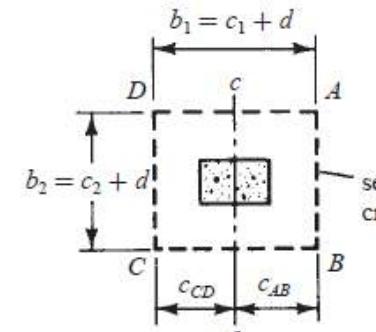
$$J_c = d \left[\frac{a^3}{6} + \frac{ba^2}{2} \right] + \frac{ad^3}{6}$$

Columna Interior

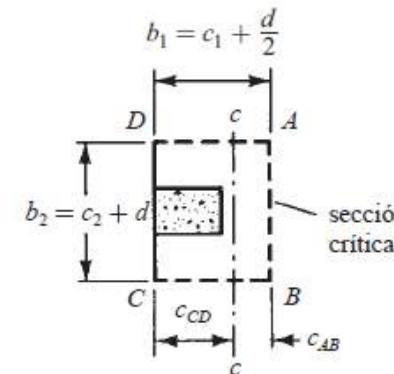
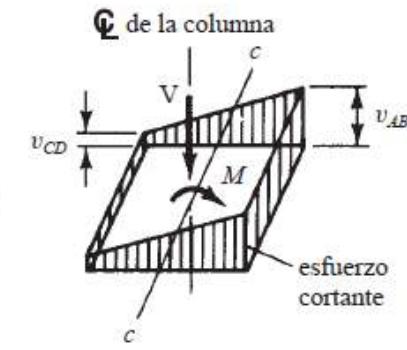
$$J_c = d \left[\frac{2a^3}{3} - (2a + b)(c_{AB})^2 \right] + \frac{ad^3}{6}$$

Columna Exterior

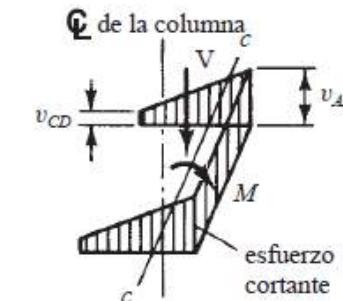
El refuerzo total que se proporcionará en la franja de columnas debe incluir un refuerzo adicional concentrado sobre la columna, para resistir la parte del momento flexionante transferido por flexión = $\gamma_f M_w$.



a) columna interior

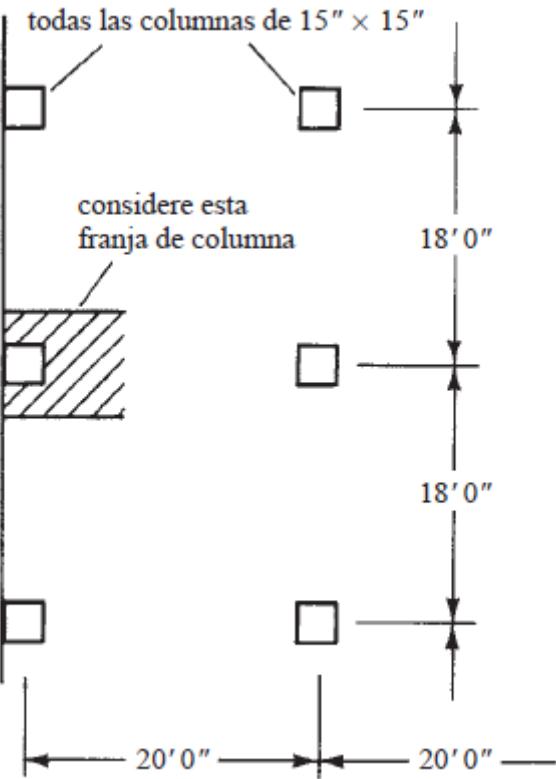


b) columna de borde



$$v_u < V_u \text{ (resistencia por cortante de la sección)} = 4\sqrt{f'c}$$

EJEMPLO 16.5



1. Calcular w_u y M_{ot} .

$$w_d = \left(\frac{8}{12}\right)(150) = 100 \text{ lb/pie}^2$$

$$w_\ell = 100 \text{ lb/pie}^2$$

$$w_u = (1.2)(100) + (1.6)(100) = 280 \text{ lb/pie}^2$$

$$M_{ot} = \frac{q_u \ell_2 \ell_n^2}{8} = \frac{(0.280)(18)(18.75)^2}{8} = 221.5 \text{ pie-klb}$$

Para la losa plana de la figura 16.22, calcular el acero negativo requerido en la franja de columna para el borde exterior indicado. Revíse tambié la losa para transferencia de momento y cortante en la columna exterior; $f'_c = 3\,000 \text{ lb/plg}^2$, $f_y = 60\,000 \text{ lb/plg}^2$ y carga viva = 100 lb/pie^2 . Se ha seleccionado ya una losa de 8 plg con $d = 6.75 \text{ plg}$

2. Determinar el momento negativo exterior de acuerdo con la sección 13.6.3.3.

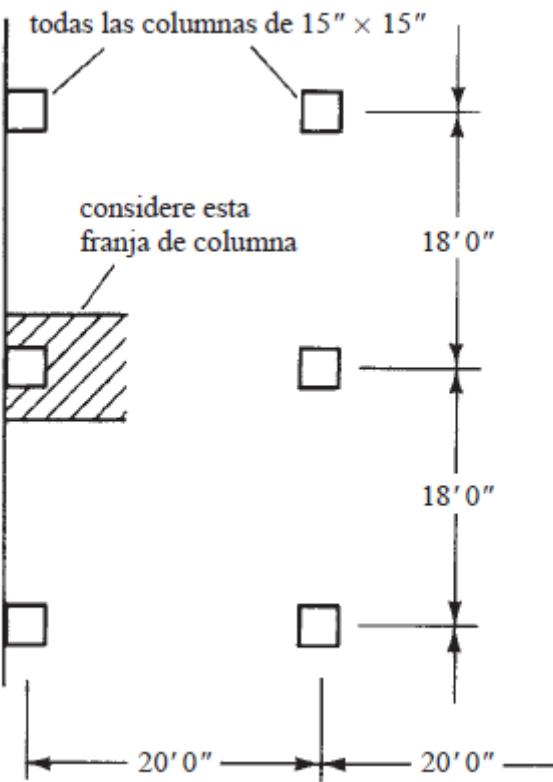
$$-0.26M_{ot} = -(0.26)(221.5) = 57.6 \text{ pie-klb}$$

$$\text{Ancho de la franja de columna} = (0.50)(18) = 9' - 0'' = 108''$$

3. La sección 13.6.4.2 del ACI muestra que 100% del momento negativo exterior debe ser resistido por la franja de columna.

Tabla 16.4 Porcentajes del momento exterior negativo de diseño que debe resistir una franja de columnas.

$\frac{\ell_2}{\ell_1}$		0.5	1.0	2.0
$\frac{\alpha_{f1} \ell_2}{\ell_1} = 0$	$\beta_t = 0$	100	100	100
	$\beta_t \geq 2.5$	75	75	75
$\frac{\alpha_{f1} \ell_2}{\ell_1} \geq 1.0$	$\beta_t = 0$	100	100	100
	$\beta_t \geq 2.5$	90	75	45



4. Diseño del acero de la franja de columna.

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{(12)(57600)}{(0.9)(108)(6.75)^2} = 156.1$$

$\rho = 0.0027$ de la tabla A.12 del apéndice

$$A_s = (0.0027)(108)(6.75) = 1.97 \text{ plg}^2$$

Usar 10 #4

5. Diseñar la transferencia de momento.

a) El código (13.5.3.2) establece que deben agregarse varillas adicionales sobre la columna en un ancho = ancho de columna + $(2)(1.5h) = 15 + (2)(1.5 \times 8) = 39''$.

b) El refuerzo adicional requerido sobre las columnas debe diseñarse para un momento = $\gamma_f M_u$. En la ecuación 13-1 del ACI que sigue, b_1 y b_2 son las dimensiones laterales del perímetro b_o en la sección 11.11.1.2 del ASCI (véase la figura 16.21). En este caso $b_1 = c_1 + d/2 = 15 + 6.75/2 = 18.375$ plg. En la dirección perpendicular, $b_2 = c_2 + d = 15 + 6.75 = 21.75$ plg.

$$\gamma_f = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{18.375}{21.75}}} = 0.62$$

(Ecuación 13-1, ACI)

$$\gamma_f M_u = (0.62)(57.6) = 35.7 \text{ pie-klb}$$

c) Agréguese cuatro varillas #4 en el ancho de 39'' y revisese si la situación de transferencia de momento es satisfactoria. Para resistir los 35.7 pie-klb, tenemos ahora las cuatro varillas #4 recién añadidas más

cuatro #4. Este número de varillas se obtiene tomando la relación de 39''/108'' veces 10 varillas para obtener 3.6 varillas y redondeando a cuatro. El número total de varillas agregadas para el diseño de la franja de columnas es ocho varillas #4 (1.60 plg²).

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{(1.57)(60)}{(0.85)(3)(39)} = 0.947''$$

$$\phi M_n = M_u = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$= \frac{(0.9)(1.57)(60) \left(6.75 - \frac{0.947}{2} \right)}{12} \\ = 44.3 \text{ pie-klb} > 35.7 \text{ pie-klb}$$

OK

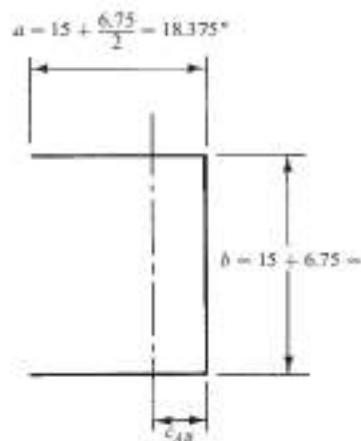
6. Calcule el esfuerzo cortante combinado en la columna exterior debido al cortante y a la transferencia de momento.

a) La sección 13.6.3.5 del ACI requiere que se transfiera un momento de $(0.3M_o)(\gamma_r)$ de la losa a la columna por excentricidad de cortante. El momento total que debe transferirse es $0.3(M_o) = 0.3(221.5) = 66.45 \text{ pie-klb}$.

b) Fracción del momento desbalanceado tomado por excentricidad del cortante $= \gamma_r(0.3M_o)$.

$$\gamma_r = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{18.375}{21.75}}} = 0.38$$

$$\sim M_u = (0.38)(66.45) = 25.25 \text{ pie-klb}$$



c) Cálculo de las propiedades de la sección crítica por cortante (figura 16.23).

$$A_c = (2a + b)d = (2 \times 18.375 + 21.75)(6.75) = 394.875 \text{ plg}^2$$

$$c_{AB} = \frac{(2)(18.375)(6.75)\left(\frac{18.375}{2}\right)}{394.875} = 5.77 \text{ plg}$$

$$J_c = d \left[\frac{2a^3}{3} - (2a + b)(c_{AB})^2 \right] + \frac{ad^3}{6}$$

$$= 6.75 \left[\frac{(2)(18.375)^3}{3} - (2 \times 18.375 + 21.75)(5.77)^2 \right] + \frac{(18.375)(6.75)^3}{6}$$

$$= 15714 \text{ plg}^4$$

d) Calcular la fuerza cortante por carga de gravedad que ha de transferirse a la columna exterior.

$$V_u = \frac{q_u \ell_1 \ell_2}{2} = \frac{(0.280)(18)(20)}{2} = 50.4 \text{ klb}$$

e) Esfuerzos combinados.

$$\begin{aligned} v_u &= \frac{V_u}{A_c} + \frac{\gamma_r M_o c_{AB}}{J_c} \\ &= \frac{50400}{394.875} + \frac{(12 \times 25250)(5.77)}{15714} \\ &= 128 + 111 = 239 \text{ lb/plg}^2 \\ &> 4\sqrt{3000} = 219 \text{ lb/plg}^2 \end{aligned}$$

No sirve

∴ Es necesario tomar una o más de las siguientes medidas: incrementar el peralte de la losa, usar un concreto de mayor resistencia, usar un ábaco o instalar una cruceta de cortante.

Momentos factorizados en columnas y muros

Si existe una carga desbalanceada en dos claros adyacentes, el resultado será un momento adicional en la conexión de las paredes y columnas a las losas. El código (13.6.9.2) proporciona la ecuación aproximada listada al final de este párrafo para considerar los efectos de tales situaciones. Esta ecuación en particular se obtuvo para dos claros adyacentes, uno mayor que el otro. Se supuso que el claro mayor estaba cargado con carga muerta más media carga viva y que se aplicó sólo carga muerta al claro menor.

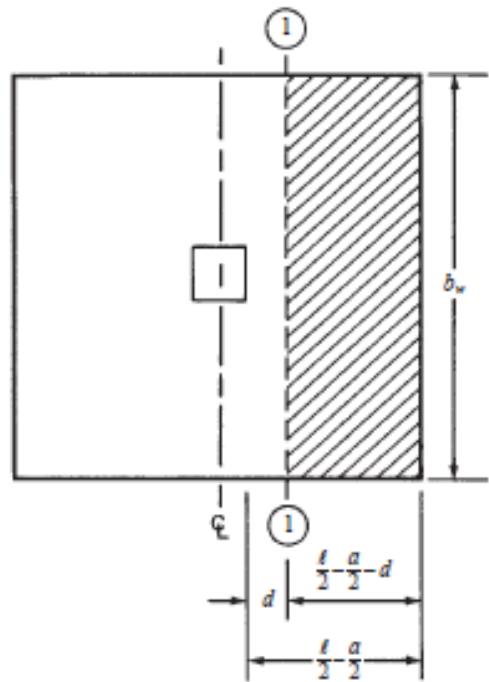
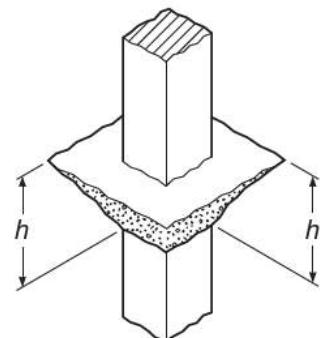
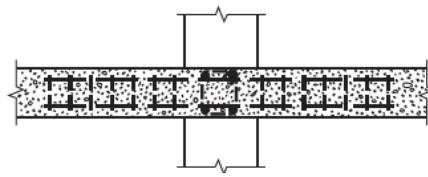
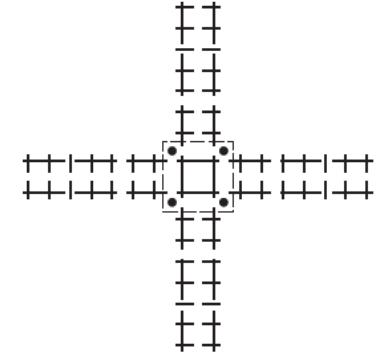
$$M_u = 0.07[(q_{du} + 0.5q_{lu})\ell_2\ell_n^2 - q_{Du'}\ell_2'(\ell_n')^2] \quad (\text{Ecuación 13-7, ACI})$$

En esta expresión, q'_{du} , ℓ'_2 y ℓ'_n son para el claro corto. El valor resultante aproximado debe usarse en columnas interiores para la transferencia del momento desbalanceado por carga de gravedad, a menos que se use un análisis teórico más exacto.

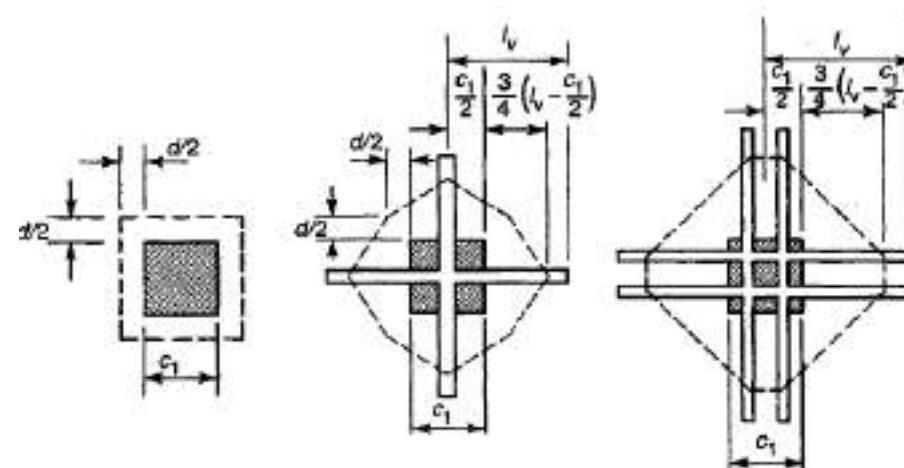
ABERTURAS EN LOS SISTEMAS DE LOSAS

De acuerdo con el código (13.4) pueden usarse aberturas en los sistemas de losas si se proporciona una resistencia adecuada y si se satisfacen todas las condiciones de servicio del ACI, incluyendo las deflexiones.

1. Si las aberturas se localizan en el área común a la intersección de las franjas centrales, será necesario proporcionar la misma cantidad total de refuerzo en la losa que se usaría si no tuviera una abertura.
2. Para aberturas en la intersección de las franjas de columnas, el ancho de las mismas no deberá ser mayor que un octavo del ancho de la franja de columna en cualquier claro. Una cantidad de refuerzo igual al interrumpido por la abertura, debe colocarse en los lados de ésta.
3. Las aberturas en un área común a una franja de columna y a una franja central, no deben interrumpir más de un cuarto del refuerzo de cualquier franja. Una cantidad de refuerzo igual a la interrumpida se debe colocar alrededor de los lados de la abertura.
4. Deben cumplirse los requisitos de cortante de la sección 11.11.6 del código.

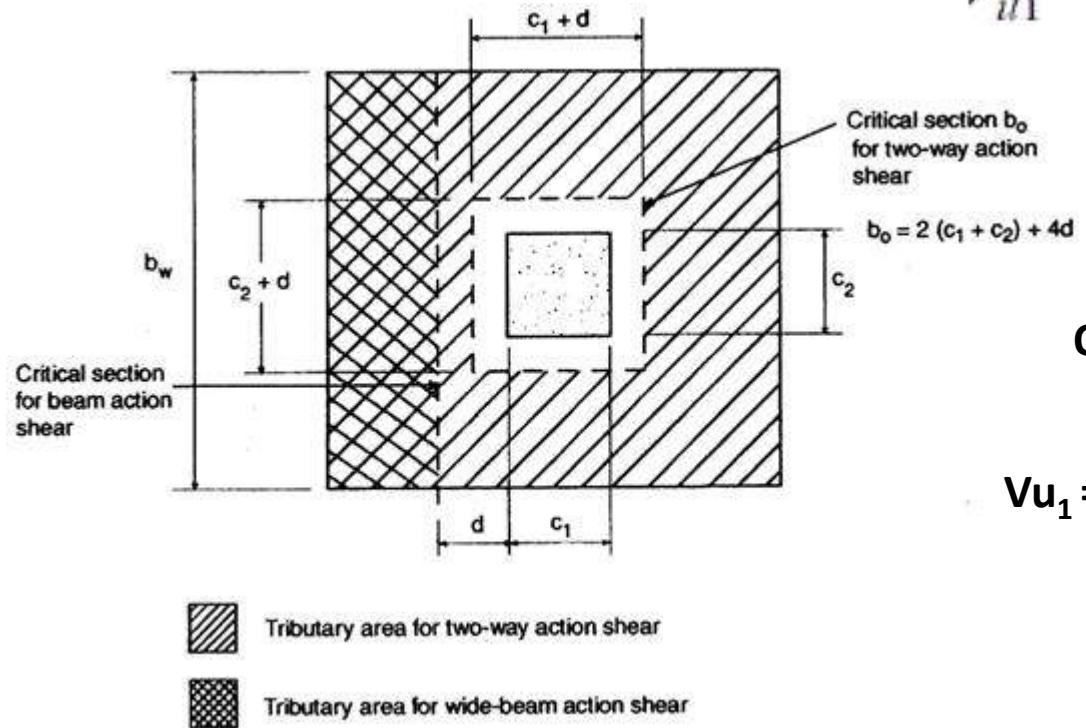


Diseño a Cortante en Placas y Losas Planas



Losas sin refuerzo especial a cortante

Cortante por acción de viga

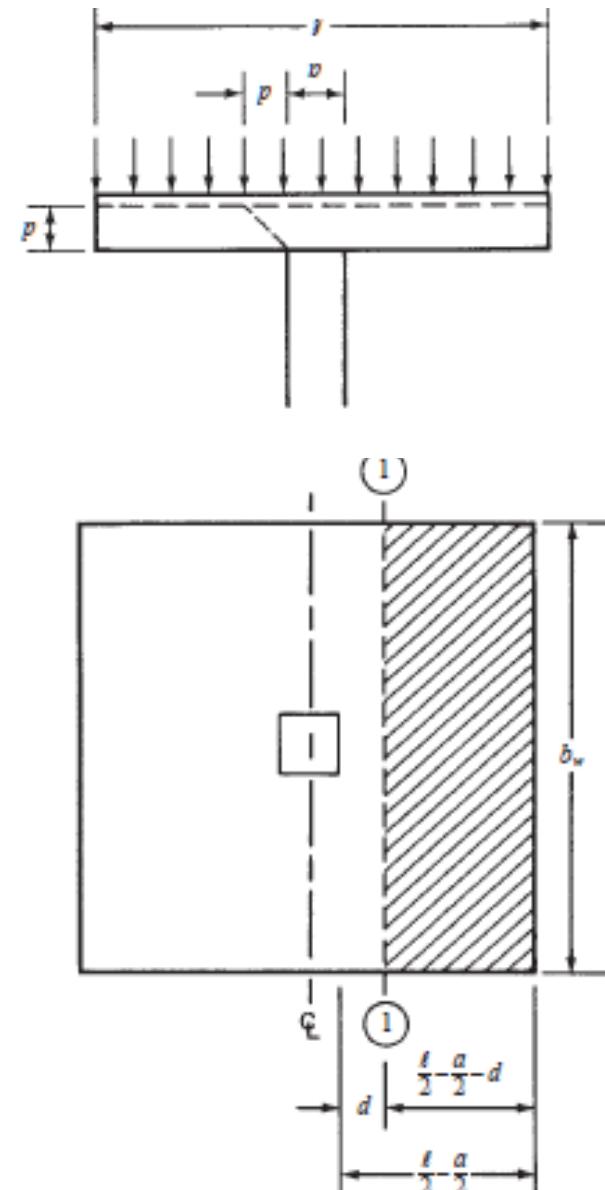


$$V_{u1} \quad \phi V_c \quad \phi V_c \quad \phi 2\sqrt{f'_c} b_w d$$

$$d = \frac{V_{u1}}{\phi 2\sqrt{f'_c} b_w}$$

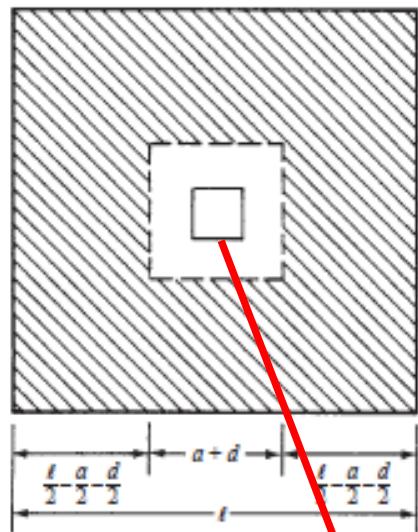
$$Q_u = P_u / A_{losa}$$

$$V_{u1} = Q_u \times B \times (l/2 - a/2 - d)$$



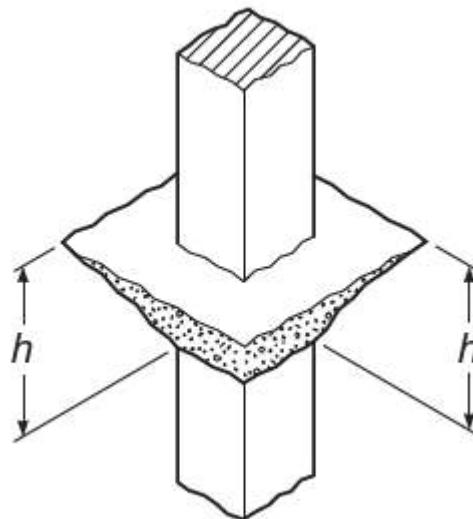
Cortante por punzonamiento

$$V_c = \left(\frac{\alpha_s d}{b_o} + 2 \right) \lambda \sqrt{f'_c} b_o d$$

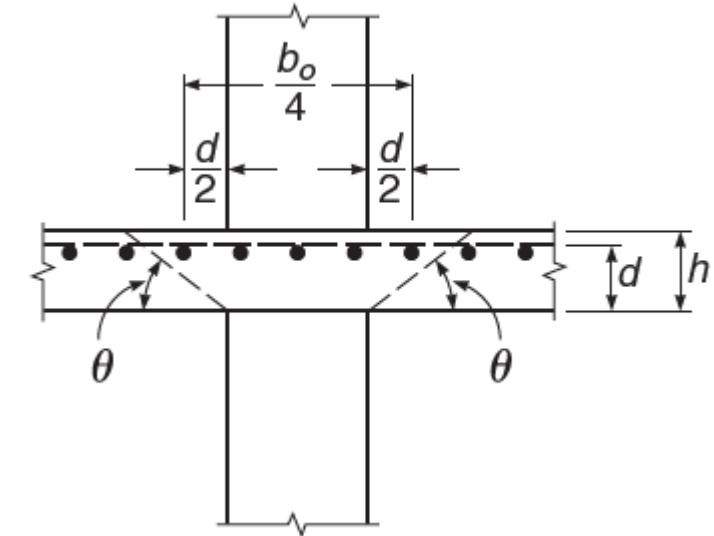


$$Vu_2 = (A_{losa} - A_2) \times Qu$$

$$Qu = P_u / A_{losa}$$



- $\alpha_s = 40$ para columnas interiores
- $\alpha_s = 30$ para columnas medianeras
- $\alpha_s = 20$ para columnas de esquina



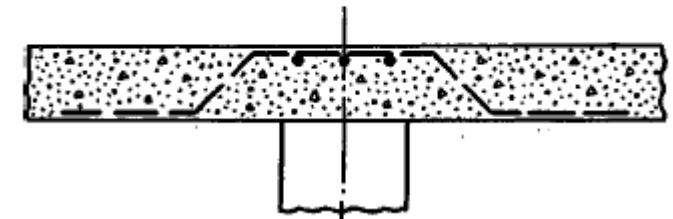
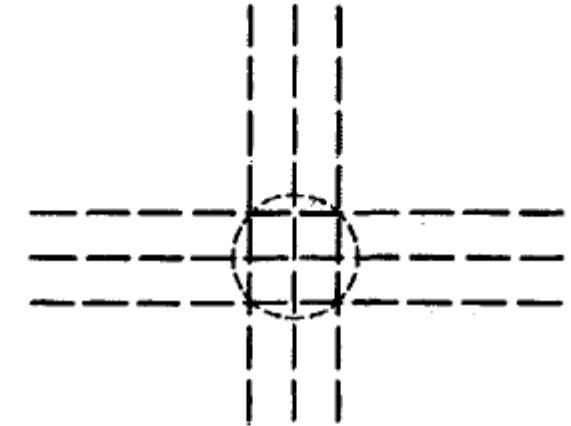
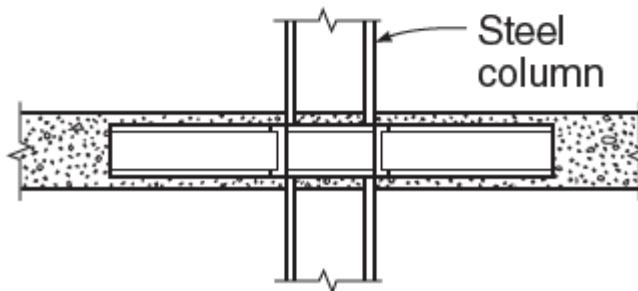
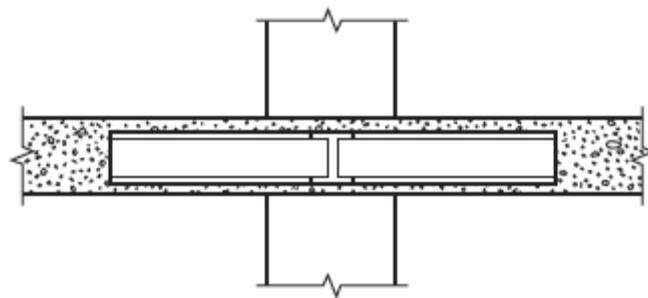
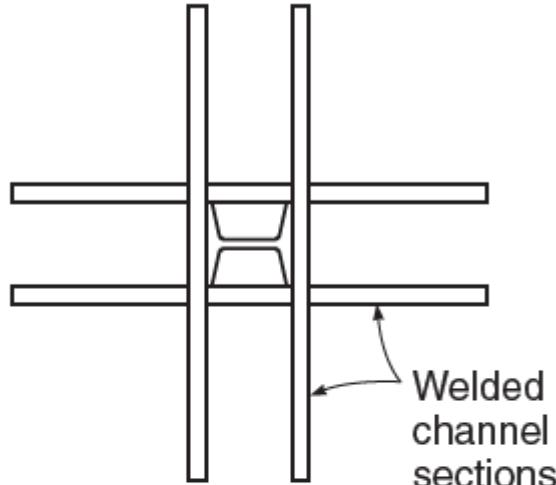
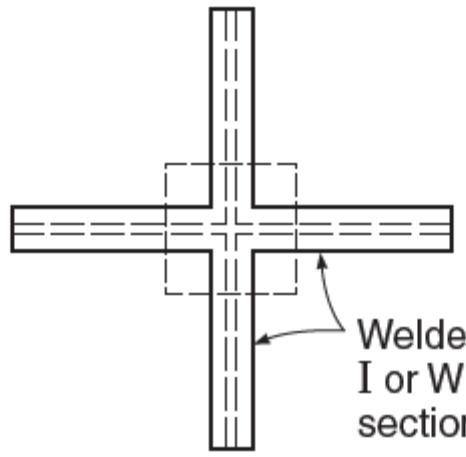
El valor de “d” para punzonamiento es el mayor de

$$d = \frac{V_{u2}}{\phi 4 \lambda \sqrt{f'_c} b_o}$$

$$d = \frac{V_{u2}}{\phi \left(2 + \frac{4}{\beta_c} \right) \lambda \sqrt{f'_c} b_o} \quad (\text{no aplicable a menos que } \beta_c \text{ sea} > 2)$$

$$d = \frac{V_{u2}}{\phi \left(\frac{\alpha_s d}{b_o} + 2 \right) \lambda \sqrt{f'_c} b_o}$$

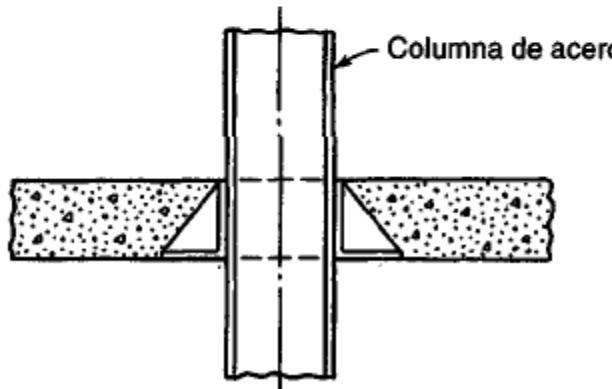
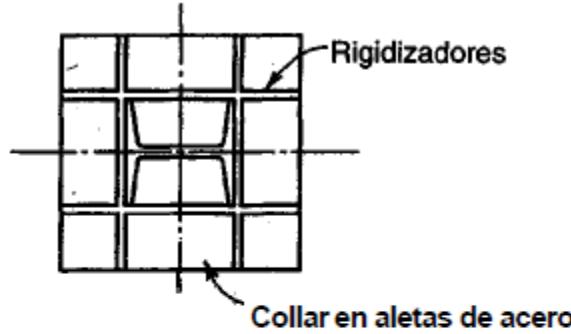
Tipos de Refuerzo a Cortante



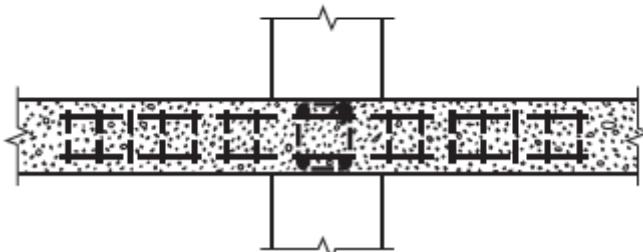
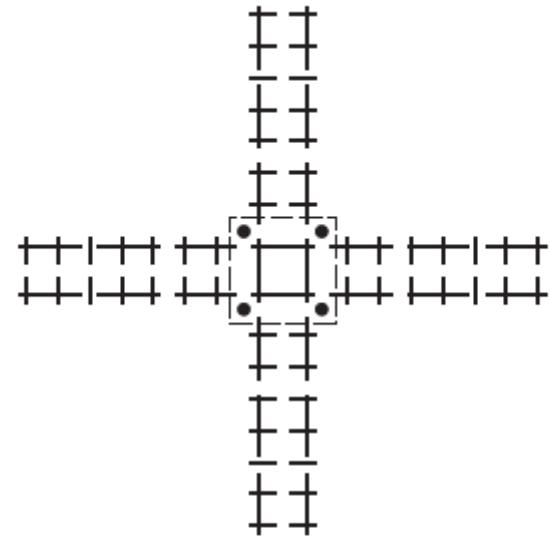
Perfiles de Acero Estructural

Barras Dobladadas

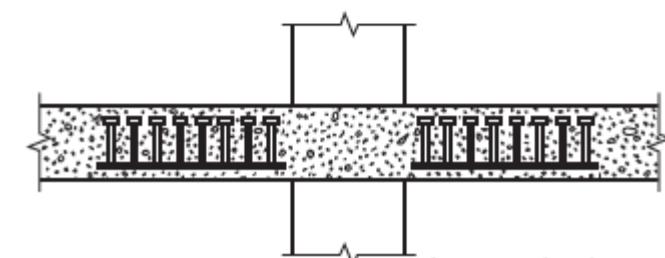
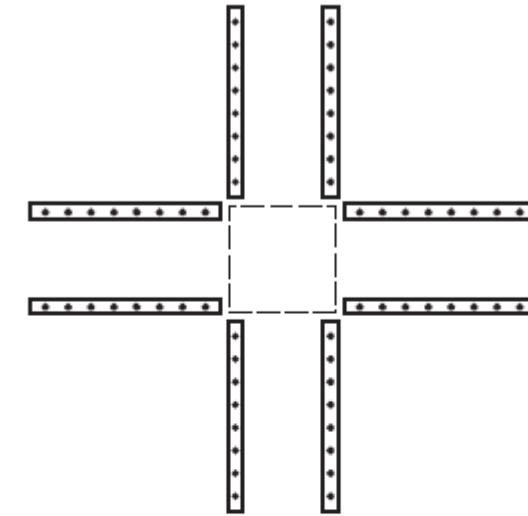
Tipos de Refuerzo a Cortante



Rigidizadores



Refuerzo de
Vigas Integrales



Espigas de Cortante

Diseño de Refuerzo de Barras Dobladas

V_n a una sección crítica $\frac{d}{2}$ se incrementa a $6\sqrt{f'c b d}$

V_c debido a agrietamiento diagonal se reduce a $2\sqrt{f'c b d}$

Se debe proporcionar refuerzo que resista el cortante en exceso de ϕV_c

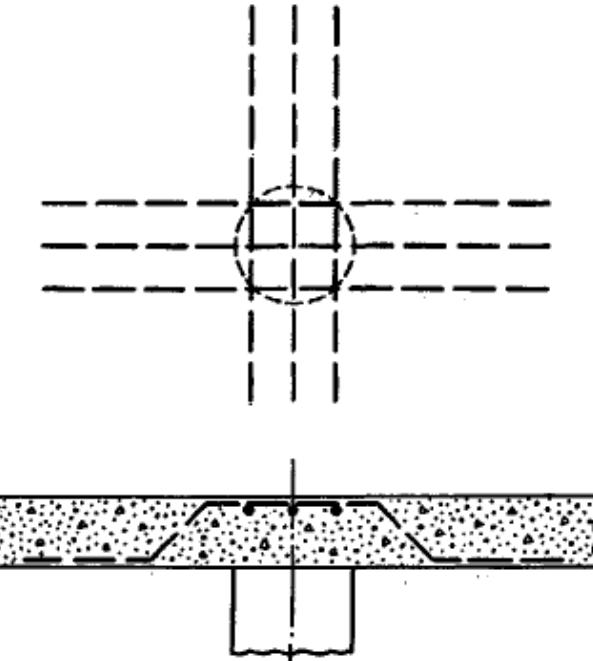
Cuando el refuerzo a cortante se dobla todo a la misma distancia del apoyo,
 $V_s = A_v f_y s \tan \alpha$ no debe exceder de $3\sqrt{f'c b d}$

Área de refuerzo en sección crítica

$$\phi A_v f_y \tan \alpha = V_u - \phi V_c$$

$$A_v = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y \tan \alpha}$$

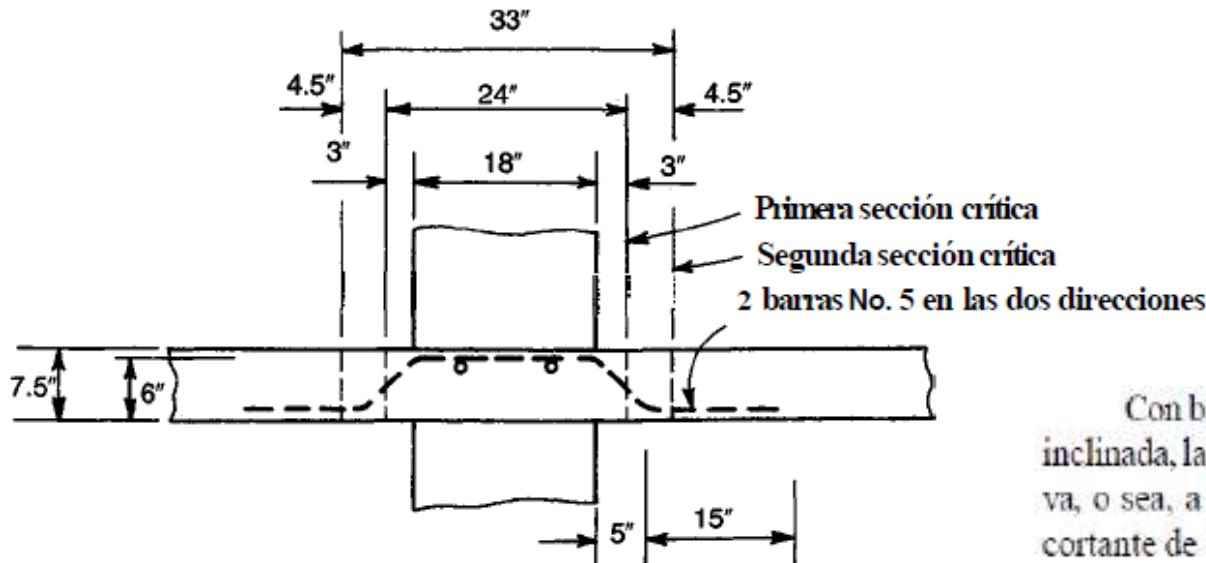
Deben investigarse secciones sucesivas a distancias crecientes del apoyo y proveerse refuerzo donde V_u excede el valor de ϕV_c determinado mediante la ecuación (13.11)†. Únicamente las tres cuartas partes centrales de la porción inclinada de las barras dobladas pueden considerarse efectivas para resistir el cortante; además, debe suministrarse la longitud completa de desarrollo, más allá de la ubicación del esfuerzo máximo en el acero, que se supone ocurre a una distancia igual a la mitad del espesor de la losa, o sea $d/2$.



Ejemplo 13.3. Diseño de las barras de refuerzo para cortante por punzonamiento. Un piso de placa plana tiene un espesor $h = 7\frac{1}{2}$ pulg y está apoyado en columnas cuadradas de 18 pulg de lado espaciadas a 20 pies entre centros en cada una de las direcciones. El piso va a soportar una carga mayorada total de 350 lb/pie². Verifique la capacidad de la losa para resistir el cortante por punzonamiento en una columna típica interior y proporcione el refuerzo a cortante, si se necesita, utilizando barras dobladas similares a las de la figura 13.17b. Puede utilizarse una profundidad efectiva promedio de $d = 6$ pulg. Las resistencias de los materiales son $f_u = 60,000$ lb/pulg² y $f'_c = 4000$ lb/pulg².

Solución. La primera sección crítica para cortante por punzonamiento está ubicada a una distancia $d/2 = 3$ pulg de la cara de la columna y proporciona un perímetro de cortante $b_o = 24 \times 4 = 96$ pulg. Con base en el área tributaria del piso cargado, el cortante mayorado es

$$V_u = 350(20^2 - 2^2) = 139,000 \text{ lb}$$



$$\phi V_c = 0.85 \times 4\sqrt{4000} \times 96 \times 6 = 124,000 \text{ lb}$$

Reducción de resistencia de concreto para barras dobladas a 45°

$$\phi V_c = 0.85 \times 2\sqrt{4000} \times 96 \times 6 = 62,000 \text{ lb}$$

$$V_s = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi} = \frac{139,000 - 62,000}{0.85} = 90,600 \text{ lb}$$

$$Vs < 3\sqrt{4000} \times 96 \times 6 = 109,000 \text{ lb}$$

$$A_v = \frac{90,600}{60,000 \times 0.707} = 2.14 \text{ pulg}^2$$

4 barras #5 (2 en cada dirección). Son 8 ramas cortando la sección crítica

Con barras dobladas a 45° y efectivas a través de las tres cuartas partes centrales de la longitud inclinada, la siguiente sección crítica está aproximadamente a tres cuartos de la profundidad efectiva, o sea, a 4.5 pulg más allá de la primera sección como se ilustra, lo cual da un perímetro de cortante de $33 \times 4 = 132$ pulg. El cortante mayorado en esta sección crítica es

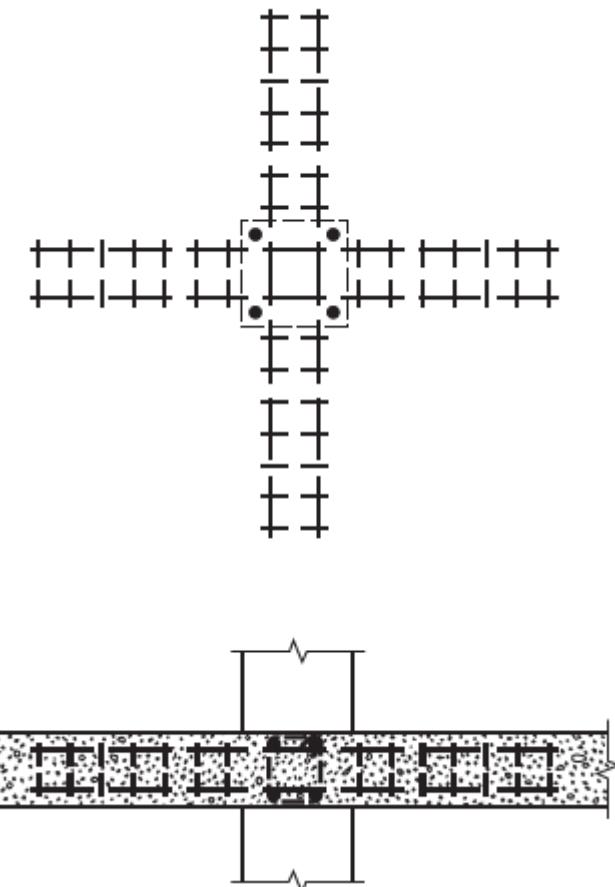
$$V_u = 350(20^2 - 2.75^2) = 137,000 \text{ lb}$$

$$\phi V_c = 0.85 \times 4\sqrt{4000} \times 132 \times 6 = 170,000 \text{ lb}$$

Diseño de Refuerzo de Vigas Integradas con Estribos Verticales

La primera sección crítica para diseño a cortante en la losa se toma a $d/2$ de la cara de la columna, como es usual, y los estribos, si se necesitan, se extienden hacia afuera desde la columna en las cuatro direcciones para el caso de una columna interior típica (en tres o dos direcciones

para columnas exteriores o de esquina, respectivamente), hasta que el concreto solo sea capaz de resistir el cortante, con $V_c = 4\sqrt{f'_c}b_o d$ en la segunda sección crítica?. Dentro de la región adyacente a la columna, donde la resistencia a cortante la suministra una combinación de concreto y de acero, la resistencia a cortante nominal V_n no debe exceder $6\sqrt{f'_c}b_o d$, según el Código ACI 11.12.3. En esta región, la contribución del concreto se reduce a $V_c = 2\sqrt{f'_c}b_o d$. La segunda sección crítica cruza cada viga integral a una distancia $d/2$ medida hacia afuera desde el último estribo y está localizada de modo que su perímetro b_o sea mínimo (es decir, para el caso típico, se define mediante líneas a 45° entre las vigas integrales). El espaciamiento requerido para los estribos verticales se encuentra con la ecuación (4.14a) del capítulo 4.



El problema de anclaje del refuerzo a cortante en placas planas delgadas es crítico, y siempre se deben proporcionar estribos en forma de aros cerrados que terminen en ganchos estándares y barras interiores en las esquinas para mejorar la resistencia al desgarramiento.

Ejemplo 13.5. Diseño de una viga integral con estribos verticales. La losa de placa plana de 7.5 pulg de espesor total y 6 pulg de espesor efectivo que aparece en la figura 13.22 está soportada por columnas cuadradas de 12 pulg, espaciadas a 15 pies entre centros en cada dirección. Una carga mayorada de 135 klb debe transferirse de la losa a una columna interior típica. Las resistencias del concreto y del acero son, respectivamente, $f'_c = 4000 \text{ lb/pulg}^2$ y $f_y = 60,000 \text{ lb/pulg}^2$. Determine si se requiere refuerzo a cortante en la losa y, si es así, diseñar vigas integrales con estribos para resistir el cortante en exceso.

Solución. La resistencia a cortante de diseño del solo concreto en la sección crítica a $d/2$ de la cara de la columna se calcula mediante la ecuación (13.11a), que es la que controla:

$$\phi V_c = 0.85 \times 4\sqrt{4000} \times 72 \times 6 = 92.9 \text{ klb}$$

Este valor es menor que $V_u = 135 \text{ klb}$, lo que indica que sí se requiere el refuerzo cortante. En este caso, la máxima resistencia de diseño que permite el Código ACI es

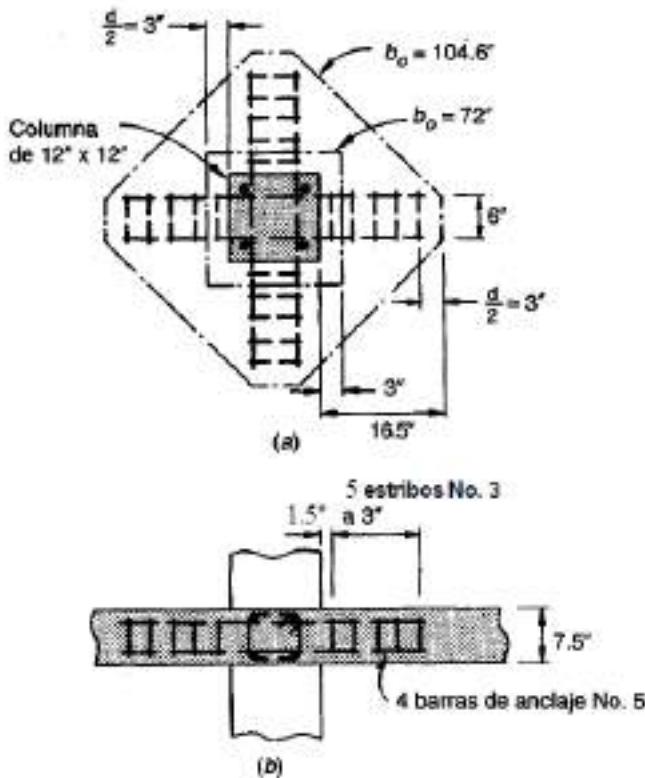
$$\phi V_n = 0.85 \times 6\sqrt{4000} \times 72 \times 6 = 139.4 \text{ klb}$$

satisfactoriamente superior al valor real de V_u . Cuando el cortante es resistido por acción conjunta del concreto y de las barras de refuerzo, la contribución del concreto se reduce a

$$\phi V_c = 0.85 \times 2\sqrt{4000} \times 72 \times 6 = 46.4 \text{ klb}$$

Sin embargo, el espaciamiento máximo de $d/2 = 3$ pulg controla en este caso y se utilizarán entonces estribos No. 3 con un espaciamiento constante de 3 pulg. En otros casos, el espaciamiento de los estribos puede aumentarse con la distancia desde la columna, a medida que el cortante en exceso sea menor, aunque esto complicaría la colocación del refuerzo y ahorraria, por lo general, muy poco acero. El perímetro requerido para la segunda sección crítica, en la cual el concreto solo puede resistir el cortante, se encuentra con base en la ecuación (13.11a) que es la que controla:

$$\phi V_c = 0.85 \times 4\sqrt{4000} \times b_o \times 6 = 135,000 \text{ lb}$$



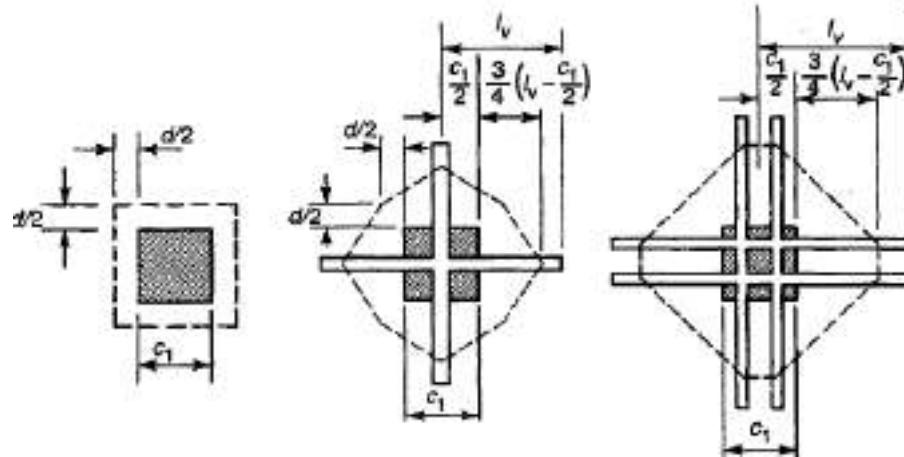
a partir de lo cual el perímetro mínimo es $b_o = 104.6$ pulg. Se puede confirmar fácilmente que esto requiere una proyección mínima de la sección crítica más allá de la cara de la columna de 14.25 pulg. Serán suficientes cinco estribos con un espaciamiento constante de 3 pulg, el primero colocado a $s/2 = 1.5$ pulg de la cara de la columna, como se indica en la figura 13.22; esto proporciona un perímetro b_o en la segunda sección crítica de $(16.5\sqrt{2} + 6) \times 4 = 117$ pulg, valor que excede el requerido.

Se proporcionarán cuatro barras longitudinales No. 5 en la parte interna de las esquinas de cada uno de los estribos en forma de aro cerrado, como se señala, para proveer un anclaje adecuado al refuerzo a cortante.

Diseño de Refuerzo de Conectores de Cortante Secciones Metálicas

Rigidez a flexión relativa

$$\alpha_v = \frac{E_s I_s}{E_c I_c}$$



fuerza cortante por conector $\frac{\alpha_v V}{\eta}$,
 η es el número de conectores
 α_v minimo=0.15

El valor de V_n puede incrementarse hasta $7\sqrt{f'c b d}$

La sección crítica de cada brazo a $\frac{3}{4}$ de la proyección cara de apoyo

Momento Plástico a cara de columna

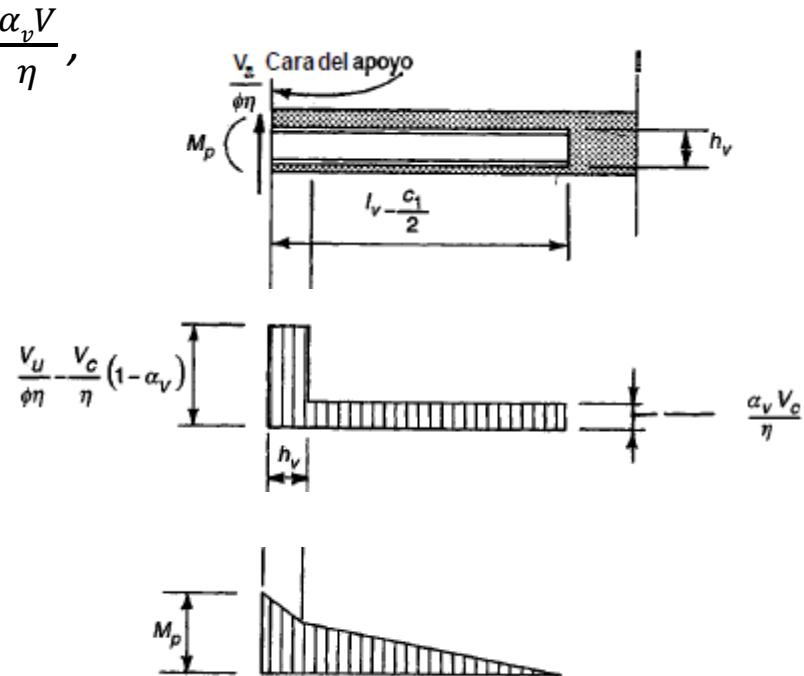
$$M_p = \frac{V_u}{2\phi\eta} \left[h_v + \alpha_v \left(l_v - \frac{c_1}{2} \right) \right]$$

Reducción de Momento en franja De columna

$$M_v = \frac{\phi\alpha_v V_u}{2\eta} \left(l_v - \frac{c_1}{2} \right)$$

La reducción no puede ser más que 30% Del momento total o M_p

La sección del concreto se toma (c_2+d)
 C_2 es la dirección perpendicular al conector



El ala a compresión no debe estar a más de 0.3 d del borde inferior de la losa

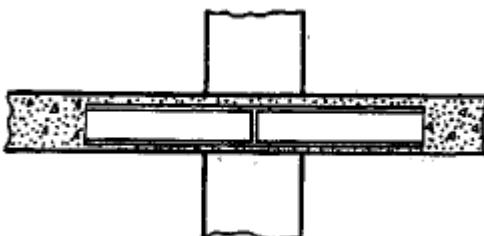
El perfil no debe tener una altura mayor que 70 veces el espesor del alama

Ejemplo 13.4. Diseño del refuerzo mediante conectores de cortante. Una losa tipo placa plana de $7\frac{1}{2}$ pulg de espesor está soportada por columnas cuadradas de 10 pulg y reforzada a flexión negativa con barras No. 5 espaciadas a 5 pulg entre centros en cada una de las direcciones, con una profundidad efectiva promedio igual a 6 pulg. La resistencia del concreto f'_c es 3000 lb/pulg². La losa debe transferir un cortante último V_u de 113,000 lb a la columna. ¿Qué tipo especial de refuerzo requiere la losa sobre la columna, en caso de necesitarse, para transferir el cortante último requerido?

Resistencia nominal cortante en sección crítica a $d/2$

$$V_c = 4\sqrt{f'_c}b_o d \quad V_c = 4\sqrt{3000} \times 64 \times 6 = 84.1 \text{ klb}$$

$$\phi V_c = 0.85 \times 84.1 = 71.5 \text{ klb.} < V_u, \text{ requiere refuerzo adicional}$$



Viga I $f_y = 36 \text{ ksi}$

Distancia libre inferior al acero $\frac{3}{4}$ "

Se permite un peralte de sección $4\frac{5}{8}$, usar 4"

Límite superior a cortante en la sección crítica

$$7\sqrt{3000}(64 \times 6) = 147 \text{ klb} \quad \phi V_n = 0.85 \times 147 = 125 \text{ klb}$$

$$b_o = \frac{V_u}{4\phi\sqrt{f'_c}d} = \frac{113,000}{4 \times 0.85\sqrt{3000} \times 6} = 101 \text{ pulg}$$

Longitud del conector

$$b_o = 4\sqrt{2}\left[\frac{c_1}{2} + \frac{3}{4}\left(l_v - \frac{c_1}{2}\right)\right] = 101 \text{ pulg} \quad l_v = 22.2 \text{ pulg}$$

Asumir un valor de la rigidez relativa
 $\alpha_v = 0.25$

Momento Plástico de la sección

$$M_p = \frac{113,000}{8 \times 0.90} [4 + 0.25(22.2 - 5)] = 130,000 \text{ lb-pulg}$$

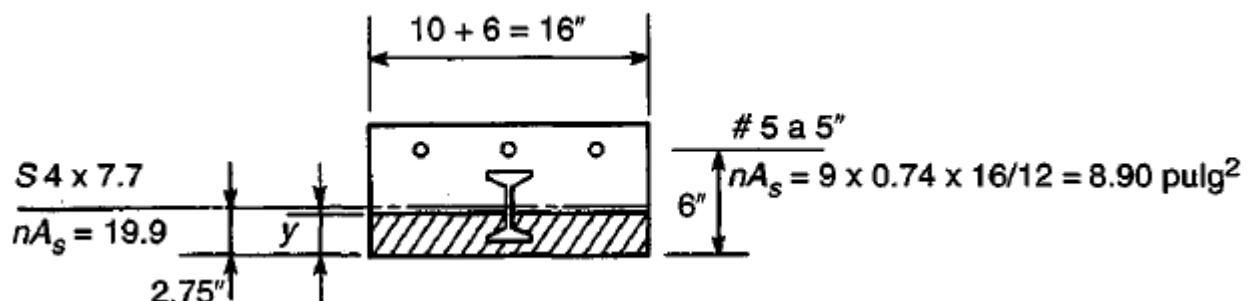
Para una sección S4x7.7 de la Tabla de secciones de Diseño de Acero

$A = 2.26 \text{ pulg}^2 \quad I_{xx} = 6.05 \text{ pulg}^4$

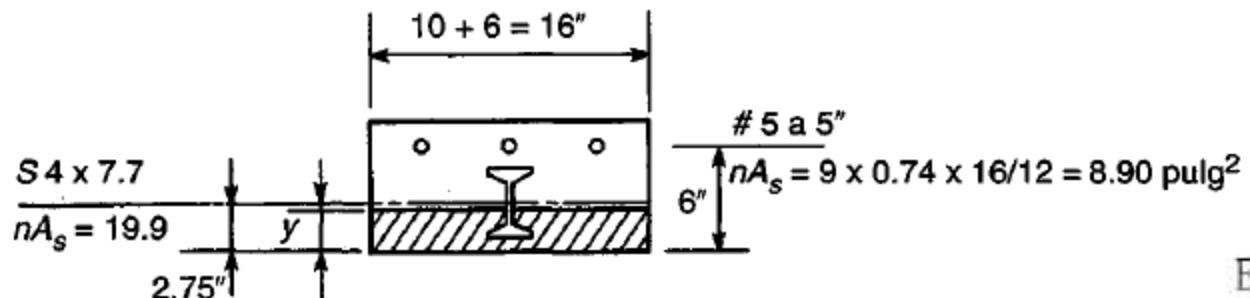
$Z_x = 3.5 \text{ pulg}^3$

$M_{pr} = F_y Z_x = 36000 \times 3.5 = 126000 \text{ lb-pulg}$

$E_s I_s = 29 \times 10^6 \times 6.05 = 175 \times 10^6 \text{ psi}$



$$y = \frac{8.90 \times 6 + 19.9 \times 2.75 + 8y^2}{8.90 + 19.9 + 16y} \quad y = 2.29 \text{ pulg}$$



$$M_v = \frac{0.90 \times 0.23 \times 113,000}{8} (24 - 5) = 55,600 \text{ lb-pulg}$$

Este valor es menor que M_p , como lo exige la especificación, y también debe ser menor que el 30 por ciento, del momento negativo de diseño en la franja de columna y menor que el cambio en el momento de la franja de columna en la distancia l_v .

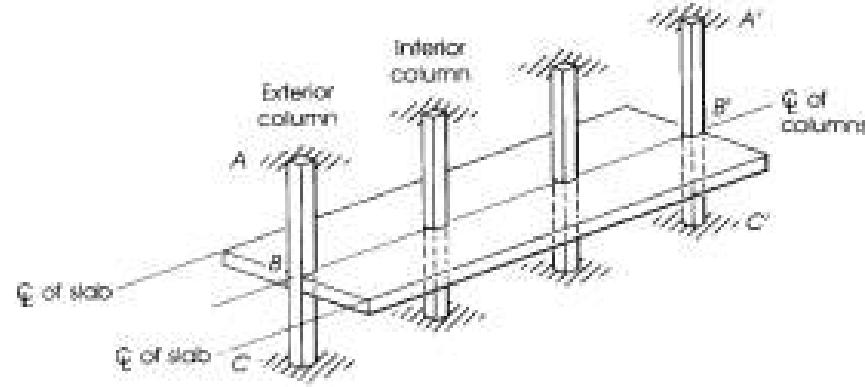
$$I_c = 1/3 \times 16 \times 2.29^3 + 8.90 \times 3.71^2 + 6 \times 9 + 19.9 \times 0.46^2 = 244 \text{ pulg}^4$$

$$E_c I_c = 3.1 \times 10^6 \times 244 = 756 \times 10^6 \text{ lb-pulg}^2$$

$$\alpha_v = \frac{174}{756} = 0.23$$

$$M_p = \frac{113,000}{8 \times 0.90} [4 + 0.23(22.2 - 5)] = 122,000 \text{ lb-pulg}$$

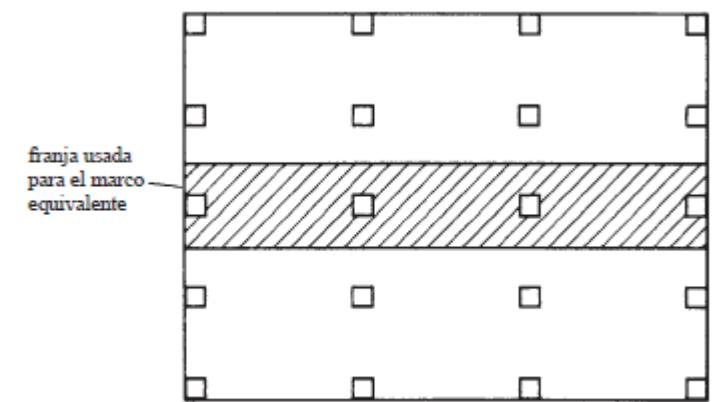
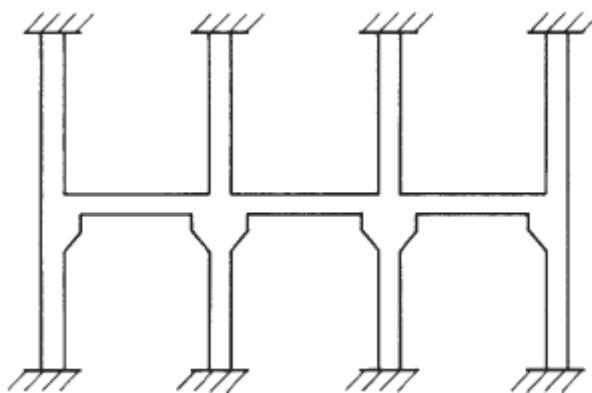
La viga de 4 pulg es adecuada. La longitud calculada l_v de 22.2 pulg se aumentará a 24 pulg por razones prácticas. La reducción en el momento de la franja de columna en la losa puede basarse en esta longitud real. A partir de la ecuación (13.15),



Diseño de Losas en Dos Direcciones

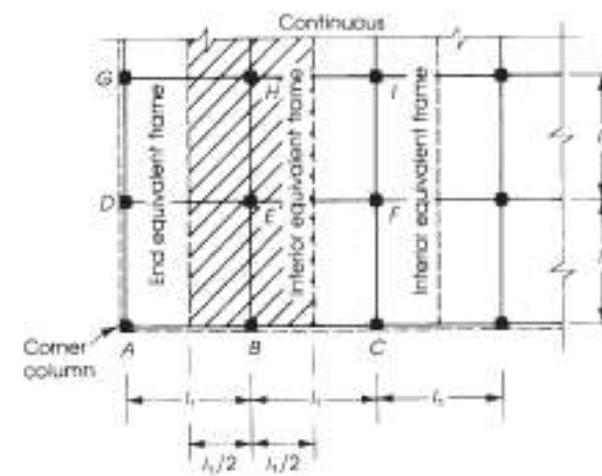
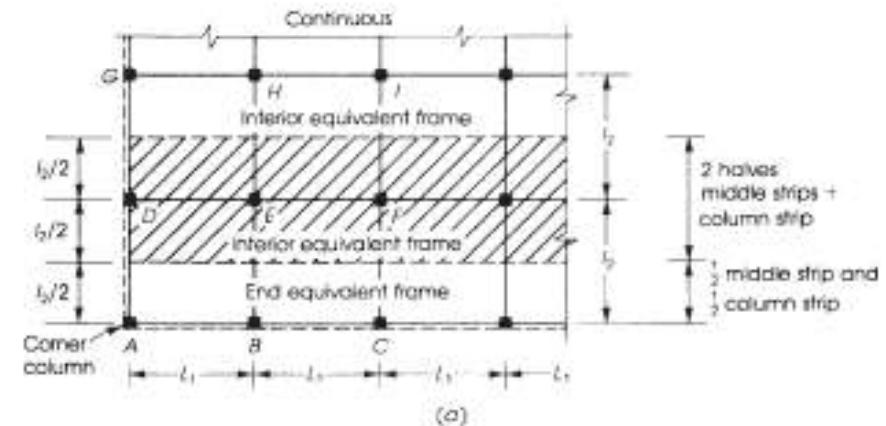
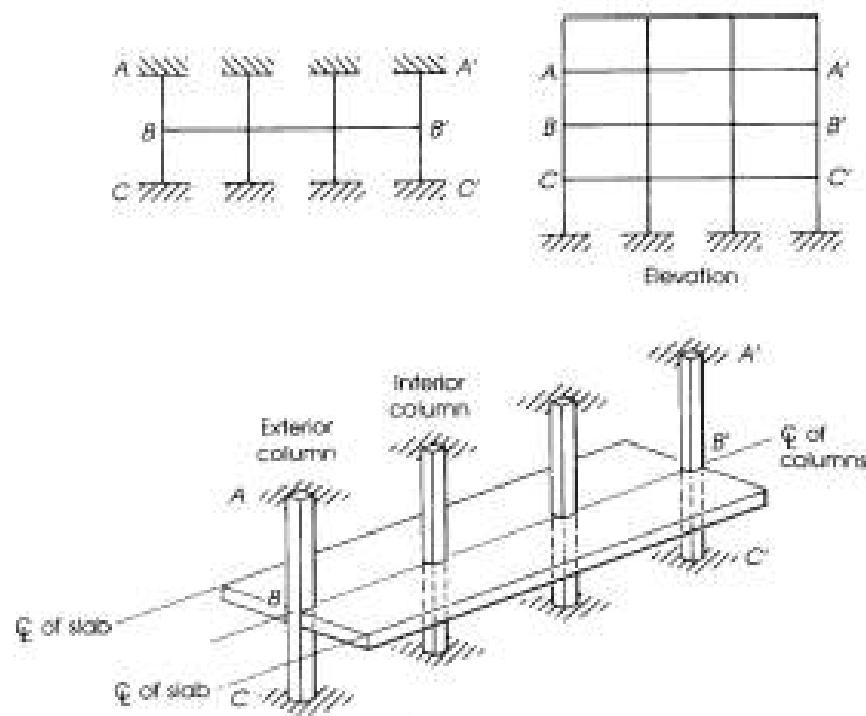
Método del Portal Equivalente

Conceptos Básicos y Distribución de Momentos



Método del Portal Equivalente

En este método, una porción de la estructura se considera aislada, como se muestra en la figura 16.2 y se analiza de manera parecida a como se trató el marco del edificio del ejemplo 14.2. En este método se usan las mismas rigideces que se usaron en el método directo de diseño. El método del marco equivalente, que es muy satisfactorio para marcos simétricos, así como para estructuras de dimensiones o cargas no comunes, se presenta en el capítulo 17 de este libro.



*El edificio en tres dimensiones se divide en marcos equivalentes
En dos dimensiones de ancho de línea media entre columnas.*

Se analiza los marcos en la longitud transversal y longitudinal de forma separada tomando en cuenta las rigideces de todos los elementos que llegan al marco

Conceptos Básicos

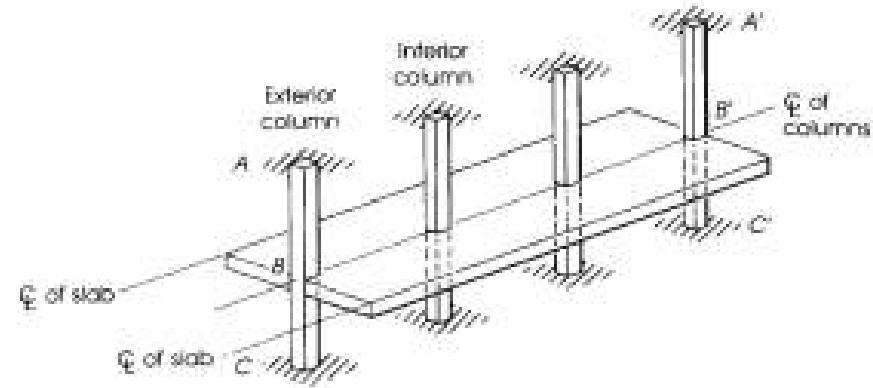
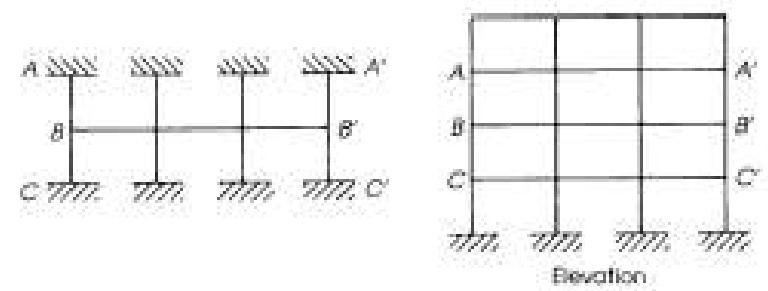
Diferencia con el Método Directo

Distribución de Momentos

Propiedades Vigas- Losas

Propiedades de las Columnas

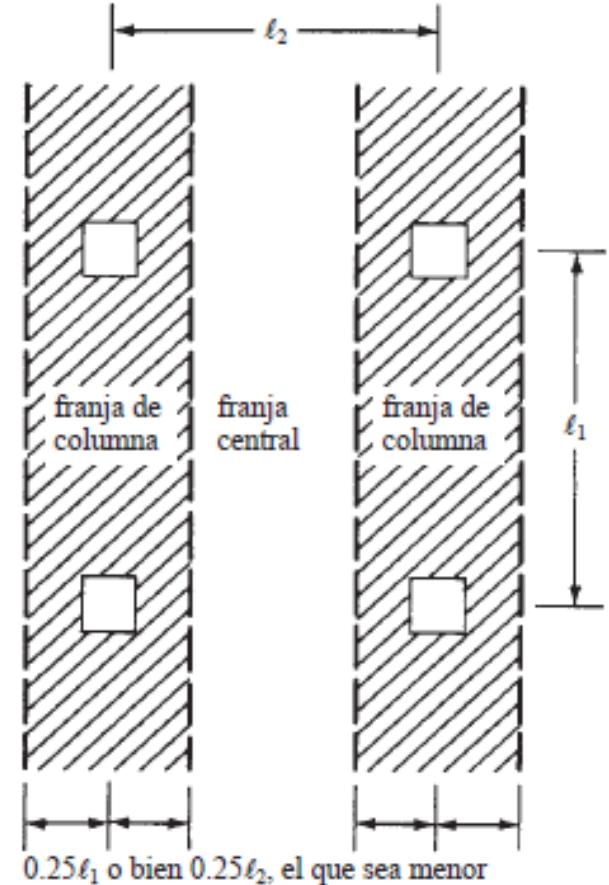
Determinación de Momentos Finales



Limitaciones del Método Directo

1. Tiene que haber por lo menos tres claros continuos en cada dirección.
2. Los tableros deben ser rectangulares, con la longitud del lado mayor de cualquier tablero no mayor que 2.0 veces la longitud del lado menor, midiendo las longitudes de centro a centro de los apoyos.
3. Las longitudes de claros sucesivos en cualquier dirección no deben diferir en más de un tercio del claro más grande.
4. Las columnas no deben estar situadas con una excentricidad mayor que 10% de la longitud del claro en la dirección de la excentricidad desde cualquier eje entre las líneas centrales de columnas sucesivas.
5. La carga viva no factorizada no deberá ser mayor que dos veces la carga muerta no factorizada. Todas las cargas deben ser de gravedad y deben estar distribuidas uniformemente sobre un tablero completo.
6. Si un tablero está soportado en todos sus lados por vigas, la rigidez relativa de esas vigas en las dos direcciones perpendiculares, determinada con la siguiente expresión, no deberá ser menor que 0.2 ni mayor que 5.0.

$$\frac{\alpha_{f1} \ell_2^2}{\alpha_{f2} \ell_1^2}$$



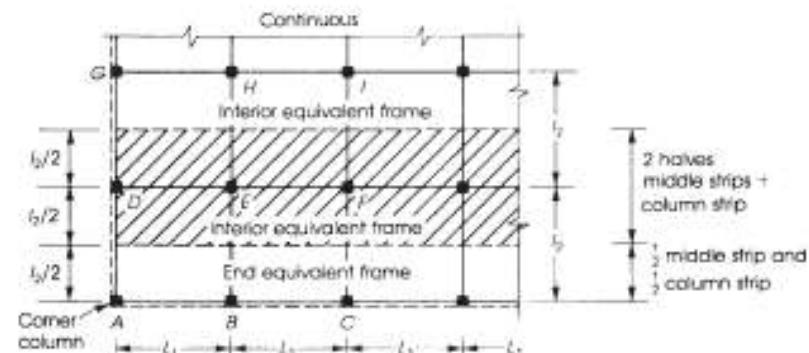
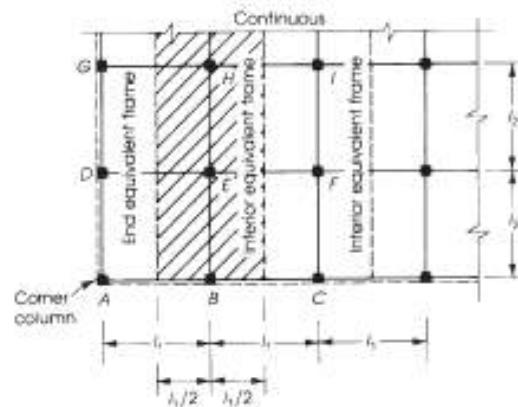
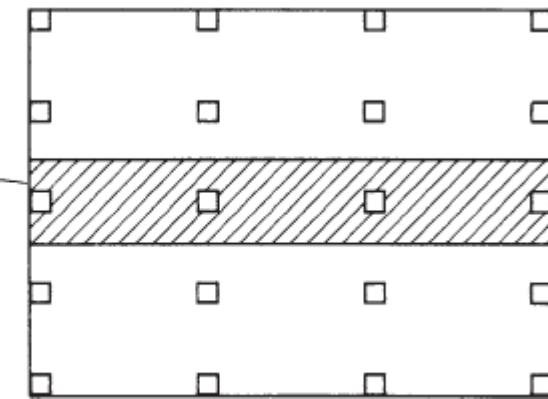
Conceptos Básicos y diferencia con el Método Directo

El método del portal equivalente permite obtener los momentos en la línea del marco continuo
De una manera más exacta sin importar la relación entre las luces del marco utilizando varios ciclos
De distribución de fuerzas.

Por el contrario el método directo utiliza en este paso un factor inicial aproximado para obtener esos
Momentos “**f1**” , y la distancias entre luces tienen que ser similares

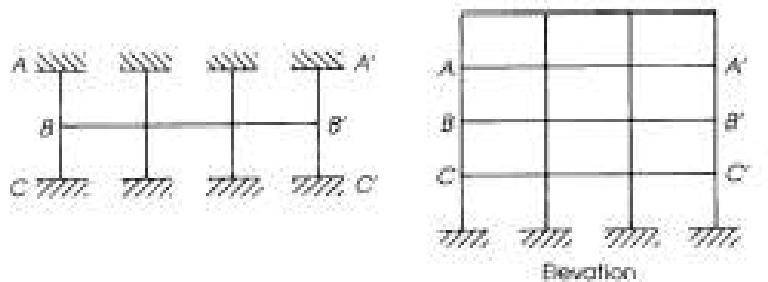
Cualquiera de los dos método a usar , luego de obtenidos esos momentos se
deben encontrar los momentos en franjas de columnas y losas, con las fórmulas y
tablas ya establecidas

Se realiza un análisis elástico de un marco estructural que consiste en una fila
de columnas equivalente y de losas horizontales con una longitud de un tablero y
con un ancho transversal igual a la distancia entre las líneas centrales de los tableros
a cada lado de las columnas en consideración. Este procedimiento se debe hacer en las dos direcciones

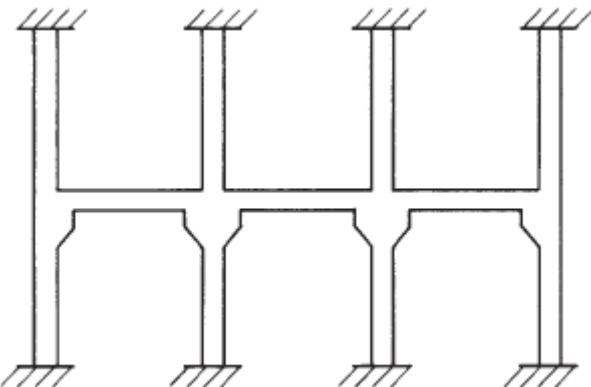


Conceptos Básicos y diferencia con el Método Directo

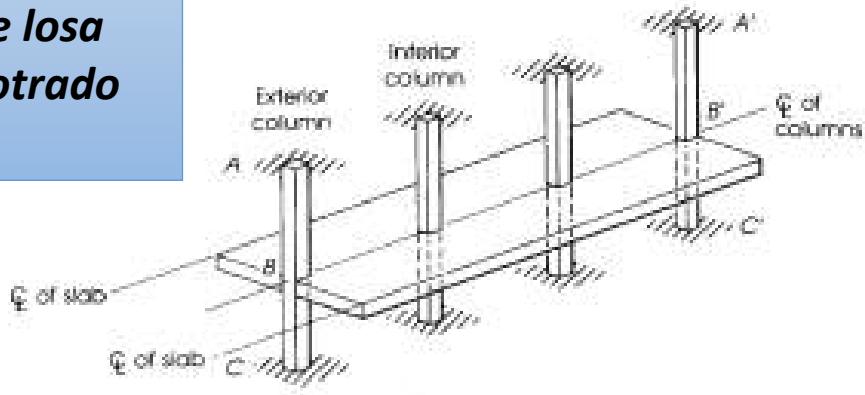
Para las cargas verticales cada piso incluyendo las columnas arriba y abajo, se toman por separado. Los extremos de las columnas se asumen empotrados



Si se tiene gran número de tableros, el momento en un nodo de una viga de losa puede obtenerse satisfactoriamente suponiendo que el miembro está empotrado a dos tableros de distancia.



Para carga lateral se analiza el marco completo del edificio y luego se combinan con los efectos de gravedad por piso



Se debe cumplir con los espesores de acuerdo al ACI del Método Directo, la verificación de Cortante u la Trasmisión de Momentos y Cortante de losa a columna

El análisis se hace para una carga viva total aplicada a todos los marcos, a menos que esta carga no factorizada exceda 0.75 veces la carga muerta no factorizada. Se usará un patrón de $\frac{3}{4}$ de la carga viva para calcular los momentos y fuerzas cortantes

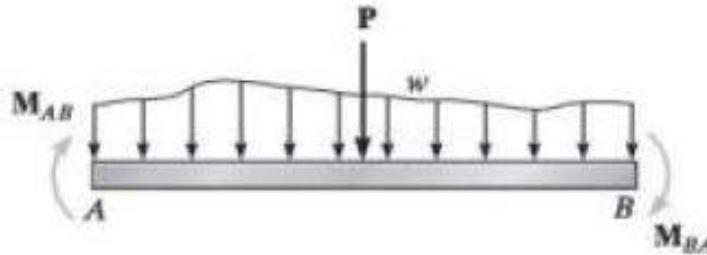
Introducción a Distribución de Momentos

Definición

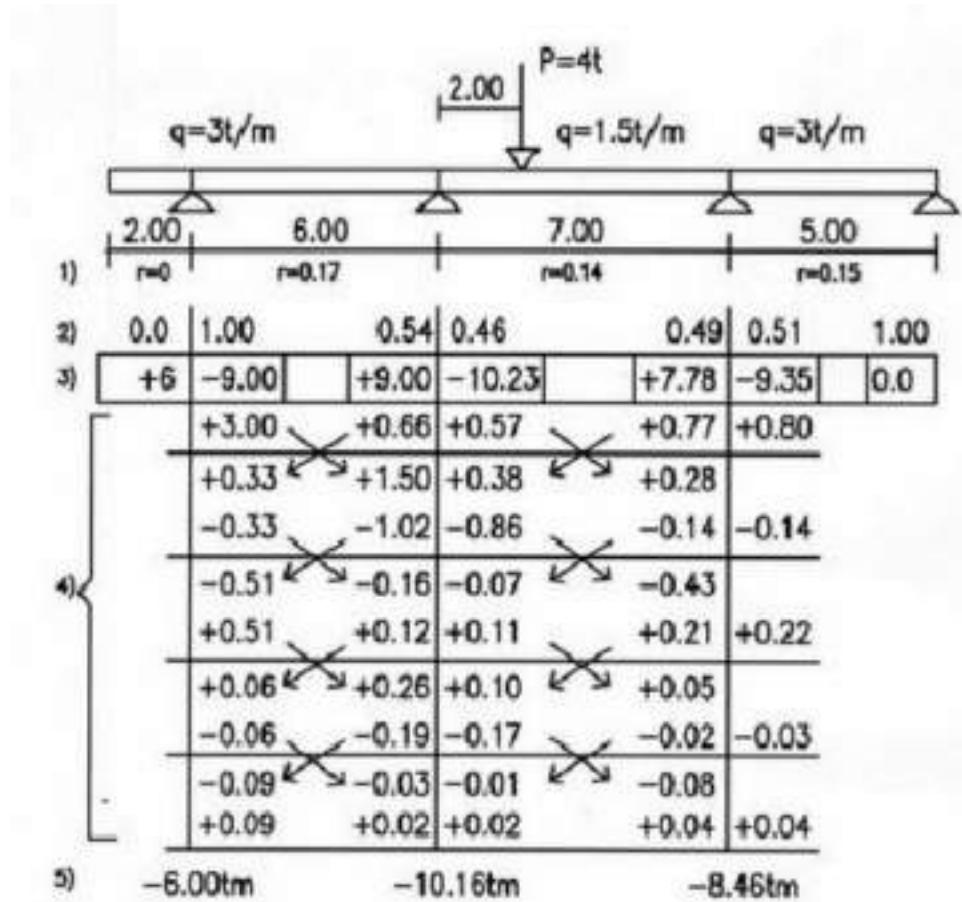
Es un método de aproximaciones sucesivas que puede Realizarse con cualquier grado de precisión deseado

Se supone inicialmente que cada junta de una estructura está fija. Después al liberar y bloquear cada junta sucesiva, los momentos en las juntas se distribuyen y equilibran hasta que las juntas tiendan a girar a sus posiciones finales

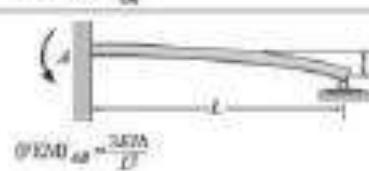
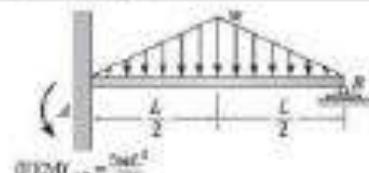
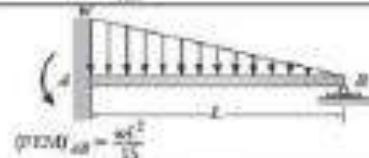
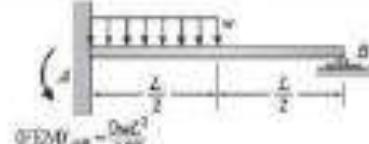
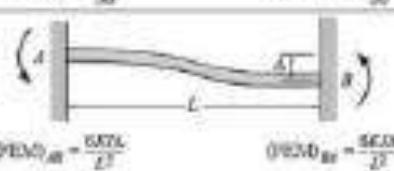
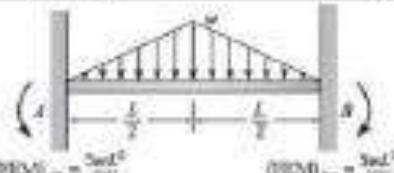
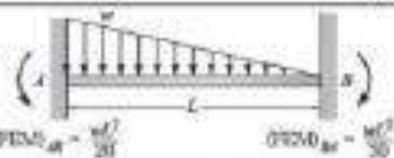
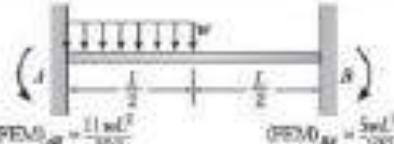
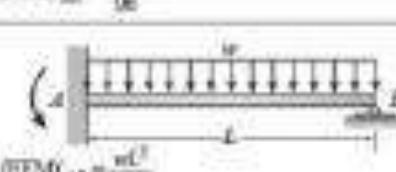
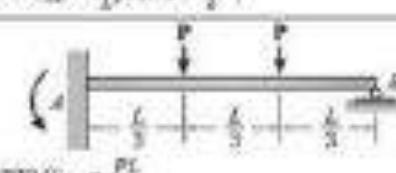
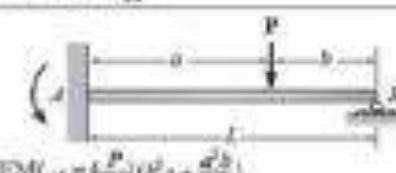
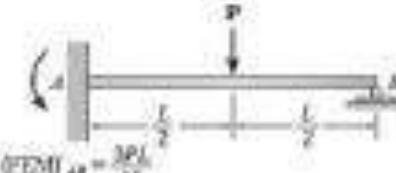
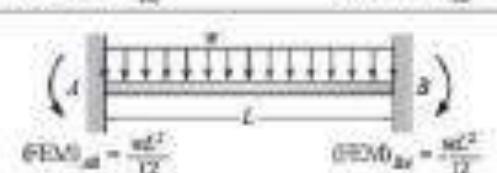
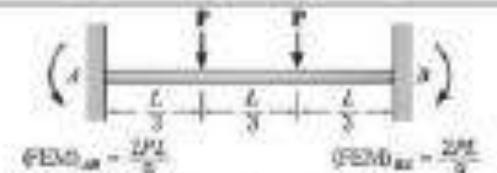
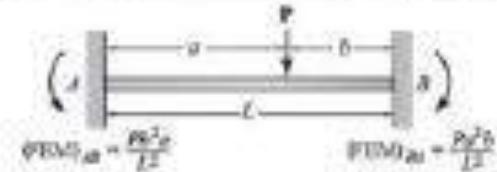
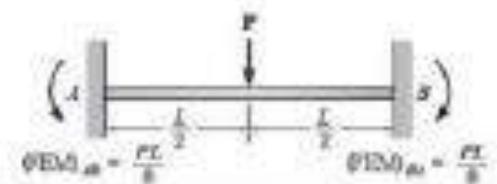
Convención de Signos



- Favor de las manecillas del reloj positivo
- Contra de las manecillas del reloj negativo



Momento en Extremos Fijos (FEM)



Factor de Rigidez del Elemento

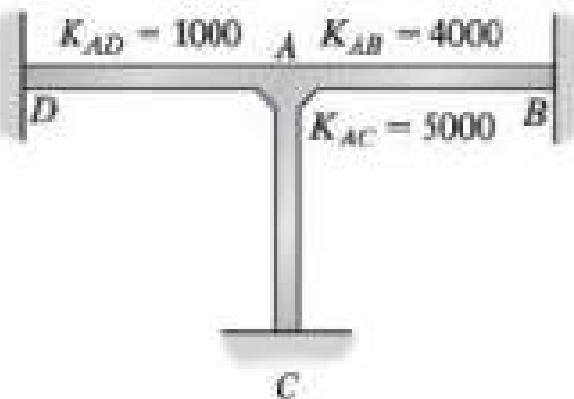
$$K = \frac{4EI}{L}$$

Extremo lejano fijo



Factor de Rigidez en la Junta

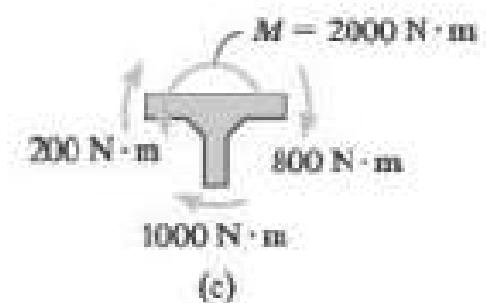
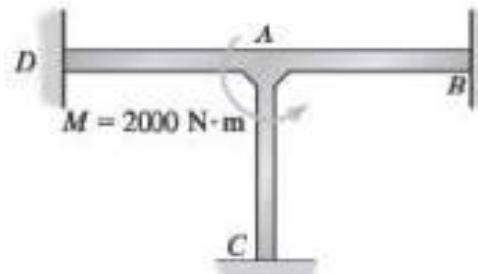
$$K_t = \sum K_i \quad K_t = \sum K_i = 1000 + 4000 + 5000 = 10000$$



Factor de Distribución (DF)

$$DF_i = \frac{M_i}{M} = \frac{K_i \theta}{\theta \sum K_i}$$

$$DF = \frac{K}{\sum K}$$



$$DF_{AB} = 4000 / 10000 = 0.4$$

$$DF_{AC} = 5000 / 10000 = 0.5$$

$$DF_{AD} = 1000 / 10000 = 0.1$$

Modificación del Factor de Rígidez del Elemento (Extremo articulado)

$$K = \frac{3EI}{L}$$

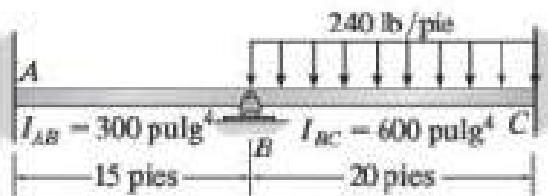
Extremo lejano articulado
o con soporte de rodillo

Factor de Traslado

Se realizan ciclos sucesivos de distribución y traslado de Momentos hasta que los momentos en las juntas tiendan a cero.

- *Se distribuyen los momentos de acuerdo al factor de distribución e invirtiendo su signo*
- *Se trasladan esos momentos distribuidos al nodo próximo con un valor de M/2*
- *Se repite el procedimiento hasta que los momentos de traslado tienda a cero*
- *El factor de distribución en el extremo empotrado es cero y no se trasladan momento , solo reciben momento del nodo vecino.*
- *El factor de distribución de articulación externa es igual a 1.*

Encuentre los momentos en los extremos y las reacciones de la viga mostrada



$$K_{BA} = \frac{4E(300)}{15} = 4E(20) \text{ pulg}^4/\text{pie} \quad K_{BC} = \frac{4E(600)}{20} = 4E(30) \text{ pulg}^4/\text{pie}$$

$$DF_{BA} = \frac{4E(20)}{AE(20) + 4E(30)} = 0.4$$

$$DF_{BC} = \frac{4E(30)}{4E(20) + 4E(30)} = 0.6$$

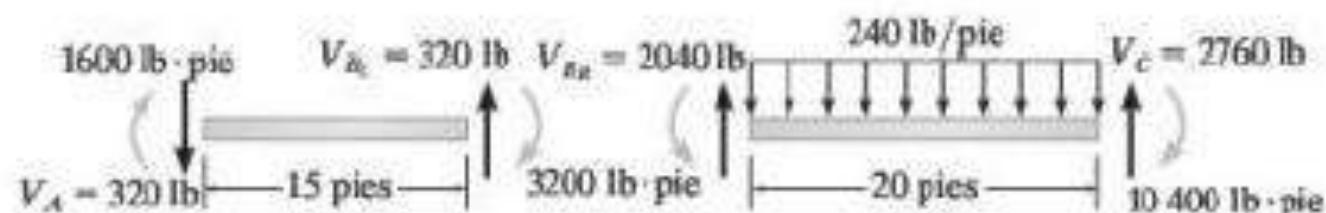
$$DF_{AB} = \frac{4E(20)}{\infty + 4E(20)} = 0$$

$$DF_{CB} = \frac{4E(30)}{\infty + 4E(30)} = 0$$

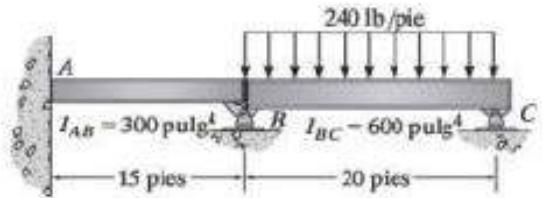
$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{240(20)^2}{12} = -8000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{240(20)^2}{12} = 8000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Junta	A	B	C
Elemento	AB	BA	BC
DF	0	0.4	0.6
FEM			-8000 8000
Dist,TR	1600 ← 3200		4800 → 2400
ΣM	1600	3200	-3200 10 400



Determine los momentos internos en los soportes de la viga que se muestra en la figura 12-14a. El momento de inercia de los dos claros se muestra en la figura.



SOLUCIÓN

Como la viga está soportada por rodillos en su extremo lejano *C*, la rigidez del claro *BC* se calculará con base en $K = 3EI/L$. Se tiene

$$K_{AB} = \frac{4EI}{L} = \frac{4E(300)}{15} = 80E$$

$$K_{BC} = \frac{3EI}{L} = \frac{3E(600)}{20} = 90E$$

Por lo tanto,

$$DF_{AB} = \frac{80E}{\infty + 80E} = 0$$

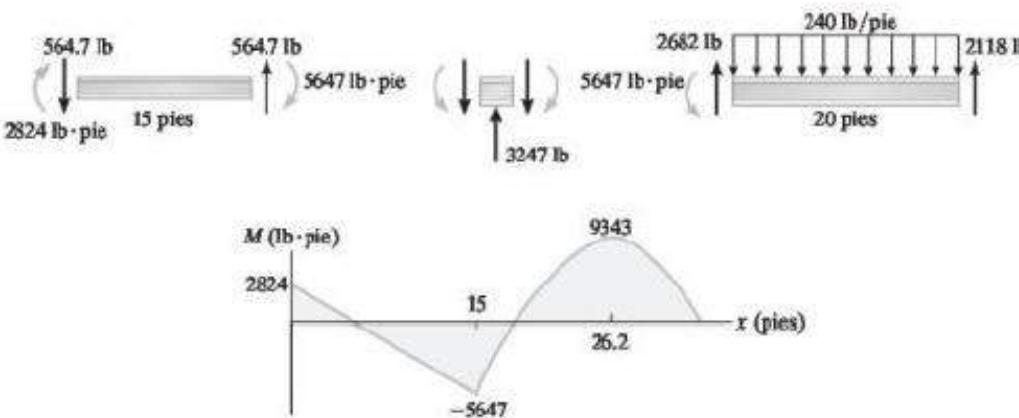
$$DF_{BA} = \frac{80E}{80E + 90E} = 0.4706$$

$$DF_{BC} = \frac{90E}{80E + 90E} = 0.5294$$

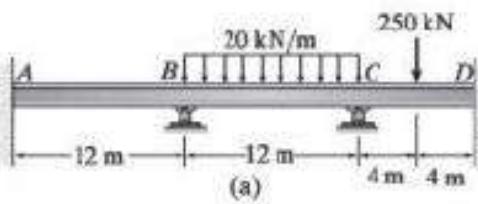
$$DF_{CB} = \frac{90E}{90E} = 1$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{8} = \frac{-240(20)^2}{8} = -12\,000 \text{ lb}\cdot\text{pie}$$

Junta	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>
Elemento	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>
DF	0	0.4706	0.5294	1
FEM			-12 000	
Dist.		5647.2	6352.8	
CO	2823.6			
ΣM	2823.6	5647.2	-5647.2	0



Determine los momentos internos en cada soporte de la viga que se muestra en la figura 12-7a. EI es constante.



(a)

SOLUCIÓN

Primero deben calcularse los factores de distribución en cada junta.* Los factores de rigidez para los elementos son

$$K_{AB} = \frac{4EI}{12} \quad K_{BC} = \frac{4EI}{12} \quad K_{CD} = \frac{4EI}{8}$$

Por lo tanto,

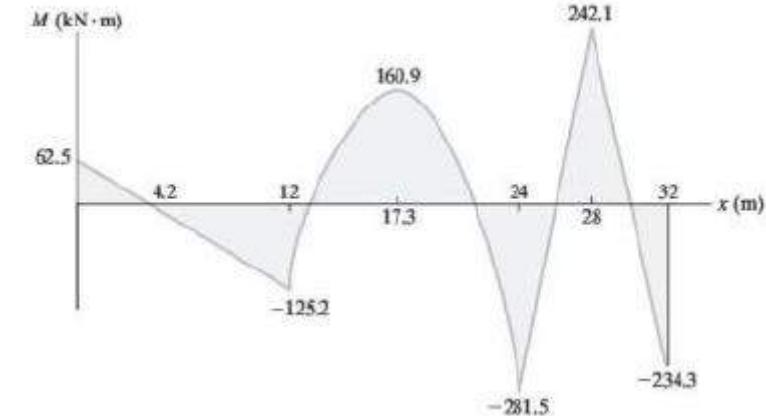
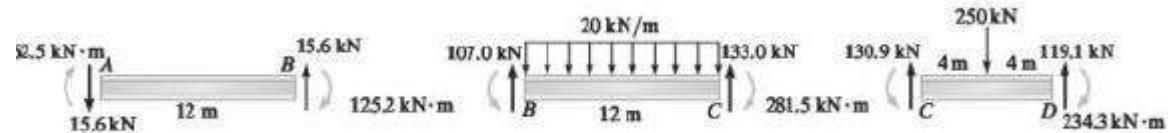
$$DF_{AB} = DF_{DC} = 0 \quad DF_{BA} = DF_{BC} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/12} = 0.5$$

$$DF_{CB} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.4 \quad DF_{CD} = \frac{4EI/8}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.6$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = \frac{-20(12)^2}{12} = -240 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{20(12)^2}{12} = 240 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(FEM)_{CD} = -\frac{PL}{8} = \frac{-250(8)}{8} = -250 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (FEM)_{DC} = \frac{PL}{8} = \frac{250(8)}{8} = 250 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Junta	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
Elemento	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF	0	0.5	0.5	0.4	0.6	0
FEM Dist.		120	120	-240 4	240 6	-250 250
TR Dist.	60	-1	-1	60 -24	60 -36	3 -18
TR Dist.	-0.5	6	-12	-0.5 0.2	0.3 0.2	-18 0.2
TR Dist.	3	-0.05	-0.05	-1.2 -1.8	-1.8 0.01	-0.9 0.01
TR Dist.	-0.02	0.3	0.3	-0.02 0.01	0.01 -234.3	-0.9 234.3
ΣM	62.5	125.2	-125.2	281.5	-281.5	234.3



Determine el momento interno en cada soporte de la viga que se muestra en la figura 12-8a. Se indica el momento de inercia de cada claro.

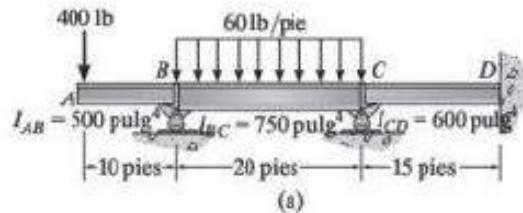


Figura 12-8

SOLUCIÓN

En este problema no hay un momento que se distribuya en el claro saliente AB ; por lo tanto, el factor de distribución $(DF)_{BA} = 0$. La rigidez del claro BC se basa en $4EI/L$ puesto que el oscilador no está en el extremo lejano de la viga. Los factores de rigidez, los factores de distribución y los momentos de extremo fijo se calculan de la siguiente manera:

$$K_{BC} = \frac{4E(750)}{20} = 150E \quad K_{CD} = \frac{4E(600)}{15} = 160E$$

$$DF_{BC} = 1 - (DF)_{BA} = 1 - 0 = 1$$

$$DF_{CB} = \frac{150E}{150E + 160E} = 0.484$$

$$DF_{CD} = \frac{160E}{150E + 160E} = 0.516$$

$$DF_{DC} = \frac{160E}{\infty + 160E} = 0$$

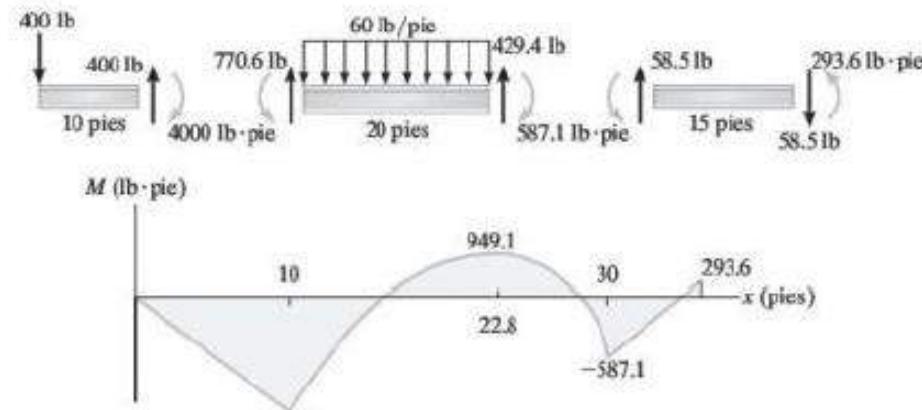
Debido a la saliente,

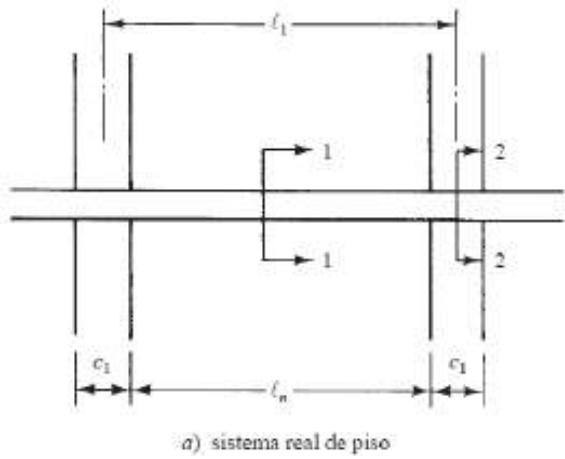
$$(FEM)_{BA} = 400 \text{ lb}(10 \text{ pies}) = 4000 \text{ lb}\cdot\text{pie}$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{60(20)^2}{12} = -2000 \text{ lb}\cdot\text{pie}$$

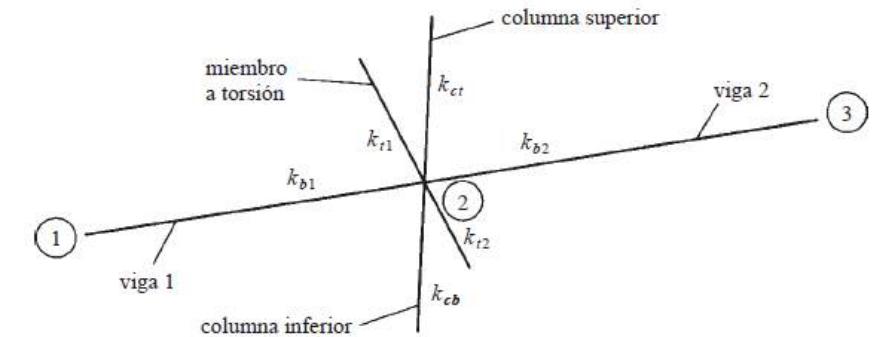
$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{60(20)^2}{12} = 2000 \text{ lb}\cdot\text{pie}$$

Junta	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
Elemento		<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF	0	1	0.484	0.516	0
FEM	4000	-2000	2000		
Dist.		-2000	-968	-1032	
TR		-484	-1000		-516
Dist.		484	484	516	
TR		242	242		258
Dist.		-242	-117.1	-124.9	
TR		-58.6	-121		-62.4
Dist.		58.6	58.6	62.4	
TR		29.3	29.3		31.2
Dist.		-29.3	-14.2	-15.1	
TR		-7.1	-14.6		-7.5
Dist.		7.1	7.1	7.6	
TR		3.5	3.5		3.8
Dist.		-3.5	-1.7	-1.8	
TR		-0.8	-1.8		-0.9
Dist.		0.8	0.9	0.9	
TR		0.4	0.4		0.4
Dist.		-0.4	-0.2	-0.2	
TR		-0.1	-0.2		-0.1
Dist.		0.1	0.1	0.1	
ΣM	4000	-4000	587.1	-387.1	-293.6





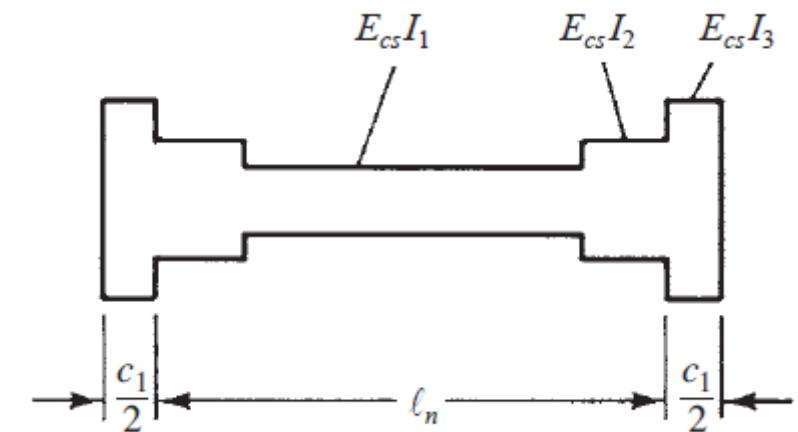
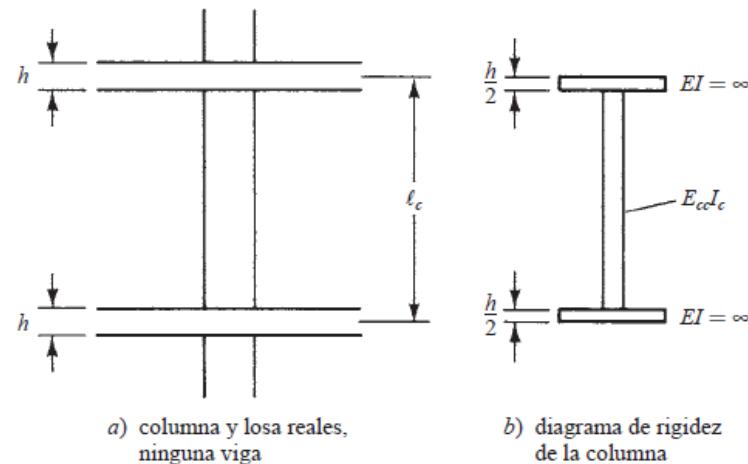
a) sistema real de piso



Diseño de Losas en Dos Direcciones

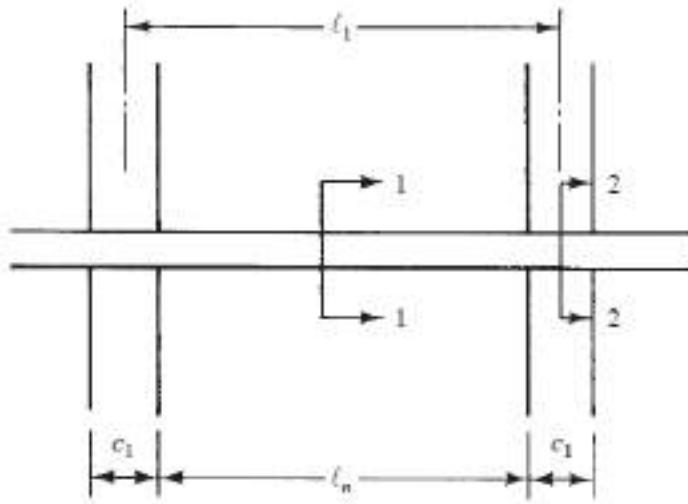
Método del Portal Equivalente

Propiedades de los Elementos, Análisis y Momentos Finales

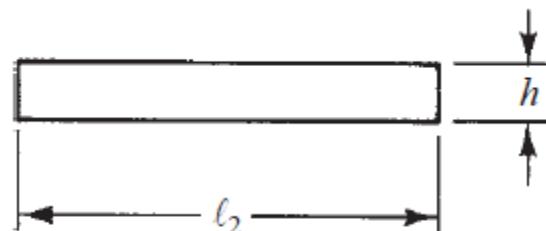


Propiedades Viga- Losa

Sistema de Losa sin Vigas



a) sistema real de piso



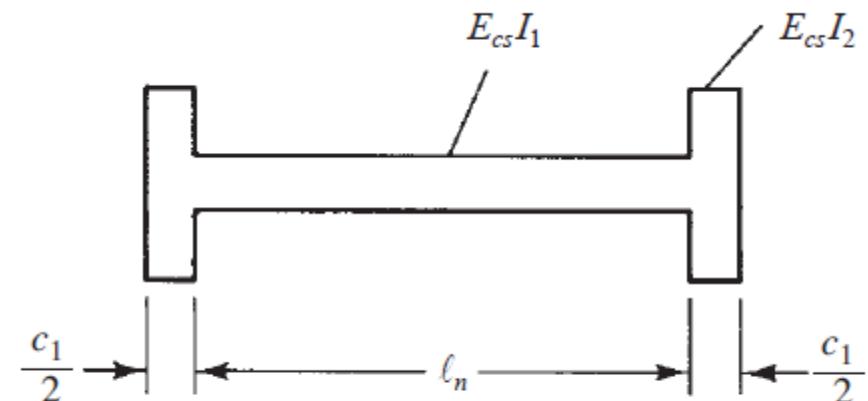
b) sección 1-1

$$I_1 = \left(\frac{1}{12}\right)(\ell_2)(\ell_n)^3$$



c) sección equivalente 2-2

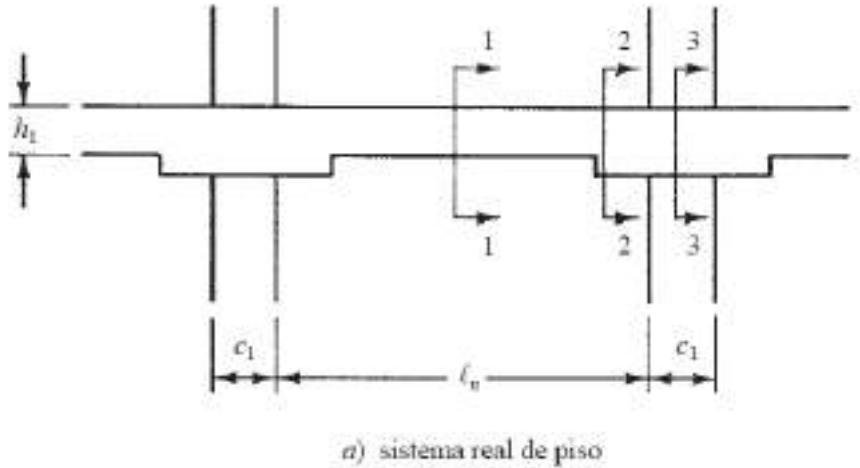
$$I_2 = \frac{I_1}{(1 - \frac{c_1}{\ell_n})^2}$$



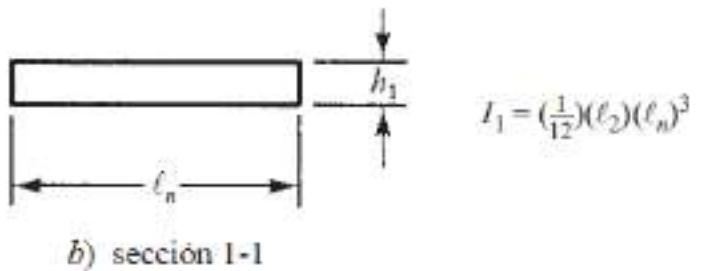
d) diagrama de rigidez de viga losa equivalente

Propiedades Viga- Losa

Sistema de Losa con Ábacos

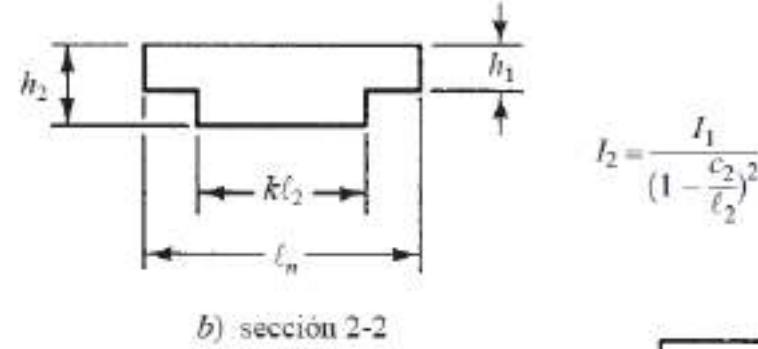


a) sistema real de piso



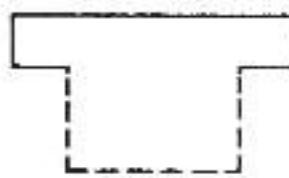
b) sección 1-1

$$I_1 = \left(\frac{1}{12}\right)(\ell_2)(\ell_n)^3$$



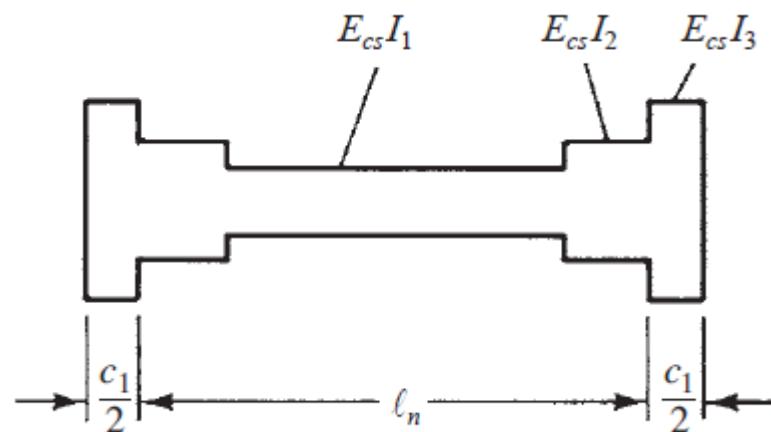
b) sección 2-2

$$I_2 = \frac{I_1}{(1 - \frac{c_2}{\ell_2})^2}$$



d) sección equivalente 3-3

$$I_3 = \frac{I_2}{(1 - \frac{c_2}{\ell_2})^2}$$



Losas sin ábaco

Tablas de FEM, factores de rigidez y transporte

Tabla A.16 Constantes de distribución de momentos en losas sin ábacos^a

Dimensión de la columna	Carga uniforme FEM = Coef. ($w\ell_2\ell_1^2$)		Factor de rigidez [†]		Factor de transporte			
	$\frac{c_{1A}}{\ell_1}$	$\frac{c_{1B}}{\ell_1}$	M_{AB}	M_{BA}	k_{AB}	k_{BA}	COF_{AB}	COF_{BA}
0.00	0.00	0.083	0.083	4.00	4.00	0.500	0.500	
	0.05	0.083	0.084	4.01	4.04	0.504	0.500	
	0.10	0.082	0.086	4.03	4.15	0.513	0.499	
	0.15	0.081	0.089	4.07	4.32	0.528	0.498	
	0.20	0.079	0.093	4.12	4.56	0.548	0.495	
	0.25	0.077	0.097	4.18	4.88	0.573	0.491	
	0.30	0.075	0.102	4.25	5.28	0.603	0.485	
	0.35	0.073	0.107	4.33	5.78	0.638	0.478	
	0.05	0.084	0.084	4.05	4.05	0.503	0.503	
	0.10	0.083	0.086	4.07	4.15	0.513	0.503	
0.05	0.15	0.081	0.089	4.11	4.33	0.528	0.501	
	0.20	0.080	0.092	4.16	4.58	0.548	0.499	
	0.25	0.078	0.096	4.22	4.89	0.573	0.494	
	0.30	0.076	0.101	4.29	5.30	0.603	0.489	
	0.35	0.074	0.107	4.37	5.80	0.638	0.481	
	0.10	0.085	0.085	4.18	4.18	0.513	0.513	
	0.15	0.083	0.088	4.22	4.36	0.528	0.511	
	0.20	0.082	0.091	4.27	4.61	0.548	0.508	
	0.25	0.080	0.095	4.34	4.93	0.573	0.504	
	0.30	0.078	0.100	4.41	5.34	0.602	0.498	
0.10	0.35	0.075	0.105	4.50	5.85	0.637	0.491	
	0.15	0.086	0.086	4.40	4.40	0.526	0.526	
	0.20	0.084	0.090	4.46	4.65	0.546	0.523	
	0.25	0.083	0.094	4.53	4.98	0.571	0.519	
	0.30	0.080	0.099	4.61	5.40	0.601	0.513	
	0.35	0.078	0.104	4.70	5.92	0.635	0.505	
	0.20	0.088	0.088	4.72	4.72	0.543	0.543	

Tabla A.16 (Continuación)

Dimensión de la columna	Carga uniforme FEM = Coef. ($w\ell_2\ell_1^2$)	Factor de rigidez [†]	Factor de transporte				
$\frac{c_{1A}}{\ell_1}$	$\frac{c_{1B}}{\ell_1}$	M_{AB}	M_{BA}	k_{AB}	k_{BA}	COF_{AB}	COF_{BA}
0.20	0.25	0.086	0.092	4.79	5.05	0.568	0.539
	0.30	0.083	0.097	4.88	5.48	0.597	0.532
	0.35	0.081	0.102	4.99	6.01	0.632	0.524
	0.25	0.090	0.090	5.14	5.14	0.563	0.563
	0.30	0.088	0.095	5.24	5.58	0.592	0.556
	0.35	0.085	0.100	5.36	6.12	0.626	0.548
	0.30	0.092	0.092	5.69	5.69	0.585	0.585
	0.35	0.090	0.097	5.83	6.26	0.619	0.576
0.35	0.35	0.095	0.095	6.42	6.42	0.609	0.609

^aAplicable cuando $c_1/\ell_1 = c_2/\ell_2$. Para otras relaciones entre éstas, las constantes darán un pequeño error.

[†]La rigidez es $K_{AB} = k_{AB}E\frac{\ell_2 h^3}{12\ell_1}$ y $K_{BA} = k_{BA}E\frac{\ell_2 h^3}{12\ell_1}$

Losa con ábaco

Tabla A.17 Constantes de distribución de momentos en losas con ábacos*

Dimensión de la columna c_{1A}/ℓ_1	Carga uniforme FEM = Coef. ($w\ell_2^2/\ell_1^2$)		Factor de rigidez†		Factor de transporte	
	M_{AS}	M_{RA}	k_{AS}	k_{RA}	COF _{AS}	COF _{RA}
0.00	0.00	0.088	4.78	4.78	0.541	0.541
	0.05	0.087	4.80	4.82	0.545	0.541
	0.10	0.087	4.83	4.94	0.553	0.541
	0.15	0.085	0.93	4.87	5.12	0.567
	0.20	0.084	0.96	4.93	5.36	0.585
	0.25	0.082	0.100	5.00	5.68	0.606
	0.30	0.080	0.105	5.09	6.07	0.631
	0.05	0.088	0.088	4.84	4.84	0.545
	0.10	0.087	0.090	4.87	4.95	0.553
	0.15	0.085	0.093	4.91	5.13	0.567
0.05	0.20	0.084	0.096	4.97	5.38	0.584
	0.25	0.082	0.100	5.05	5.70	0.606
	0.30	0.080	0.104	5.13	6.09	0.632
	0.10	0.089	0.089	4.98	4.98	0.553
	0.15	0.088	0.092	5.03	5.16	0.566
	0.20	0.086	0.094	5.09	5.42	0.584
	0.25	0.084	0.099	5.17	5.74	0.606
	0.30	0.082	0.103	5.26	6.13	0.631
	0.15	0.090	0.090	5.22	5.22	0.565
	0.20	0.089	0.094	5.28	5.47	0.583
0.15	0.25	0.087	0.097	5.37	5.80	0.604
	0.30	0.085	0.102	5.46	6.21	0.630
	0.20	0.092	0.092	5.55	5.55	0.580
	0.25	0.090	0.096	5.64	5.88	0.602
	0.30	0.088	0.100	5.74	6.30	0.627
	0.25	0.094	0.094	5.98	5.98	0.598
	0.30	0.091	0.098	6.10	6.41	0.622
	0.30	0.095	0.095	6.54	6.54	0.617
	0.30	0.095	0.095	6.54	6.54	0.617

*Aplicable cuando $c_1/\ell_1 = c_2/\ell_2$. Para otras relaciones entre éstas, las constantes darán un pequeño error.

†La rigidez es $K_{AS} = k_{AS}E\frac{\ell_2 h^3}{12\ell_1}$ y $K_{RA} = k_{RA}E\frac{\ell_2 h^3}{12\ell_1}$.

Tabla A.18 Constantes de distribución de momentos para miembros de viga-losa con capiteles en las columnas

c_1/ℓ_1	c_2/ℓ_2	M	k	C	c_1/ℓ_1	c_2/ℓ_2	M	k	C
					c_1/ℓ_1	c_2/ℓ_2	M	k	C
0.00	0.00	0.00	0.083	4.000	0.500	0.00	0.083	4.000	0.500
		0.05	0.083	4.000	0.500	0.05	0.085	4.170	0.511
		0.10	0.083	4.000	0.500	0.10	0.086	4.346	0.522
		0.15	0.083	4.000	0.500	0.15	0.087	4.529	0.532
		0.20	0.083	4.000	0.500	0.20	0.088	4.717	0.543
		0.25	0.083	4.000	0.500	0.25	0.089	4.910	0.554
		0.30	0.083	4.000	0.500	0.30	0.090	5.108	0.564
		0.35	0.083	4.000	0.500	0.35	0.091	5.308	0.574
		0.40	0.083	4.000	0.500	0.40	0.092	5.509	0.584
		0.45	0.083	4.000	0.500	0.45	0.093	5.710	0.593
0.05	0.05	0.50	0.083	4.000	0.500	0.50	0.094	5.908	0.602
		0.00	0.083	4.000	0.500	0.00	0.083	4.000	0.500
		0.05	0.084	4.047	0.503	0.05	0.085	4.204	0.512
		0.10	0.084	4.093	0.507	0.10	0.086	4.420	0.525
		0.15	0.084	4.138	0.510	0.15	0.087	4.648	0.538
		0.20	0.085	4.181	0.513	0.20	0.089	4.887	0.550
		0.25	0.085	4.222	0.516	0.25	0.090	5.138	0.563
		0.30	0.085	4.261	0.518	0.30	0.091	5.401	0.576
		0.35	0.086	4.299	0.521	0.35	0.093	5.672	0.588
		0.40	0.086	4.334	0.523	0.40	0.094	5.952	0.600
0.10	0.10	0.45	0.086	4.368	0.526	0.45	0.095	6.238	0.612
		0.50	0.086	4.398	0.528	0.50	0.096	6.527	0.623
		0.00	0.083	4.000	0.500	0.00	0.083	4.000	0.500
		0.05	0.084	4.091	0.506	0.05	0.085	4.235	0.514
		0.10	0.085	4.182	0.513	0.10	0.086	4.488	0.527
		0.15	0.085	4.272	0.519	0.15	0.088	4.760	0.542
		0.20	0.086	4.362	0.524	0.20	0.089	5.050	0.556
		0.25	0.087	4.449	0.530	0.25	0.091	5.361	0.571
		0.30	0.087	4.535	0.535	0.30	0.092	5.692	0.585
		0.35	0.088	4.618	0.540	0.35	0.094	6.044	0.600
0.15	0.15	0.40	0.088	4.698	0.545	0.40	0.095	6.414	0.614
		0.45	0.089	4.774	0.550	0.45	0.096	6.802	0.628
		0.50	0.089	4.846	0.554	0.50	0.098	7.205	0.642
		0.00	0.083	4.000	0.500	0.00	0.083	4.000	0.500
		0.05	0.084	4.132	0.509	0.05	0.085	4.264	0.514
		0.10	0.085	4.267	0.517	0.10	0.087	4.551	0.529
		0.15	0.086	4.403	0.526	0.15	0.088	4.864	0.545
		0.20	0.087	4.541	0.534	0.20	0.090	5.204	0.560
		0.25	0.088	4.680	0.543	0.25	0.091	5.575	0.576
		0.30	0.089	4.818	0.550	0.30	0.093	5.979	0.593

Tabla A.18 (Continuación)

c_1/ℓ_1	c_2/ℓ_2	M	k	C	c_1/ℓ_1	c_2/ℓ_2	M	k	C
0.40	0.40	0.35	0.090	4.955	0.558	0.40	0.090	5.090	0.565
		0.40	0.091	5.222	0.572	0.45	0.091	5.349	0.579
		0.45	0.092	5.349	0.579	0.50	0.092	5.348	0.563
		0.50	0.092	5.778	0.580	0.55	0.092	6.255	0.598
		0.55	0.093	6.782	0.617	0.60	0.093	4.289	0.515
		0.60	0.097	7.365	0.635	0.65	0.097	4.607	0.530
		0.65	0.099	8.007	0.654	0.70	0.099	4.959	0.546
		0.70	0.100	8.710	0.672	0.75	0.100	5.36	0.554
		0.75	0.103	4.000	0.500	0.80	0.103	4.311	0.515
		0.80	0.107	4.658	0.530	0.85	0.107	4.658	0.547
0.45	0.45	0.85	0.088	5.046	0.547	0.90	0.090	5.480	0.564
		0.90	0.092	5.967	0.583	0.95	0.092	5.979	0.593
		0.95	0.095	6.416	0.609	1.00	0.095	6.888	0.626
		1.00	0.098	7.136	0.621	1.05	0.098	7.395	0.642
		1.10	0.101	7.935	0.658	1.15	0.101	8.625	0.662

6.416 0.609

6.888 0.626

7.136 0.621

7.395 0.642

7.935 0.658

8.625 0.662

9.234 0.667

9.514 0.683

10.329 0.690

10.714 0.693

11.092 0.701

11.470 0.706

11.848 0.711

12.226 0.716

12.604 0.721

12.982 0.726

13.359 0.731

13.736 0.736

14.113 0.741

14.490 0.746

14.867 0.751

15.244 0.756

15.621 0.761

16.000 0.766

16.377 0.771

16.754 0.776

17.131 0.781

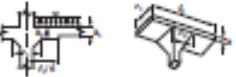
17.508 0.786</p

Losa con capitel

Tabla A.19 Constantes de distribución de momentos para miembros de viga-losa con capiteles en las columnas

$$\text{FEM (carga uniforme } w) = Mw\ell(\ell^2)$$

$$K (\text{rigidez}) = kE\ell_2 h^3/12\ell_1$$



c_1/ℓ_1	c_2/ℓ_2	Constantes para $h_2 = 1.25h_1$			Constantes para $h_2 = 1.5h_1$		
		M	k	C	M	k	C
0.00	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.10	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.15	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.20	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.25	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.30	0.088	4.797	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.00	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.088	4.846	0.545	0.093	5.890	0.591
	0.10	0.089	4.896	0.548	0.093	5.942	0.594

Tabla A.19 (Continuación)

c_1/ℓ_1	c_2/ℓ_2	Constantes para $h_2 = 1.25h_1$			Constantes para $h_2 = 1.5h_1$			
		M	k	C	M	k	C	
0.10	0.05	0.15	0.089	4.944	0.551	0.093	5.993	0.596
	0.20	0.15	0.089	4.990	0.553	0.094	6.041	0.598
	0.25	0.15	0.089	5.035	0.556	0.094	6.087	0.600
	0.30	0.15	0.090	5.077	0.558	0.094	6.131	0.602
	0.00	0.15	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.15	0.088	4.894	0.548	0.093	5.940	0.593
	0.10	0.15	0.089	4.992	0.553	0.094	6.042	0.598
	0.20	0.15	0.090	5.039	0.559	0.094	6.142	0.602
	0.25	0.15	0.091	5.278	0.569	0.095	6.335	0.611
	0.30	0.15	0.091	5.368	0.573	0.095	6.427	0.615
0.15	0.00	0.15	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.15	0.089	4.938	0.550	0.093	5.986	0.595
	0.10	0.15	0.090	5.082	0.558	0.094	6.135	0.602
	0.20	0.15	0.090	5.228	0.565	0.095	6.284	0.608
	0.25	0.15	0.092	5.520	0.580	0.096	6.579	0.620
	0.30	0.15	0.092	5.665	0.587	0.096	6.723	0.626
	0.00	0.15	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.15	0.089	4.978	0.552	0.093	6.027	0.597
	0.10	0.15	0.090	5.167	0.562	0.094	6.221	0.605
	0.20	0.15	0.091	5.361	0.571	0.095	6.418	0.613
0.20	0.20	0.15	0.092	5.558	0.581	0.096	6.616	0.621
	0.25	0.15	0.093	5.760	0.590	0.096	6.816	0.628
	0.30	0.15	0.094	5.962	0.590	0.097	7.015	0.635
	0.00	0.15	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.15	0.089	5.015	0.553	0.094	6.065	0.598
	0.10	0.15	0.090	5.245	0.565	0.094	6.300	0.608
	0.20	0.15	0.091	5.485	0.576	0.095	6.543	0.617
	0.25	0.15	0.092	5.735	0.587	0.096	6.790	0.626
	0.30	0.15	0.094	5.994	0.598	0.097	7.043	0.635
	0.00	0.15	0.095	6.261	0.600	0.098	7.298	0.644
0.25	0.00	0.15	0.088	4.795	0.542	0.093	5.837	0.589
	0.05	0.15	0.089	5.048	0.554	0.094	6.099	0.599
	0.10	0.15	0.090	5.317	0.567	0.095	6.372	0.610
	0.20	0.15	0.092	5.601	0.580	0.096	6.657	0.620
	0.25	0.15	0.093	5.902	0.593	0.097	6.953	0.631
	0.30	0.15	0.094	6.219	0.605	0.098	7.258	0.641
	0.00	0.15	0.095	6.550	0.618	0.099	7.571	0.651
	0.05	0.15	0.095	6.550	0.618	0.099	7.571	0.651
	0.10	0.15	0.096	6.662	0.631	0.100	7.783	0.661
	0.20	0.15	0.097	7.004	0.665	0.104	8.125	0.675
0.30	0.00	0.15	0.098	7.346	0.688	0.108	8.467	0.685
	0.05	0.15	0.098	7.346	0.688	0.108	8.467	0.685
	0.10	0.15	0.099	7.558	0.701	0.112	8.709	0.695
	0.20	0.15	0.099	7.900	0.724	0.116	9.051	0.705
	0.25	0.15	0.100	8.112	0.737	0.118	9.263	0.715
	0.30	0.15	0.100	8.324	0.750	0.120	9.505	0.725

Tablas de FEM,
factores de rigidez y
transporte

Columnas

Tabla A20 Factores de rigidez y de transporte para columnas

ℓ_a/ℓ_n	a/b					
	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	
0.20	k_{AB}	4.32	4.70	5.33	5.65	6.27
	C_{AB}	0.57	0.64	0.71	0.80	0.89
0.40	k_{AB}	4.40	4.89	5.45	6.15	7.00
	C_{AB}	0.56	0.61	0.68	0.74	0.81
0.60	k_{AB}	4.46	5.02	5.70	6.54	7.58
	C_{AB}	0.55	0.60	0.65	0.70	0.76
0.80	k_{AB}	4.51	5.14	5.90	6.85	8.05
	C_{AB}	0.54	0.58	0.63	0.67	0.72
1.00	k_{AB}	4.55	5.23	6.06	7.11	8.44
	C_{AB}	0.54	0.57	0.61	0.65	0.68
1.20	k_{AB}	4.58	5.30	6.20	7.32	8.77
	C_{AB}	0.53	0.57	0.60	0.63	0.66
1.40	k_{AB}	4.61	5.36	6.31	7.51	9.05
	C_{AB}	0.53	0.56	0.59	0.61	0.64
1.60	k_{AB}	4.63	5.42	6.41	7.66	9.29
	C_{AB}	0.53	0.55	0.58	0.60	0.62
1.80	k_{AB}	4.65	5.46	6.49	7.80	9.50
	C_{AB}	0.53	0.55	0.57	0.59	0.60
2.00	k_{AB}	4.67	5.51	6.56	7.92	9.68
	C_{AB}	0.52	0.54	0.56	0.58	0.59

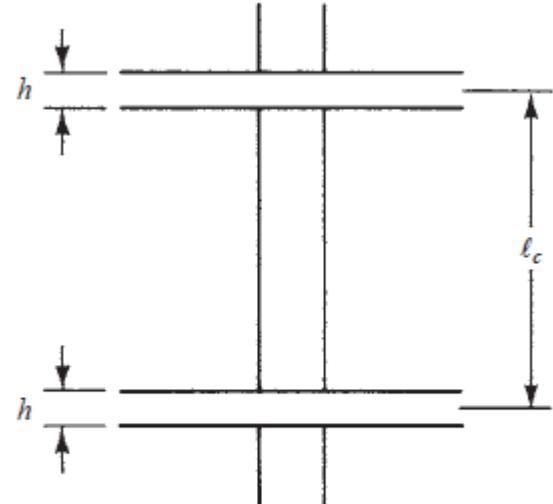
Notas: 1. Valores calculados por el método de la analogía de la columna.

2. $k_{AB} = (k_{AB} \text{ de la tabla}) \left(\frac{EI_0}{I_0} \right)^{1/4}$.

2. $k_{AB} = (k_{AB} \text{ de la tabla}) \left(\frac{EI_0}{I_0} \right)^{1/4}$.

Propiedad de las Columnas

Usar Tabla A.20



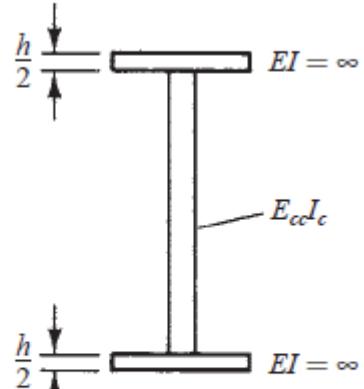
a) columna y losa reales,
ninguna viga

Rigidez de la Columna

$$\Sigma K_c = K_{ct} + K_{cb}$$

Rigidez Torsional en nodo

$$(\Sigma K_t = K_{t1} + K_{t2}) \quad C = \Sigma \left(1 - 0.63 \frac{x}{y}\right) \frac{x^3 y}{3}$$

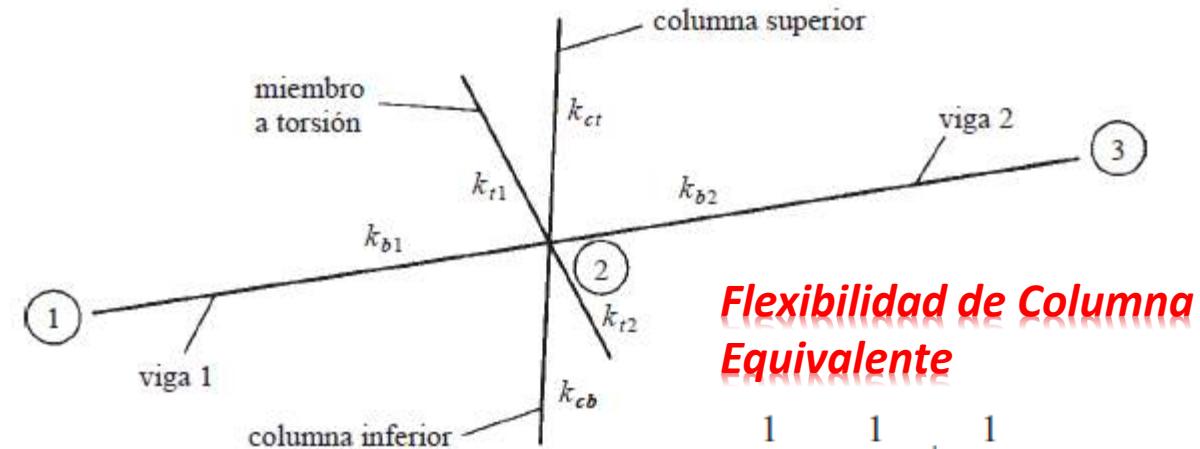


b) diagrama de rigidez
de la columna

Rigidez Torsional Individual

$$K_t = \Sigma \frac{9E_{cs}C}{\ell_2 \left(1 - \frac{c_2}{\ell_2}\right)^3}$$

Para un marco equivalente se necesita la rigidez de las columnas, de los elementos a torsión y de la viga losa



Flexibilidad de Columna Equivalente

$$\frac{1}{K_{ec}} = \frac{1}{\Sigma K_c} + \frac{1}{\Sigma K_t}$$

$$\frac{1}{K_{ec}} = \frac{1}{K_{ct} + K_{cb}} + \frac{1}{K_c + K_t}$$

$$K_{ec} = \frac{(K_{ct} + K_{cb})(k_t + k_t)}{(k_{ct} + k_{cb}) + (k_t + k_t)}$$

Factores de Distribución

$$\text{DF para la viga 2-1} = \frac{K_{b1}}{K_{b1} + K_{b2} + K_{ec}}$$

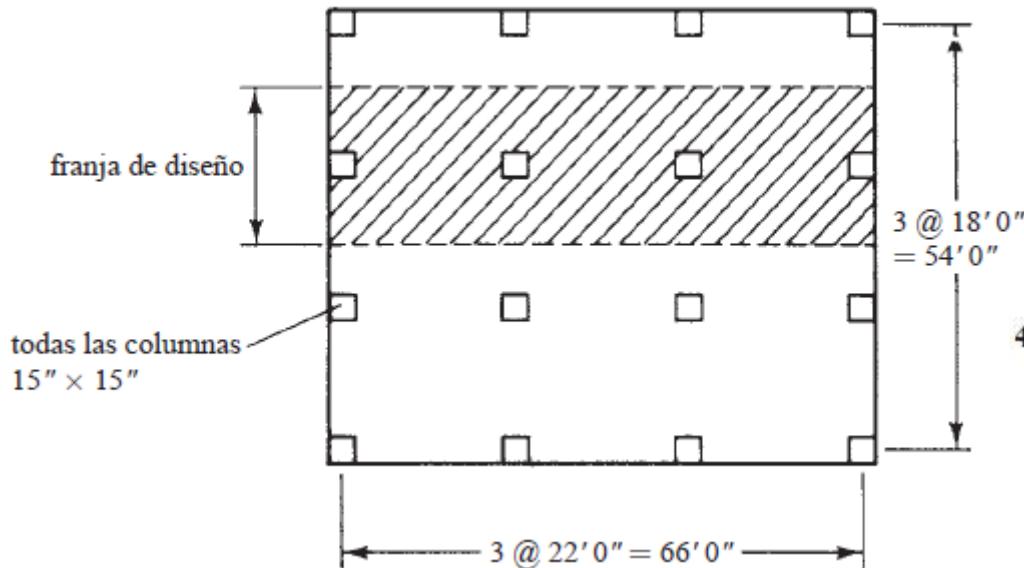
$$\text{DF para la viga 2-3} = \frac{K_{b2}}{K_{b1} + K_{b2} + K_{ec}}$$

$$\text{DF para la columna superior} = \frac{K_{ec}/2}{K_{b1} + K_{b2} + K_{ec}}$$

Si no hay viga se usará como viga efectiva una parte de la losa igual al ancho de la columna

Si la viga está conectada a la columna, se supone una viga T o L con patines de anchos iguales a la proyección de la viga arriba o debajo de la losa, pero no mayor de 4 veces el espesor de la losa

Usando el método del marco equivalente, determinar los momentos de diseño para la franja sombreada de la estructura de placa plana que se muestra en la figura 17.9 si $f'_c = 4\ 000 \text{ lb/plg}^2$, $f_y = 60\ 000 \text{ lb/plg}^2$, y (carga muerta no factorizada) $q_D = 120 \text{ lb/pie}^2$ y (carga viva no factorizada) $q_L = 82.5 \text{ lb/pie}^2$. Longitud de las columnas = 9'6".



- Determinamos el espesor requerido por las limitaciones de peralte (9.5.3) del ACI. Suponemos que esto ya se ha hecho y que se ha seleccionado una losa con $h = 8''$ ($d = 6.75''$).

- Revisamos el cortante directo para la columna exterior

$$q_u = 1.2q_D + 1.6q_L = 1.2(120) + 1.6(82.5) = 276 \text{ lb/pie}^2$$

$$V_u \text{ para un ancho de } 12'' = (0.276) \left(11.0 - \frac{7.5}{12} - \frac{6.75}{12} \right) = 2.708 \text{ klb/pie}$$

$$\phi V_c = \frac{(0.75)(2)(1.0)(\sqrt{4\ 000})(12)(6.75)}{1\ 000} = 7.684 \text{ klb/pie} > 2.708 \text{ klb/pie}$$

OK

- Revisamos el cortante en dos direcciones alrededor de las columnas interiores

$$V_u = \left[(18)(22) - \left(\frac{15+6.75}{12} \right)^2 \right] (0.276) = 108.39 \text{ klb}$$

$$\phi V_c = \frac{(0.75)(4)(1.0)(\sqrt{4\ 000})(4)(15+6.75)(6.75)}{1\ 000} = 111.42 \text{ klb} > 108.39 \text{ klb}$$

- Usando las tablas del apéndice, determinamos los factores de rigidez y los momentos de empotramiento para los claros de 22 pies

$$I_s = \frac{\ell_2 h^3}{12} = \frac{(12 \times 18)(8)^3}{12} = 9\ 216 \text{ plg}^4$$

$$E_{cs} = 3.64 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2 \text{ de la tabla A.1 del apéndice}$$

Tabla A.1. Valores del módulo de elasticidad para concreto de peso normal

Unidades usuales en EUA

f'_c (lb/plg ²)	E_c (lb/plg ²)
3 000	3 160 000
3 500	3 410 000
4 000	3 640 000
4 500	3 870 000
5 000	4 070 000

Tabla A.16 Constantes de distribución de momentos en losas sin ábacos*

		Diagrama de la losa:					
		Cargas uniformes:					
		FEM = Coef. ($w\ell_2\ell_1^3$)		Factor de rigidez†		Factor de transporte	
$\frac{c_{1A}}{\ell_1}$	$\frac{c_{1B}}{\ell_1}$	M_{AB}	M_{BA}	k_{AB}	k_{BA}	COF_{AB}	COF_{BA}
0.00	0.00	0.083	0.083	4.00	4.00	0.500	0.500
	0.05	0.083	0.084	4.01	4.04	0.504	0.500
	0.10	0.082	0.086	4.03	4.15	0.513	0.499
	0.15	0.081	0.089	4.07	4.32	0.528	0.498
	0.20	0.079	0.093	4.12	4.56	0.548	0.495
	0.25	0.077	0.097	4.18	4.88	0.573	0.491
	0.30	0.075	0.102	4.25	5.28	0.603	0.485
	0.35	0.073	0.107	4.33	5.78	0.638	0.478
	0.05	0.084	0.084	4.05	4.05	0.503	0.503
	0.10	0.083	0.086	4.07	4.15	0.513	0.503
0.05	0.15	0.081	0.089	4.11	4.33	0.528	0.501
	0.20	0.080	0.092	4.16	4.58	0.548	0.499
	0.25	0.078	0.096	4.22	4.89	0.573	0.494
	0.30	0.076	0.101	4.29	5.30	0.603	0.489
	0.35	0.074	0.107	4.37	5.80	0.638	0.481
	0.10	0.085	0.085	4.18	4.18	0.513	0.513
	0.15	0.083	0.088	4.22	4.36	0.528	0.511
	0.20	0.082	0.091	4.27	4.61	0.548	0.508
	0.25	0.080	0.095	4.34	4.93	0.573	0.504
	0.30	0.078	0.100	4.41	5.34	0.602	0.498
0.10	0.35	0.075	0.105	4.50	5.85	0.637	0.491
	0.15	0.086	0.086	4.40	4.40	0.526	0.526
	0.20	0.084	0.090	4.46	4.65	0.546	0.523
	0.25	0.083	0.094	4.53	4.98	0.571	0.519
	0.30	0.080	0.099	4.61	5.40	0.601	0.513
	0.35	0.078	0.104	4.70	5.92	0.635	0.505
	0.20	0.088	0.088	4.72	4.72	0.543	0.543

Con referencia a la tabla A.16 del apéndice, observe que los valores de C son dimensiones de las columnas como se muestra en las figuras que acompañan a las tablas A.16 a A.19 del apéndice. Los valores son bastante difíciles de leer.

$$C_{1A} = C_{2A} = C_{1B} = C_{2B} = 15'' = 1.25'$$

$$\frac{C_{1A}}{\ell_1} = \frac{1.25}{22.0} = 0.057$$

$$\frac{C_{1B}}{\ell_1} = \frac{1.25}{22.0} = 0.057$$

Interpolando en la tabla (observando que A es para el extremo cercano y B para el alejado). Los valores de la tabla son muy aproximados.

$$k_{AB} = 4.17$$

$$k_{AB} = \frac{4.17 E_{ci} I_x}{\ell_1} = \frac{(4.17)(3.64 \times 10^6)(9216)}{(12)(22)} \\ = 529.9 \times 10^6 \text{ plg-lb}$$

$$\text{FEM}_{AB} = \text{FEM}_{BA} = 0.084 q_a / 2 \ell_1^2$$

$$= (0.084)(0.276)(18)(22)^2 = 202 \text{ pie-klb}$$

$$C_{AB} = C_{BA} = \text{factor de transporte}$$

$$= 0.503$$

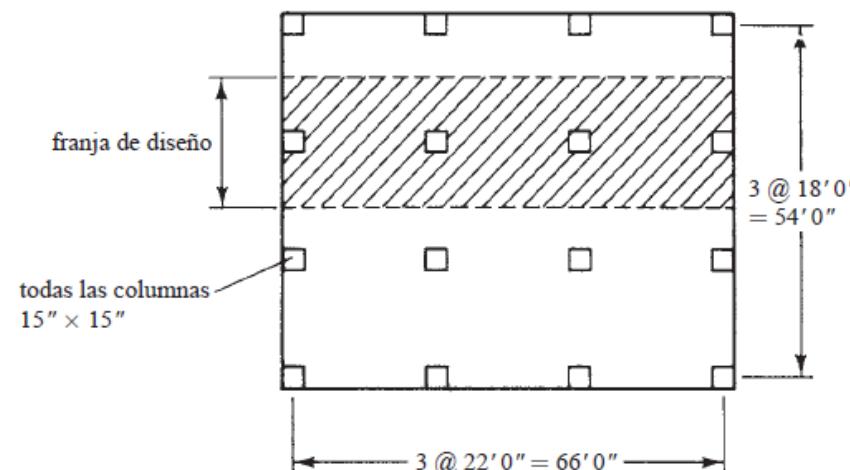
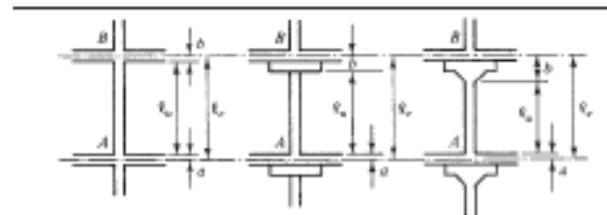


Tabla A20 Factores de rigidez y de transporte para columnas



a/b	t_u/t_s	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75														
		k_{AB}	C_{AB}																	
0.20	k_{AB}	4.32	4.70	5.33	5.65	6.27														
	C_{AB}	0.57	0.64	0.71	0.80	0.89														
0.40	k_{AB}	4.40	4.89	5.45	6.15	7.00														
	C_{AB}	0.56	0.61	0.68	0.74	0.81														
0.60	k_{AB}	4.46	5.02	5.70	6.54	7.58														
	C_{AB}	0.55	0.60	0.65	0.70	0.76														
0.80	k_{AB}	4.51	5.14	5.90	6.85	8.05														
	C_{AB}	0.54	0.58	0.63	0.67	0.72														
1.00	k_{AB}	4.55	5.23	6.06	7.11	8.44														
	C_{AB}	0.54	0.57	0.61	0.65	0.68														
1.20	k_{AB}	4.58	5.30	6.20	7.32	8.77														
	C_{AB}	0.53	0.57	0.60	0.63	0.66														
1.40	k_{AB}	4.61	5.36	6.31	7.51	9.05														
	C_{AB}	0.53	0.56	0.59	0.61	0.64														
1.60	k_{AB}	4.63	5.42	6.41	7.66	9.29														
	C_{AB}	0.53	0.55	0.58	0.60	0.62														
1.80	k_{AB}	4.65	5.46	6.49	7.80	9.50														
	C_{AB}	0.53	0.55	0.57	0.59	0.60														
2.00	k_{AB}	4.67	5.51	6.56	7.92	9.68														
	C_{AB}	0.52	0.54	0.56	0.58	0.59														

Notas: 1. Valores calculados por el método de la analogía de la columna.

$$2. k_c = (k_{AB} \text{ de la tabla}) \left(\frac{EI_0}{t_u} \right).$$

5. Se determina la rigidez de la columna

$$I_c = \left(\frac{1}{12} \right) (15)(15)^3 = 4219 \text{ plg}^4$$

$$E_{cc} = 3.64 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$$

Usando la tabla A.20 del apéndice,

$$\ell_n = 9'6'' = 9.50 \text{ pies}$$

$$\ell_c = 9.50 - \frac{8}{12} = 8.833 \text{ pies}$$

$$\frac{\ell_n}{\ell_c} = \frac{8.833}{9.50} = 0.930 = \frac{\ell_u}{\ell_c}$$

Con referencia a la figura dada con la tabla A.20,

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{4} = 1.00$$

$$k_{AB} = 4.81 \text{ por interpolación}$$

$$K_c = \frac{4.81 E_{cc} I_c}{H} = \frac{(4.81)(3.64 \times 10^6)(4219)}{(9.5)(12)} \\ = 648 \times 10^6 \text{ plg-lb}$$

$$C_{AB} = 0.55 \text{ por interpolación}$$

6. Se determina la rigidez torsional de la sección de la losa (véase la figura 17.10)

$$\begin{aligned} C &= \Sigma \left(1 - 0.63 \frac{x}{y} \right) \left(\frac{x^3 y}{3} \right) \\ &= \left(1 - \frac{0.63 \times 8}{15} \right) \left(\frac{8^3 \times 15}{3} \right) \\ &= 1700 \text{ plg}^4 \end{aligned}$$

$$K_t = \frac{9E_{cs}C}{\left[\ell_2 \left(1 - \frac{c_2}{\ell_2} \right)^3 \right]} = \frac{(9)(3.64 \times 10^6)(1700)}{\left[(12)(18) \left(1 - \frac{15}{(12)(22)} \right)^3 \right]} = 307.3 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$$

7. Cálculo de K_{ec} , la rigidez de la columna equivalente

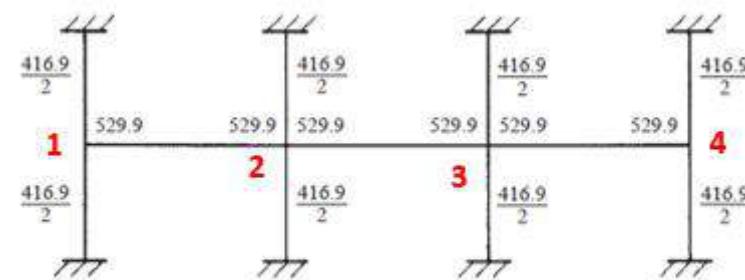
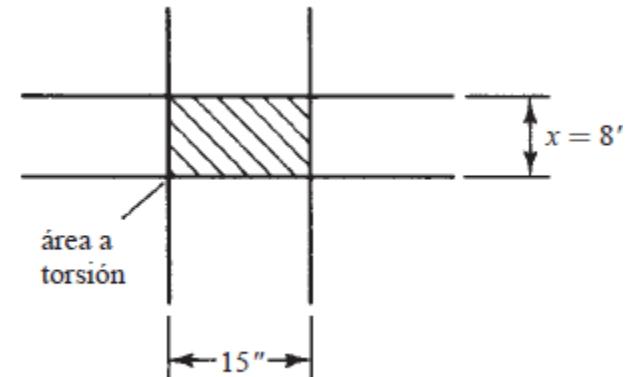
$$\begin{aligned} K_{ec} &= \frac{\Sigma K_c \Sigma K_t}{\Sigma K_c + \Sigma K_t} = \frac{(2 \times 648.0)(2 \times 307.3)}{2 \times 648.0 + 2 \times 307.3} \\ &= 416.9 \times 10^6 \text{ plg-lb} \end{aligned}$$

8. Distribución de Momentos

Marco 1 y 4

$$FD \text{ columna} = \frac{416.9/2}{\frac{416.9}{2} + \frac{416.9}{2} + 529.9} = 0.22$$

$$FD \text{ viga - losa} = \frac{529.9}{\frac{416.9}{2} + \frac{416.9}{2} + 529.9} = 0.56$$

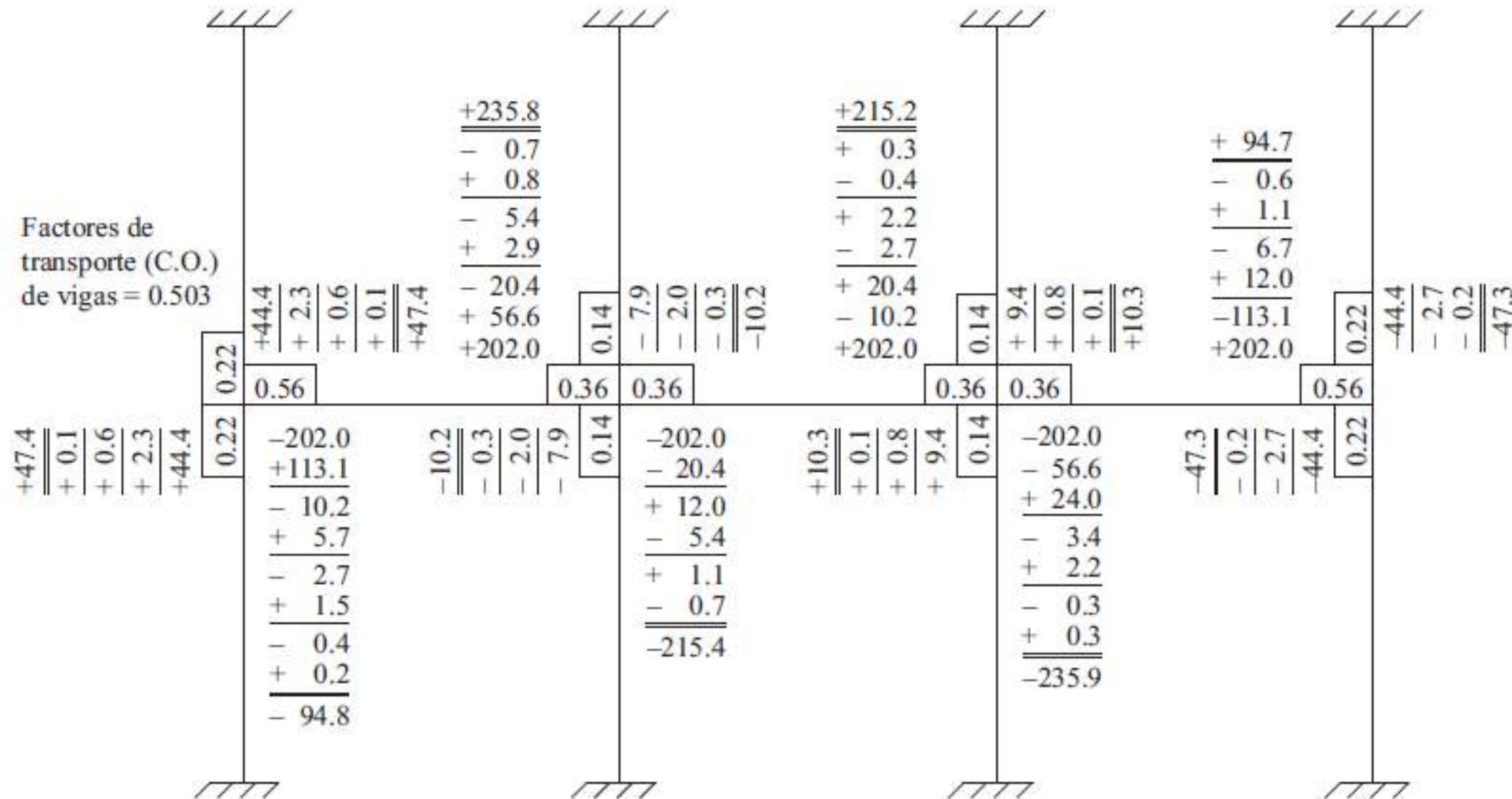


Marco 2 y 3

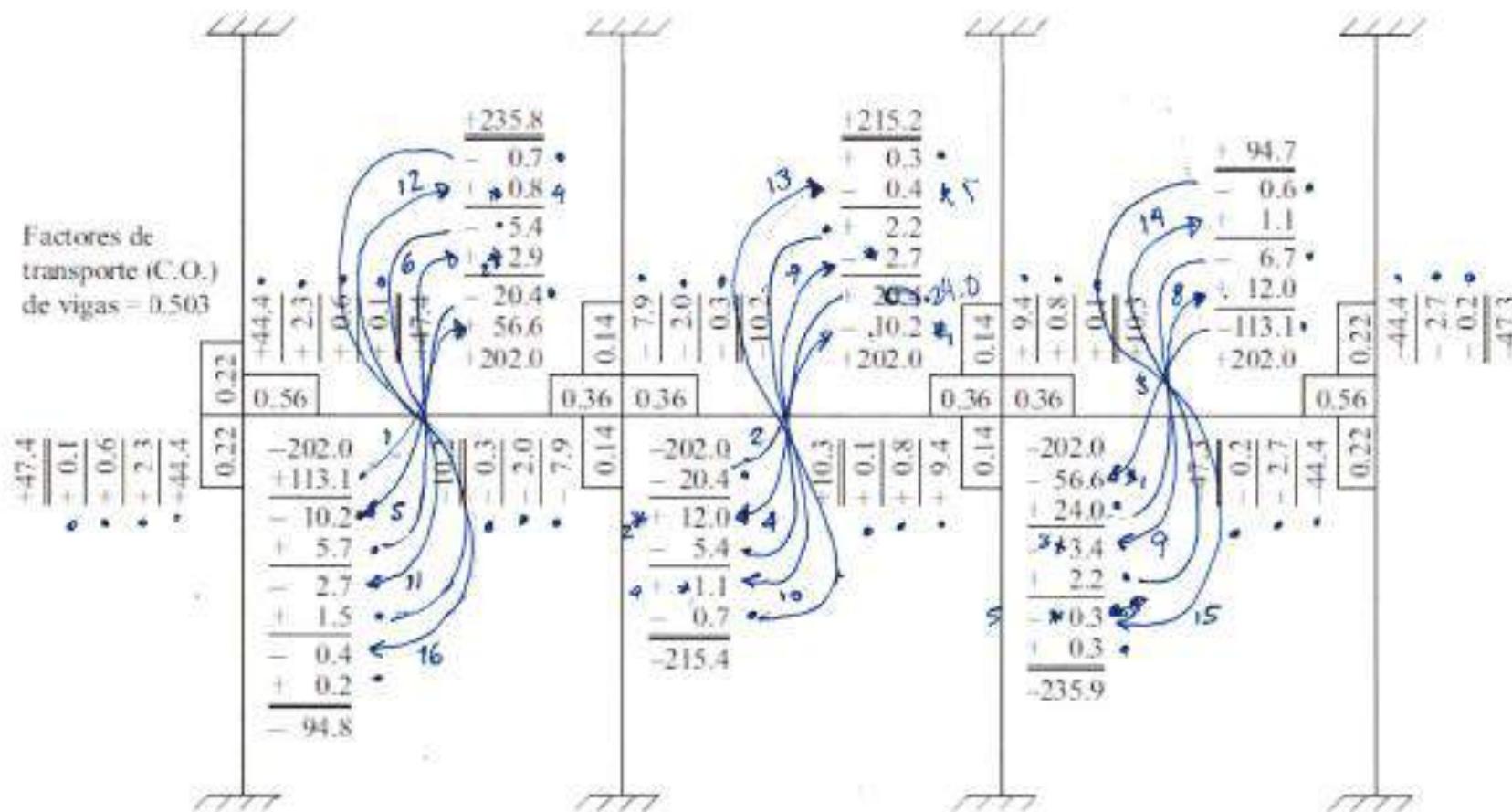
$$FD \text{ columna} = \frac{416.9/2}{\frac{416.9}{2} + \frac{416.9}{2} + 529.9 + 529.9} = 0.14$$

$$FD \text{ columna} = \frac{529.9}{\frac{416.9}{2} + \frac{416.9}{2} + 529.9 + 529.9} = 0.36$$

9. Análisis del Marco



9. Análisis del Marco

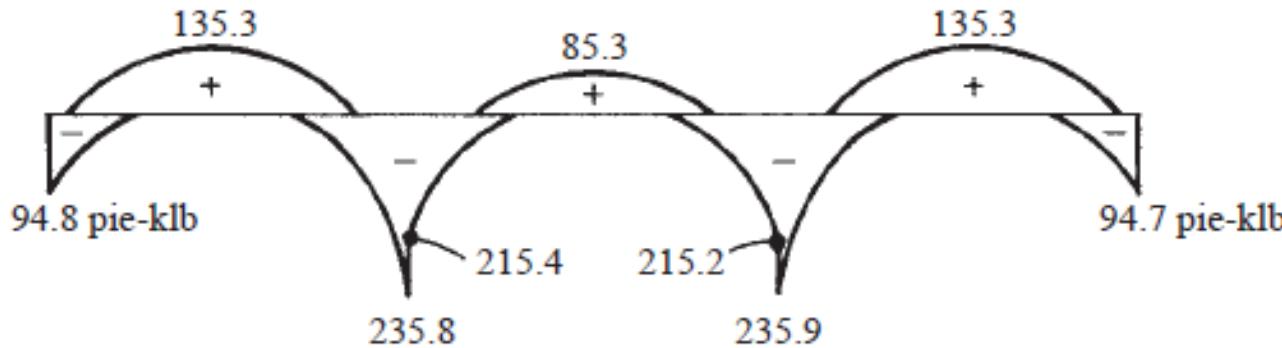


*1 BALANCE
*2 BALANCE
*3 BALANCE
*4 BALANCE
*5 BALANCE

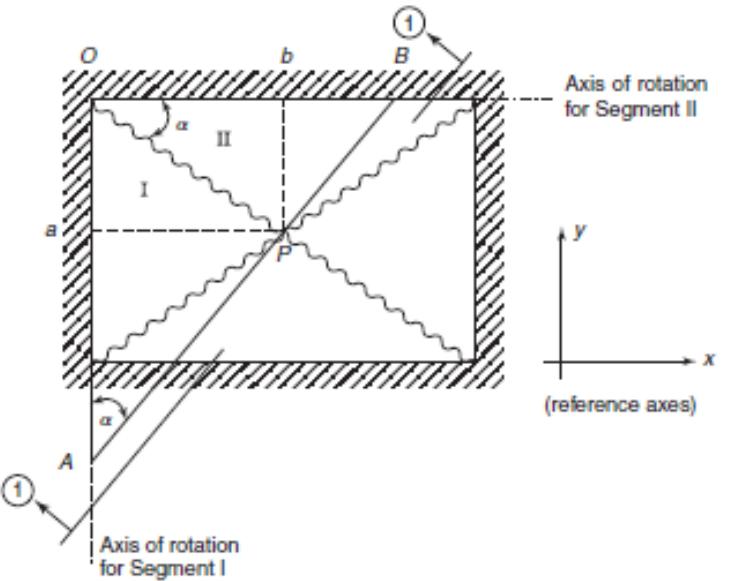
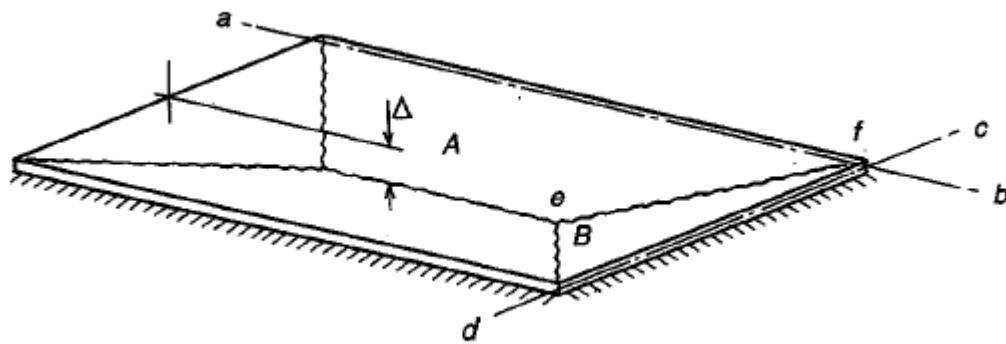
Momentos Positivos

Los momentos positivos son iguales al momento de una viga simplemente apoyada menos el promedio de los momentos negativos en los extremos del claro

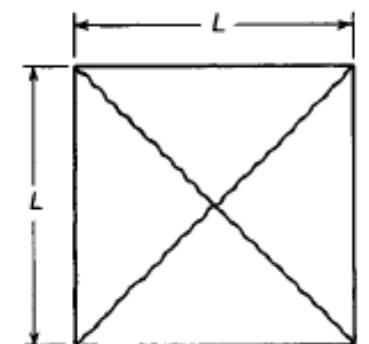
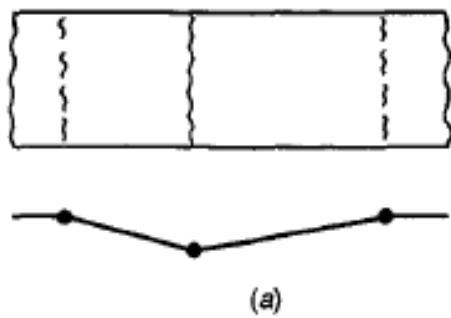
$${}^+M = \frac{(0.276)(18)(22)^2}{8} - \left(\frac{94.8 + 235.8}{2} \right) = 135.3 \text{ pie-klb}$$



Los momentos para franjas de columnas y de losa se determinarán con las mismas fórmulas establecidas por el método directo



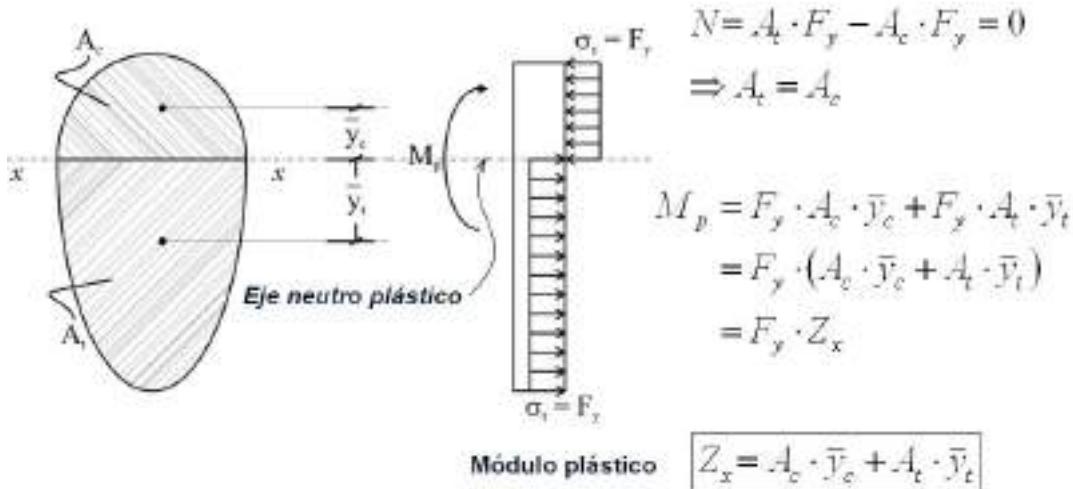
Análisis de Losas mediante Líneas de Influencia



Momento Plástico y Articulación Plástica

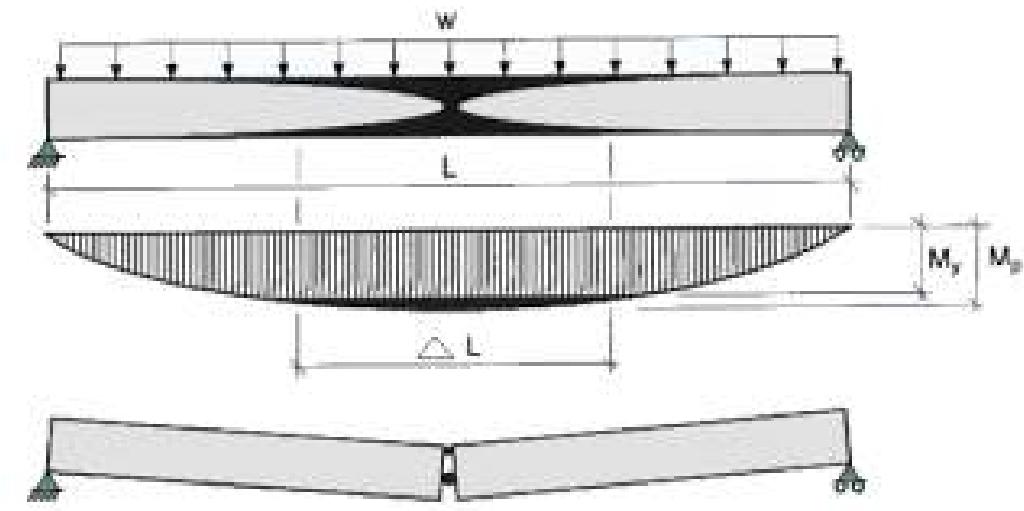
El momento plástico (M_p) es una propiedad de una sección estructural. Se define como el momento en que todas las secciones transversales han llegado a su límite de elasticidad. Esto es teóricamente el momento máximo de flexión que la sección puede resistir.

- Momento plástico



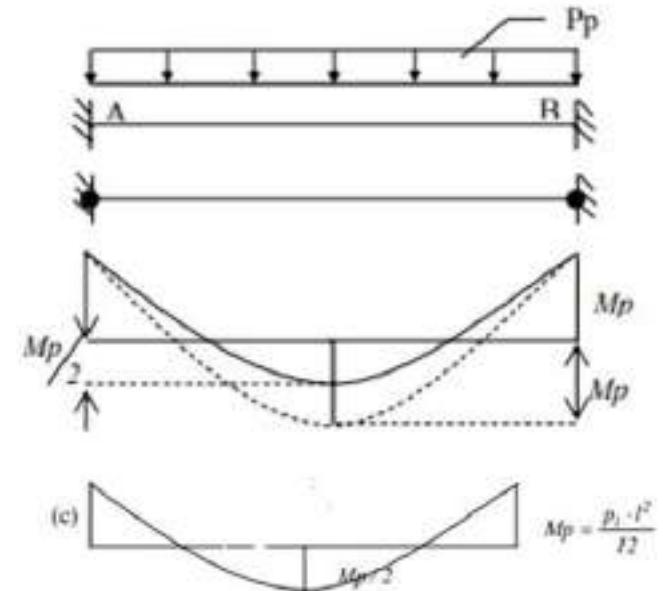
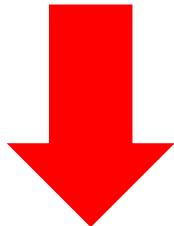
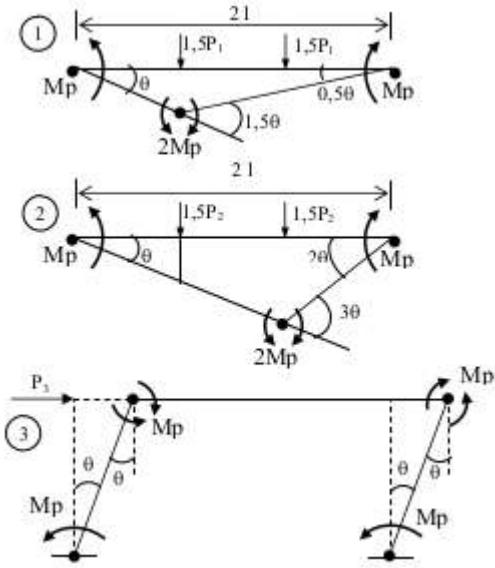
Articulación Plástica

Estado **plástico** que alcanzan todas las fibras de un elemento estructural al producirse una **articulación** en la sección transversal del mismo. También llamada rótula plástica.



Teorema de Límite Superior e Inferior

Teorema del límite inferior: si para determinada carga externa es posible encontrar una distribución de momentos que satisface los requisitos de equilibrio, sin que los momentos excedan el momento de fluencia en ningún sitio, y si se satisfacen las condiciones de frontera, entonces la carga dada es un límite de la capacidad de carga real.

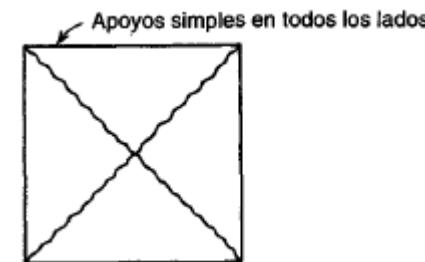
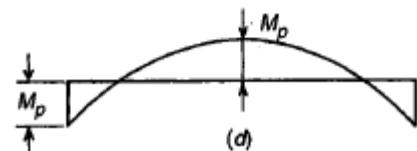
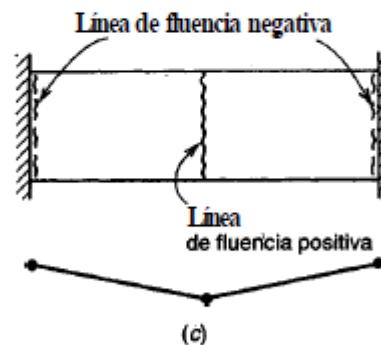
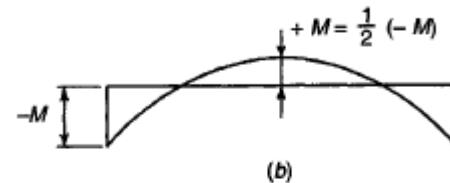
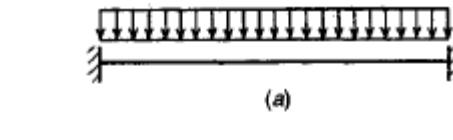
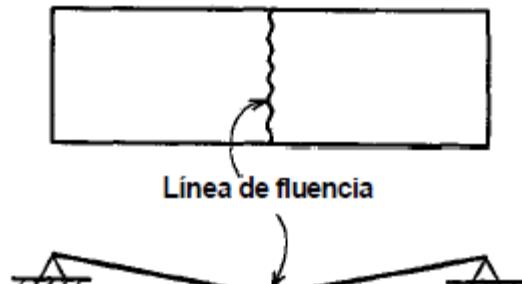
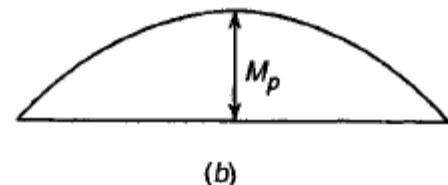
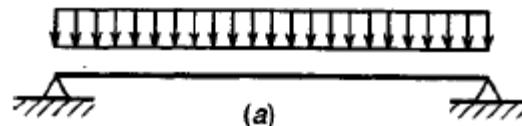


$$M_p + \frac{M_p}{2} = \frac{P_e l^2}{8}$$

Teorema del límite superior: si para un pequeño incremento en el desplazamiento, el trabajo interno que hace la losa —suponiendo que los momentos en todas las rótulas plásticas son iguales al momento de fluencia y que las condiciones de frontera se satisfacen— es igual al trabajo externo hecho por la carga dada para ese mismo pequeño incremento en el desplazamiento, entonces, esa carga es un límite superior de la capacidad de carga real.

Líneas de Influencia en Losas

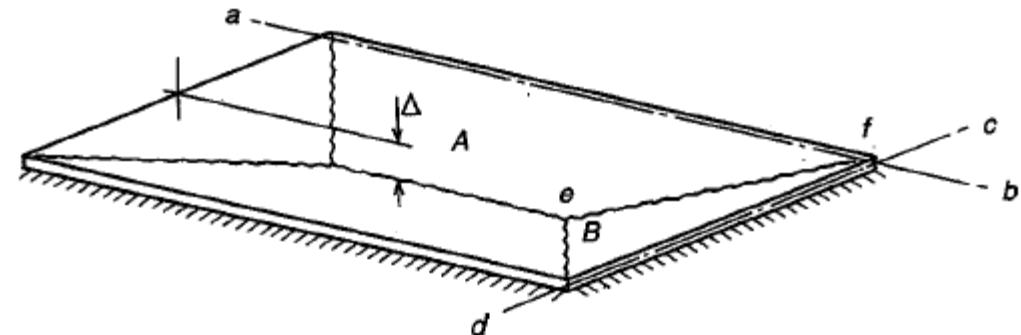
Líneas de falla producto de la formación de articulaciones plásticas en la losa al sobrecargar la estructura. Estas líneas de falla funcionarán como ejes de rotación inelástico.



Reglas para las Líneas de Influencia

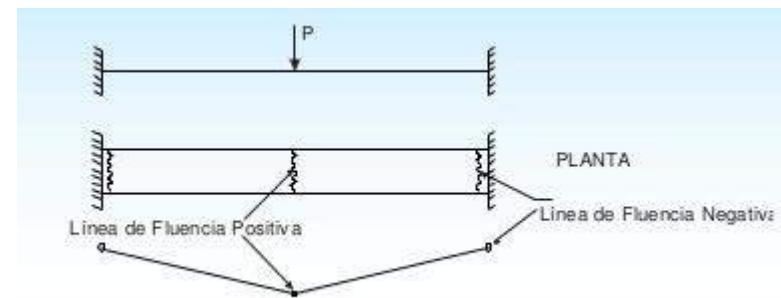
Pautas para determinar ejes de rotación y líneas de influencia

1. Las líneas de fluencia son rectas puesto que representan la intersección de dos planos.
2. Las líneas de fluencia representan ejes de rotación.
3. Los bordes apoyados de la losa también establecen ejes de rotación. Si el borde está empotrado, se puede formar una línea de fluencia negativa que suministra resistencia constante a la rotación. Si el borde está simplemente apoyado, el eje de rotación proporciona restricción nula.
4. Un eje de rotación pasará sobre cualquier columna de apoyo. Su orientación dependerá de otras consideraciones.
5. Debajo de las cargas concentradas se forman líneas de fluencia que salen radialmente desde el punto de aplicación de la carga.
6. Una línea de fluencia entre dos segmentos de losa debe pasar por el punto de intersección de los ejes de rotación de los segmentos adyacentes de losa.

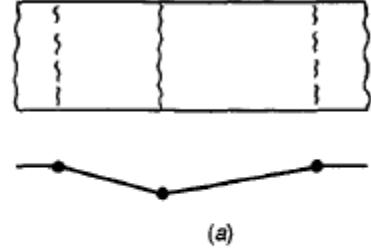


Línea de influencia positiva= tensión en la parte superior de la losa

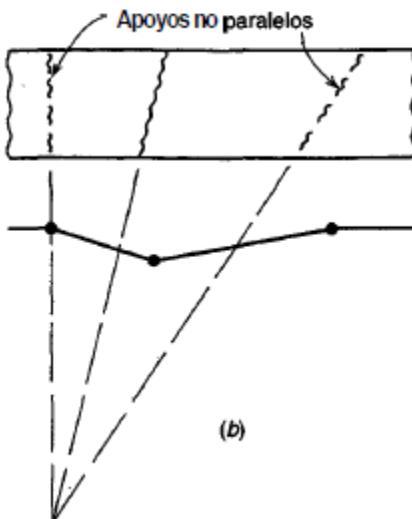
Línea de influencia negativa= compresión en la parte inferior de la losa



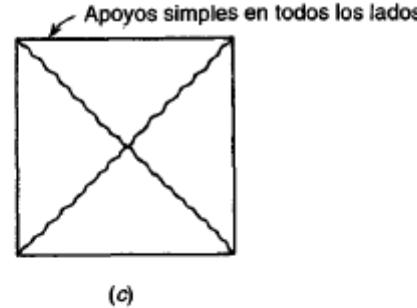
Patrones Comunes para Línea de Influencia



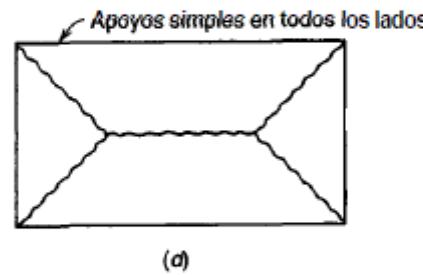
(a)



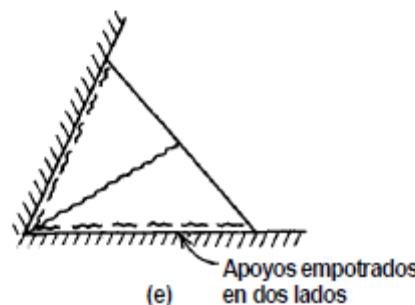
(b)



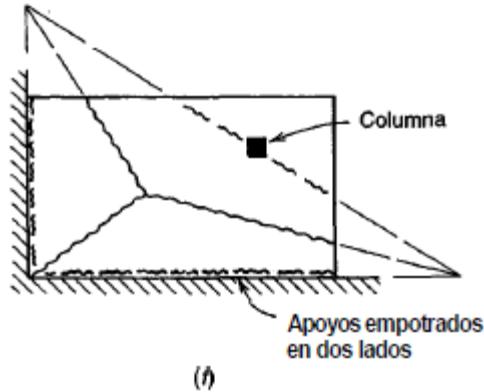
(c)



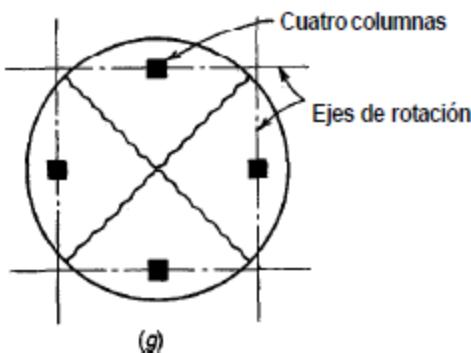
(d)



(e) Apoyos empotrados en dos lados



(f)



(g)

Ubicación y Orientación de los Ejes de Rotación y determinación de la carga de falla

- a) Establecer el patrón de falla correcto
- b) Obtener los parámetros geométricos que definen la ubicación y orientación De las líneas de influencia y obtener la relación entre la relación entre los momentos resistentes y las cargas aplicadas

Método de Equilibrio de Segmentos

Método de Trabajo Virtual

Método de Equilibrio de Segmentos

- *Cada segmento considerado como un cuerpo libre, debe estar en equilibrio bajo*
- *La acción de las cargas aplicadas, los momentos a lo largo de la línea de fluencia y las reacciones o cortantes a lo largo de la línea de apoyo.*
- *Los momentos de fluencia son momentos principales y los momentos de torsión son iguales a cero a lo largo de las líneas de fluencia*
- *Las fuerzas cortantes son iguales a cero*

Refuerzo isotrópico

La losa se refuerza de manera idéntica en direcciones ortogonales, el momento resistente último es el mismo en las dos direcciones y a lo largo de cualquier otra línea independientemente de su dirección

Refuerzo ortotrópico (ortogonalmente anisotrópicos)

Las resistencias últimas son diferentes en las dos direcciones perpendiculares

Ejemplo 14.1. Análisis de una losa armada en una dirección mediante el equilibrio de segmentos. El método se demostrará inicialmente con referencia a la losa continua en una dirección y cargada uniformemente como aparece en la figura 14.6a. La losa tiene una luz de 10 pies y está reforzada para proporcionar una resistencia a la flexión positiva $\phi m_n = 5.0$ klb-pie/pie en toda la luz. Además el acero negativo sobre los apoyos suministra capacidades a momento de 5.0 klb-pie/pie en A y 7.5 klb-pie/pie en C. Determine la capacidad última de carga de la losa.

Solución. La cantidad de ecuaciones requeridas de equilibrio dependerá del número de incógnitas. Una de ellas es siempre la relación entre los momentos resistentes de la losa y la carga. Otras incógnitas se requieren para definir la ubicación de las líneas de fluencia. En este caso, sólo se requiere una ecuación adicional para definir la distancia de la línea de fluencia a los apoyos. Si se toma el segmento izquierdo de la losa como un cuerpo libre y se enuncia la ecuación de equilibrio de momentos con respecto a la línea izquierda de apoyo (ver la figura 14.6b) se llega a

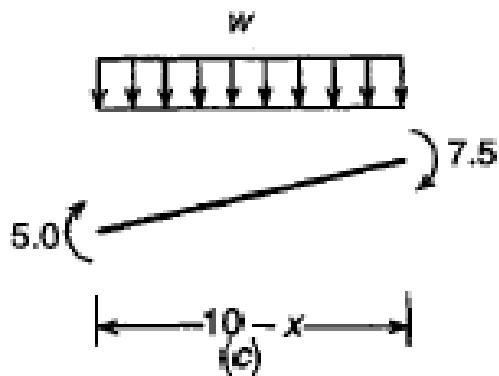
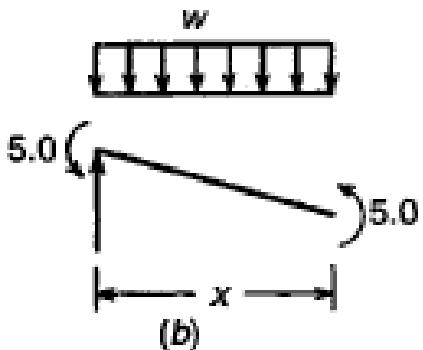
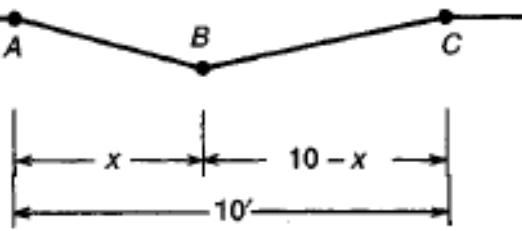
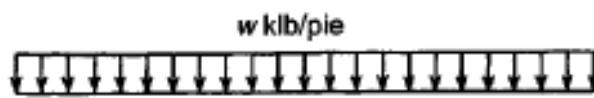
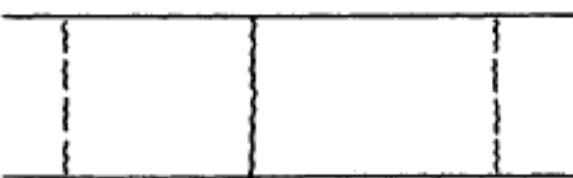
$$\frac{wx^2}{2} - 10.0 = 0$$

De modo similar, para el segmento de losa derecho,

$$\frac{w}{2}(10-x)^2 - 12.5 = 0$$

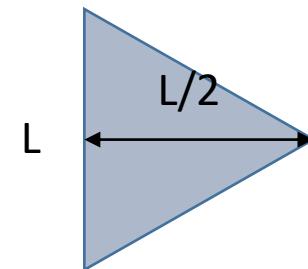
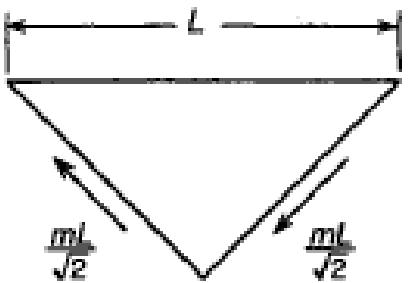
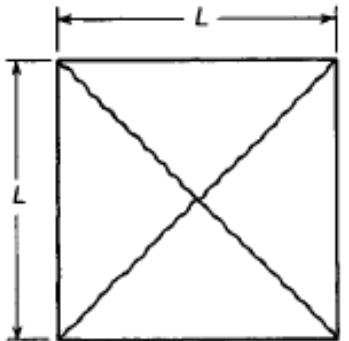
Resolviendo las ecuaciones (a) y (b) simultáneamente para w y x se obtiene

$$w = 0.89 \text{ klb/pie}^2 \quad x = 4.75 \text{ pies}$$



Ejemplo 14.2. Análisis de una losa cuadrada mediante el equilibrio de segmentos. Una losa cuadrada está simplemente apoyada a lo largo de todos los lados y se va a reforzar isotrópicamente. Determine el momento resistente $m = \phi m_n$, por pie lineal, requerido para sostener justo una carga mayorada y uniformemente distribuida de w lb/pie².

Solución. Las condiciones de simetría indican el patrón de líneas de fluencia que se muestra en la figura 14.7a. Teniendo en cuenta el equilibrio de momentos en cualquiera de los segmentos de losa idénticos con respecto a su apoyo (ver la figura 14.7b), se obtiene

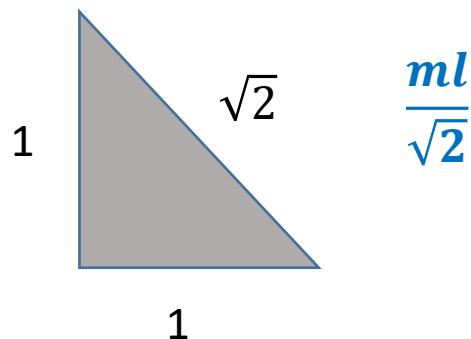


Carga aplicada

$$Q = \frac{1}{2} L \frac{L}{2} W = \frac{L^2 W}{4}$$

Momento aplicado

$$M = \frac{L^2 W}{4} (L/2 \times 1/3) = \frac{L^2 W}{4} \times L/6$$



$$\frac{wL^2}{4} \frac{L}{6} - 2 \frac{mL}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$m = \frac{wL^2}{24}$$

Método del Trabajo Virtual

El trabajo externo de las cargas para producir una deformación virtual arbitraria pequeña debe ser igual al trabajo interno, hecho a medida que la losa rota alrededor de las líneas de influencia para permitir esa deflexión.

Se da a la losa un desplazamiento virtual unitario y se calculan las rotaciones de las líneas de influencia.

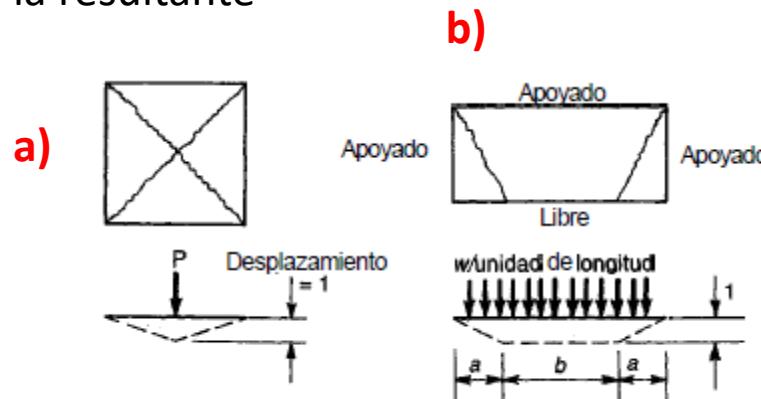
Al igualar el trabajo externo y el interno, se obtienen las relaciones entre las cargas y los momentos últimos resistentes de la losa

Las rotaciones y deformaciones elásticas no se toman en cuenta en este método

Trabajo Externo

Al imponer un desplazamiento virtual pequeño, una carga externa que actúa sobre un segmento de losa realiza un trabajo igual al producto de su magnitud constante por la distancia a lo largo de la cual se mueve el punto de la aplicación de la carga

Si la carga está distribuida sobre una longitud o un área, en vez de concentrada, el trabajo se calcula como el producto de la carga total por el desplazamiento del punto de aplicación de la resultante



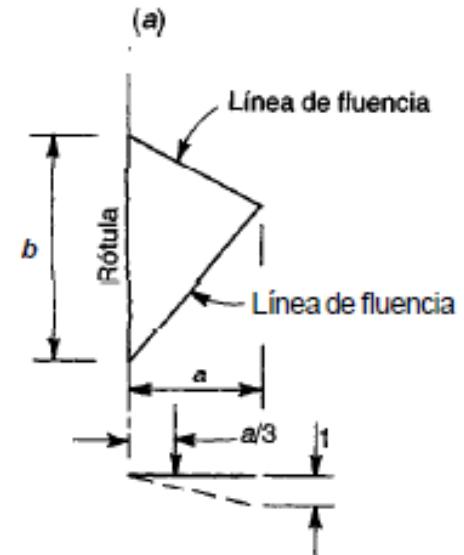
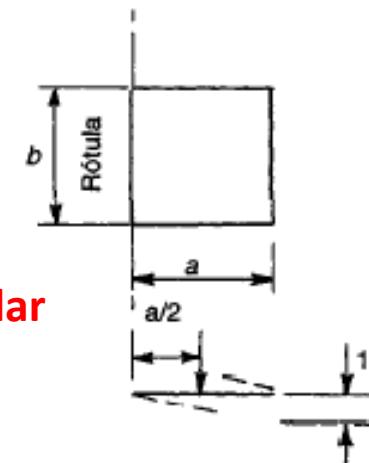
a) Carpa puntual sobre losa cuadrada

$$W_e = P \times 1$$

b) Losa apoyada sobre tres claros

$$W_e = (2wa) \times \frac{1}{2} + wb = w(a + b)$$

d) Segmento de losa rectangular



c) Losa triangular

$$W_e = \frac{wab}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{wab}{6}$$

Trabajo Interno

El trabajo interno hecho durante un desplazamiento virtual, se encuentra sumando el producto de fluencia por unidad de longitud de las rótulas por las rotaciones plásticas en cada línea de influencia.

Si el momento resistente es constante:

$$W_i = m l \theta$$

El trabajo interno total es la suma de la contribución del trabajo de todas las líneas de influencia

Si el momento resistente varia, cambio en la cantidad de barra o espaciamiento

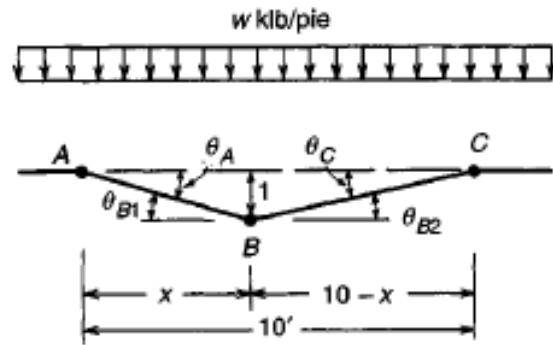
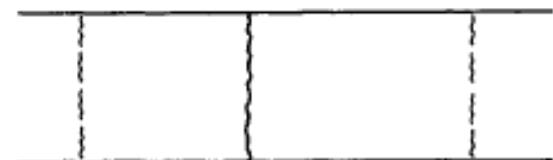
$$W_i = (m_1 l_1 + m_2 l_2 + \dots + m_n l_n) \theta$$

“El trabajo interno siempre es positivo, el trabajo externo varia dependiendo de la aplicación de la resultante de las fuerzas”

Ejemplo 14.3. Análisis de una losa en una dirección mediante el método de trabajo virtual. Determine la capacidad de carga de la losa continua en una dirección (cargada uniformemente) que aparece en la figura 14.9, utilizando el método de trabajo virtual. Los momentos resistentes de la losa son 5.0, 5.0 y 7.5 klb-pie/pie en A, B y C respectivamente.

Trabajo interno

$$5 \times \frac{1}{x} \times 2 + 5 \times \frac{1}{10-x} + 7.5 \times \frac{1}{10-x}$$



Trabajo externo = Trabajo interno

$$\frac{wx}{2} + 5w - \frac{wx}{2} = \frac{10}{x} + \frac{5}{10-x} + \frac{7.5}{10-x}$$

$$5w = \frac{10}{x} + \frac{25}{2(10-x)}$$

$$w = \frac{2}{x} + \frac{5}{2(10-x)}$$

Valor mínimo W

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{2}{x^2} + \frac{5}{2(10-x)^2} = 0$$

$$x = 4.75 \text{ pies}$$

Solución. Se aplica una deflexión unitaria en el punto B de la losa. Entonces, el trabajo externo realizado por la carga es la suma de las cargas multiplicadas por sus desplazamientos y es igual a

$$\text{Trabajo externo} \quad \frac{wx}{2} + \frac{w}{2}(10-x)$$

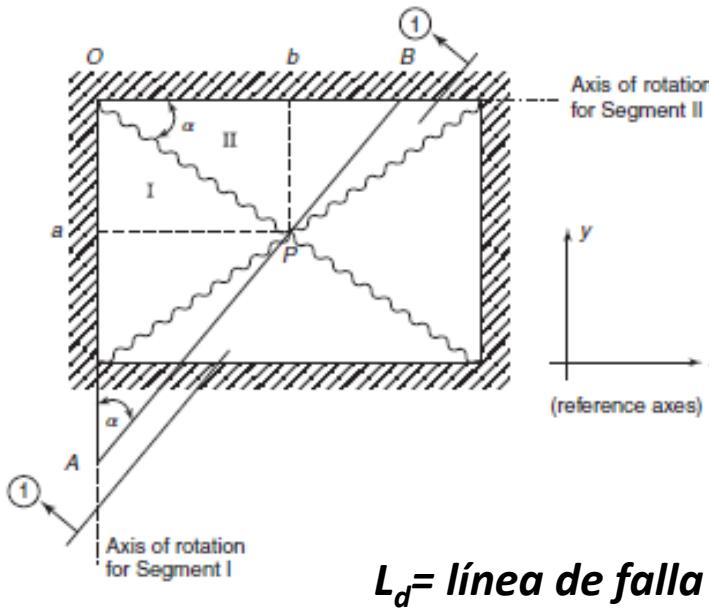
$$w = 0.89 \text{ klb/pie}^2$$

Rotaciones de las rótulas en relación a desplazamiento unitario

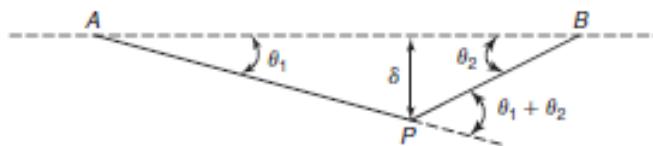
$$\theta_A = \theta_{B1} = \frac{1}{x} \quad \theta_{B2} = \theta_C = \frac{1}{10-x}$$

Análisis de Losa Cuadrada en dos direcciones por Trabajo Virtual

Geometría de Mecanismo de Falla



Deformación de losa en eje 1-1

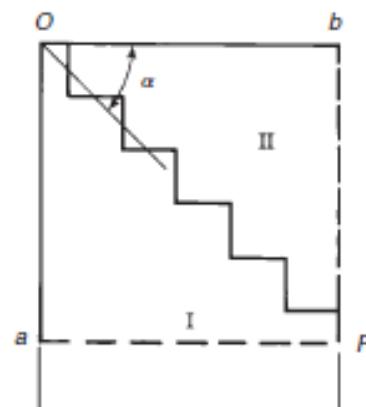


Se traza un segmento perpendicular a la línea de falla OP que intersecta en B y se extrapone en A

$$\theta_1 = \frac{\delta}{L_d \cot \alpha} \text{ and } \theta_2 = \frac{\delta}{L_d \tan \alpha} \quad \theta_1 = \frac{\delta}{L_d \cdot \cos \alpha} \text{ and } \theta_{II} = \frac{\delta}{L_d \cdot \sin \alpha}$$

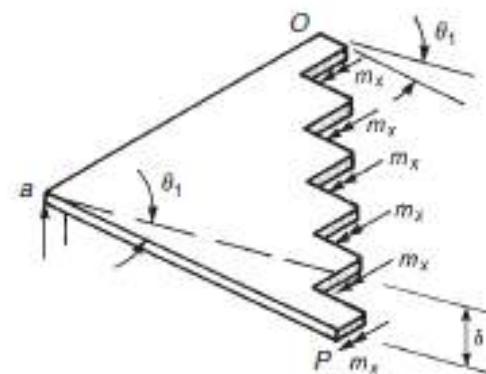
Trabajo Interno

$$IW(O-P) = m_b \cdot L_d (\theta_1 + \theta_2) = m_b \cdot \delta (\tan \alpha + \cot \alpha)$$



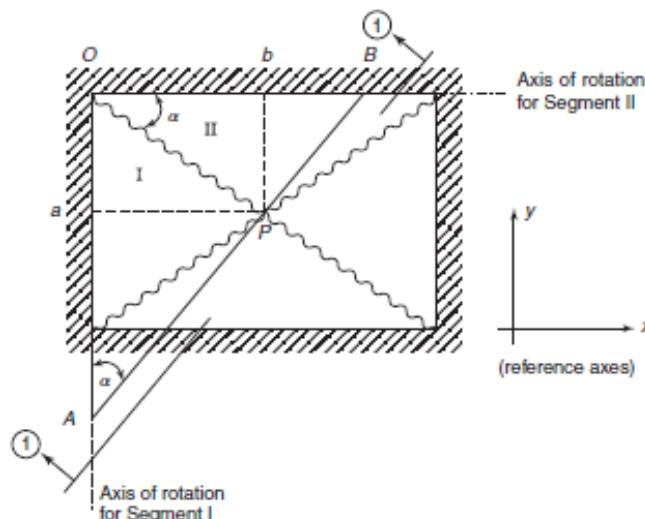
Esquina de Losa

Rotación del segmento 1
con respecto a eje y



Deformación de Losa en
Segmento I

Usando el mecanismo de falla que se muestra en la figura, determine la carga de área q_f , requerida para causar falla en el panel cuadrado mostrado. Asumir una deformación virtual igual a δ en el punto P. Los lados de la placa de losa son de 15 pies. Asumir momento de refuerzo Isotrópico , $mx=mx= mb= 4k/\text{pie}$



Trabajo interno ($\alpha = 45^\circ$)

$$IW = 4 \cdot m_p \cdot \delta(1 + 1) = 4(4 \text{ k-ft/ft}) \cdot \delta \cdot 2 = (32 \text{ k}) \cdot \delta$$

Trabajo externo

El área de carga x volumen desplazado.

El volumen desplazado tiene la fórmula de pirámide invertida

$$EW = q_f \left(L^2 \cdot \frac{\delta}{3} \right) = q_f \cdot \delta \left(\frac{225 \text{ ft}^2}{3} \right)$$

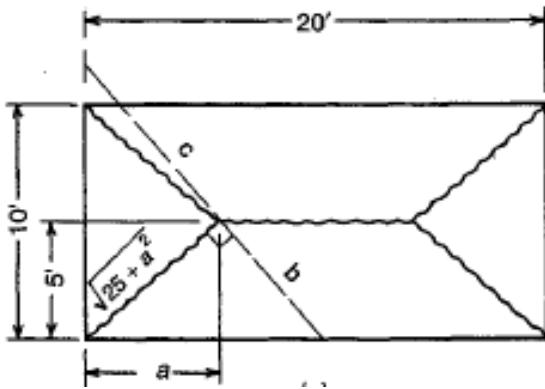
$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

donde A_b es el área de la base y h es la altura de la pirámide

Trabajo externo = Trabajo interno

$$q_f = \frac{32 \text{ k}}{(225/3) \text{ ft}^2} = 0.427 \text{ ksf} = 427 \text{ psf}$$

Ejemplo 14.4. Análisis de una losa rectangular mediante el método de trabajo virtual. La losa en dos direcciones de la figura 14.10 está simplemente apoyada en los cuatro lados y soporta una carga última, uniformemente distribuida, de w lb/pie². Determine la resistencia última a momento de la losa que se va a reforzar de manera isotrópica.



Rotación de línea de influencia paralela a lado largo de la losa

$$\theta_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0.40$$

Trabajo externo

$$W_e = (10 \times 6 \times \frac{1}{2}w \times \frac{1}{3} \times 2) + (8 \times 5w \times \frac{1}{2} \times 2) + (12 \times 5 \times \frac{1}{2}w \times \frac{1}{3} \times 2) = 80w$$

Solución. Se formarán líneas de fluencia positivas siguiendo el patrón que se ilustra en la figura 14.10a, con la dimensión a como incógnita. La dimensión correcta a será aquella que maximice la resistencia a momento requerida para soportar la carga w . Los valores de a y m se determinarán por tanteos.

En la figura 14.10a, la longitud de la línea de fluencia diagonal es $\sqrt{25 + a^2}$. A partir de la semejanza de triángulos,

$$b = 5 \frac{\sqrt{25 + a^2}}{a} \quad c = a \frac{\sqrt{25 + a^2}}{5}$$

Entonces, la rotación de la rótula plástica en la línea de fluencia diagonal correspondiente a una deflexión unitaria en el centro de la losa (ver la figura 14.10b) es

$$\theta_1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{a}{5\sqrt{25 + a^2}} + \frac{5}{a\sqrt{25 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{25 + a^2}} \left(\frac{a}{5} + \frac{5}{a} \right)$$

Primer tanteo $a = 6$ pies

$$\sqrt{25 + 36} = 7.81 \text{ pies}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{7.81} \left(\frac{6}{5} + \frac{5}{6} \right) = 0.261$$

Trabajo interno

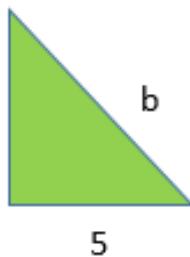
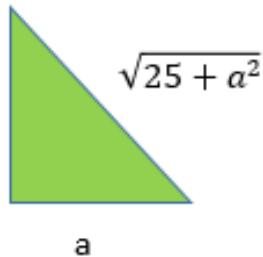
$$W_i = (m \times 7.81 \times 0.261 \times 4) + (m \times 8 \times 0.40) = 11.36m$$

Trabajo externo = Trabajo interno

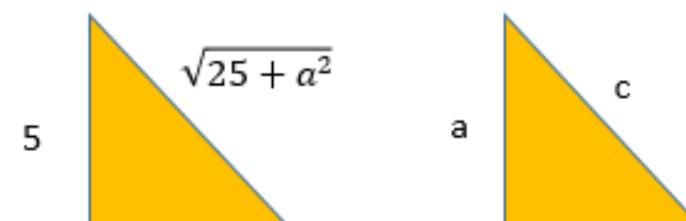
$$m = \frac{80w}{11.36} = 7.05w$$

a	W_i	W_e	m
6.0	11.36m	80.0w	7.05w
6.5	11.08m	78.4w	7.08w
7.0	10.87m	76.6w	7.04w
7.5	10.69m	75.0w	7.02w

Cálculo de la diagonal al centro de la losa en referencia a deformación unitaria del ejemplo anterior



$$b = 5 \frac{\sqrt{25 + a^2}}{a}$$

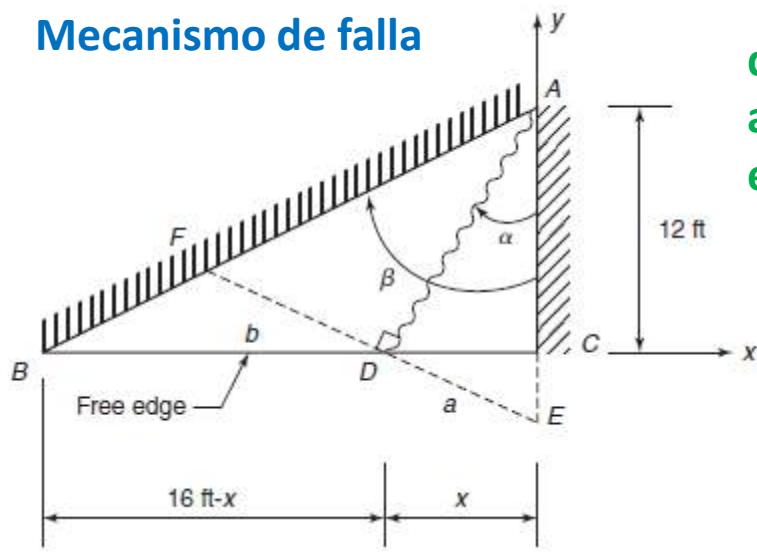


$$c = a \frac{\sqrt{25 + a^2}}{5}$$

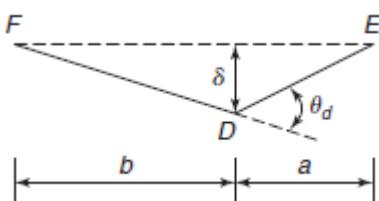
Análisis de Losa Triangular por Trabajo Virtual

Una sección de losa triangular como se muestra en la figura, será analizada para Determinar la carga mínima de área q_f , que causará la falla de la estructura. Dos bordes de la losa están simplemente apoyados y el tercero esta libre de restricción. El refuerzo de la losa inferior es ortotrópico con respecto a los ejes **x** y **y**. Tiene como momentos resistentes $m_{px} = 3.5k\cdot p$ y $m_{py} = 2.5k\cdot p$. Para la sección mostrada el ángulo $\beta = 53.1^\circ$.

Mecanismo de falla



Desplazamiento unitario eje FE



“Asumir un mecanismo de falla con un ángulo α . que intersecta en el plano BC un eje perpendicular a la falla. Seleccionar diferentes valores de x para encontrar q_f ”

Línea de falla AD = L_d

Rotación relativa entre los segmentos FD y FE

$$\theta_d = \frac{\delta}{a} + \frac{\delta}{b}$$

Trabajo Interno

$$L_d = \sqrt{(12 \text{ ft})^2 + x^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{x}{12 \text{ ft}} \quad \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{x}{12 \text{ ft}} \right)$$

Trabajo Interno

$$IW = m_b \cdot L_d \cdot \theta_d = m_b \cdot L_d \cdot \delta \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Trabajo Externo

El área de carga x volumen desplazado.

El volumen desplazado tiene la forma de media pirámide

$$EW = q_f \left[\frac{1}{2} \cdot 16 \text{ ft} \cdot 12 \text{ ft} \cdot \frac{\delta}{3} \right] = q_f \cdot 32 \text{ ft}^2 \cdot \delta$$

Trabajo externo = Trabajo interno

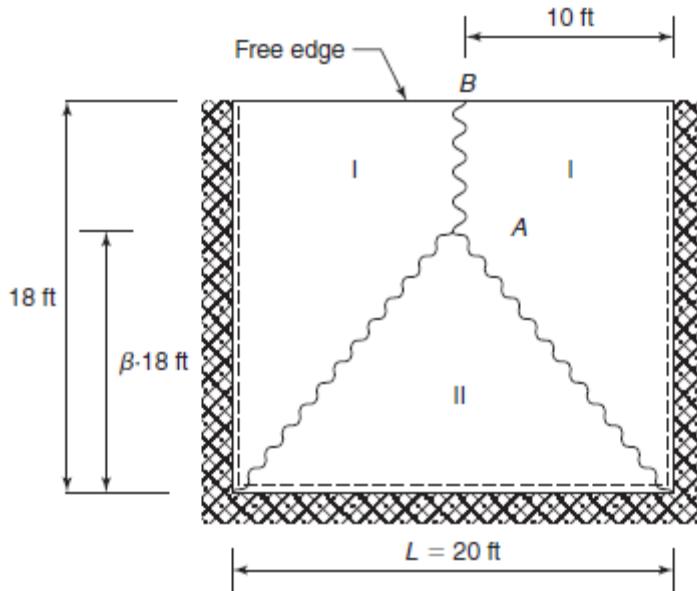
$$q_f = \frac{m_b \cdot L_d \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}{32 \text{ ft}^2}$$

Reemplazando por tanteos para valores de x .

x (ft)	α (deg.)	$\beta - \alpha$ (deg.)	L_d (ft)	a (ft)	b (ft)	m_b (k-ft/ft)	q_f (ksf)
5.0	22.6	30.5	13.0	5.42	7.66	3.35	0.429
5.5	24.6	28.5	13.2	6.04	7.17	3.33	0.419
6.0	26.6	26.5	13.4	6.71	6.71	3.30	0.412
6.5	28.4	24.7	13.6	7.39	6.26	3.27	0.412
7.0	30.3	22.8	13.9	8.10	5.86	3.25	0.415

Análisis de Losa Rectangular con tres apoyos por Trabajo Virtual

El método de líneas de influencia será usado para el diseño isotrópico del refuerzo superior e inferior de la losa rectangular mostrada. Asumir que la losa tiene 8 pulgadas de espesor con un peso de 100 lib/pie² más una carga muerta superpuesta de 25 lib/pie² y lleva una carga viva de 80 lib/pie². Asumir que el concreto tiene una resistencia a la compresión f'_c 4000 psi y el acero tiene f_v 60000 psi.



Asumir la ubicación del punto A y por tanteos determinar el momento de falla

Es posible en algunos casos que $\beta \geq 1.0$

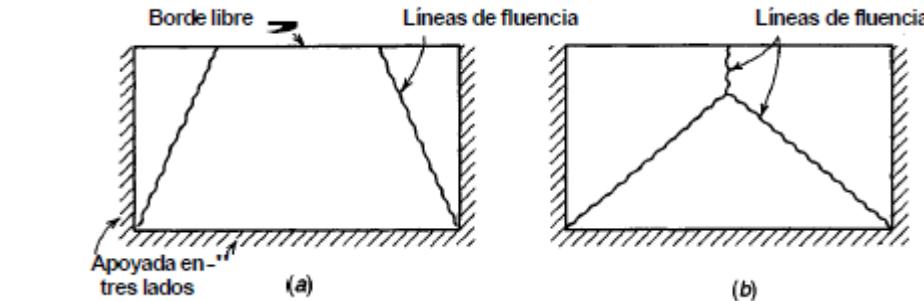
Rotaciones en la Línea de falla A-B

Cargas factorizadas

$$q_u = 1.4q_D = 1.4(100 + 25) \text{ psf} = 175 \text{ psf}$$

$$q_u = 1.2q_d + 1.6q_L = 1.2(125 \text{ psf}) + 1.6(80 \text{ psf}) = 278 \text{ psf}$$

$$\theta_I = \frac{\delta}{10 \text{ ft}} \text{ and } \theta_{II} = \frac{\delta}{\beta \cdot 18 \text{ ft}}$$



Trabajo Interno

$$IW(I) = (m_n + m_p) \cdot 18 \text{ ft} \cdot \theta_I = (m_n + m_p) \cdot 1.8 \cdot \delta$$

$$IW(II) = (m_n + m_p) \cdot 20 \text{ ft} \cdot \theta_{II} = (m_n + m_p) \frac{1.11}{\beta} \cdot \delta$$

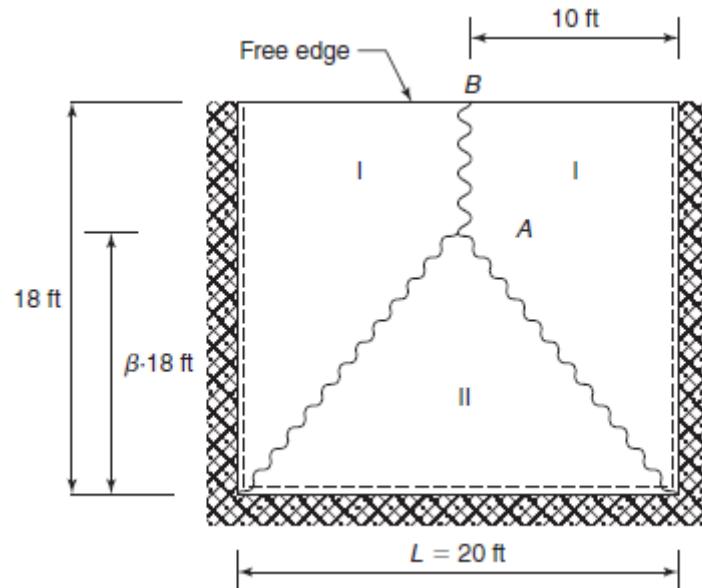
$$\sum IW = 2 \cdot IW(I) + IW(II) = (m_n + m_p) \left(3.6 + \frac{1.11}{\beta} \right) \cdot \delta$$

Trabajo Externo

$$\begin{aligned}
 EW &= q_u \left[20 \text{ ft} \cdot \beta \cdot 18 \text{ ft} \cdot \frac{\delta}{3} + 20 \text{ ft} \cdot (1 - \beta) \cdot 18 \text{ ft} \cdot \frac{\delta}{2} \right] \\
 &= q_u \cdot \delta (120 \text{ ft}^2 \cdot \beta + 180 \text{ ft}^2 - 180 \text{ ft}^2 \cdot \beta) \\
 &= q_u \cdot \delta (180 \text{ ft}^2 - 60 \text{ ft}^2 \cdot \beta)
 \end{aligned}$$

ϕ Trabajo Interno = Trabajo Externo

$$\begin{aligned}
 \phi(m_n + m_p) \left(3.6 + \frac{1.11}{\beta} \right) &\geq q_u (180 \text{ ft}^2 - 60 \text{ ft}^2 \cdot \beta) \\
 (m_n + m_p) &\geq \frac{q_u}{\phi} \left(\frac{180 \text{ ft}^2 - 60 \text{ ft}^2 \cdot \beta}{3.6 + \frac{1.11}{\beta}} \right)
 \end{aligned}$$



Asumiendo por tanteos el valor de β
Se obtiene la localización del punto A
y el momento resistente

β	Numerator (ft ²)	Denominator	$m_n + m_p$ (k-ft/ft)
0.50	150	5.82	7.96
0.55	147	5.62	8.08
0.60	144	5.45	8.16
0.65	141	5.31	8.21
0.70	138	5.19	8.22
0.75	135	5.08	8.21

Calculando el acero positivo y negativo

“el refuerzo negativo debe ser igual a mayor que el refuerzo positivo”

Se asume 40% refuerzo negativo = 3.28K-pie/pie

$$R = 3.28 \times 1000 \times 12 / (0.9 \times 12 \times 6,5^2) = 86.25$$

$$\rho = 0.0018 \text{ As temp}$$

$$As = 0.0018 \times 12 \times 8 = 0.17 \text{ pulg}^2/\text{pie}$$

$$0.17 / 0.2 = 0.85 \#4$$

$$12 / 0.85 = 14.11 \approx 14"$$

Usar #4 @ 14"

en refuerzo positivo

Se asume 60% refuerzo negativo = 4.93K-pie/pie

$$R = 4.93 \times 1000 \times 12 / (0.9 \times 12 \times 6,5^2) = 129.65$$

$$\rho = 0.0022$$

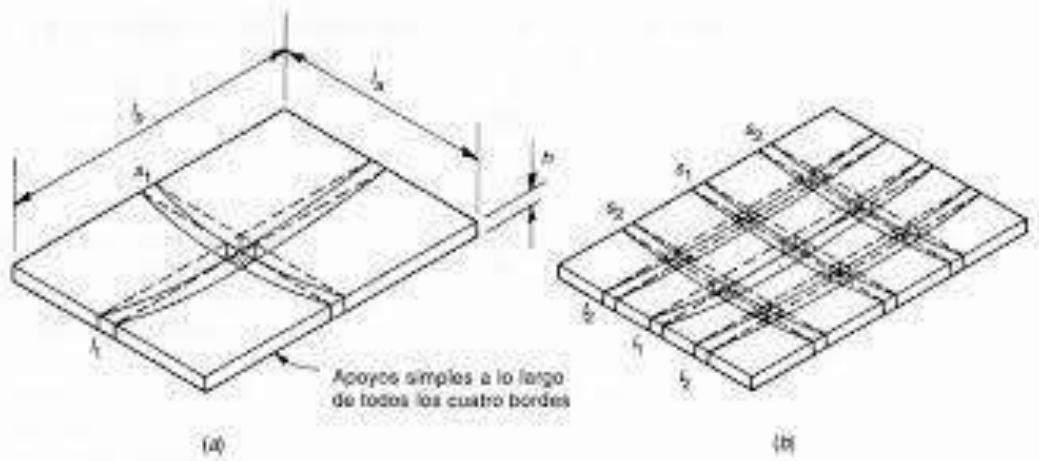
$$As = 0.0022 \times 12 \times 6.5 = 0.17 \text{ pulg}^2/\text{pie}$$

$$0.17 / 0.2 = 0.85 \#4$$

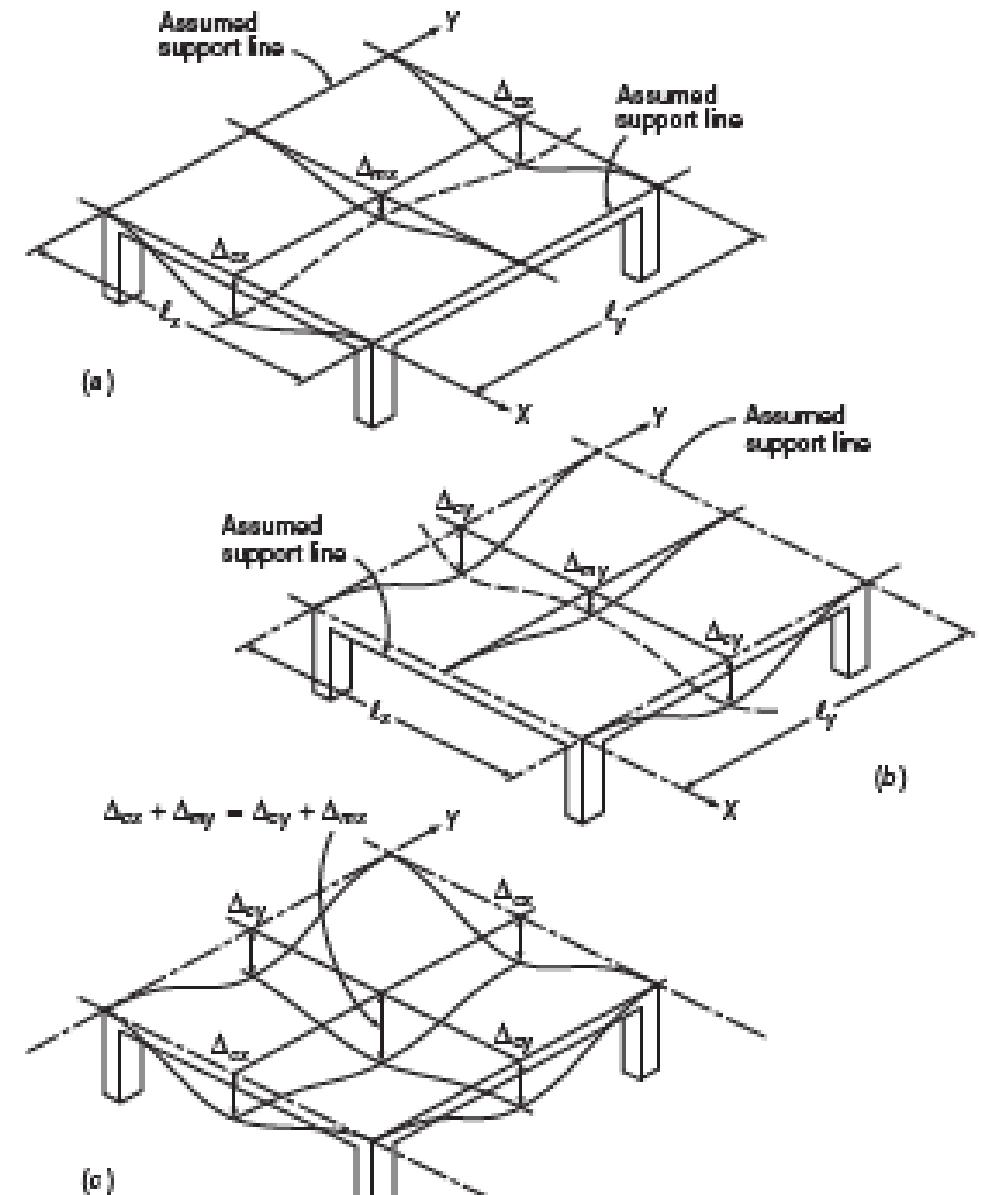
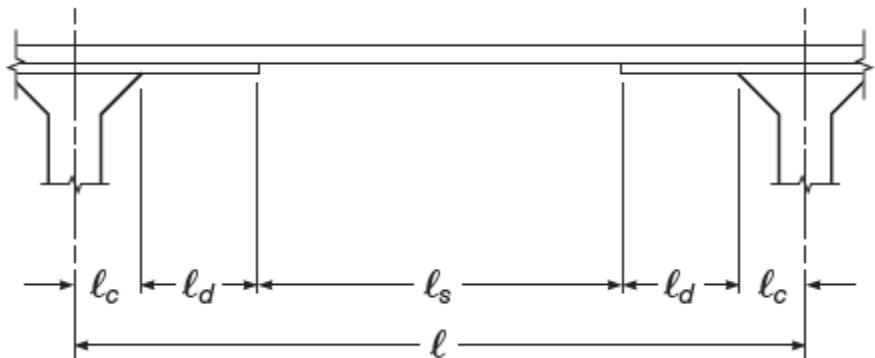
$$12 / 0.85 = 14.11 \approx 14"$$

Usar #4 @ 14"

en refuerzo negativo



Calculo de Deflexiones en Losas



Calculo de Deflexiones

Método del Pórtico Equivalente

“La deflexión en el centro del claro es igual a la deformación en el centro de la luz de la franja de columna + la deflexión la franja central en la otra dirección”

$$\Delta_{\max} = \Delta_{cx} + \Delta_{my}$$

$$\Delta_{\max} = \Delta_{cy} + \Delta_{mx}$$

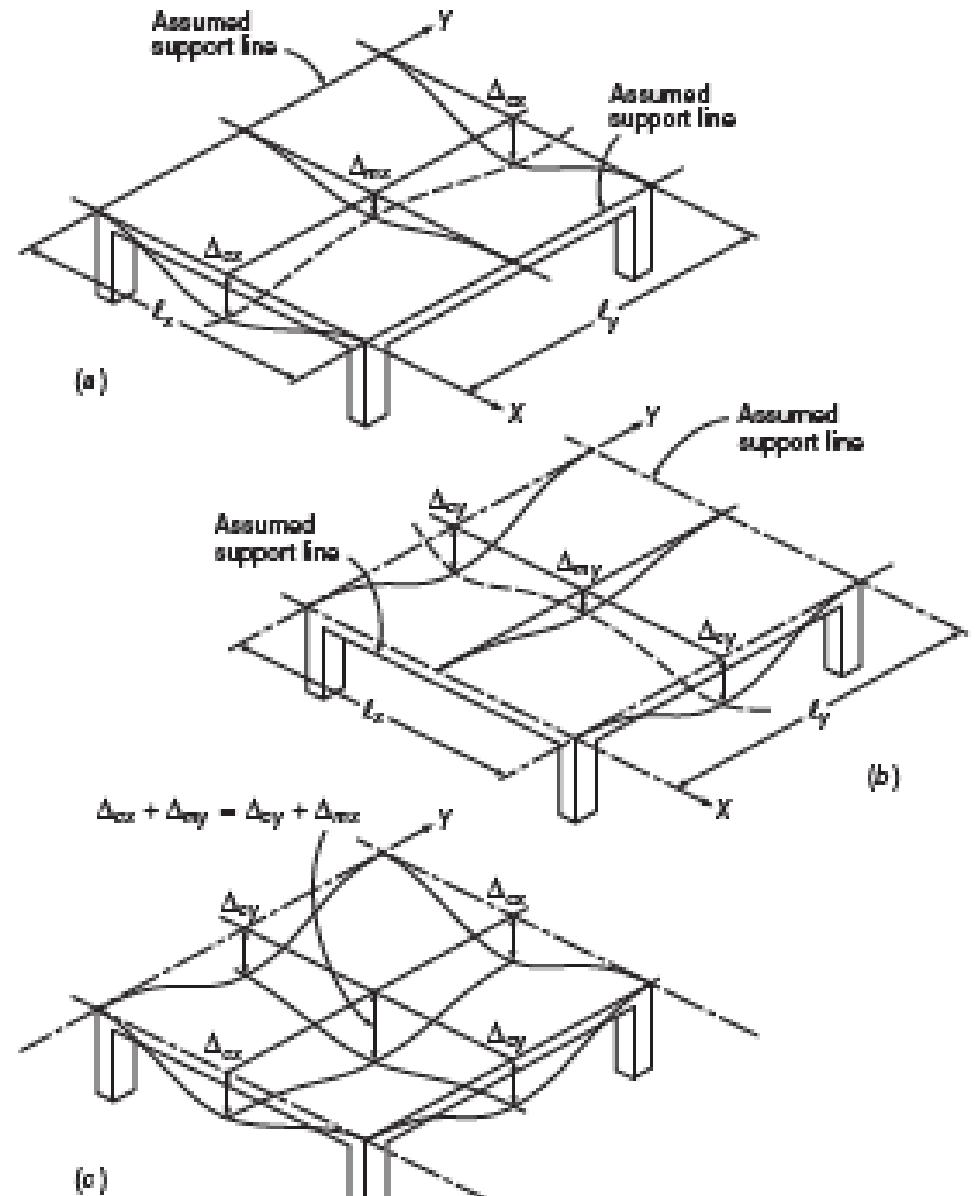
Deformación de referencia del panel

$$\Delta_{f,\text{ref}} = \frac{wl^4}{384E_c I_{\text{pórtico}}}$$

Variación real de deformación por franjas

$$\Delta_{f,col} = \Delta_{f,\text{ref}} \frac{M_{\text{col}}}{M_{\text{frame}}} \frac{E_c I_{\text{frame}}}{E_c I_{\text{col}}}$$

$$\Delta_{f,mid} = \Delta_{f,\text{ref}} \frac{M_{\text{mid}}}{M_{\text{frame}}} \frac{E_c I_{\text{frame}}}{E_c I_{\text{mid}}}$$



Momento de Inercia del Pórtico - Deformaciones por Rotación y Totales

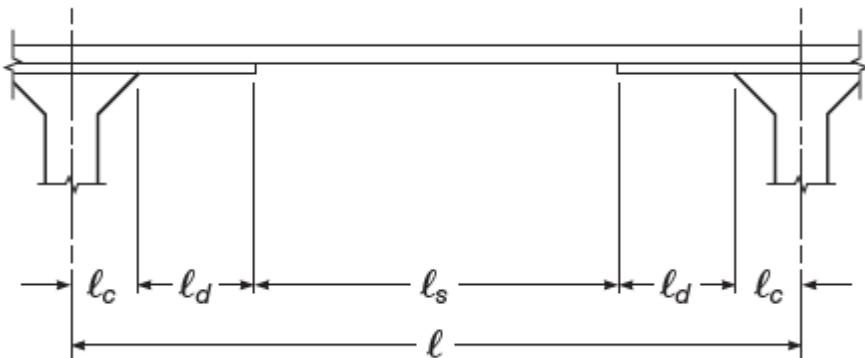
Variación del momento de Inercia con ábacos y capiteles

$$I_{av} = 2\frac{l_c}{l}I_c + 2\frac{l_d}{l}I_d + \frac{l_s}{l}I_s$$

I_c = momento de inercia de la losa que incluye el ábaco y el capitel

I_d = momento de inercia de la losa con sólo el ábaco

I_s = momento de inercia de la sola losa



Corrección de Rotaciones en Pórticos Equivalentes

$$\theta = \frac{M_{net}}{K_{ec}}$$

M_{nte} = diferencia de momentos de piso a la izquierda y derecha de la columna

K_{ec} = Rígidez de la columna equivalente

Deformaciones por rotación en centro del claro

$$\Delta_\theta = \frac{\theta\ell}{8}$$

Deformaciones totales en franja de losa y central

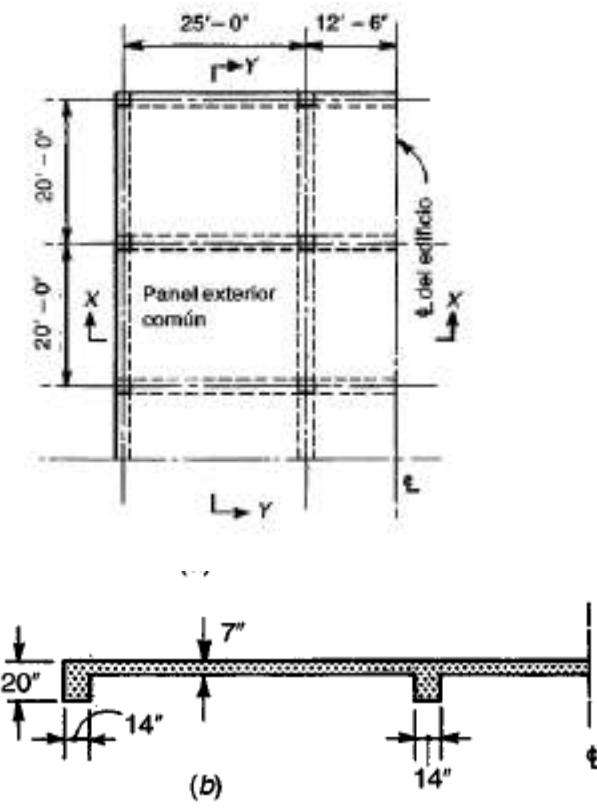
$$\Delta_{col} = \Delta_{f,col} + \Delta_{\theta l} + \Delta_{\theta r}$$

$$\Delta_{mid} = \Delta_{f,mid} + \Delta_{\theta l} + \Delta_{\theta r}$$

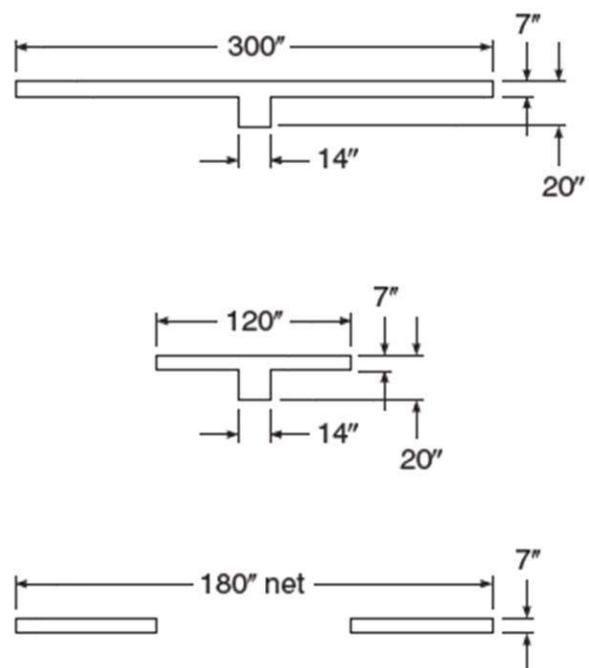
“l y r se refieren al extremo izquierdo y derecho”

Ejemplo 13.6. Cálculo de deflexiones. Determine las deflexiones en el centro de un panel exterior típico ocasionadas por la aplicación de las cargas muerta y viva, para el piso en dos direcciones diseñado en el ejemplo 13.1. La carga viva puede considerarse como una carga a corto plazo y estará distribuida uniformemente en todos los paneles. El piso soportará elementos no estructurales que pueden dañarse si se someten a deflexiones grandes. Tomar $E = 3.6 \times 10^6$ lb/pulg².

Solución. Primero se encontrará la deflexión elástica que se genera debido al peso propio de 88 lb/pie², después de lo cual pueden encontrarse las deflexiones adicionales a largo plazo producidas por la carga muerta, aplicando un factor de $\lambda = 3.0$, y las deflexiones a corto plazo por carga viva de 125 lb/pie² mediante proporción directa.

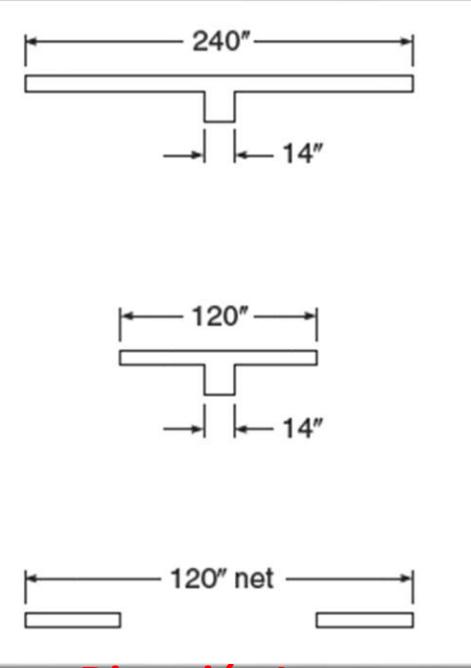


Las secciones transversales efectivas del concreto, en las cuales se basaran los cálculos de los momentos de inercia, se muestran en la figura 13.28 para todo el ancho del pórtico, para la franja de columna y para las franjas centrales, tanto en la dirección de la luz corta como en la de la luz larga. Observar que el ancho de la franja de columna en las dos direcciones se basa en la luz más corta del panel, de acuerdo con el Código ACI. Los valores para los momentos de inercia son los siguientes:



Dirección Corta

	Dirección corta	Dirección larga
$I_{\text{pórtico}}$	27,900 pulg ⁴	25,800 pulg ⁴
I_{col}	21,000 pulg ⁴	21,000 pulg ⁴
I_{cent}	5,150 pulg ⁴	3,430 pulg ⁴



Dirección Larga

Si se calculan inicialmente las deflexiones del piso en la *dirección de la huéija corta* del panel, a partir de la ecuación (13.20) la deflexión de referencia es

$$\Delta_{f,\text{ref}} = \frac{88 \times 25(20 \times 12)^4}{12 \times 384 \times 3.6 \times 10^6 \times 27,900} = 0.016 \text{ pulg}$$

$$\Delta_{f,\text{col}} = \Delta_{f,\text{ref}} \frac{M_{\text{col}}}{M_{\text{frame}}} \frac{E_c I_{\text{frame}}}{E_c I_{\text{col}}} = 0.016 \times 0.68 \times \frac{27,900}{21,000} = 0.014 \text{ in.}$$

$$\Delta_{f,\text{mid}} = \Delta_{f,\text{ref}} \frac{M_{\text{mid}}}{M_{\text{frame}}} \frac{E_c I_{\text{frame}}}{E_c I_{\text{mid}}} = 0.016 \times 0.32 \times \frac{27,900}{5150} = 0.028 \text{ in.}$$

$$\Delta_{\text{col}} = 0.014 \text{ in.}$$

$$\Delta_{\text{mid}} = 0.028 \text{ in.}$$

Ahora, calculando las deflexiones en la dirección **larga** del panel se obtiene la siguiente deflexión de referencia:

$$\Delta_{f,\text{ref}} = \frac{88 \times 20(25 \times 12)^4}{12 \times 384 \times 3.6 \times 10^6 \times 25,800} = 0.033 \text{ pulg}$$

A partir del análisis de momentos se encontró que la franja de columna tendría el 93 por ciento del momento negativo exterior, el 81 por ciento del positivo y el 81 por ciento del momento negativo interior. Así que, el factor de distribución lateral promedio de la franja de columna es

$$\left(\frac{93 + 81}{2} + 81\right) \frac{1}{2} = 0.84$$

o sea el 84 por ciento, mientras que a las franjas centrales se les asigna el 16 por ciento. Entonces, con las ecuaciones (13.21a y b),

$$\Delta_{f,\text{col}} = 0.033 \times 0.84 \times \frac{25,800}{21,000} = 0.034 \text{ pulg}$$

$$\Delta_{f,\text{cent}} = 0.033 \times 0.16 \times \frac{25,800}{3430} = 0.040 \text{ pulg}$$

Mientras que la rotación en la columna interior puede considerarse despreciable, la de la columna exterior no. Para la carga muerta de la losa, el momento estático total es

$$M_s = 1/8 \times 0.088 \times 20 \times 25^2 = 137.5 \text{ klb-pie}$$

Se encontró que el 16 por ciento del momento estático, o sea, 22.0 klb-pie, debe asignarse a la sección del apoyo exterior. La rotación resultante se encuentra con la ecuación (13.23). Se confirma que la rigidez de la columna equivalente (ver la sección 13.5c) es $169 \times 3.6 \times 10^6 \text{ lb-pulg/rad}$; de ahí que,

$$\frac{1}{K_{ec}} = \frac{1}{\Sigma K_c} + \frac{1}{K_t}$$

$$\theta = \frac{M_{\text{net}}}{K_{ec}} \quad \theta = \frac{22,000 \times 12}{169 \times 3.6 \times 10^6} = 0.00043 \text{ rad}$$

$$\Delta_{\theta l} = \frac{0.00043 \times 25 \times 12}{8} = 0.016 \text{ pulg}$$

Deformación por franja de columna y de losa

$$\Delta_{\text{col}} = 0.034 + 0.016 = 0.050 \text{ pulg}$$

$$\Delta_{\text{cent}} = 0.040 + 0.016 = 0.056 \text{ pulg}$$

y a partir de la ecuación (13.19a), la deflexión a corto plazo en el centro del panel debido al propio es

$$\Delta_{\max} = \Delta_{cx} + \Delta_{my} \quad \Delta_{\max} = 0.050 + 0.028 = 0.078 \text{ in.}$$

$$\Delta_{\max} = \Delta_{cy} + \Delta_{mx}$$

Deformación a largo plazo por carga muerta

$$\lambda \Delta_{\max} \quad \lambda = 3$$

$$\text{Deformación a largo plazo} = 3 \times 0.078 = 0.234 \text{ pulg}$$

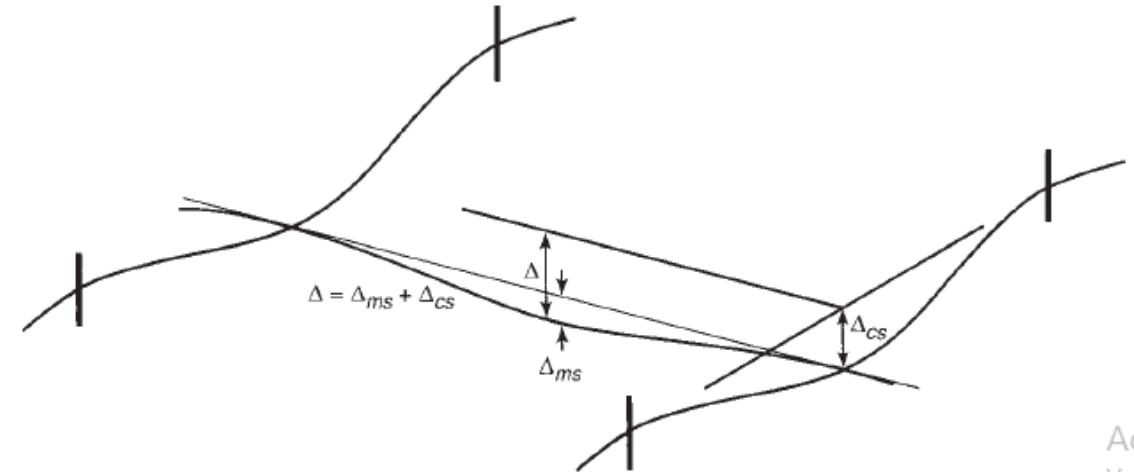
Deformación por carga viva a corto plazo

$$\text{Def. carga viva} = 0.078 \times 125 / 88 = 0.111 \text{ pulg}$$

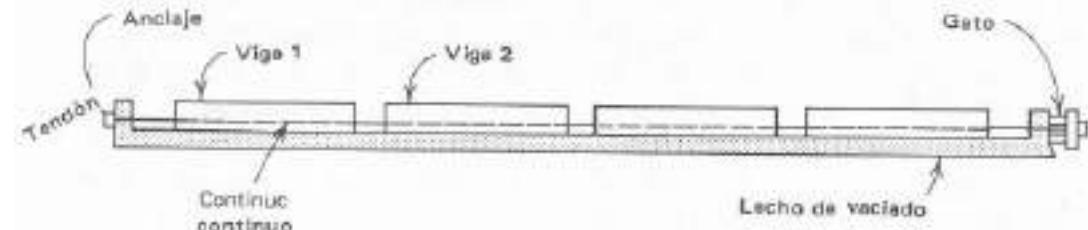
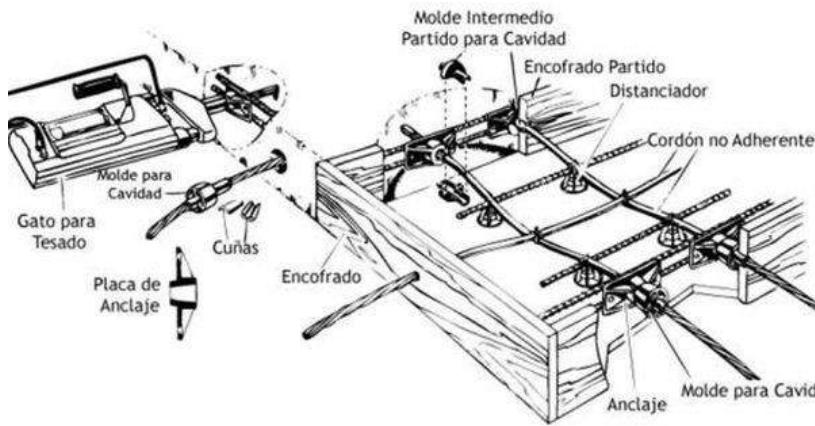
Deformación total

$$\Delta_{\max} = \text{def. carga viva inst} + \text{def largo plazo}$$

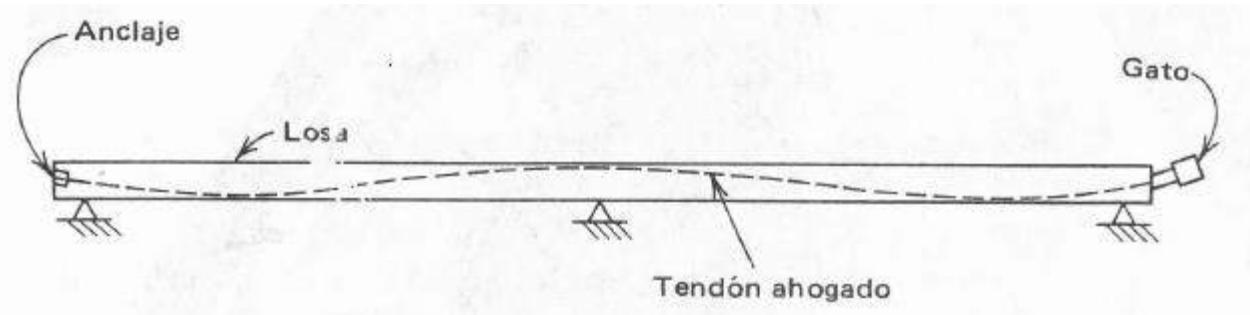
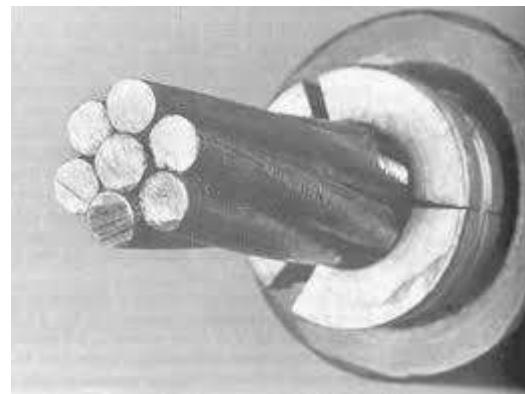
$$\Delta_{\max} = 0.111 + 0.234 = 0.345 \text{ pulg} < \Delta \text{ perm.}$$



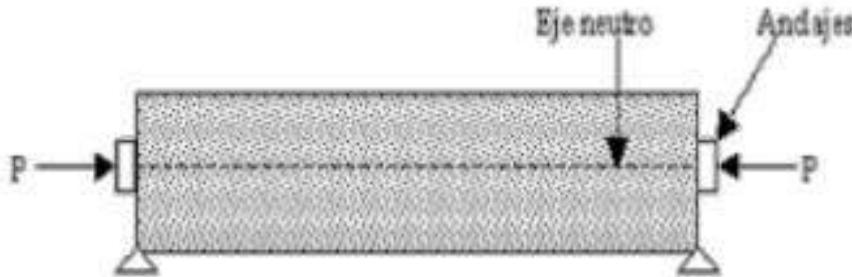
$$\Delta \text{ perm} < L/480 = 20 \times 12 / 480$$



Introducción al Concreto Presforzado Materiales Calculo de Esfuerzos



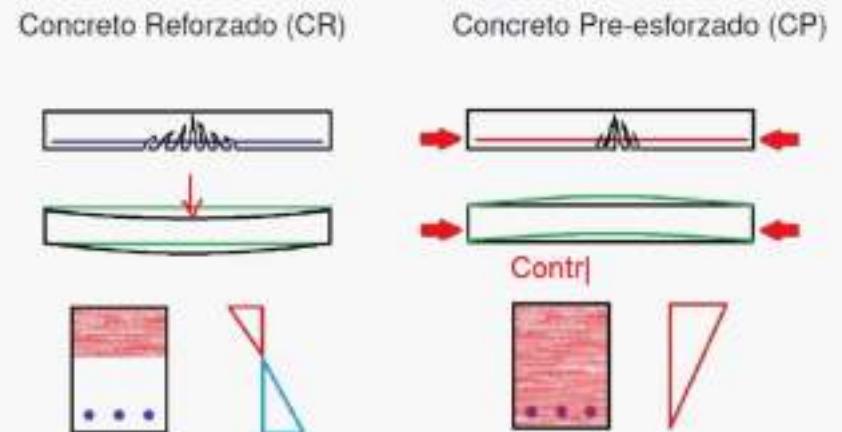
Definición de Concreto Presforzado



- El preefuerzo o Postensado se define como un *estado especial de esfuerzos y deformaciones que es inducido para mejorar el comportamiento estructural de un elemento*.
- Por medio del preefuerzo se aumenta la capacidad de carga y se disminuye la sección del elemento. Se Inducen fuerzas opuestas a las que producen las cargas de trabajo mediante cable de acero de alta resistencia al ser tensado contra sus anclas.

“La estructura de concreto es tensado antes que se apliquen las cargas se de servicio”

Refuerzo vs. Presfuerzo



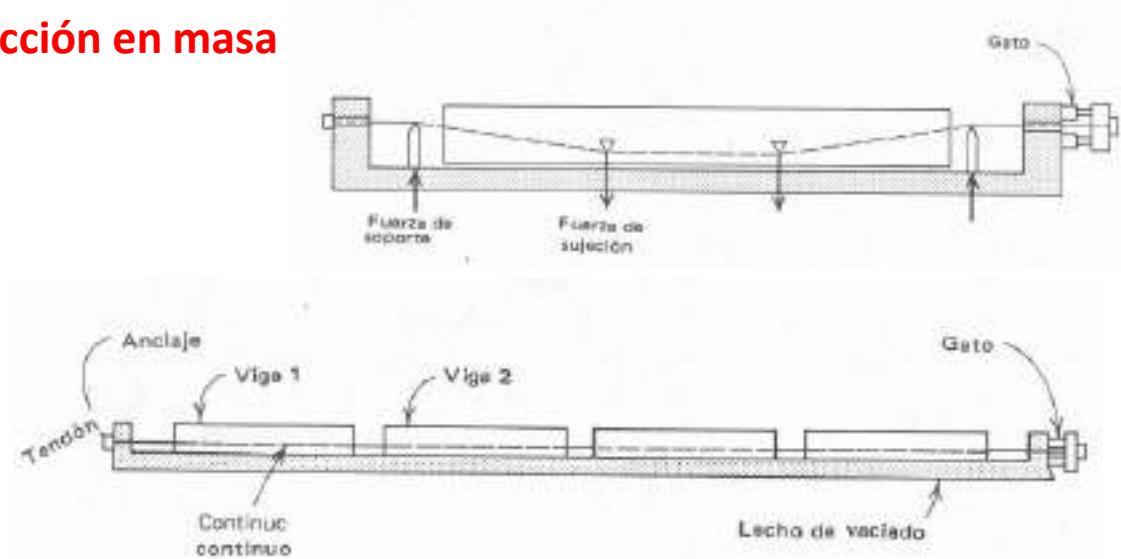
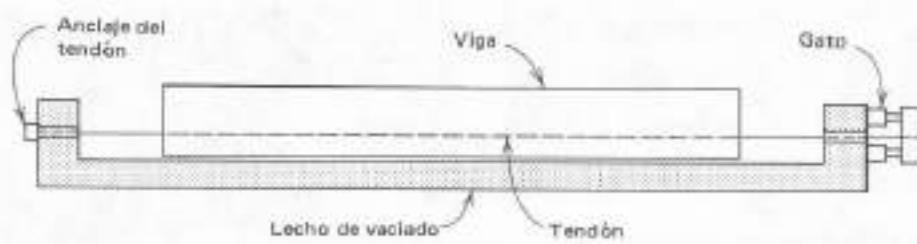
Tipos de Concreto Presforzado

Concreto Pretensado

Los miembros de concreto pretensado se tensan los cables en los anclajes extremos antes de vaciar el concreto. Cuando el concreto alcanza la resistencia requerida se retira la fuerza aplicada en los gatos hidráulicos, esa fuerza es transmitida por adherencia del acero al concreto

Es aplicable para la producción de vigas de producción en masa

Métodos de Pretensado



Ventajas del Concreto Pretensado

- Brinda un mejor comportamiento bajo cargas de servicio.
- Los elementos pretensados logran ser eficientes y esbeltos utilizando menos material que otros procesos constructivos.
- Su producción en serie, al ser industrializados, brinda mayor ajuste en tiempo.
- Cuando se usa adecuadamente y en los elementos que corresponde, se consigue disminuir los costos de la obra.



Desventajas del Concreto Pretensado

- Requiere una inversión inicial.
- El diseño de los elementos estructurales es más complejo y especializado.
- Es necesario contar con operarios especializados, tanto para la construcción de los elementos postesados como el montaje de los elementos pretesados.
- Si no se emplea adecuadamente y en los elementos que corresponde, se pueden incrementar los costos de la obra.



Concreto Pretensado - Aplicación

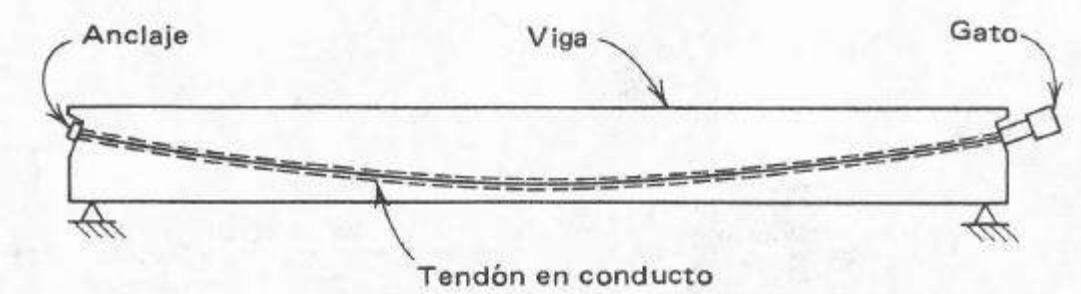


**Elementos Prefabricados
y Vigas de Puente**

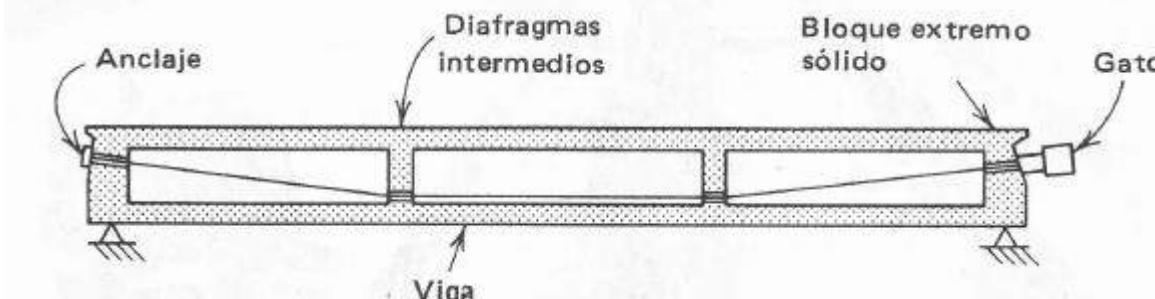


Concreto Postensado

En los miembros de concreto pretensado se coloca el acero de presfuerzo sujetando su posición previa al vaciado de concreto, manteniendo el perfil deseado. Se vacia el concreto y cuando ha adquirido suficiente resistencia se tensan los cables con un gato hidráulico, de forma individual o en grupo. Los tendones pueden estar envueltos en un conducto que luego se llenarán con mortero.

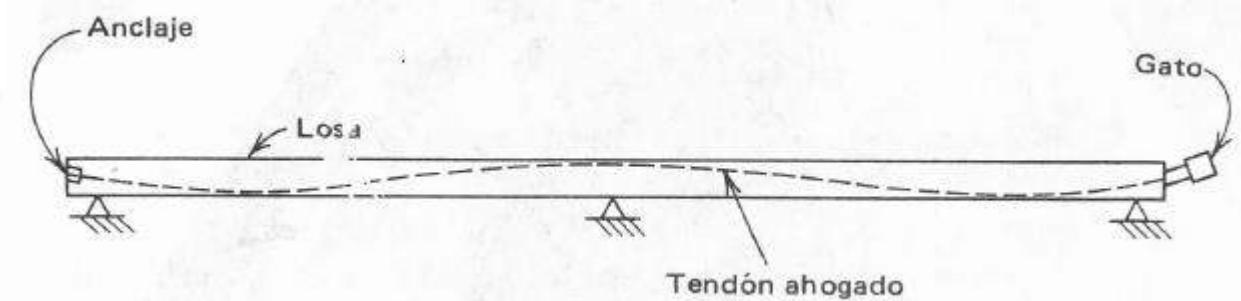


Viga con conducto hueco embebido a concreto



Viga celular hueca con diafragmas intermedios

Métodos de Postensado



Losa continua con tendones envueltos

Descripción del Sistema Postensado

A diferencia del concreto reforzado ordinario, las armaduras no están directamente en contacto con el concreto en el momento del hormigonado, ya que de lo contrario le transmitirían la tensión de tracción por adherencia entre la armadura y el hormigón. Por ello las armaduras se colocan dentro de vainas de plástico o metal. Estas vainas se posicionan dentro del encofrado (el molde) formando una línea curva definida en la fase de diseño, en función de la forma de la pieza y de las cargas a las que estará sometida.

Una vez que a las armaduras se les ha aplicado la tensión de trabajo, se anclan a la estructura mediante piezas especiales en sus dos extremos. Finalmente, caben dos opciones:

- En el **sistema "adherente"**, se rellena el interior de las vainas con mortero de alta resistencia a presión, de manera que la armadura queda adherida al hormigón formando una sección monolítica. A su vez, el mortero asegura la protección del acero frente a la corrosión.
- En el **sistema "no adherente"**, las vainas no se llenan, por lo que el único contacto entre el tendón y el hormigón se produce a través del cabezal de anclaje.

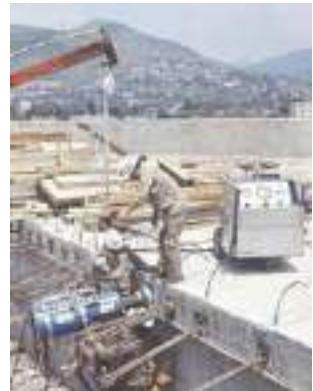
El hormigón postensado suele requerir además cierta cantidad de armaduras pasivas (sin tensión aplicada).

Ventajas del Concreto Postensado

- El uso de hormigón postensado permite reducir el canto de los elementos de hormigón, ya que por un lado aumenta su capacidad resistente, y por otro reduce las deformaciones.
- Conlleva un uso más eficiente de los materiales, por lo que permite reducir el peso total de la estructura.
- Disminuye la fisuración del hormigón, aumentando su vida útil.



Desventajas del Concreto Postensado



- Requiere de maquinaria y mano de obra más especializada que el hormigón sin postensar.
- El cálculo es más complejo.

Concreto Postensado - Aplicación



El empleo de concreto postensado suele reducirse a estructuras sometidas a grandes cargas y con grandes separaciones entre apoyos, en las cuales la reducción del coste de los materiales compensa el aumento de la complejidad de ejecución.

La técnica del postensado se utiliza generalmente *in situ*, es decir, en el mismo emplazamiento de la obra.

Características de Concreto Pretensado y Postensado

Características del Pretensado:

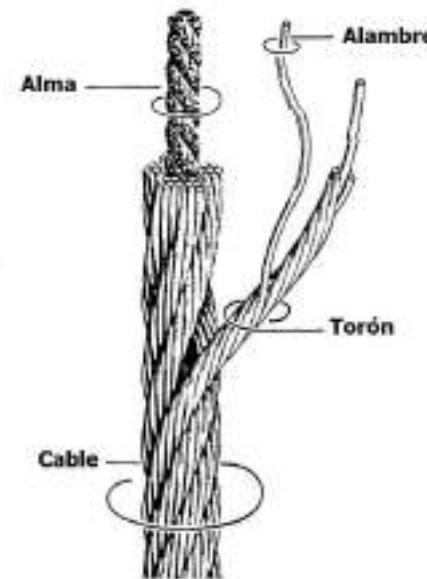
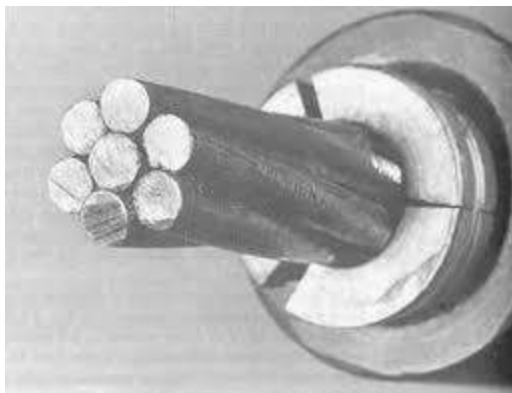
1. Pieza prefabricada.
2. El presfuerzo se aplica antes que las cargas.
3. El anclaje se da por adherencia.
4. La acción del presfuerzo es interna.
5. El acero tiene trayectorias rectas.
6. Las piezas son generalmente simplemente apoyadas (elemento estático).
-

Características del Postensado:

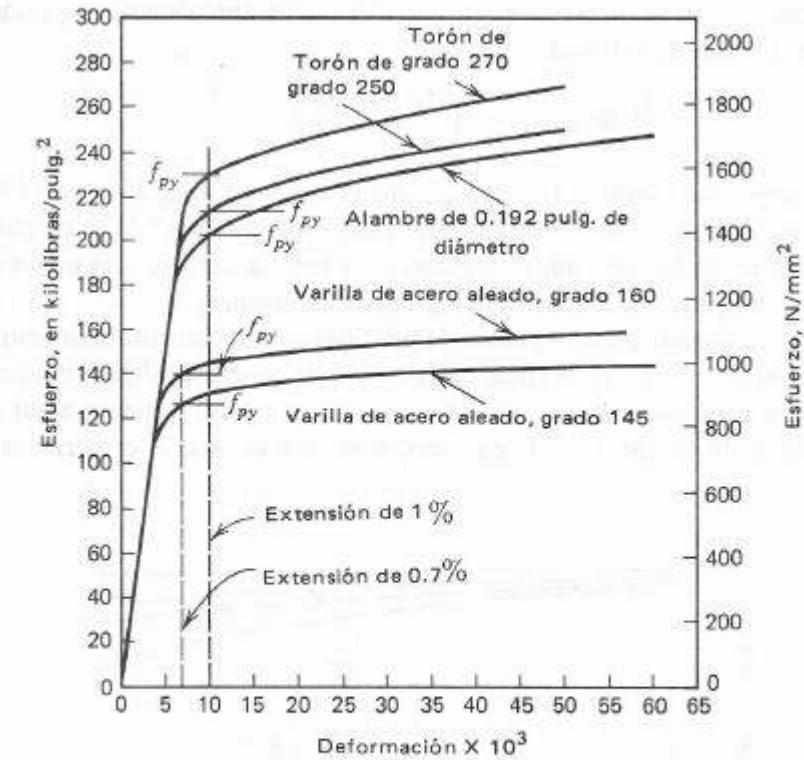
1. Pieza prefabricada o coladas en sitio.
2. Se aplica el presfuerzo después del colado.
3. El anclaje requiere de dispositivos mecánicos.
4. La acción del presfuerzo es externa.
5. La trayectoria de los cables puede ser recta o curva.
6. La pieza permite continuidad en los apoyos (elemento hiperestático).
-

Materiales Acero

1. Cable o Torón ASTM A-416



2. Alambre ASTM A 421



para los alambres $E_p \approx 29,000$ kilolibras/pulg²
para los torones $E_p \approx 27,000$ kilolibras/pulg²
para las varillas: $E_p \approx 27,000$ kilolibras/pulg²



3. Barras de Alta Resistencia ASTM A-722

Propiedades del Acero de Presfuerzo

TABLA A.16

Propiedades de aceros de presfuerzo^aTorón de siete alambres, $f_{pu} = 270 \text{ klb/pulg}^2$

Diámetro nominal (pulg)	Área (pulg ²)	Peso (lb/pie lineal)	$0.7f_{pu}A_p$ (klb)	$0.75f_{pu}A_p$ (klb)	$0.8f_{pu}A_p$ (klb)	$f_{pu}A_p$ (klb)
$\frac{3}{8}$ (0.375)	0.085	0.29	16.1	17.2	18.4	23.0
$\frac{7}{16}$ (0.438)	0.115	0.40	21.7	23.3	24.8	31.0
$\frac{1}{2}$ (0.500)	0.153	0.53	28.9	31.0	33.0	41.3
(0.600)	0.215	0.74	40.7	43.5	46.5	58.1

Torón de siete alambres, $f_{pu} = 250 \text{ klb/pulg}^2$

Diámetro nominal (pulg)	Área (pulg ²)	Peso (lb/pie lineal)	$0.7f_{pu}A_p$ (klb)	$0.8f_{pu}A_p$ (klb)	$f_{pu}A_p$ (klb)
$\frac{1}{4}$ (0.250)	0.036	0.12	6.3	7.2	9.0
$\frac{5}{16}$ (0.313)	0.058	0.20	10.2	11.6	14.5
$\frac{3}{8}$ (0.375)	0.080	0.27	14.0	16.0	20.0
$\frac{7}{16}$ (0.438)	0.108	0.37	18.9	21.6	27.0
$\frac{1}{2}$ (0.500)	0.144	0.49	25.2	28.8	36.0
(0.600)	0.215	0.74	37.6	43.0	53.8

Diámetro	Área (pulg ²)	Peso (lb/pie lineal)	Alambres de preesfuerzo			
			f_u (klb/pulg ²)	$0.75f_{pu}A_p$ (klb)	$0.8f_{pu}A_p$ (klb)	$f_{pu}A_p$ (klb)
0.192	0.0289	0.098	250	5.05	5.78	7.22
0.196	0.0302	0.100	250	5.28	6.04	7.55
0.250	0.0491	0.170	240	8.25	9.42	11.78
0.276	0.0598	0.200	235	9.84	11.24	14.05

Barras lisas de presfuerzo, $f_{pu} = 145 \text{ klb/pulg}^2$

Diámetro nominal (pulg)	Área (pulg ²)	Peso (lb/pie lineal)	$0.7f_{pu}A_p$ (klb)	$0.8f_{pu}A_p$ (klb)	$f_{pu}A_p$ (klb)
$\frac{3}{4}$ (0.750)	0.442	1.50	44.9	51.3	64.1
$\frac{7}{8}$ (0.875)	0.601	2.04	61.0	69.7	87.1
1 (1.000)	0.785	2.67	79.7	91.0	113.8
$1\frac{1}{8}$ (1.125)	0.994	3.38	100.9	115.3	144.1
$1\frac{1}{4}$ (1.250)	1.227	4.17	124.5	142.3	177.9
$1\frac{3}{8}$ (1.375)	1.485	5.05	150.7	172.2	215.3

Barras lisas de presfuerzo, $f_{pu} = 160 \text{ klb/pulg}^2$

Diámetro nominal (pulg)	Área (pulg ²)	Peso (lb/pie lineal)	$0.7f_{pu}A_p$ (klb)	$0.8f_{pu}A_p$ (klb)	$f_{pu}A_p$ (klb)
$\frac{3}{4}$ (0.750)	0.442	1.50	49.5	56.6	70.7
$\frac{7}{8}$ (0.875)	0.601	2.04	67.3	77.0	96.2
1 (1.000)	0.785	2.67	87.9	100.5	125.6
$1\frac{1}{8}$ (1.125)	0.994	3.38	111.3	127.2	159.0
$1\frac{1}{4}$ (1.250)	1.227	4.17	137.4	157.0	196.3
$1\frac{3}{8}$ (1.375)	1.485	5.05	166.3	190.1	237.6

Concreto

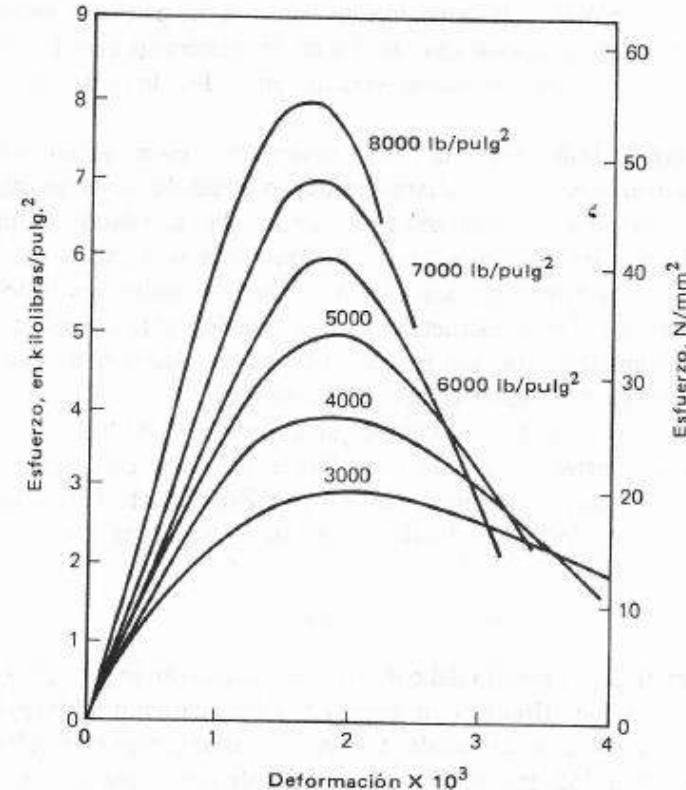
Se utiliza concreto con resistencia $4000 \text{ psi} < f'_c < 6000 \text{ psi}$, aunque en ocasiones se ha llegado a usar hasta $f'_c = 10000 \text{ psi}$

Condiciones para uso de concreto de Alta Resistencia

1. Normalmente, el concreto de alta resistencia tiene un módulo de elasticidad mayor (ver la figura 2.3). Esto significa una reducción en la deformación elástica inicial con la aplicación de la fuerza de preesfuerzo y una reducción en la deformación por flujo plástico, que es aproximadamente proporcional a la deformación elástica. Esto genera una reducción en la pérdida de preesfuerzo.
2. En construcción postensada, se tienen grandes esfuerzos de contacto en los extremos de las vigas, donde la fuerza de preesfuerzo se transfiere desde los tendones hasta los dispositivos de anclaje, que se apoyan directamente sobre el concreto. Este problema se puede resolver aumentando el tamaño de los dispositivos de anclaje o incrementandola capacidad portante del concreto mediante un aumento en su resistencia a la compresión. Esta última solución es por lo general más económica.
3. En construcción pretensada, donde es común la transferencia de esfuerzos por adherencia, la utilización de concretos de alta resistencia permitirá el desarrollo de mayores esfuerzos de adherencia.
4. Una parte sustancial de la construcción preesforzada en los Estados Unidos es prefabricada, con el concreto mezclado, vaciado y curado en condiciones cuidadosamente controladas, lo cual facilita la obtención de altas resistencias.

f'_{ci} en la transferencia

$$f'_{ci} = \frac{t}{\alpha + \beta t} f'_c \quad f'_{ci} = \frac{t}{4.00 + 0.85t} f'_c$$



Concreto Normal

$$E_c = 57,000 \sqrt{f'_c} \text{ psi} \quad (4,700 \sqrt{f'_c} \text{ MPa})$$

$$E_c (\text{psi}) = [40,000 \sqrt{f'_c} + 10^6] \left(\frac{w_c}{145} \right)^{1.5}$$

where $f'_c = 28$ days' compressive strength

$t =$ time in days

$\alpha =$ factor depending on type of cement and curing conditions

= 4.00 for moist-cured type-I cement and 2.30 for moist-cured type-III cement

= 1.00 for steam-cured type-I cement and 0.70 for steam-cured type-III cement

$\beta =$ factor depending on the same parameters for α giving corresponding values of 0.85, 0.92, 0.95, and 0.98, respectively

Equipos usados en Postensados

CABLE: Cables de acero de alta resistencia torcidos alrededor de un cable central. En el caso de los tendones no adherentes, casi exclusivamente se usan cordones de 7 cables conforme a ASTM A-416.

SILLAS: Equipo empleado para dar soporte o sostener los tendones de postensado en su lugar para evitar su desplazamiento antes o durante la colocación del concreto.

CONOS: También conocidos como Pocket Former son mecanismos temporales usados para hacer una cavidad en el concreto que permitirá el equipo de tensado acceso

ANCLAJES: Dispositivo mecánico que consta de todos los componentes necesarios para anclar el acero de presfuerzo y transmitir permanentemente la fuerza de preforzado al concreto.

CUÑAS: Piezas de metal ahusadas dentadas que “muerden” el cable durante la transferencia de la fuerza de preforzado. El extremo delantero de los dientes está biselado para garantizar el desarrollo gradual de la fuerza del tendón sobre la longitud de la cuña. Normalmente se usan cuñas de dos piezas para los tendones monocable.

EQUIPO DE TENSADO: Normalmente consiste en un gato, una bomba, mangueras y un manómetro. Se utiliza para tensar los cables 3 días después de vertirse el concreto.



Sillas



Anclajes Pasivos

Vaina de Metal



Anclajes Activos



Conos

Gato Monotorón



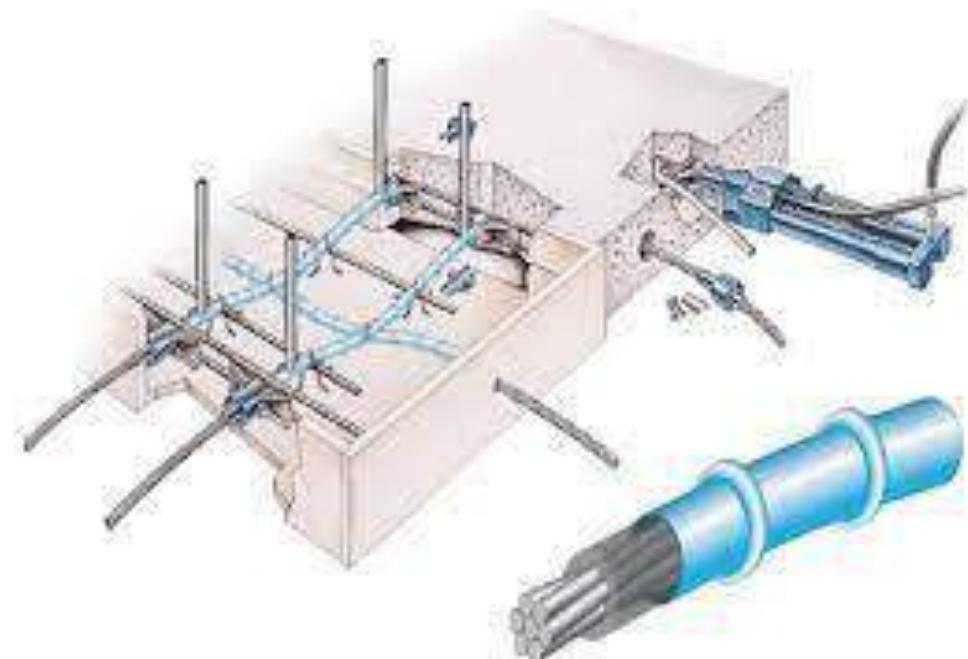
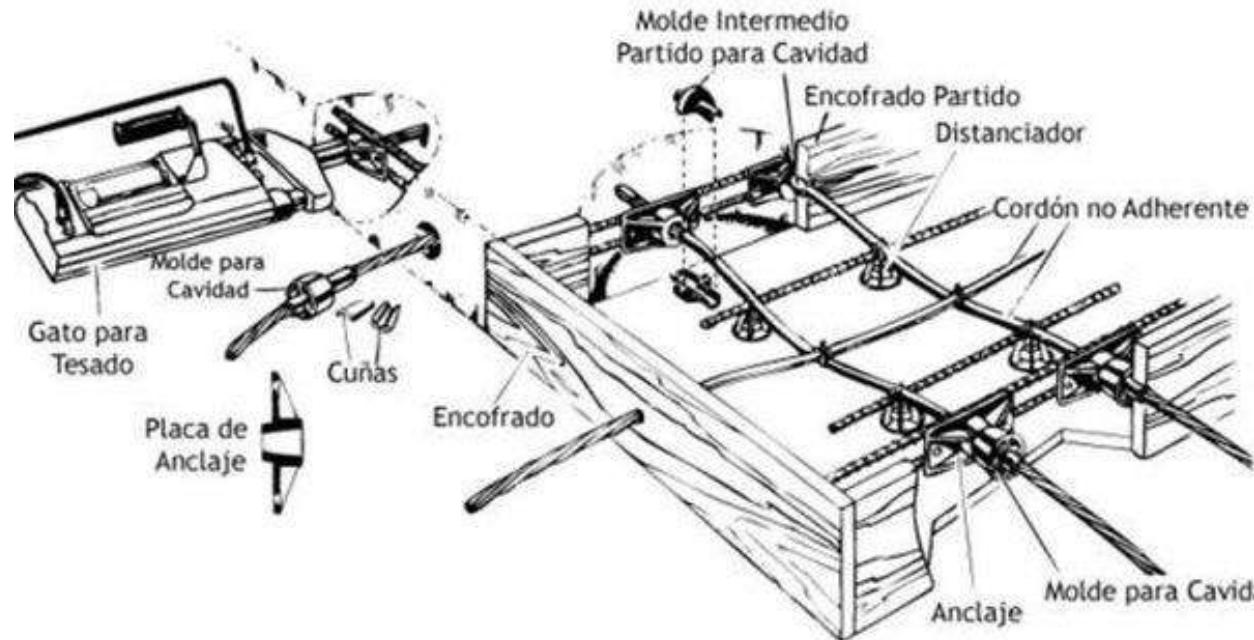
Bomba



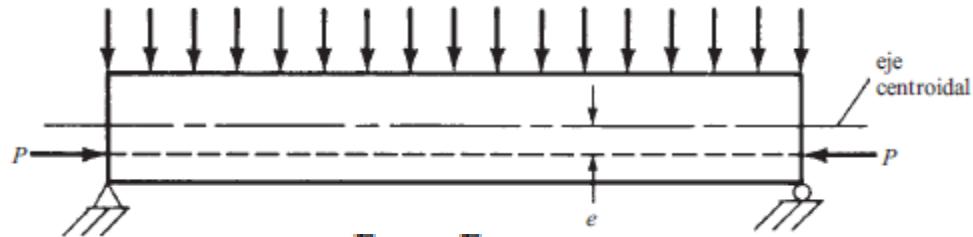
Gato Multitorón



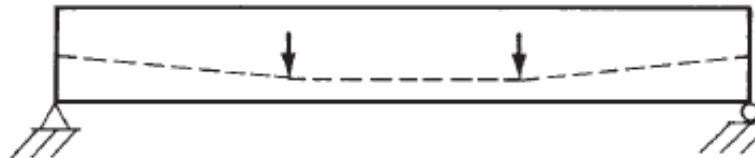
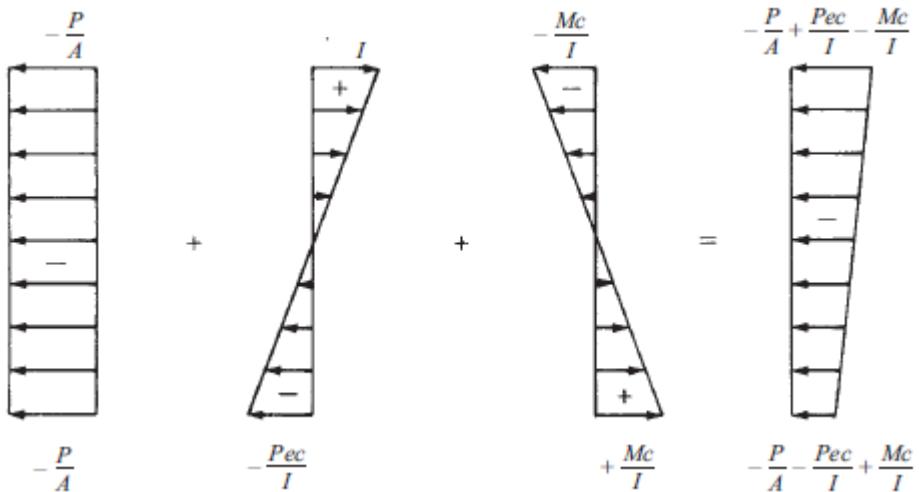
Bosquejo Anclaje de Cable



Fórmula Básica de Esfuerzo



$$f = -\frac{P}{A} \pm \frac{Pec}{I}$$



- Se reducen los momentos negativos en los extremos
- Se reducen los esfuerzos a tensión

Miembros presforzados con adherencia o sin adherencia

Clasificación Tipo U $f_t \leq 7.5\sqrt{f'_c}$ (no están agrietados)

Clasificación Tipo T $f_t > 12\sqrt{f'_c}$ (están agrietados)

Clasificación Tipo C $f_t > 7.5\sqrt{f'_c} \leq 12\sqrt{f'_c}$.

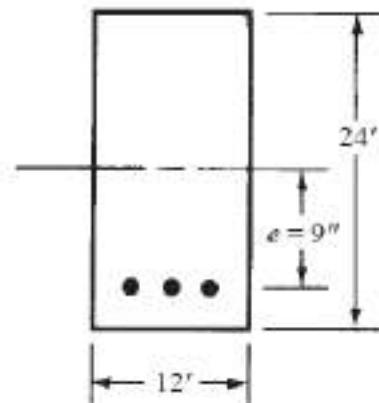
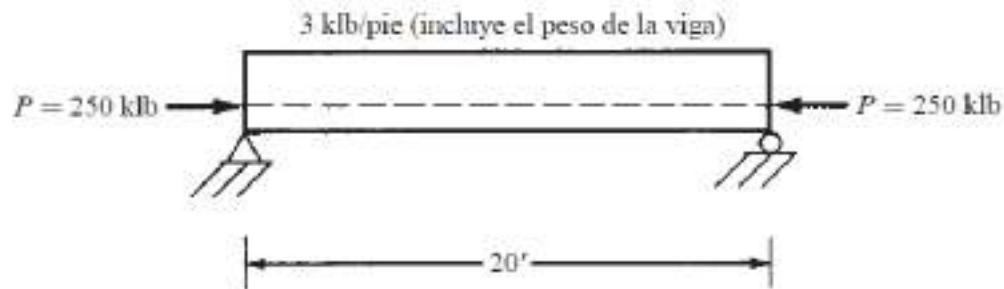
(transición entre agrietados y no agrietados)

La sección 18.3.4 del ACI establece que para los miembros de clase U y T los esfuerzos de flexión pueden calcularse usando las propiedades de la sección sin agrietar. Sin embargo, para las secciones de clase C, es necesario usar las propiedades de la sección agrietada.

Para losas presforzadas en dos direcciones U con $f_t \leq 6\sqrt{f'_c}$.

EJEMPLO 19.1

Calcular los esfuerzos en las fibras superiores e inferiores en el centro del claro y en los extremos de la viga mostrada en la figura 19.6.



Esfuerzos en el centro del claro de la viga

$$f_{\text{sup.}} = -\frac{P}{A} + \frac{Pec}{I} - \frac{Mc}{I} = -\frac{250}{288} + \frac{(250)(9)(12)}{13\,824} - \frac{(12)(150)(12)}{13\,824}$$
$$= -0.868 + 1.953 - 1.562 = -0.477 \text{ klb/plg}^2$$
$$f_{\text{inf.}} = -\frac{P}{A} - \frac{Pec}{I} + \frac{Mc}{I} = -0.868 - 1.953 + 1.562 = -1.259 \text{ klb/plg}^2$$

Esfuerzos en los extremos de la viga

$$f_{\text{sup.}} = -\frac{P}{A} + \frac{Pec}{I} = -0.868 + 1.953 = +1.085 \text{ klb/plg}^2$$
$$f_{\text{inf.}} = -\frac{P}{A} - \frac{Pec}{I} = -0.868 - 1.953 = -2.821 \text{ klb/plg}^2$$

SOLUCIÓN

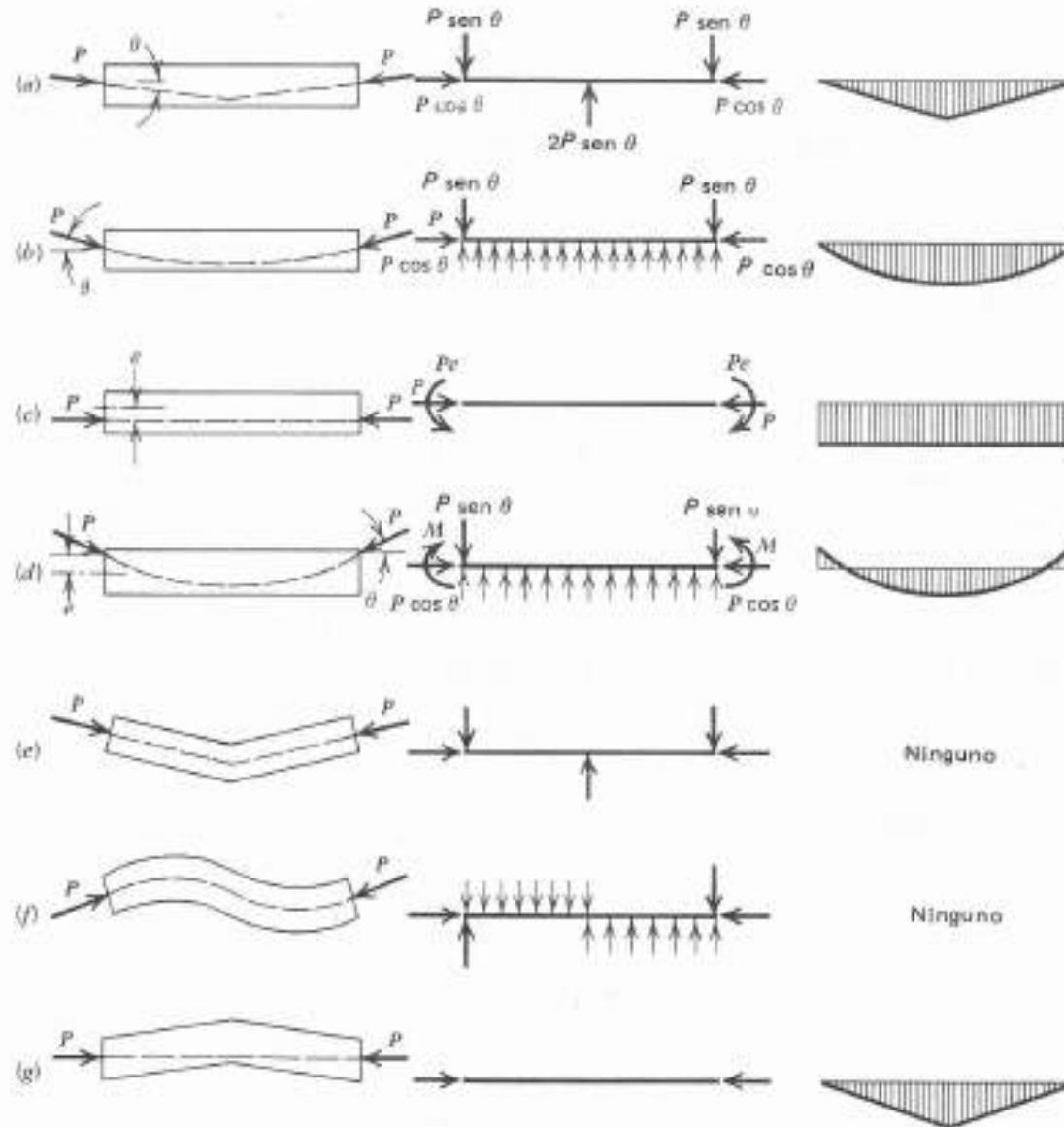
Propiedades de la sección

$$I = \left(\frac{1}{12}\right)(12)(24)^3 = 13\,824 \text{ plg}^4$$

$$A = (12)(24) = 288 \text{ plg}^2$$

$$M = \frac{(3)(20)^2}{8} = 150 \text{ pie-klb}$$

Cargas Equivalentes

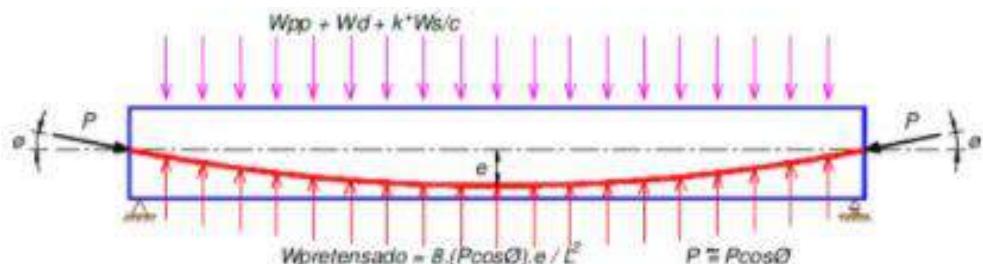


Análisis Elástico a Flexión

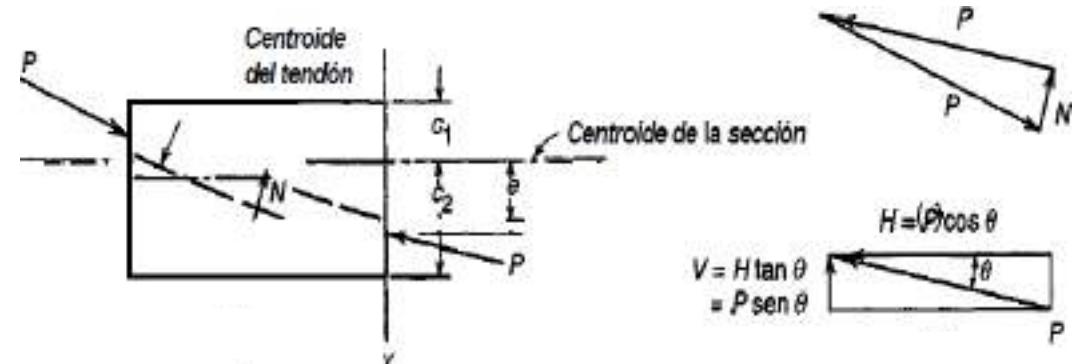
Cálculo de Esfuerzos

✓ Para el dimensionamiento de secciones de concreto reforzado, los esfuerzos reales ante cargas de servicio en el concreto y el acero deben estar dentro de los límites permitidos por el código ACI.

✓ Las fuerzas de presfuerzos conforman un sistema de fuerzas externas que actúan sobre un elemento de concreto y debe estar en equilibrio bajo la acción de dichas fuerzas.



✓ Haciendo un diagrama de cuerpo libre en x-x tenemos:



La carga de presfuerzo se descompone en fuerzas horizontales y verticales, como el ángulo de aplicación es pequeño se asume que la carga de aplicación es $P=H$

Presfuerzo Inicial y Presfuerzo Efectivo

- ✓ La magnitud de la fuerza de presfuerzo no es constante. Inicialmente la fuerza de presfuerzo P_j se reduce a P_i (fuerzas de presfuerzo inicial) debido a :
 - Acortamiento elástico en la transferencia
 - Deslizamiento del tendón
 - Pérdida de fricción entre concreto y tendones



✓ Esta fuerza P_i pasa por otra reducción hasta quedar el esfuerzo en P_e (presfuerzo efectivo) debido a las pérdidas a causa del tiempo, flujo plástico del concreto y retracción de fraguado.

✓ Para los cálculos de esfuerzos tomaremos estos dos esfuerzos P_i y P_e

✓ Para el análisis de esfuerzos se calcularán los esfuerzos en la fibra superior f_1 y fibra inferior f_2 para 4 condiciones de carga.

Etapas de carga en el presfuerzo

- ✓ **Primera condición de carga**, representan la condición de carga justamente en la aplicación de la carga de transferencia **Pi** en la zona de anclaje. La primera parte de la ecuación indica esfuerzo de compresión y la segunda el esfuerzo de flexión debido a la tensión del cable. El signo negativo es para la compresión y el doble signo en la segunda parte de la ecuación significa que la sección de la viga tiende a levantarse al aplicarse la tensión. Ac es la sección transversal del concreto, Ic es el momento de inercia, e es la excentricidad del cable (distancia del eje neutro a la sección más alejada del cable en la parte inferior), c1 y c2 son las distancias del eje neutro a la parte superior e inferior respectivamente, r es el radio de giro

$$f_1 = -\frac{P_i}{A_c} + \frac{P_i ec_1}{I_c} = -\frac{P_i}{A_c} \left(1 - \frac{ec_1}{r^2} \right)$$

$$f_2 = -\frac{P_i}{A_c} - \frac{P_i ec_2}{I_c} = -\frac{P_i}{A_c} \left(1 + \frac{ec_2}{r^2} \right)$$

- ✓ **Segunda condición de carga** representa el caso anterior más el efecto del esfuerzo debido al peso propio de la sección. Mo es momento debido al peso propio de la sección. Observe que esta ecuación en el esfuerzo debido al peso propio la sección tiende a comprimirse en la parte superior y estirarse en la parte inferior.

$$f_1 = -\frac{P_i}{A_c} \left(1 - \frac{ec_1}{r^2} \right) - \frac{M_o c_1}{I_c}$$

$$f_2 = -\frac{P_i}{A_c} \left(1 + \frac{ec_2}{r^2} \right) + \frac{M_o c_2}{I_c}$$

- ✓ **Tercera condición de carga**, la ecuación anterior es similar solo que ahora la carga de presfuerzo se toma en cuenta las pérdidas a lo largo del tiempo, por lo tanto se usará **Pe** al inicio de la ecuación.

$$f_1 = -\frac{P_e}{A_c} \left(1 - \frac{ec_1}{r^2} \right) - \frac{M_o c_1}{I_c}$$

$$f_2 = -\frac{P_e}{A_c} \left(1 + \frac{ec_2}{r^2} \right) + \frac{M_o c_2}{I_c}$$

- ✓ **Cuarta condición de carga**, se toma en cuenta la esfuerzo debido a la tensión Pe más el esfuerzo debido a todas las cargas de servicios aplicadas (cargas viva +muerta +peso propio) sin factorar,

$$f_1 = -\frac{P_e}{A_c} \left(1 - \frac{ec_1}{r^2} \right) - \frac{(M_o + M_d + M_l)c_1}{I_c}$$

$$f_2 = -\frac{P_e}{A_c} \left(1 + \frac{ec_2}{r^2} \right) + \frac{(M_o + M_d + M_l)c_2}{I_c}$$

Verificación de Esfuerzos con Código ACI

- ✓ Estas condiciones se cumplen tienen que verificarse con los límites del código ACI y sus valores tienen que ser menores que estos límites, suficiente para verificar las condiciones de carga 2 y 4, con los límites al momento de la transferencia y al momento de aplicación de todas las cargas.
 - ✓ Al momento de la transferencia la resistencia del concreto a tomar es $f'ci$ que es la resistencia necesaria para hacer el tensado. Generalmente alrededor de 70% a 80% de su resistencia de diseño y en la aplicación de las cargas se usará $f'c$ que es la resistencia de diseño (a los 28 días).

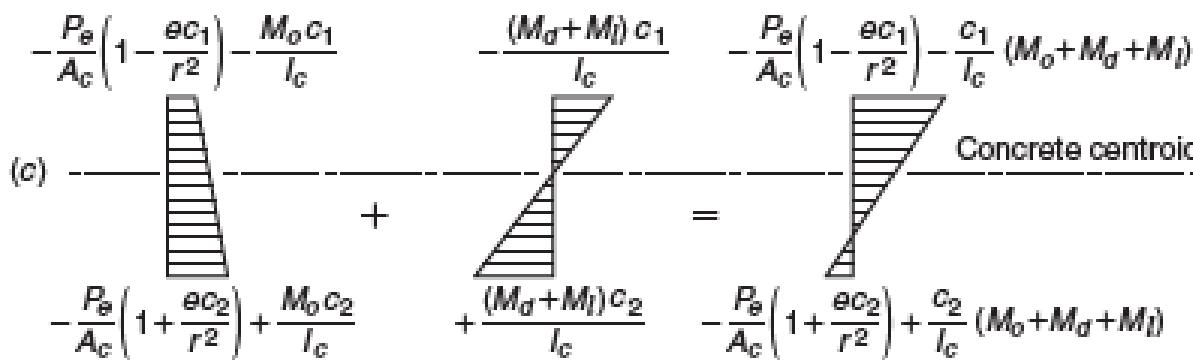
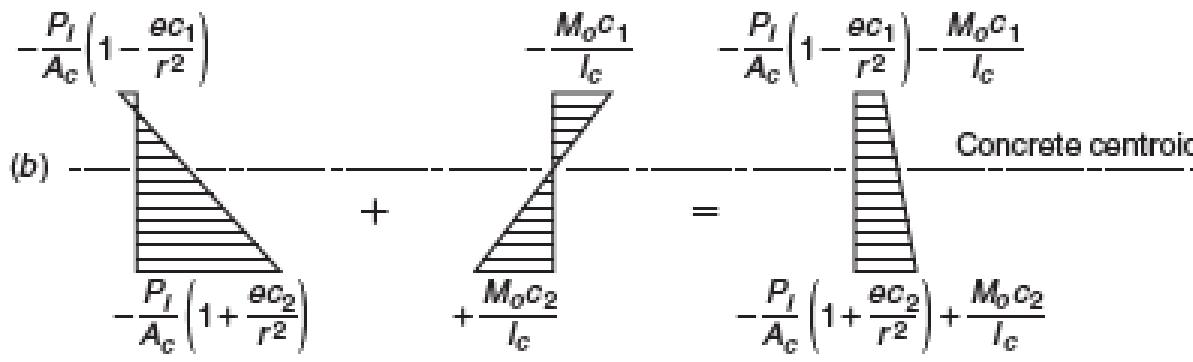
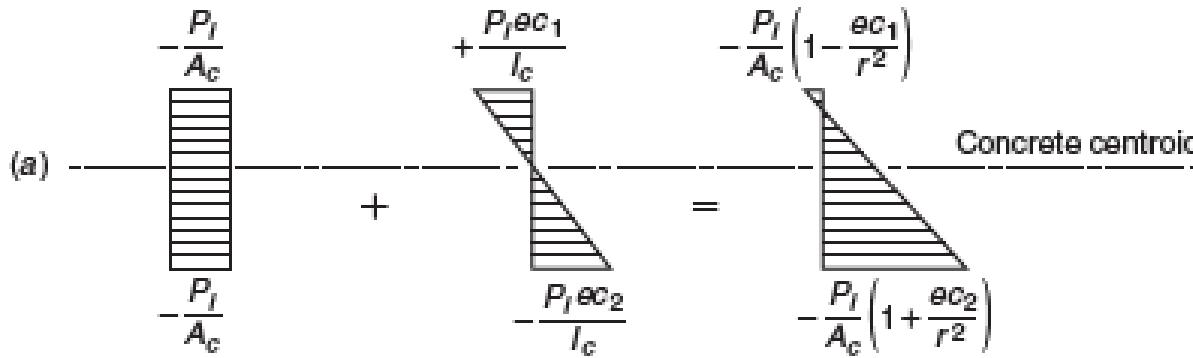
✓ Límites de esfuerzos

Tensión en la transferencia $fti = 3\sqrt{f'ci}$

Compresión en la transferencia $fci = 0.6f'ci$

Tensión en cargas de servicio $fts = 6\sqrt{f'c}$

Compresión en cargas de servicio $fcs = 0.45 f'c$



Distribución Gráfica de los Esfuerzos del Concreto

- a) efecto del presfuerzo
- b) efecto del presfuerzo +peso de viga
- c) efecto de presfuerzo más carga de servicio.

Ejemplo 19.1. Viga I pretensada con excentricidad constante. La viga I simétrica y simplemente apoyada que aparece en sección transversal en la figura 19.12a, se utilizará sobre una luz sencilla de 40

Momento de inercia:

$$I_c = 12,000 \text{ pulg}^4$$

Área de concreto:

$$A_c = 176 \text{ pulg}^2$$

Radio de giro:

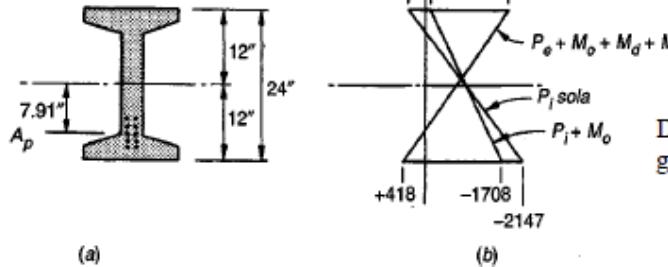
$$r^2 = 68.2 \text{ pulg}^2$$

Módulo elástico de la sección:

$$S = 1000 \text{ pulg}^3$$

Peso propio:

$$w_o = 0.183 \text{ klb/pie}$$



y debe soportar una carga muerta superpuesta más una viva (considerada como "sostenida", no de corto plazo) de 0.750 klb/pie además de su peso propio. La viga se pretensionará con múltiples torones de siete hilos, con centroide a una excentricidad constante de 7.91 pulg. La fuerza de preesfuerzo P_i inmediatamente después de la transferencia será de 158 klb; después de las pérdidas dependientes del tiempo, la fuerza se reducirá a $P_e = 134$ klb. La resistencia de diseño del concreto es $f'_c = 5000 \text{ lb/pulg}^2$ y en el momento de la aplicación de la fuerza de preesfuerzo será de $f'_{ci} = 3750 \text{ lb/pulg}^2$. Calcule los esfuerzos por flexión en el concreto en la sección en el centro de la luz de la viga en el momento de la transferencia y después de que ocurren todas las pérdidas con la totalidad de la carga de servicio aplicada. Compare los resultados con los esfuerzos admisibles del Código ACI.

Solución. Los esfuerzos en el concreto causados por la fuerza inicial de preesfuerzo de 158 klb pueden encontrarse mediante las ecuaciones (19.1a) y (19.1b):

1 Etapa de carga

$$f_1 = -\frac{158,000}{176} \left(1 - \frac{7.91 \times 12}{68.2}\right) = +352 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -\frac{158,000}{176} \left(1 + \frac{7.91 \times 12}{68.2}\right) = -2147 \text{ lb/pulg}^2$$

y esfuerzos correspondientes de $36,600/1000 = 439 \text{ lb/pulg}^2$, de manera que los esfuerzos netos en la parte superior y en la inferior de la sección de concreto ocasionados por el preesfuerzo inicial y el peso propio, a partir de las ecuaciones (19.2a) y (19.2b), son

$$f_1 = +352 - 439 = -87 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -2147 + 439 = -1708 \text{ lb/pulg}^2$$

2 Etapa de carga

Después de las pérdidas, la fuerza de preesfuerzo se reduce a 134 klb y los esfuerzos en el concreto generados por esta fuerza más el peso propio son

$$f_1 = +352 \times \frac{134}{158} - 439 = 140 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -2147 \times \frac{134}{158} + 439 = -1382 \text{ lb/pulg}^2$$

3 Etapa de carga

La carga superpuesta de 0.750 klb/pie produce un momento en el centro de la luz de $M_d + M_f = 0.750 \times 40^2/8 = 150 \text{ klb-pie}$ y los esfuerzos correspondientes de $150,000 \times 12/1000 = 1800 \text{ lb/pulg}^2$ de compresión y de tensión en las partes superior e inferior de la viga, respectivamente. Así, los esfuerzos para cargas de servicio en las caras superior e inferior son

$$f_1 = -140 - 1800 = -1940 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -1382 + 1800 = +418 \text{ lb/pulg}^2$$

4 Etapa de carga

Los esfuerzos en el concreto en el centro de la luz se ilustran en la figura 19.12b. Según el Código ACI (ver la tabla 19.2), los esfuerzos permitidos en el concreto son:

Tensión en la transferencia: $f_{ti} = 3\sqrt{3750} = +184 \text{ lb/pulg}^2$

Compresión en la transferencia: $f_{ci} = 0.60 \times 3750 = -2250 \text{ lb/pulg}^2$

Tensión bajo las cargas de servicio: $f_{ts} = 6\sqrt{5000} = +424 \text{ lb/pulg}^2$

Compresión bajo las cargas de servicio: $f_{cs} = 0.45 \times 5000 = -2250 \text{ lb/pulg}^2$

Límites del Código ACI

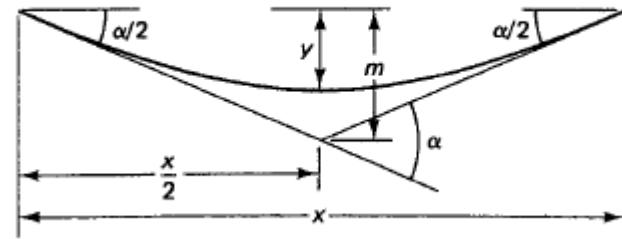
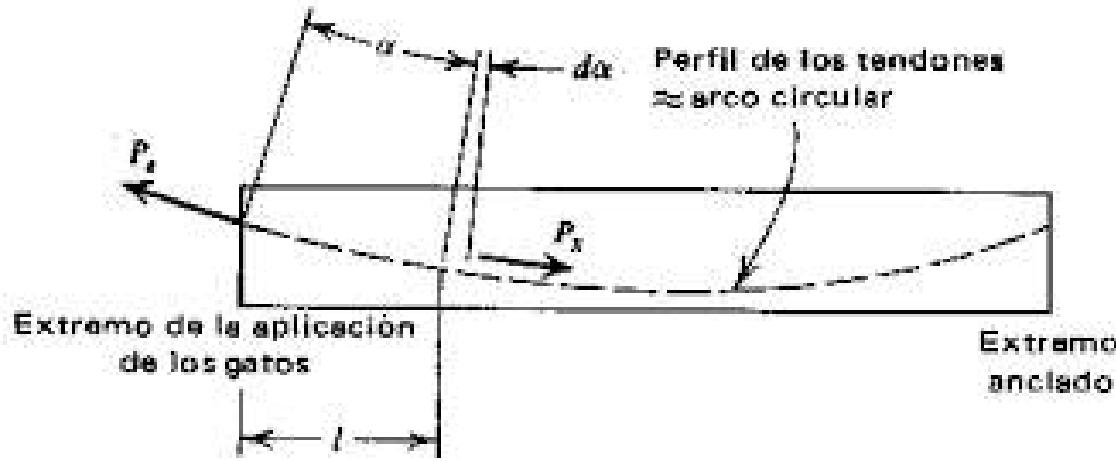
El peso propio de la viga produce la superposición inmediata de un momento igual a

$$M_c = 0.183 \times \frac{40^2}{8} = 36.6 \text{ klb-pie}$$

Esfuerzos Admisibles en el Concreto sometido a Flexión

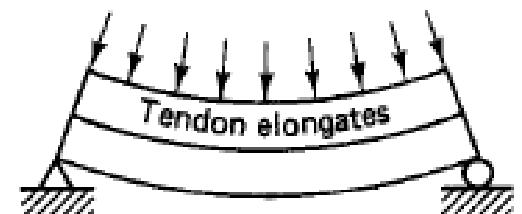
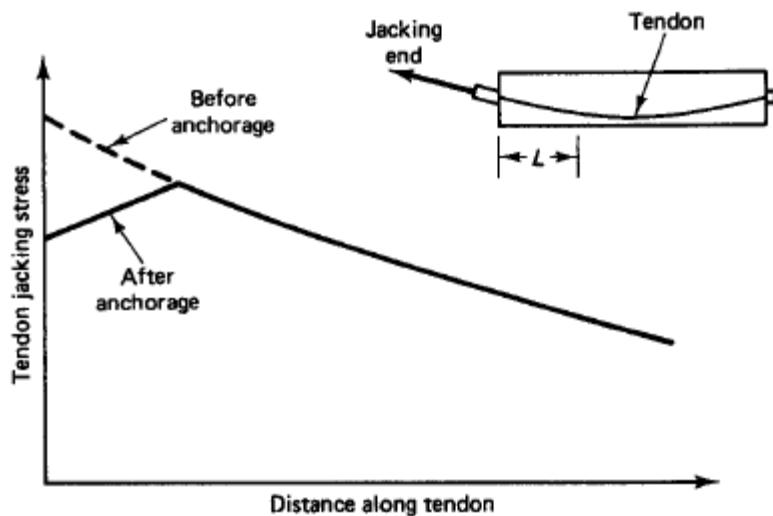
-
1. Los esfuerzos en el concreto inmediatamente después de la transferencia del preesfuerzo, antes de las pérdidas de preesfuerzo dependientes del tiempo, no deben exceder lo siguiente:
 - (a) Esfuerzo en la fibra extrema a compresión $0.60 f'_{ci}$
 - (b) Esfuerzo en la fibra extrema a tensión, excepto por lo permitido en (c) $3\sqrt{f'_{ci}}$
 - (c) Esfuerzo en la fibra extrema a tensión en los extremos de elementos simplemente apoyados $6\sqrt{f'_{ci}}$

Cuando los esfuerzos de tensión calculados excedan estos valores, debe proporcionarse refuerzo auxiliar adherido (no preeforzado o preeforzado) en la zona de tensión, para resistir la fuerza total de tensión en el concreto calculada con el supuesto de una sección no fisurada.
 2. Los esfuerzos en el concreto para las cargas de servicio, después de tener en cuenta todas las pérdidas de preesfuerzo, no deben exceder lo siguiente:
 - (a) Esfuerzo en la fibra extrema a compresión debido a preesfuerzo más cargas sostenidas $0.45 f'_c$
 - (b) Esfuerzo en la fibra extrema a compresión debido a preesfuerzos más la carga total $0.60 f'_c$
 - (c) Esfuerzo en la fibra extrema a tensión en la zona de tensión precomprimida $6\sqrt{f'_c}$
 - (d) Esfuerzo en la fibra extrema a tensión en la zona de tensión precomprimida de los elementos, excepto para los sistemas de losa en dos direcciones, en los cuales el análisis basado en las secciones fisuradas transformadas y en las relaciones bilineales momento-deflexión demuestren que las deflexiones instantáneas y a largo plazo cumplen con las restricciones establecidas en otras secciones del Código ACI $12\sqrt{f'_c}$
 3. Los esfuerzos admisibles en el concreto, determinados anteriormente, pueden excederse si se demuestra mediante ensayo o análisis que el comportamiento no se verá afectado
-



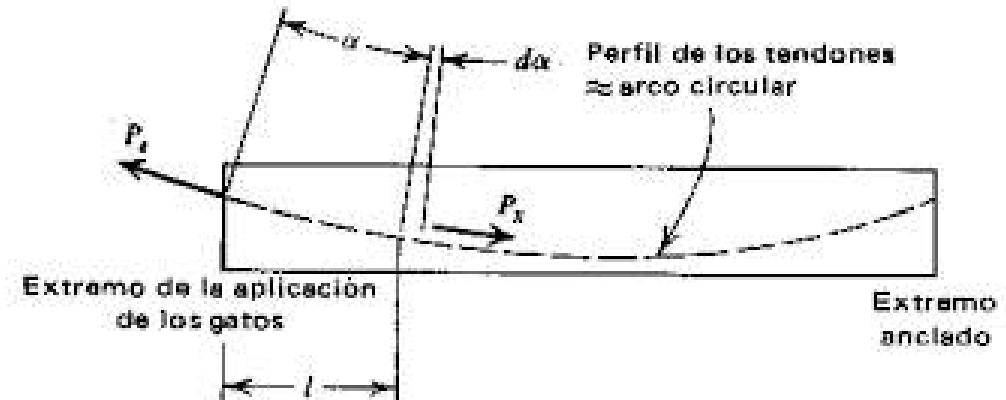
$$\Delta f_{pT} = \Delta f_{pA} + \Delta f_{pF} + \Delta f_{pES} + \Delta f_{pR} + \Delta f_{pCR} + \Delta f_{pSH}$$

Pérdidas Parciales en el Presfuerzo



Pérdidas en el Presfuerzo

El esfuerzo en los tendones producido por la fuerza de **presfuerzo**, en los elementos de concreto presforzado decrece con el tiempo; primero rápidamente y luego más lentamente. La reducción del esfuerzo durante la vida útil del miembro se conoce como **Pérdidas de Presfuerzo**.



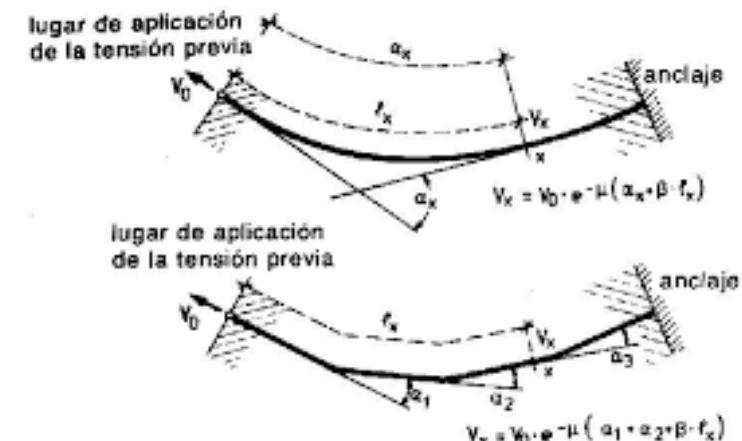
Tipos de Pérdidas

Pérdidas Elásticas inmediatas: Ocurren durante el proceso de construcción

- Acortamiento elástico del concreto
- Pérdidas en el anclaje
- Pérdidas por fricción

Pérdidas dependientes del Tiempo

- Flujo plástico
- Encogimiento
- Relajamiento del acero
- Efectos de temperatura



Definiciones Básicas

P_j =fuerza pretensora téorica antes de la transferencia (pérdida = 0)

P_i =fuerza pretensora inicial de transferencia (después de pérdidas instantáneas)

P_e = Fuerza pretensora efectiva (después de ocurridas todas las pérdidas)

$$P_e = RP_i$$

R=relación de efectividad

Para los miembros pretensados, P_j nunca actúa en el concreto, sino únicamente en los anclajes permanentes de la carña del colado. La tensión se reduce a lo largo de la longitud del cable por la fricción que ocurre en los puntos de cambio de dirección del cable y en las cimbras extremas de la viga. Adicionalmente, la fuerza en el acero se reduce, inmediatamente después de la transferencia, por el acortamiento elástico del concreto.

Para miembros postensados, la fuerza del gato se aplica realmente en el concreto durante el tensado, pero sólo existe con su valor total en el extremo del miembro donde se realiza el tensado. En algún otro lugar disminuye debido a las pérdidas por fricción. Inmediatamente después de la transferencia, la fuerza postensora se reduce por el deslizamiento del anclaje. El acortamiento elástico acarrea pérdidas adicionales.

Métodos de Estimación de Pérdidas

A) METODOS DE ESTIMACIÓN GLOBAL:

Se aplica en caso de no tener información para evaluar las pérdidas de presfuerzo. En elementos pretensados se pueden suponer que la suma de las pérdidas varían entre 20 y 25 % de la fuerza aplicada por el gato.

En postensados la suma de pérdidas, incluyendo las de fricción se puede suponer de un 25 a un 30 % de la fuerza aplicada por el gato.

B) ESTIMACIÓN INDIVIDUAL:

Se suma la contribución de cada una de ellas para obtener la perdida total.

C) ESTIMACIÓN POR EL MÉTODO DE INTERVALOS

Se efectúan estableciendo como mínimo cuatro intervalos de tiempo, que toman en cuenta la edad del concreto en la cual ocurre la perdida.

4. CRITERIOS PARA SELECCIONAR EL METODO DE EVALUACION DE PERDIDAS

PRETENSADO		POSTENSADO	
Estimación Preliminar A	Estimación Definitiva B	Estimación Preliminar A	Estimación Definitiva C

Tabla 6.1 Pérdidas Totales Por la AASHTO (Ref. 6.6)

Tipo del Acero De Presfuerzo	Pérdida Total	
	$f'_c = 4,000 \text{ Lb/pulg}^2$ (27.58 N/mm ²)	$f'_c = 5,000 \text{ Lb/pulg}^2$ (34.47 N/mm ²)
Pretensado		45,000 Lb/pulg ² (310.26 N/mm ²)
Cable Trenzado		
Postensado ^a	32,000 Lb/pulg. ² (220.63 N/mm ²)	33,000 Lb/pulg. ² (227.53 N/mm ²)
Alambre o Cable		
Varillas	22,000 Lb/pulg. ² (151.68 N/mm ²)	23,000 Lb/pulg. ² (158.58 N/mm ²)

^a No se incluyen las pérdidas por fricción. Las pérdidas por fricción deben de calcularse de acuerdo con el artículo 6.5.

Estimación de Pérdidas por Separado

Table 3.3 Types of Prestress Loss

Type of prestress loss	Stage of occurrence		Tendon stress loss	
	Pretensioned members	Post-tensioned members	During time interval (t_p, t_j)	Total or during life
Elastic shortening of concrete (ES)	At transfer	At sequential jacking	...	Δf_{pES}
Relaxation of tendons (R)	Before and after transfer	After transfer	$\Delta f_{pR}(t_i, t_j)$	Δf_{pR}
Creep of concrete (CR)	After transfer	After transfer	$\Delta f_{pC}(t_i, t_j)$	Δf_{pCR}
Shrinkage of concrete (SH)	After transfer	After transfer	$\Delta f_{pS}(t_i, t_j)$	Δf_{pSH}
Friction (F)	...	At jacking	...	Δf_{pF}
Anchorage seating loss (A)	...	At transfer	...	Δf_{pA}
Total	Life	Life	$\Delta f_{pT}(t_p, t_j)$	Δf_{pT}

where $\Delta f_{pR} = \Delta f_{pR}(t_0, t_{tr}) + \Delta f_{pR}(t_{tr}, t_s)$

t_0 = time at jacking

t_{tr} = time at transfer

t_s = time at stabilized loss

Miembros Pretensados

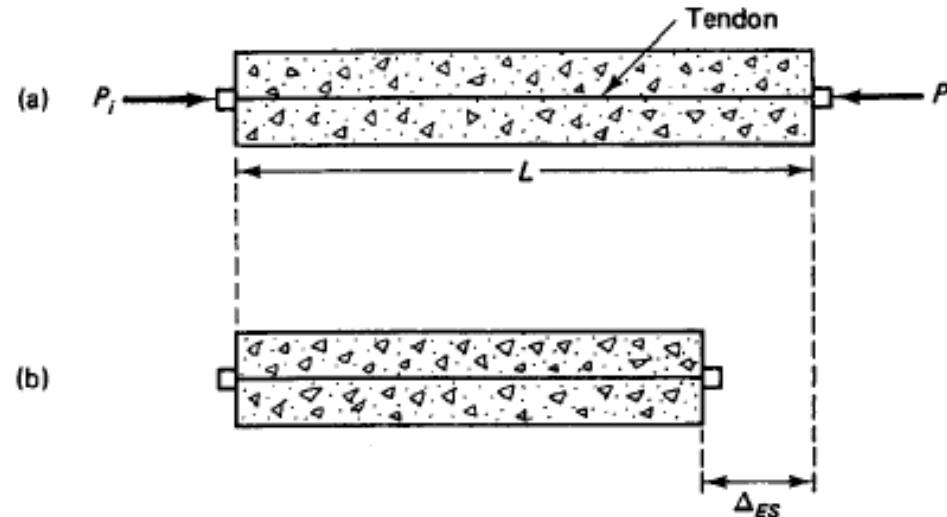
$$\Delta f_{pT} = \Delta f_{pES} + \Delta f_{pR} + \Delta f_{pCR} + \Delta f_{pSH}$$

Miembros Postensados

$$\Delta f_{pT} = \Delta f_{pA} + \Delta f_{pF} + \Delta f_{pES} + \Delta f_{pR} + \Delta f_{pCR} + \Delta f_{pSH}$$

Pérdidas por Acortamiento Elástico del Concreto (ES)

Miembros Pretensados



Miembros Postensados

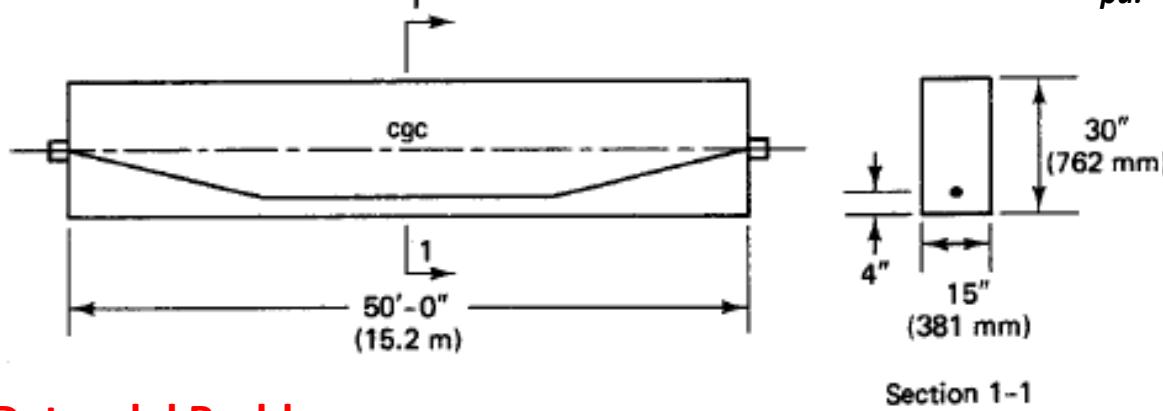
$$\Delta f_{pES} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\Delta f_{pES})_j$$

$$\epsilon_{ES} = \frac{f_c}{E_c} = \frac{P_i}{A_c E_c} \quad \Delta f_{pES} = E_s \epsilon_{ES} = \frac{E_s P_i}{A_c E_c} = \frac{n P_i}{A_c} = n f_{cs}$$

$$f_{cr} = -\frac{P_i}{A_c} \left(1 + \frac{e^2}{r^2} \right) + \frac{M_D e}{I_c}$$

Ejemplo 1

Para la viga pretensada de 50 pies mostrada, determine el esfuerzo a la mitad de la luz y la perdida por acortamiento elástico suponiendo que al momento de la transferencia el esfuerzo aplicado al tendón es 75% de f_{pu} .



Datos del Problema

$$f'_c = 6,000 \text{ psi (41.4 MPa)}$$

$$A_{ps} = 10 \times 0.153 = 1.53 \text{ in.}^2$$

$$\Delta f_{pES} = n f_{cs} = 7.06 \times 1,226.4 = 8,659.2 \text{ psi (59.7 MPa)}$$

$$f_{pu} = 270,000 \text{ psi (1,862 MPa)}$$

$$e_c = \frac{30}{2} - 4 = 11 \text{ in.}$$

$$f'_{ci} = 4,500 \text{ psi (31 MPa)}$$

$$A_{ps} = 10 - \frac{1}{2} \text{-in dia. seven-wire-strand tendon} \\ = 10 \times 0.153 = 1.53 \text{ in.}^2$$

$$E_{ps} = 27 \times 10^6 \text{ psi (1,862 MPa)}$$

$$P_i = 0.75 f_{pu} A_{ps} = 0.75 \times 270,000 \times 1.53 = 309,825 \text{ lb}$$

$$M_D = \frac{wl^2}{8} = \frac{15 \times 30}{144} \times 150 \frac{(50)^2}{8} \times 12 = 1,757,813 \text{ in.-lb}$$

Solución

$$A_c = 15 \times 30 = 450 \text{ in.}^2$$

$$I_c = \frac{15(30)^3}{12} = 33,750 \text{ in.}^4$$

$$r^2 = \frac{I_c}{A_c} = 75 \text{ in.}^2$$

$$f_{cs} = -\frac{P_i}{A_c} \left(1 + \frac{e^2}{r^2} \right) + \frac{M_D e}{I_c} \\ = -\frac{309,825}{450} \left(1 + \frac{11^2}{75} \right) + \frac{1,757,813 \times 11}{33,750} \\ = -1,799.3 + 572.9 = -1,226.4 \text{ psi (8.50 MPa)}$$

$$\text{Initial } E_{ci} = 57,000 \sqrt{f'_{ci}} = 57,000 \sqrt{4,500} = 3.824 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\text{Initial modular ratio } n = \frac{E_s}{E_{ci}} = \frac{27 \times 10^6}{3.824 \times 10^6} = 7.06$$

$$28 \text{ days' strength } E_c = 57,000 \sqrt{6,000} = 4.415 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$28 \text{ days' modular ratio } n = \frac{27 \times 10^6}{4.415 \times 10^6} = 6.12$$

Ejemplo 2

Si la viga del problema anterior es postensada, determine la Pérdida por acortamiento elástico si:

- a) Se tensan dos cables a la vez
- b) Un cable a la vez
- c) Los 10 cables simultáneamente

$$\Delta f_{pES} = \frac{4/4 + 3/4 + 2/4 + 1/4}{5} (8,659.2)$$

a)

$$= \frac{10}{20} \times (8,659.2) = 4,330 \text{ psi (29.9 MPa)}$$

c) $\Delta f_{pES} = 0$

b) $\Delta f_{pES} = \frac{9/9 + 8/9 + \dots + 1/9}{10} (8,659.2)$

$$= \frac{45}{90} \times (8,659.2) = 4,330 \text{ psi (29.9 MPa)}$$

Pérdidas por Relajamiento del Esfuerzo del Acero(R)

Límites de esfuerzo a tensión

- a) *Fuerza de colocación del cable* $f_{pj} = 0.94 f_{py}$ pero no mayor que el menor valor entre $0.80 f_{pu}$ y el establecido en la norma técnica del tendón
- b) *Inmediatamente después de la transferencia* $f_{pi} = 0.82 f_{py}$
- c) *En tendones postensados, después de la transferencia* $0.70 f_{pu}$

Valores de f_{py}

Prestressing bars: $f_{py} = 0.80 f_{pu}$

Stress-relieved tendons: $f_{py} = 0.85 f_{pu}$

Low-relaxation tendons: $f_{py} = 0.90 f_{pu}$

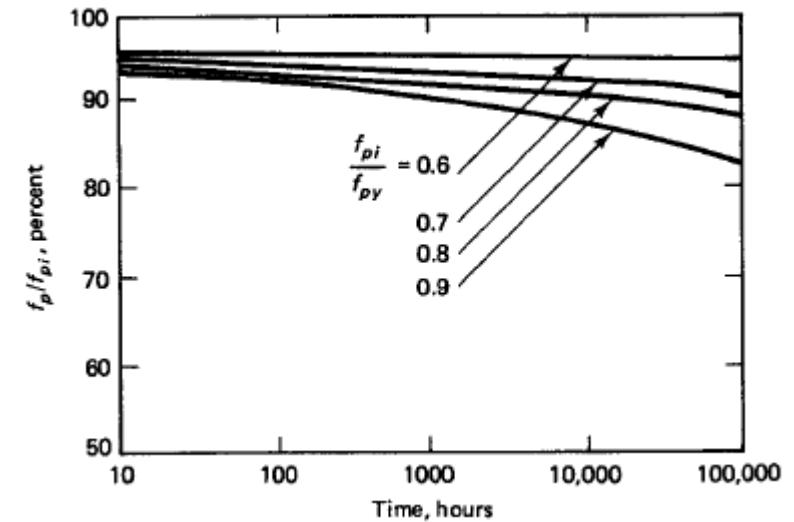
$$\frac{f_{pR}}{f_{pi}} = 1 - \left(\frac{\log t_2 - \log t_1}{10} \right) \left(\frac{f_{pi}}{f_{py}} - 0.55 \right)$$

$$\Delta f_{pR} = f'_{pi} \frac{\log t}{10} \left(\frac{f'_{pi}}{f_{py}} - 0.55 \right)$$

$$\Delta f_{pR} = f'_{pi} \left(\frac{\log t_2 - \log t_1}{10} \right) \left(\frac{f'_{pi}}{f_{py}} - 0.55 \right)$$

$$\Delta f_{pR} = \Delta f_{pR}(t_0, t_{tr}) + \Delta f_{pR}(t_{tr}, t_s)$$

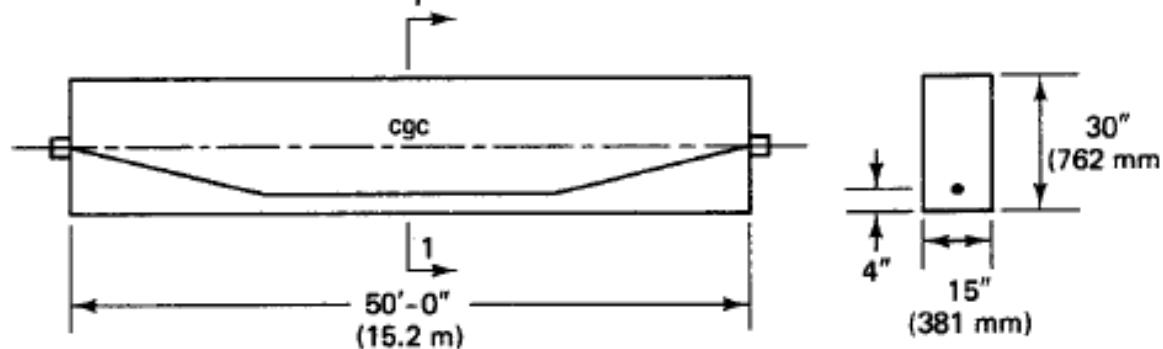
t_0 = time at jacking
 t_{tr} = time at transfer
 t_s = time at stabilized loss



$$f_{pi} = f_{pj} - \Delta f_{pR}(t_0, t_{tr}) - \Delta f_{pES}$$

Ejemplo 3

Encuentre la pérdida por relajación de esfuerzo a los 5 años, asumiendo la relajación al momento de la de flujo plástico y encogimiento a largo plazo tiene 20% del presfuerzo inicial., $f_{py} = 230000\text{psi}$



$$f'_{pi} = f_{pj} - \Delta f_{pR}(t_0, t_{ir}) \\ = 0.75 \times 270,000 = 202,500 \text{ psi (1,396 MPa)}$$

$$f'_{pi} = (1 - 0.20) \times 202,500 = 162,000 \text{ psi (1,170 MPa)}$$

$$5 \times 365 \times 24 \approx 44,000 \text{ hours}$$

$$\Delta f_{pR} = f'_{pi} \frac{\log t}{10} \left(\frac{f'_{pi}}{f_{py}} - 0.55 \right) \\ = 162,000 \frac{\log 44,000}{10} \left(\frac{162,000}{230,000} - 0.55 \right) \\ = 162,000 \times 0.4643 \times 0.1543 = 11,606 \text{ psi (80.0 MPa)}$$

Pérdidas por Flujo Plástico(CR)

Table 3.5 Values of K_{RE} and J

Type of tendon ^a	K_{RE}	J
270 Grade stress-relieved strand or wire	20,000	0.15
250 Grade stress-relieved strand or wire	18,500	0.14
240 or 235 Grade stress-relieved wire	17,600	0.13
270 Grade low-relaxation strand	5,000	0.040
250 Grade low-relaxation wire	4,630	0.037
240 or 235 Grade low-relaxation wire	4,400	0.035
145 or 160 Grade stress-relieved bar	6,000	0.05

^aIn accordance with ASTM A416-74, ASTM A421-76, or ASTM A722-75.

Source: Prestressed Concrete Institute.

where $K_{CR} = 2.0$ for pretensioned members
 $= 1.60$ for post-tensioned members (both for normal concrete)
 \bar{f}_{cs} = stress in concrete at level of steel cgs immediately after transfer
 \bar{f}_{csd} = stress in concrete at level of steel cgs due to all superimposed dead loads applied after prestressing is accomplished
 n = modular ratio

ϵ_{CR} = deformación a fluencia

ϵ_{CL} = deformación elástica

$$C_u = \frac{\epsilon_{CR}}{\epsilon_{EL}} \quad C_u = \text{coeficiente de fluencia}$$

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} C_u$$

C_t = coeficiente de fluencia en cualquier tiempo

$$\Delta f_{pCR} = C_t \frac{E_{ps}}{E_c} f_{cs}$$

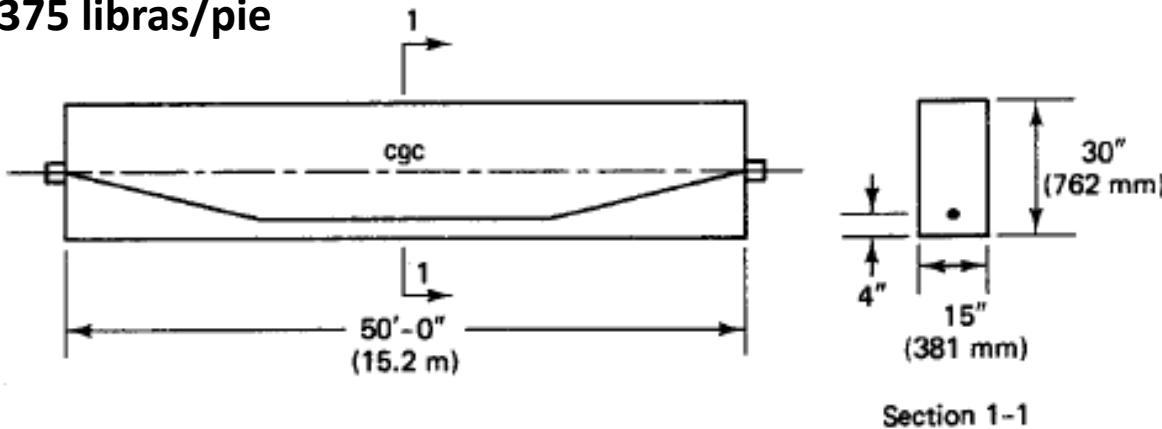
$$\Delta f_{pCR} = K_{CR} \frac{E_{ps}}{E_c} (\bar{f}_{cs} - \bar{f}_{csd})$$

f_{cs} = esfuerzo al nivel de centroide del tendón de presfuerzo

C_u estará en un rango entre 2 y 4 con un valor de diseño de 2.35

Ejemplo 4

Calcular la perdida debido a flujo plástico, dado una carga total sobreimpuesta , sin incluir el peso de la viga de 375 libras/pie



Solution: At full concrete strength,

$$E_c = 57,000 \sqrt{6,000} = 4.415 \times 10^6 \text{ psi} (30.4 \times 10^3 \text{ MPa})$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{27.0 \times 10^6}{4.415 \times 10^6} = 6.12$$

$$M_{SD} = \frac{375(50)^2}{8} \times 12 = 1,406,250 \text{ in.-lb} (158.9 \text{ kN-m})$$

Example 3.4

Compute the loss in prestress due to creep in Example 3.1 given that the total superimposed load, excluding the beam's own weight after transfer, is 375 plf (5.5 kN/m).

$$\bar{f}_{csd} = \frac{M_{SDE}}{I_c} = \frac{1,406,250 \times 11}{33,750} = 458.3 \text{ psi (3.2 MPa)}$$

Del ejemplo 1

$$\bar{f}_{cs} = 1,226.4 \text{ psi (8.5 MPa)}$$

Asumir $K_{CR}= 2.0$ para pretensado

$$\begin{aligned}\Delta f_{pCR} &= nK_{CR}(\bar{f}_{cs} - \bar{f}_{csd}) \\ &= 6.12 \times 2.0(1,226.4 - 458.3) \\ &= 9,401.5 \text{ psi (64.8 MPa)}\end{aligned}$$

Pérdidas por Encogimiento(CR)

$$\epsilon_{SH} = 780 \times 10^{-6} \gamma_{SH}$$

Valor promedio de deformación de encogimiento

$$(\epsilon_{SH})_u = 820 \times 10^{-6} \text{ in./in. (mm/mm)},$$

$$\Delta f_{pSH} = \epsilon_{SH} \times E_{ps}$$

Para miembros postensados

$$\Delta f_{pSH} = 8.2 \times 10^{-6} K_{SH} E_{ps} \left(1 - 0.06 \frac{V}{S} \right) (100 - RH)$$

Para miembros pretensados $K_{SH} = 1.0$

V/S = Volumen / Superficie

Table 3.6 Values of K_{SH} for Post-Tensioned Members

Time from end of moist curing to application of prestress, days	1	3	5	7	10	20	30	60
K_{sh}	0.92	0.85	0.80	0.77	0.73	0.64	0.58	0.45

Source: Prestressed Concrete Institute.

**Deformación unitaria después de 7 días
Curado por humedad**

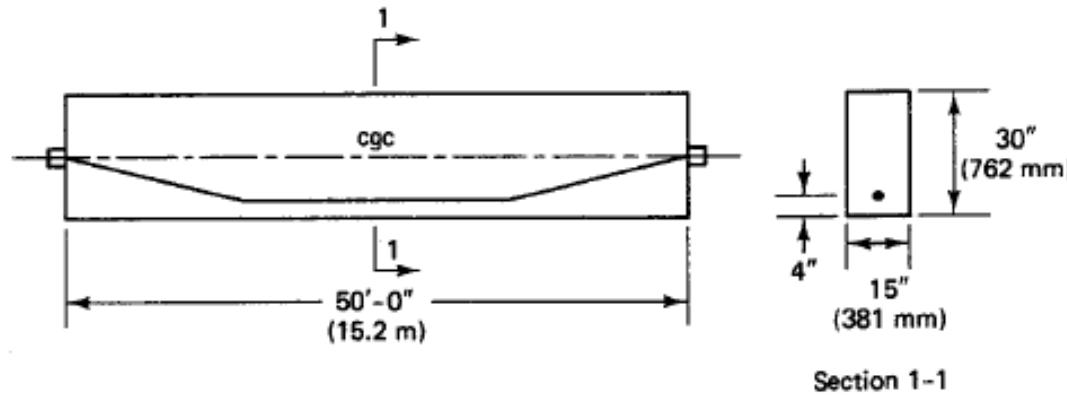
$$(\epsilon_{SH})_t = \frac{t}{35 + t} (\epsilon_{SH})_u$$

**Deformación unitaria después de 1 a 3 días
Curado a vapor**

$$(\epsilon_{SH})_t = \frac{t}{55 + t} (\epsilon_{SH})_u$$

Ejemplo 5

Calcule la pérdida por encogimiento de los ejemplo 1 y 2 a los 7 días de curado húmedo, para viga pretensada y postensada y el método dependiente del tiempo. Asumir que la humedad relativa es 70% y la relación volumen superficie es 2.0



Solution B Time-dependent method

From Equation 3.15a,

$$\epsilon_{SH,t} = \frac{t}{35 + t} \epsilon_{SH,u} = \frac{7}{35 + 7} \times 780 \times 10^{-6} = 130 \times 10^{-6} \text{ in/in}$$

$$\Delta f_{pSH} = \epsilon_{SH,t} E_s = 130 \times 10^{-6} \times 27 \times 10^6 = 3,510 \text{ psi (24.0 MPa)}$$

Solution A

K_{SH} method

(a) Pretensioned beam, $K_{SH} = 1.0$:

From Equation 3.14,

$$\begin{aligned}\Delta f_{pSH} &= 8.2 \times 10^{-6} \times 1.0 \times 27 \times 10^6 (1 - 0.06 \times 2.0)(100 - 70) \\ &= 5,845.0 \text{ psi (40.3 MPa)}\end{aligned}$$

(b) Post-tensioned beam, from Table 3.6, $K_{SH} = 0.77$:

$$\Delta f_{pSH} = 0.77 \times 5,845 = 4,500.7 \text{ psi (31.0 MPa)}$$

Pérdidas por Fricción(F)

Las pérdidas por fricción ocurren en el postensado debido al contacto entre los tendones y el concreto por medio de los ductos.

Efecto de Curvatura

En función del alineamiento del tendon

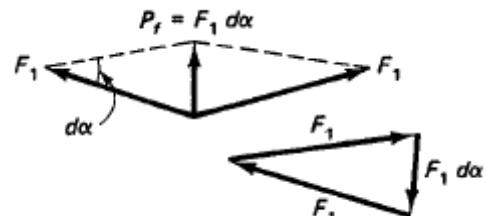
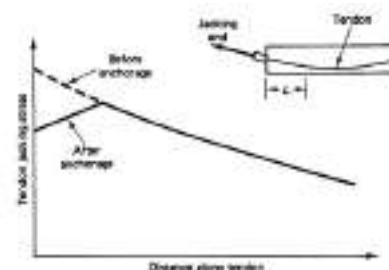
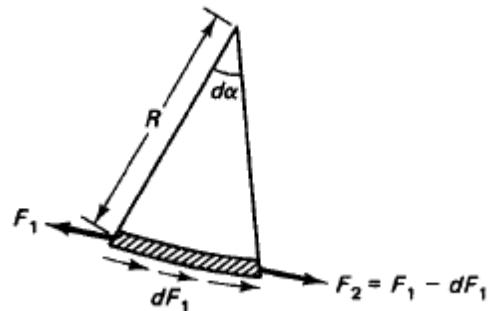
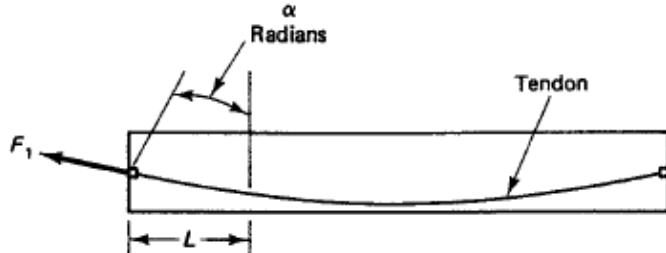
$$dF_1 = -\mu F_1 d\alpha$$

$$\frac{dF_1}{F_1} = -\mu d\alpha$$

$$\log_e F_1 = -\mu \alpha$$

$$\alpha = L/R$$

$$F_2 = F_1 e^{-\mu \alpha} = F_1 e^{-\mu(L/R)}$$



Efecto de Oscilación

Desviación local en el alineamiento

$$\log_e F_1 = -KL$$

$$F_2 = F_1 e^{-KL}$$

K= coeficiente de fricción
debido al oscilamiento

Tomando en cuenta los dos efectos

$$F_2 = F_1 e^{-\mu\alpha - KL}$$

$$\Delta f_{pF} = f_1 - f_2 = f_1(1 - e^{-\mu\alpha - KL})$$

$$\Delta f_{pF} = -f_1(\mu\alpha + KL)$$

Table 3.7 Wobble and Curvature Friction Coefficients

Type of tendon	Wobble coefficient, K per foot	Curvature coefficient, μ
Tendons in flexible metal sheathing		
Wire tendons	0.0010–0.0015	0.15–0.25
7-wire strand	0.0005–0.0020	0.15–0.25
High-strength bars	0.0001–0.0006	0.08–0.30
Tendons in rigid metal duct		
7-wire strand	0.0002	0.15–0.25
Mastic-coated tendons		
Wire tendons and 7-wire strand	0.0010–0.0020	0.05–0.15
Pregreased tendons		
Wire tendons and 7-wire strand	0.0003–0.0020	0.05–0.15

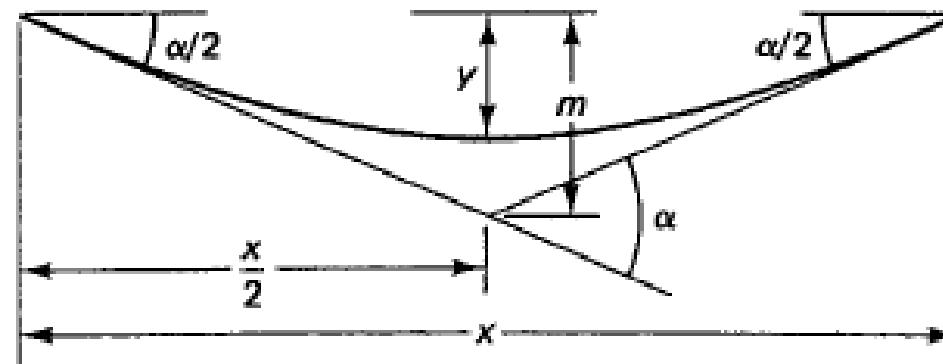
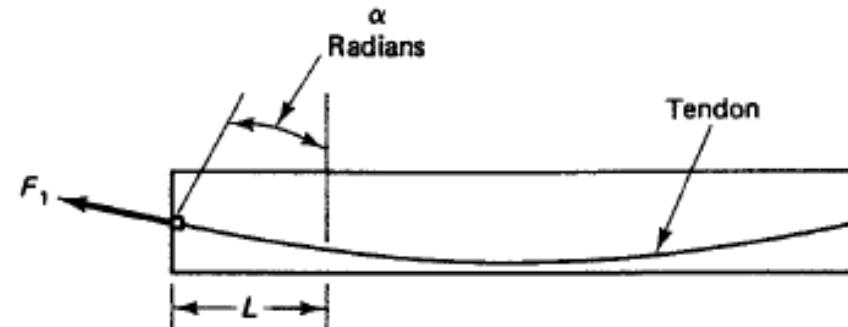
Source: Prestressed Concrete Institute.

Determinación del ángulo α

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{x/2} = \frac{2m}{x}$$

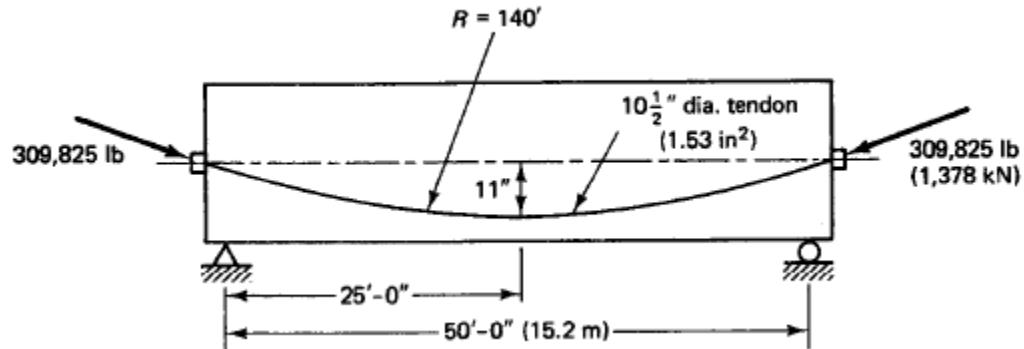
$$y \approx \frac{1}{2}m \quad \text{and} \quad \alpha/2 = 4y/x$$

$$\alpha = 8y/x \text{ radian}$$



Ejemplo 6

Determine las pérdidas por fricción tomando en cuenta la curvatura y oscilación de la viga mostrada, tomando los datos de $A_{ps} = 1.53 \text{ pulg}^2$ y $P_i = 309825 \text{ lbs}$ del ejemplo 1. Los tendones de 7 alambres tienen un revestimiento metálico flexible



$$P_i = 309,825 \text{ lb}$$

$$f_{pi} = \frac{309,825}{1.53} = 202,500 \text{ psi}$$

$$\alpha = \frac{8y}{x} = \frac{8 \times 11}{50 \times 12} = 0.1467 \text{ radian}$$

Table 3.7 Wobble and Curvature Friction Coefficients

Type of tendon	Wobble coefficient, K per foot	Curvature coefficient, μ
Tendons in flexible metal sheathing		
Wire tendons	0.0010–0.0015	0.15–0.25
7-wire strand	0.0005–0.0020	0.15–0.25
High-strength bars	0.0001–0.0006	0.08–0.30
Tendons in rigid metal duct		
7-wire strand	0.0002	0.15–0.25
Mastic-coated tendons		
Wire tendons and 7-wire strand	0.0010–0.0020	0.05–0.15
Pregreased tendons		
Wire tendons and 7-wire strand	0.0003–0.0020	0.05–0.15

Source: Prestressed Concrete Institute.

De la tabla $K=0.002$ y $\mu = 0.20$

$$\begin{aligned}\Delta f_{pF} &= f_{pi} (\mu\alpha + KL) \\ &= 202,500(0.20 \times 0.1467 + 0.0020 \times 50) \\ &= 202,500 \times 0.1293 = 26,191 \text{ psi (180.6 MPa)}\end{aligned}$$

La pérdida debido a
fricción 12.93% del
presfuerzo inicial

Pérdidas en el asiento de Anclaje(A)

Rango de deslizamiento ΔA
(entre $\frac{1}{4}$ " a $\frac{3}{8}$ ")

$$\Delta f_{pA} = \frac{\Delta A}{L} E_{ps}$$

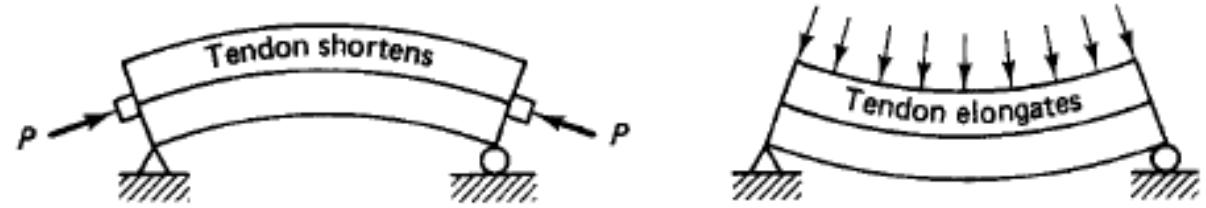
Del ejemplo 2

$$E_{ps} = 27 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\Delta A = 0.25 \text{ in.}$$

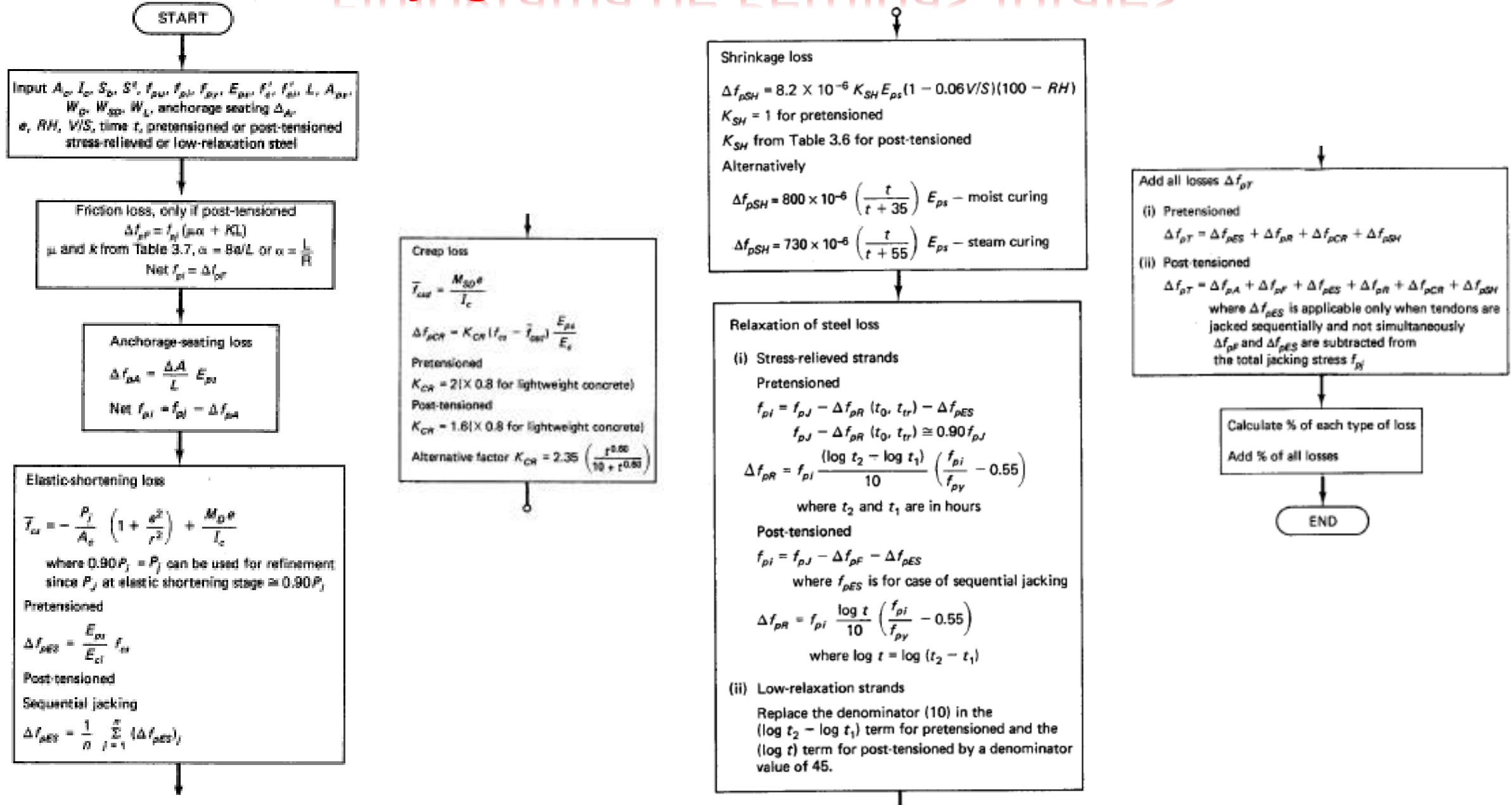
$$\Delta f_{pA} = \frac{\Delta A}{L} E_{ps} = \frac{0.25}{50 \times 12} \times 27 \times 10^6 = 11.250 \text{ psi (77.6 MPa)}$$

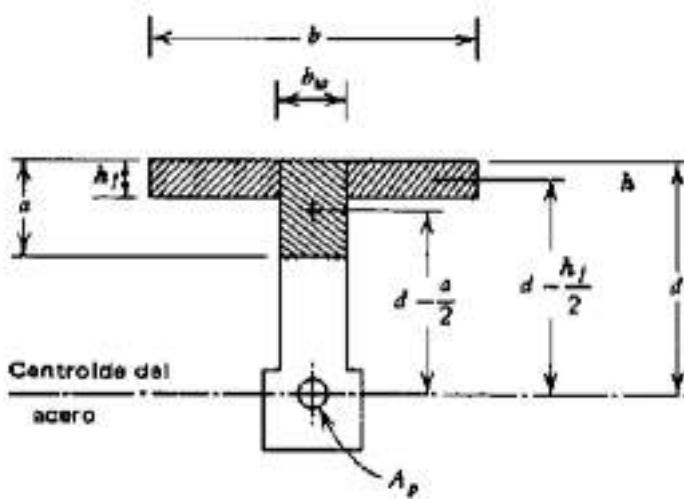
Pérdidas debido a Flexión del miembro(Δf_{pB})



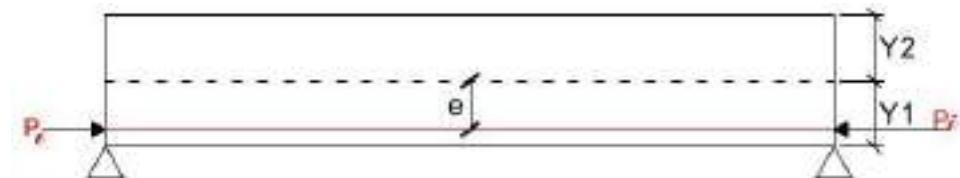
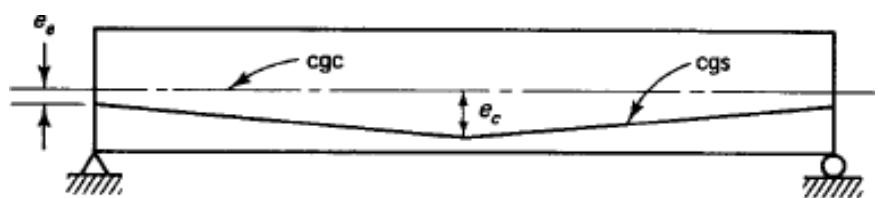
$$\Delta f_{pB} = \epsilon_c E_{ps}$$

Flujograma de Pérdidas Totales





-Resistencia a Flexión de Presfuerzo
 -Diseño a Flexión con base
 a límites de esfuerzos



RESISTENCIA A LA FLEXION

Esfuerzo en el acero de presfuerzo en la falla a flexión

- Cuando una viga de concreto presforzado falla, el acero de presfuerzo está sometido a un esfuerzo f_{ps}

$$f_{pe} < f_{ps} < f_{pu}$$

En donde f_{pe} es el esfuerzo efectivo durante las pérdidas y f_{pu} es el esfuerzo de resistencia última

- $f_{pe} = P_e/A_{ps}$ donde P_e es la fuerza de tensado efectiva luego de las pérdidas a través del tiempo y A_{ps} es el área del acero de presfuerzo.

$$f_{pe} > 0.50f_{pu}$$

- Para el cálculo de f_{ps} se tiene que tomar en cuenta la condición si los cables están adheridos o no al concreto.



En el sistema "adherente", se rellena el interior de las vainas con mortero de alta resistencia a presión, de manera que la armadura queda adherida al hormigón formando una sección monolítica. A su vez, el mortero asegura la protección del acero frente a la corrosión.

En el sistema "no adherente", las vainas no se llenan, por lo que el único contacto entre el tendón y el hormigón se produce a través del cabezal de anclaje.

Cálculo de Esfuerzo *fps*

Para tendones adheridos

$$f_{ps} = f_{pu} \left(1 - \frac{\gamma_p}{\beta_1} \frac{\rho_p f_{pu}}{f'_c} \right)$$

$$\rho_p = A_{ps}/bd_p,$$

A_{ps}= área de acero de presfuerzo *b*= ancho de la cara a compresión

d_p = altura efectiva del centroide del acero de presfuerzo

β₁ = 0.85 para concreto normal varia con concreto de alta resistencia > 5000psi

γ_p = es un factor que depende del tipo de presfuerzo utilizado

γ_p = 0.55 para *f_{py}/f_{pu}* no menor que 0.80 (barras de alta resistencia típicas)

γ_p = 0.40 para *f_{py}/f_{pu}* no menor que 0.85 (torón corriente típico)

γ_p = 0.28 para *f_{py}/f_{pu}* no menor que 0.90 (torón de baja relajación típico)

Para tendones no adheridos (vigas)

Relación luz-altura menor de 35

$$f_{ps} = f_{pe} + 10,000 + \frac{f'_c}{100\rho_p}$$

pero no mayor que *f_{py}* y no mayor que *f_{pe}* + 60,000 lb/pulg².

Para tendones no adheridos (losa postensada)

Relación luz-altura mayor de 35

$$f_{ps} = f_{pe} + 10,000 + \frac{f'_c}{300\rho_p}$$

pero no mayor que *f_{py}*, y no mayor que *f_{pe}* + 30,000 lb/pulg².

Resistencia Nominal a la Flexión

Una vez calculado el esfuerzo f_{ps} se procede a calcular el momento resistente de la viga a flexión.

- Para secciones rectangulares o secciones I o T con la altura del bloque a compresión a menor que el espesor del ala,

$$M_n = A_{ps}f_{ps}\left(d_p - \frac{a}{2}\right)$$

$$a = \frac{A_{ps}f_{ps}}{0.85f'_c b}$$

La resistencia de diseño es θM_n y $\theta = 0.90$

- Si $a >$ que el espesor del ala la fórmula de arriba no funciona y se comporta como una viga T.

$$A_{ps} = A_{pw} + A_{pf}$$

A_{pf} = proporciona la tensión que balancea la compresión del ala

$$A_{pf} = 0.85 \frac{f'_c}{f_{ps}} (b - b_w) h_f$$

A_{pw} = proporciona la tensión que balancea la compresión del alma

$$A_{pw} = A_{ps} - A_{pf}$$

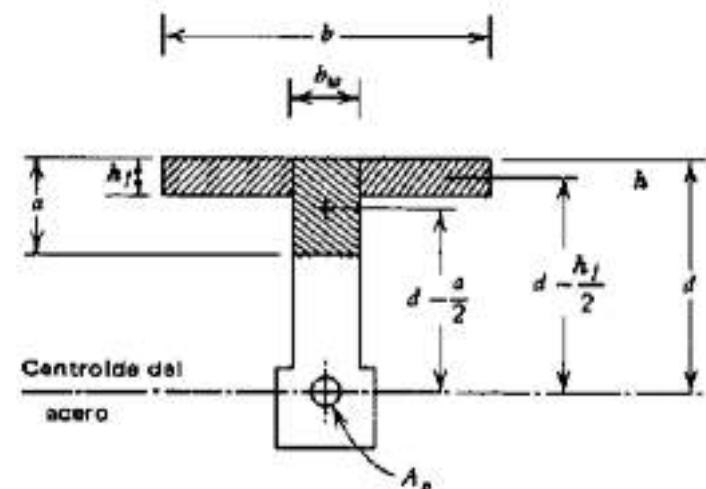
- La fórmula de resistencia a flexión para una viga T es

$$M_n = A_{pw}f_{ps}\left(d_p - \frac{a}{2}\right) + A_{pf}f_{ps}\left(d_p - \frac{h_f}{2}\right)$$

donde

$$M_n = A_{pw}f_{ps}\left(d_p - \frac{a}{2}\right) + 0.85f'_c(b - b_w)h_f\left(d_p - \frac{h_f}{2}\right)$$

$$a = \frac{A_{pw}f_{ps}}{0.85f'_c b_w}$$



Límites del refuerzo

La fórmula de cantidad de presfuerzo máximo permitido es

$$\frac{0.85a}{d_p} \leq 0.36\beta_1$$

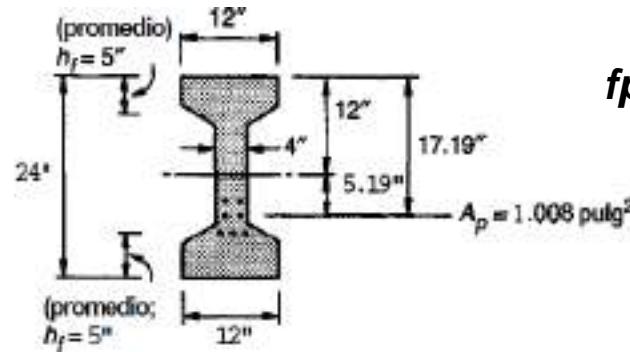
Si no cumple se considera sobresforzada. La cuantía mínima de acero de presfuerzo es debe resistir una carga mayorada de al menos 1.2 veces la carga de agrietamiento de la viga, calculada a partir del módulo de ruptura **fr**.

Refuerzo mínimo adherido

Para controlar el agrietamiento en vigas y losas presforzadas en una dirección en tendones no adheridos se debe colocar un poco de acero de refuerzo normal adicional en la zona de tensión

$$A_s = 0.004A$$

Ejemplo 19.2. Resistencia a la flexión de una viga I pretensada. La viga I preesforzada que aparece en sección transversal en la figura 19.13, se pretensiona utilizando siete torones corrientes de grado 250 y con diámetro de $\frac{1}{2}$ pulg, que se han sometido a tratamiento de revenido para liberarlos de esfuerzos residuales y que soportan un preesfuerzo efectivo de $f_{pe} = 143 \text{ klb/pulg}^2$. La resistencia del concreto es $f'_c = 4000 \text{ lb/pulg}^2$. Calcule la resistencia de diseño de la viga.



$f_{pe} > 0.5 \text{ fpu}$

$fpu 250ksi$

$$\rho_p = \frac{1.008}{12 \times 17.19} = 0.0049$$

Donde 1,008 es el área de siete torones de $\frac{1}{2}$ " ver tabla A.16 El área individual es 0.144 pulg^2 para fpu de 250ksi

- El enunciado define tendones adheridos con torones corrientes y el cálculo de fpu es

$$f_{ps} = 250 \left(1 - \frac{0.40}{0.85} \frac{0.0049 \times 250}{4} \right) = 214 \text{ klb/pulg}^2$$

- Se verifica el valor de a para ver si es mayor o menor que el ala (hf) que es 5"

$$a = \frac{1.008 \times 214}{0.85 \times 4 \times 12} = 5.29 \text{ pulg}$$

Para este caso inicial $b=12"$

a es mayor que hf por lo tanto se comporta como una viga T.

- Se calcula el valor de Apf y Apw

$$A_{pf} = \frac{0.85 \times 4(12 - 4)5}{214} = 0.636 \text{ pulg}^2$$

$$f'c = 4" \quad b = 12" \quad hf = 5" \quad bw = 4"$$

$$A_{pw} = 1.008 - 0.636 = 0.372 \text{ pulg}^2$$

- Se recalcula el valor de a
- Se verifica el límite de refuerzo

$$a = \frac{0.372 \times 214}{0.85 \times 4 \times 4} = 5.85 \text{ pulg}$$

b en este caso es bw = 4"

$$\frac{0.85 \times 5.85}{17.19} = 0.289$$

Se usa el último valor de a calculado

Este valor es menor que $0.36\beta_1 = 0.36 \times 0.85 = 0.306$,

“El acero se encuentra dentro del límite”

- Se calcula el momento resistente de la viga

$$M_r = 0.372 \times 214(17.19 - 2.93) + 0.85 \times 4(12 - 4)5(17.19 - 2.50) \\ = 3133 \text{ klb-pulg} = 261 \text{ klb-pie}$$

y, finalmente, la resistencia de diseño es $\phi M_n = 235 \text{ klb-pie}$

Se usó la segunda de las fórmulas de momento para viga T, cualquiera de las dos funciona

Selección de la Forma

Una de las características principales de presfuerzo está en la libertad de escoger las dimensiones y tipo de sección que se ajusten a los requisitos del trabajo que se realiza. Muchas de estas secciones ya están estandarizadas

Algunas de las formas más comunes usadas en presfuerzos son



(a) Doble T



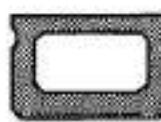
(b) T sencilla



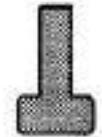
(c) Viga I



(d) Losa canal



(e) Viga cajón



(f) T invertida

- **Sección doble T.** Es probablemente la sección más usada en presfuerzo en Estados Unidos, consta de una superficie plana de 4 y 8 pies. El espesor de losa y altura de viga varía de acuerdo a requerimientos.
- **Sección T sencilla.** Apropiadas para cargas pesadas y luces mayores de 120 pies.
- **Secciones I.** Se usan en luces de puentes y cubiertas hasta los 120 pies
- **Secciones de Canal Invertido.** Para uso en entrepiso de luces intermedias.
- **Secciones de cajón.** Puede ser ventajosos para puentes de luces intermedias y largas.
- **Sección T invertida.** Proporciona bordes de apoyo para soportar los extremos de elementos prefabricados del tablero que se extienden en la dirección perpendicular.

strength f'_c at transfer is 75 percent of the cylinder strength. Assume also that the time-dependent losses of the initial prestress are 18 percent of the initial prestress, and that $f_p = 270,000 \text{ psi}$ (1,862 MPa) for stress-relieved tendons; $f_c = 17\sqrt{f'_c}$.

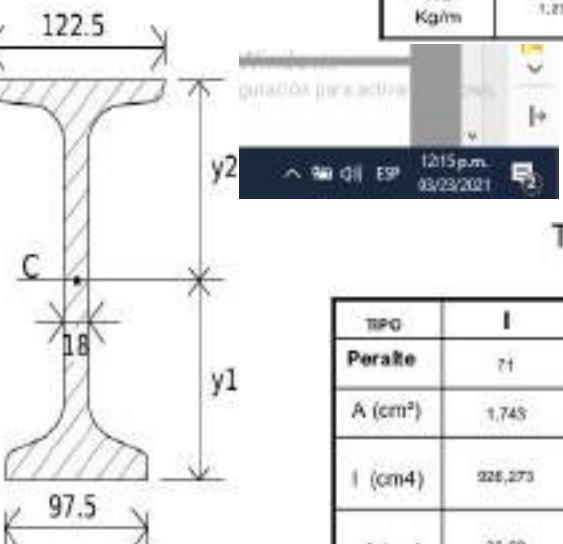
Propiedades de Secciones Prefabricadas

Table 4.1 Section Properties and Moduli of Standard PCI Rectangular Sections

Designation	12RB16	12RB20	12RB24	12RB28	12RB32	12RB36	16RB32	16RB36	16RB40
Section modulus S_i (in. ³)	512	800	1,152	1,568	2,048	2,592	2,731	3,456	4,267
Width, b (in.)	12	12	12	12	12	12	16	16	16
Depth, d (in.)	16	20	24	28	32	36	32	36	40

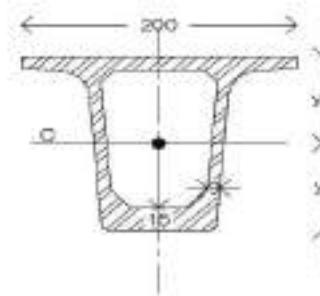
TRABES TIPO NEBRASKA

TIPO	NU 900	NU 1100	NU 1350	NU 1600	NU 1800	NU 2000
PERALTE	90	110	135	160	180	200
A (cm ²)	4,168.32	4,467.40	4,841.06	5,214.74	5,513.81	5,812.88
I (cm ⁴)	4,589,490.94	7,587,024.8	12,584,091.18	19,083,461.65	25,445,392.49	32,906,923.62
y1 (cm)	40.89	49.78	60.96	72.14	81.28	90.88
y2 (cm)	49.11	60.22	74.04	87.87	98.72	109.32
W _c (Kg/m)	1,000	1,072	1,161	1,251	1,323	1,395



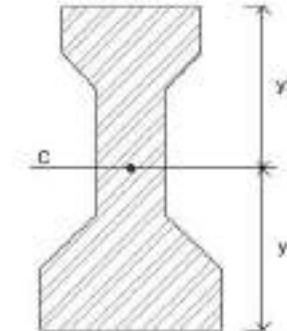
TRABES TIPO CAJÓN

PERALTE	85	115	135	160	170
A (cm ²)	5,142.7	5,737.7	6,385.5	8,307	6,734
I (cm ⁴)	4,805,284	10,541,040	15,608,164	20,300,424	27,602,737
y1=cm	51.5	69.2	80.0	89.1	90.3
y2=cm	33.4	45.0	54.4	60.0	66.7
W _c (Kg/m)	1,234	1,377	1,463	1,626	1,816



TRABES TIPO AASHTO

TIPO	I	II	III	IV	V
Peralte	71	91	110	135	166
A (cm ²)	1,743	2,325	3,626	4,974	6,483
I (cm ⁴)	926,273	2,056,800	5,257,638	10,261,070	21,565,208
y1 (cm)	32.00	49.87	61.2	61.5	61.9
y2 (cm)	36.00	61.80	63.8	73.5	73.84
W _c (Kg/m)	418	558	571	1,194	1,551



Propiedades de Secciones Prefabricadas

epdf.pub_design-of-prestressed-concrete.pdf - Adobe Acrobat Reader DC (32-bit)

Archivo Edición Ver Firma Ventana Ayuda



Table A.11 Section Properties of Double-T Beams^a

h	Untopped				Topped			
	A_c (in. ²)	I_g (in. ⁴)	c_1 (in.)	c_2 (in.)	r^2 (in. ²)	I_g (in. ⁴)	c_1 (in.)	c_2 (in.)
12	287	2,872	2.87	9.13	10.01	4,389	3.55	10.45
14	306	4,508	3.49	10.51	14.74	6,539	4.03	11.97
16	325	6,634	4.07	11.93	20.41	9,306	4.48	13.52
18	344	9,300	4.73	13.27	27.03	12,749	5.00	15.00
20	363	12,551	5.41	14.59	34.58	16,935	5.55	16.45
24	401	20,985	6.85	17.15	52.33	27,720	6.73	19.27

^aAdapted from PCI Design Handbook, Ref. 4.6, 1985.

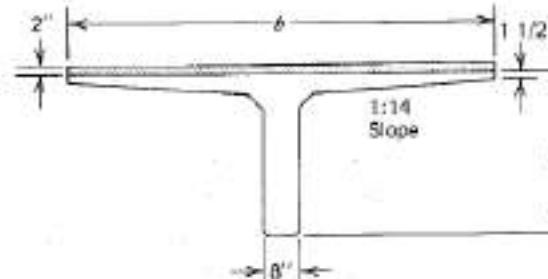


Table A.12 Section Properties of Single-T Beams^a

h	b	Untopped				Topped		
		A_c (in. ²)	I_g (in. ⁴)	c_1 (in.)	c_2 (in.)	r^2 (in. ²)	I_g (in. ⁴)	c_1 (in.)
36	96	570	68,917	9.99	26.01	120.91	83,212	9.72
36	120	686	74,607	8.72	27.28	108.76	—	—
48	120	782	169,020	12.81	35.19	216.14	—	—

^aAdapted from PCI Design Handbook, Ref. 4.6.

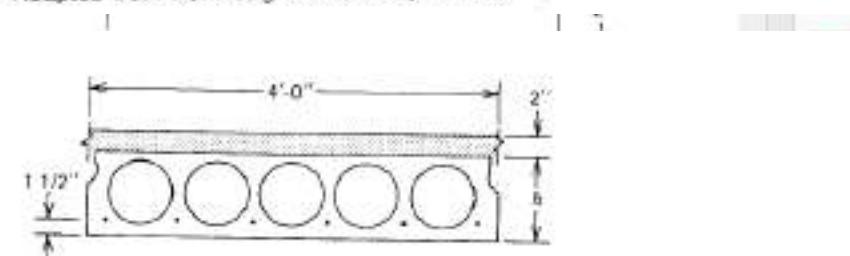


Table A.13 Section Properties of Hollowcore Slabs^a

h	Number of voids	Untopped				Topped			
		A_c (in. ²)	I_g (in. ⁴)	c_1 (in.)	c_2 (in.)	b_w (in.)	r^2 (in. ²)	I_g (in. ⁴)	c_1 (in.)
6	8	187	763	3.00	3.00	16.00	4.08	1,640	3.86
8	6	215	1,666	4.00	4.00	12.00	7.75	3,071	4.71
10	5	259	3,223	5.00	5.00	10.50	12.44	5,328	5.66
12	4	262	4,949	6.00	6.00	8.00	18.89	7,811	6.45

^aAdapted from PCI Design Handbook, Ref. 4.6.

Cuando utilizar secciones asimétricas

1. Si los intervalos de esfuerzos f_{1r} y f_{2r} no son los mismos.
Este paso no se realizó en los ejemplos anteriores y se optó por una sección simétrica, pero sería conveniente considerarlo.
2. Si la viga debe suministrar una superficie plana y útil, al igual que ofrecer una capacidad de soporte a las cargas.
3. Si la viga se convierte en parte de una sección compuesta, y estará integrada a la losa.
4. Si debe proveer superficies de apoyo (T invertida).



En forma general, la sección I, T y cajón con almas y alas relativamente delgadas son más efectivas que aquellas secciones con partes más gruesas.

Diseño a Flexión con base a límites de esfuerzos

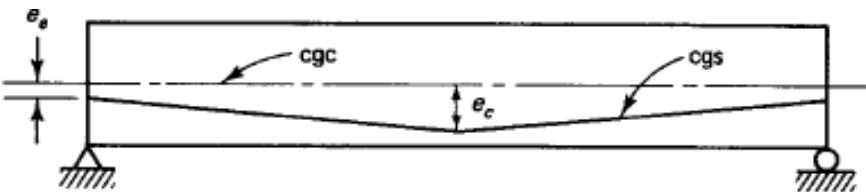
En el diseño de vigas a flexión consideraremos tres métodos, estos son: ➤

- Diseño de vigas con excentricidad variable
- Diseño de vigas con excentricidad constante
- Diseño por carga balanceada

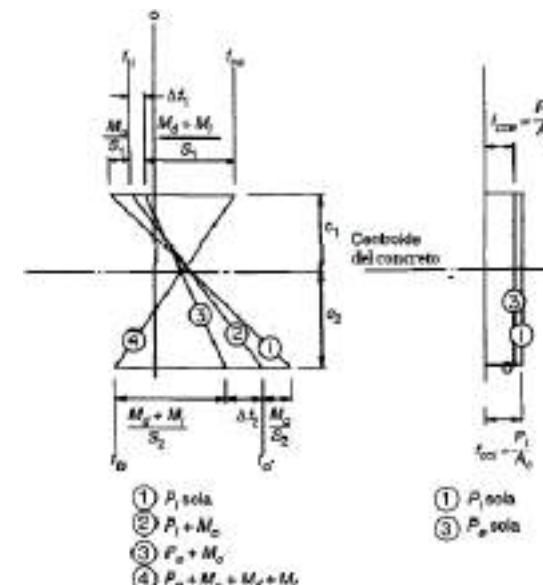
En las dos primeras relacionan la distribución de esfuerzos de acuerdo a la posición cable con respecto al eje neutro y su relación con la geometría de la sección transversal. El tercero se adopta la forma de la curva más óptima del cable con el balance de las cargas de servicio que actúan sobre ella, estudiando su comportamiento en función de una ecuación de balance semejante a una parábola.

DISEÑO DE VIGAS CON EXCENTRICIDAD VARIABLE

La excentricidad de los tendones varían de acuerdo a su longitud.



En esta gráfica vemos la variación de esfuerzos para las 4 condiciones del presfuerzo , dado en las clases anteriores. Donde el esfuerzo de presfuerzo inicial **P_i** cambia a **P_e** (esfuerzo efectivo por pérdidas con el tiempo), pasando por la condición 2 y 4 que son los esfuerzos debido al peso propio y a las cargas de servicio durante la vida útil de la estructura. Estos esfuerzos se deben verificar con los límites del código ACI durante la transferencia y en la etapa final de esfuerzos.



DISEÑO DE VIGAS CON EXCENTRICIDAD VARIABLE

- Los requisitos para los módulos de sección S1 y S2 para la parte superior e inferior en base al eje neutro son

$$S_1 \geq \frac{M_d + M_l}{f_{1r}}$$

$$S_2 \geq \frac{M_d + M_l}{f_{2r}}$$

Los intervalos de esfuerzos disponibles f_{1r} y f_{2r} pueden calcularse a través de f_{ti} , f_{ci} , f_{ts} y f_{cs} , conocidos la variación de esfuerzos Δf_1 y Δf_2 asociados con las pérdidas.

Relación de efectividad

$$R = \frac{P_e}{P_i}$$

- La fórmula para cambios de esfuerzos

$$\Delta f_1 = (1 - R) \left(f_{ti} + \frac{M_o}{S_1} \right)$$

$$\Delta f_2 = (1 - R) \left(-f_{ci} + \frac{M_o}{S_2} \right)$$

Pérdida de presfuerzos

$$P_i - P_e = (1 - R)P_i$$

Fuerza inicial de presfuerzo

$$P_i = A_c f_{cci}$$

- Intervalos disponibles de esfuerzos

$$f_{1r} = f_{ti} - \Delta f_1 - f_{cs}$$

$$= Rf_{ti} - (1 - R) \frac{M_o}{S_1} - f_{cs}$$

$$f_{2r} = f_{ts} - f_{ci} - \Delta f_2$$

$$= f_{ts} - Rf_{ci} - (1 - R) \frac{M_o}{S_2}$$

- Valores mínimo aceptables de los módulos de sección

$$S_2 \geq \frac{(1 - R)M_o + M_d + M_l}{f_{ts} - Rf_{ci}}$$

$$S_1 \geq \frac{(1 - R)M_o + M_d + M_l}{Rf_{ti} - f_{cs}}$$

- Seleccionar la sección transversal para relacionar los módulos de sección

$$I_c = S_1 c_1 = S_2 c_2$$

$$c_1/c_2 = S_2/S_1$$

- Esfuerzo centroidal del concreto en condiciones iniciales

$$f_{ccci} = f_{ti} - \frac{c_1}{h} (f_{ti} - f_{ci})$$

- Excentricidad requerida del tendón

$$e = (f_{ti} - f_{ccci}) \frac{S_1}{P_i} + \frac{M_o}{P_i}$$

- Se calcula el área de acero requerida,

$$A_p = P_i / f_{pi}$$

$f_{pi} < 0.74f_{pu}$ o $0.82f_{py}$ (el que sea menor)

Ejemplo

Diseño de una viga con tendones de excentricidad variable. Una viga postensada debe resistir una carga viva de 1000lb/pie y una carga muerta superpuesta de 500lb/pie, además de su peso propio, en una luz libre de 40 pies. La resistencia del concreto es de f'_c 6000psi, y se estima que al momento de la transferencia habrá alcanzado un 70% de su resistencia última, o sea 4200psi. Las pérdidas al paso del tiempo se estiman en 15% por lo que su eficiencia es de 85%. Determine las dimensiones requeridas de la sección de concreto, la fuerza del presfuerzo, la excentricidad que debe tener el cable y el área de acero requerida.

- Tomamos un peso propio aproximado de 250 lb/pie, este valor tendrá que ajustarse posteriormente.
- Verificación de los límites del código ACI

$$f_{ct} = -0.60 \times 4200 = 2520 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_{ct} = 3\sqrt{4200} = +195 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_{cs} = 0.60 \times 6000 = -3600 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_{sx} = 6\sqrt{6000} = +465 \text{ lb/pulg}^2$$

- Calculamos el momento propio de la viga y el momento debido a cargas de servicio

$$M_o = \frac{J}{8} \times 0.250 \times 40^2 = 50 \text{ kib-pie}$$

$$M_d + M_I = \frac{1}{8} \times 1.500 \times 40^2 = 300 \text{ kib-pie}$$

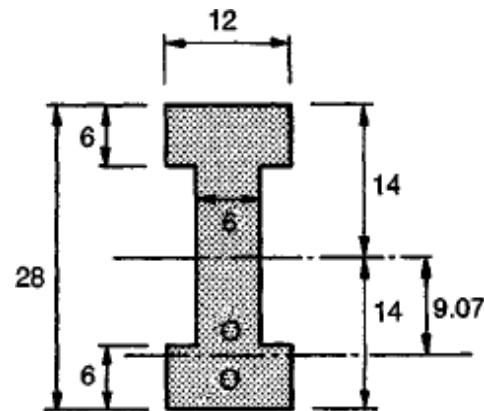
- Encontramos el módulo de sección requeridos para la viga

$$S_1 \geq \frac{(1-R)M_o + M_d + M_I}{Rf_{ct} - f_{cs}} = \frac{(0.15 \times M + 300)12,000}{0.85 \times 195 + 3600} = 980 \text{ pulg}^3$$

$$S_2 \geq \frac{(1-R)M_o + M_d + M_I}{f_{sx} - Rf_{ct}} = \frac{(0.15 \times 50 + 300)12,000}{465 + 0.85 \times 2520} = 1415 \text{ pulg}^3$$

Los resultados requieren una sección asimétrica, pero se toma una sección simétrica con un módulo de sección mayor de 1415pulg³.

Para este ejemplo se selecciona una viga I de 28 pulg que cumple las siguientes condiciones



$$I_c = 19,904 \text{ pulg}^4$$

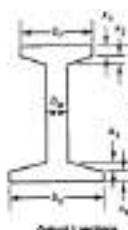
$$S = 1422 \text{ pulg}^3$$

$$A_s = 240 \text{ pulg}^2$$

$$r^2 = 82.9 \text{ pulg}^2$$

$$w_o = 250 \text{ lb/pie lineal (como se supuso)}$$

Para este ejemplo se utilizó una tabla de referencia no especificada, pero usaremos secciones AASHTO para otros casos. Si usáramos secciones AASHTO nos conviene una sección TIPO I.



AASHTO sections

Designation	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 5	Type 6
Area A , in. ²	276	369	560	789	1,013	1,085
Moment of inertia, $I_{xx - z_0}$, in. ⁴	22,750	30,979	125,390	260,741	521,180	733,320
$I_{yy - y_0}$, in. ⁴	3,352	5,333	12,217	24,347	61,235	61,619
Top/bottom-section modulus, in. ³	1,476	2,527	5,070	8,908	16,790	20,587
Top flange width, b_1 (in.)	12	12	16	20	42	42
Top flange average thickness, t_1 (in.)	6	8	9	11	7	7
Bottom flange width, b_2 (in.)	16	18	22	26	28	28
Bottom flange average thickness, t_2 (in.)	7	9	11	12	13	13
Total depth, h (in.)	28	30	45	54	63	72
Web width, b_w (in.)	6	6	7	8	8	8
c/c_s (in.)	15.41	20.17	24.73	29.27	31.04	35.62
r^2 , in. ²	82	132	224	330	514	676
Self-weight w_g lb/ft	287	384	583	822	1055	1130

Table 4.1 Section Properties and Moduli of Standard PCI Rectangular Sections

Designation	12RB16	12RB20	12RB24	12RB28	12RB32	12RB36	16RB32	16RB36	16RB40
Section modulus									
S , (in. ³)	512	800	1,152	1,568	2,048	2,592	2,731	3,456	4,267
Width, b (in.)	12	12	12	12	12	12	16	16	16
Depth, h (in.)	16	20	24	28	32	36	32	36	40

➤ Calculo de esfuerzo centroidal del concreto

$$f_{cci} = f_{hi} - \frac{c_1}{h}(f_{hi} - f_{ci}) = 195 - \frac{1}{2}(195 + 2520) = -1163 \text{ lb/pulg}^2$$

➤ Cálculo de presfuerzo inicial

$$P_i = A_c f_{cci} = 240 \times 1.163 = 279 \text{ klb}$$

➤ Cálculo de excentricidad requerida del tendón

$$e = (f_{hi} - f_{cci}) \frac{S_1}{P_i} + \frac{M_o}{P_i} = (195 + 1163) \frac{1422}{279,000} + \frac{50 \times 12,000}{279,000} = 9.07 \text{ pulg}$$

➤ **fpi** es el menor valor de $0.82f_{py} = 0.82 \times 0.9 \times 270 = 199 \text{ ksi}$

$$0.74f_{pu} = 0.74 \times 270 = 200 \text{ ksi}$$

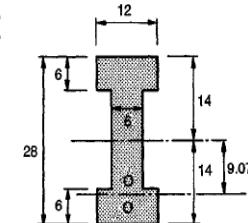
➤ Cálculo de acero de presfuerzo

$$A_p = 279/199 = 1.40 \text{ pulg}^2$$

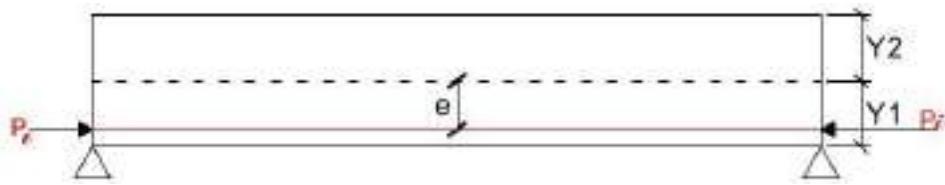
Para acero $\frac{1}{2}$ " y 270ksi área individual 0.153pulg²

$$\# \text{ de torones} = 1.40/0.153 = 9.2$$

Usar dos paquetes de 5 torones de $\frac{1}{2}$ " como indica el dibujo



DISEÑO DE VIGAS CON EXCENTRICIDAD CONSTANTE



- En el caso de excentricidad variable, se basa en las condiciones de aplicación de esfuerzos donde se da el momento máximo de la viga, donde el peso propio se aplica de manera inmediata.
- En el caso que veremos ahora P_i y excentricidad se mantendrán constantes a lo largo de la luz, los esfuerzos f_{ti} y f_{ci} se excederían en otras secciones a lo largo de la luz donde su valor M es menor que M_{\max} .
- Para evitar esta situación la excentricidad debe ser menor que la ecuación presentada en el caso anterior,

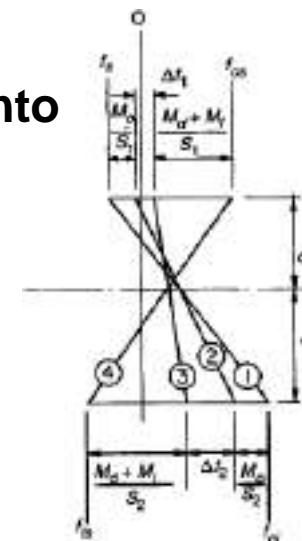
$$e = (f_{ti} - f_{cci}) \frac{S_1}{P_i} + \frac{M_o}{P_i}$$

Y los esfuerzos máximos ocurren donde M es igual a cero, o sea en los extremos. P_i solo, P_e solo.

"el acero se encuentra de la misma forma que el caso anterior"

Sección de Máximo Momento

Distribución de Esfuerzos



- ① P_i sola
- ② $P_i + M_o$
- ③ $P_e + M_o$
- ④ $P_e + M_o + M_d + M_l$

- ① P_i sola
- ② P_e sola

Los cambios de esfuerzos Δf_1 y Δf_2 son los siguientes,

$$\Delta f_1 = (1 - R)(f_{ti})$$

Intervalos disponibles de esfuerzos son,

$$\Delta f_2 = (1 - R)(-f_{ci})$$

$$F_{1r} = f_{ti} - \Delta f_1 - f_{cs}$$

$$= R f_{ti} - f_{cs}$$

Requisitos para el módulo de sección

$$S_1 \geq \frac{M_o + M_d + M_l}{R f_{ti} - f_{cs}}$$

$$S_2 \geq \frac{M_o + M_d + M_l}{f_{ts} - R f_{ci}}$$

Excentricidad requerida,

$$e = (f_{ti} - f_{cci}) \frac{S_1}{P_i} \quad f_{2r} = f_{ts} - f_{ci} - \Delta f_2 \\ = f_{ts} - R f_{ci}$$

Ejemplo. Para la viga del ejemplo anterior, diseñarla para una excentricidad de tendones constantes. Los criterios de diseño son los mismos. Se asume en los apoyos un esfuerzo de tensión temporal de $6\sqrt{f'ci} = 390$ psi.

Las vigas en este método tienden a ser un poco más pesadas, asumimos $w_o = 270$ lb/pie lineal. Para $L = 40$ pies

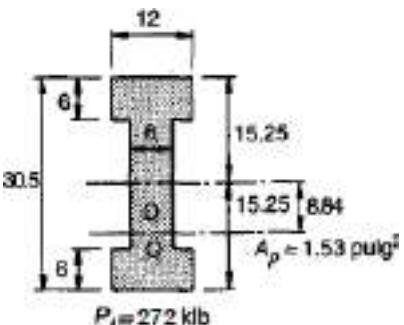
$$M_o = w_o L^2 / 8 = 54 \text{ kip-pie}$$

$$M_d + M_L = 1.5 \times 40^2 / 8 = 300 \text{ kip-pie}$$

Determinación de módulo de sección requerido

$$S_1 \geq \frac{M_o + M_d + M_L}{Rf_{ti} - f_{cs}} = \frac{(54 + 300)12,000}{0.85 \times 390 + 3600} = 1080 \text{ pulg}^3$$

$$S_2 \geq \frac{M_o + M_d + M_L}{f_{ts} - Rf_{ci}} = \frac{(54 + 300)12,000}{465 + 0.85 \times 2520} = 1629 \text{ pulg}^3$$



$$l_c = 25,207 \text{ pulg}^4$$

$$S = 1653 \text{ pulg}^3$$

$$A_c = 255 \text{ pulg}^2$$

$$r^2 = 98.9 \text{ pulg}^2$$

$w_o = 266$ lb/pie lineal (muy cerca al valor supuesto)

Se escoge una sección con un módulo de sección mayor de 1629 pulg^3 en tablas predeterminadas de diseño, si tomáramos una sección tipo AASHTO sería la tipo 1,

Designation	AASHTO sections					
	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 5	Type 6
Area A_c , in. ²	276	369	560	789	1,013	1,065
Moment of inertia, I_{fl-wt} , in. ⁴	22,290	50,979	125,300	260,741	521,180	733,320
I_{fl-wt} , in. ⁴	3,252	5,333	12,217	24,387	61,235	61,619
Top-bottom-section medias, in. ³	1,476	2,527	5,070	8,908	16,290	20,287
Top flange width, b_t (in.)	12	12	16	20	42	42
Top flange average thickness, t_f (in.)	6	8	9	11	7	7
Bottom flange width, b_b (in.)	16	18	22	26	28	28
Bottom flange average thickness, t_b (in.)	7	9	11	12	13	13
Total depth, h (in.)	28	36	43	54	63	72
Web width, b_w (in.)	6	6	7	8	8	8
c/c_s (in.)	15.41	20.13	24.73	29.27	38.04	35.62
r^2 , in. ²	82	132	224	330	514	676
Self-weight w_o , lb/ft	287	394	583	822	1055	1130

Siguiendo el ejemplo del libro de Arthur Nilson, que es este ejemplo (19.4), esfuerzo centroidal del concreto será

$$f_{cc} = f_{ct} - \frac{c_1}{h}(f_{ct} - f_{ci}) = 390 - \frac{1}{2}(390 + 2520) = -1065 \text{ lb/pulg}^2$$

La fuerza de presfuerzo inicial es

$$P_i = A_c f_{cc} = 255 \times 1.065 = 272 \text{ klb}$$

se habían calculado en el problema anterior.

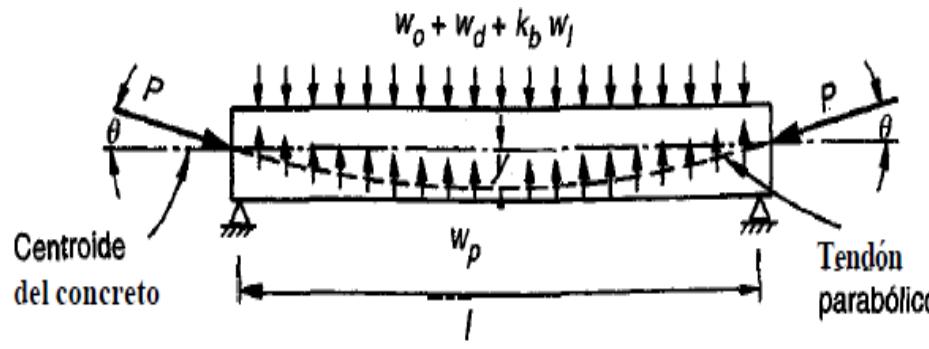
La excentricidad constante del cable

$$e = (f_{ct} - f_{cc}) \frac{S_1}{P_i} = (390 + 1065) \frac{1653}{272,000} = 8.84 \text{ pulg}$$

Cantidad de cables requeridos de 270ksi de $\frac{1}{2}$ " de diámetro

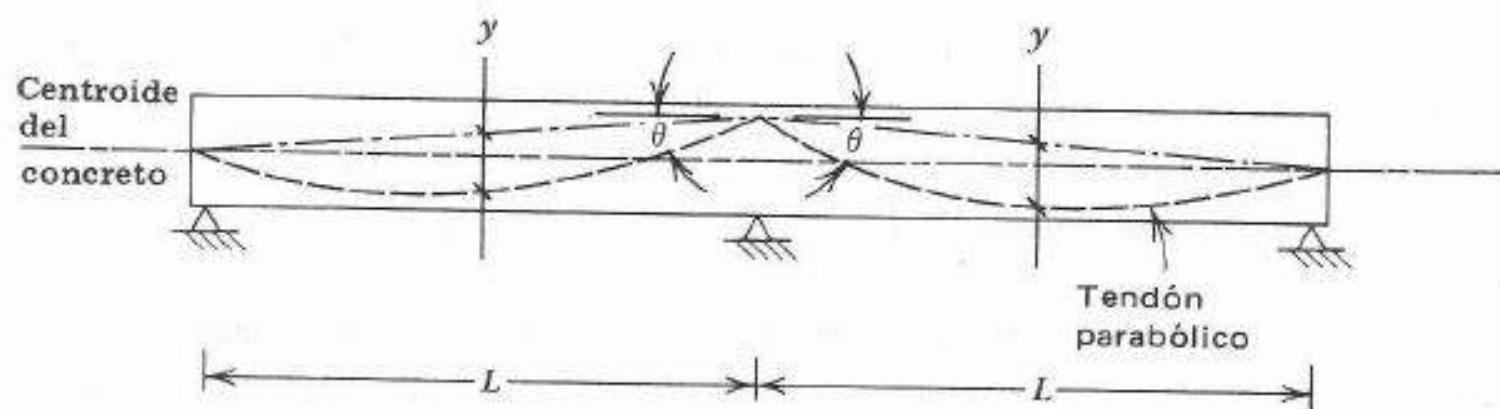
$$A_p = \frac{272}{199} = 1.37 \text{ pulg}^2$$

Esto nos da 9 torones, se decide repartir dos grupos de 5 torones de $\frac{1}{2}$ " de diámetro.



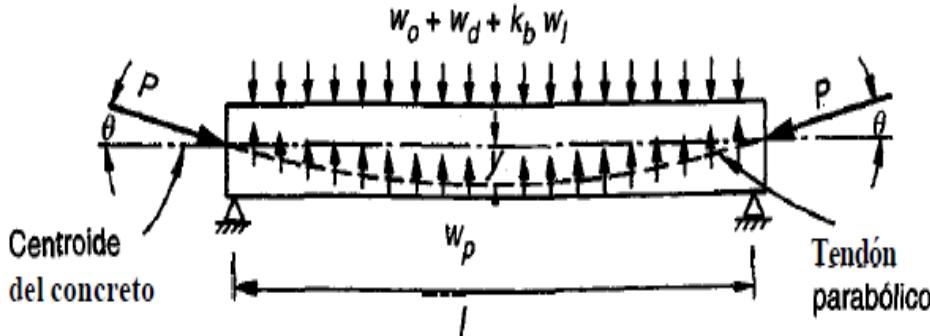
Diseño de Viga Presforzada a Flexión

- Método de Carga Balanceada
- Presfuerzo Parcial



Método de Carga Balanceada

- Las fuerzas de presfuerzos y la excentricidad del tendón se establecen de tal forma que las cargas externas sean contrarrestadas exactamente por las fuerzas verticales que actúen sobre el presfuerzo.
- La viga se debe diseñar para una carga balanceada que consta del peso propio por W_o , la carga muerta superpuesta W_d y una fracción de la carga viva $K_b W_l$. El valor de K_b se asume aproximadamente 25% de la carga viva.

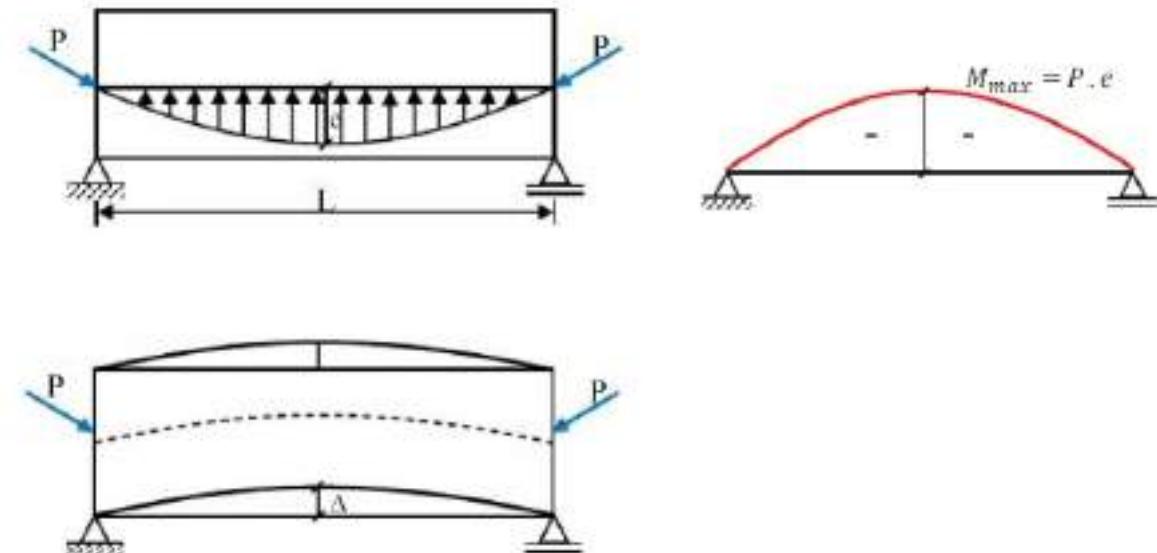


$$w_p = \frac{8Py}{l^2}$$

- Si la carga se distribuye uniformemente el perfil del tendón adoptará una forma parabólica

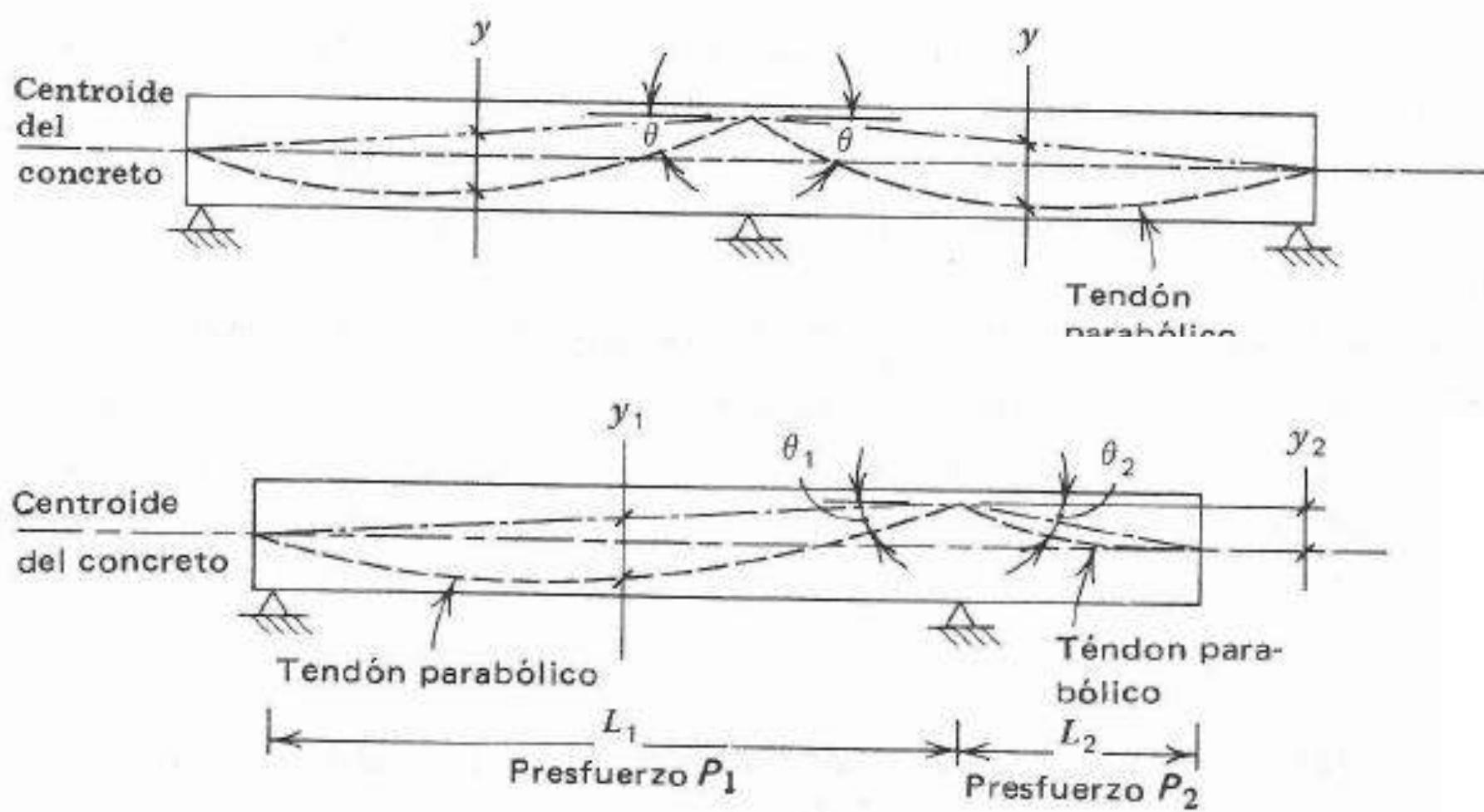
- Los esfuerzos a flexión que generan las fuerzas de presfuerzo son iguales y opuestos a los esfuerzos que generan las cargas externas
 - Carga del tendón para una viga en cantolibre

$$w_p = \frac{2Py}{l^2}$$



Perfiles de Tendón para balanceo de cargas

Vigas Continuas



Pasos a seguir para el Método de Carga Balanceada

1) Establecer las dimensiones de la viga. Tomando la relación L/H de 18 podemos tener un peralte aproximado.

2) Estimar la carga balanceada

3) Estimar la fuerza de presfuerzo P_e después de las fuerzas

$$P_e = \frac{w_{bal}l^2}{8y}$$

4) Encontrar el presfuerzo inicial

$$P_i = P_e/R$$

5) Calcular el esfuerzo balanceado, cuando el concreto se somete a esfuerzos de compresión uniforme

$$f_{bal} = P_e/A$$

6) Se retira la carga viva parcial, y se superponen momentos productos de una fuerza vertical hacia arriba igual a esa carga

$$\begin{aligned} M_{bal} &= K_b WI l^2/8 \\ f_{nobal} &= M_{bal}/S \end{aligned}$$

7) Calculo de esfuerzos netos

$$f_1 = f_{bal} + f_{nobal}$$

$$f_2 = f_{bal} - f_{nobal}$$

8) Actuando la carga viva total , calcular los esfuerzos incluyendo las cargas verticales vivas no balanceadas

$$f_1 = f_{bal} + f_{cvtotal}$$

$$f_2 = f_{bal} - f_{cvtotal}$$

9) Esfuerzos con aplicación de carga P_i y el peso propio

$$f_1 = f_{Pi} + f_{Wo}$$

$$f_2 = f_{Pi} - f_{Wo}$$

10) Las ecuaciones del punto 8 se verifican con f_{ts} y f_{cs} , y las ecuaciones del punto 9 se verifican con f_{ci} y f_{ti}

11) Calcular el área de acero

$$A_p = P_i / f_{pi}$$

donde

$$f_{pi} = al \text{ valor } < 0.74 f_{pu} \text{ o } 0.82 f_{py}$$

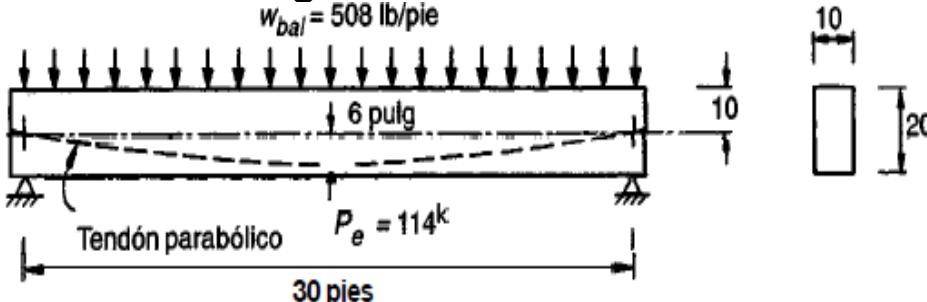
Ejemplo 19.5. Diseño de una viga iniciando con el balance de cargas. Una viga postensada debe diseñarse para soportar una carga uniformemente distribuida sobre una luz de 30 pies, como se ilustra en la figura 19.21. Además de su peso propio, la viga debe sostener una carga muerta de 150 lb/pie lineal y una carga viva de servicio de 600 lb/pie lineal. Se alcanzará una resistencia del concreto de 4000 lb/pulg² a los 28 días; para el momento de la transferencia de la fuerza de preesfuerzo, la resistencia será de 3000 lb/pulg². Se supone que las pérdidas de preesfuerzo son de aproximadamente el 20 por ciento de P_e . Con base en que aproximadamente un cuarto de la carga viva será sostenida durante un periodo sustancial, se utilizará un valor de k_b de 0.25 para determinar la carga balanceada.

- **Con relación $L/H = 18$ $H = 30/18 = 1.66$ pies tenemos una $H = 20$ pulg. La base se asume la mitad de la altura $b = 10$ pulg.**

- **El peso propio de la sección**

$$W_0 = \text{densidad} \times \text{área} = 150 \text{ lib/pie}^3 \times 20 \times 10 / 122 = 208 \text{ lib/p.I.}$$

- **Calcular la carga balanceada**



$$w_{bal} = w_0 + w_d + k_b w_l = 208 + 150 + 150 = 508 \text{ lb/pie lineal}$$

- **Cálculo de P_e**

$$P_e = \frac{w_{bal} l^2}{8y} = \frac{508 \times 900}{8 \times 0.5} = 114,000 \text{ lb}$$

- **Cálculo de P_i**

$$P_i = \frac{P_e}{R} = \frac{114,000}{0.8} = 143,000 \text{ lb}$$

- **Cálculo de f_{bal}**

$$f_{bal} = \frac{114,000}{200} = -570 \text{ lb/pulg}^2$$

- **Calculo de f_{nobal}**

$$M_{nobal} = 150 \times \frac{900}{8} = 16,900 \text{ lb-pie}$$

$$I = 1/12 \times 12 \times 203 = 6667 \text{ pulg}^4$$

$$S = 667 = I/c$$

$$c = 10 \text{ pulg}$$

$$f_{nobal} = 16,900 \times \frac{12}{667} = 304 \text{ lb/pulg}^2$$

- **Esfuerzos netos**

$$f_1 = -570 + 304 = -266 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -570 - 304 = -874 \text{ lb/pulg}^2$$

- **Esfuerzos con carga viva total**

$$M = 450 \times 30/8 = 50625 \text{ lb.pie}$$

$$f_{cv} = 50625 \times 12 / 667 = 910 \text{ psi}$$

$$f_1 = -570 - 910 = -1480 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -570 + 910 = +340 \text{ lb/pulg}^2$$

“Los esfuerzos aplicando carga viva se observa la tensión en la fibra inferior y compresión en fibra superior”

- **Esfuerzos con P_i y esfuerzos a flexión de peso propio**

$$M_c = 208 \times \frac{900}{8} = 23,400 \text{ lb-pie}$$

$$f_1 = -\frac{143,000}{200} \left(1 - \frac{6 \times 10}{33.35}\right) - \frac{23,400 \times 12}{667} = +150 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -\frac{143,000}{200} \left(1 + \frac{6 \times 10}{33.35}\right) + \frac{23,400 \times 12}{667} = -1580 \text{ lb/pulg}^2$$

$$r_2 = I/A = 6667/200 = 33.35$$

$$e=6 \text{ y } c=10$$

- **Tomando los valores límites del ACI presentados en el tema de esfuerzos de presfuerzos (primer tema de presfuerzo).**

$$f_{ti} = +165 \text{ lb/pulg}^2 \quad f_{ts} = +380 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_{ci} = -1800 \text{ lb/pulg}^2 \quad f_{cs} = -2400 \text{ lb/pulg}^2$$

- **Comparando los esfuerzos donde se aplique la carga viva total f_1 y f_2 con f_{ts} y f_{cs} para los valores finales de presfuerzos, son menores que el límite, cumple con el Código ACI**

- **Calculo de f_{pi}**

$$0.74 f_{pu} = 0.74 \times 250000 = 185000 \text{ psi}$$

$$0.82 f_{py} = 0.82 \times 212000 = 174000 \text{ psi}$$

- **Cálculo de A_p**

$$143000/174000 = 0.82 \text{ pulg}^2$$

Son 8 cables de 7/16"

- **Comparando los últimos esfuerzos f_1 y f_2 con f_{ti} y f_{ci} para los valores iniciales de presfuerzos, son menores que el límite: Cumple con el código ACI**

Presfuerzo Parcial

El término de presfuerzo parcial se aplica a aquellos elementos que contienen en su armado longitudinal, tanto su refuerzo ordinario como presforzado para resistir el momento flexionante que actúe en este.

A su vez un elemento se considera con presfuerzo total cuando su índice de presfuerzo, "Ip" esta comprendiendo 0.9 y 1 incluyendo los valores extremos. Si el índice de presfuerzo es menor a 0.9 pero mayor o igual a 0.6, se considera una sección parcialmente presforzada y si el índice de presfuerzo es menor a 0.6 se considera una sección sin presfuerzo, la expresión para obtener el índice de presfuerzo es la siguiente.

$$Ip = \frac{Mrp}{Mrp + Mrr}$$

Mrp = Momento resistente provocado por el acero de preefuerzo
Mrr = Momento resistente provocado por el acero de refuerzo
Ip = Índice de presfuerzo

Una forma más sencilla de obtener el índice de presfuerzo es con la siguiente formula:

$$Ip = \frac{As_p F_{sp}}{As_p F_{sp} + As_Fy}$$

As_p = Área de acero de presfuerzo
As = Área de acero de refuerzo
F_{sp} = Esfuerzo en el acero presforzado cuando alcanza su resistencia
F_y = Esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo ordinario

Indice de Presfuerzo



A

Edificación
en sitio



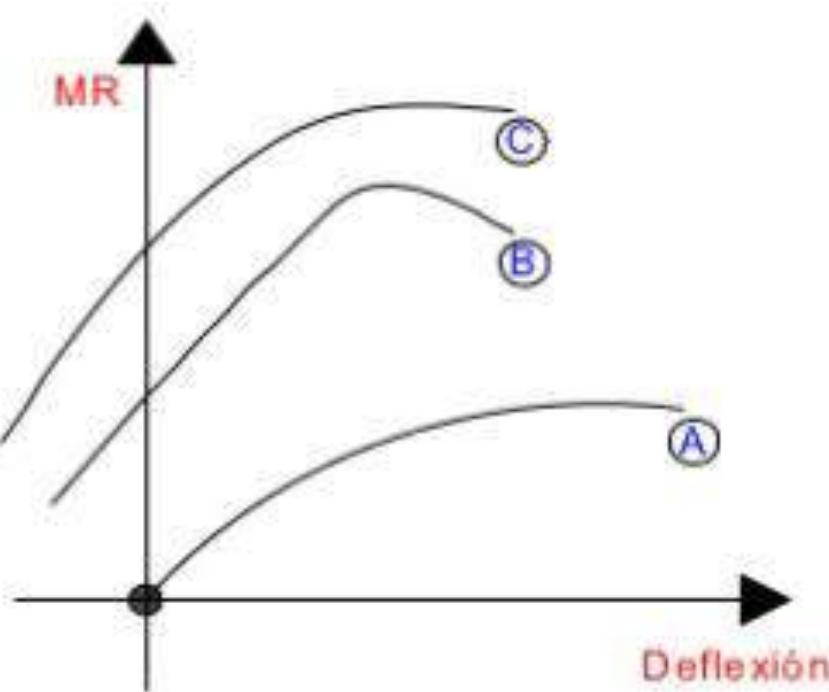
B

Edificación
Prefabricada



C

Puentes, Losas
o Trabes



(C)

$$I_p \Rightarrow (0.9 - 1) \quad 0.9 \leq I_p \leq 1$$

Totalmente presforzada

(B)

$$I_p \Rightarrow 0.6 \leq I_p < 0.9$$

Parcialmente presforzada

(A)

$$I_p \Rightarrow I_p < 0.6$$

Reforzada o sin presfuerzo

Procedimiento de Diseño para Vigas Parcialmente Presforzadas

1. Hállese la resistencia última de flexión M_u requerida mediante la aplicación de factores de sobrecarga aplicados a las cargas muertas calculadas y a las cargas vivas de servicio. De acuerdo con las especificaciones usuales la resistencia nominal requerida del miembro es $M_n = M_u / \theta$ donde θ es un factor de reducción de capacidad igual a 0.90 para flexión.
2. Se asume un peralte tentativo para la sección de concreto basándose en una máxima relación de claro a peralte o en la experiencia. Las dimensiones del patín superior pueden basarse en los requerimientos funcionales o en algún otro criterio.
3. El brazo del par interno z se asume igual a la distancia que existe entre el centroide del acero y el punto medio del patín, o en el caso de una sección rectangular, igual a 0.80 h . Si el esfuerzo en el acero en la falla se toma igual a 0.90 f_{pu} , entonces el área requerida para el tendón es

$$A_p = \frac{M_n}{0.9f_{pu}z}$$

4. Asumiendo para fines del diseño que la distribución del esfuerzo real en el concreto se puede remplazar por un bloque rectangular equivalente de esfuerzos con una intensidad de esfuerzo uniforme de 0.85 f'_c , el área requerida para la compresión en el concreto es

$$A'_c = \frac{M_n}{0.85f'_cz}$$

Esto da el área requerida para el patín superior, después de considerar la contribución, si existiera alguna, del área del alma en compresión. La sección tentativa se modifica si fuera necesario.

5. El ancho del alma puede escogerse ahora de los requerimientos de resistencia al corte o mediante la consideración de las necesidades prácticas de recubrimiento de los tendones y el resto del acero.
6. La magnitud de la fuerza pretensora se escoge en forma tal de producir las condiciones de deflexión deseadas para el miembro. En lugar de otros requerimientos, por ejemplo, se puede seleccionar el criterio de la deflexión nula bajo el efecto combinado del presfuerzo y la carga muerta total. El concepto del balanceo de cargas del artículo 4.10 es útil en la determinación de la fuerza pretensora requerida.
7. El refuerzo presforzado con adherencia, junto con las varillas no presforzadas empleadas para soportar los estribos, son por lo general suficientes para asegurar que las grietas bajo las cargas de servicio serán pequeñas y bien distribuidas. En algunos casos puede adicionarse refuerzo no presforzado con la finalidad de controlar las grietas.

Ejemplo de Diseño

Debe de diseñarse una viga que tiene una sección transversal *T* para que soporte una carga viva de servicio de 1200 libras/pie y una carga muerta sobrepuesta de 400 Lb/pie adicionalmente a su peso propio, con un claro simple de 80 pies, como se muestra en la figura 4.17a. El miembro será postensado empleando tendones compuestos de cables trenzados del grado 250. La resistencia del concreto a los 28 días debe de ser 5000 Lb/pulg². Se adoptará un diseño basado en la resistencia, con el requisito adicional de que la deflexión debe de ser nula bajo la totalidad de la carga muerta de servicio. ($w_1 = 17.5 \text{ kN/m}$, $w_d = 5.8 \text{ kN/m}$, claro = 24.4 m, y $f'_c = 34 \text{ N/mm}^2$.)

En lugar de otras restricciones se seleccionará un peralte para el miembro de 1/20 del claro, o 4 pies (1219 mm). Los requisitos de funcionalidad indican un ancho del patín de 70 pulg. (1778 mm) teniendo un espesor promedio de 6 pulg. (152 mm). Los requerimientos previstos para los ductos y los anclajes, así como los requerimientos del refuerzo en el alma conducen a la selección de un espesor del alma de 14 pulg. (356 mm). La sección tentativa, mostrada en la figura 4.17b, tiene las siguientes propiedades:

$$I_c = 229,000 \text{ pulg.}^4 \quad (95.3 \times 10^9 \text{ mm}^4)$$

$$S_1 = 13,500 \text{ pulg.}^3 \quad (221 \times 10^6 \text{ mm}^3)$$

$$S_2 = 7380 \text{ pulg.}^3 \quad (121 \times 10^6 \text{ mm}^3)$$

$$c_1 = 17.0 \text{ pulg.} \quad (432 \text{ mm})$$

$$c_2 = 31.0 \text{ pulg.} \quad (787 \text{ mm})$$

$$A_c = 1010 \text{ pulg.}^2 \quad (652 \times 10^3 \text{ mm}^2)$$

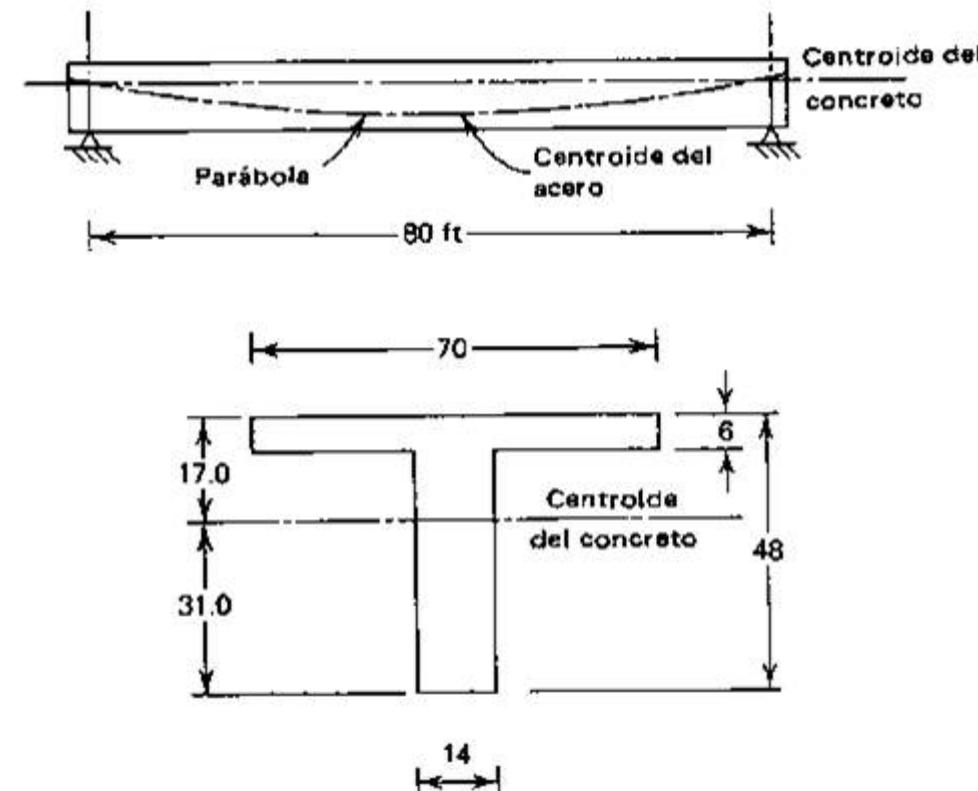
$$w_a = 1050 \text{ Lb/pie} \quad (15.3 \text{ kN/m})$$

Momentos debido a carga viva, muerta y peso propio

$$M_o = \frac{1}{8} \times 1.050 \times 6400 = 840 \text{ kilolibra-pie}$$

$$M_d = \frac{1}{8} \times 0.400 \times 6400 = 320 \text{ kilolibra-pie}$$

$$M_i = \frac{1}{8} \times 1.200 \times 6400 = 960 \text{ kilolibra-pie}$$



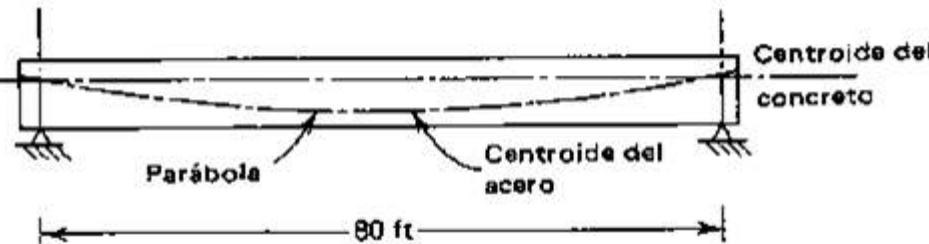
$$M_u = 1.4(840 + 320) + 1.7(960) = 3260 \text{ ft-kips}$$

$$M_u = \frac{3260}{0.90} = 3620 \text{ kilolibra-pie} \quad (4909 \text{ kN-m})$$

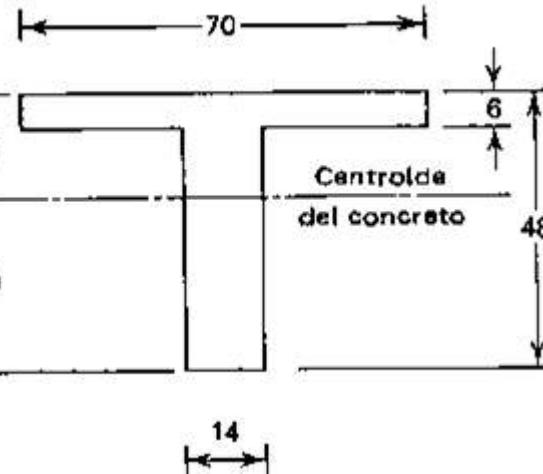
Z para un recubrimiento inferior de 8"

$$z = 48 - 8 - 3 = 37 \text{ pulg.}$$

$$A_p = \frac{M_u}{0.9f_{pu}Z} \quad A_p = \frac{3620 \times 12}{0.9 \times 250 \times 37} = 5.22 \text{ pulg}^2 \quad (3368 \text{ mm}^2)$$



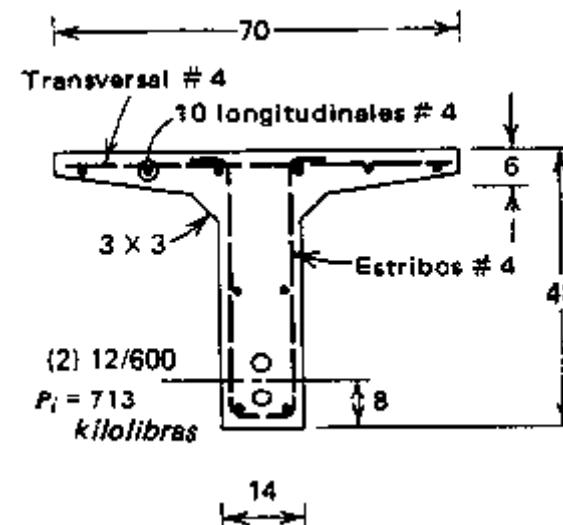
Se usarán dos tendones, cada uno compuesto de 12 alambres del grado 250 de 0.600 pulg. de diámetro nominal (ver Apéndice B), lo cual proporciona una área de 5.20 pulg². Una revisión del diámetro del ducto, el cual es de 3 pulg., confirma que la colocación propuesta es satisfactoria. Los tendones se colgarán siguiendo un perfil parabólico con excentricidad nula en los apoyos y con una inyección de mortero después del tensado.



Área de Concreto a compresión requerida

$$A'_c = \frac{M_n}{0.85 f'_c z}$$

$$A'_c = \frac{3620 \times 12}{0.85 \times 5 \times 37} = 276 \text{ pulg}^2$$



Carga efectiva de transferencia

$$P_e = \frac{606}{0.85} = 713 \text{ kilolibras (3171 kN)}$$

Calculo de "a" y revisión de z

$$a = \frac{276}{70} = 3.94 \text{ pulg.}$$

$$z = 48 - 8 - \frac{3.94}{2} = 38 \text{ pulg.}$$

Porcentaje de acero presforzado

$$\rho_p = \frac{A_p}{bd} \quad \rho_p = \frac{5.20}{70 \times 40} = 0.00186$$

Esfuerzo de presfuerzo

$$\begin{aligned} f_{ps} &= f_{psu} \left(1 - 0.5 \rho_p \frac{f'_c}{f'_t} \right) \\ &= 250 \left(1 - 0.5 \times 0.00186 \times \frac{250}{5} \right) \\ &= 238 \text{ kilolibras/pulg}^2 \end{aligned}$$

Este se encuentra dentro del 6 por ciento del valor $0.90 \times 250 = 225$ kilolibras/pulg² que se supuso en el dimensionamiento del acero y por lo cual no se requiere una revisión.

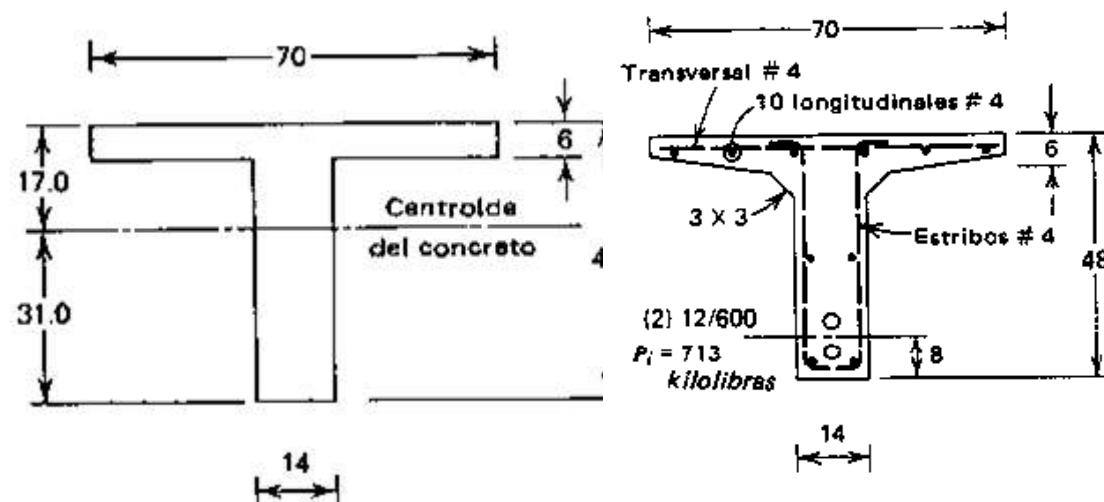
La magnitud del presfuerzo para el área de acero seleccionada se determinará ahora basándose en la especificación que dice que la totalidad de la carga muerta de 1450 Lb/pie deberá balancearse con el levante que producen los tendones parabólicos. Con una flecha $y = 48.0 - 8.0 - 17.0 = 23.0$ pulg., la ecuación (4.25) da

Carga efectiva de presfuerzo (balanceo de carga)

$$w_p = \frac{8P_e}{j^2} \quad P_e = \frac{(w_v + w_s)l^2}{8y} = \frac{1.450 \times 6400 \times 12}{8 \times 23.0} = 606 \text{ kilolibras (2695 kN)}$$

Esfuerzo inicial en los tendones

$$f_{pi} = \frac{713}{5.20} = 137 \text{ kilolibras/pulg}^2$$



De acuerdo con el Código el límite superior permitido es $0.70 \times 250 = 175$ kilolibras/pulg²; el presfuerzo inicial real es el 78 por ciento del valor permitido. El empleo del valor inferior permite la obtención de deflexión nula bajo la totalidad de la carga muerta.

Con la finalidad de controlar el agrietamiento en el miembro antes del postensado, se agregarán varillas longitudinales sin presforzar en una cantidad igual a 0.0020 veces la sección total del concreto (ver artículo 4.14). El área total requerida de

$$A_s = 0.0020(14 \times 48 + 6 \times 56) = 2.02 \text{ pulg}^2 (1303 \text{ mm}^2)$$

está muy cerca de la que proporcionan 10 varillas del número 4. El arreglo del acero se muestra en la figura 4.17c, la cual también muestra la ubicación de los dos tendones formados de 12 alambres. Las varillas no esforzadas también ayudarán a los tendones inyectados con mortero para el control y la distribución de las grietas por flexión.

Esfuerzo de presfuerzo en etapas de carga

$$P_i: f_1 = -\frac{713,000}{1010} \left(1 - \frac{23.0 \times 17.0}{227}\right) = +510 \text{ Lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -\frac{713,000}{1010} \left(1 + \frac{23.0 \times 31.0}{227}\right) = -2920 \text{ Lb/pulg}^2$$

$$P_e: f_1 = 510 \times 0.85 = +430 \text{ Lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -2920 \times 0.85 = -2480 \text{ Lb/pulg}^2$$

$$M_e: f_1 = \frac{840 \times 12,000 \times 17.0}{229,000} = -750 \text{ Lb/pulg}^2$$

$$f_2 = \frac{840 \times 12,000 \times 31.0}{229,000} = +1360 \text{ Lb/pulg}^2$$

$$M_d + M_t: f_1 = \frac{1280 \times 12,000 \times 17.0}{229,000} = -1140 \text{ Lb/pulg}^2$$

$$f_2 = \frac{1280 \times 12,000 \times 31.0}{229,000} = +2080 \text{ Lb/pulg}^2$$

En el estado descargado los esfuerzos en las caras superior e inferior son, respectivamente:

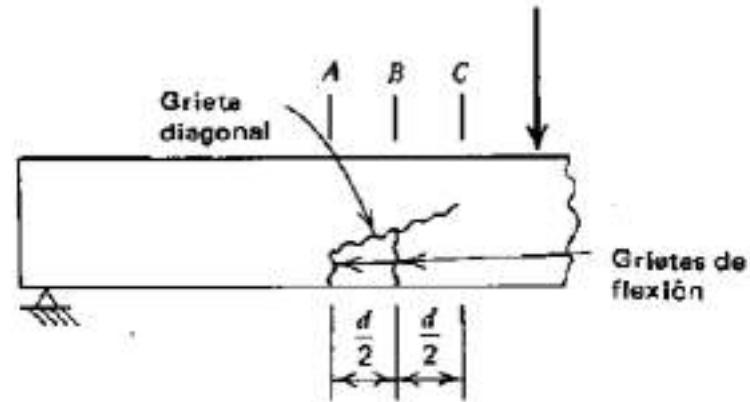
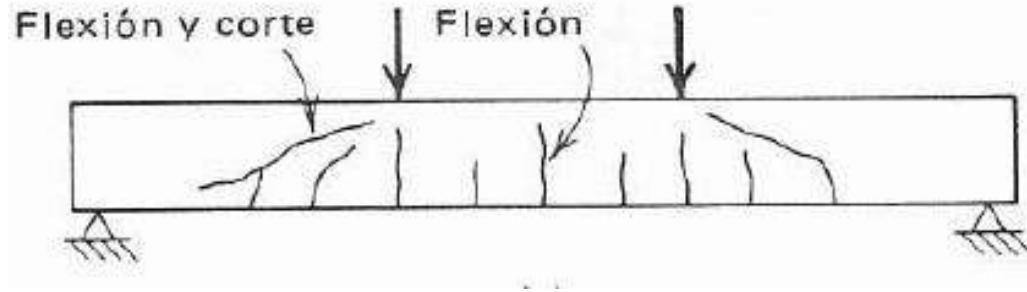
$$P_i + M_e: f_1 = +510 - 750 = -240 \text{ Lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -2920 + 1360 = -1560 \text{ Lb/pulg}^2$$

en tanto que para el estado correspondiente a la totalidad de la carga de servicio

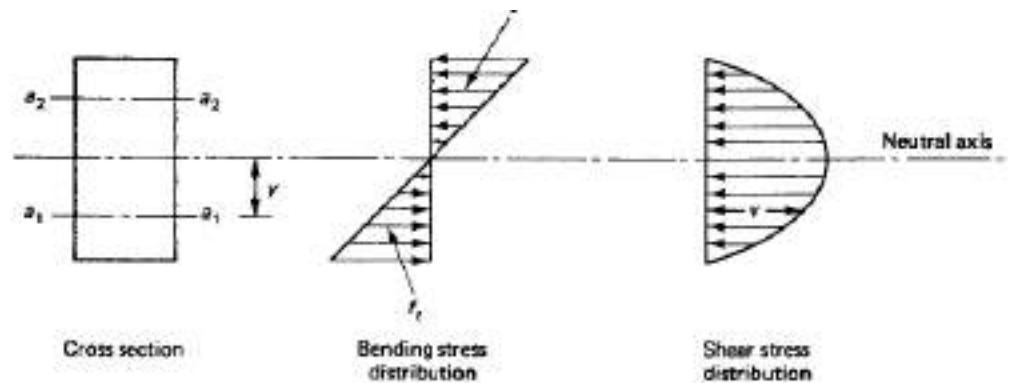
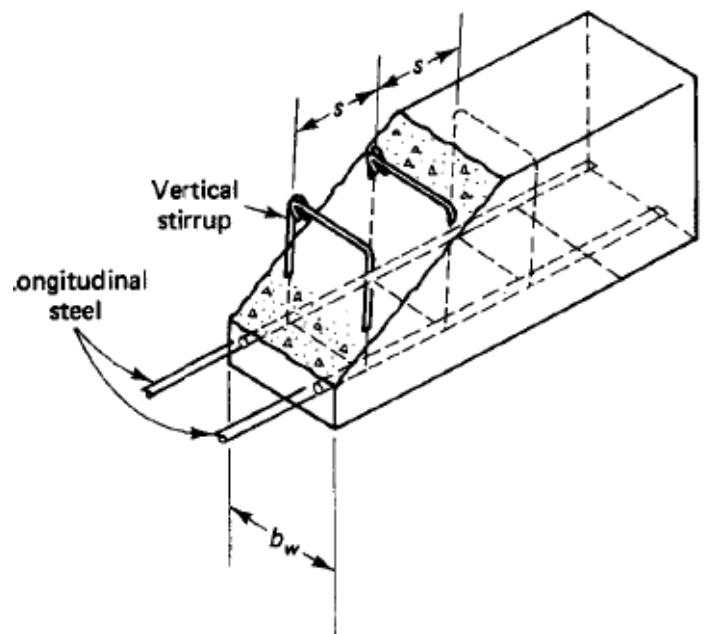
$$P_e + M_d: f_1 = +430 - 750 - 1140 = -1460 \text{ Lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -2480 + 1360 + 2080 = +960 \text{ Lb/pulg}^2$$



Fuerzas Cortantes

Concreto Presforzado



Fórmula

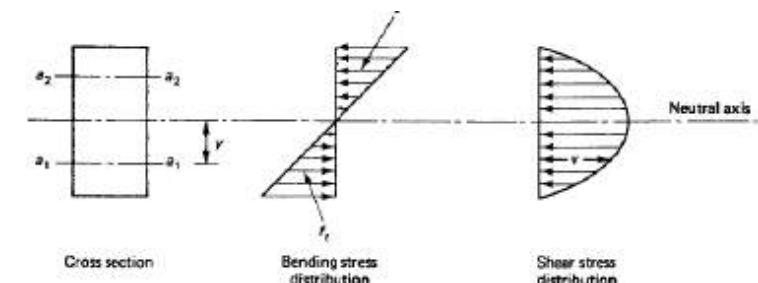
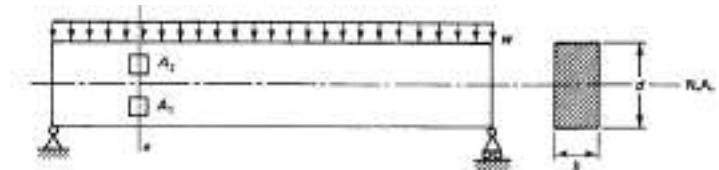
$$v_u = \frac{V_u}{\phi b_w d_p}$$

Definición

Las vigas de concreto presforzado se diseñan de forma similar a las de concreto reforzado

Las sección crítica se encuentra en el alma de la viga

Las secciones situadas a una distancia $< h/2$ a compresión en los apoyos se diseñaran para el cortante que se encuentre a $h/2$ del apoyo



$$f = \frac{My}{I}$$

$$\nu = \frac{VA\bar{y}}{Ib} = \frac{VQ}{Ib}$$

Métodos de Cálculo de Cortante en Vigas Presforzadas

Método
Aproximado

$f_{pe} > 40\% \text{ de } f_{pu}$

Método
Detallado

Se usa para cualquier
caso

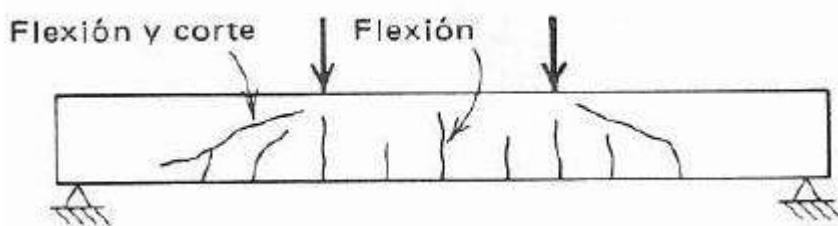
Método Aproximado

$$V_c = \left(0.6\lambda\sqrt{f'_c} + \frac{700V_ud_p}{M_u} \right) b_w d$$

$$2\lambda\sqrt{f'_c}b_w d < V_c < 5\lambda\sqrt{f'_c}b_w d.$$

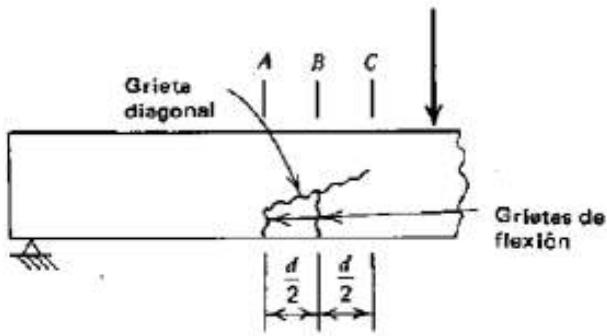
- **V_u= cortante máxima de diseño en punto considerado**
- **M_u = momento donde ocurre V_u**
- **V_ud_p/ M_u < 1.0**

Cortante de Agrietamiento Diagonal



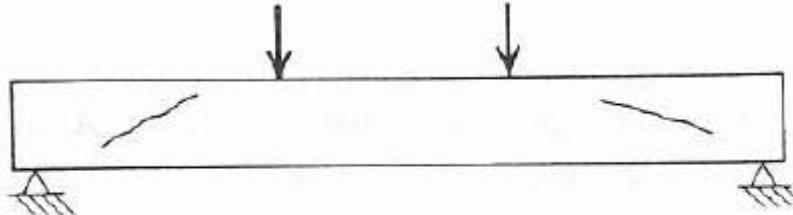
Grietas por flexión- cortante

- Se presentan luego de las grietas a flexión



$$M - M_{cr} = \frac{1}{2}(V + V_{cr}) \frac{d}{2} \quad M - M_{cr} = \frac{Vd}{2} \quad V = \frac{M_{cr}}{M/V - d/2}$$

$$V_{ci} = 0.6b_w d \sqrt{f'_c} + \frac{M_{cr}}{M/V - d/2} + V_o + V_p$$



Grietas por cortante en el alma

- Se inicia en el alma, sin previo agrietamiento a flexión
- La falla es más violenta que las de flexión-cortante
- Cerca de los apoyos en vigas altamente presforzadas y almas relativamente delgadas

Característica de la falla

- a. Separación del patín en tensión del alma, a medida en que la grieta inclinada se extiende horizontalmente hacia los apoyos.
- b. Aplastamiento del alma debido a la elevada compresión que actúa paralelamente a la grieta diagonal, a medida en que la trabe se transforma en un arco atirantado equivalente.
- c. Agrietamiento por tensión inclinada secundario cerca de los apoyos, el cual separa el patín en compresión del alma.

$$\sqrt{v_{cw}^2 + \left(\frac{f_{cc}}{2}\right)^2} - \frac{f_{cc}}{2} = f'_c$$

$$V_{cw} = b_w d (3.5 \sqrt{f'_c} + 0.3 f_{cc}) + V_p$$

Método Detallado

Vc se tomará como el valor menor de Vci y Vcw

Vci = Resistencia nominal del cortante cuando el agrietamiento diagonal es debido al cortante y al momento

Vcw = Resistencia nominal del cortante cuando el agrietamiento diagonal es debido al esfuerzo excesivo a tensión del concreto

Vci

$$V_{ci} = 0.6\lambda\sqrt{f'_c}b_w d_p + V_d + \frac{V_i M_{cr}}{M_{\max}} \quad \text{pero no tiene que tomarse menor que } 1.7\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$$

$$M_{cr} = \left(\frac{I}{y_t}\right) (6\lambda\sqrt{f'_c} + f_{pe} - f_d)$$

- **Vd** = cortante en sección bajo carga muerta de servicio
- **Mmax** = Momento máximo de cargas factorizadas
- **Vi** = cortante en el punto de Mmax
- **fpe** = P/A + Pec/I

I = momento de inercia de la sección que resiste las cargas aplicadas externamente

y_t = distancia del eje centroidal de la sección total (despreciando el refuerzo) a la fibra extrema en tensión

f_{pe} = esfuerzo de compresión en el concreto debido al presfuerzo después de ocurridas las pérdidas, en la fibra extrema de la sección donde las cargas aplicadas causan tensión

f_d = esfuerzo debido a la carga muerta no factorizada, en la fibra extrema donde las cargas aplicadas causan tensión

V_{cw}

$$V_{cw} = (3.5\lambda\sqrt{f'_c} + 0.3f_{pc})b_w d_p + V_p$$

- **V_p = componente vertical del presfuerzo efectivo**
- **f_{pc}= esfuerzo de compresión calculado del concreto en el centroide de la sección después de las pérdidas**

Diseño para refuerzo cortante

Si el valor calculado de V_u excede el valor ϕV_c , el área de los estribos verticales (el código no permite estribos inclinados o varillas dobladas en miembros presforzados) no debe ser menor que A_v determinada con la siguiente expresión del código (11.4.7.2):

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s}$$

Igual que en el diseño convencional de concreto reforzado, se requiere un área mínima de refuerzo por cortante en todos los puntos en que V_u es mayor que $\frac{1}{2}\phi V_c$. Esta área mínima se determina con la expresión que sigue si el presfuerzo efectivo es menor que 40% de la resistencia a tensión del refuerzo por flexión (código ACI, 11.4.6.4):

$$A_{v,\min} = 0.75 \sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}} \text{ pero no debe ser menor que } \frac{50 b_w s}{f_{yt}} \quad (\text{Ecuación 11-13, ACI})$$

donde b_w y s están en pulgadas.

Si el presfuerzo efectivo es igual a, o mayor que 40% de la resistencia a tensión del refuerzo por flexión, la siguiente expresión, en la que A_{ps} es el área del refuerzo presforzado en la zona de tensión, deberá usarse para calcular A_v :

$$A_{v,m} = \left(\frac{A_{ps}}{80} \right) \left(\frac{f_{py}}{f_{yt}} \right) \left(\frac{s}{d} \right) \sqrt{\left(\frac{d}{b_w} \right)} \quad (\text{Ecuación 11-14, ACI})$$

La sección 11.4.5.1 del código ACI, establece que en ningún caso la separación máxima podrá

$$V_n = \frac{A_v f_y d}{s} + V_t$$

$$\begin{aligned} V_u &= \phi V_n \\ &= \phi(V_s + V_c) \end{aligned}$$

$$A_v = \frac{(V_u - \phi V_c)s}{\phi f_y d}$$

$$s = \frac{\phi A_v f_y d}{V_u - \phi V_c}$$

En ningún caso la separación máxima podrá exceder 0.75h o 24 pulg.

EJEMPLO 19.5

Calcular la resistencia por cortante de la sección mostrada en la figura 19.13 a 4 pies de los apoyos, usando tanto el método aproximado como el método más detallado permitido por el código ACI. Suponga que el área del acero de presfuerzo es de 1.0 plg², que la fuerza efectiva de presfuerzo es de 250 klb, y que $f'_c = 4\,000 \text{ lb/plg}^2$.

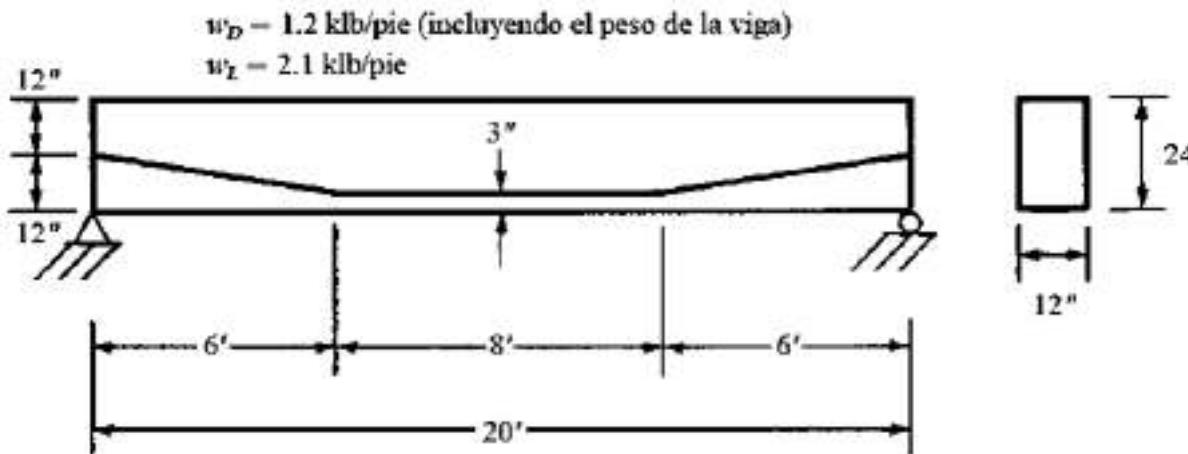


Figura 19.13

Método Aproximado

$$w_u = (1.2)(1.2) + (1.6)(2.1) = 4.8 \text{ klb/pie}$$

$$V_u = (10)(4.8) - (4)(4.8) = 28.8 \text{ klb}$$

$$M_u = (10)(4.8)(4) - (4)(4.8)(2) = 153.6 \text{ pie-klb}$$

$$\frac{V_u d}{M_u} = \frac{(28.8)(24 - 3 - 3)}{(12)(153.6)} = 0.281 < 1.0$$

$$V_c = \left(0.6\lambda\sqrt{f'_c} \right) 700 \frac{V_u d_p}{M_u} b_w d$$

$$= [(0.6)(1.0)(\sqrt{4\,000}) + (700)(0.281)](12)(18) = 50\,684 \text{ lb}$$

$$V_c \text{ mínimo} = (2)(1.0)(\sqrt{4\,000})(12)(18) = 27\,322 \text{ lb} < 50\,684 \text{ lb}$$

$$V_c \text{ máximo} = (5)(1.0)(\sqrt{4\,000})(12)(18) = 68\,305 \text{ lb} > 50\,684 \text{ lb}$$

$$V_c = 50\,684 \text{ lb}$$

Método más Detallado

Cálculo de V_{ci}

$$I = \left(\frac{1}{12}\right)(12)(24)^3 = 13\,824 \text{ plg}^4$$

$$y_t = 12''$$

f_{pe} = esfuerzo de compresión en el concreto debido al presfuerzo después de todas las pérdidas

$$= \frac{P}{A} + \frac{P_{ec}}{I}$$

$$f_{pe} = \frac{250\,000}{(12)(24)} + \frac{(250\,000)(6)(12)}{13\,824} = 2\,170 \text{ lb/plg}^2$$

$$M_d = \text{momento por carga muerta en el punto a } 4' = (10)(1.2)(4) - (4)(1.2)(2) \\ = 38.4 \text{ pie-klb}$$

$$f_d = \text{esfuerzo debido al momento por carga muerta} = \frac{(12)(38\,400)(12)}{13\,824} \\ = 400 \text{ lb/plg}^2$$

$$M_{cr} = \text{momento de agrietamiento} = \left(\frac{I}{y_t}\right)(6\lambda\sqrt{f'_c} + f_{pe} - f_d)$$

$$= \left(\frac{13\,824}{12}\right)(6)(1.0)(\sqrt{4\,000} + 2\,170 - 400) = 2\,476\,193 \text{ plg-lb}$$

$$= 206\,349 \text{ pie-lb}$$

$$w_D = 1.2 \text{ klb/pie} \text{ (incluyendo el peso de la viga)}$$

$$w_L = 2.1 \text{ klb/pie}$$

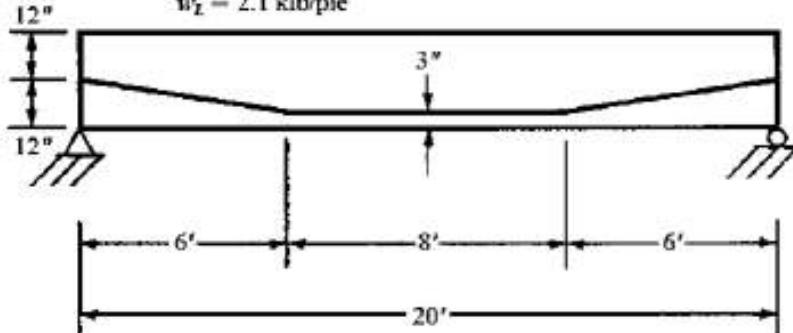


Figura 19.13

$$\text{Peso de la viga} = \frac{(12)(24)}{144}(150) = 300 \text{ lb/pie}$$

$$w_u \text{ sin contar el peso de la viga} = (1.2)(1.2 - 0.3) + (1.6)(2.1) = 4.44 \text{ klb/pie}$$

$$M_{\max} = (10)(4.44)(4) - (4)(4.44)(2) = 142.08 \text{ pie-klb} = 142\ 080 \text{ pie-lb}$$

$$V_i \text{ debida a } w_u \text{ simultánea con } M_{\max} = (10)(4.44) - (4)(4.44)$$

$$= 26.64 \text{ klb} = 26\ 640 \text{ lb}$$

$$V_d = \text{fuerza cortante por carga muerta} = (10)(1.2) - (4)(1.2) = 7.2 \text{ klb} = 7\ 200 \text{ lb}$$

$$d = 24 - 3 - 3 = 18'' \text{ o } (0.8)(24) = \underline{\underline{19.2''}}$$

$$V_{ci} = 0.6\lambda\sqrt{f'_c}b_w d_p + V_d + \frac{V_i M_{cr}}{M_{\max}}$$

$$= (0.6)(1.0)(\sqrt{4\ 000})(12)(19.2) + 7\ 200 + \frac{(26\ 640)(206\ 349)}{142\ 080} = 54\ 634 \text{ lb}$$

$$\text{pero no necesita ser menor que } (1.7)(1.0)(\sqrt{4\ 000})(12)(19.2) = 24\ 772 \text{ lb}$$

Cálculo de V_{cw}

$$f_{pc} = \text{esfuerzo de compresión calculado en lb/plg}^2 \text{ en el centroide del concreto debido al presfuerzo efectivo}$$

$$= \frac{250\ 000}{(12)(24)} = 868 \text{ lb/plg}^2$$

$$V_p = \text{componente vertical del presfuerzo efectivo en la sección} = \frac{9}{\sqrt{9^2 + 72^2}}(250\ 000)$$

$$= \left(\frac{9}{72.56}\right)(250\ 000) = 31\ 009 \text{ lb}$$

$$V_{cw} = (3.5\lambda\sqrt{f'_c} + 0.3f_{pc})b_w d + V_p$$

$$= (3.5)(1.0)(\sqrt{4\ 000} + 0.3 \times 868)(12)(19.2) + 31\ 009 = 142\ 006 \text{ lb}$$

Uso del menor valor de V_{ci} o V_{cw}

$$V_c = 54\ 634 \text{ lb}$$

Determinar la separación requerida entre estribos #3 para la viga del ejemplo 19.5 a 4 pies del apoyo extremo si f_{pu} es 250 klb/plg² para el acero de presfuerzo y f_y para los estribos es 40 klb/plg². Usar el valor de V_c obtenido por el método aproximado. 54 634 lb.

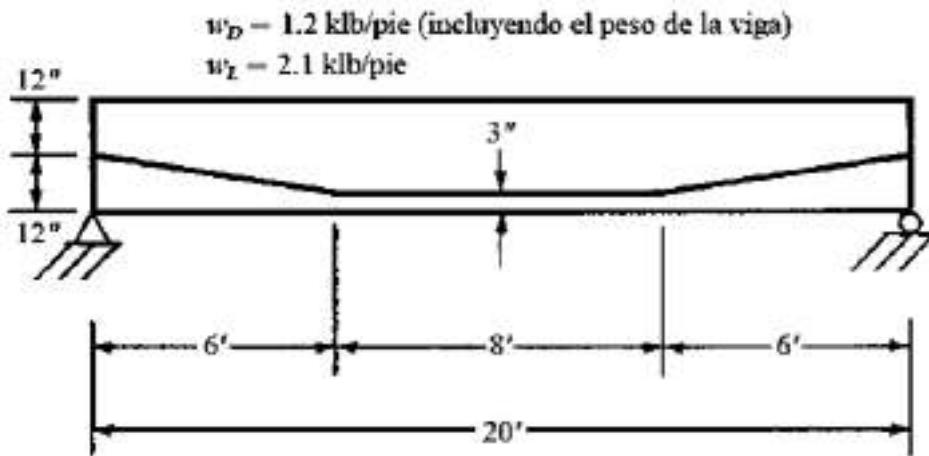


Figura 19.13

$$w_u = (1.2)(1.2) + (1.6)(2.1) = 4.8 \text{ klb/pie}$$

$$V_u = (10)(4.8) - (4)(4.8) = 28.8 \text{ klb}$$

$$\phi V_c = (0.75)(54\,634) = 40\,976 \text{ lb}$$

$$> V_u = 28\,800 \text{ lb}$$

$$V_u > \frac{\phi V_c}{2} = 20\,488 \text{ lb} < \phi V_c$$

Se requiere una cantidad mínima de refuerzo.

Como el presfuerzo efectivo es mayor que 40% de la resistencia a tensión del refuerzo.

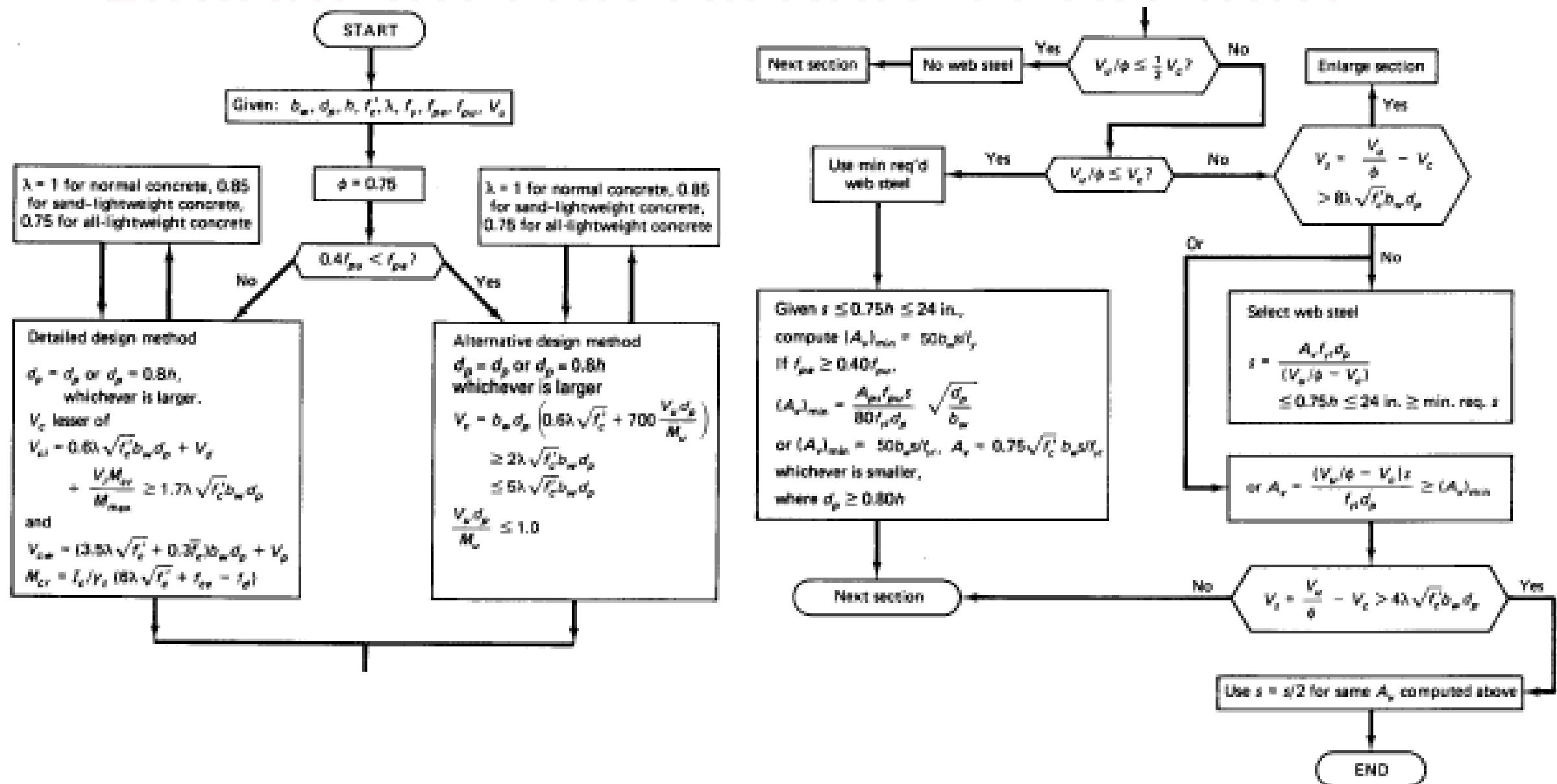
$$A_v = \left(\frac{A_{ps}}{80} \right) \left(\frac{f_{pu}}{f_{yt}} \right) \left(\frac{s}{d} \right) \sqrt{\left(\frac{d}{b_w} \right)}$$

$$(2)(0.11) = \left(\frac{1.0}{80} \right) \left(\frac{250\,000}{40\,000} \right) \left(\frac{s}{18} \right) \sqrt{\frac{18}{12}}$$

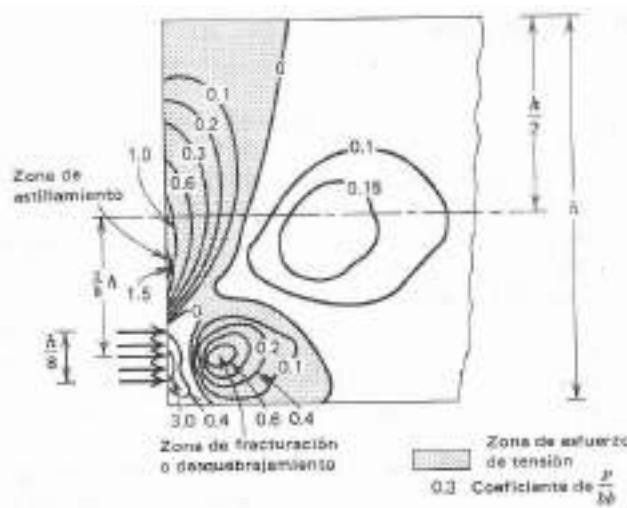
$$s = 41.38'' \text{, pero } s \text{ máxima} = \left(\frac{3}{4} \right)(24) = 18''$$

Usar 18"

Flujograma de Diseño a Cortante



Diseño de Zona de Anclaje



Para elementos pretensados

$$A_t = 0.021 \frac{P_i h}{f_s l_t}$$

“El refuerzo requerido deberá colocarse a $h/5$ desde la cara extrema de la viga”

donde A_t = área total necesaria de la sección transversal de estribos. pulg²

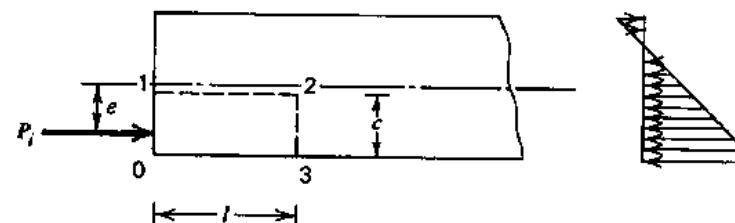
P_i = fuerza inicial de preesfuerzo. lb

h = altura total del elemento. pulg

f_s = esfuerzo admisible en los estribos. lb/pulg²

l_t = longitud de transferencia. pulg

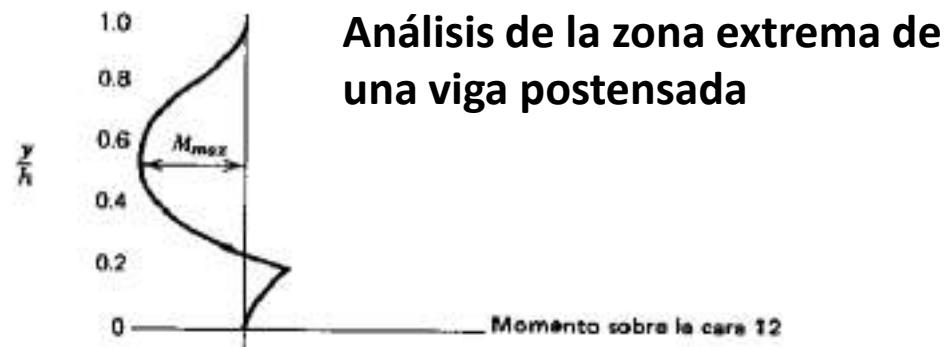
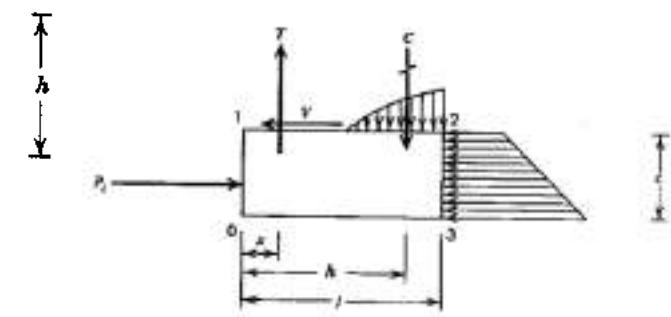
Longitud de transferencia = 50 veces diámetro nominal del cable



Para elementos postensados

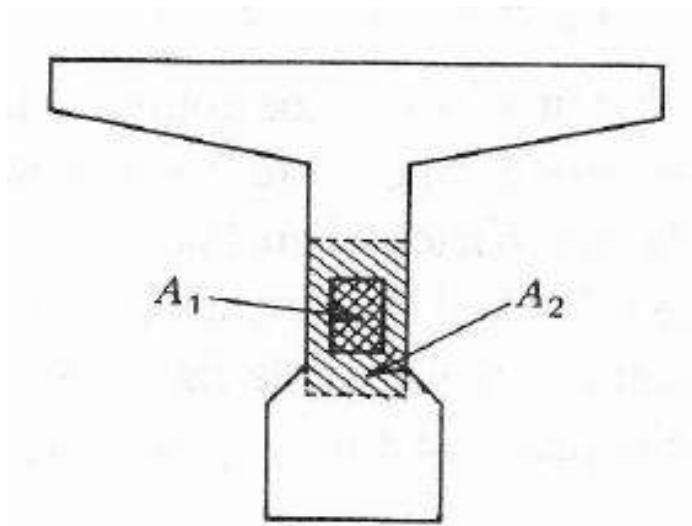
$$A_t = \frac{M_{\max}}{f_s(h - x)}$$

“El refuerzo requerido deberá colocarse a $h/2$ desde la cara extrema de la viga”



Análisis de la zona extrema de una viga postensada

Dimensionamiento de Platos de Anclaje



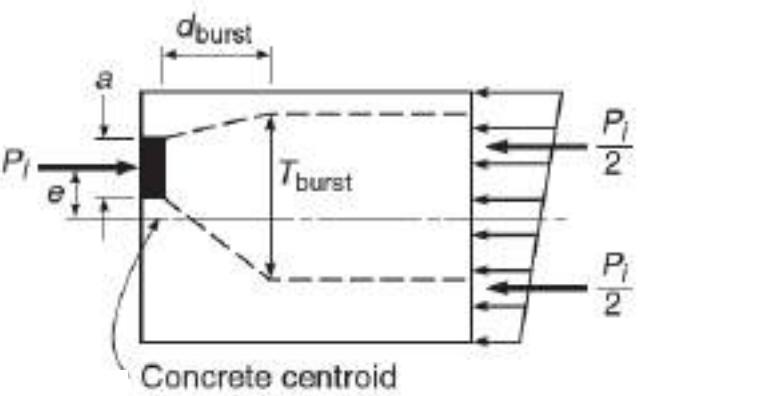
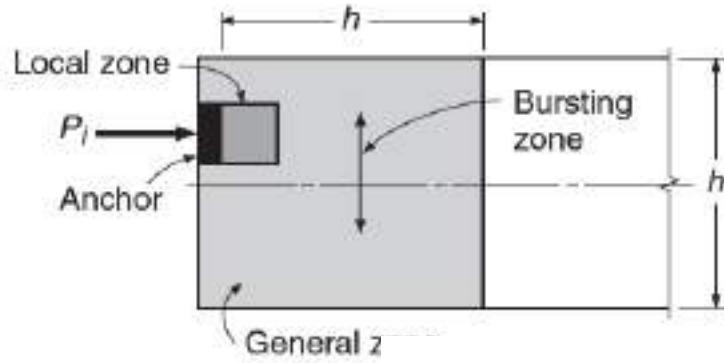
Pi no debe exceder

$$f_b = 0.8f'_{ci} \sqrt{\frac{A_2}{A_1} - 0.2} \quad y \leq 1.25 f'_{ci}$$

Pe no debe exceder

$$f_b = 0.6f'_{ci} \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \quad y \leq f'_{ci}$$

Modelo Puntal- Tensor para zona de anclaje



Zonas de falla

- Local
- General

$$T_{\text{burst}} = 0.25 \sum P_{pu} \left(1 - \frac{h_{\text{anc}}}{h} \right)$$

$$d_{\text{burst}} = 0.5(h - 2e_{\text{anc}})$$

where $\sum P_{pu}$ = sum of total factored post-tensioning force

e_{anc} = absolute value of eccentricity of anchorage device to centroid of concrete section

h = depth of cross section

h_{anc} = depth of anchorage device

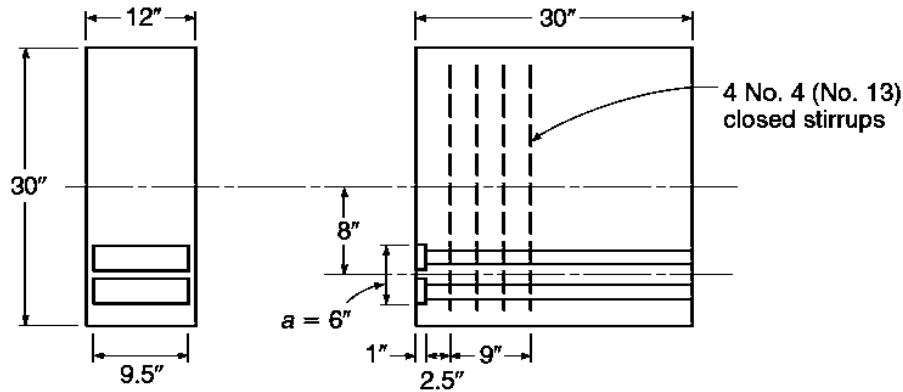
Fuerza de postensado requerida

$$P_{pu} = 1.2(0.80f_{pu})A_{ps} = 0.96f_{pu}A_{ps}$$

Área de refuerzo vertical requerido

$$A_s = T_{\text{burst}} / \phi f_y$$

La zona de refuerzo de anclaje debe ser diseñada para la viga rectangular postensada que se muestra en la figura. El presfuerzo inicial P_i de 250 kips es aplicada a dos tendones con excentricidad de 8 pulgadas. $f'ci = 4250\text{psi}$ y $fy = 6000\text{psi}$.



$$d_{burst} = 0.5(h - 2e_{anc}) = 0.5(30 - 2 \times 8) = 7 \text{ in.}$$

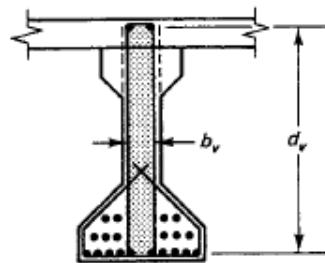
$$P_{pu} = 1.2 \left(\frac{0.94}{0.82} \right) 250 = 344 \text{ kips}$$

$$T_{burst} = 0.25 \sum P_{pu} \left(1 - \frac{h_{anc}}{h} \right) = 0.25 \times 344 \left(1 - \frac{6}{30} \right) = 68.8 \text{ kips}$$

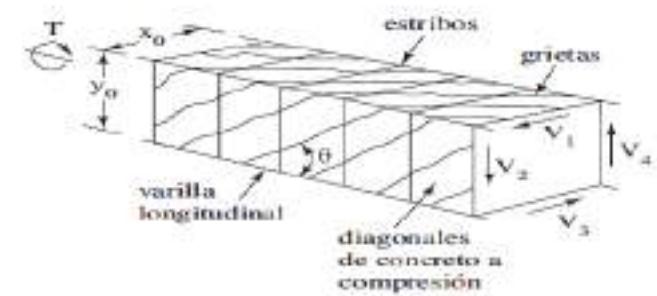
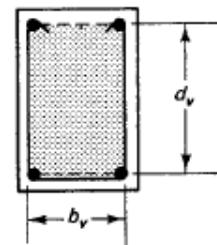
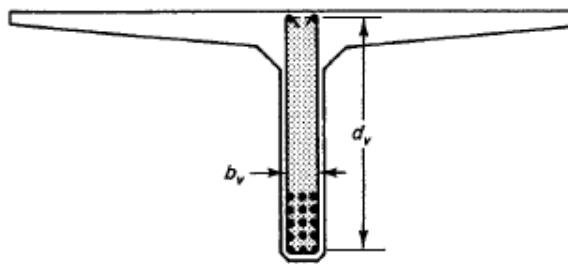
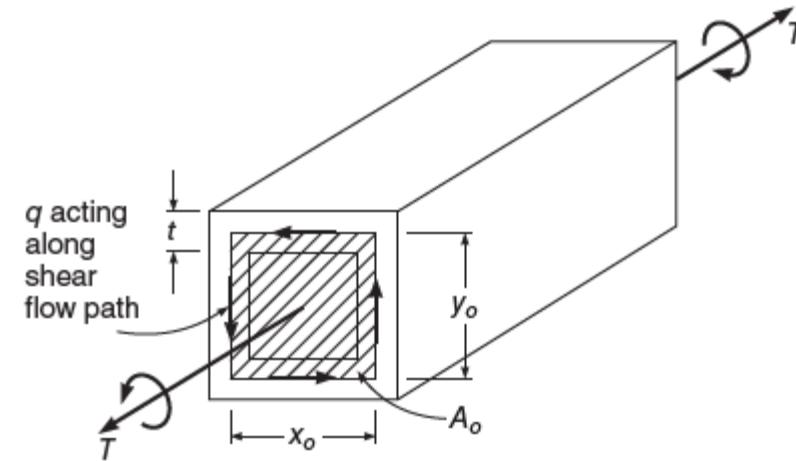
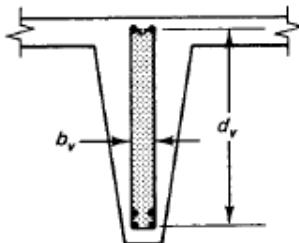
$$A_s = \frac{T_{burst}}{\phi f_y} = \frac{68.8}{0.85 \times 60} = 1.35 \text{ in}^2$$

$$n = \frac{1.35}{2 \times 0.20} = 3.4 \text{ stirrups}$$

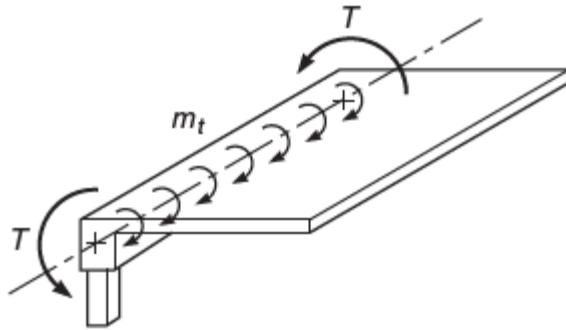
Torsión en Elementos Presforzados



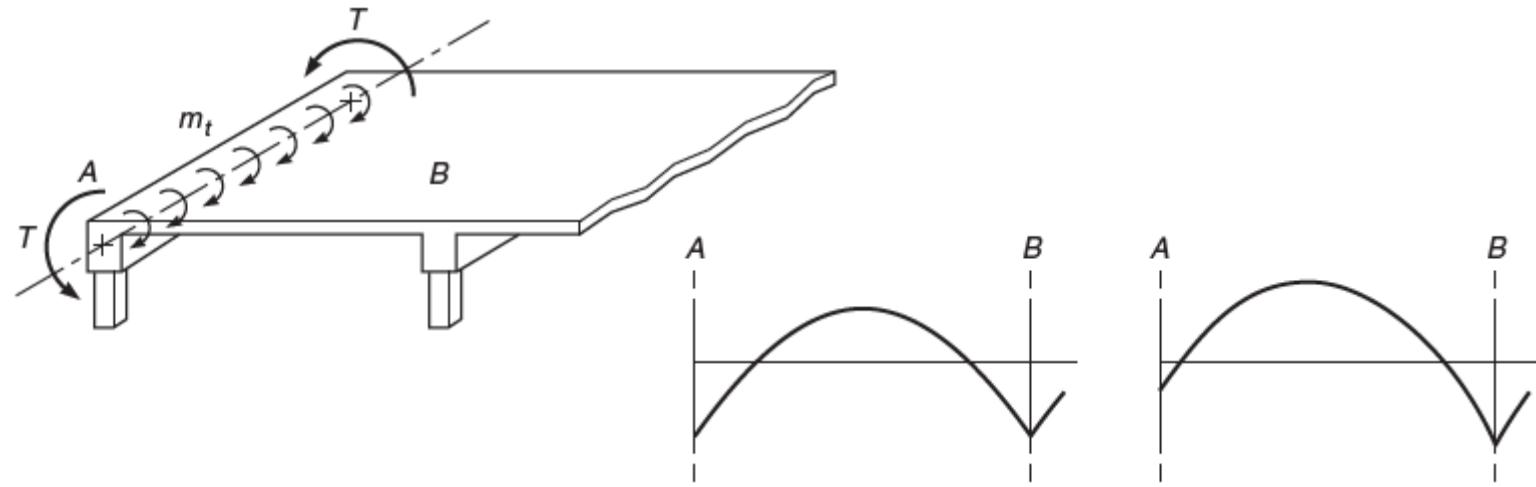
Flanges prevent cover from spalling



Torsión por equilibrio



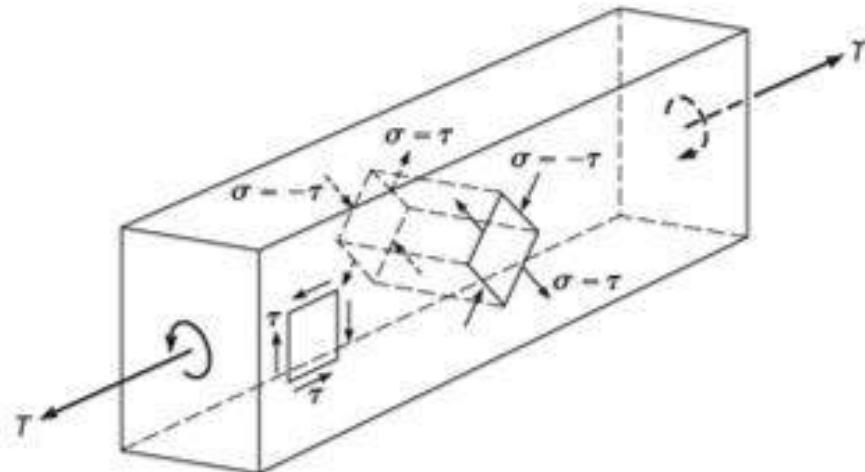
En una estructura estáticamente determinada, en donde hay una sola trayectoria que los esfuerzos lleguen a los soportes



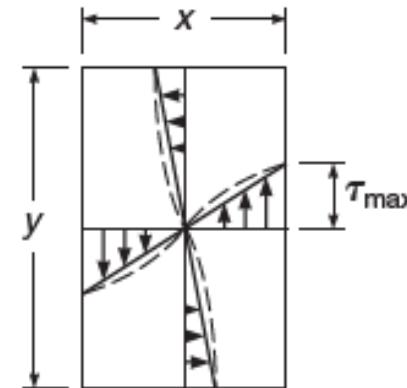
En una estructura estáticamente indeterminada, los momentos de torsión se pueden reducir, si esa parte de la viga se agrieta y gira. En esta etapa se logra una distribución de los esfuerzos y se mantienen las deformaciones compatibles de la estructura.

Esfuerzos a Torsión en miembros de concreto

"Los esfuerzos de torsión son pequeños cerca de su centroide"



Torsión de agrietamiento



Torsión de agrietamiento en elementos con carga axial

$$T_{cr} = \phi 4\lambda \sqrt{f'_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \right)$$

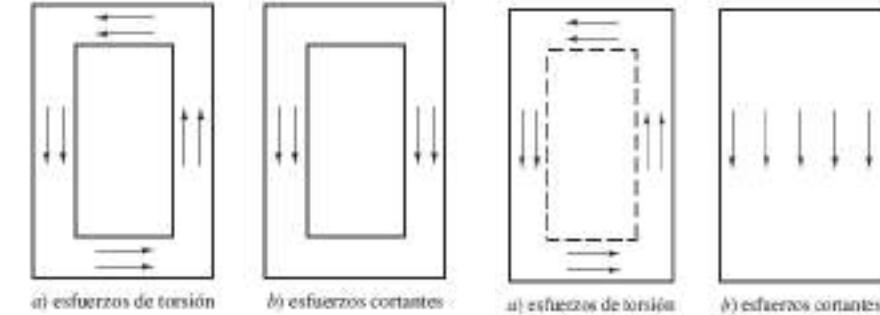
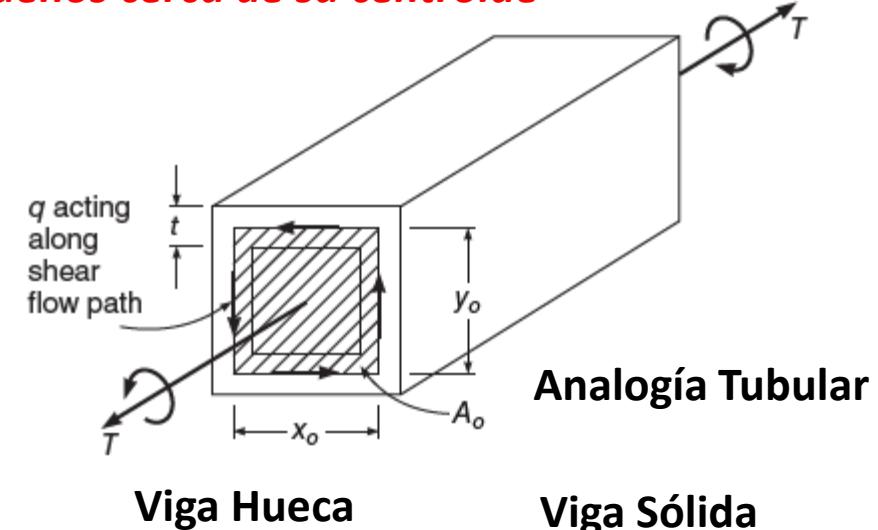
$$T_{cr} = \phi 4\lambda \sqrt{f'_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \right) \lambda \sqrt{1 + \frac{N_u}{4\sqrt{f'_c}}}$$

P_{cp} = perímetro exterior de la sección transversal

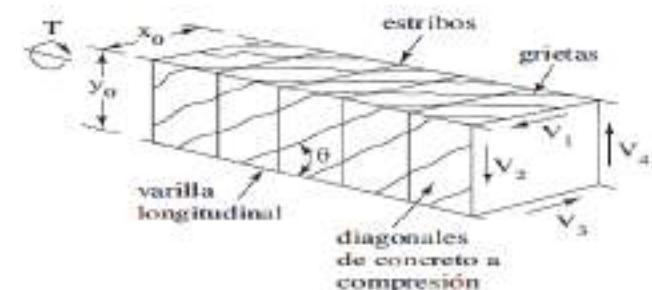
A_{cp} = área encerrada por el perímetro exterior

"No se requiere refuerzo a torsión"

$$T_u < \phi \lambda \sqrt{f'_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \right) = \frac{1}{4} T_{cr}$$



Armadura imaginaria



Resistencia al momento por torsión

"No se requiere refuerzo a torsión"

Verificación de sección para resistencia A torsión $T_u < \phi \lambda \sqrt{f'_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \right) = \frac{1}{4} T_{cr}$

Secciones Sólidas

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 8\sqrt{f'_c} \right)$$

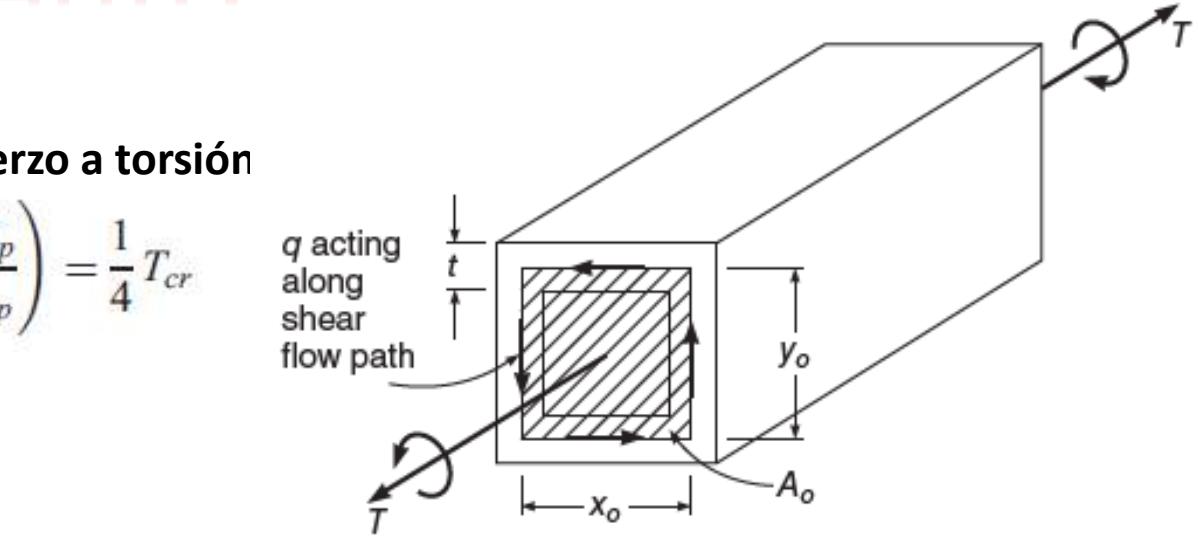
Secciones Huecas

$$\left(\frac{V_u}{b_w d}\right) + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2}\right) \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 8\sqrt{f'_c} \right)$$

P_h = es el perímetro encerrado de refuerzo

A_{oh} = es el área encerrada de refuerzo

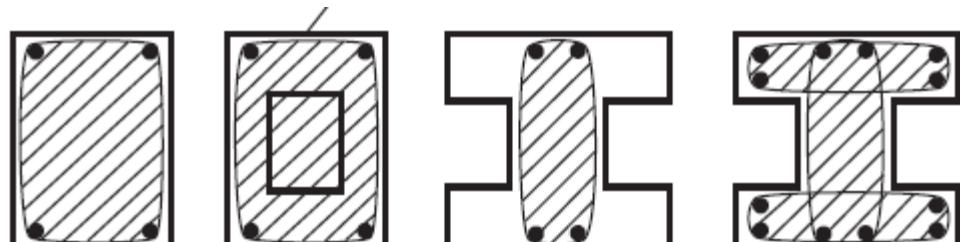
La distancia de la línea central del refuerzo a la cara Interior de la pared en sección hueca $> 0.5 A_{oh}/P_h$



$$V_c = 2\lambda \sqrt{f'_c} b_w d$$

Si el espesor de una sección hueca es menor que A_{oh}/p_h ,
 $T_u p_h / 1.7 A_{oh}^2$ se reemplaza por $T_u / 1.7 A_{oh}$.

en la ecuación para sección hueca



A_{oh} = área sombreada

5.17.5 Design of Prestressed Concrete Beams Subjected to Combined Torsion, Shear, and Bending in Accordance with the ACI 318-08 Code

Adjusting in the equilibrium truss model of Section 5.17.4, the following are the ACI 318 Code provisions for designing the longitudinal and transverse reinforcement in prestressed elements.

5.17.5.1 Compatibility torsion. In statically indeterminate systems, stiffness assumptions, compatibility of strains at the joints and redistribution of stresses may affect the stress resultants, leading to a reduction of the resulting torsional shearing stresses. A reduction is permitted in the value of the factored moment used in the design of the member if part of this moment can be redistributed to the intersecting members. The ACI Code permits a maximum factored torsional moment at the critical section $h/2$ from the face of the supports for prestressed concrete members as follows:

where A_{cp} = area enclosed by outside perimeter of concrete cross section $= x_0 y_0$
 p_{cp} = outside perimeter of concrete cross section A_{cp} , in. $= 2(x_0 + y_0)$

$$T_u = \phi 4\sqrt{f'_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right) \sqrt{1 + \frac{\bar{f}_c}{4\sqrt{f'_c}}} \quad (5.79)$$

where \bar{f}_c = average compressive stress in the concrete at the centroidal axis due to effective prestress only after allowing for all losses. \bar{f}_c is denoted in the ACI Code as f_{pc} .

Neglect of the full effect of the total value of external torsional moment in this case does not, in effect, lead to failure of the structure but may result in excessive cracking if $\phi 4\sqrt{f'_c}(A_{cp}^2/p_{cp})$ is considerably smaller in value than the actual factored torque.

If the actual factored torque is less than that given in Equation 5.79, the beam has to be designed for the lesser torsional value. Torsional moments are neglected however if for prestressed concrete

$$T_u < \phi \sqrt{f'_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right) \sqrt{1 + \frac{\bar{f}_c}{4\sqrt{f'_c}}} \quad (5.80)$$

5.17.5.2 Torsional moment strength. The size of the cross section is chosen on the basis of reducing unsightly cracking and preventing the crushing of the surface concrete caused by the inclined compressive stresses due to shear and torsion defined by the left hand side of the expressions in Equation 5.81. The geometrical dimensions for torsional moment strength in both reinforced and prestressed members are limited by the following expressions.

(a) Solid Sections

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d} \right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2} \right)} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 8\sqrt{f'_c} \right) \quad (5.81)$$

(b) Hollow Sections

$$\left(\frac{V_u}{b_w d} \right) + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2} \right) \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 8\sqrt{f'_c} \right) \quad (5.82)$$

where A_{oh} = area enclosed by the centerline of the outermost closed transverse torsional reinforcement, sq. in.

p_h = perimeter of centerline of outermost closed transverse torsional reinforcement, in.

The area A_{oh} for different sections are given in Figure 5.45. Figures 5.46 and 5.47 give guidance to the determination of the area A_{oh} and the shear flow area $A_0 \cong 0.85 A_{oh}$ in Equation 5.84(a).

The sum of the stresses at the left hand side of Equation 5.82 should not exceed the stresses causing shear cracking plus $8\sqrt{f'_c}$. This is similar to the limiting strength $V_s \leq 8\sqrt{f'_c}$ for shear without torsion.

5.17.5.3 Hollow sections wall thickness. The shear stresses due to shear and to torsion both develop in the walls of the hollow section as seen in Figure 5.48a. Note that in a solid section the shear stresses due to torsion still concentrate in the outer zones of the section as in Figure 5.48b and as discussed in Section 5.17.3.1.

If the wall thickness in the hollow section varies around its perimeter, the section geometry has to be evaluated at such a location where the left-hand side of Equation 5.82 has a maximum value. Also, if the wall thickness $t < A_{0h}/p_h$ the left-hand side of Equation 5.82 should be taken as

$$\left(\frac{V_u}{b_w d}\right) + \left(\frac{T_u}{1.7 A_{oh} t}\right)$$

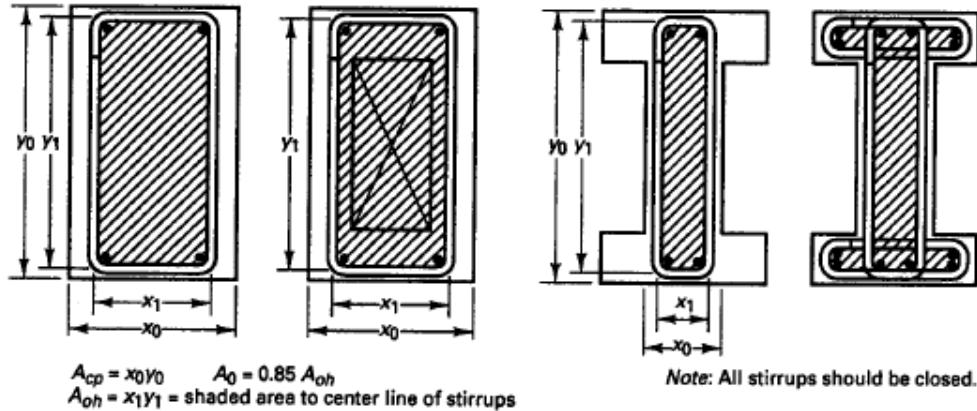


Figure 5.45 Torsional geometric parameters.

The wall thickness t is the thickness where stresses are being checked.

$$\begin{aligned} V_c &= \left(0.6\lambda\sqrt{f'_c} + 700 \frac{V_u d_p}{M_u}\right) b_w d_p; \quad \frac{V_u d_p}{M_u} \leq 1.0 \\ &\geq 1.7\lambda\sqrt{f'_c} b_w d_p \\ &\leq 5.0\lambda\sqrt{f'_c} b_w d_p \end{aligned} \tag{5.83}$$

where $f_{pe} > 0.4f_{pu}$.

5.17.5.4 Torsional web reinforcement. As indicated in Section 5.17.3, meaningful additional torsional strength due to the addition of torsional reinforcement can be achieved only by using both stirrups and longitudinal bars. Ideally, *equal* volumes of steel in both the closed stirrups and the longitudinal bars should be used so that both participate equally in resisting the twisting moments. This principle is the basis of the ACI expressions for proportioning the torsional web steel. If s is the spacing of the stirrups, A_s is the total cross-sectional area of the longitudinal bars, and A_t is the cross section of one stirrup leg, the transverse reinforcement for torsion has to be based on the full external torsional moment strength value T_n , namely, (T_n/ϕ) where

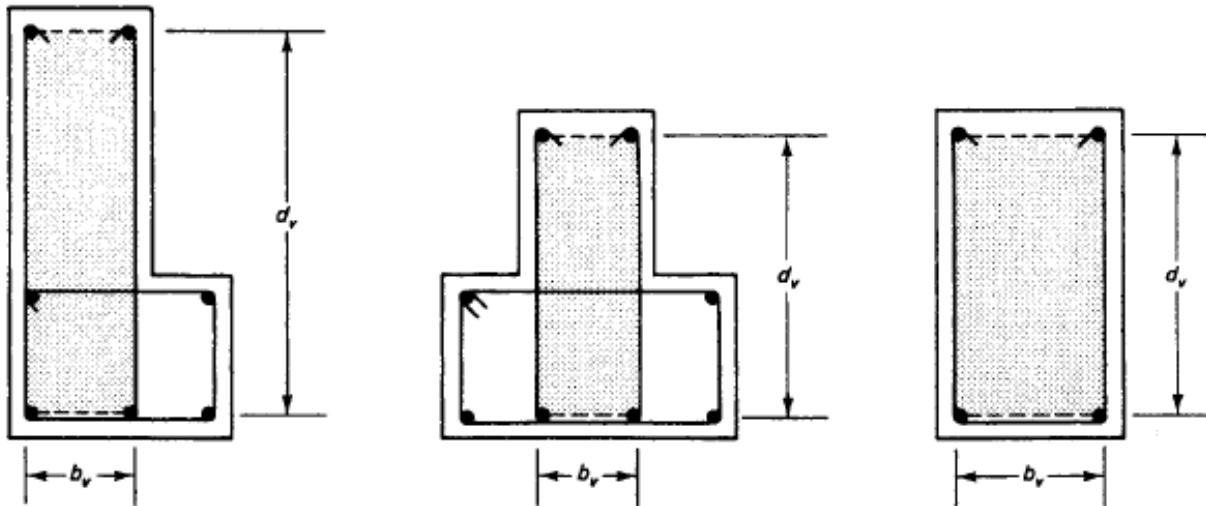


Figure 5.46 Shear-flow geometry and effective shear area.

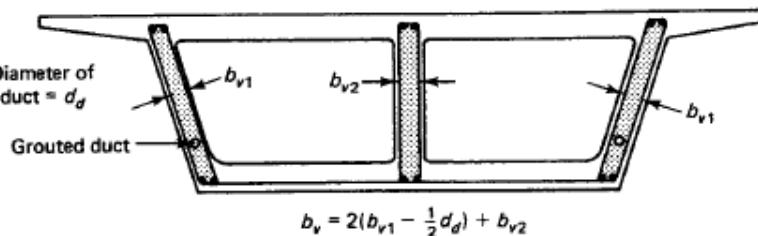
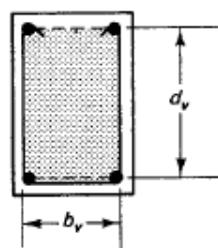
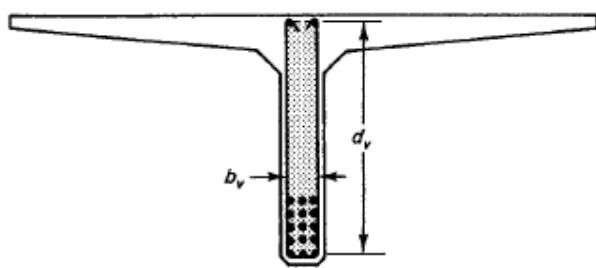
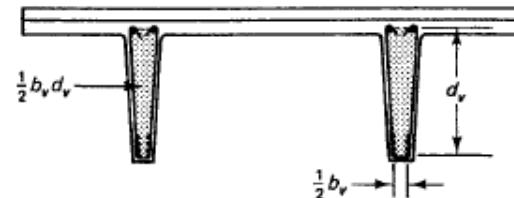
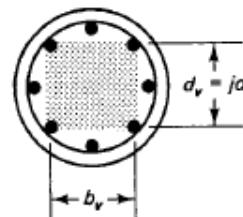
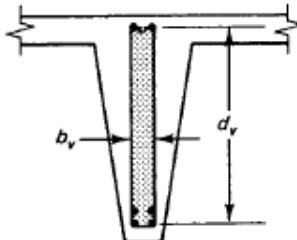
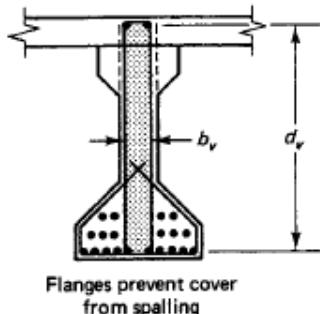


Figure 5.47 Effective shear width and depth of typical prestressed concrete sections.

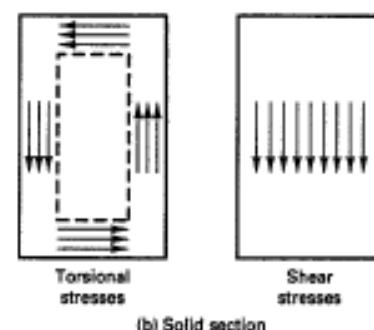
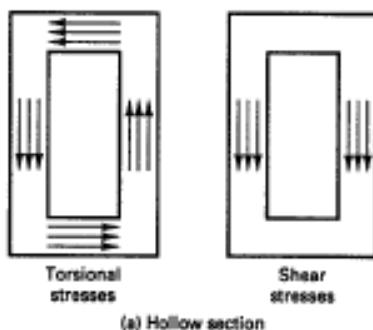


Figure 5.48 Superposition of torsional and shear stresses. (a) Directly additive occurring in the left wall of the box (Equation 7.30b). (b) Torsion acts on "tubular" outer-wall section while shear stress acts on the full width of solid section: stresses combined using square root of sum of squares (Equation 7.30b).

$$T_s = \frac{2A_0 A_t f_{yt}}{s} \cot \theta \quad (5.84a)$$

(See the derivation of Equation 5.72)

A_0 = gross area enclosed by the shear flow path, sq. in.

A_t = cross-sectional area of one leg of the transverse closed stirrups, sq. in.

f_{yt} = yield strength of closed transverse torsional reinforcement not to exceed 60,000 psi.

θ = angle of the compression diagonals (struts) in the space truss analogy for torsion (See Figure 5.39).

Transposing terms in Equation 5.84b, the transverse reinforcement area becomes

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_s}{2A_0 f_{yt} \cot \theta} \quad (5.84b)$$

The area A_0 has to be determined by analysis (Ref. 7.14 and 7.15) except that the ACI 318 Code permits taking $A_0 = 0.85A_{sh}$ in lieu of the analysis.

As discussed in Section 5.17.3, the factored torsional resistance ϕT_u must equal or exceed the factored external torsional moment T_u . All the torsional moment is assumed in the ACI 318 code to be resisted by the closed stirrups and the longitudinal steel with the torsional resistance, T_c , of the concrete disregarded, namely $T_c = 0$. The shear V_c resisted by the concrete is assumed to be unchanged by the presence of torsion (see Section 5.17.3.2).

The angle θ subtended by the concrete compression diagonals (struts) should not be taken smaller than 30° nor larger than 60° . It can be obtained by analysis as detailed in Ref. 5.17 and 5.18 by Hsu. The additional longitudinal reinforcement for torsion should not be less than

$$A_t = \frac{A_t}{s} p_h \left(\frac{f_y}{f_y} \right) \cot^2 \theta \quad (5.85)$$

where f_y = yield strength of the longitudinal torsional reinforcement, not to exceed 60,000 psi.

The same angle θ should be used in both Equations 5.84 and 5.85. It should be noted that as θ gets smaller, the amount of stirrups required by Equation 5.84 decreases. At the same time the amount of longitudinal steel required by Equation 5.85 increases.

In lieu of determining the angle θ by analysis, the ACI Code allows a value of θ equal to

- (i) 45° for non-prestressed members or members with less prestress than in (ii),
- (ii) 37.5° for prestressed members with an effective prestressing force larger than 40 percent of the tensile strength of the longitudinal reinforcement.

The PCI (Ref. 5.12) recommends computing the value of θ from the expression:

$$\cot \theta = \frac{T_u / \phi}{1.7 A_{sh} (A_t/s) f_y} \quad (5.86)$$

5.17.5.5 Minimum torsional reinforcement. It is necessary to provide a minimum area of torsional reinforcement in all regions where the factored torsional moment T_u exceeds the value given by Equation 5.80. In such a case, the minimum area of the required transverse closed stirrups is

$$A_t + 2A_s \geq \frac{50b_w s}{f_y} \quad (5.87)$$

The maximum spacing should not exceed the smaller of $p_u/8$ or 12 in.

The minimum total area of the additional longitudinal torsional reinforcement should be determined by

$$A_{t,min} = \frac{5\sqrt{f_c} A_{ct}}{f_y} - \left(\frac{A_t}{s} \right) p_h \frac{f_y}{f_y} \quad (5.88)$$

where A_t/s should not be taken less than $25b_w/f_y$. The additional longitudinal reinforcement required for torsion should be distributed around the perimeter of the closed stirrups with a maximum spacing of 12 in. The longitudinal bars or tendons should be placed inside the closed stirrups and at least one longitudinal bar or tendon in each corner of the stirrup. The bar diameter should be at least $\frac{1}{8}$ of the stirrup spacing but not less than a No. 3 bar. Also, the torsional reinforcement should extend for a minimum distance of $(b_w + d)$ beyond the point theoretically required for torsion because torsional diagonal cracks develop in a helical form extending beyond the cracks caused by shear and flexure. b_w is the width of that part of cross section containing the stirrups resisting torsion. The critical section in beams is at a distance d from the face of the support for reinforced concrete elements and at $h/2$ for prestressed concrete elements, d being the effective depth and h the total depth of the section.

Procedimiento de Diseño para Cortante y Torsión Combinado

- Classify whether the applied torsion is equilibrium or compatibility torsion. Determine the critical section and compute the factored torsional moment T_u . The critical section is taken at $h/2$ from the face of the support in prestressed concrete beams. If T_u is less than $\phi \sqrt{f'_c} (A_{cp}^2/p_{cp}) \sqrt{1 + f_c/4\sqrt{f'_c}}$ for prestressed members, torsional effects are neglected. f'_c is the compressive stress in the concrete after pre-stress losses at the centroid of the section resisting externally applied loads (termed as f_{pe} in the ACI Code).
- Check whether the factored torsional moment T_u causes equilibrium or compatibility torsion. For compatibility torsion, limit the design torsional moment to the lesser of the actual moment T_u or $T_u = \phi 4\sqrt{f'_c} (A_{cp}^2/p_{cp}) \sqrt{1 + f_c/4\sqrt{f'_c}}$ for prestressed concrete members. The value of the design nominal strength T_u has to be at least equivalent to the factored T_u/ϕ , proportioning the section such that

(a) for solid sections:

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{sh}^2}\right)^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 8\sqrt{f'_c} \right)$$

(b) for hollow sections:

$$\left(\frac{V_u}{b_w d}\right) + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{sh}^2}\right) \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 8\sqrt{f'_c} \right)$$

If the wall thickness is less than A_{sh}/p_h , the second term should be taken as $T_u/1.7 A_{sh} t$.

$$\begin{aligned} V_c &= \left(0.6\lambda\sqrt{f'_c} + 700 \frac{V_u d_p}{M_u} \right) b_w d_p; \quad \frac{V_u d_p}{M_u} \leq 1.0 \\ &\geq 2.0\lambda\sqrt{f'_c} b_w d_p \\ &\leq 5.0\lambda\sqrt{f'_c} b_w d_p \quad \text{and} \quad f_{pe} \geq 0.4f_{pu} \end{aligned}$$

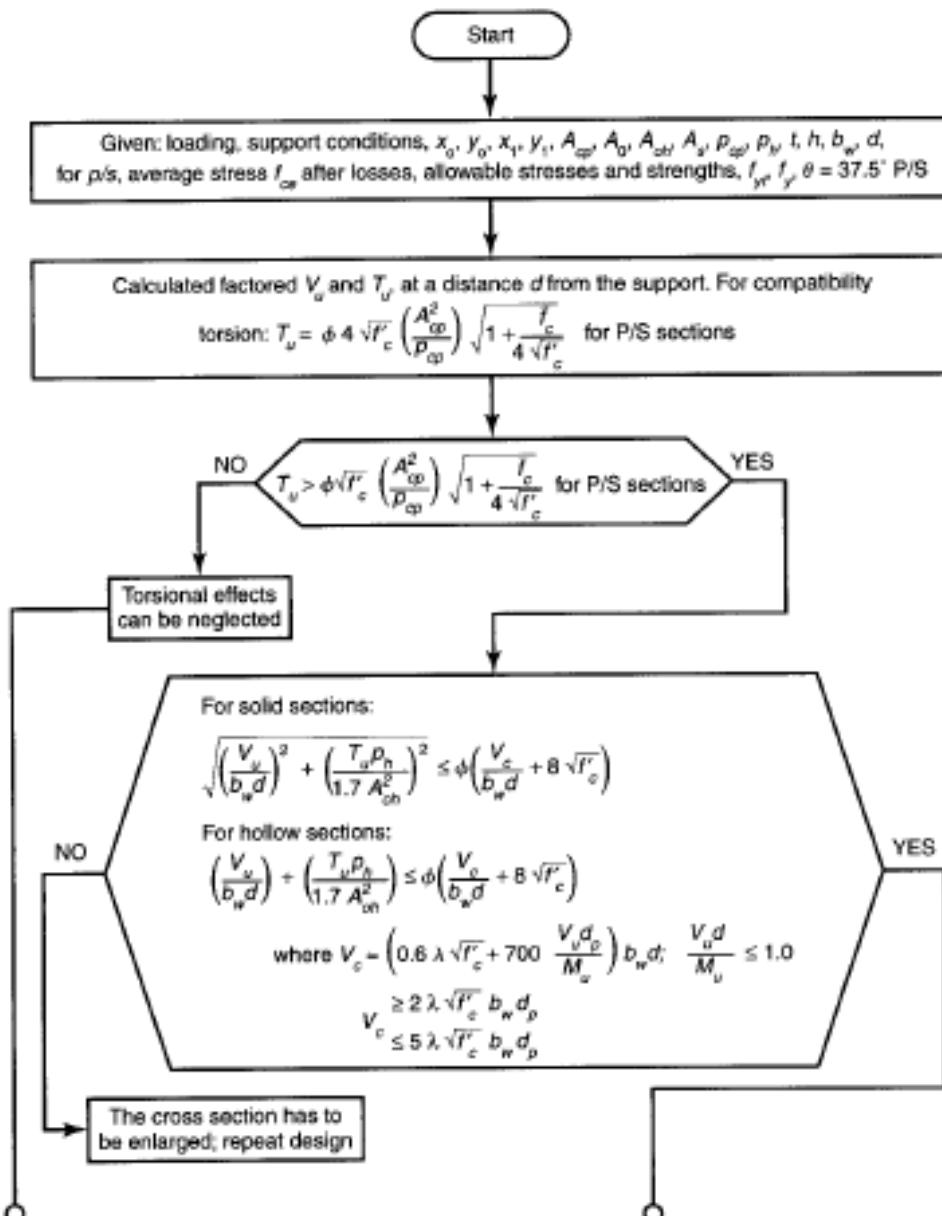


Figure 5.49 Flowchart for the design reinforcement for combined shear and torsion: (a) torsional web steel, (b) shear web steel.

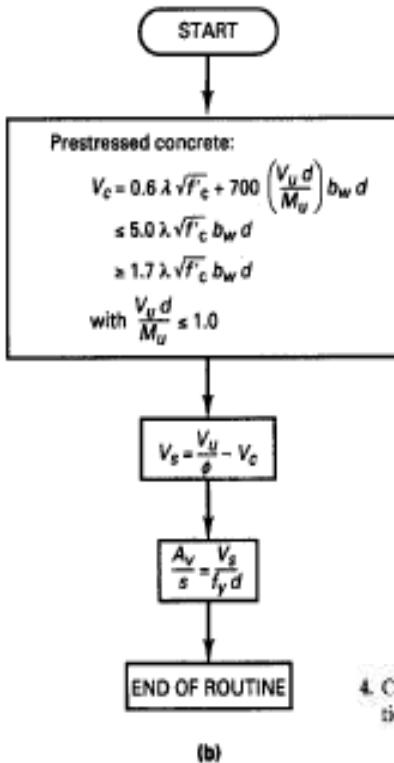
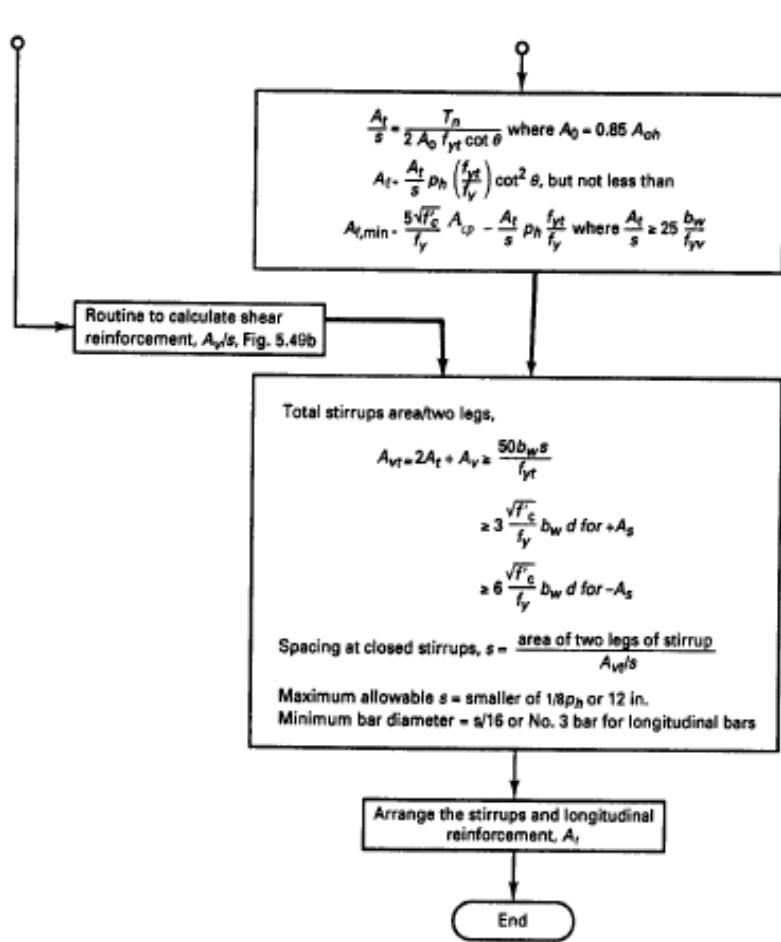


Figure 5.49 Continued

3. Select the required *torsional* closed stirrups to be used as transverse reinforcement, using a maximum yield strength of 60,000 psi, such that

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_n}{2A_0 f_{yt} \cot \theta}$$

Unless using A_0 and θ values obtained from analysis (Ref. 5.18) or from Equation 5.86, use $A_0 = 0.85 A_{oh}$ and $\theta = 45^\circ$ for non-prestressed members and 37.5° for prestressed members with an effective prestress not less than the tensile strength of the longitudinal reinforcement. The additional longitudinal reinforcement should be

$$A_t = \left(\frac{A_t}{s}\right) p_h \left(\frac{f_y}{f_y}\right) \cot^2 \theta$$

but not less than

$$A_{t,min} = \frac{5\sqrt{f'_c} A_{cp}}{f_y} - \left(\frac{A_t}{s}\right) p_h \frac{f_{yt}}{f_y}$$

where A_t/s shall not be less than $25b_w/f_{yt}$.

Maximum allowable spacing of transverse stirrups in the smaller of $\frac{1}{8}p_h$ or 12 in., and bars should have a diameter of at least $\frac{1}{16}s$ of the stirrup spacing but not less than a No. 3 bar size.

4. Calculate the required shear reinforcement A_t per unit spacing in a transverse section. V_t is the factored external shear force at the critical section, V_c is the nominal

shear resistance of the concrete in the web, and V_g is the shearing force to be resisted by the stirrups:

$$\frac{A_t}{s} = \frac{V_g}{f_y d}$$

where $V_g = V_t - V_c$ and

$$V_c = \left(0.6k \sqrt{f'_c} + \frac{700V_u d}{M_u}\right) b_w d$$

$$V_c \geq 2.0k \sqrt{f'_c} b_w d \leq 5.0k \sqrt{f'_c} b_w d; \quad \frac{V_u d}{M_u} = 1.0$$

- = 1.0 for normal-weight concrete
- = 0.85 for sand lightweight concrete
- = 0.75 for all lightweight concrete

The value of V_g has to be at least equal to the factored V_g/k .

5. Obtain the total A_{vt} , the area of closed stirrups for torsion and shear, and design the stirrups such that

$$\frac{A_{vt}}{s} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_s}{s}$$

$$\geq \text{the lesser of } \frac{50b_w}{f_{yt}} \text{ and } A_{vt} = 0.75 \sqrt{f'_c} \frac{b_w d}{f_{yt}} \text{ or } \frac{A_{vt} f_{yt}}{80f_{yt} d_y \sqrt{b_w}}$$

Extend the stirrups a distance $(b_w + d_y)$ beyond the point theoretically no longer required, where b_w = width of the cross-section containing the closed stirrup resisting torsion.

DESIGN OF WEB REINFORCEMENT FOR COMBINED TORSION AND SHEAR IN PRESTRESSED BEAMS

Example 5.9

A parking garage floor for medium-size cars has the prestressed concrete flooring system shown in Figure 5.50. The floor panels are 36 ft × 54 ft (11m × 16.5 m) on centers, and 54 ft (16.5m) span precast double-T's are supported by typical precast prestressed concrete spandrel L-beams spanning 36 ft (11m) on centers (Figures 5.50(a) and (b)). The spandrel beams are torsionally restrained by their connections to the supporting columns. The floor is subjected to a service superimposed dead load due to the double-T's of $W_{SD} = 77 \text{ psf}$ (3,687 Pa) and a service live load of $W_L = 60 \text{ psf}$ (2873 Pa). The depth of the L-beam is chosen as 6'-3" so as to provide a parapet wall for the roof on top of the double-Tee beams.

Design the spandrel beam web reinforcement to resist the combined torsion and shear to which it is subjected. Given data are the following:

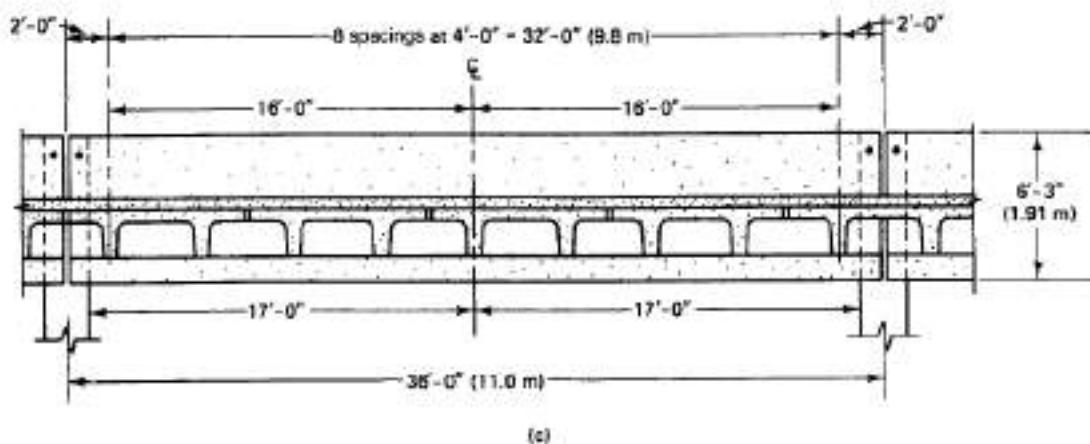
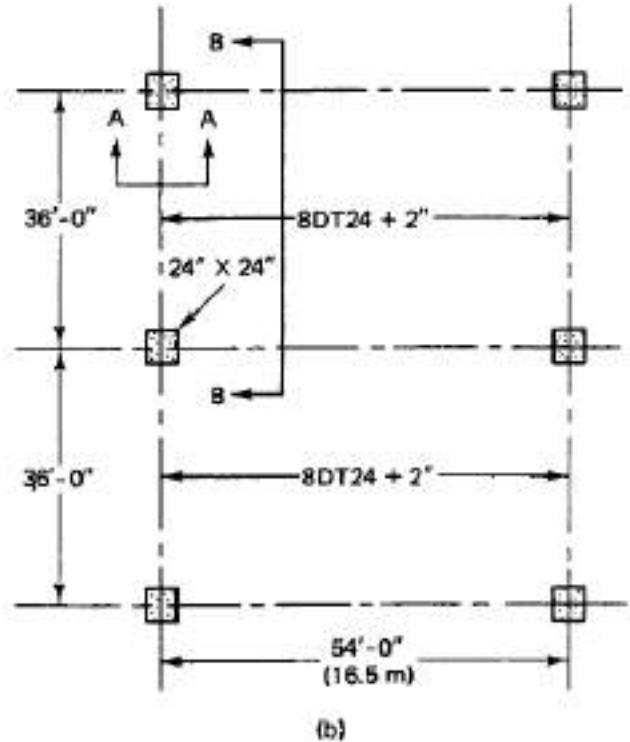
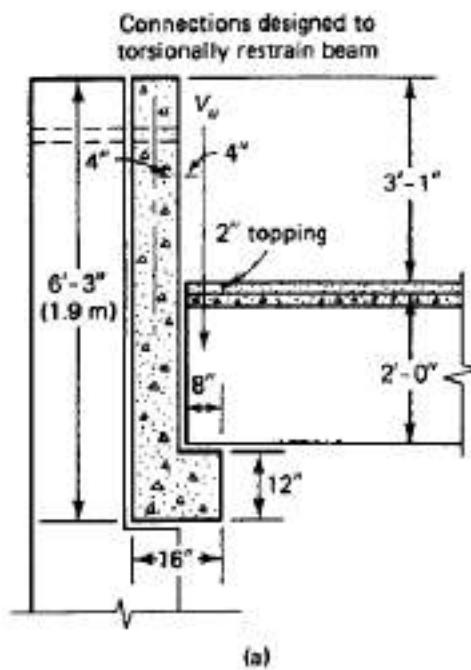


Figure 5.50 Geometrical details of structure in Example 5.9. (a) Section A-A. (b) Partial plan. (c) Section B-B.

Beam Properties

$$A_c = 696 \text{ in.}^2 (4,491 \text{ cm}^2)$$

$$I_c = 364,520 \text{ in.}^4 (93.3 \times 10^6 \text{ cm}^4)$$

$$c_b = 33.2 \text{ in. (84.3 cm)}$$

$$c_t = 41.8 \text{ in. (106 cm)}$$

$$S' = 8,720 \text{ in.}^3 (142,895 \text{ cm}^3)$$

$$S_b = 10,990 \text{ in.}^3 (180,094 \text{ cm}^3)$$

$$W_D = 725 \text{ plf (10.6 kN.m)}$$

$$f'_c = 5,000 \text{ psi (34.5 MPa), normal-weight concrete}$$

$$f_y = f_{yt} = 60,000 \text{ psi (418 MPa) for stirrups}$$

Prestressing

$$A_{ps} = \text{six } \frac{1}{2} \text{ in. dia, 270 K stress-relieved strands}$$

$$f_{psu} = 270,000 \text{ psi (1,862 MPa)}$$

$$f_{ps} = 255,000 \text{ psi (1,758 MPa)}$$

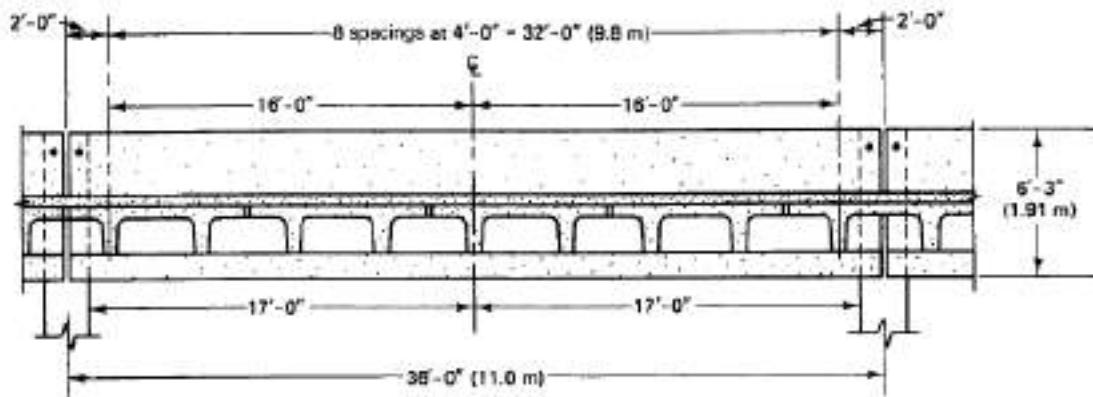
$$f_{psc} = 155,000 \text{ psi (1,069 MPa)}$$

$$E_{ps} = 28 \times 10^6 \text{ psi (193} \times 10^3 \text{ MPa)}$$

$$d_p = 71.5 \text{ in. (190 cm)}$$

$$e = 71.5 - 41.8 = 29.7 \text{ in. (75 cm), straight tendon}$$

Disregard the effects of winds or earthquake.



(b) Factored loads

$$W_{Du} = 1.2 \times 725 = 870 \text{ plf (12.7 kN/m)}$$

$$W_{SDu} = 1.2 \times 8,316 = 9979 \text{ lb/stem (44.4 kN/m)}$$

$$W_{Lu} = 1.6 \times 6480 = 10,368 \text{ lb/stem (46.1 kN)}$$

$$\text{Total } P_u \text{ per stem} = 9979 + 10,368 = 20,347 \text{ lb (90.5 kN)}$$

$$T_u \text{ at face of support} = \frac{1}{2} P_u \times \text{arm} \times \text{no. of stems}$$

$$= \frac{20,347}{2} \times \frac{8}{12} \times 9 = 61,041 \text{ ft-lb (82.8 kN-m)}$$

$$T_{SL} \text{ at face of support} = \frac{14,796}{20,347} \times 61,041 = 44,388 \text{ ft-lb (60.2 kN-m)}$$

$$V_u \text{ at face of support} = \frac{1}{2} (P_u \times \text{no. of stems} + \text{factored } W_D \times \text{span}) \\ = \frac{1}{2} (20,347 \times 9 + 870 \times 34) = 106,352 \text{ lb (474 kN)}$$

$$V_{SL} \text{ at face of support} = \frac{1}{2} (14,796 \times 9 + 725 \times 34) = 78,907 \text{ lb (351 kN)}$$

$$M_u \text{ at face of support} = 0$$

Solution:

1. Calculate T_u , V_u , M_u , T_{SL} , V_{SL} acting on L-beam (step 1)

(a) Service load

$$W_D = 725 \text{ plf (10.6 kN/m)}$$

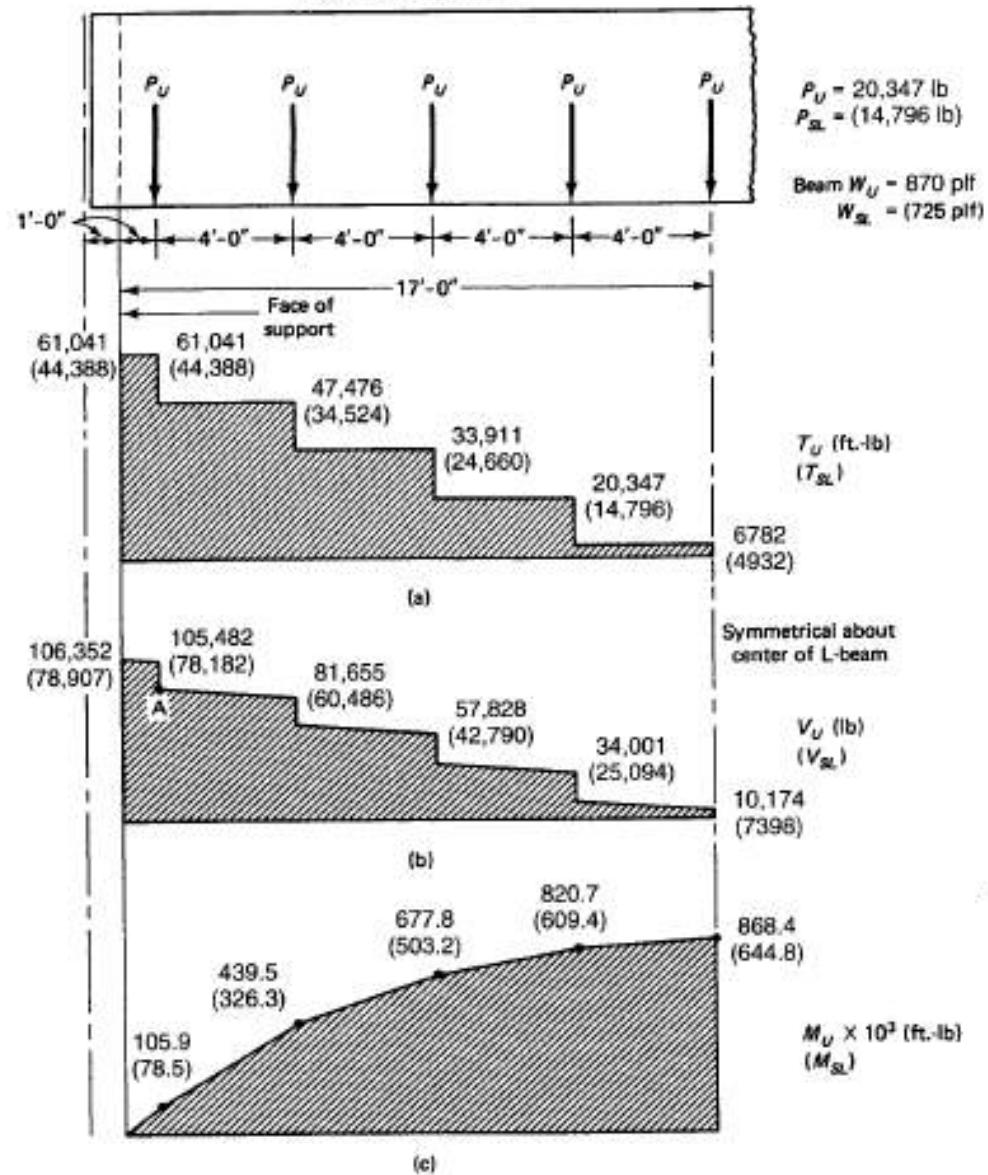
$$W_{SD} = \frac{77 \times 54}{2} \times 4 \text{ ft} = 8316 \text{ lb/stem (37)}$$

$$W_L = \frac{60 \times 54}{2} \times 4 \text{ ft} = 6480 \text{ lb/stem (28)}$$

$$\text{Total } P_{SL} \text{ per stem} = 8,316 + 6480 = 14,796 \text{ lb (65.7 kN)}$$

Similarly, calculate the values of T_u , V_u , and M_u , and the corresponding service-load values at each transverse stem contact point along the span of the L-beam, and construct the torsion, shear, and moment diagrams as shown in Figure 5.51.

10,000 lb = 44.5 kN
10,000 ft. lb = 13.6 MPa



$$A_{ps} = 6 \times 0.153 = 0.918 \text{ in.}^2$$

$$P_e = A_{ps} f_{pe} = 0.918 \times 155,000 = 142,290 \text{ lb (633 kN)}$$

2. L-Beam torsional geometrical details (Step 1)

$$A_{cp} = \text{area enclosed by outside perimeter of concrete cross section} = 8 \times 75 = 600 \text{ in.}^2$$

$$(3871 \text{ cm}^2)$$

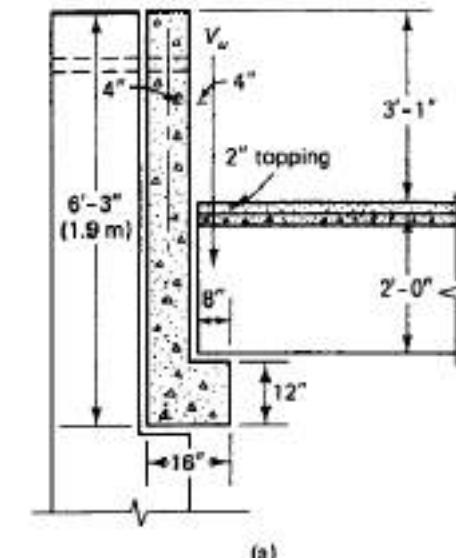
$$p_{cp} = \text{outside perimeter of concrete cross section} = 2(8 + 75) = 166 \text{ in. (422 cm)}$$

$$x_1 = \text{smaller dimension to center of tie}$$

$$= 8 - 2(1.5 + 0.25) = 4.5 \text{ in. (11.4 cm)}$$

$$y_1 = 75 - 2(1.5 + 0.25) = 71.5 \text{ in. (181.6 cm)}$$

Connections designed to torsionally restrain beam



$$h = \text{total depth} = 75 \text{ in. (191 cm)}$$

$$b_w = \text{web width} = 8 \text{ in. (20.3 cm)}$$

$$p_h = \text{perimeter of center line of outermost closed transverse torsional reinforcement}$$

$$= 2(x_1 + y_1) = 2(4.5 + 71.5) = 152 \text{ in.}$$

$$d_p = \text{effective depth} = 75 - (1.5 + 0.5 + 0.5 + 1.0) = 71.5 \text{ in. (182 cm)}$$

$$A_{th} = \text{area enclosed by centerline of the outermost closed transverse torsional ties}$$

$$= (x_1)(y_1) = 4.5 \times 71.5 = 322 \text{ in.}^2 (2077 \text{ cm}^2)$$

$$A_0 = \text{gross area enclosed by shear flow path}$$

$$= 0.85 A_{th} = 0.85 \times 322 = 274 \text{ in.}^2 (1766 \text{ cm}^2)$$

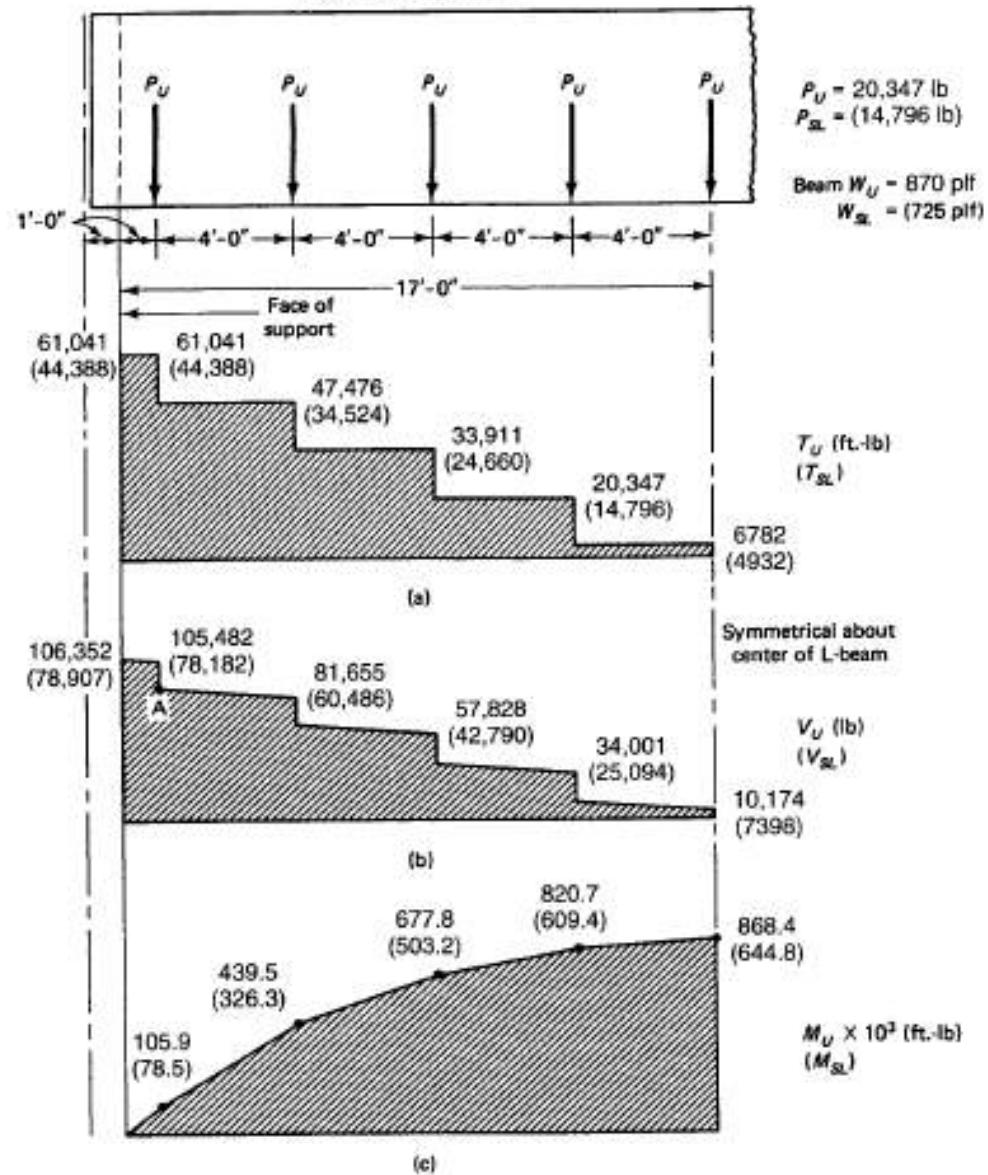
$$\theta = \text{angle of compression diagonals in truss analogy for torsion} \approx 37.5^\circ \text{ for pre-stressed beams.}$$

$$\cot \theta = 1.3$$

Figure 5.51 Force and moment diagrams for beams in Example 5.9. (a) Torsional moment. (b) Shear. (c) Flexural moment. Bracketed values are for service-load level.

$$10,000 \text{ lb} = 44.5 \text{ kN}$$

$$10,000 \text{ ft. lb} = 13.6 \text{ MPa}$$



3. Cracking moment capacity (Step 1)

f_d = unfactored dead load stress

From Figure 5.51 and $w_D = 725 \text{ lb/ft}$

$$f_d = \frac{M_D}{S_b} = \frac{725(36)^2}{8} \times 12 \times \frac{1}{10,990} = 128 \text{ psi (0.9 MPa)}$$

At the extreme fibers of the section,

$$f_{ce} = -\left(\frac{P_c}{A_c} + \frac{P_c e}{S_b}\right) = -\left(\frac{142,290}{696} + \frac{142,290 \times 29.7}{10,990}\right)$$

$$= -(204.4 + 384.5) = 588.9 \text{ psi say } 589 \text{ psi (C) (4.1 MPa)}$$

At the centroid of the section, $\bar{f}_c = -204.4 \text{ psi}$

$$M_{cr} = S_b(6\lambda\sqrt{\bar{f}_c' + f_{ce}} - f_d)$$

$$= 10,990(6 \times 1.0\sqrt{5000} + 589 - 128)$$

$$= 9.73 \times 10^6 \text{ in.-lb (1,100 kN-m)}$$

$$1.2M_{cr} = 1.2 \times 9.73 \times 10^6 = 11.7 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$

$$a = \frac{A_{ps}f_{ps}}{0.85f_c'b} = \frac{0.918 \times 255,000}{0.85 \times 5000 \times 8} = 6.9 \text{ in. (175 mm)}$$

$$M_n = A_{ps}f_{ps}\left(d_p - \frac{a}{2}\right) = 0.918 \times 255,000 \times \left(71.5 - \frac{6.9}{2}\right)$$

$$= 15,930,000 = 15.9 \times 10^6 \text{ in.-lb (1800 kN-m)}$$

$$> 1.2M_{cr} = 11.7 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$

hence, minimum flexural reinforcement is satisfied for flexure.

Figure 5.51 Force and moment diagrams for beams in Example 5.9. (a) Torsional moment. (b) Shear. (c) Flexural moment. Bracketed values are for service-load level.

$$10,000 \text{ lb} = 44.5 \text{ kN}$$

$$10,000 \text{ ft. lb} = 13.6 \text{ MPa}$$

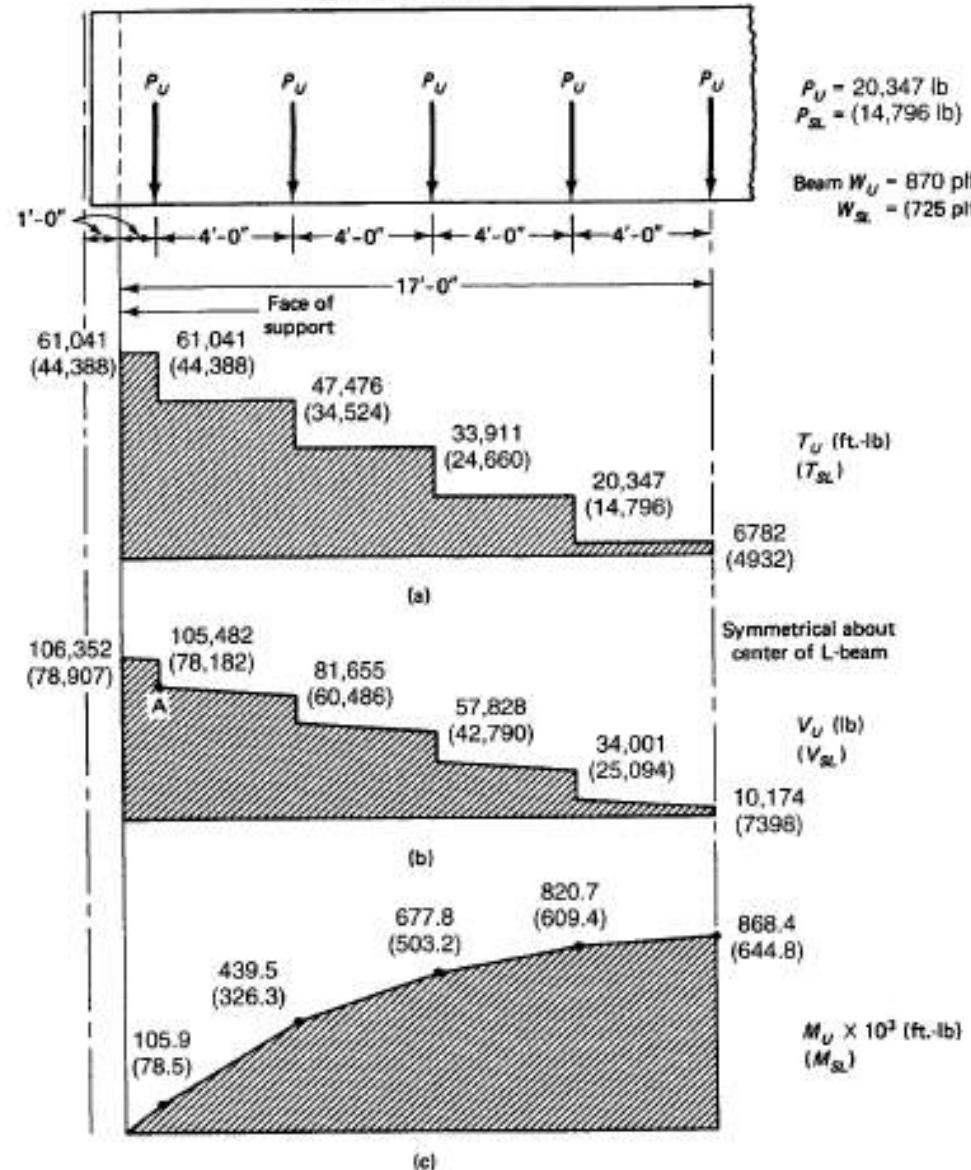


Figure 5.51 Force and moment diagrams for beams in Example 5.9. (a) Torsional moment. (b) Shear. (c) Flexural moment. Bracketed values are for service-load level.

4. Verify whether torsional reinforcement is needed (Step 2)
From Equation 5.80,

$$\begin{aligned} \text{Min. for disregarding torsion } T_u &\leq \phi \sqrt{f'_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right) \sqrt{1 + \frac{f_c}{4\sqrt{f'_c}}} \\ &= 0.75 \sqrt{5000} \left(\frac{600^2}{166} \right) \sqrt{1 + \frac{204.4}{4\sqrt{5000}}} \\ &= 150,953 \text{ in.-lb (17.0 kN-m)} \end{aligned}$$

Considering section at $h/2$ from support face in Figure 5.51, namely at 3 ft from the face of the support,

$$\begin{aligned} \text{Rqd. } T_u &= \frac{1}{2} (61,041 + 47,476) \times 12 \\ &= 651,102 \text{ in.-lb (73 kN-m)} > 150,953 \text{ in.-lb} \end{aligned}$$

The average value was used instead of 47,476 ft.-lb as a conservative value of the torsional moment.

Hence, torsion has to be considered and appropriate torsional reinforcement provided. The garage elements are all precast. Thus, assume equilibrium torsion condition and no redistribution of moment, using the total applied factored $T_u = 651,102$ in.-lb (Equation 5.79 is therefore inapplicable).

5. Check adequacy of section for torsion

- (a) Determine V_c as the smaller value obtained for V_{ci} from Equation 5.11 and V_{cw} from Equation 5.15.

From Fig. 5.51 for section at $h/2 = 3$ ft from face of support,

$$\text{Rqd. } V_u = \frac{1}{2} (105,482 + 81,655) = 93,569 \text{ lb (417 kN)}$$

$$\begin{aligned} \text{Rqd. } M_a &= \frac{1}{2} (105.9 + 439.5) 12 \times 1000 \text{ in.-lb} \\ &= 3,272,400 \text{ in.-lb (370 kN-m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ci} &= \left[0.6 \lambda \sqrt{f'_c} b_s d_p + V_d + V_i \frac{M_{cr}}{M_{max}} \right] \\ &\geq 1.7 \sqrt{f'_c} b_s d_p \\ &\leq 5.0 \sqrt{f'_c} b_s d_p \end{aligned}$$

V_d = shear at section due to unfactored dead load

$$V_d \text{ at face of support} = \frac{1}{2} (8316 \times 9 + 725 \times 34) = 49,747 \text{ lb}$$

$$V_d \text{ at point A in Figure 5.51} = 49,747 - 725 \times 1 \text{ ft} - 8316 = 40,706 \text{ lb}$$

$$V_d \text{ at 5 ft. from support} = 40,706 - 725 \times 5 - 8316 = 28,765 \text{ lb}$$

$$10,000 \text{ lb} = 44.5 \text{ kN}$$

$$10,000 \text{ ft. lb} = 13.6 \text{ MPa}$$

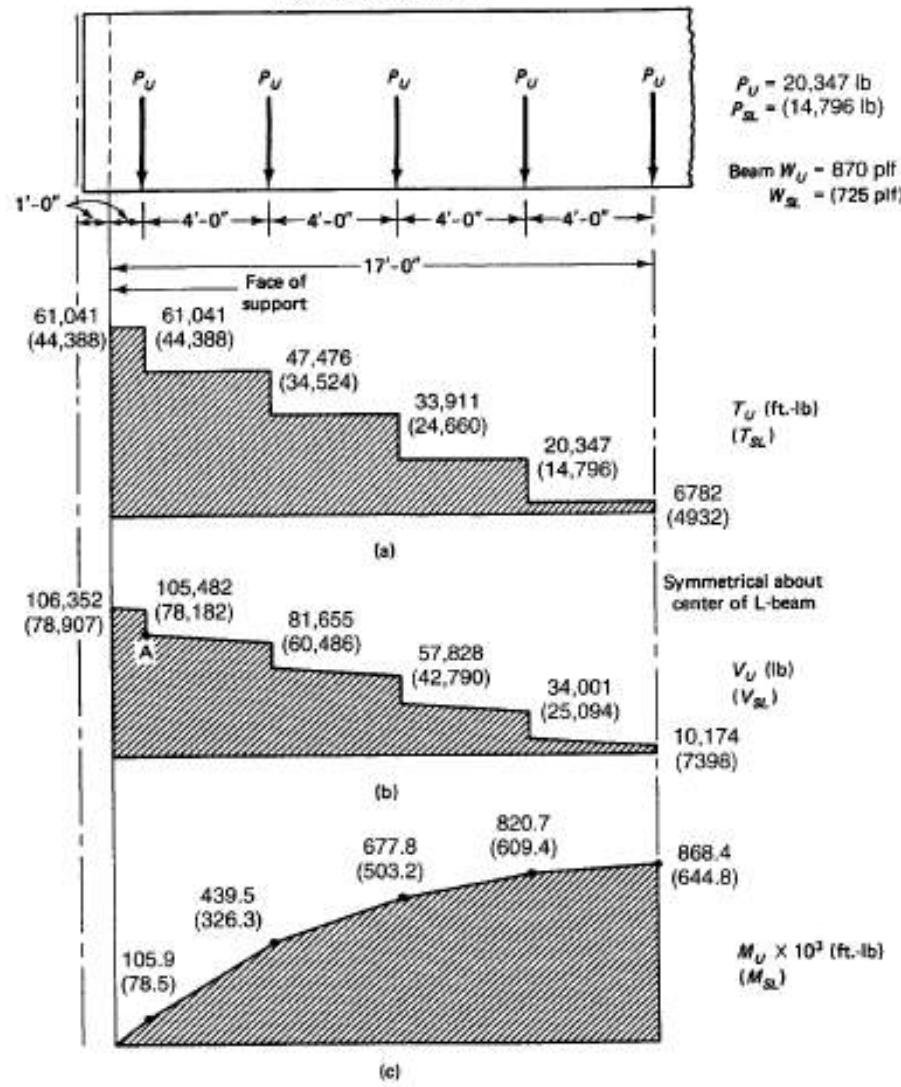


Figure 5.51 Force and moment diagrams for beams in Example 5.9. (a) Torsional moment. (b) Shear. (c) Flexural moment. Bracketed values are for service-load level.

At the required section at $h/2$ from face of support,

$$V_d = \frac{1}{2}(40,706 + 28,765) = 34,736 \text{ lb (154.5 kN)}$$

V_i = factored shear force at section due to externally applied loads occurring simultaneously with M_{\max}

$$= \frac{20,347 \text{ per stem}}{20,347 + 870 \times 4 \text{ per stem}} \times 93,569$$

$$= 79,902 \text{ lb}$$

M_{\max} = maximum factored moment at section due to externally applied load, namely due to live load and superimposed dead load

Factored M_u at point A in Figure 5.51 due to the live load and

$$SDL = \frac{1}{2}(20,347 \times 9) = 91,562 \text{ ft-lb}$$

Factored M_u at 5 ft from face

$$= \frac{1}{2}(20,347 \times 9)5 - 20,347 \times 4 = 376,420 \text{ ft-lb}$$

Hence

M_{\max} at $h/2$ = 3 ft from face of support

$$= \frac{1}{2}(91,562 + 376,420)12 = 2.81 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$

$M_{cr} = 9.73 \times 10^6 \text{ in.-lb}$ from before

hence,

$$V_a = \left[0.6 \times 1.0 \sqrt{5000} \times 8 \times 71.5 + 34,738 + 79,902 \frac{9.73 \times 10^6}{2.81 \times 10^6} \right]$$

$$= 24,268 + 34,738 + 276,671 = 335,677 \text{ lb}$$

$$v_{cl} = \frac{335,667}{8 \times 71.5} = 587 \text{ psi (3.46 MPa)}$$

$$1.7\lambda\sqrt{f'_c} = 1.7\sqrt{5000} = 120 \text{ psi} < 587 \text{ psi}$$

$$5\lambda\sqrt{f'_c} = 5.0\sqrt{5000} = 354 \text{ psi} < 587 \text{ psi}$$

Use $v_{cl} = 354 \text{ psi (2.4 MPa)}$

From Equation 5.15,

$$V_{cw} = (3.5\sqrt{f'_c} + 0.3\bar{f}_c)b_s d + V_p$$

$V_p = 0$ since tendons are straight, hence

$$V_{cw} = 3.5\sqrt{5000} + 0.3\left(\frac{142,290}{696}\right) = 310 \text{ psi} < v_{cl} = 354 \text{ psi (controls)}$$

Use $v_c = 310 \text{ psi}$ in this solution

$$V_c = v_c b_s d = 310 \times 8 \times 71.5 = 177,320 \text{ lb (788 kN)}$$

(b) Alternate method for evaluating V_c .

If $f_{pc} > 0.4f'_{pc}$, the ACI allows using a more conservative expression as in Equation 5.16

$$V_c = \left(0.6k\sqrt{f'_c} + 700 \frac{V_c d_p}{M_u} \right) b_s d_p$$

$$\approx 2k\sqrt{f'_c} b_s d$$

$$\approx 5k\sqrt{f'_c} b_s d$$

$$\frac{V_c d_p}{M_u} = \frac{93,569 \times 71.5}{3,272,400} = 2.04 > 1.0,$$

$$\text{use } \frac{V_c d}{M_u} = 1.0$$

$$v_c = \frac{V_c}{b_s d} = (0.6 \times 1.0 \sqrt{5000} + 700 \times 1.0) = 742 \text{ psi (5.1 MPa)}$$

$$> 5\sqrt{f'_c} = 354 \text{ psi}$$

$$v_c = 354 \text{ psi (2.4 MPa)}$$

(e) Check section adequacy

v_c in solution (a) will be used in this check = 310 psi (2.1 MPa). From Equation 5.81 for solid sections,

$$\sqrt{\left(\frac{V_c}{b_s d}\right)^2 + \left(\frac{T_c p_h}{1.7 A_{sh}^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{93,569}{8 \times 71.5}\right)^2 + \left(\frac{651,102 \times 152}{1.77 \times (322)^2}\right)^2}$$

$$\sqrt{26,759 + 290,814} = 564 \text{ psi (3.9 MPa)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{V_c}{b_s d}\right)^2 + 8\sqrt{f'_c}} = 0.75(310 + 8\sqrt{5000})$$

$$= 656 \text{ psi (4.5 MPa) available}$$

$$> 564 \text{ psi (3.8 MPa) actual.}$$

hence section is adequate.

6. Torsional reinforcement (Step 3)

$$T_n = T_u/\phi = 651,102/0.75 = 868,137 \text{ in.-lb (96 kN-m)}$$

From Equation 5.38b,

$$\begin{aligned} \frac{A_t}{s} &= \frac{T_n}{2A_0 f_{yt} \cot \theta} = \frac{868,137}{2 \times 274 \times 60,000 \times 1.3} \\ &= 0.0203 \text{ in.}^2/\text{in./one leg (0.046 cm}^2/\text{cm/one leg)} \end{aligned}$$

Using the PCI method in which $\cot \theta$ is computed,

$$\cot \theta = \frac{T_u/\phi}{1.7A_{oh}(A_t/s)f_{yt}} = \frac{868,137}{1.7(322)(0.0203) \times 60,000} = 1.30$$

by assuming a value of s , finding (A_t/s) for the tie size chosen and entering the value of (A_t/s) into the expression.

7. Shear reinforcement (Step 4)

$$V_c = 310 \times 8 \times 71.5 = 177,320 \text{ lb (788 kN)}$$

$$V_n = \frac{V_u}{\phi} = \frac{93,569}{0.75} = 124,757 \text{ lb (555 kN)}$$

$$V_s = (V_n - V_c); \quad \text{but } V_n < V_c$$

Use minimum shear web reinforcement.

$$\begin{aligned} \frac{A_v}{s} &= \frac{50b_w}{f_{yt}} = \frac{50 \times 8}{60,000} \\ &= 0.0067 \text{ in.}^2/\text{in./two legs (0.017 cm}^2/\text{cm/two legs)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A_{vt}}{s} &= 2 \left(\frac{A_t}{s} \right) + \frac{A_v}{s} = 2 \times 0.0203 + 0.0067 \\ &= 0.0473 \text{ in.}^2/\text{in./two legs (0.110 cm}^2/\text{cm/two legs)} \end{aligned}$$

Assuming No. 4 closed ties (12.7 mm diameter), $A_v = 2 \times 0.20 = 0.40 \text{ in.}^2$

$$s = \frac{\text{cross-sectional tie area}}{A_{vt}/s} = \frac{0.40}{0.0473} = 8.5 \text{ in.}$$

Maximum allowable spacing $s_{max} = p_h/8$ or 12 in. = $152/8 = 19$ in. or 12 in.

$$\text{Min. } \frac{A_v}{s} = \text{lesser of } \frac{50b_w}{f_{yt}} \quad \text{or} \quad \frac{A_{ps} f_{pu}}{80f_{yt} d} \sqrt{\frac{d}{b_w}}$$

$$0.75\sqrt{f'_c} = 0.75\sqrt{5000} = 53$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{53b_w}{f_{yt}} = \frac{53 \times 8}{60,000}$$

$$= 0.0071 \text{ in.}^2/\text{in./two legs (0.017 cm}^2/\text{cm/two legs)}$$

$$\begin{aligned} \frac{A_v}{s} &= \frac{A_{ps} f_{pu}}{80f_{yt} d} \sqrt{\frac{d}{b_w}} = \frac{0.918 \times 270,000}{80 \times 60,000 \times 71.5} \sqrt{\frac{71.5}{8}} \\ &= 0.0022 \text{ in.}^2/\text{in./two legs (0.006 cm}^2/\text{cm/two legs}), \text{ controls.} \end{aligned}$$

$$\text{Available } \frac{A_v}{s} = 0.0473 > 0.0022, \text{ O.K.}$$

Minimum bar diameter = $s/16$ or No. 3 bar = $8.5/16 = 0.53$ in. > 0.5 in. for No. 4 bar, use No. 5 closed stirrups. $A_v = 0.31 \times 2 = 0.62 \text{ in.}^2$

$$s = \frac{0.62}{0.0473} = 13.1 \text{ in.} > 12 \text{ in.}$$

Another alternative for the transverse reinforcement is to use No. 4 bars but reduce the computed spacing of 8.5 in. to $8.5 \times (0.50/0.53) = 8.0$ in. This gives No. 4 closed stir-

rups spaced at 8 in. center to center instead of No. 5 at 12 in. center to center. Using No. 4 closed stirrups at 8 in. center to center is more preferable as it is easier to bend them than the No. 5 bars. Therefore, for this design, use closed No. 4 stirrups (12.7 mm diameter) at 8 in. center to center for transverse shear + torsion web reinforcement.

8. Longitudinal reinforcement (Steps 5–6)

From Equation 5.85,

$$A_t = \frac{A_t}{s} p_h \left(\frac{f_{yt}}{f_y} \right) \cot^2 \theta$$

$$= 0.0203 \times 152 \left(\frac{60,000}{60,000} \right) (1.3)^2 = 5.21 \text{ in.}^2 (30 \text{ cm}^2)$$

From Equation 5.88,

$$A_{t,\min} = \frac{5\sqrt{f'_c} A_{cp}}{f_y} - \left(\frac{A_t}{s} \right) p_h \frac{f_{yt}}{f_y}$$

$$= \frac{5\sqrt{5000} \times 600}{60,000} - 0.0203 \times 152 \times \frac{60,000}{60,000}$$

$$= 0.50 \text{ in.}^2 (5.2 \text{ cm}^2); \quad A_t = 5.21 \text{ in.}^2 \text{ controls}$$

Using No. 4 longitudinal bars = 0.20 in.²

$$\text{No. of bars} = \frac{5.21}{0.20} = 26.05 \text{ bars}$$

Use 12 No. 4 bars on each face equally spaced (12 bars 12.7 mm diameter/face) and add another 4 bars for reinforcing the ledge to give a total of 28 No. 4 bars. Note that maximum allowable spacing = 12 in. In this case $s = 6.5$ in. c. to c., O.K. Adopt the design. Details of reinforcement and cross-sectional geometry of the L-beam are given in Fig. 5.52.

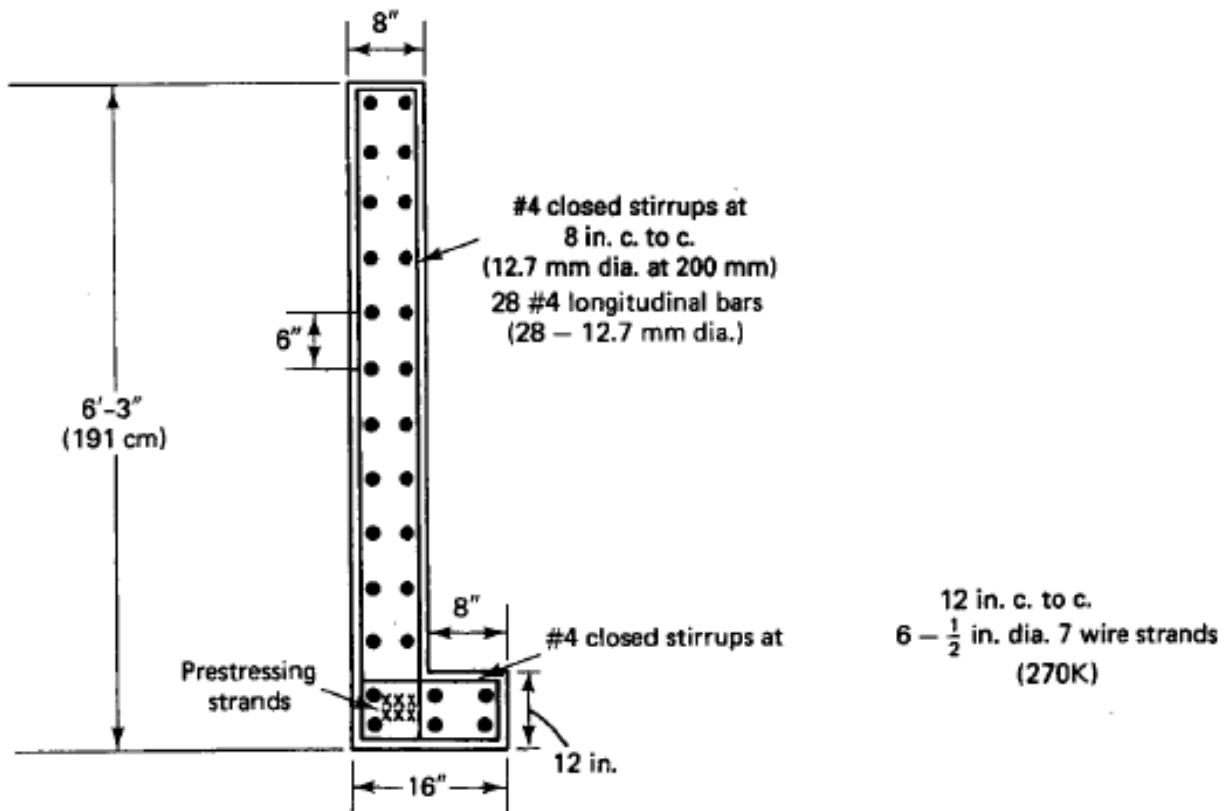
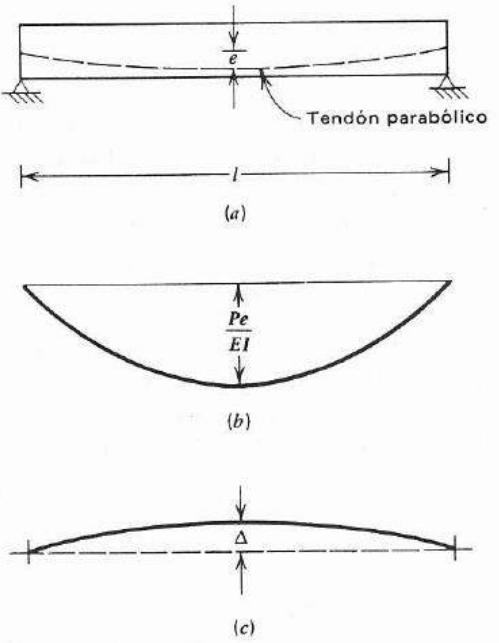
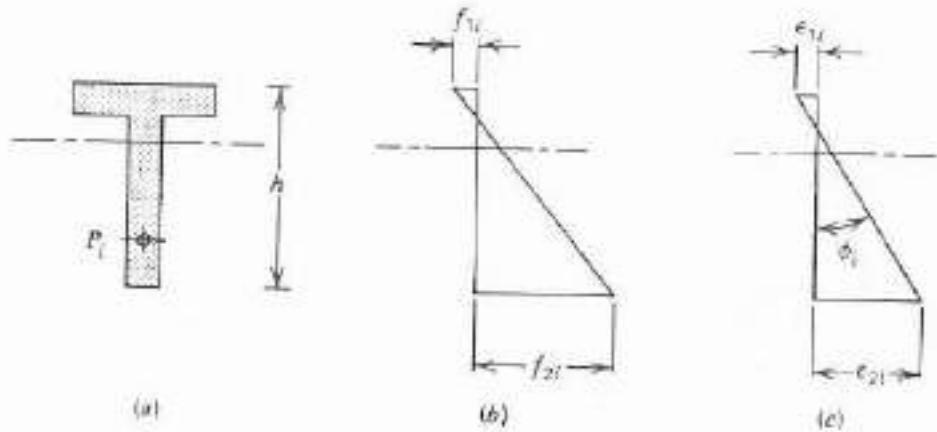
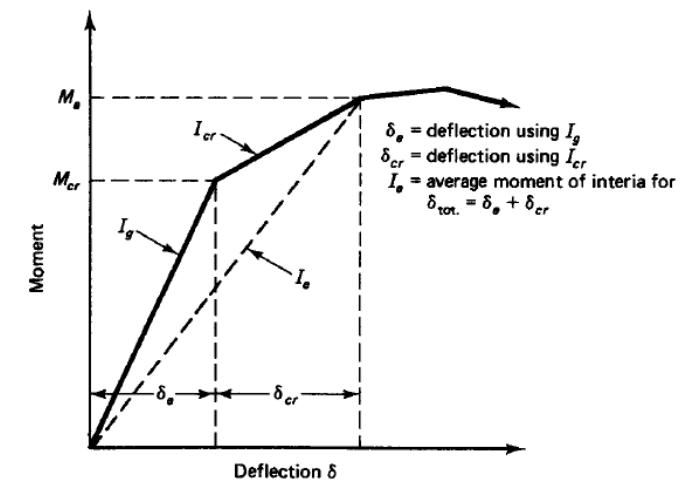


Figure 5.52 Reinforcement details of beam in Example 5.9.

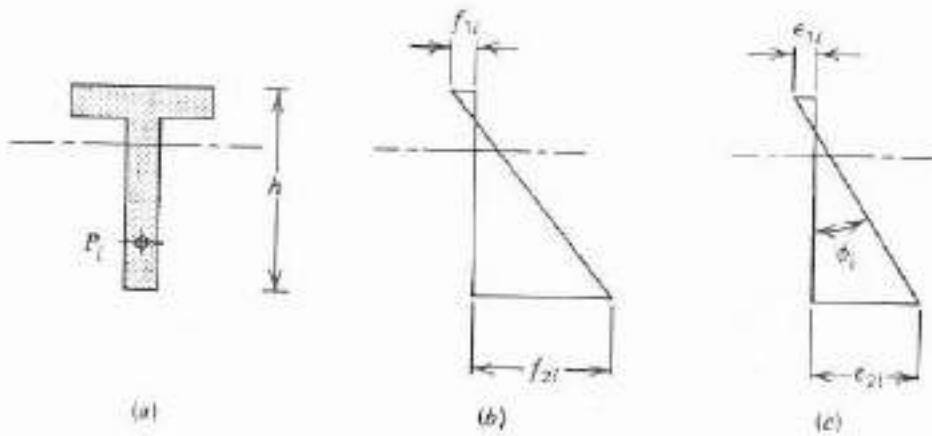


Deflexión en Elementos Presforzados



Bases para cálculo de Deflexiones

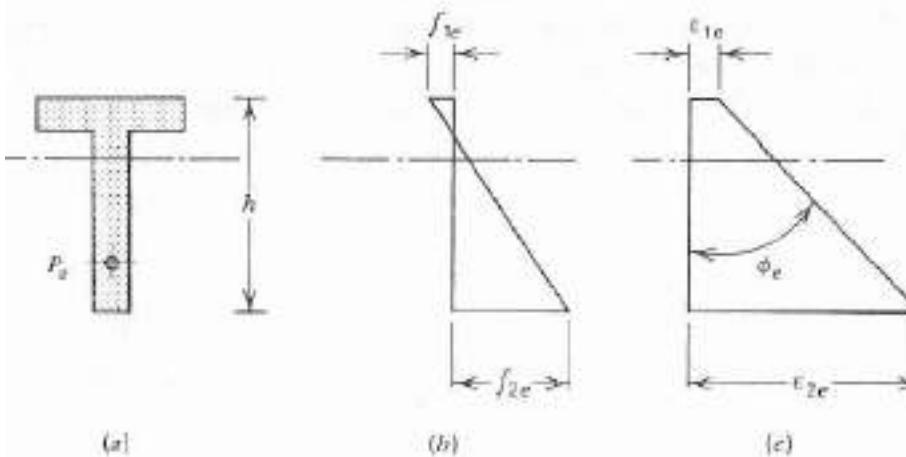
Esfuerzos y Deformaciones con fuerza pretensora inicial



$$\epsilon_c = f_c/E_c$$

$$\phi_{pi} = \frac{\epsilon_{2i} - \epsilon_{1i}}{h}$$

Esfuerzos y Deformaciones con fuerza pretensora efectiva



$$\phi_{pe} = \frac{\epsilon_{2e} - \epsilon_{1e}}{h}$$

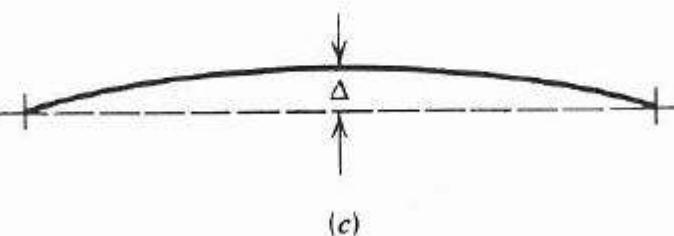
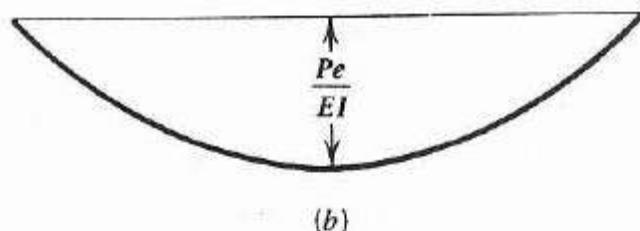
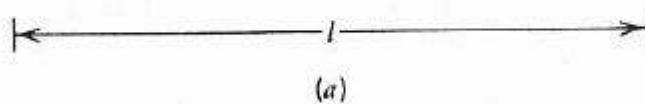
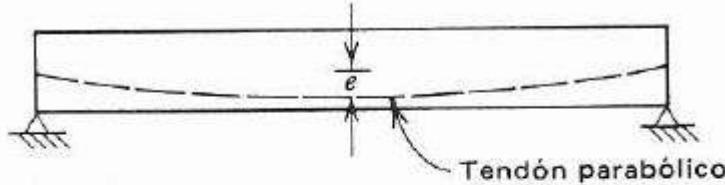
$$\phi_{pe} = \phi_{pi} + d\phi_1 + d\phi_2$$

d_{ϕ_1} = Relajamiento, contracción y flujo plástico

d_{ϕ_2} = flujo plástico y cargas sostenidas

Bases para cálculo de Deflexiones

Verificando a través de carga balanceada



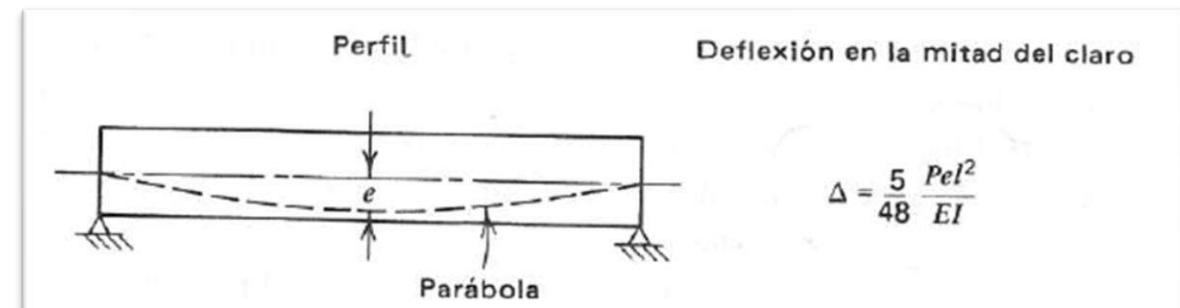
$$\phi = \frac{M}{E_c I_c} = \frac{Pe}{E_c I_c}$$

$$w = \frac{8Pe}{l^2} \quad \Delta = \frac{5}{384} \frac{wl^4}{EI}$$

Por área momento

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{Pe}{EI} \times \frac{l}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} \times \frac{l}{2} \\ &= \frac{5}{48} \frac{Pel^2}{EI}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{5 \times 8}{384} \frac{Pel^4}{l^2 EI} \\ &= \frac{5}{48} \frac{Pel^2}{EI}\end{aligned}$$



Método Aproximado para cálculo de deflexiones

Estados de carga a considerarse

- **Pi + peso propio (Deflexión instantánea Δ_{pi})**

Se basa en la deformación de la curvatura a lo largo del claro

Curvatura inicial

$$\phi_{pi} = \frac{\epsilon_{2i} - \epsilon_{1i}}{h}$$

Curvatura a lo largo del claro

$$\phi = \frac{M}{E_c I_c} = \frac{Pe}{E_c I_c}$$

Deformación neta después del presfuerzo

$$\Delta = -\Delta_{pi} + \Delta_o$$

- **Fuerza pretensora reducida por pérdidas**

$$\phi_{pe} = -\frac{P_i e_x}{E_c I_c} + (P_i - P_e) \frac{e_x}{E_c I_c} - \left(\frac{P_i + P_e}{2} \right) \frac{e_x}{E_c I_c} C_u$$

$$\Delta = -\Delta_{pi} + (\Delta_{pl} - \Delta_{pe}) - \frac{\Delta_{pi} + \Delta_{pe}}{2} C_u \quad \Delta = -\Delta_{pe} - \frac{\Delta_{pl} + \Delta_{pe}}{2} C_u$$

$$\Delta_{pe} = \Delta_{pi} \frac{P_e}{P_i}$$

- **Deflexiones modificadas por flujo plástico por carga sostenidas**

$$\Delta = -\Delta_{pe} - \frac{\Delta_{pi} + \Delta_{pe}}{2} C_u + \Delta_o (1 + C_u)$$

Efecto de larga duración

$$\Delta = -\Delta_{pe} - \frac{\Delta_{pi} + \Delta_{pe}}{2} C_u + (\Delta_o + \Delta_d)(1 + C_u) + \Delta_l$$

Momento de Inercia Efectivo

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_{max}} \right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_{max}} \right)^3 \right] I_{cr}$$

I_g = momento de inercia de la sección transversal total de concreto

I_{cr} = momento de inercia de la sección transformada de concreto totalmente agrietada

M_{cr} = momento de agrietamiento de la viga

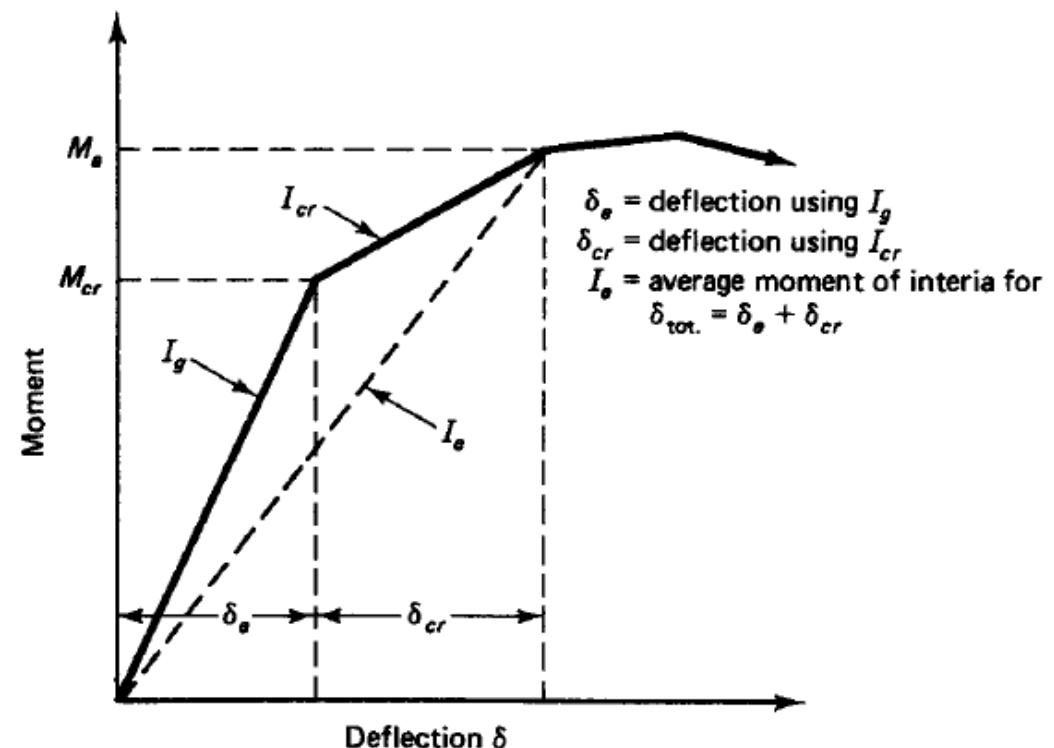
M_{max} = máximo momento que actúa en el claro simple

$$M_{cr} = S_b \left[7.5\lambda \sqrt{f'_c} + \frac{P_e}{A_c} \left(1 + \frac{ec_b}{r^2} \right) \right] \quad \frac{M_{cr}}{M_a} = 1 - \left(\frac{f_u - f_r}{f_L} \right)$$

Para secciones con refuerzo convencional + presfuerzo

$$I_{cr} = (n_p A_{ps} d_p^2 + n_s A_s d^2)(1 - 1.6 \sqrt{n_p p_p + n_s \rho})$$

$$I_{cr} = n_p A_{ps} d_p^2 (1 - 1.6 \sqrt{n_p p_p})$$



Example 7.1

Compute the cracking moment M_{cr} for a prestressed rectangular beam section having a width $b = 12$ in. (305 mm) and a total depth $h = 24$ in. (610 mm), given that $f'_c = 4,000$ psi (27.6 MPa). The concrete stress f_b due to eccentric prestressing is 1,850 psi (12.8 MPa) in compression. Use a modulus of rupture value of $7.5 \sqrt{f'_c}$.

Solution: The modulus of rupture $f_r = 7.5\sqrt{f'_c} = 7.5\sqrt{4,000} = 474$ psi (3.27 MPa). Also,

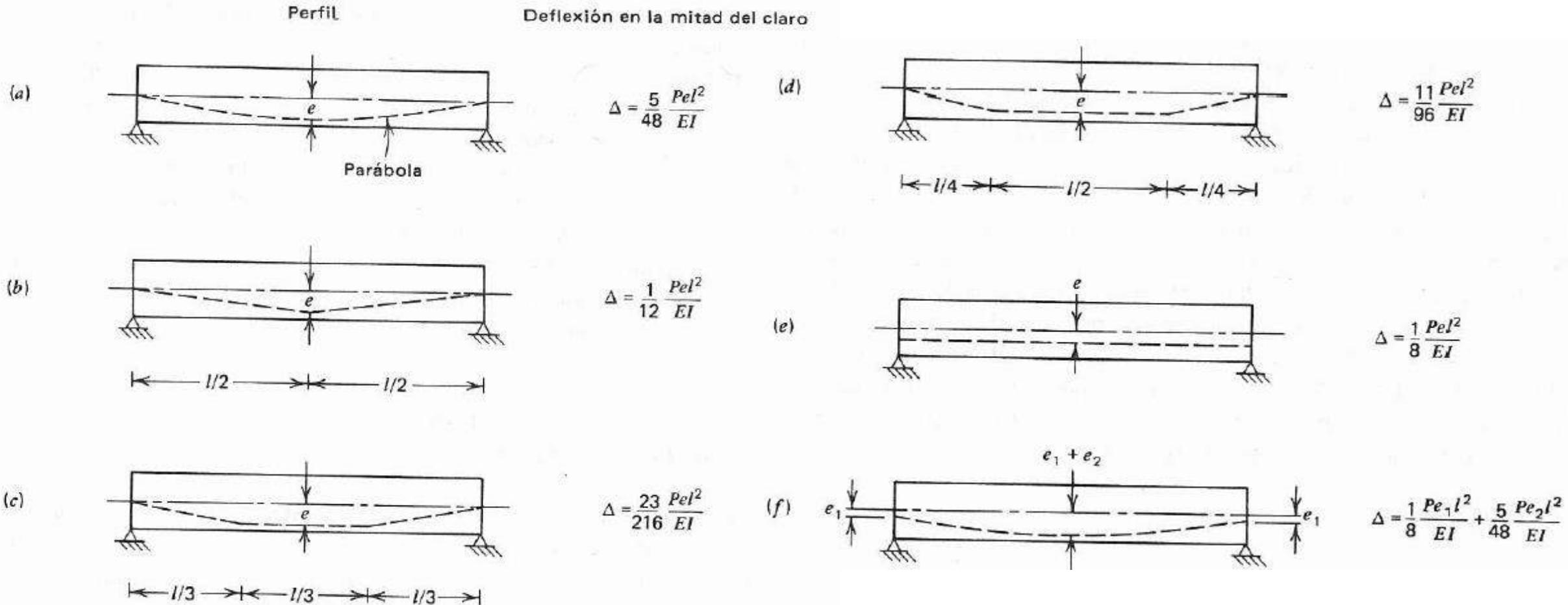
$$I_g = bh^3/12 = 12(24)^3/12 = 13,824 \text{ in}^4$$

(575,400 cm⁴); $y_t = 24/2 = 12$ in. (305 mm) to the tension fibers; and $S_b = I_g/y_t = 13,824/12 = 1,152 \text{ in}^3$ (18,878 cm³).

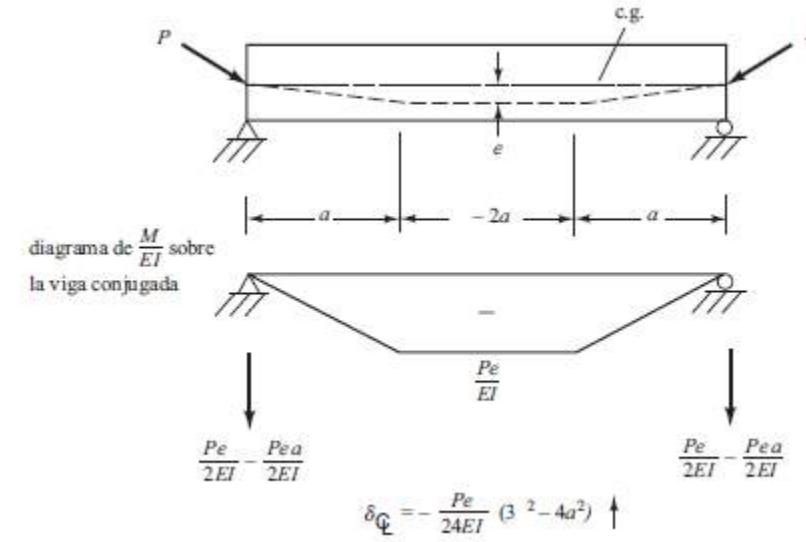
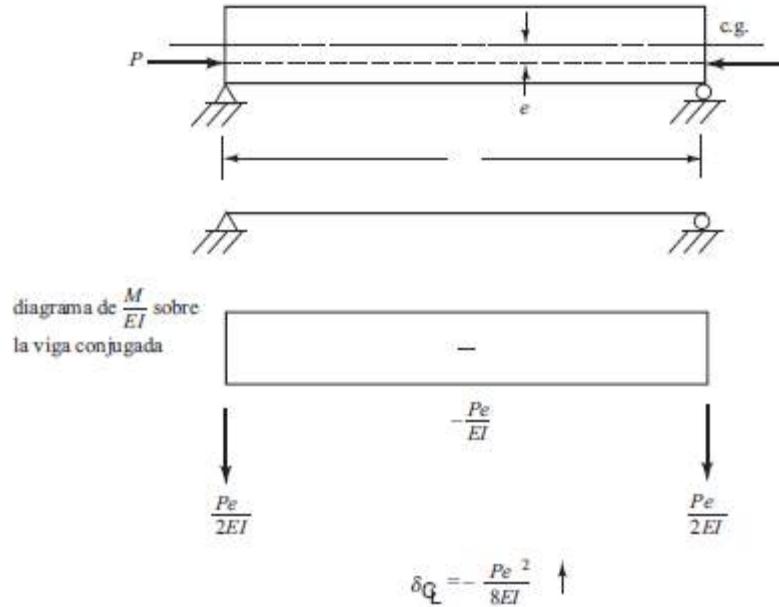
$$\begin{aligned} M_{cr} &= S_b \left[7.5\lambda\sqrt{f'_c} + \frac{P_e}{A_c} \left(1 + \frac{ec_b}{r^2} \right) \right] = 1,152[474 + 1850] \\ &= 2.68 \times 10^6 \text{ in.-lb (302.9 kN-m)} \end{aligned}$$

If the beam were not prestressed, the moment would be $M_{cr} = f_r I_g / y_t = 474 \times 13,824 / 12 = 0.546 \times 10^6 \text{ in.-lb (61.7 kN-m)}$.

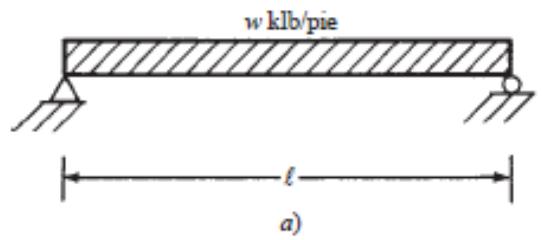
Deformación de Presfuerzo para varios perfiles de tendón



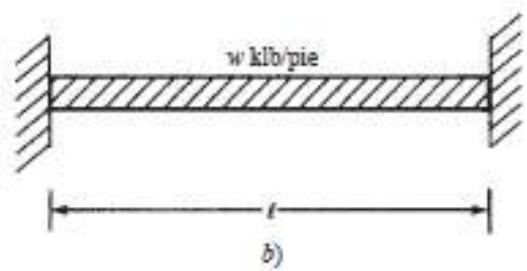
Deformación de Presfuerzo para varios perfiles de tendón



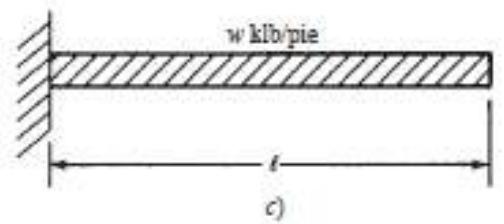
Deformación bajo cargas de servicio



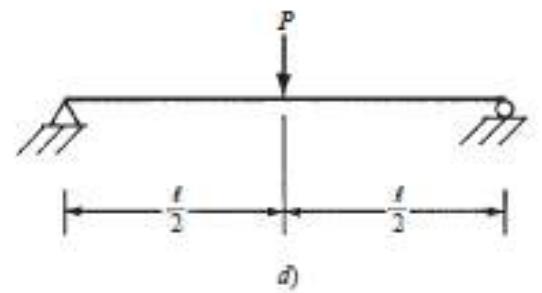
$$\delta_{\text{E}} = \frac{5w\ell^4}{384EI}$$



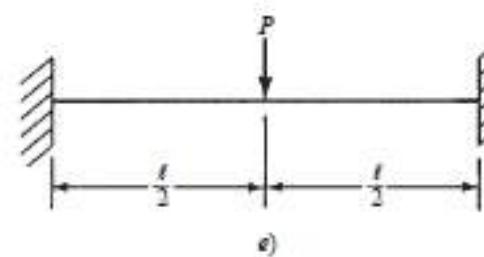
$$\delta_{\text{E}} = \frac{w\ell^4}{384EI}$$



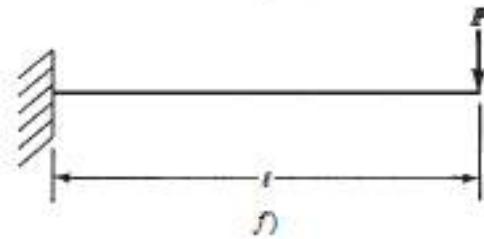
$$\delta_{\text{extremo libre}} = \frac{w\ell^4}{8EI}$$



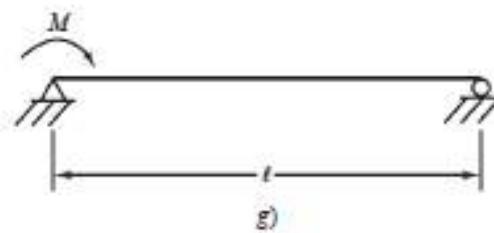
$$\delta_{\text{E}} = \frac{P\ell^3}{48EI}$$



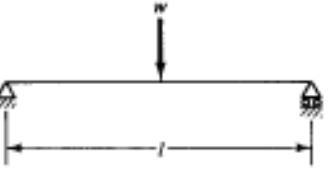
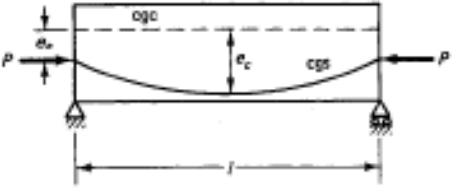
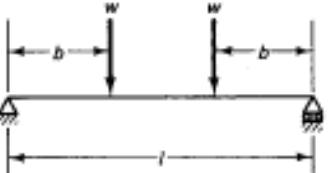
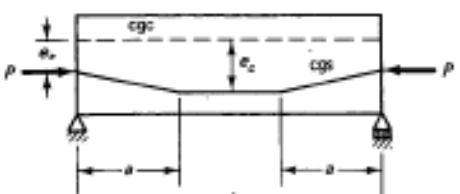
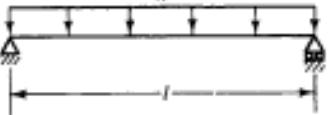
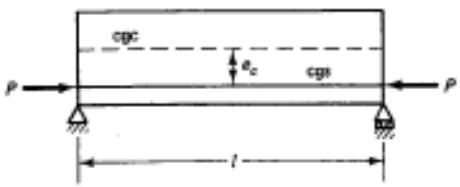
$$\delta_{\text{E}} = \frac{P\ell^3}{192EI}$$



$$\delta_{\text{extremo libre}} = \frac{P\ell^3}{3EI}$$



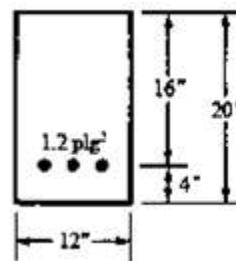
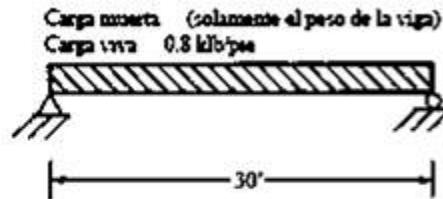
$$\delta_{\text{E}} = \frac{M\ell^3}{16EI}$$

Load deflection	Prestress camber
 $\delta = \frac{w l^3}{48 E I} = \phi_c \frac{l^2}{12}$	 $\begin{aligned}\delta &= -\frac{P l^2}{8 E I} [\phi_e + \frac{5}{6} (\phi_c - \phi_e)] \\ &= \phi_c \frac{l^2}{8} + (l \phi_e - \phi_c) \frac{l^2}{48}\end{aligned}$
 $\delta = \frac{w b}{24 E I} (3l^2 - 4b^2)$ $= \phi_c \frac{3l^2 - 4b^2}{24}$	 $\begin{aligned}\delta &= -\frac{P l^2}{8 E I} \left[\phi_c + (\phi_e - \phi_c) \frac{4}{3} \frac{s^2}{l^2} \right] \\ &= \phi_c \frac{l^2}{8} + (\phi_e - \phi_c) \frac{s^2}{6}\end{aligned}$
 $\delta = \frac{5 w l^4}{384 E I} = \phi_c \frac{5 l^2}{48}$	 $\delta = -\frac{P e_c l^2}{8 E I} = \phi_c \frac{l^2}{8}$

Deformación de Presfuerzo y Deformaciones por carga de servicio

EJEMPLO 19.4

La viga rectangular pretensada mostrada en la figura 19.12 tiene cables rectos con esfuerzos iniciales de 175 kib/plg² y esfuerzos finales después de las pérdidas de 140 kib/plg². Determinar la deflexión de la viga en el \mathbf{Q} , inmediatamente después de que se cortan los cables. Se tiene que $E = 4 \times 10^6$ lb/plg². Suponga concreto no agrietado.

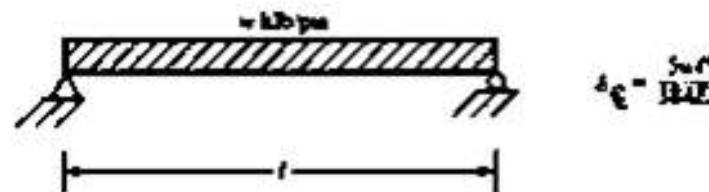


$$\Delta = \frac{1}{8} \frac{PeI^2}{EI}$$

$$I_z = \left(\frac{1}{12}\right)(12)(20)^3 = 8000 \text{ plg}^4$$

$$e = 6"$$

$$\text{Peso de la viga} = \frac{(12)(20)}{144}(150) = 250 \text{ lb/pie}$$



Deflexión inmediatamente después de que se cortan los cables

$$\delta \text{ debida al cable} = -\frac{PeI^2}{8EI} = -\frac{(1.2 \times 175000)(6)(12 \times 30)^2}{(8)(4 \times 10^6)(8000)} = -0.638"$$

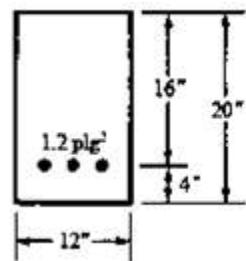
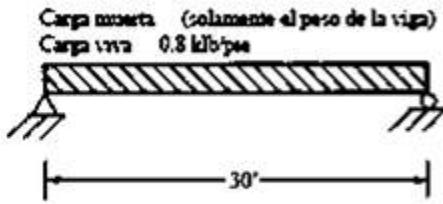
$$\delta \text{ debida al peso de la viga} = +\frac{S_w t^4}{384EI} = \frac{(5)\left(\frac{250}{12}\right)(12 \times 30)^4}{(384)(4 \times 10^6)(8000)} = +0.142"$$

$$\text{Deflexión total} = -0.496"$$

Calcular la deformación por flujo plástico después de las pérdidas

$$C_c = 2.0 \text{ y } R = 80\%$$

$$\Delta_{pe} = \Delta_{pi} \frac{P_e}{P_i}$$



$$\Delta_{pe} = 0.638 \times 0.8 = 0.51''$$

$$\Delta = -\Delta_{pe} - \frac{\Delta_{pi} + \Delta_{pe}}{2} C_u + \Delta_o(1 + C_u)$$

$$\Delta = -0.51 - (0.638 + 0.51)/2 \times 2 + 0.142 (1 + 2.0) = -1.23''$$

Calcular la deformación por cargas sobreimpuestas

$$\Delta = -1.23'' + 0.142 (800/250) = -0.77''$$

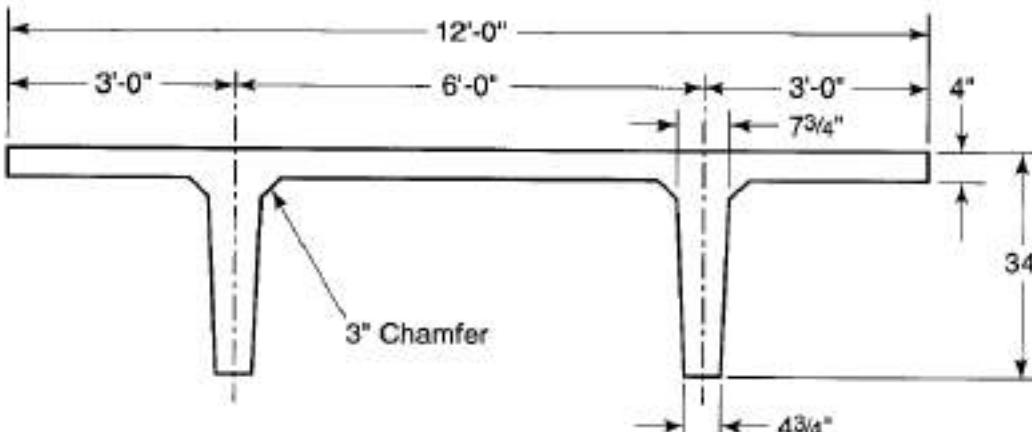
7.4.1 Example 7.3 Non-Composite Uncracked Double T-Beam Deflection

Evaluate the total short-term (immediate) elastic deflection of the 12 DT 34 beam in Example 4.1 using (a) applicable moment of inertia I_g or I_e method, (b) incremental moment-curvature method. The beam carries a superimposed service live load of 1,100 plf (16.1 kN/m) and superimposed dead load of 100 plf (1.46 kN/m). It is bonded pretensioned, with $A_{ps} = 16 \times 0.153 = 2.448 \text{ in.}^2$ diameter 7-wire 270-ksi ($f_{pu} = 270 \text{ ksi} = 1,862 \text{ MPa}$) stress-relieved strands = 2.448 in.² Disregard the contribution of the nonprestressed steel in calculating the moment of inertia in this example. Assume that strands are jacked to $0.70f_{pu}$ resulting in the initial prestress $P_i = 462,672 \text{ lb}$. The effective prestress $P_e = 379,391 \text{ lb}$ occurs at the first load application 30 days after erection and does not include all the time-dependent losses.

Data

(a) Geometrical Properties (Fig. 7.9)

$$\begin{aligned} A_c &= 978 \text{ in.}^2 (6,310 \text{ cm}^2) \\ I_c &= 86,072 \text{ in.}^4 (3.59 \times 10^6 \text{ cm}^4) \\ S_b &= 3,340 \text{ in.}^3 (5.47 \times 10^4 \text{ cm}^3) \\ S' &= 10,458 \text{ in.}^3 \\ W_D &= 1,019 \text{ plf, self-weight} \\ W_{SD} &= 100 \text{ plf (1.46 kN/m)} \\ W_L &= 1,100 \text{ plf (16.05 kN/m)} \\ e_c &= 22.02 \text{ in.} \\ e_e &= 12.77 \text{ in.} \\ c_b &= 25.77 \text{ in.} \\ c_t &= 8.23 \text{ in.} \\ A_{ps} &= 16 \times 0.153 = 2.448 \text{ in.}^2 (15.3 \text{ cm}^2) \\ P_i &= 462,672 \text{ (2,058 kN) at transfer} \\ P_e &= 379,391 \text{ lb (1,688 kN)} \end{aligned}$$



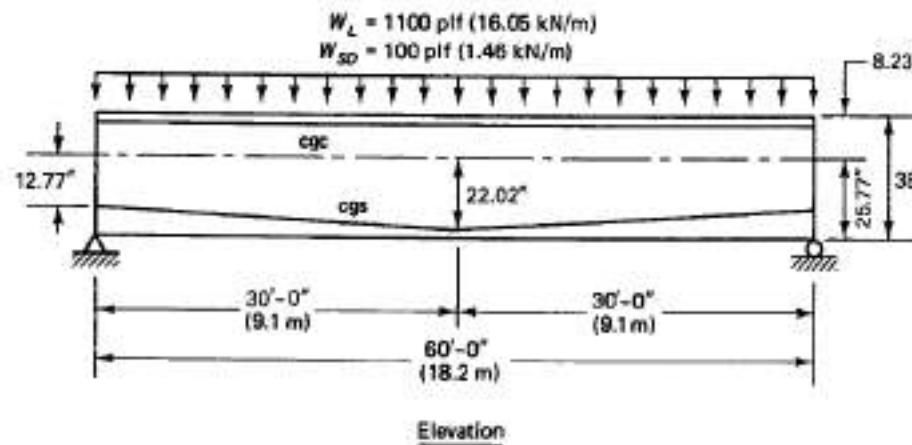
1. Midspan Section Stresses

$$e_e = 22.02 \text{ in. (559 mm)}$$

Maximum self-weight moment

$$M_D = \frac{1,019(60)^2}{8} \times 12 = 5,502,600 \text{ in.-lb}$$

- (a) At transfer, calculated fiber stresses are
From Equation 4.1a,



Material Properties

$$V/S = 2.39 \text{ in}$$

$$RH = 70\%$$

$$f'_c = 5,000 \text{ psi}$$

$$f'_{ci} = 3,750 \text{ psi}$$

$$f_{pu} = 270,000 \text{ psi (1,862 MPa)}$$

$$f_{pi} = 189,000 \text{ psi (1,303 MPa)}$$

$$f_{pe} = 154,980 \text{ psi (1,067 MPa)}$$

$$f_{py} = 230,000 \text{ psi}$$

$$E_{ps} = 28.5 \times 10^6 \text{ psi (196 GPa)}$$

(c) Allowable Stresses

$$f_{ci} = 2,250 \text{ psi}$$

$$f_c = 2,250 \text{ psi}$$

$$f_u = 184 \text{ psi (midspan)}$$

$$f_t = 849 \text{ psi (midspan)}$$

$$f' = -\frac{P_i}{A_c} \left(1 - \frac{e_c c_t}{r^2} \right) - \frac{M_D}{S'} \\ = -\frac{462,672}{978} \left(1 - \frac{22.02 \times 8.73}{88.0} \right) - \frac{5,502,600}{10,458} \\ = +501 - 526 = -25 \text{ psi (C)} < f_t = +184 \text{ psi (T), O.K.}$$

$$f_b = -\frac{P_i}{A_c} \left(1 + \frac{e_c c_b}{r^2} \right) + \frac{M_D}{S_b} \\ = -\frac{462,672}{978} \left(1 + \frac{22.02 \times 25.77}{88.0} \right) + \frac{5,502,600}{3,340} \\ = -3,524 + 1,647 = -1,877 \text{ psi (C)} < -2,250 \text{ psi, O.K.}$$

(b) At service load

$$M_{SD} = \frac{100(60)^2 12}{8} = 540,000 \text{ in.-lb (61 kN-m)}$$

$$M_L = \frac{1,100(60)^2 12}{8} = 5,940,000 \text{ in.-lb (672 kN-m)}$$

$$\text{Live-load } f' = \frac{5,940,000}{10,458} = -568 \text{ psi (C)}$$

$$\text{Live-load } f_b = \frac{5,940,000}{3,340} = 1,778 \text{ psi (T)}$$

$$\text{Total Moment } M_T = M_D + M_{SD} + M_L = 5,502,600 + 6,480,000 = 11,982,600 \text{ in-lb}$$

a) En el momento de la transferencia

$$f' = -\frac{P_e}{A_c} \left(1 - \frac{e c_t}{r^2} \right) - \frac{M_T}{S'} \\ = -\frac{379,391}{978} \left(1 - \frac{22.02 \times 8.23}{88.0} \right) - \frac{11,982,600}{10,458} \\ f' = +411 - 1146 = -735 \text{ psi} < f_c = -2,250 \text{ psi, O.K.}$$

$$f_b = -\frac{P_e}{A_c} \left(1 + \frac{e c_b}{r^2} \right) + \frac{M_T}{S_b} \\ = -\frac{379,391}{978} \left(1 + \frac{22.02 \times 25.77}{88.0} \right) + \frac{11,982,600}{3,340} \\ = -2,689 + 3,587 = +698 \text{ psi (T)} < 849 \text{ psi, O.K.}$$

$$f_{ci} = 6\sqrt{f'_c} = 6\sqrt{3,750} = 367 \text{ psi}$$

$$f_t = 12\sqrt{f'_c} = 12\sqrt{5,000} = 849 \text{ psi}$$

$$e_e = 12.77 \text{ in.}$$

	Midspan		Support	
	f^t	f_b	f^t	f_b
Prestress P_i only	+501	-3,524	+92	-2,242
At transfer and W_d	-25	-1,877	+92	-2,242
Live load W_L only	-568	+1,778	0	0
At service load	-735	+698	+75	-1,839

3. Deflection and Camber Calculation at Transfer

From basic mechanics or from Figure 7.6, for $a = l/2$, the camber at midspan due to a single harp or depression of the prestressing tendon is

$$\delta \uparrow = \frac{Pe_c l^2}{8EI} + \frac{P(e_s - e_c)l^2}{24EI}$$

So

$$E_{ci} = 57,000\sqrt{f'_{ci}} = 57,000\sqrt{3,750} = 3.49 \times 10^6 \text{ psi (24.1 MPa)}$$

$$E_c = 57,000\sqrt{f'_c} = 57,000\sqrt{5,000} = 4.03 \times 10^6 \text{ psi (27.8 MPa)}$$

$$\begin{aligned}\delta_{pi} &= \uparrow = \frac{462,672 \times 22.02 \times (60 \times 12)^2}{8 \times 3.49 \times 10^6 \times 86,702} \\ &\quad + \frac{462,672 \times (12.77 - 22.02)(60 \times 12)^2}{24 \times 3.49 \times 10^6 \times 86,072} \\ &= -2.20 + 0.31 = -1.89 \text{ in. (48 mm)} \uparrow\end{aligned}$$

This upward deflection (camber) is due to prestress only. The self-weight per inch is $1,019/12 = 84.9 \text{ lb/in.}$, and the deflection caused by self-weight is $\delta_n \downarrow = 5wl^4/384EI$.

4. Total Immediate Deflection at Service Load of Uncracked Beam

(a) Superimposed dead load deflection, using $E_c = 4.03 \times 10^6 \text{ psi}$

$$\delta_{SD} = 0.99 \frac{E_a}{E_c} \left(\frac{100}{1,019} \right) = 0.99 \left(\frac{3.49}{4.03} \right) \left(\frac{100}{1,019} \right) = 0.08 \text{ in. (2.0 mm)} \downarrow$$

(b) Live load deflection

$$\delta_L = \frac{5wl^4}{384E_c I_c} = \frac{5(1100)(60 \times 12)^4}{384 \times 4.03 \times 10^6 \times 86,072} \times \frac{1}{12} = 0.93 \text{ in.} \downarrow$$

A summary of the short-term cambers and deflections at service load is as follows:

Camber due to initial prestress = 1.89 in. (48 mm) \uparrow

Deflections due to self-weight = 0.99 in. (25 mm) \downarrow

Deflection due to superimposed dead load = 0.08 in. (2 mm) \downarrow

Deflection due to live load = 0.93 in. (23 mm) \downarrow

Net deflection at transfer = $-1.89 + 0.99 = -0.90 \text{ in.} \uparrow$

Activar Windows

the a Microsoft product

If deflection due to prestress loss from the transfer stage to erection at 30 days is considered, reduced camber is

$$= 1.89 \left(\frac{462,672 - 379,391}{462,672} \right)$$

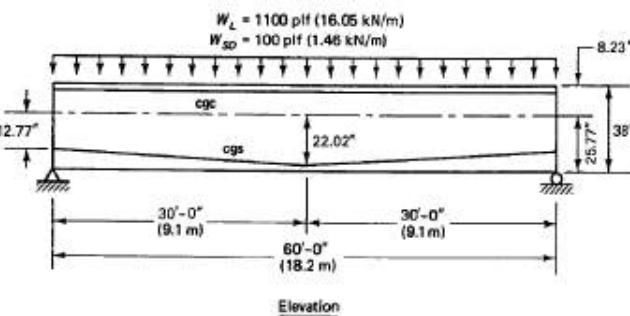
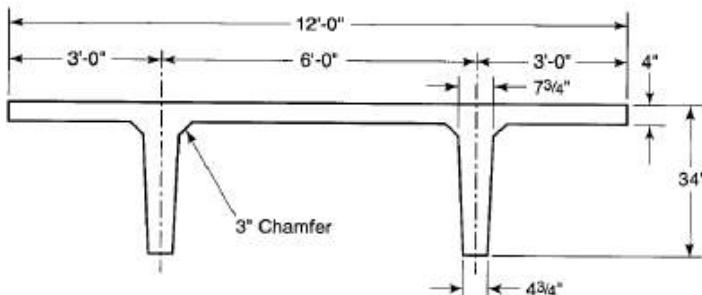
$$= 1.89 \left(\frac{83,281}{462,672} \right) = 0.34 \text{ in.} \downarrow$$

7.5.1 Short-Term Deflection of the Beam in Example 7.3 If Cracked

(a) Bilinear Method

Example 7.4

Solve Example 7.3 by (a) the bilinear method, (b) the effective moment of inertia method for a condition of tensile stress $f_b = 750$ psi at midspan bottom fibers at service load, i.e., the tensile stress exceeds the modulus of rupture $f_r = 7.5\sqrt{f'_c} = 530$ psi for crack formation. Assume that the net beam camber due to prestress and self-weight is $\delta = 0.95$ in.



Solution: The net tensile stress beyond the first cracking load at the modulus of rupture is $f_{net} = f_b - f_r = 750 - 530 = +220$ psi (T). From Example 7.3, the tensile stress caused by the live load alone at the bottom fibers is +1,778 psi. Now, since $W_L = 1,100$ plf, the portion of the load that would not result in tensile stress at the bottom fibers is

$$w_1 = \frac{(1,778 - 220)}{(1,778)} \times 1,100 = 964 \text{ plf}$$

$$= \frac{964}{12} = 80 \text{ lb/in.}$$

The deflection determined by the uncracked I_g is

$$\delta_g = \frac{5w_1 l^4}{384 E_c I_g} = \frac{5 \times 80(60 \times 12)^4}{384 \times 4.03 \times 10^6 \times 86,072} = 0.8 \text{ in. } \downarrow (20 \text{ mm})$$

$$I_{cr} = n_p A_{ps} d_p^2 (1 - 1.6\sqrt{n_p p_p})$$

$$n_p = \frac{E_{ps}}{E_c} = \frac{28.5 \times 10^6}{4.03 \times 10^6} = 7.07$$

$$d_p = e_c + c_f = 22.02 + 8.23 = 30.25 \text{ in.} > 0.8h = 27.2 \text{ in.}$$

Used $d_p = 30.25$ in. and $A_{ps} = 2.448 \text{ in.}^2$ Then

$$p_p = \frac{A_{ps}}{bd_p} = \frac{2.448}{144 \times 30.25} = 0.0006$$

$$I_{cr} = 7.07 \times 2.448 (30.25)^2 (1 - 1.6\sqrt{7.07 \times 0.0006})$$

$$= 14,187 \text{ in.}^4 (5.9 \times 10^5 \text{ cm}^4)$$

Balance of the total load that results in cracking of the section is

$$w_2 = \frac{1,100 - 964}{1,100 \times 12} = 11.3 \text{ lb/in.}$$

$$\delta_{cr} = \frac{5w_2 l^4}{384 E_c I_{cr}} = \frac{5 \times 11.3(60 \times 12)^4}{384 \times 4.03 \times 10^6 \times 14,187}$$

$$= 0.69 \text{ in. } \downarrow (17 \text{ mm})$$

Thus, the total deflection due to live load

$$\delta_L = 0.80 + 0.69 = +1.49 \text{ in. } \downarrow (38 \text{ mm})$$

(b) Effective Moment of Inertia Method I_e Method:

From Equation 7.10b,

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} \leq I_g$$

From Equation 7.11,

$$\left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right) = 1 - \left(\frac{f_u - f_r}{f_L}\right)$$

f_u = final total stress = +750 psi (T)

f_r = modulus of rupture = 530 psi from before

f_L = live load stress = 1778 psi

$$\left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right) = 1 - \left(\frac{750 - 530}{1,778}\right) = 1 - 0.124 = 0.876$$

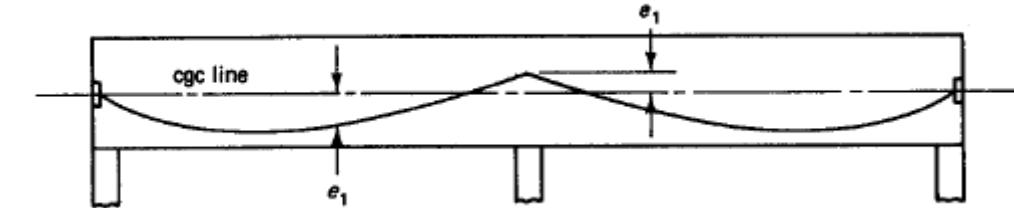
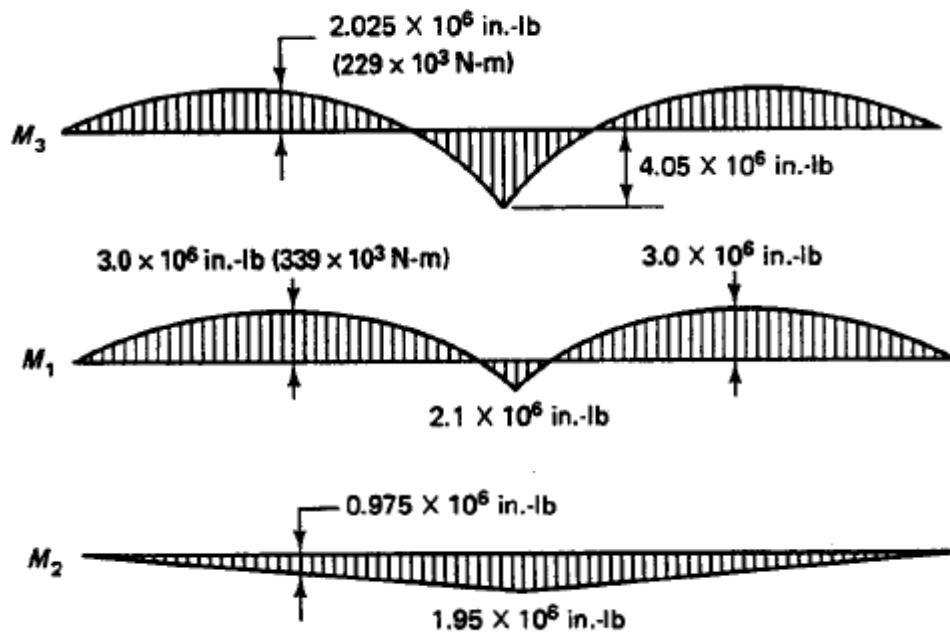
$$\left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 = 0.67$$

$$\begin{aligned} I_e &= 0.67 \times 86,072 + (1 - 0.67)14,187 \\ &= 62,350 \text{ in.}^4 \end{aligned}$$

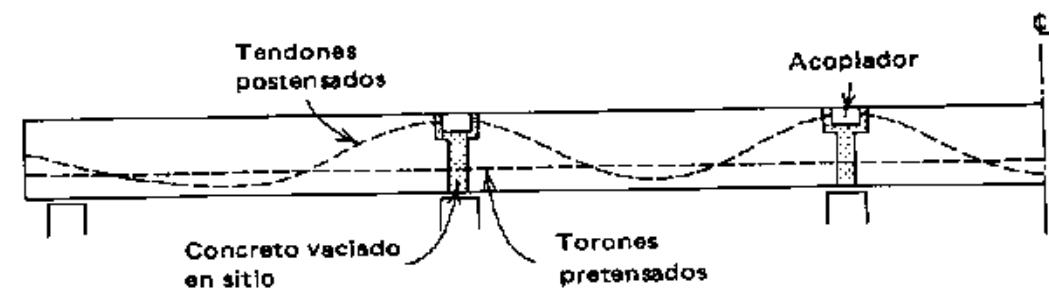
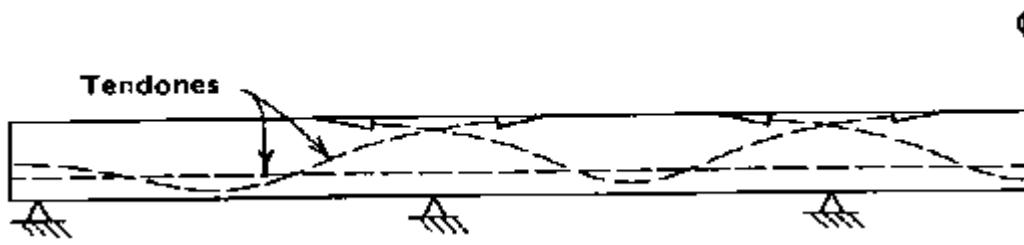
Total live-load intensity = $1,100/12 = 92 \text{ lb/in.}$

Deflection due to live load

$$\delta_L = \frac{5 \times 92(60 \times 12)^4}{384 \times 4.03 \times 10^6 \times 62,350} = 1.28 \text{ in. } \downarrow (33 \text{ mm})$$

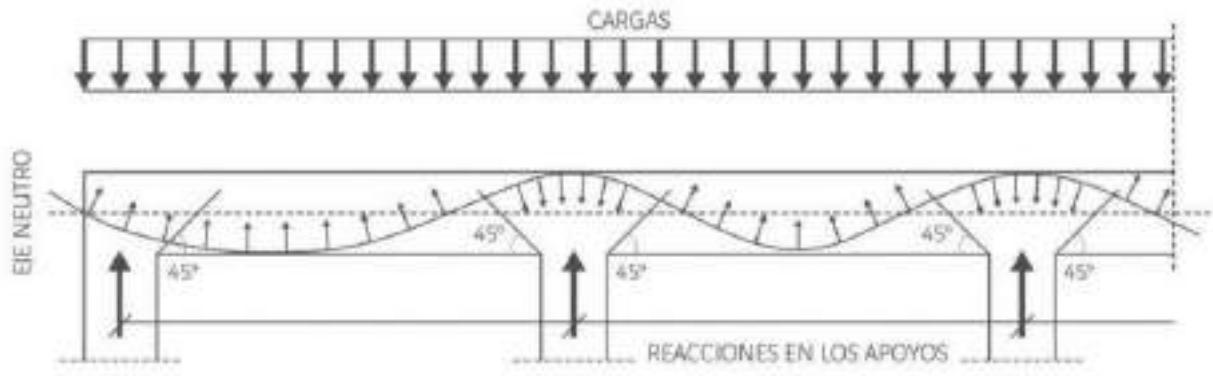


Vigas Indeterminadas Presforzadas



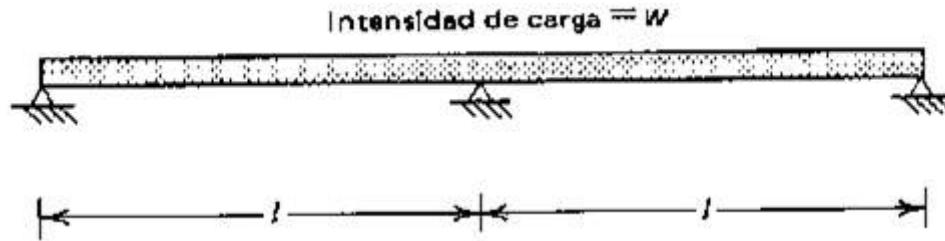
Características de Vigas Indeterminadas

- Reduce los momentos de flexión
- Produce momentos secundarios y reacciones secundarias debido a la excentricidad de las fuerzas de presfuerzo
- Estos momentos secundarios tienden a incrementar o disminuir los efectos primarios del presfuerzo
- Los efectos de encogimiento, flujo plástico y encogimiento son mayores (pérdidas)
- Disminución considerable en la formación de grietas
- La rigidez aumenta y la deformación es menor
- Menos anclajes
- Disminución de mano de obra

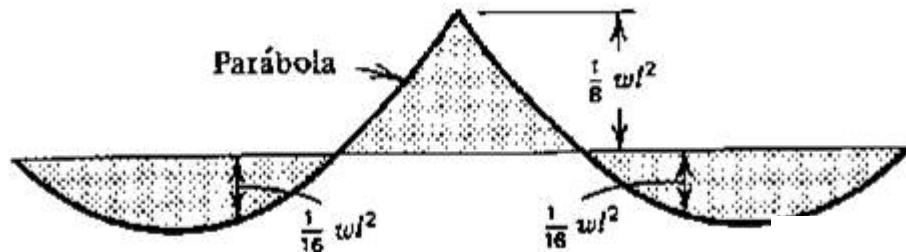


Bases para la selección de colocación del tendón

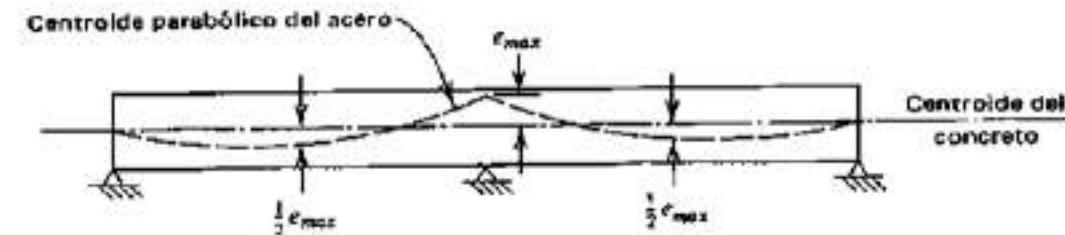
Cargas Aplicadas



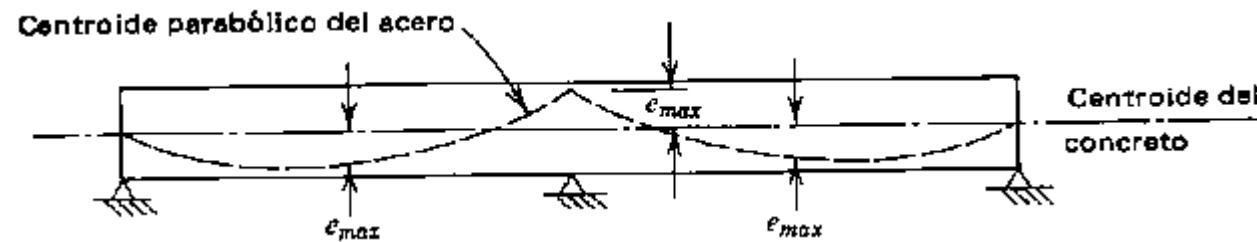
Momentos debido a cargas



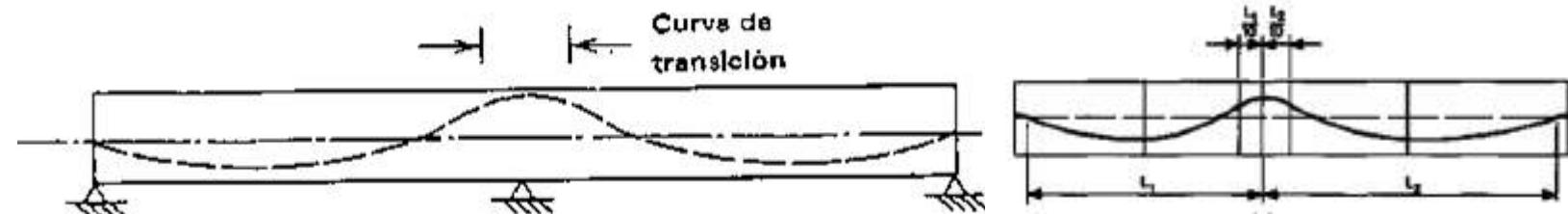
Perfil del tendón debido al diagrama de momento



Perfil del tendón debido basado en máxima excentricidad

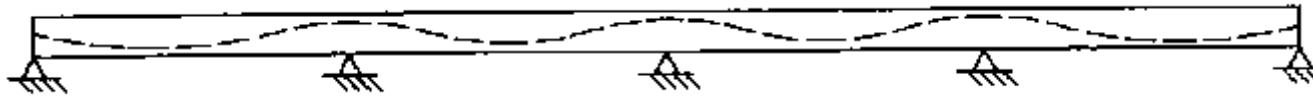


Arreglo práctico del tendón



Arreglos de tendón para vigas vaciadas en sitio

Tendones continuos en losas

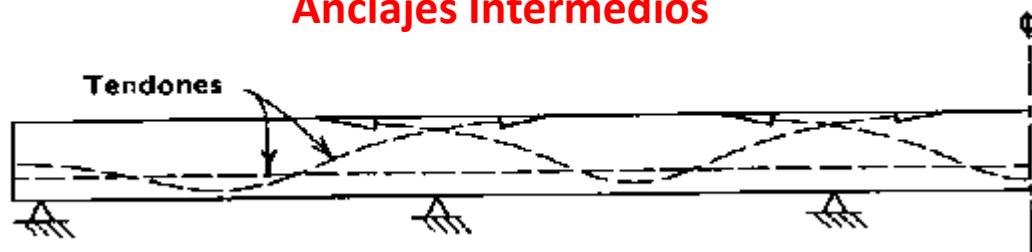


Viga de peralte variable

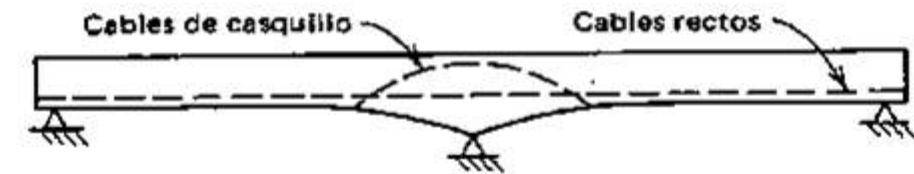
Variación del patín inferior en los apoyos internos



Anclajes Intermedios



Cables de Casquetes

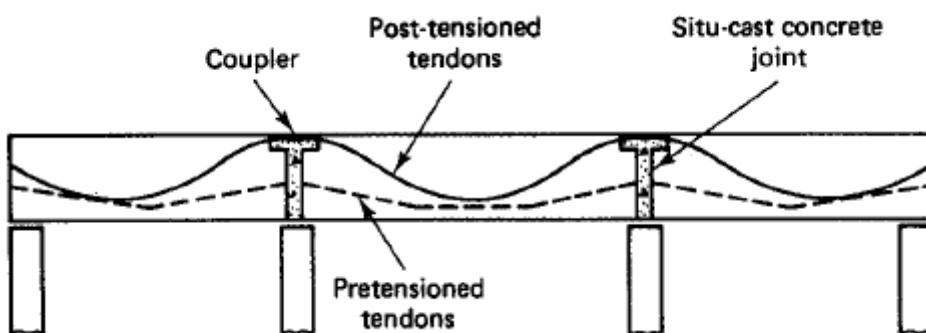
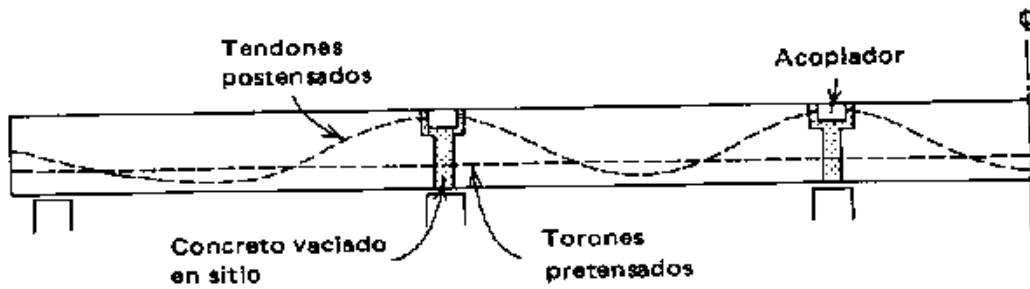


Construcción de claro por claro



Arreglos de tendón para vigas prefabricadas

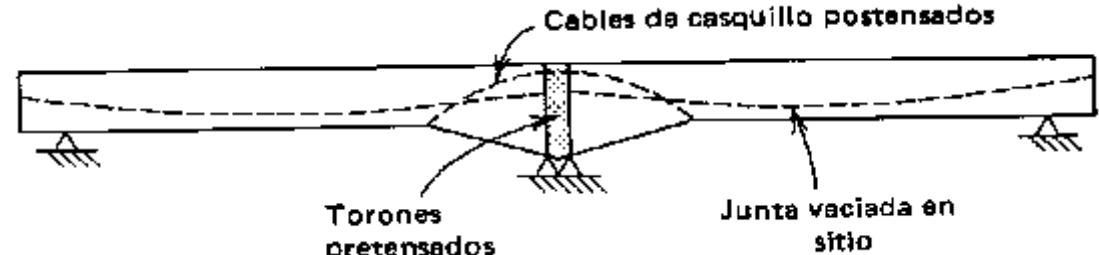
Tendones continuos acoplados



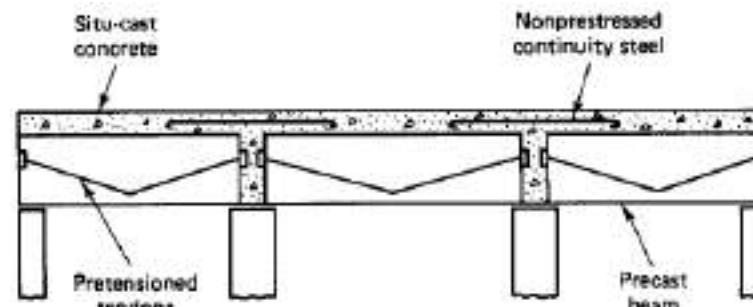
Segmentos prefabricados vaciados en secuencia



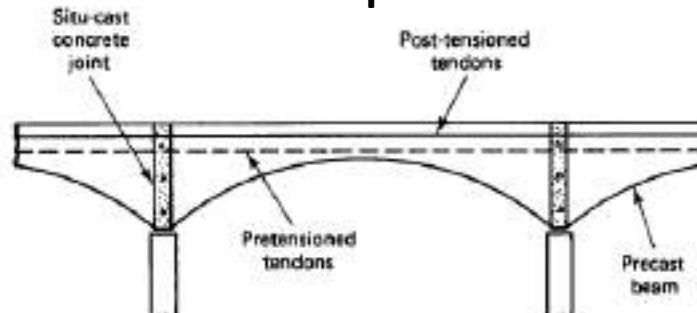
Cables de casquete en apoyos intermedios



Uso de acero no presforzado



Secciones no prismáticas

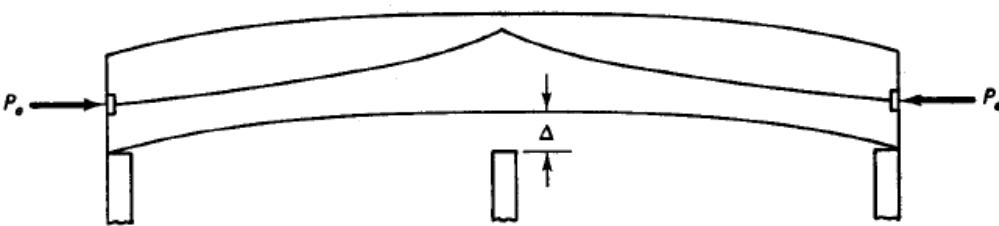


Análisis Elástico para Presfuerzo Continuo

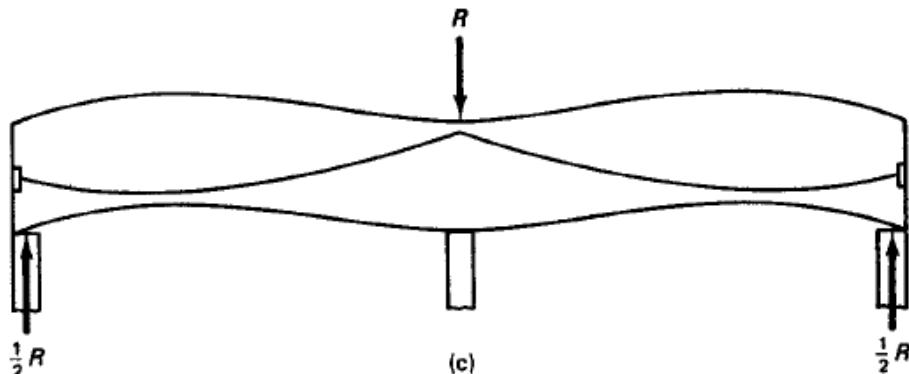
Método de Desplazamiento de Soporte

- El soporte del medio se asume que es liberado y se calcula el momento primario M_1

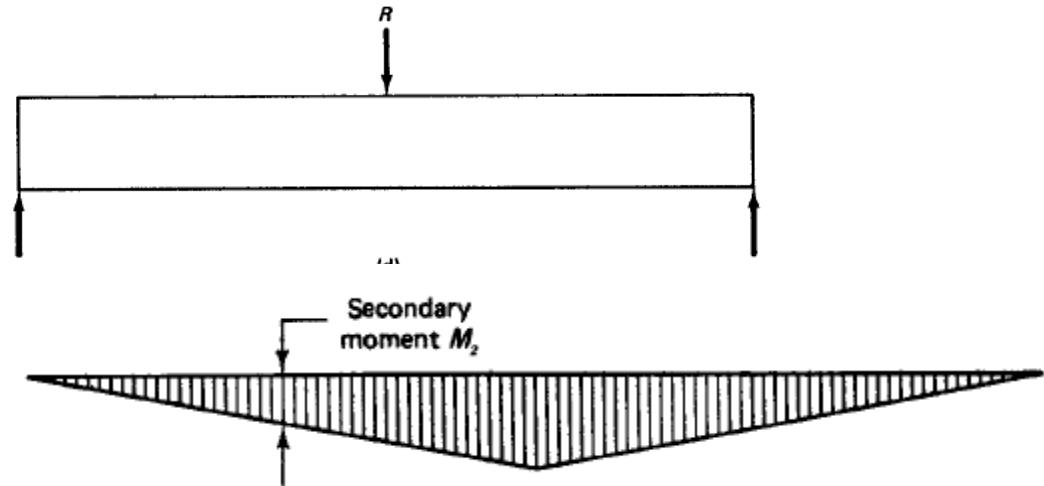
$$M_1 = P_e e_1$$



- La reacción tiende a equilibrar el desplazamiento en el apoyo



- La redundante R genera el Momento Secundario M_2
- "Se encuentra igualando desplazamientos en apoyo de sistema Primario y secundario por área-momento "*

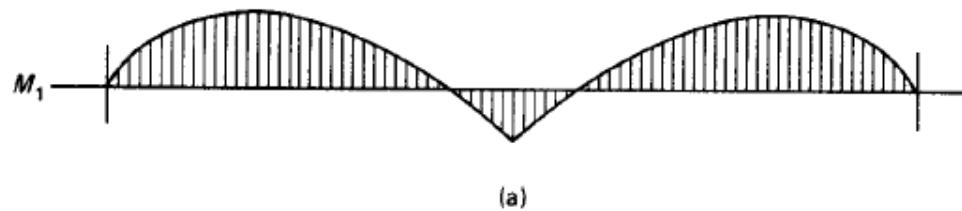


- Calculo de Momento Resultante

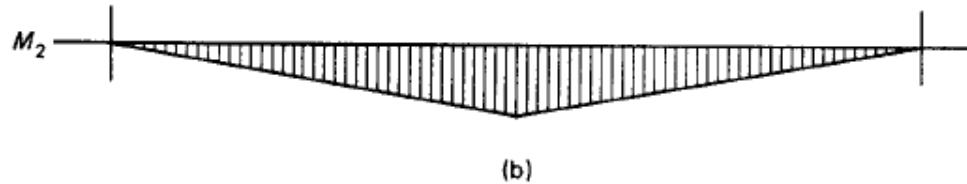
$$M_3 = M_1 + M_2$$

Superposición de Momentos

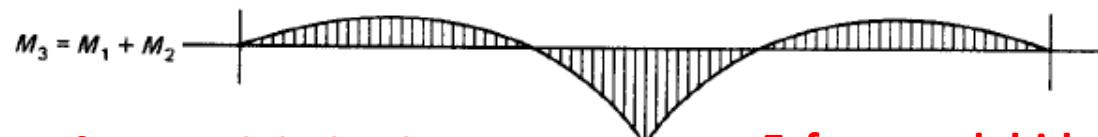
Momentos Primarios



Momentos Secundarios



Momentos Finales



Esfuerzos debido al tensado en soporte

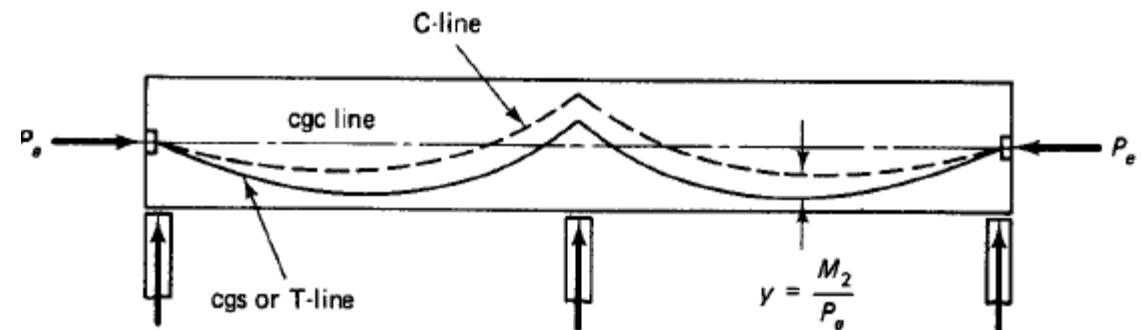
$$f^t = -\frac{P_e}{A_c} \left(1 + \frac{e'_e c_t}{r^2} \right)$$

$$f_b = -\frac{P_e}{A_c} \left(1 - \frac{e'_e c_b}{r^2} \right)$$

Esfuerzos debido al tensado en soporte + peso propio

$$f^t = -\frac{P_e}{A_c} \left(1 + \frac{e'_e c_t}{r^2} \right) + \frac{M_D}{S^t}$$

$$f_b = -\frac{P_e}{A_c} \left(1 - \frac{e'_e c_t}{r^2} \right) - \frac{M_D}{S_b}$$



Desviación de la excentricidad del tendón

$$y = \frac{M_2}{P_e}$$

Excentricidad Final

$$e' = e_3 = \frac{M_3}{P_e}$$

Esfuerzos el cable se encuentran arriba del eje neutro

$$f^t = -\frac{P_e}{A_c} - \frac{M_4}{S^t}$$

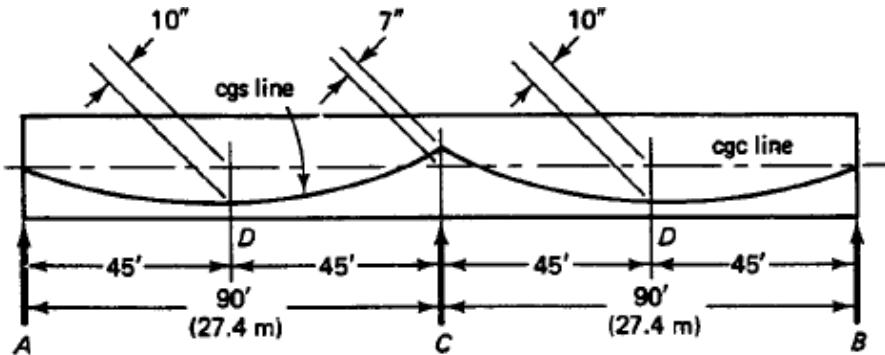
Momento Neto

$$M_4 = M_3 - M_D$$

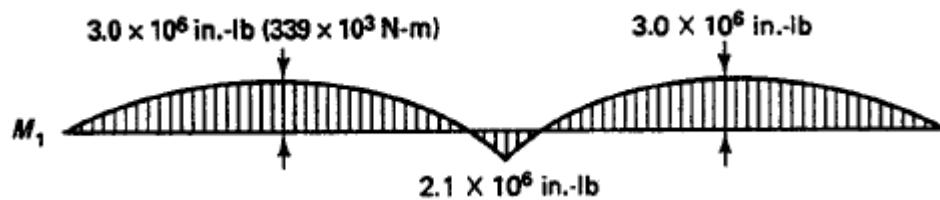
$$f_b = -\frac{P_e}{A_c} + \frac{M_4}{S_b}$$

Una viga prismática postensada continua tiene 3 apoyos. Si las dos luces son de 90 pies y los tendones se colocan como se muestra en la figura. La fuerza efectiva P_e después de las pérdidas es 300000 libras. Las dimensiones de la viga son $b = 12''$ y $h = 34''$. Calcule los momentos primarios y secundarios después del presfuerzo y los esfuerzos en el soporte C.

Método de Desplazamiento de Soportes



Momentos Primarios $M_1 = P_e$

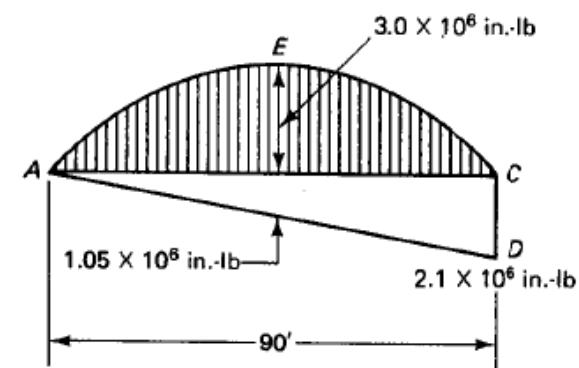
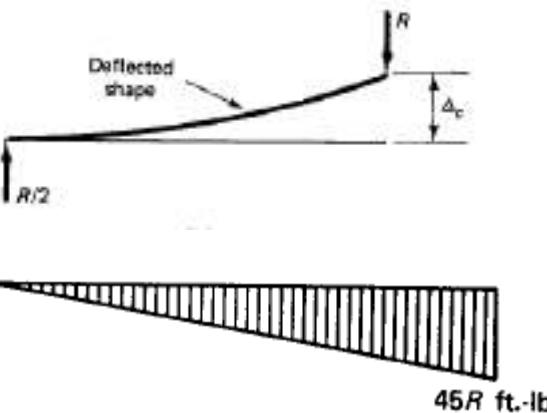


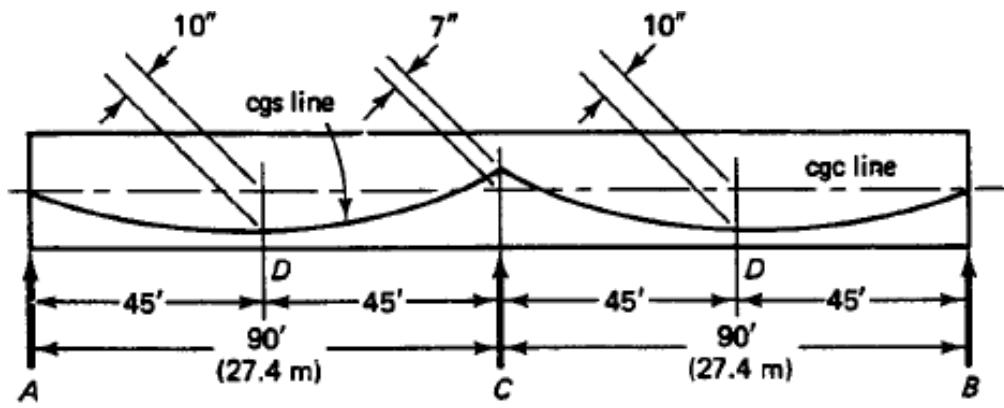
Calculo de Deformación en C debido la reacción R por medio de área - momento

$$EI\Delta_c = \frac{45R \times 12 \times 90}{2} \times \frac{90 \times 2}{3} \times 144 = 2.1 \times 10^8 R \text{ in.}^3\text{-lb}$$

Calculo de Deformación en C debido a presfuerzo por medio de área - momento

$$\begin{aligned} EI\Delta_c &= \left[(3.0 \times 10^6 + 1.05 \times 10^6) \frac{90 \times 2}{3} \right] \frac{90}{2} \times 144 \\ &\quad - \left(\frac{2.1 \times 10^6 \times 90}{2} \right) \frac{90 \times 2}{3} \times 144 \\ &= 7.58 \times 10^{11} \text{ in.}^3\text{-lb} \end{aligned}$$



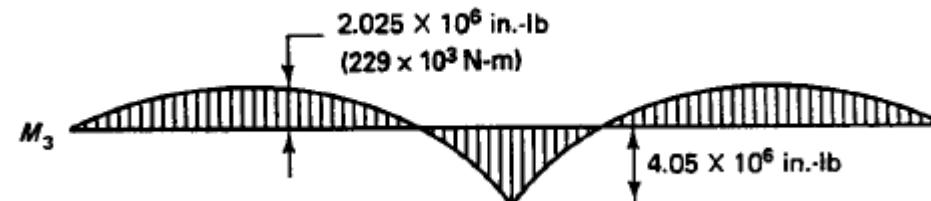
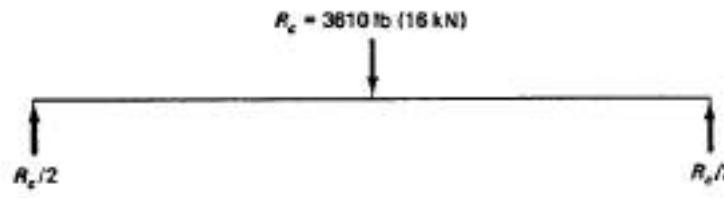


Igualando desplazamientos se obtiene R

$$7.58 \times 10^{11} = 2.1 \times 10^8 R$$

$$R_c = \frac{7.58 \times 10^{11}}{2.1 \times 10^8} = 3,610 \text{ lb} \downarrow (16 \text{ kN})$$

$$R_A = R_B = 1,805 \text{ lb} \uparrow (8 \text{ kN})$$



$$\begin{aligned} M_3 &= 3.0 \times 10^6 - \frac{1}{2} \times 1.95 \times 10^6 \\ &= 2.025 \times 10^6 \text{ in.-lb} \end{aligned}$$

En el centro del claro

Ubicación final de los cables

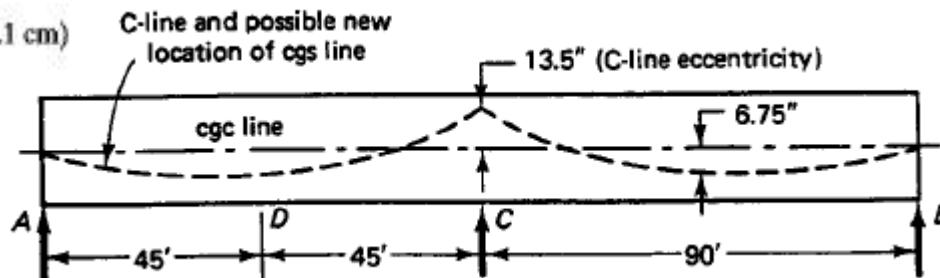
$$y_c = \frac{M_2}{P_e} = \frac{1.95 \times 10^6}{300,000} = 6.5 \text{ in. (16.5 cm)}$$

$$e_c = \frac{M_3}{P_e} = \frac{4.05 \times 10^6}{300,000} = 13.5 \text{ in. (34.3 cm)}$$

$$e_D = \frac{2.025 \times 10^6}{300,000} = 6.75 \text{ in. (17.1 cm)}$$

Cálculo de Momentos Secundarios

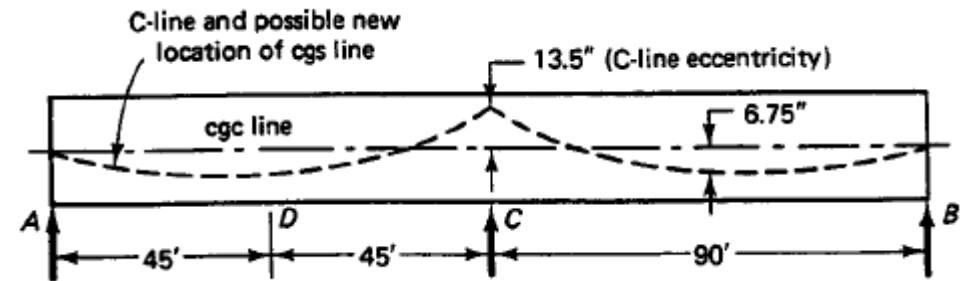
$$M_2 = \frac{R_c}{2} \times 90 \times 12 = \frac{3,610}{2} \times 90 \times 12 = 1.95 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$



Momentos Finales

En el centro apoyo

$$M_1 + M_2 = 2.1 \times 10^6 + 1.95 \times 10^6 = 4.05 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$



$$c_t = c_b = \frac{34}{2} = 17 \text{ in.}$$

$$e_c = 13.5 \text{ in.}$$

$$A_c = b h = 12 \times 34 = 408 \text{ in.}^2$$

$$I_c = \frac{bh^3}{12} = \frac{12(34)^3}{12} = 39,304 \text{ in.}^4$$

$$r^2 = \frac{I_c}{A_c} = \frac{39,304}{408} = 96.33 \text{ in.}^2$$

Esfuerzo en Fibra Superior

$$f' = -\frac{P_e}{A_c} \left(1 + \frac{ec_t}{r^2}\right)$$

$$= -\frac{300,000}{408} \left(1 + \frac{13.5 \times 17}{96.33}\right)$$

$$= -2,487 \text{ psi (C)} (17.1 \text{ MPa})$$

Esfuerzo en Fibra Inferior

$$\begin{aligned} f_b &= -\frac{P_e}{A_c} \left(1 - \frac{ec_b}{r^2}\right) \\ &= -\frac{300,000}{408} \left(1 - \frac{13.5 \times 17}{96.33}\right) \\ &= +1,016 \text{ psi (T)} (7.0 \text{ MPa}) \end{aligned}$$

Método de Carga Equivalente Calculo de W_b y FEM

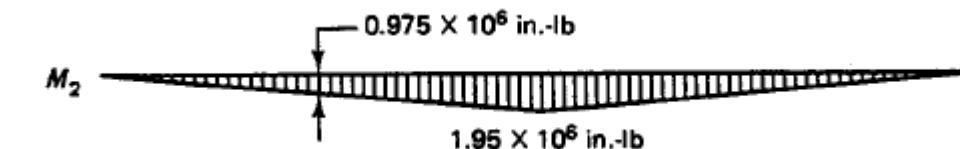
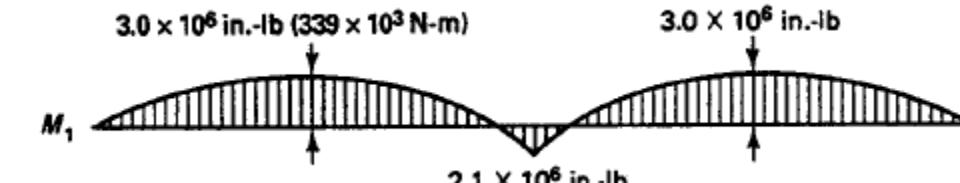
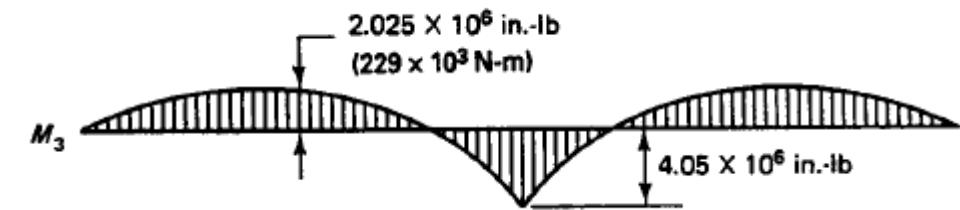
$$W_b = \frac{8Pa}{l^2}$$

$$W_b = \frac{8 \times 300,000 \times 13.5}{(90)^2 \times 12} = 333.3 \text{ lb/ft}$$

$$\text{FEM} = \frac{W_b l^2}{12} = \frac{333.3(90)^2}{12} = 224,978 \text{ ft-lb}$$

Cálculo de Momentos Finales por Hardy - Cross

	W_b	333.3 lb/ft (4.87 kN/m)		
A	45'	D	45'	90'
Dist. factor	1.00	0.50	0.50	1.00
FEM (ft-lb)	+224,978	-224,978	+224,978	-224,978
	-224,978	-112,489	+112,489	+224,978
M_3	0	-337,467	+337,467 ft-lb (4.05×10^6 in.-lb)	0



Los cálculos de excentricidades y esfuerzos igual que el método anterior

Diagrama de Cortante y Momentos en Vigas

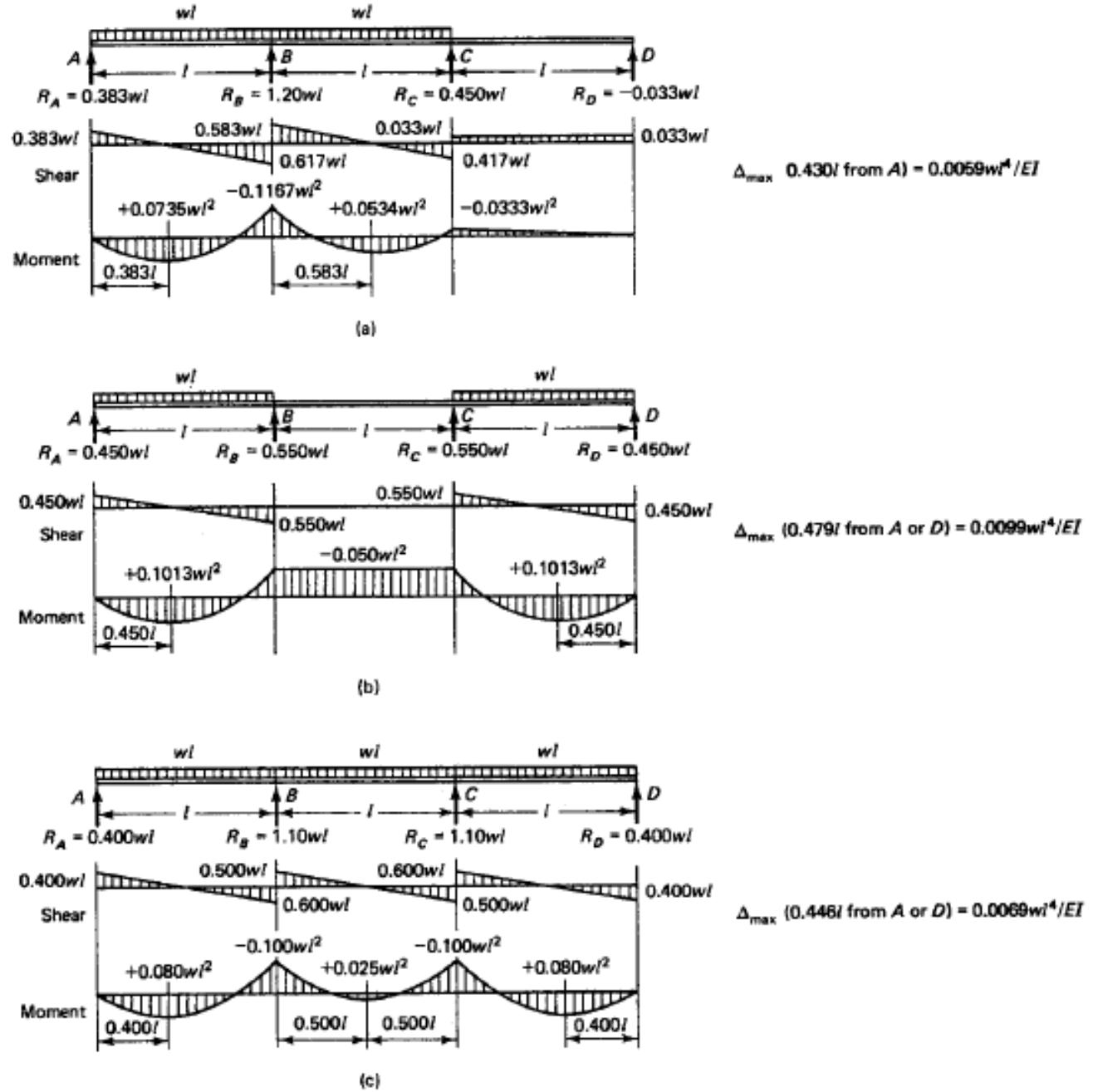
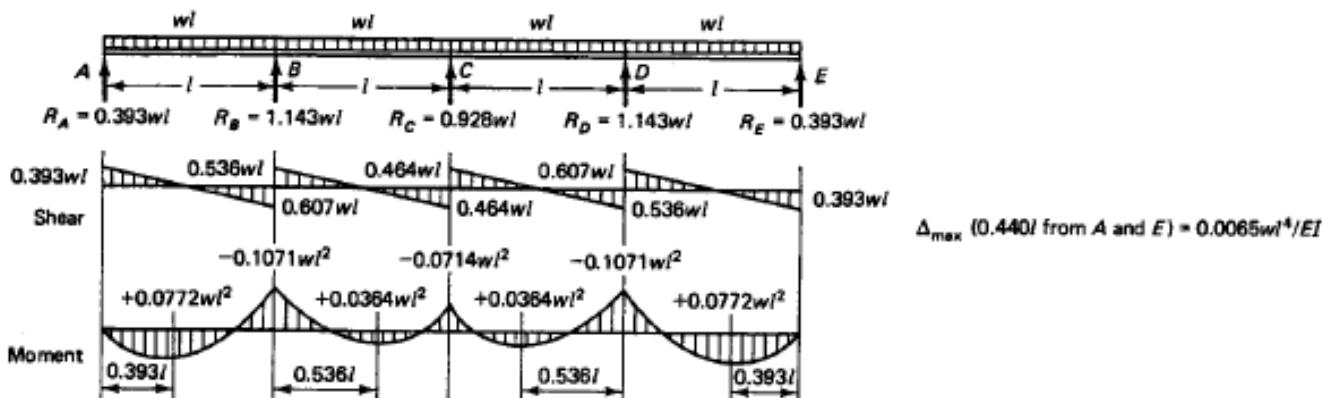
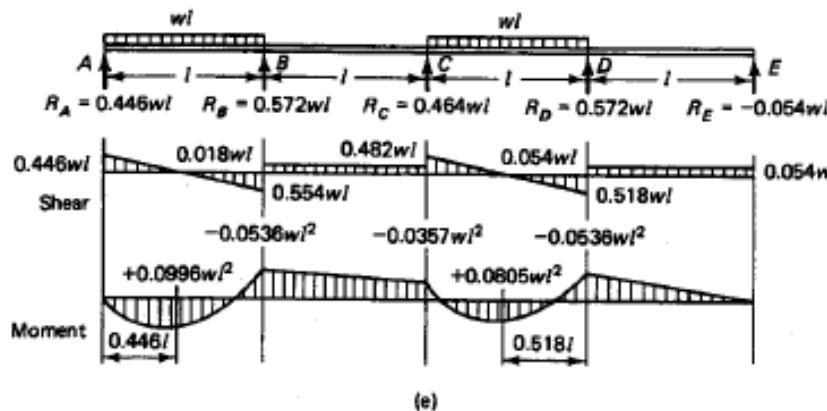
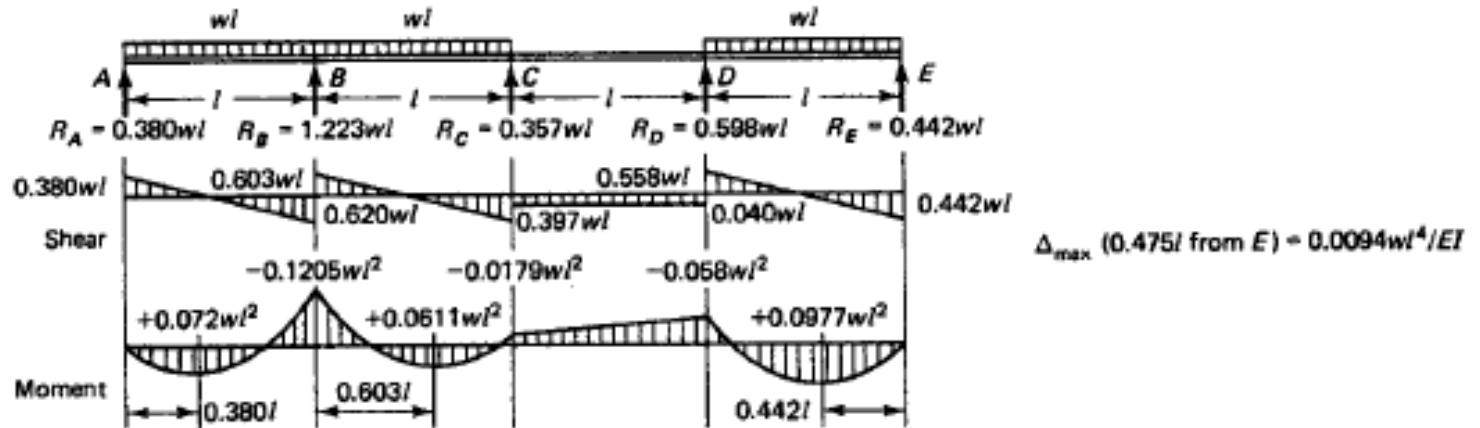
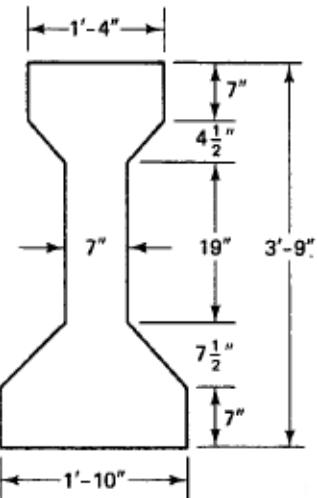


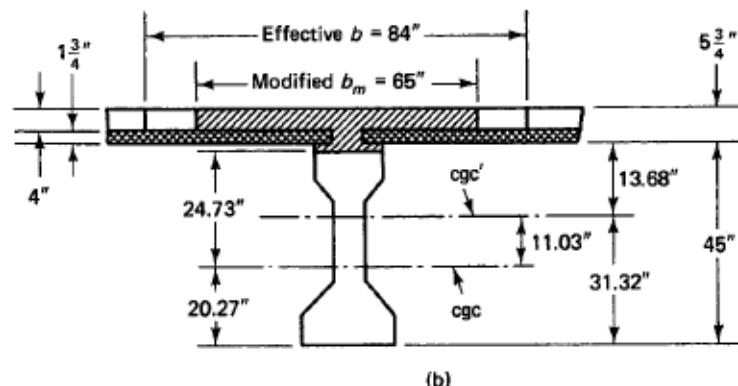
Diagrama de Cortante y Momentos en Vigas



**Verifique la viga de tres luces de 64 pies que soporta
Solo la carga viva W_L 1514 lb /p más peso propio de viga
+ sección compuesta sobreimpuesta. El máximo esfuerzo
Permitido a compresión $f_c = 0.45f'_c = 2250\text{psi}$. El ancho
efectivo $b_m = 65 "$ para el topping de la sección compuesta**



(a) Section



(b) Load data

$$W_D = 583 \text{ plf (8.5 kN/m)}$$

$$W_{SD} = (1\frac{1}{4}/12) \times 7 \text{ ft} \times 150 = 153 \text{ plf (2.2 kN/m)} \text{ for } 1\frac{1}{2} \text{ in. precast slab formwork}$$

$$W_{CSD} = (4/12) \times 7 \text{ ft} \times 150 = 350 \text{ plf (5.1 kN/m)} \text{ for 4 in. situ-cast topping}$$

$$W_L = 1,514 \text{ plf (22.1 kN/m)} \text{ (obtained from } M_L = 9,300,000 \text{ in.-lb)}$$

$$\text{Span} = 64 \text{ ft (19.5 cm)}$$

1. Input data from Example 4.7

(a) Stress data

Precast $f'_c = 5,000 \text{ psi (34.5 MPa)}$, normal-weight concrete

Topping $f'_c = 3,000 \text{ psi (20.7 MPa)}$, normal-weight concrete

$$f'_c = 4,000 \text{ psi (27.6 MPa)}$$

$$f_{pc} = 270,000 \text{ psi (1,862 MPa)}$$

$$f_{py} = 243,000 \text{ psi (1,655 MPa)}$$

$$f_{ps} = 189,000 \text{ psi (1,303 MPa)}$$

$$f_{ps} = 0.8(0.7f_{ps}) = 151,200 \text{ psi (1,043 MPa)}$$

$$\gamma = 0.8$$

$$\text{Midspan } f_t = 12\sqrt{f'_c} = 12\sqrt{5,000} = 849 \text{ psi (5.85 MPa)}$$

$$\text{Support } f_t = 6\sqrt{f'_c} = 425 \text{ psi (2.93 MPa)}$$

AASHTO Type III

Property	Precast	Composite	
$A_c, \text{ in.}^2$	560	934	
$I_c, \text{ in.}^4$	125,390	297,045	$n = E_c(\text{topping})/E_c(\text{precast}) = 0.77$
$r^2, \text{ in.}^2$	223.9	318.1	Precast $h = 45 \text{ in. (114.3 cm)}$
$c_b, \text{ in.}$	20.27	31.32	Transformed $b = 65 \text{ in. (165 cm)}$
$c_t, \text{ in.}$	24.73	13.86	Situ-cast $h_t = 5.75 \text{ in. (14.6 cm)}$
$S_b, \text{ in.}^3$	6,186	9,490	
$S_t, \text{ in.}^3$	5,070	21,174	
$S_{cts}, \text{ in.}^3 (\text{bottom of slab})$		19,251	
$S_{ctt}, \text{ in.}^3 (\text{top of slab})$		15,288	

Acero de Presfuerzo

Twenty-two $\frac{1}{2}$ -in. dia (12.7 mm dia) 7-wire low-relaxation strands

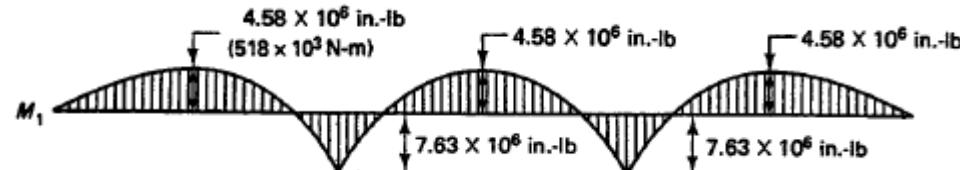
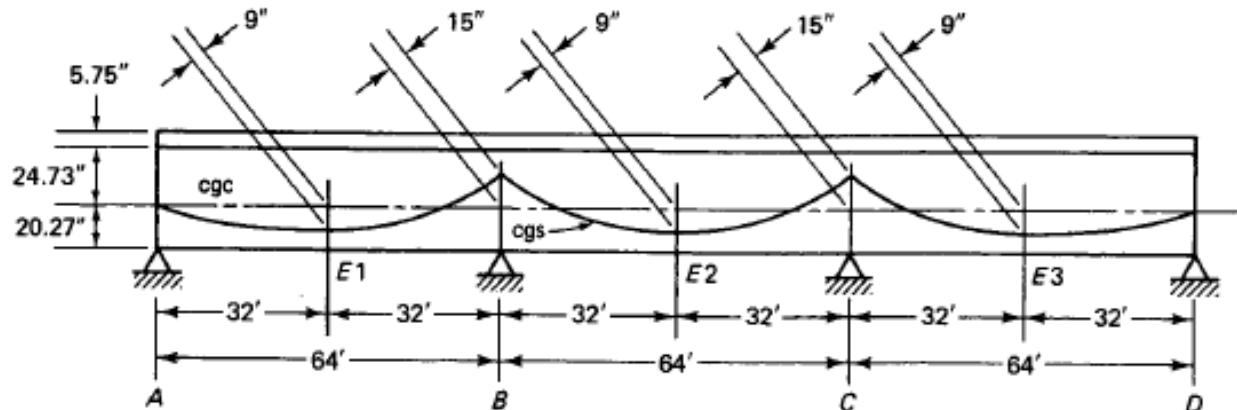
$$A_{ps} = 22 \times 0.153 = 3.366 \text{ in.}^2 (21.7 \text{ cm}^2)$$

Momentos Primarios

$$P_e = 3.366 \times 151,200 = 508,940 \text{ lb (2,264 kN)}$$

$$M_B = P_e \times e_B = 508,940 \times 15 = 7.63 \times 10^6 \text{ in.-lb (862} \times 10^3 \text{ N-m)}$$

$$M_{E_1} = 508,940 \times 9 = 4.58 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$

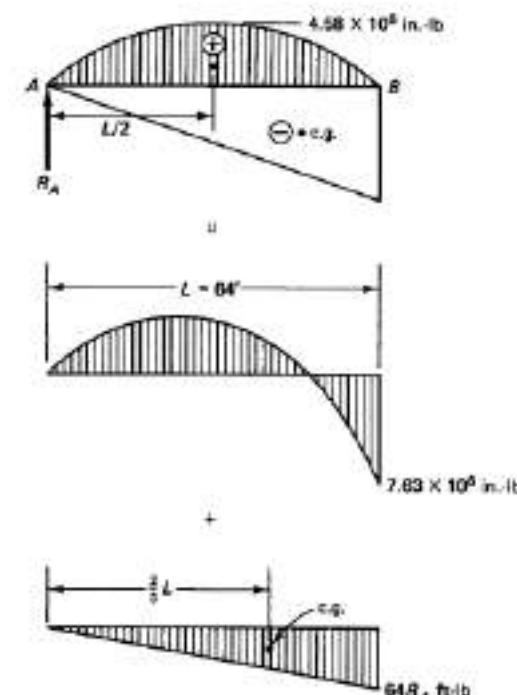


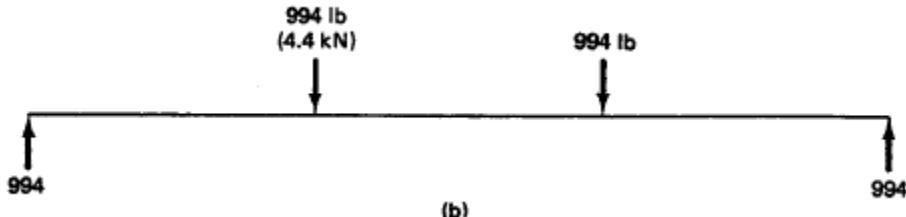
Calculo de Reacciones

$$\begin{aligned} E_c I_c \Delta_B &= E_c I_c \Delta_c = \left[\left(\frac{7.63}{2} + 4.58 \right) 10^6 \times \frac{64 \times 2}{3} \right] \times \frac{64}{2} \times 144 \\ &\quad - \left[\frac{7.63 \times 10^6 \times 64}{2} \right] \times \frac{64 \times 2}{3} \times 144 \\ &= 15.0 \times 10^{10} \text{ in.-lb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_c I_c \Delta_B &= (R_A \times 64 \times 12) \left(\frac{64 \times 12}{2} \right) \left(\frac{64 \times 12 \times 2}{3} \right) \\ &= 151 \times 10^6 R_A \text{ in.}^3 \text{-lb} \end{aligned}$$

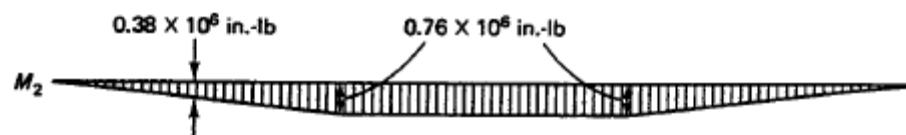
$$R_A = R_D = \frac{15.0 \times 10^{10}}{151 \times 10^6} = 994 \text{ lb} \uparrow (\text{By exact calculation } = 798 \text{ lb})$$





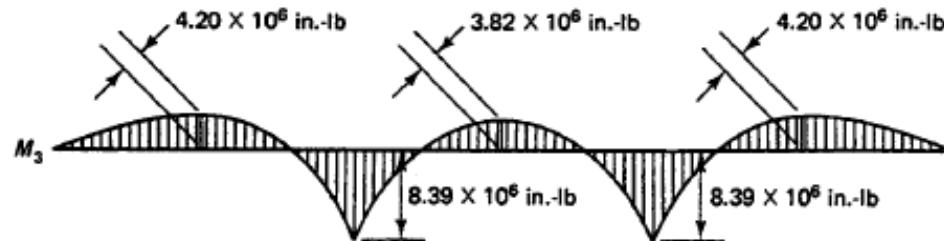
Momentos Secundarios

$$R_A \times 64 \times 12 = 994 \times 64 \times 12 = 0.76 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$



Momentos Totales

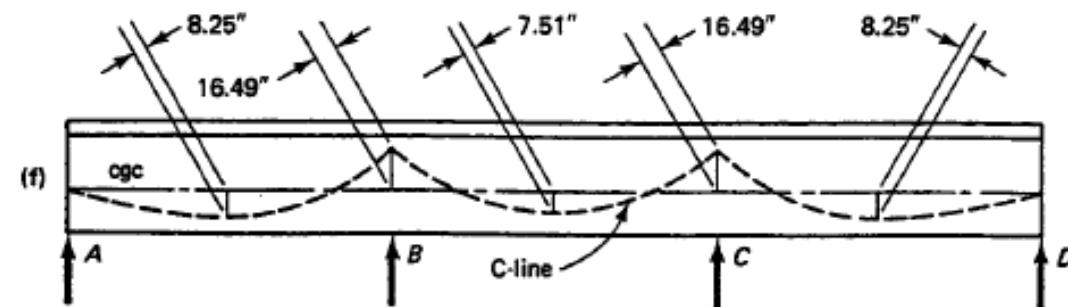
$$\text{Support } M_3 = (7.63 + 0.76) \times 10^6 = 8.39 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$



$$\text{Midspan } M_3 = (4.58 - 0.38)10^6 = 4.20 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$

Excentricidades Finales

$$e'_{E1} = +\frac{4.20 \times 10^6}{508,940} = +8.25 \text{ in. (21.0 cm)}$$



$$e'_B = -\frac{8.39 \times 10^6}{508,940} = -16.49 \text{ in. (41.9 cm)}$$

Esfuerzos debido a presfuerzo y peso propio en B

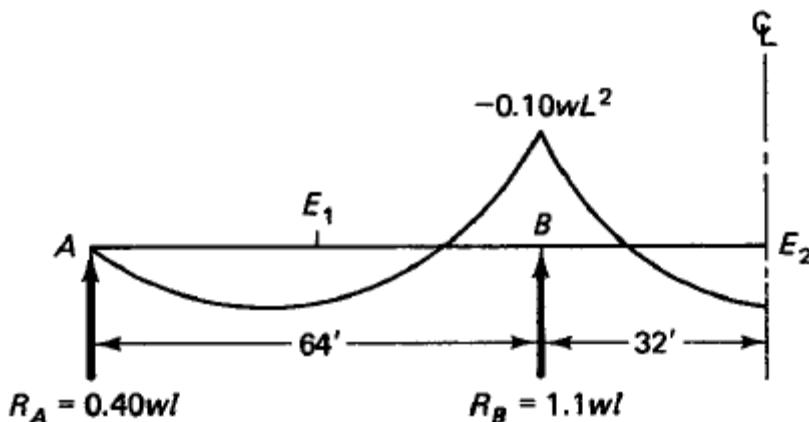
$$M_D \text{ at } B = M_{B1} = 0.10 \times 583(64)^2 \times 12 = 2.87 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$

(see Figure 6.17)

$$P_e = A_{ps} f_{pt} = 3.366 \times 151,200 = 508,940 \text{ lb}$$

M_D at $E_1 = 2.12 \times 10^6 \text{ in.-lb}$ (Max. + M is not at midspan; hence, calculate M_{E1} from the area of the shear diagram)

$$\text{Net } R_B = 1.1W \uparrow - 994 = 1.1 \times 583 \times 64 - 994 = 40,048 \text{ lb}$$



$$M_4 = M_3 - 2.87 \times 10^6 = (8.39 - 2.87)10^6 \\ = 5.52 \times 10^6 \text{ in.-lb} (624 \times 10^3 \text{ N-m})$$

$$f'_1 = -\frac{P_e}{A_c} - \frac{M_4}{S'} = -\frac{508,940}{560} - \frac{5.52 \times 10^6}{5,070} = -908.8 - 1,088.8 \\ = -1997.6 \text{ psi (C)} (13.8 \text{ MPa}) < 2,250 \text{ psi, O.K.}$$

$$f_{1b} = -\frac{P_e}{A_c} + \frac{M_4}{S_b} = -\frac{508,940}{560} + \frac{5.52 \times 10^6}{6,186} = -908.8 + 892.3 \\ = -16.5 \text{ psi (C), no tension, O.K.}$$

de forma alternativa también podemos usar

$$f'_1 = -\frac{P_e}{A_c} \left(1 + \frac{e'_c c_f}{r^2} \right) + \frac{M_D}{S'} \\ = -\frac{508,940}{560} \left(1 + \frac{16.49 \times 24.73}{223.9} \right) + \frac{2.87 \times 10^6}{5,070} \\ = -2,564.1 + 566.1 = -1,998 \text{ psi (C)} (13.8 \text{ MPa})$$

$$f'_{1b} = -\frac{P_e}{A_c} \left(1 - \frac{e'_c c_b}{r^2} \right) - \frac{M_D}{S_b} \\ = -\frac{508,940}{560} \left(1 - \frac{16.49 \times 20.27}{223.91} \right) - \frac{2.87 \times 10^6}{6,186} \\ = +447.9 - 463.9 = -16.0 \text{ psi (C)}$$

Outer span midspan E₁

The eccentricity at the midspan is $e'_{E1} = +8.25 \text{ in.}$ Hence,

$$f'_1 = -\frac{P_e}{A_c} + \frac{M_4}{S'}$$

$$f_{1b} = -\frac{P_e}{A_c} - \frac{M_4}{S_b}$$

Total moment M_4 at E₁ = $(4.20 - 2.12)10^6 = 2.08 \times 10^6 \text{ in.-lb}$

$$f'_1 = -\frac{P_e}{A_c} + \frac{M_4}{S'} = -\frac{508,940}{560} + \frac{2.08 \times 10^6}{5,070} \\ = -908.8 + 410.3 = -498.5 \text{ psi (C)} (3.4 \text{ MPa}), \text{ O.K.}$$

$$f_{1b} = -908.8 - \frac{2.08 \times 10^6}{6,186} = -1,245 \text{ psi (C)} (8.6 \text{ MPa}), \text{ O.K.}$$

Effect of adding the superimposed dead loads on support sections B and C At this stage of the construction process the 1½ in. thick precast slabs (W_{SD}) are erected, followed by placing the 4 in. thick layer of wet concrete (W_{SD}). Thus, $W_{SD} = 153 + 350 = 503 \text{ plf}$ (7.3 kN/m). The support moment due to superimposed load is

$$M_{B2} = 0.1wl^2 = 0.1 \times 503(64)^2 \times 12 = -2.47 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$

Also,

$$f'_2 = -\frac{P_e}{A_c} - \frac{M_5}{S'}$$

$$f_{2b} = -\frac{P_e}{A_c} + \frac{M_5}{S_b}$$

$$M_5 = (M_4 - 2.47 \times 10^6) \text{ in.-lb} = 3.05 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$

Hence,

$$f'_2 = -908.8 - \frac{3.05 \times 10^6}{5,070} = -1,510.4 \text{ psi (C)}$$

$$f_{2b} = -908.8 + \frac{3.05 \times 10^6}{6,186} = -415.8 \text{ psi (C)}$$

Añadiendo al esfuerzo carga viva superpuesta

$$f'_T = -\frac{P_e}{A_c} \left(1 - \frac{ec_t}{r^2} \right) - \frac{M_D + M_{SD}}{S'} - \frac{M_{CSO} + M_L}{S'_c}, \text{ where } S'_c \text{ is at the top of the precast section}$$

$$f_{bT} = \frac{P_e}{A_c} \left(1 + \frac{ec_b}{r^2} \right) + \frac{M_D + M_{SD}}{S_b} + \frac{M_{CSO} + M_L}{S_{cb}}$$

where $e = e'_B = M_3/P_e$ and M_{CSO} is the additional superimposed dead load at service after erection, assumed zero here.

From before, the C-line eccentricity is $e'_B = M_3/P_e = -8.39 \times 10^6 / 508,940 = -16.49 \text{ in.}$ (41.9 cm). Also, the support moments, using the appropriate signs, are

$$M_D = -2.87 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$

$$M_{SD} = -2.47 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$

and

$$M_L = -8.68 \times 10^6 \text{ in.-lb (including } M_{CSO})$$

$$\begin{aligned} f'_T &= -\frac{508,940}{560} \left[1 - \frac{(-16.49) \times 24.73}{223.91} \right] \\ &\quad + \frac{(2.87 + 2.47) \times 10^6}{5,070} + \frac{8.68 \times 10^6}{21,714} \\ &= -2,560 + 1,053.2 + 399.7 = -1,111 \text{ psi (C)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{bT} &= -\frac{508,940}{560} \left[1 + \frac{(-16.49) \times 20.27}{223.91} \right] \\ &\quad - \frac{(2.87 + 2.47) \times 10^6}{6,186} - \frac{8.68 \times 10^6}{9,490} \\ &= +447.9 - 863.2 - 914.6 \\ &= -1,330 \text{ psi (C) (9.2 MPa)} < 2,250 \text{ psi, O.K.} \end{aligned}$$

Stresses at top and bottom fibers of the situ-cast 4 in. slab

From Equations 4.20a and b, the maximum fiber stresses at the top and bottom fibers on the composite slab at the support section are evaluated using section moduli S'_{CS} and S_{bCS} , where

$$f'_{CS} = +\frac{M_L}{S'_{CS}} \times \text{modular ratio } n = 0.77$$

$$f_{bCS} = +\frac{M_L}{S_{bCS}} \times n$$

Hence,

$$f'_{CS} = \frac{8.68 \times 10^6}{15,288} \times 0.77 \approx +437 \text{ psi (T) (3 MPa)} = 425 \text{ psi, O.K.}$$

$$f_{bCS} = +\frac{8.68 \times 10^6}{19,251} \times 0.77 \approx +347 \text{ psi (T) (2.4 MPa)} < 425 \text{ psi, O.K.}$$

$$7 + 7.5/2 = 10.8 \text{ in.} > 8.90 \text{ in.}$$

$$\begin{aligned}\text{Available } M_n &= A_{ps} f_{ps} \left(d_p - \frac{a}{2} \right) + A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) + A'_s f_y \left(\frac{a}{2} - d' \right) \\ &= 3.366 \times 240,000 \left(36.76 - \frac{8.90}{2} \right) \\ &\quad + 0.80 \times 60,000 \left(48.5 - \frac{8.9}{2} \right) + 0.40 \times 60,000 \left(\frac{8.9}{2} - 3 \right) \\ &= 28.25 \times 10^6 \text{ in.-lb} (3.1 \times 10^3 \text{ kN-m}) > 21.71 \times 10^6 \text{ in.-lb}\end{aligned}$$

Calculo de Momento Resistente

Nominal moment strength

The support section factored M_u is

$$1.2 \times 5.34 \times 10^6 + 1.6 \times 8.68 \times 10^6 = 20.3 \times 10^6 \text{ in.-lb}$$

From step 2, the factored elastic secondary moment induced by reactions due to prestress, using a load factor of 1.0 as stipulated in the ACI code, is $M_2 = 0.76 \times 10^6$ in.-lb, and the total factored moment $M_u = (20.3 - 0.76) \times 10^6 \text{ in.-lb} = 19.54 \times 10^6$ in.-lb (2.20 kN-m). Also, the required nominal moment strength $M_u = M_s/\phi = 19.54 \times 10^6 / 0.90 = 21.71 \times 10^6 \text{ in.-lb}$ (2.46 kN-m). If A'_s yielded, $f_y = f'_s = 60,000 \text{ psi}$, width b at bottom = 22 in. So

$$\begin{aligned}a &= \frac{A_{ps} f_{ps} + A_s f_y - A'_s f_y}{0.85 f'_c b} \\ &= \frac{3.366 \times 240,000 + 0.8 \times 60,000 - 0.4 \times 60,000}{0.85 \times 5,000 \times 22} \\ &= 8.90 \text{ in. (22.6 cm)}$$

Losas Presforzadas

- *Losa postensada:*

Elemento tipo losa que es reforzada con acero de alta resistencia, el cual es tensado a una fracción de su resistencia última a tensión. El refuerzo “activo” imparte una fuerza de compresión inicial a la losa para mejorar el comportamiento estructural de la misma (servicio, resistencia).



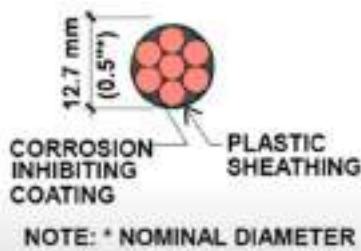
Ventajas de uso de postensado

- Mejor desarrollo sísmico
 - ✓ Menos peso
 - ✓ Menos cortante
 - ✓ Menos momento de volcamiento
- Ciclo constructivo más ágil
 - ✓ Típico una semana por colado

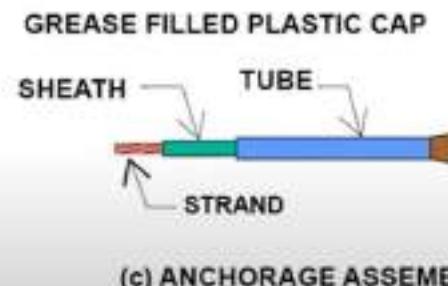
Postensado no adherido (unbonded)



(a) STRAND

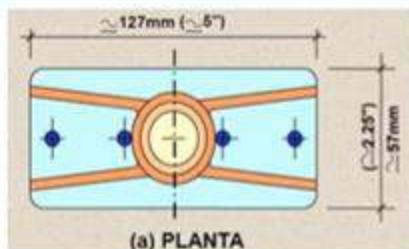


(b) TENDON

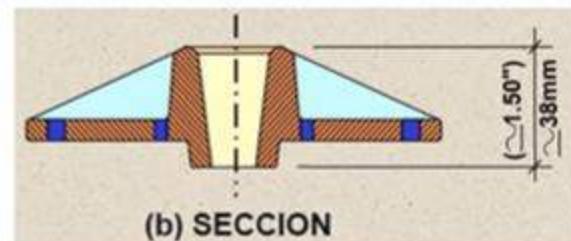


(c) ANCHORAGE ASSEMBLY

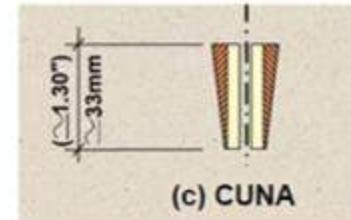
Postensado no adherido (unbonded)



(a) PLANTA

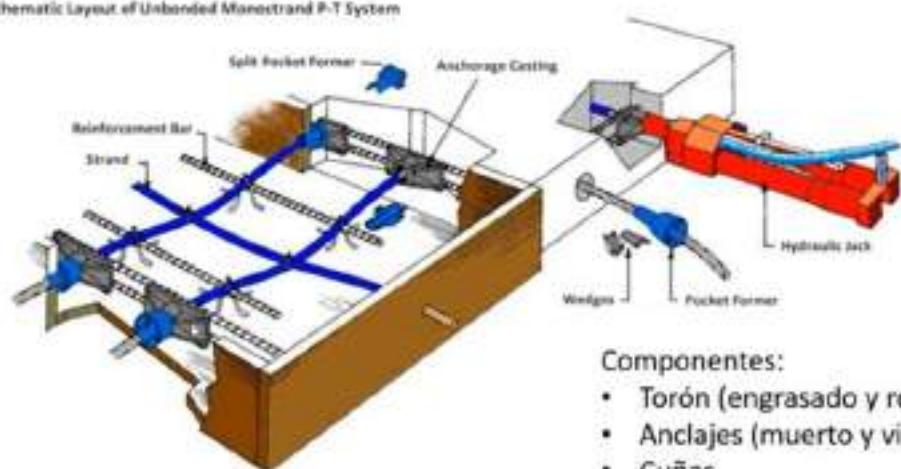


(b) SECCION



(c) CUNA

Schematic Layout of Unbonded Monostrand P-T System



Componentes:

- Torón (engrasado y recubierto)
- Anclajes (muerto y vivo)
- Cuñas
- Formador de caja
- Equipo de tensado (jacking stress y bomba hidráulica con galga)

Vía Configuración para ac.

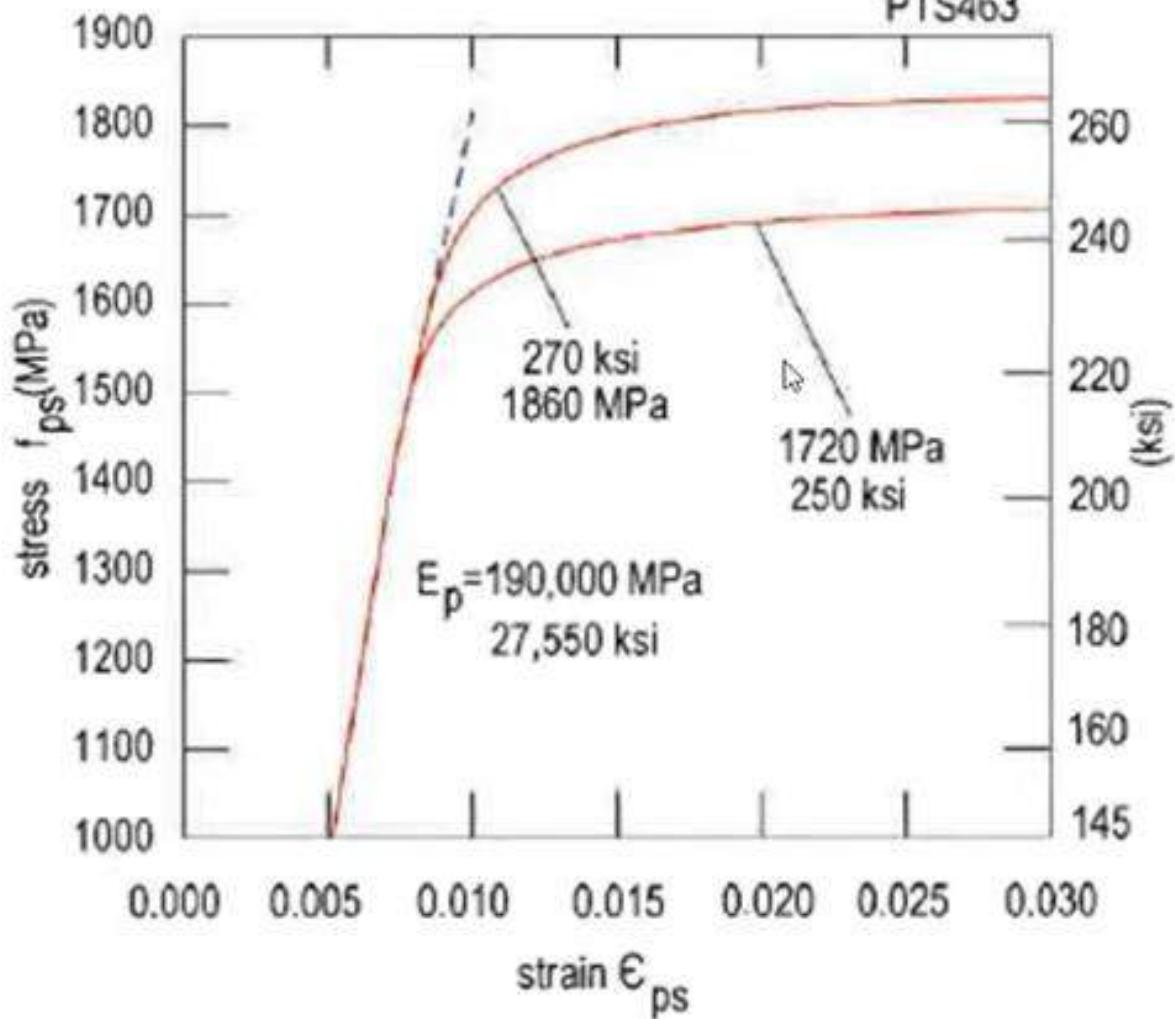
Materiales (uso común PT lasas edificios comerciales)

- Concreto
 - Resistencia cilindro a 28 días, $f'c = 350 \text{ kgf/cm}^2$
 - Peso específico, $\gamma = 2400 \text{ kg/m}^3$
 - Módulo de elasticidad, según ACI-318, $E = 15100 (f'c^{0.5}) = 282495 \text{ kg/cm}^2$
 - Coeficiente de fluencia, $u=1.50 \text{ a } 2.5$
 - Valor de retracción último, $sh= 400 \text{ a } 550 \text{ micro-deformación unitaria}$
 - Valor de coeficiente de Poisson, $v=0.20$

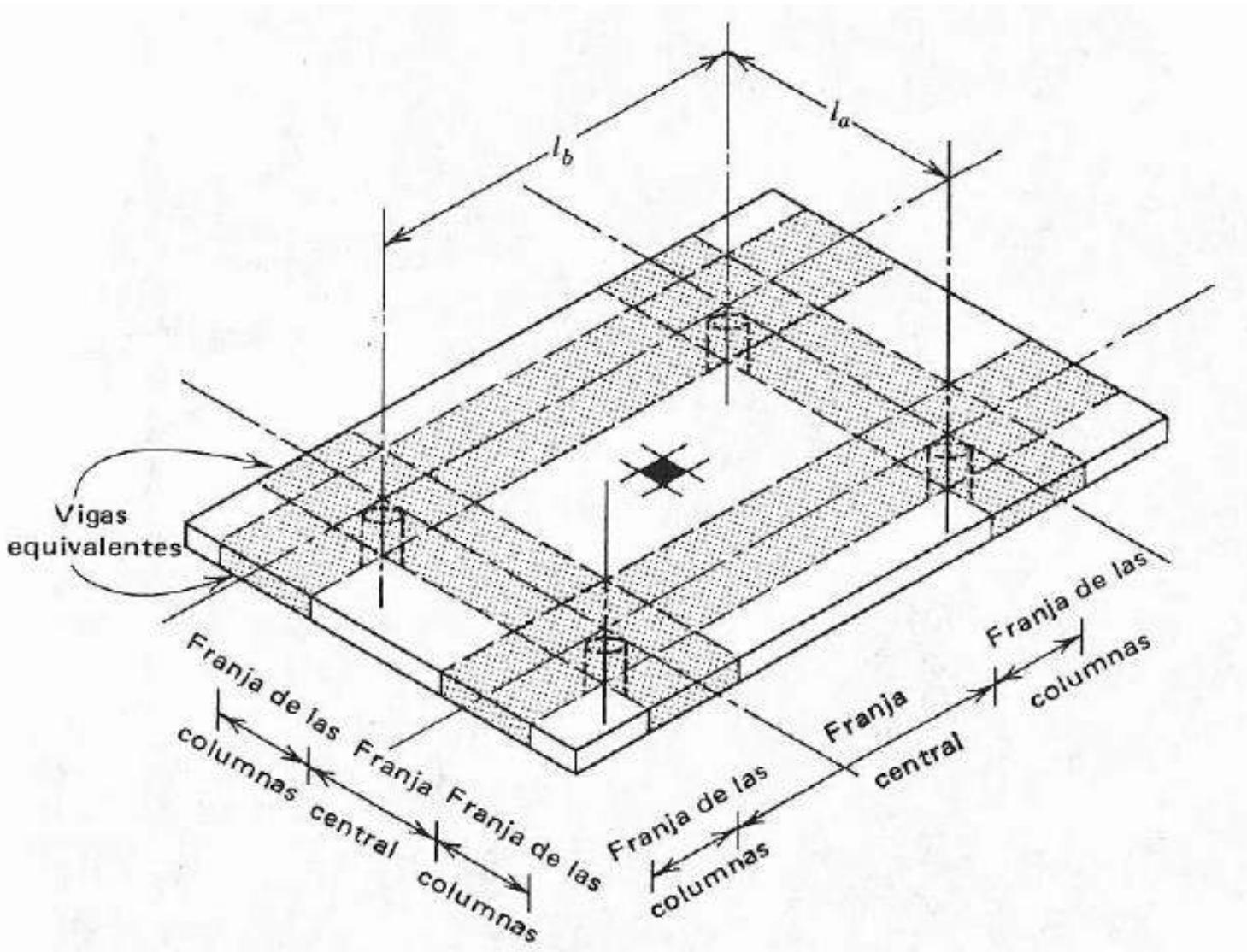
Materiales (uso común PT losas edificios comerciales)

- Acero presforzado
 - Cable de siete hilos, de baja relajación, resistencia última a tensión, $f_{pu} = 18690 \text{ kg/cm}^2$
 - Diámetro común , $\phi_i = 12.7\text{mm}(0.50 \text{ in})$, área = $99 \text{ mm}^2 (0.153 \text{ in}^2)$
 - Diámetro cargas mayor peso, $\phi_i = 15\text{mm} (0.60 \text{ in})$, área = $150 \text{ mm}^2 (0.217 \text{ in}^2)$
 - Módulo de elasticidad, $E = 2,000,000 \text{ kg/cm}^2$
 - Fuerza en el gato, $f_{gato} = 0.75 - 0.85 f_{pu}$
 - Deslizamiento de cuñas, $a = 6\text{mm}(\frac{1}{4} \text{ in})$

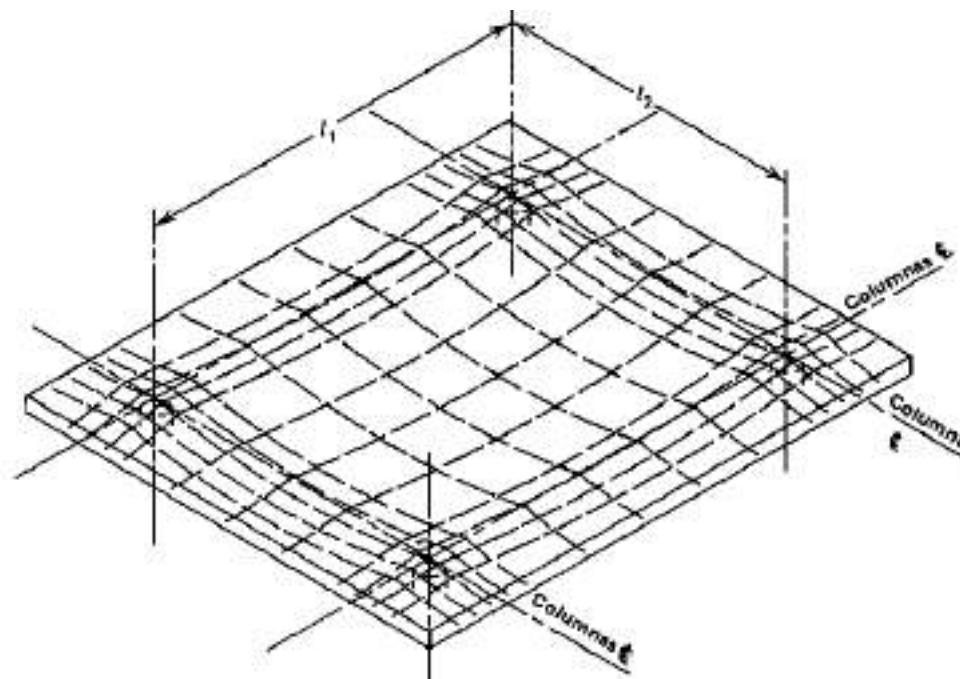
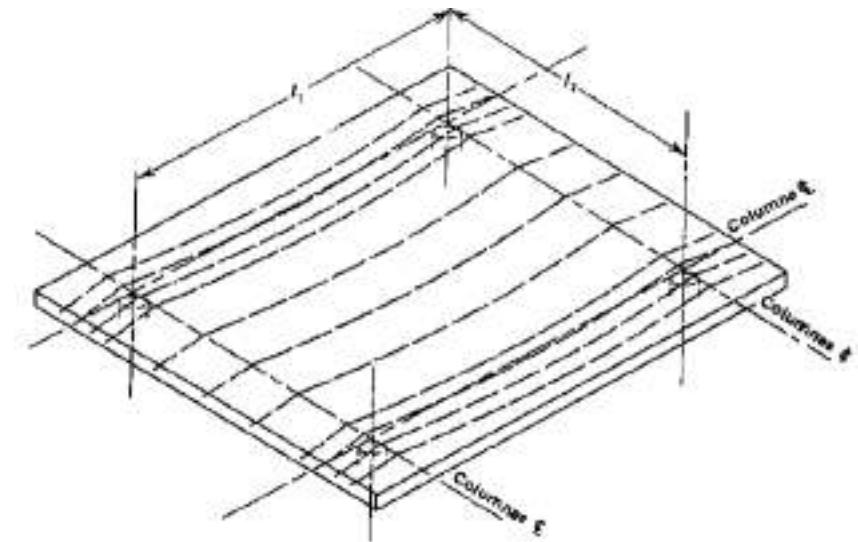
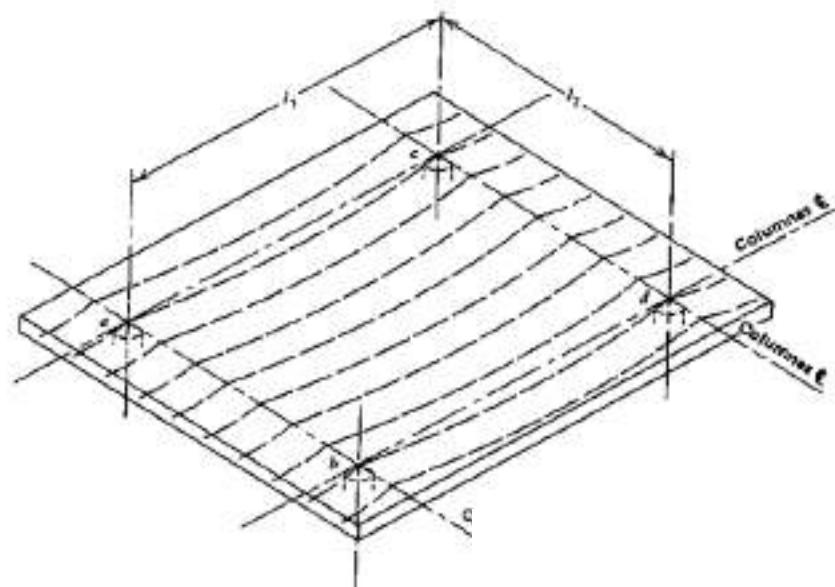
PTS463



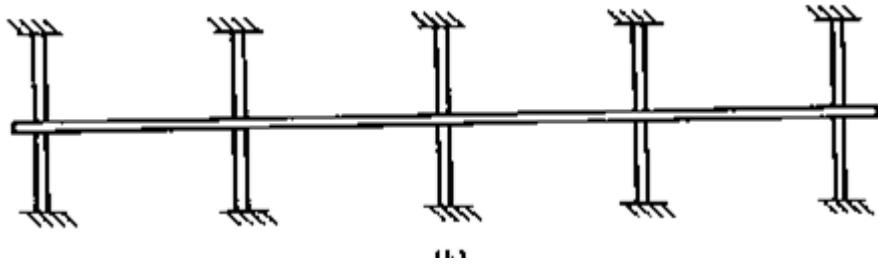
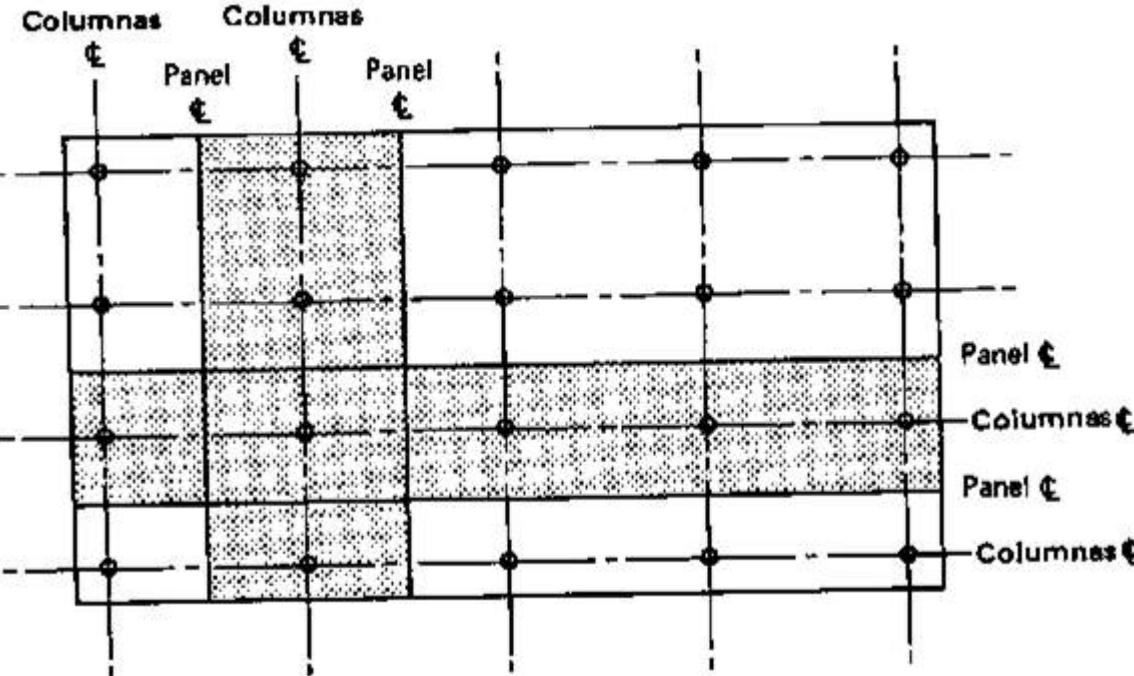
Comportamiento de Losas Planas



Esquema de Distribución de tendones

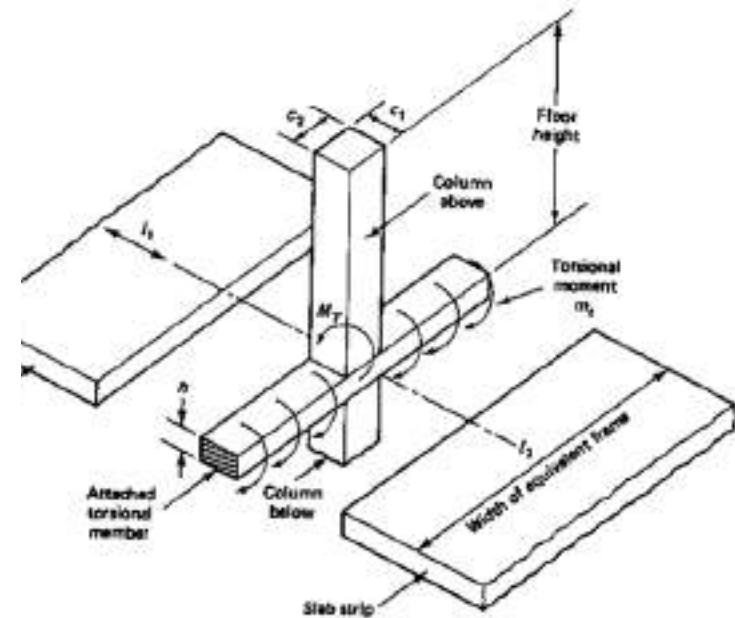


Marco Equivalente



$$C = \left(1 - 0.63 \frac{x}{y}\right) \frac{x^3 y}{3}$$

$$K_t = \sum \frac{9E_c C}{l_2 \left(1 - \frac{c_2}{l_2}\right)^3}$$



$$K_s = \frac{4E_{cs} I_s}{L_n - c_1/2}$$

$$DF = \frac{K_s}{\Sigma K}$$

$$\frac{1}{K_{ec}} = \frac{1}{\sum K_e} + \frac{1}{K_t}$$

$$\Sigma K = K_{ec} + K_{s(left)} + K_{s(right)}$$

K_{ec} = rigidez a la flexión de la columna equivalente

K_c = rigidez a la flexión de la columna real

K_t = rigidez torsional de la franja transversal de losa

Refuerzo no presforzado

En las áreas de momento positivo de tales losas, si los esfuerzos calculados de tensión en el concreto no exceden de $2\sqrt{f_c}$, no se requiere esfuerzo adherido. Si el esfuerzo de tensión sobrepasa este valor, entonces debe de proporcionarse una cantidad mínima de varillas de refuerzo adheridas o de malla de alambre soldado igual a

$$A_s = 0.004 A$$

$$A_s = \frac{N_c}{0.5f_y}$$

donde N_c es la fuerza de tensión en el concreto bajo la carga total de servicio, y f_y , la resistencia a la fluencia del acero, no debe de sobrepasar 60,000 Lb/pulg². Tal acero debe de encontrarse uniformemente distribuido a través de la zona precomprimida de tensión, y colocarse tan cerca de la cara a tensión como sea posible. Su longitud debe de ser un tercio de la longitud del claro, y debe de encontrarse centrada en el área de momento positivo.

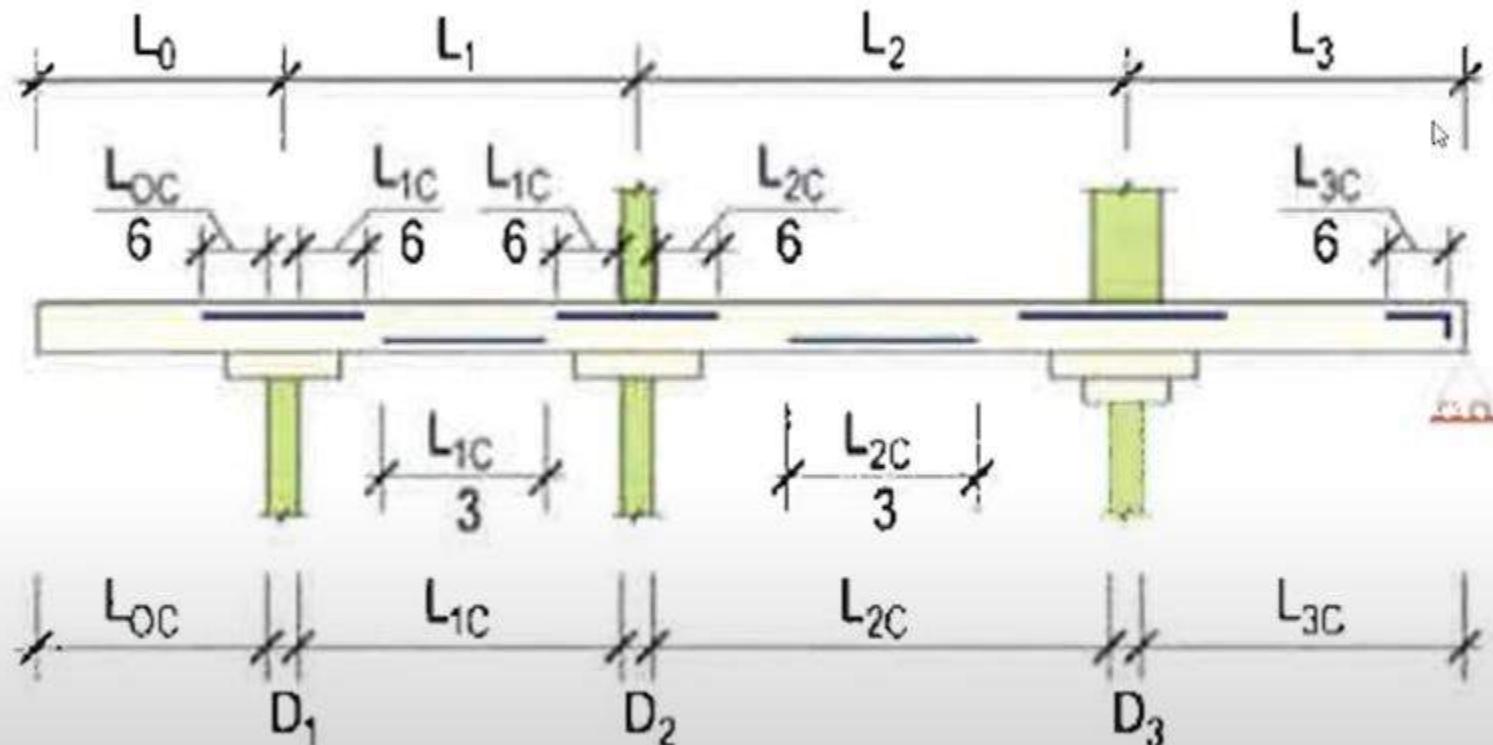
De acuerdo con el Código, siempre se debe de proporcionar refuerzo adherido en las áreas de momento negativo de las losas planas presforzadas con refuerzo en dos direcciones. Tal refuerzo, el cual puede ser en la forma de varillas o mallas, debe tener una área no menor que

$$A_s = 0.00075 h l$$

En forma adicional al refuerzo no presforzado en las regiones de tensión de las losas planas, se debe de agregar algunas varillas de refuerzo en los extremos de anclaje para evitar el posible aplastamiento del concreto. Se usan con frecuencia dos varillas del número 4 continuamente alrededor del perímetro de la losa justamente por detrás de los anclajes para este propósito. Para losas altamente presforzadas, o cuando los anclajes se encuentran concentrados en una losa de poco ancho, se debe de investigar la necesidad de refuerzo para resistir el aplastamiento horizontal de la losa.

Puede ser necesario refuerzo especial alrededor de aberturas, particularmente, si corresponden a terminaciones de tendones. Se pueden emplear varillas de refuerzo, o en el caso de aberturas grandes, se pueden instalar tendones postensados supplementarios.

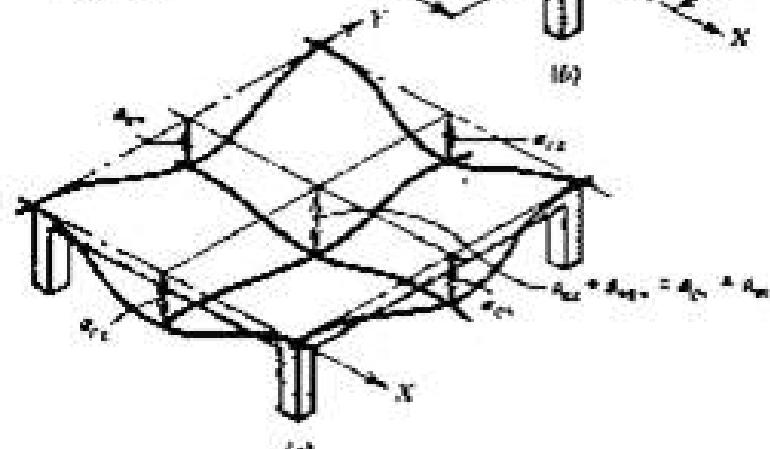
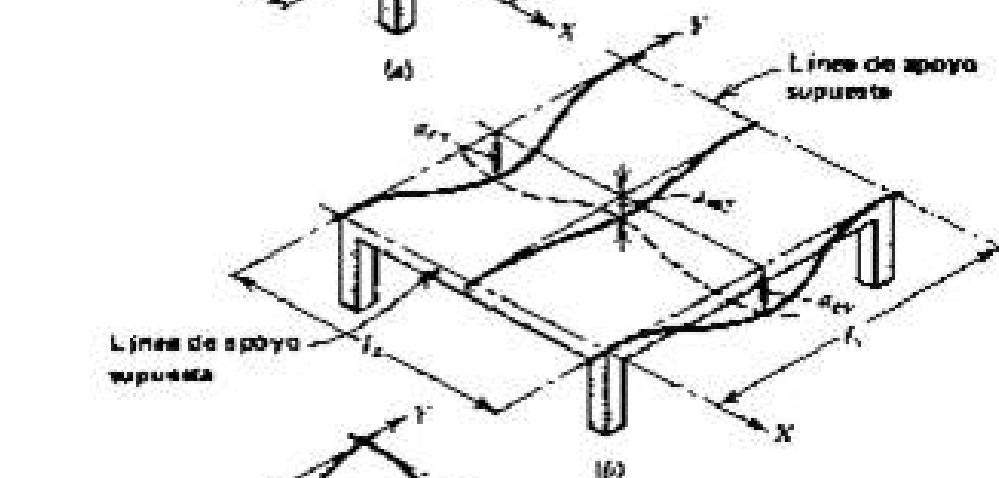
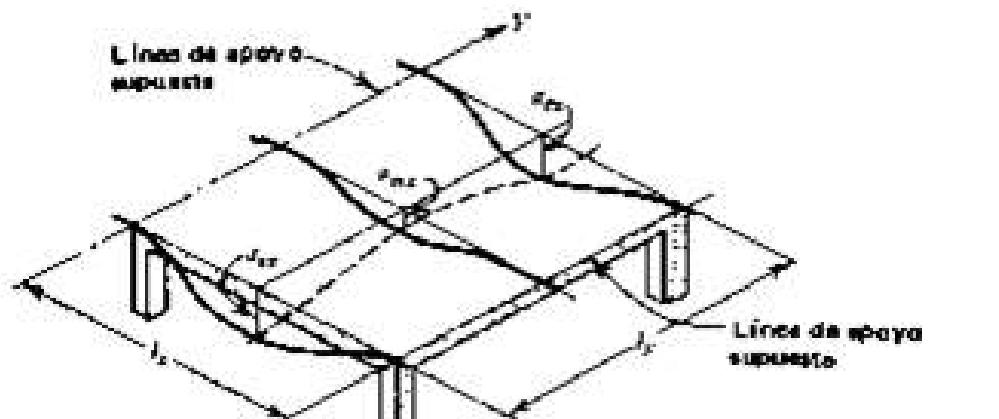
Estado de servicio



Esquema de colocación, refuerzo mínimo, longitudes, acero
adicional no presforzado para aplicaciones comunes

Activar V
Ve a Config

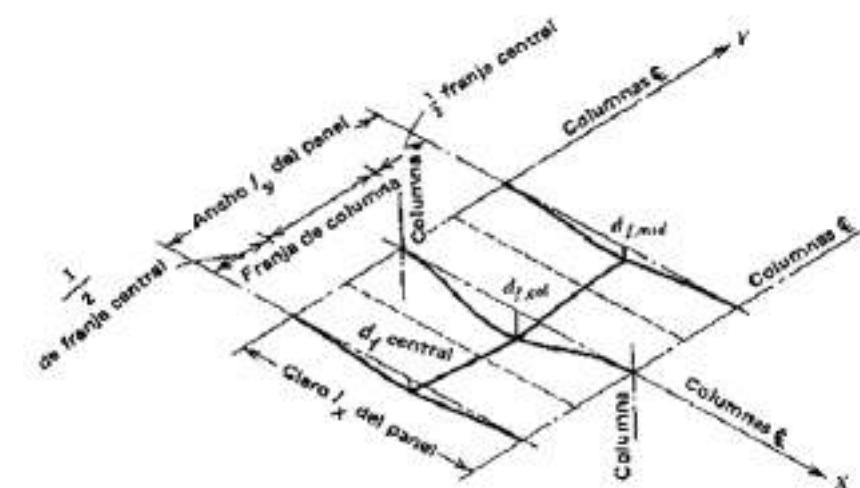
Deflexión en losas planas



$$d_{max} = d_{cx} + d_{my}$$

$$d_{max} = d_{cy} + d_{mx}$$

$$d_{f,res} = \frac{wl^4}{384E_c I_{marc}}$$



$$d_{f,col} = d_{f,res} \times \frac{M_{col}}{M_{f,marc}} \times \frac{E_c I_{f,marc}}{E_c I_{col}}$$

$$d_{f,cent} = d_{f,res} \times \frac{M_{cent}}{M_{f,marc}} \times \frac{E_c I_{f,marc}}{E_c I_{cent}}$$

$$\theta = \frac{M_{net}}{K_{ec}}$$

$$d_\theta = \frac{\theta l}{8}$$

$$d_{col} = d_{f,col} + d_{\theta l} + d_{\theta r}$$

$$d_{cent} = d_{f,cent} + d_{\theta l} + d_{\theta r}$$

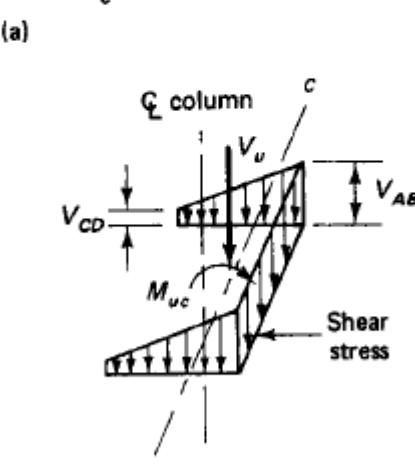
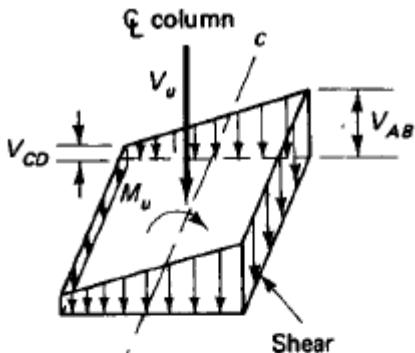
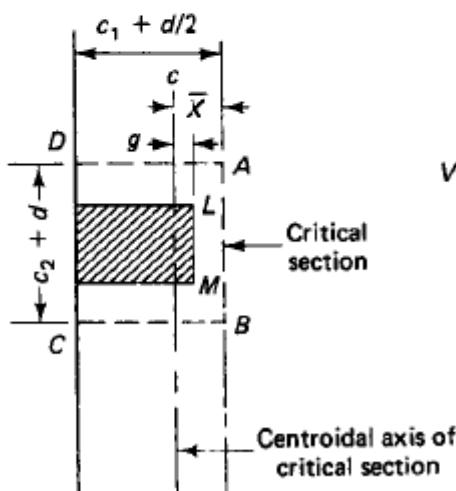
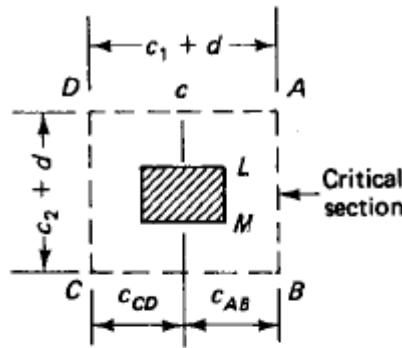
Espesores para control de Deflexión

Tipo de losa	Límite de la relación luz/espesor			
	Luz continua		Luz simple	
	Techo	Piso	Techo	Piso
En una dirección, sólida	52	48	48	44
En dos direcciones, sólida	48	44	44	40
En dos direcciones, aligeradas con vacíos de 900x900	40	36	36	32
En dos direcciones, aligeradas con vacíos de 1200x1200	36	32	32	28
Doble Te	40	36	36	32
Te	36	32	32	28

Table 9.1 Minimum Permissible Ratios of Span (l) to Deflection (a) (l = longer span)

Type of member	Deflection a to be considered	$(l/a)_{min}$
Flat roofs not supporting and not attached to non-structural elements likely to be damaged by large deflections	Immediate deflection due to live load L	180 ^a
Floors not supporting and not attached to non-structural elements likely to be damaged by large deflections	Immediate deflection due to live load L	360
Roof or floor construction supporting or attached to nonstructural elements likely to be damaged by large deflections	That part of total deflection occurring after attachment of nonstructural elements: sum of long-time deflection due to all sustained loads (dead load plus any sustained portion of live load) and immediate deflection due to any additional live load ^b	480 ^c
Roof or floor construction supporting or attached to nonstructural elements not likely to be damaged by large deflections		240 ^c

Transferencia de Cortante y Momento



$$\gamma_v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}}$$

$$e = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}} = 1 - \gamma_v$$

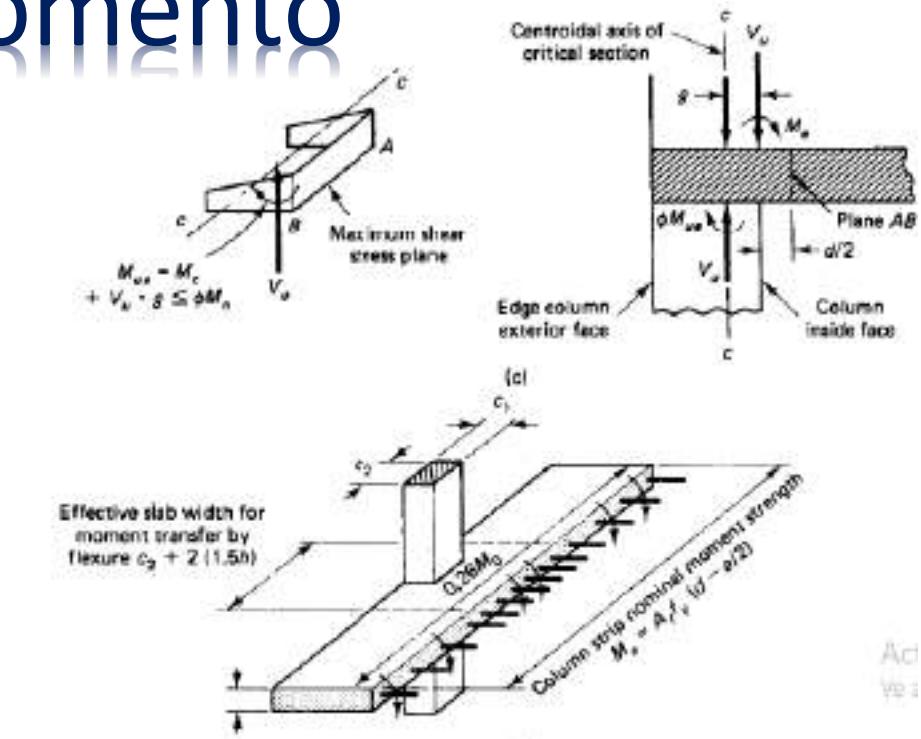
$$\frac{v_{u(AB)}}{\phi} = \frac{V_u}{\phi A_c} + \frac{\gamma_v M_{ue} c_{AB}}{\phi J_c}$$

$$\frac{V_{u(CD)}}{\phi} = \frac{V_u}{\phi A_c} - \frac{\gamma_v M_{ue} c_{CD}}{\phi J_c}$$

$$v_n = \frac{v_u}{\phi}$$

$$J_c = \frac{d(c_1 + d)^3}{6} + \frac{d^3(c_1 + d)}{6} + \frac{d(c_2 + d)(c_1 + d)^2}{2}$$

$$J_c = \frac{(c_1 + d/2)(d)^3}{6} + \frac{2(d)}{3} (c_{AB}^3 + c_{CD}^3) + (c_2 + d)(d)(c_{AB})^2$$



Esfuerzos de Cables

Tendones adheridos

$$f_{ps} = f_{pu} \left(1 - \frac{\gamma_p}{\beta_1} \left[\rho_p \frac{f'_{pu}}{f'_c} + \frac{d}{d_p} (\omega - \omega') \right] \right)$$

$$\begin{aligned}\omega' &= \rho' = f_y/f'_c \\ \gamma_p &= 0.40 \text{ for } f_{py}/f_{pu} \geq 0.85 \\ &= 0.28 \text{ for } f_{py}/f_{pu} \geq 0.90.\end{aligned}$$

Si el refuerzo a compresión es considerado el Término $[\rho_p f_{pu}/f'_c + (d/d_p)(\omega - \omega')]$ no debe ser Menor que 0.17 y d' no debe ser mayor que $0.15d_p$

Tendones no adheridos

Para losas con relación luz/espesor ≤ 35

$$f_{ps} = f_{pe} + 10,000 + \frac{f'_c}{100\rho_p}$$

$$f_{ps} \leq f_{py} \leq f_{pe} + 60,000.$$

Para losas con relación luz/espesor > 35

$$f_{ps} = f_{pe} + 10,000 + \frac{f'_c}{300\rho_p}$$

$$f_{ps} \leq f_{py} \leq f_{pe} + 30,000.$$

Cortante

Soporte de Columnas en losas planas

Esfuerzo Cortante Nominal

$$V_c = (\beta_p \sqrt{f'_c} + 0.3\bar{f}_c)b_o d + V_p$$

Esfuerzo Cortante Unitario

$$\nu_c = \beta_p \sqrt{f'_c} + 0.3\bar{f}_c + \frac{V_p}{b_o d}$$

b_o = perimeter of the critical shear section at distance $d/2$ from face of support

f_c = average value of the effective compressive stress in the concrete due to externally applied load for the two orthogonal directions computed at the section centroid after all prestress losses (termed f_{pc} by the ACI Code)

V_p = vertical component of all effective prestressing forces crossing the critical section

β_p = the smaller of the two values 3.5 or $(\alpha_s d/b_o + 1.5)$, where α_s is 40 for interior columns, 30 for edge columns, and 20 for corner columns.

$$(i) \quad V_c = \left(2 + \frac{4}{\beta} \right) \sqrt{f'_c} b_o d$$

$$(ii) \quad V_c = \left(\frac{\alpha_s d}{b_o} + 2 \right) \sqrt{f'_c} b_o d$$

$$(iii) \quad V_c = 4 \sqrt{f'_c} b_o d$$

Soporte de borde continuo unión viga-muro

$$V_c = \left[0.60 \sqrt{f'_c} + 700 \frac{V_u d}{M_u} \right] b_w d_p \geq 2 \sqrt{f'_c} b_w d$$
$$< 5 \sqrt{f'_c} b_w d$$

where b_w is taken as the strip width and $V_u d/M_u$ at a distance $d_p/2$ from the face of the support, $d_p \geq 0.80h_c$.

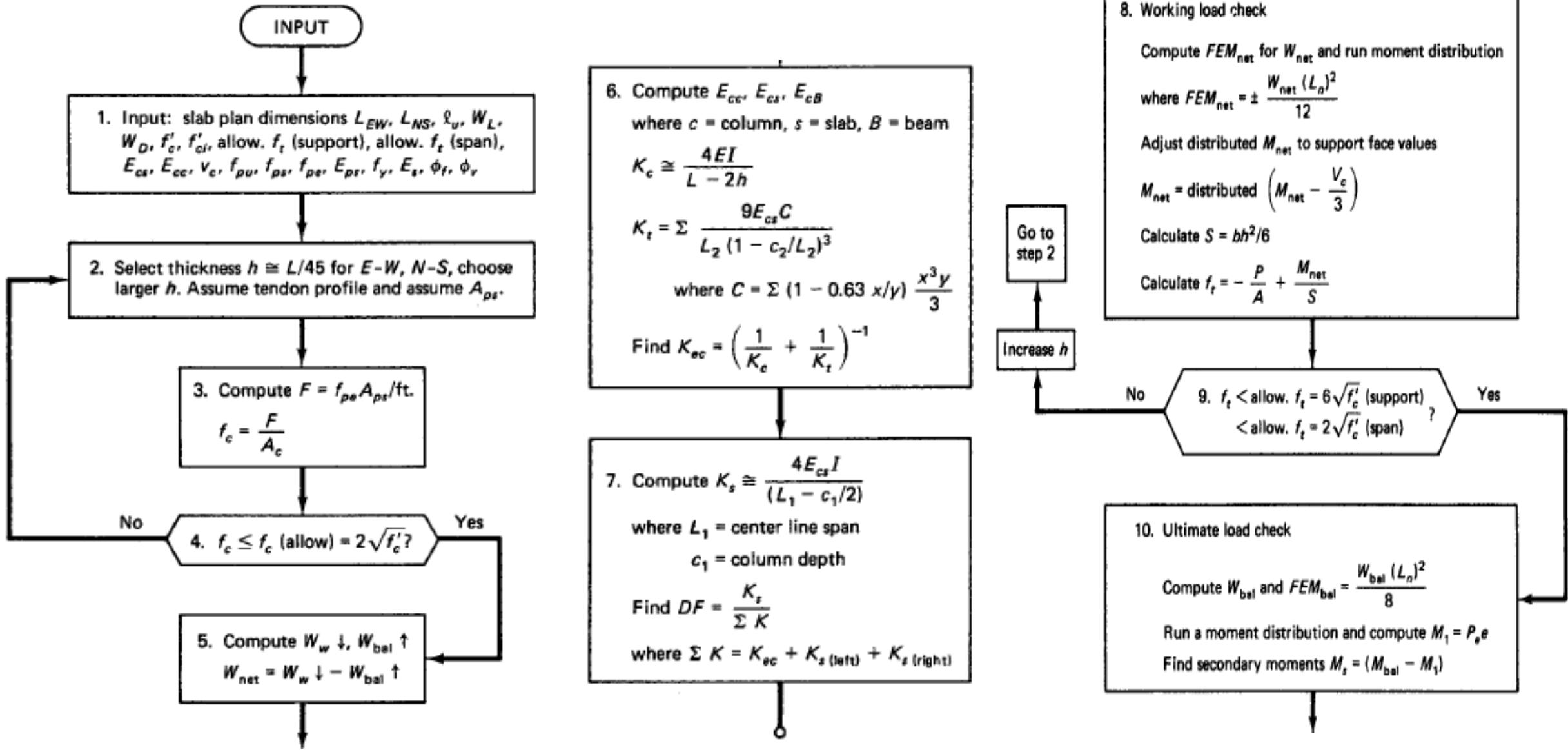
Values of $\sqrt{f'_c}$ in all the above equations are to be multiplied by a factor $\lambda = 1.0$ for normal-weight concrete, $\lambda = 0.85$ for sand-lightweight concrete, and $\lambda = 0.75$ for all-lightweight concrete.

**“Para deficiencia en cortante aplican los tipos de
refuerzos de cortantes para losas reforzadas
en las uniones”**

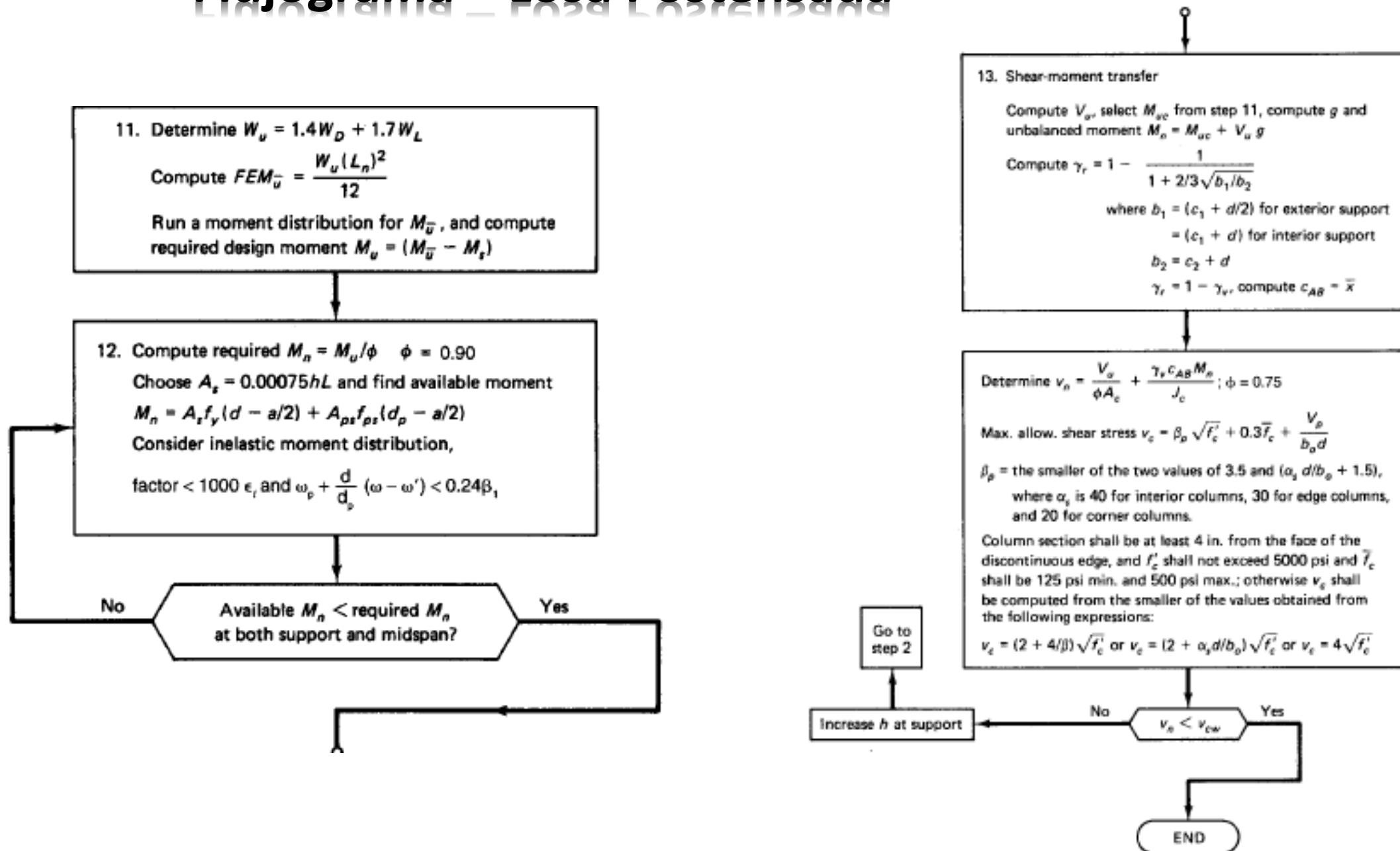
Pasos para Diseño de Losas Postensadas

- Estimar espesor de losa
- Estimación de cargas
- Definición de perfil de tendones
- Carga balaceada
- Marco de Portal equivalente
- Verificación de esfuerzos
- Cálculo de Momentos Primarios y Secundarios
- Verificación de Momento Resistente
- Calculo de acero no presforzado
- Verificación de transferencia de Cortante y Momento
- Verificación de Deformaciones

Flujograma – Losa Postensada

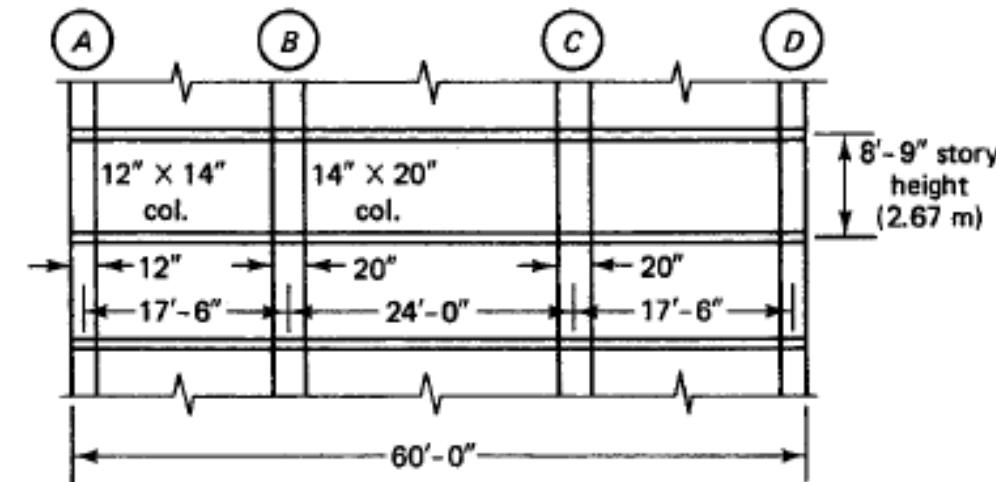
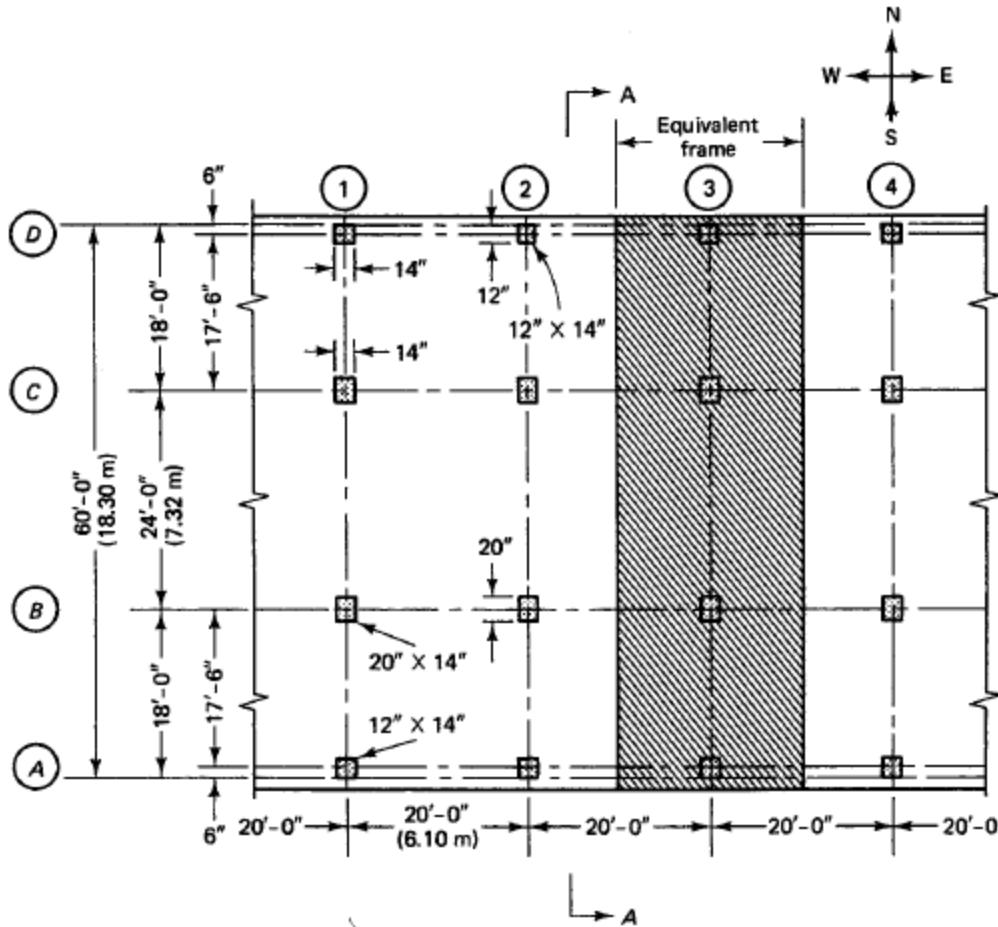


Flujograma – Losa Postensada



Example 9.2

A post-tensioned prestressed nonbonded flat-plate floor system for an apartment complex is shown in Figure 9.17. The end-panel centerline dimensions are 17 ft, 6 in. \times 20 ft, 0 in. (5.33 m \times 6.10 m), and the interior panel dimensions are 24 ft, 0 in. \times 20 ft, 0 in. (7.32 m \times 6.10 m). The heights l_u of the intermediate floors are typically 8 ft, 9 in. (2.67 m). Design a typical floor panel to withstand a working live load $W_L = 40 \text{ psf}$ (1.92 kPa) and a superimposed dead load $W_{SD} = 20 \text{ psf}$ (0.96 kPa) due to partitions and flooring. Assume in your solution that all panels are simultaneously loaded by the live load, and verify the shear-moment transfer capacity of the floor at the column supports. Use $\frac{1}{2}\text{-in. dia}$ 7-wire 270-K prestressing strands and the equivalent frame method to arrive at your solution. Given data are as follows:



$$f'_c = 4,000 \text{ psi (27.6 MPa)}, \text{ normal weight}$$

$$f'_{ct} = 3,000 \text{ psi (20.7 MPa)}$$

$$\text{Support } f_t = 6\sqrt{f'_c} = 380 \text{ psi (2.62 MPa)}$$

$$\text{Midspan } f_t = 2\sqrt{f'_c} = 127 \text{ psi (0.88 MPa)}$$

Max. v_c required by the ACI Code

$$f_{pu} = 270,000 \text{ psi (1,862 MPa)}$$

$$f_{ps} \text{ not to exceed } 185,000 \text{ psi (1,276 MPa)}$$

$$f_{py} = 243,000 \text{ psi (1,675 MPa)}$$

$$f_{pe} = 159,000 \text{ psi (1,096 MPa)}$$

$$E_{ps} = 29 \times 10^6 \text{ psi (200} \times 10^3 \text{ MPa)}$$

$$f_y = 60,000 \text{ psi (414 MPa)}$$

Solution:

N-S Direction

I. Service Load Analysis

1. Loads

For deflection control, assume that the slab thickness $h \approx L/45$. Then the longitudinal direction $h = 20 \times 12/45 = 5.33$ in. and the transverse direction $h = 24 \times 12/45 = 6.40$ in. So try $h = 6\frac{1}{4}$ in. (165-mm) slabs = 81 psf. The superimposed dead load = 20 psf, and we have

$$\text{Total } W_D = 101 \text{ psf}$$

$$W_L = 40 \text{ psf}$$

$$\text{Total } W_w = W_{D+L} = 141 \text{ psf (6.75 kPa)}$$

$$W_u = 1.2W_D + 1.6W_L = 1.2 \times 101 + 1.6 \times 40 \approx 186 \text{ psf (8.9 kPa)}$$

L_n = bay span (N-S for this part of the solution)

L_2 = band width (E-W direction) = 20 ft (240 in.)

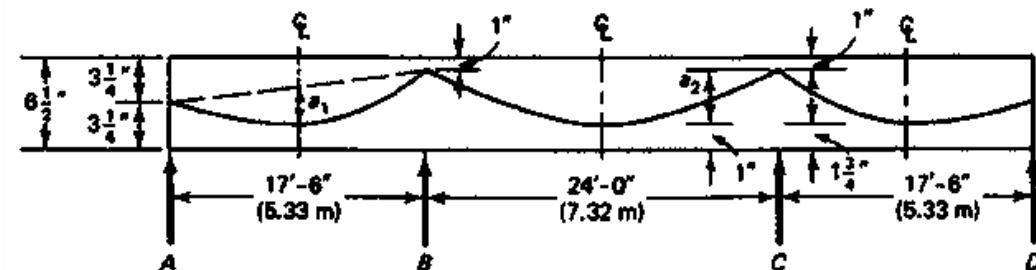
2. Load Balancing and Tendon Profile

In order to make a preliminary estimate of the balanced load, assume an average intensity of compressive stress on the concrete due to load balancing of $f_c = 170$ psi (1.17 MPa). Then the unit $F = 170 \times 6.5 \times 12 = 13,260$ lb/ft (193.6 kN/m). So, trying $\frac{1}{4}$ -in. dia 270-K seven-wire strands, we find that the effective force P , per strand = $A_{sw} f_{sw} = 0.153 \times 159,000 = 24,327$ lb. For the $L = 20$ -ft bay along the longitudinal direction of the structure, the total force is $F_t = FL = 13,260 \times 20 = 265,200$ lb (1,180 kN).

The number of strands per bay is $F_t/P_s = 265,200/24,327 \approx 11$ strands, and the total $P_t = F_t = 24,327 \times 11 = 267,597$ lb. The actual unit force $F = 267,597/20 = 13,380$ lb/ft (195.3 kN/m), and the actual $f_c = F/A = 13,380/(6.5 \times 12) \approx 172$ psi ≈ 170 psi, which is satisfactory. Consequently, use $f_c = 172$ psi due to load balancing, and assume a parabolic tendon profile as shown in Figure 9.18.

Outside Spans AB or CD at Midspan

$$a_1 = a_3 = \frac{3.25 + 5.50}{2} - 1.75 = 2.625 \text{ in.}$$



From Equation 1.16 for a parabolic tendon,

$$W = \frac{8Fa}{L_n^2}$$

$$W_{bal} = \frac{8 \times 13,380 \times 2.625/12}{(18)^2} \approx 72 \text{ psf}$$

The net load intensity producing bending is

$$W_{net} = W_w - W_{bal} = 141 - 72 = 69 \text{ psf (3.30 kPa)}$$

Interior Span BC

$$a_2 = 6.5 - 1 - 1 = 4.5 \text{ in.}$$

$$W_{bal} = \frac{8Fa}{L_n^2} = \frac{8 \times 13,380 \times 4.5/12}{(24)^2} \approx 70 \text{ psf}$$

$$W_{net} = 141 - 70 = 71 \text{ psf (3.40 kPa)}$$

3. Equivalent Frame Characteristics

Take the equivalent frame in the N-S direction whose plan is shown in the shaded portion of Figure 9.17. The approximate flexural stiffness of the column above and below the floor joint (the moment per unit rotation), from Ref. 9.10 and Equation 9.9, is

$$K_c = \frac{4E_a I_c}{L_s - 2b}$$

where $L_s = l_s = 8 \text{ ft. } 9 \text{ in.} = 105 \text{ in.}$

(a) Exterior columns (14 in. \times 12 in.) stiffness

For the exterior columns, $b = 14 \text{ in.}$, so $I_c = 14(12)^3/12 = 2,016 \text{ in.}^4$. Assume that $E_{av}/E_{vph} = E_a/E_o = 1.0$, and use $E_v = E_o = 1.0$ in the calculations as E_o drops out in the equation for K_c . Then we obtain

$$\begin{aligned} \text{Total } K_c &= \frac{4 \times 1 \times 2,016}{105 - (2 \times 6.5)} \times 2 \text{ (for top and bottom columns)} \\ &\approx 175.3 \text{ in.-lb/rad}/E_o \end{aligned}$$

From Equation 9.10b, the torsional constant is

$$\begin{aligned} C &= \Sigma \left(1 - 0.63 \frac{x}{y} \right) \frac{x^3 y}{3} \\ &= \left(1 - 0.63 \times \frac{6.5}{12} \right) 6.5^2 \times \frac{12}{3} = 724 \end{aligned}$$

The torsional stiffness of the slab at the column line is

$$\begin{aligned} K_t &= \Sigma \frac{9E_o C}{L_s^3 \left(1 - \frac{c_1}{L_s} \right)^3} \\ &= \frac{9 \times 1 \times 724}{20 \times 12(1 - 14/(12 \times 20))^3} + \frac{9 \times 1 \times 724}{20 \times 12(1 - 14/(12 \times 20))^3} \\ &= 65.0 \text{ in.-lb/rad}/E_o \end{aligned}$$

From Equation 9.7, the equivalent column stiffness is $K_{eq} = (1/K_c + 1/K_t)^{-1} = (1/175.3 + 1/65)^{-1} = 47 \text{ in.-lb/rad}/E_{eq}$.

(b) Interior column (14 in. \times 20 in.) stiffness

For the interior columns, $b = 14 \text{ in.}$, so $I_c = 14(20)^3/12 = 9,333 \text{ in.}^4$. Hence, we have

$$\text{Total } K_c = \frac{4 \times 1 \times 9,333}{105 - 2 \times 6.5} \times 2 = 812 \text{ in.-lb/rad}/E_o$$

$$C = \left(1 - 0.63 \times \frac{6.5}{20} \right) \times (6.5)^2 \times \frac{20}{3} = 1,456$$

$$\begin{aligned} K_t &= \frac{9 \times 1,456}{20 \times 12(1 - 14/(12 \times 20))^3} \\ &+ \frac{9 \times 1,456}{20 \times 12(1 - 14/(12 \times 20))^3} \\ &= 131 \text{ in.-lb/rad}/E_o \end{aligned}$$

$$K_{eq} = (1/812 + 1/131)^{-1} = 113 \text{ in.-lb/rad}/E_{eq}$$

(c) Slab stiffness

From Equation 9.9 and Ref. 9.10,

$$K_s = \frac{4E_o I_s}{L_s - \frac{c_1}{2}}$$

where L_s is the centerline span and c_1 the column depth. The slab band width in the E-W direction is $20/2 + 20/2 = 20 \text{ ft.}$ Thus, $I_s = 20 \times 12(6.5)^3/12 = 5,493 \text{ in.}^4$, and for the slab at the right of exterior column A,

$$K_s = \frac{4 \times 1 \times 20(6.5)^3}{12 \times 17.5 - 12/2} = 108 \text{ in.-lb/rad}/E_o$$

while for the slab at the left of interior column B,

$$K_s = \frac{4 \times 1 \times 20(6.5)^3}{12 \times 17.5 - 20/2} = 110 \text{ in.-lb/rad}/E_o$$

and for the slab at the right of interior column B,

$$K_s = \frac{4 \times 1 \times 20(6.5)^3}{12 \times 24 - 20/2} = 79 \text{ in.-lb/rad}/E_o$$

From Equation 9.12, the slab distribution factor at the joints is $DF = K_s/\Sigma K$, where $\Sigma K = K_{eq} + K_{slab} + K_{slab}$. So for the outer joint A slab, $DF = 108/(47 + 108) = 0.697$; for the left joint B slab, $DF = 110/(113 + 110 + 79) = 0.361$; and for the right joint B slab, $DF = 79/(113 + 110 + 79) = 0.262$.

4. Design Service-load Moments and Stresses

Design net load moments

For the exterior spans AB and CD, $W_{\text{net}} = 69 \text{ psf}$. So the fixed-end moment is

$$FEM = \frac{WT^2}{12} = \frac{69 \times (17.5)^2}{12} \times 12 = 21.1 \times 10^3 \text{ in.-lb}$$

Similarly, for the interior span BC, $W_{\text{net}} = 71 \text{ psf}$. So the fixed-end moment is

$$FEM = \frac{71(24)^2}{12} \times 12 = 40.9 \times 10^3 \text{ in.-lb}$$

By running a moment distribution analysis as shown in Table 9.2, a carryover factor $COF = 1$ can be used for all spans. Such an assumption is justified, as the effect of non-prismatic sections would be negligible on the fixed-end moments and carryover factors. It can also be assumed in multispan frames that the frame at a joint two spans away from the left joint (joint C) can be considered fixed in the distribution of the moments.

Table 9.2 Moment Distribution of Net Load Moments M_{net}

	(A)	(B)	(C)		
DF	0.697	0.364	0.262	0.262	0.364
COF	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$FEM_{\text{net}} \times 10^3 \text{ in.-lb}$	-21.1	21.1	-40.9	40.9	-21.1
Dist.	+14.71	7.21	5.19	-5.19	
CO	3.61	7.36	-2.60	-	
Dist.	-2.52	-1.73	-1.25		
Final $M_{\text{net}} \times 10^3 \text{ per ft}$	-5.30	33.94	-39.56		

Slab concrete tensile stress at supports

The net moment at the interior face of column B is the difference of the centeredline moment and $Vc/3$, i.e.,

$$M_{\text{centered}} = 39.56 \times 10^3 - \frac{20}{3} \left(\frac{71 \times 24}{2} \right) = 33,880 \text{ in.-lb/ft}$$

The slab section modulus $S = bH^2/6 = 12(6.5)^2/6 = 84.5 \text{ in.}^3$, and we have, for the support concrete stress,

$$f_t = -\frac{P}{A} + \frac{M}{S} = -172 + \frac{33,880}{84.5} = +229 \text{ psi (1.63 MPa)} \quad (7)$$

So the allowable $f_t = 6\sqrt{f_y} = 380 \text{ psi} > 229 \text{ psi}$, which is satisfactory.

Slab concrete tensile stress at midspan

The net midspan maximum moment is $WL^2/8 = 39.56 \times 10^3$, or

$$M_{\text{max,max}} = \frac{71(24)^2}{8} \times 12 = 39.56 \times 10^3 = 21,784 \text{ in.-lb/ft (7.85 kN/m)}$$

Also,

$$\text{Midspan } f_t = -\frac{P}{A} + \frac{M}{S} = -172 + \frac{21,784}{84.5} = +86 \text{ psi (0.545 MPa)} \quad (7)$$

So the allowable $f_t = 2\sqrt{f_y} = 127 \text{ psi} > 86 \text{ psi}$, which is satisfactory.

If f_t were to exceed the allowable f_c , the entire tensile force would have to be taken by mild steel reinforcement at a stress $f_s = \frac{1}{3}f_y$.

Ultimate Flexural Strength Analysis

II. Design Moments M_u

1. Balanced moments M_{bal}

The secondary moment is given by $M_s = M_{\text{bal}} - M_1$, where M_{bal} is the balanced moment and M_1 is the primary moment = $P_f c = F_e$. For the span AB or CD,

$$FEM_{\text{bal}} = \frac{72(17.5)^2}{12} \times 12 = 22,050 \text{ in.-lb/ft}$$

and for the span BC,

$$FEM_{\text{bal}} = \frac{70(24)^2}{12} \times 12 = 40,320 \text{ in.-lb/ft}$$

Table 9.3 Moment Distribution of Balanced Load Moments M_{bd}

(A)	(B)	(C)	(D)		
DF	0.697	0.364	0.262	0.262	0.364
COF	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$FEM_{bd} \times 10^3$ in.-lb Dist.	-22.05	22.05	-40.32	40.3	-22.05
+15.37	+6.65	+4.79	-4.79	-6.65	
CO Dist.	3.33	7.69	-2.40	-2.40	
-2.32	-1.93	-1.39	-1.39		
Final $M_{bd} \times 10^3$ per ft	-5.67	34.46	-39.32		

Running a moment distribution as in Table 9.3 will determine the maximum M_{bd} for the exterior column joints.

2. Secondary moments M_s and factored load moment M_a

Span AB

From the tendon profile of Figure 9.18, $e = 0$. So we have:

$$\text{Primary moment } M_0/\text{ft at } A = P_E = 0$$

$$M_{bd} = 5,670 \text{ in.-lb/ft} \text{ (from Table 9.3)}$$

$$M_s = M_{bd} - M_1 = 5,670 - 0 = 5.67 \times 10^3 = 5,670 \text{ in.-lb/ft}$$

$$\text{Factored load } FEM_a = \frac{W_e l^2}{12} = \frac{186(17.5)^2}{12} \times 12 = 56,963 \text{ in.-lb/ft}$$

Span BA

From the tendon profile in Figure 9.18, $e = 6.5/2 - 1 = 2.25 \text{ in.}$ So we have:

$$M_1 = 13,380 \times 2.25 = 30,105 \text{ in.-lb/ft (1.16 kN-m)}$$

$$M_{bd} = 34,460 \text{ in.-lb/ft (from Table 9.3)}$$

$$M_s = 34,460 - 30,105$$

$$\approx 4,355 \text{ in.-lb/ft (1.61 kN-m/m)}$$

$$\text{Factored load } FEM_a = 56,963 \text{ in.-lb/ft (21.1 kN-m/m)}$$

Span BC

$$e = 2.25 \text{ in.}$$

$$M_1 = 30,105 \text{ in.-lb/ft}$$

$$M_{bd} = 39,320 \text{ in.-lb/ft (from Table 9.3)}$$

$$M_s = 39,320 - 30,105 = 9,215 \text{ in.-lb/ft (3.4 kN-m/m)}$$

$$\text{Factored load } FEM_a = \frac{186(24)^2}{12} \times 12 = 107,136 \text{ in.-lb/ft (39.7 kN-m/m)}$$

Run a moment distribution for the factored moments as in Table 9.4. Analysis of pattern loading of alternate spans should also be made to determine the worst conditions of service-load and factored-load moments.

Table 9.4 Moment Distribution of Factored Loads

(A)	(B)	(C)	(D)		
DF	0.697	0.364	0.262	0.262	0.364
COF	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$FEM_a \times 10^3$ in.-lb per ft Dist.	-56.96	+56.96	-107.14	+107.14	-56.96
+39.70	+18.27	+13.15	-13.15	-18.27	
CO Dist.	+9.14	+19.85	-6.58	-6.58	
-6.37	-4.83	-3.48	-3.48		
Final $M_a \times 10^3$ per ft	-14.49	+90.25	-104.05		

3. Design moment M_y

The design moments M_y are the difference between the factored-load moments M_y' and the secondary moments M_s , i.e., $M_y = M_y' - M_s$ (from Equation 9.17).

Joint A (span AB) moment $-M_y$

For the joint A (span AB) moment, $M_y = 5,670 \text{ in.-lb/ft}$ (from before), and so the centerline $M_y = 14,490 - 5,670 = 8,820 \text{ in.-lb/ft}$. The moment reduction to the column face of support A = $Vc/3$. Thus,

$$V_{AB} = \frac{W_c L}{2} - \frac{M_{y,AB} - M_{s,AB}}{L_n} = \frac{186 \times 17.5}{2} - \frac{10^3(90.25 - 14.49)}{17.5 \times 12}$$

$$= 1627.5 - 360.8 = 1266.7 \text{ lb/ft}$$

$$c = 12 \text{ in.}$$

$$\text{Centerline } M_y = 14,490 - 5,670 = 8,820 \text{ in.-lb/ft}$$

$$\text{Req column face } M_s = 8,820 - \frac{1266.7 \times 12}{3}$$

$$= 8,820 - 4,924 = 3,753 \text{ in.-lb/ft (1.39 kN-m/m)}$$

$$\text{Req } - M_s = \frac{M_s}{\phi} = \frac{3.753}{0.9} = 4,170 \text{ in.-lb/ft (1.55 kN-m/m)}$$

Joint B (span BA) moment $-M_y$

For the joint B (span BA) moment, $M_y = 4,355 \text{ in.-lb/ft}$ (from before), and so the centerline $M_y = 90.250 - 4,355 = 85.895 \text{ in.-lb/ft}$. Thus,

$$V_{BA} = 1,627.5 + 360.8 = 1,988.3 \text{ lb/ft.}$$

$$c = 20 \text{ in.}$$

$$\text{Req column face } M_s = 85.895 - \frac{1,988.3 \times 20}{3}$$

$$= 85.895 - 13.255 = 72.640 \text{ in.-lb/ft (26.8 kN-m/m)}$$

$$\text{Req } - M_s = \frac{M_s}{\phi} = \frac{72.640}{0.9} = 80,671 \text{ in.-lb/ft (30 kN-m/m)}$$

Table 9.6 Summary of Shear V_y and Secondary Moment M_s for Ultimate Load Evaluation

Factored Shear V_y (lb/ft)	Secondary Moment M_s (in.-lb/ft)
$V_{AB} = 1266.7$	$M_{s,AB} = 5670$
$V_{BA} = 1988.3$	$M_{s,BA} = 4335$
$V_{AC} = 2232.0$	$M_{s,AC} = 9215$

Joint B (span BC) moment $-M_y$

For the joint B (span BC) moment, $M_y = 9,215 \text{ in.-lb/ft}$, and so the centerline $M_y = 104,050 - 9,215 = 94,835 \text{ in.-lb/ft}$. Thus,

$$V_{BC} = \frac{186 \times 24}{2} = 2,232 \text{ lb/ft}$$

$$\text{Req column face } - M_s = 94,835 - \frac{2232 \times 20}{3} = 94,835 - 14,830$$

$$= 79,955 \text{ in.-lb/ft (28 kN-m/m)}$$

$$\text{Req } - M_s = \frac{M_s}{\phi} = \frac{79,955}{0.9}$$

$$= 88,839 \text{ in.-lb/ft (35 kN-m/m)}$$

Span AB maximum positive moment $+M_y$

Assume that the point of zero shear and maximum moment is x ft from face A. Then $x = V_{AB}/W_c = 1266.7/186 = 6.81 \text{ ft}$. Also, from Table 9.4, the end M_y at A = 12,310 in.-lb/ft, and from before, $M_y = 1/2(5,670 + 4,355) = 5,013 \text{ in.-lb/ft}$. So we have

$$\text{Max. } + M_y = V_{AB}x - \frac{W_c x^2}{2} - M_y + M_s$$

$$= 1266.7 \times 6.81 \times 12 - \frac{186(6.81)^2}{2} \times 12 - 14,490 + 5,013$$

$$= 103,515 - 51,756 - 14,490 + 5,013$$

$$= 42,282 \text{ in.-lb/ft (15.7 kN-m/m) at 6.81 ft from A}$$

$$\text{Req } + M_y = \frac{M_s}{\phi} = \frac{42,282}{0.9} = 46,980 \text{ in.-lb/ft (17.4 kN-m/m)}$$

Span BC maximum positive moment $+M_u$.

From before, $V_{sc} = 2,232 \text{ lb/ft}$ and $x = L_s/2 = 24/2 = 12 \text{ ft}$. The simple span midspan moment is, then,

$$M_u = V_{sc} \times \frac{L_s}{2} - \left(W_s \times \frac{L}{2} \right) \frac{(L)}{4}$$

$$= 2232 \times \frac{24}{2} - \frac{186(24)^2}{8} = 13,392 \text{ ft-lb/ft} = 160,704 \text{ in.-lb/ft}$$

Alternatively, the simple span moment is

$$M = \frac{W_s L^2}{8} - \frac{186(24)^2}{8} \times 12$$

$$= 160,704 \text{ in.-lb/ft}$$

Now, $+M_u = M - M_n + M_r$. From Table 9.4, $M_n = -104,050 \text{ in.-lb/ft}$, and $M_r = 9,215 \text{ in.-lb/ft}$. So the required maximum $+M_u = 160,704 - 104,050 + 9,215 = 65,869 \text{ in.-lb/ft}$ (24.42 kN-m/m) at midspan. And the required $+M_u = M_u/\phi = 65,869/0.9 = 73,188 \text{ in.-lb/ft}$ (27.13 kN-m/m).

Figure 9.19 gives a plot of the required design moments M_u across the continuous spans and the peak values of the moments.

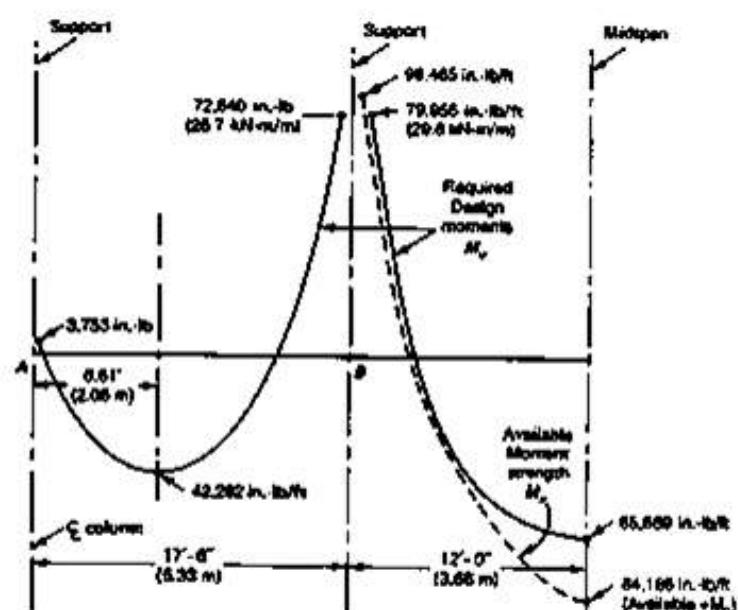


Figure 9.19 Maximum required design moments M_u and available nominal moment strengths M_n in Example 9.2, after redistribution.

III. Flexural Strength M_u (Nominal Moment Strength). The ACI Code requires a minimum amount of non-prestressed reinforcement. From Equation 9.20,

$$A_s = 0.00075 h L_s$$

1. Interior support section at B

For the interior support section at B, the controlling required $M_u = 88,839 \text{ in.-lb/ft}$. Hence, the minimum area of non-prestressed steel reinforcement in each direction in the negative moment areas of slabs at column supports as in Equation 4.55(b) is $A_s = 0.00075 h l$, where h = total slab thickness and l = span length in the direction parallel to that of the reinforcement being determined, Section 4.12.5.3.

$$A_s = 0.00075 \times 6.5 \left(\frac{18 + 24}{2} \right) \times 12 = 1.23 \text{ in}^2 (7.93 \text{ cm}^2)$$

Hence, try six #4 bars of 11-ft length, and space the bars at a maximum of 6 in. (152 mm) center-to-center so that they are concentrated over the column on a band width equal to the column width plus 1½-slab thicknesses on each side of the column. Then

$$A_s = 6 \times 0.20 = 1.20 \text{ in}^2 = \text{required } 1.23 \text{ in}^2, \text{ O.K.}$$

Panel width = 20 ft

$$A_s/\text{ft} = \frac{1.2}{20} = 0.06 \text{ in.}^2$$

From Equation 9.23b, the design stress in the tendon is

$$f_p = f_{pe} + \frac{f_t}{300\phi_p} + 10,000 \text{ psi}$$

and

$$\phi_p = \frac{A_s}{bd} = \frac{11 \times 0.153}{(20 \times 12)5.5} = 0.0013$$

$$f_{pe} = 159,000 \text{ psi}$$

$$f_p = 159,000 + \frac{4,000}{300 \times 0.0013} + 10,000 = 179,256 \text{ psi (1,236 MPa)}$$

$$F_p = \frac{179,256 \times 0.153 \times 11}{20} = 15,084 \text{ lb/ft}$$

$$F_t = 60,000 \times A_s/\text{ft} = 60,000 \times 0.06 = 3,600 \text{ lb/ft}$$

The total force $F/\text{ft} = F_p + F_t = 15,084 + 3,600 = 18,684 \text{ lb/ft}$, and we also have

The bars and tendons are to be placed at the same level $d = 6.5 - 1 = 5.5$ in. Also, $M_s = (A_s f_y + A_{ps} f_{ps}) (d - a/2)$, the available $\sim M_s = 15,084 \times (5.5 - 0.40/2) = 98,466$ in.-lb/ft (36.5 MPa), and the required $M_s = 84,166$ in.-lb/ft < 98,466. Thus, no additional moment strength is needed.

No inelastic negative moment redistribution (reduction) is essential in this case, provided that the available positive moment reinforcement is adequate. If redistribution is applied, from Figure 4.46:

$$s_i = 0.003 \left(\frac{d_i}{c} - 1 \right) + 0.003 \left(\frac{5.5}{0.46/0.85} - 1 \right) = 0.027 \text{ in./in.} > 0.0075 \text{ in./in., O.K.}$$

It is desirable to cause a moment redistribution from the support to midspan, maximum moment redistribution value = $1000 \epsilon_u \leq 20\%$

Actual redistribution factor = $1000 \times 0.027 = 27\%$, exceeds the maximum allowable.

Apply a 15% redistribution factor to the positive midspan moment.

Hence, required $\sim M_s = 1.15 \times 73,188 = 84,166$ in.-lb/ft.

A corresponding reduction in the area of mild steel reinforcement for the negative moment is warranted, provided that the minimum is satisfied.

2. Midspan section at span BC

From before, $F_{ps} = A_{ps} f_{ps} = 15,084$ lb/ft, and

$$a = \frac{A_{ps} f_{ps}}{0.85 f_y b} = \frac{15,084}{0.85 \times 4,000 \times 12} = 0.37 \text{ in.}$$

So the available $\sim M_s = A_{ps} f_{ps} (d - a/2) = 15,084 (5.5 - 0.37/2) = 80,171$ in.-lb/ft, and the required $\sim M_s$, after redistribution $\sim +84,166$ in.-lb/ft > 80,171 in.-lb/ft, and hence is unsatisfactory. Accordingly, add two #4 bars at midspan over a 20-ft width to get

$$A_s = 2 \times 0.20 = 0.40 \text{ in.}^2$$

$$A_s f_y = \frac{0.40 \times 60,000}{20} = 1200 \text{ lb/ft}$$

$$a = \frac{(15,084 + 1200)}{0.85 \times 4,000 \times 12} = 0.40 \text{ in.}$$

$$\begin{aligned} \text{Available } \sim M_s &= (A_s f_y + A_{ps} f_{ps}) \left(d - \frac{a}{2} \right) \\ &= (15,084 + 1200) \left(5.5 - \frac{0.40}{2} \right) = 86,306 \text{ in.-lb/ft} \\ &> \text{req. } \sim M_s = 84,166 \text{ in.-lb/ft, O.K.} \end{aligned}$$

Verify value of $\phi = 0.90$ used:

$$\begin{aligned} c = a/b_i &= 0.40/0.85 = 0.47; c/d_i = 0.47/(6.25 - 2.75) \\ &= 0.10 << 0.325 \text{ in. Fig. 4.45, hence section is tension controlled, and } \phi = 0.90 \text{ O.K.} \end{aligned}$$

Reinforcement Summary

After moment redistribution, use two #4 (12.7-mm dia) non prestressed mild steel bars at the bottom fibers at midspan in addition to the continuous prestressing tendon in the 20-ft segment. Also, use six #4 non prestressed mild steel bars at the top fibers at the support, centered through the column at 6 in. center-to-center spacing (six 12.7-mm dia bars at 152 mm center-to-center) as minimum reinforcement, to be verified for shear-moment transfer.

The midspan sections of spans AB and CD would have more than adequate positive nominal moment strength to resist the positive factored moments. The nominal negative moment strength of the sections at the exterior supports A and D are governed by the moment-shear transfer stresses.

3. Banding the reinforcement at the column region

There are eleven 1-in. dia strands, and the width of a column strip = $2(1 \times 20 \times 12) = 120$ in. Assume that 70 percent of the tendons are concentrated in the column strip. Then the number of strands = $0.7 \times 11 = 7.7$. Accordingly, concentrate seven strands in the column strip, three of which are to pass through and be centered on the column section.

There are $11 - 7 = 4$ strands in the middle strip. On this basis, it can be reasonably assumed that the percentage distribution of moments between the column strip and the middle strip would be approximately as follows:

Column strip moment factor = $7/11 = 0.64$

Middle strip moment factor = 0.36

Max total $\sim M$ at column face B = 33,880 in.-lb/ft (see Table 9.2)

Max total $\sim M$ at midspan = 21,784 in.-lb/ft

Consequently, distribute the prestressing tendons between the column strips and middle strips as shown subsequently.

IV. Nominal Shear Strength

1. Exterior columns A and D

(a) Geometry and external load

From before, $V_{AB} = 1266.7 \text{ lb/ft}$, and the total shear is $V_p = 1266.7 \times 20 = 25,334 \text{ lb}$. Assume an exterior wall and glass averaging a load of 500 psf:

$$\text{Wall } V_s = 1.2 \times 500 \times 20 = 12,000 \text{ lb}$$

$$\text{Slab } V_s = 25,334 \text{ lb}$$

$$\text{Total factored } V_{st} = 25,334 + 12,000 = 37,334 \text{ lb (166.1 kN)}$$

The critical shear section is taken at $d/2$ from the face of the column, as shown in Figure 9.20. We have

$$d = 6.5 - 1.0 = 5.5 \text{ in.}$$

$$\text{Max } d_p = d_s = 0.8h = 0.8 \times 6.5 = 5.2 \text{ in. (132 mm)}$$

$$c_1 = 12 \text{ in.}$$

$$c_2 = 14 \text{ in.}$$

$$b_1 = c_1 + \frac{d}{2} = 12 + \frac{5.2}{2} = 14.6 \text{ in.}$$

$$b_2 = c_2 + d = 14 + 5.2 = 19.2 \text{ in.}$$

$$A_c = b_0 d = 5.2(2 \times 14.6 + 19.2) = 252 \text{ in.}^2$$

From the figure,

$$d(2c_1 + c_2 + 2d)\bar{x} = d\left(c_1 + \frac{d}{2}\right)^2$$

$$5.2(2 \times 12 + 14 + 2 \times 5.2)x = 5.2(14.6)^2$$

$$x = c_{AB} = 4.40 \text{ in.}$$

$$g = x - \frac{d}{2} = 4.4 - \frac{5.2}{2} = 1.8 \text{ in.}$$

Alternatively,

$$c_{AB} = \frac{b_1^2 d}{A_c} = \frac{(14.6)^2 \times 5.2}{252} = 4.4$$

$$c_{AB} = b_1 - c_{AB} = 14.6 - 4.4 = 10.2 \text{ in.}$$

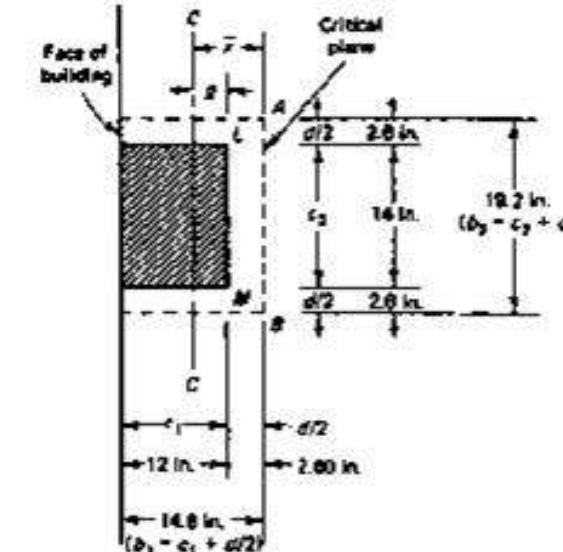


Figure 9.20 Critical planes for shear moment transfer in end column of Example 9.2 (line A, Figure 9.17).

From the geometrical properties of the exterior column shown in Figure 9.20, and from Equations 9.28 and 9.29,

$$\gamma_c = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{b_1/b_2}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{14.6/19.2}} \\ = 1 - 0.63 = 0.37$$

$$\gamma_p = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{b_1/b_2}} = 0.63$$

Using d_e for d , the polar moment of inertia is

$$J_c = \frac{(c_1 + d/2)d^2}{6} + \frac{2d}{3}(c_{Ae}^2 + c_{Cp}^2) + (c_2 + d)(d)(c_{Ae})^2 \\ = \frac{14.6(5.2)^2}{6} + \frac{2 \times 5.2}{3}(4.4^2 + 10.2^2) + 19.2 \times 5.2(4.4)^2 \\ = 342 + 3,974 + 1,933 = 6,249 \text{ in}^4$$

From before, the unit $-M_u = 8820 \text{ in.-lb/ft}$ at the column centerline. So the total bay moment at the column centerline is $-M_u = 8820 \times 20 = 176,400 \text{ in.-lb}$. Now assume that the resultant V_u acts at the face of the column for shear-moment transfer. Then the shear moment transferred by eccentricity is $V_u g = -25,334 \times 1.8 = 45,601 \text{ in.-lb}$, the total external factored moment $M_u' = 176,400 + 45,601 = 222,001 \text{ in.-lb}$, and the total required unbalanced moment strength $M_s = M_u'/\phi = 222,001 / 0.63 = 352,000 \text{ in.-lb}$.

(b) Shear-moment transfer

The fraction of the nominal moment strength to be transferred by shear is $\gamma_s M_s = 0.37 \times 352,000 = 91,267 \text{ in.-lb}$. From Equation 9.30a, the shearing stress due to perimeter shear, the effect of $\gamma_s M_s$ and the weight of the wall, is

$$\tau_s = \frac{V_u}{\phi A_c} + \frac{\gamma_s f_{sp} M_s}{J_c} \\ = \frac{37,334}{0.75 \times 252} + \frac{0.37 \times 4.4 \times 352,000}{6,249} \\ = 197.5 + 64.3 \approx 262 \text{ psi}$$

From the load balancing part of the solution, the average compressive stress in the concrete at the cross-section centroid due to externally applied load P_c is $f_c = P_c/A_c = 172 \text{ psi}$.

From Equations 9.24 and 9.25 and disregarding the effect of the vertical component V_p of the prestressing force, the maximum allowable shear strength becomes

$$\tau_v = \beta_p \sqrt{f_c} + 0.3f_c$$

where the factor β_p is the smaller of $(\alpha_e d/b_0 + 1.5)$ and 3.5, and $\alpha_e = 30$ for end column support. From Figure 9.20, $b_0 = 2 \times 14.6 + 19.2 = 48.2 \text{ in.}$, and

$$\frac{\alpha_e d}{b_0} + 1.5 = \frac{30 \times 5.5}{48.2} + 1.5 = 4.92 > 3.5.$$

Hence use $\beta_p = 3.5$.

$$\begin{aligned} \text{Max allowable } \tau_v &= 3.5\sqrt{4,000} + 0.3 \times 172 \\ &= 221 + 52 = 273 \text{ psi} > \text{actual } \tau_v = 262 \text{ psi, O.K.} \end{aligned}$$

If V_p were accounted for, the maximum allowable τ_v would have been higher than 273 psi.

(c) Flexure moment transfer

The fraction of nominal moment strength to be transferred by flexure is $M_s = 0.63 \times 246,668 = 155,401 \text{ in.-lb}$. From Equation 9.20, $\text{Min}A_s = 0.00075hL = 0.00075 \times 6.5 \times 17.5 \times 12 = 1.02 \text{ in}^2$. So use six #4 bars $\times 6 \text{ ft}$, including the standard hook, yielding $A_s = 6 \times 0.2 = 1.2 \text{ in}^2$. The stress in the tendon strands is computed from Equation 9.23 assuming that three strands pass the column at the exterior support at $e = 0$. We have $d_p = 6.5/2 = 3.25 \text{ in.}$, and the effective concrete width $b = c_2 + 2(1.5 \times h) = 14 + 2(1.5 \times 6.5) = 33.5 \text{ in.}$ Also,

$$\rho_p = \frac{A_{ps}}{bd_p} = \frac{3 \times 0.153}{33.5 \times 3.25} = 0.0042$$

$$\begin{aligned} f_{ps} &= f_{ps} + 10,000 + \frac{f_c}{300\rho_p} \\ &= 159,000 + 10,000 + \frac{4,000}{300 \times 0.0042} \\ &= 172,174 \text{ psi} \end{aligned}$$

$$A_{ps} = 3 \times 0.153 = 0.459 \text{ in.}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{A_s f_{ps} + A_{ps} f_{ps}}{0.85f_c b} = \frac{1.20 \times 60,000 + 0.459 \times 172,174}{0.85 \times 4,000 \times 33.5} \\ &= 1.33 \text{ in.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Available } M_s \text{ in the column zone} &= A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) + A_{ps} f_{ps} \left(d_s - \frac{a}{2} \right) \\ &= 1.2 \times 60,000 \left(5.5 - \frac{1.33}{2} \right) + 0.459 \times 172,101 \left(3.25 - \frac{1.33}{2} \right) \\ &= 347,400 + 203,410 = 550,810 \text{ in.-lb} \\ &\gg \gamma_c M_u = 155,401 \text{ in.-lb}\end{aligned}$$

The available nominal moment strength is thus considerably larger than the moment being transferred by flexure. Figure 9.21 shows one scheme for banding both the prestressed and nonprestressed reinforcement to provide for shear-moment transfer at the exterior column zone.

A similar check as in Sec. 11.1 will show that the c/d value is $\ll 0.375$ in Figure 4.45. Hence, the section is tension controlled, and the value of $\phi = 0.90$ is validated.

2. Interior columns B and C

(a) Geometry and external load

From before, $V_{sp} + V_{pc} = 1988.3 + 2232 = 4220 \text{ plf}$. The total shear is $V_{sp} = 4220 \times 20 = 84,400 \text{ lb (375 kN)}$, and also, $c_1 = 20 \text{ in.}$, $c_2 = 14 \text{ in.}$, and $d = 6.5 - 1 = 5.5 \text{ in.}$

Assume that $d_s = 0.8h \approx 5.2 \text{ in.}$; compute $g = \frac{1}{2}c_1 = 202 = 10 \text{ in.}$

$$b_1 = c_1 + d = 20 + 5.2 = 25.2 \text{ in.}$$

$$b_2 = c_2 + d = 14 + 5.2 = 19.2 \text{ in.}$$

$$A_v = b_0 d = 2(25.2 \times 5.2 + 19.2 \times 5.2) = 462 \text{ in}^2$$

Using d_s for d , the polar moment of inertia is

$$\begin{aligned}J_p &= \frac{d(c_1 + d)^3}{6} + \frac{d^3(c_1 + d)}{6} + \frac{d(c_2 + d)(c_1 + d)^2}{2} \\ &= \frac{5.2(25.2)^3}{6} + \frac{(5.2)^3(25.2)}{6} + \frac{5.2(19.2)(25.2)^2}{2} \\ &= 46,161 \text{ in}^4\end{aligned}$$

Figure 9.22 shows the geometrical properties of the interior column:

$$\gamma_c = 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{23.2/19.2}} = 0.433$$

$$\gamma_y = 1 - 0.433 = 0.567$$

The moment $M_w = M_u$ for each interior column, and the net unit moment $M_u = 79,955 - 32,640 = 7315 \text{ in.-lb}$. The unbalanced shear moment is equal to the net $V_s \times g = 10(2,232 - 1988.3) = 2437 \text{ in.-lb}$. Finally, the total moment is:

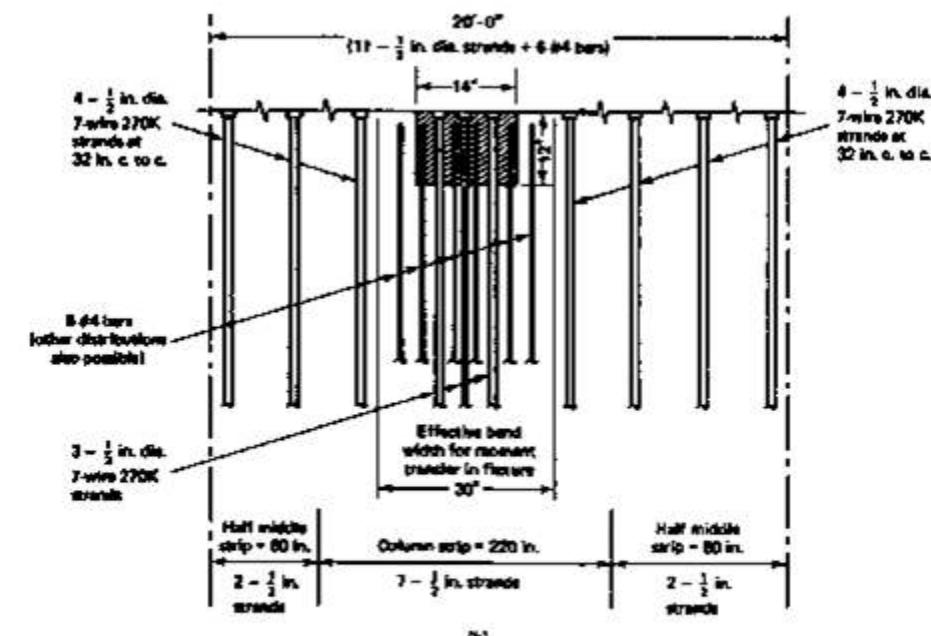
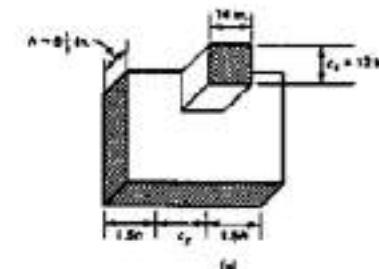


Figure 9.21 Shear-moment transfer zone and reinforcement distribution in Example 9.2. (a) Column zone band (39.5 in. wide). (b) Reinforcement distribution plan.

$M_{un} = 7315 \times 20 + 2437 = 148,737$ in.-lb, and the total required unbalanced moment strength is $M_u = M_{un}/\phi = 148,737/0.9 = 165,263$ in.-lb.

(b) Shear-moment transfer

The fraction of nominal moment strength to be transferred by shear is $\gamma_M = 0.433 \times 165,263 = 71,559 \text{ in.-lb}$, and $c_{AS} = 4(c_1 + d) = 4b_L = 25,224 = 12.6 \text{ in.}$

From Equation 9.30a, the shear stress due to perimeter shear and the effect of M_s is

$$v_n = \frac{V_v}{\phi A_c} + \frac{\gamma_v C_{sf} M_d}{J_c}$$

$$= \frac{84,400}{0.75 \times 462} + \frac{0.433 \times 165,263 \times 12.6}{46.161} = 243.5 + 19.5 = 263 \text{ psi (180 MPa)}$$

≤ allowable $v_n = 273 \text{ psi (180 MPa)}$. O.K.

(c) Flexure movement transfer

The fraction of nominal moment strength to be transferred by flexure is $\gamma_f M_s = 0.567 \times 165,263 = 93,704$ in.-lb, and $b = c_1 + 2(1.5 \times h) = 14 + 2(1.5 \times 6.5) = 33$ in., the same as for exterior column A. Assume, as in the case of exterior columns, that three strands pass the interior columns B and C. We have

$$d_s = 6.5 - 1 = 5.5$$

$$\rho_p = \frac{A_{pu}}{bd_z} = \frac{3 \times 0.153}{33.5 \times 5.5} = 0.0025$$

$$f_{ps} = f_{ps} + 10,000 + \frac{f_r}{3000}$$

$$= 159,000 + 10,000 + \frac{4,000}{300 \times 0.0025} = 174,333 \text{ per year}$$

which is very close to f_y for column A. Accordingly, using six #4 bars $\times 12$ ft as minimum mild steel, as for the exterior columns, $\sigma = 1.48$ in. and the available moment capacity in the column is:

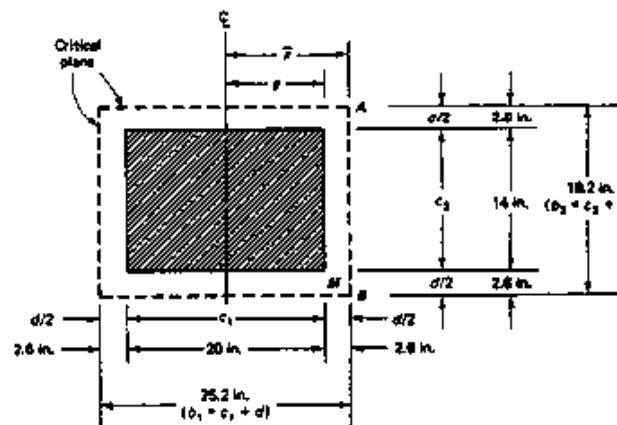


Figure 9.22 Critical plane for shear transfer in interior column of Example 9. (Line B or C, Figure 9.17)

$M_s = 1.2 \times 60,000(5.5 - 1.33/2) + 0.459 \times 174,333(5.5 - 1.33/2) = 348,120 + 386,891 = 735,011 \text{ in.-lb} \gg$
required $M_s = 165,263 \text{ in.-lb}$, and hence satisfactory.

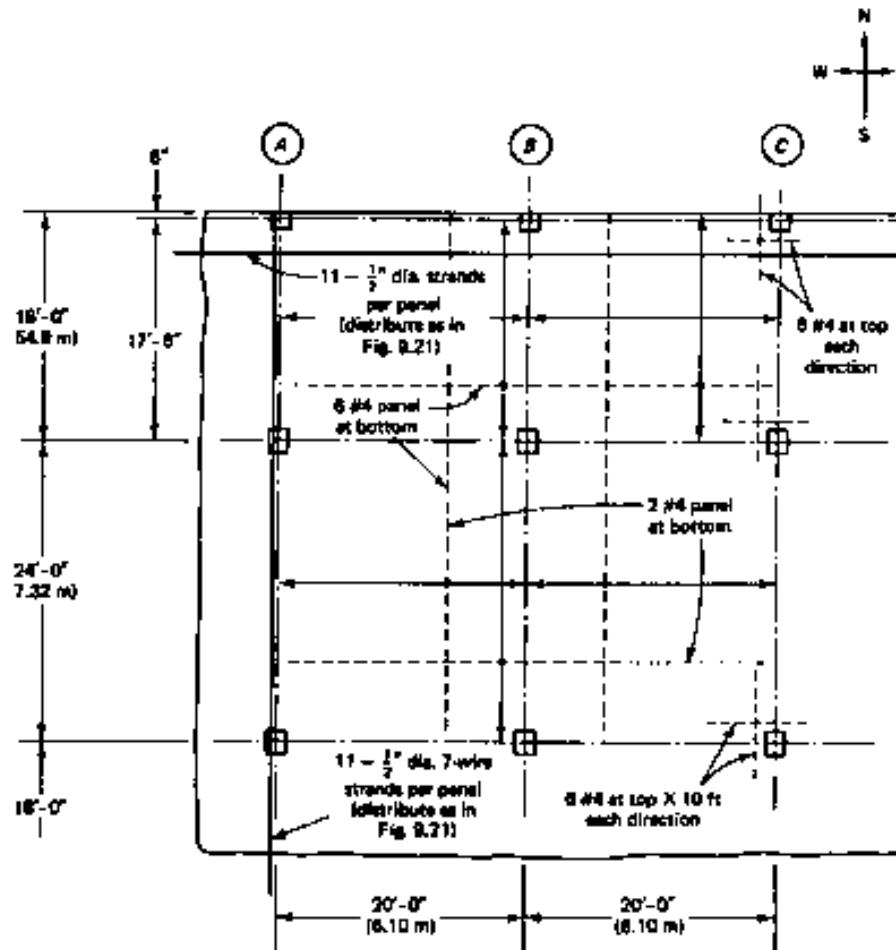


Figure 9.23 Schematic reinforcement distribution, partial floor plan for Example 9.2.