ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

Facultad de Ciencias

Modelos de Riesgo

Trabajo Riesgo de Mercado

Integrantes:
Luis Amagua
Nohely Córdova
Erika Ramírez

Quito - Ecuador
8 de enero de 2022

Índice

1. Introducción

El riesgo de mercado se lo conoce como la probabilidad de variaciones en los precios y el activo que puede tener una empresa. Más concretamente, hablamos de los riesgos de pérdidas de valor de un activo que suele estar asociado a la fluctuación y las variaciones del mercado. Para el estudio de mercado vamos a utilizar dos activos: IBOVESPA y PETROBRAS.

IBOVESPA es el indicador más importante del mercado de acciones de Brasil, refleja el comportamiento de los principales valores negociados en la Bolsa de Valores de Sao Paolo. Ibovespa refleja tanto las variaciones de los precios de las acciones, como la repercusión de la distribución de los rendimientos y su finalidad principal, es la de servir como indicador medio del comportamiento del mercado.
Además, es un índice de tipo acumulativo, se revisa de forma trimestral y está compuesto por aquellas acciones de las empresas que suponen el 80 % del volumen negociado de los últimos 12 meses y que fueron negociados por el 80 % de los días que cotizaron.BBVA [1]

PETROBRAS es una empresa brasileña que se encuentra dentro de los mayores productores de petróleo y gas del mundo, y se dedica principalmente a la exploración y producción, refinación, generación de energía y comercialización. Tiene ingresos netos US $ 53.683 millones y con Inversiones de US $ 8.056 millones Petrobras [4].

2. Objetivos

- Construir una cartera con dos acciones a partir de su histórico de dos años.
- Calcular el VaR suponiendo que las acciones son independientes y que no lo son también.
- Evaluar como se comporta el movimiento geométrico browniano.
- Simular un horizonte de tiempo para cada activo.

3. Descripción de los datos

Para la construcción de la cartera, se tomó el histórico diario de dos años del precio de las acciones, tanto de Petrobras como de Bovespa[1]. En ambos casos se obtuvo la información del periodo de tiempo que comprende del 15 de agosto de 2019 al 15 de agosto de 2021. En las siguientes gráficas se tiene una visión general de la variación de las acciones durante el último año:

Figura 1: Petroleo Brasileiro Petrobras SA ADR (PBR)

Figura 2: Bovespa

[1] La información histórica se obtuvo de la página web Investing.com

4. Estadística básica preliminar

Para el siguiente trabajo es esencial recordar definiciones básicas de estadística que las presentaremos a continuación:

Estadística es la ciencia y una rama de las matemáticas a través de la cual se recolecta, analiza, describe y estudia una serie de datos a fin de establecer comparaciones o variabilidades que permitan comprender un fenómeno en particular. S. [5] La estadística se vale, en gran medida, de la observación para la recolección de datos que posteriormente serán analizados y comparados a fin de obtener un resultado.

Estadística descriptiva permite presentar de manera resumida y organizada los datos numéricos obtenidos tras un estudio o análisis en particular. Su objetivo, por lo tanto, es describir las características principales de los datos reunidos y evitar generalizaciones Benalcázar [2].

Medidas de tendencia central
Las medidas de tendencia central son parámetros estadísticos que informan sobre el centro de la distribución de la muestra o población estadística. Abarca el conjunto de técnicas gráficas y numéricas que permiten organizar, representar e interpretar en una fase inicial la información recogida en una muestra. Las conclusiones que se derivan se refieren a la muestra y no a toda la población; sin embargo, lo que se aprecia en la muestra mediante técnicas descriptivas facilita la elaboración de hipótesis acerca de la población, para luego, aceptar las o rechazarlas mediante técnicas inferenciales.[2] A continuación, vamos a describir las medidas más importantes:

- **Media** La media es el valor promedio de un conjunto de datos numéricos.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)$$

- **Mediana** es el valor que ocupa el lugar central de todos los datos cuando éstos están ordenados de menor a mayor. Para calcular la mediana, ordenaremos los datos en forma ascendente y estimaremos la mediana según el valor de n, de la siguiente forma:
  - Si n es impar, la mediana será la observación que se ubica en el puesto $(n+1)/2$
  - Si n es par, la mediana será el promedio de las observaciones ubicadas en los puestos $n/2$ y $(n/2+1)$

Medidas de dispersión
pueden definirse como los valores numéricos cuyo objeto es analizar el grado de separación de los valores de una serie estadística con respecto a las medidas de tendencia central consideradas. Vamos a describir las más importantes

- **Varianza** representa la variabilidad de una serie de datos respecto a su media. Formalmente se calcula como la suma de los residuos al cuadrado divididos entre el total de observaciones.
- **Desviación estándar:** Se calcula como raíz cuadrada de la varianza.

Medidas de posición Las medidas de posición son valores que permiten dividir el conjunto de datos en partes porcentuales iguales y se usan para clasificar una observación dentro de una población o muestra.

- **Cuartiles** son valores que dividen una muestra de datos en cuatro partes iguales. Utilizando cuartiles puede evaluar rápidamente la dispersión y la tendencia central de un conjunto de datos.

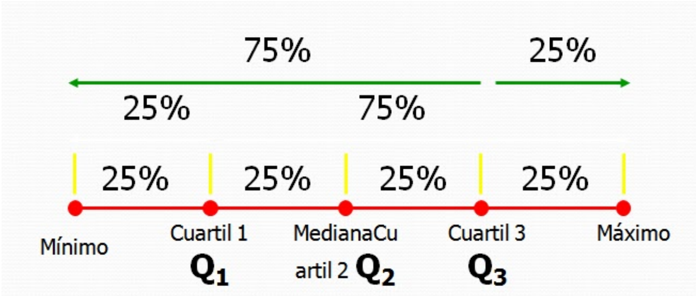

Figura 3: Cuartiles

Medidas de asimetría y curtosis

La asimetría y curtosis informan sobre la forma de la distribución de una variable. Estas medidas permiten saber las características de su asimetría y homgeneidad.

Asimetría Los coeficientes de asimetría indican si hay el mismo número de elementos a izquierda y derecha de la media. Existen tres tipos de curva de distribución según su asimetría Bernat [3]:

- *Asimetría negativa*: la cola de la distribución se alarga para valores inferiores a la media.
- *Simetría*: La distribución se adapta a la forma de la campana de Gauss, o distribución normal.
- *Asimetría positiva*: la cola de la distribución se alarga (a la derecha) para valores superiores a la media.

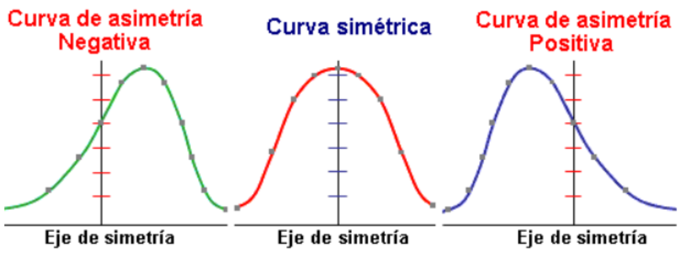

Figura 4: Tipos de Asimetría

Medidas de simetría o asimetría. Miden la mayor o menor simetría de la distribución. Existen dos medidas de este tipo:

- **El coeficiente de asimetría de Fisher CAF** evalúa la proximidad de los datos a su media x. Cuanto mayor sea la suma $\sum(x_i - x)^3$, mayor será el coeficiente.
- **El coeficiente de asimetría de Pearson CAP** mide la diferencia entre la media y la moda respecto a la dispersión del conjunto $X = (x_1, x2, \ldots, x_N)$.

Curtosis

Determina el grado de apuntamiento o achatamiento de éstos en su parte central. Su interpretación se basa en el valor que presente el Coeficiente de Fisher, si este es mayor a 3, la distribución es Leptocúrtica, si es igual a 3 es mesocúrtica.

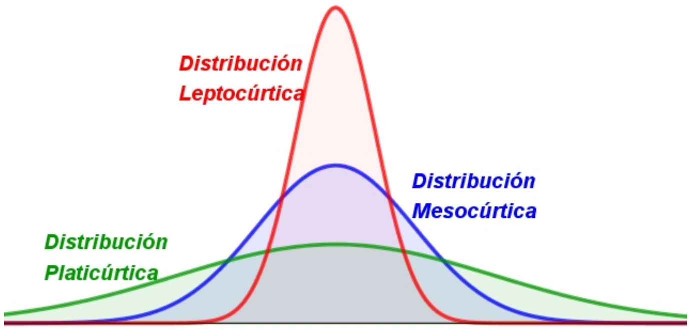

Figura 5: Tipos de Curtosis

- Leptocúrtica: Existe una gran concentración de los valores en torno a su media ($g2 > 3$.)
- Mesocúrtica: Existe una concentración normal de los valores en torno a su media ($g2 = 3$).
- Platicúrtica: Existe una baja concentración de los valores en torno a su media ($g2 < 3$).

5. Preguntas

5.1. a) Calcule las estadísticas: media, varianza, coeficiente de asimetría y curtosis, cuartiles, máximo y mínimo

Estadístico	Petrobras	Ibovespa
Media	10,44	20.382,20
Varianza	9,42	7 351.059
Coeficiente de asimetría	0,37	-0,69
Curtosis	-1,02	0,067
Cuartil 1	8,26	18.988,07
Cuartil 2	9,72	20.493,22
Cuartil 3	13,11	22.460,96
Mínimo	4,31	12.116,33
Máximo	16,44	24.925,68

Petrobras:
Los estadísticos indican que en media el precio de las acciones es de 10,45. La variabilidad respecto a la media es 9,42. El coeficiente de asimetría es positivo, por lo que la cola de la distribución se alarga para valores mayores a la media. En cuanto a la curtosis, se tiene un valor negativo; este coeficiente indica la cantidad de datos que hay cercanos a la media, de manera que a mayor grado de curtosis, más escarpada (o apuntada) será la forma de la curva.

Bovespa:
Los estadísticos indican que en media el precio de las acciones es de 20.382. La variabilidad respecto a la media es de 7 millones. El coeficiente de asimetría es negativo, por lo que la cola de la distribución se alarga para valores inferiores a la media. En cuanto a la curtosis, se tiene un valor positivo cercano a cero.

5.2. b) Obtenga un histograma de los datos y comente la forma de la distribución. Compare con una distribución normal con media y varianza obtenidas en a

En los siguientes histogramas se tiene una clara representación de los datos presentados en la sección anterior:

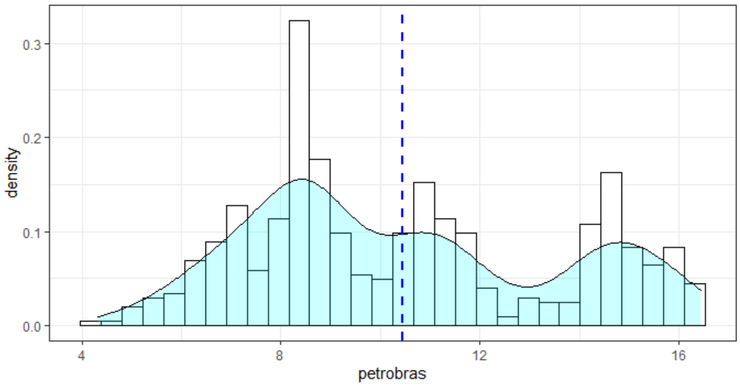

Figura 6: Histograma de Petrobras

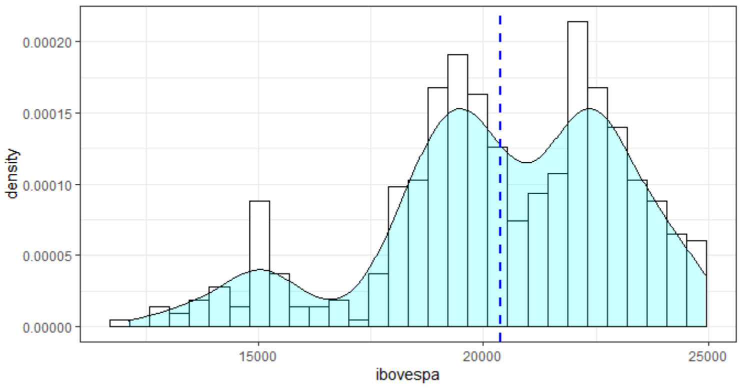

Figura 7: Histograma de Bovespa

Tanto para Petrobras como para Bovespa, a simple vista no se sigue una distribución normal. No obstante para comprobarlo se aplicará el **test de Jarque Bera**. La prueba de Jarque-Bera es una prueba de bondad y ajuste para comprobar si una muestra de datos tiene la asimetría y la curtosis de una distribución normal. El estadístico se distribuye asintóticamente como una distribución chi cuadrado con dos grados de libertad y puede usarse para probar la hipótesis nula de que los datos pertenecen a una distribución normal. La prueba se define de la siguiente manera:

$$JB = \frac{n}{6}(S^2 + \frac{1}{4}(K-3)^2)$$

Test Jarque Bera:

- Petrobras:

$$p - valor < 2{,}2e - 16$$

- Bovespa:

$$p - valor < 2{,}2e - 16$$

Dado que en ambos casos, el p valor es muy pequeño, se rechaza la hipótesis nula de que las muestras provienen de una distribución normal.

5.3. c)¿Cual es el log retorno medio anual y su volatilidad anual sobre el periodo de los datos?

Previo a calcular el retorno y la volatilidad se procede a calcular la diferencia del logaritmo de los datos, obteniendo las siguientes distribuciones:

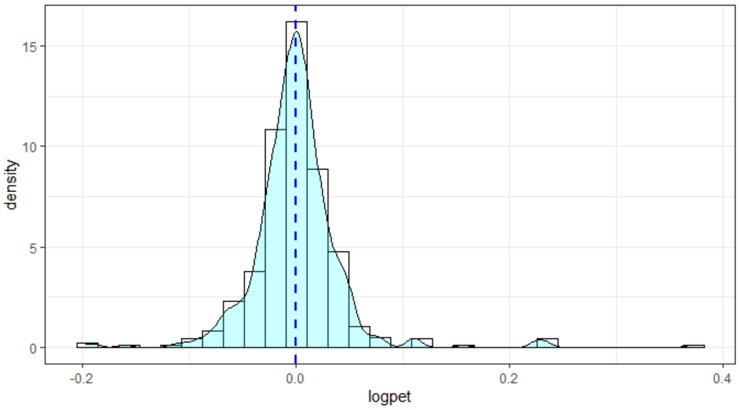

Figura 8: Diff(log(Petrobras))

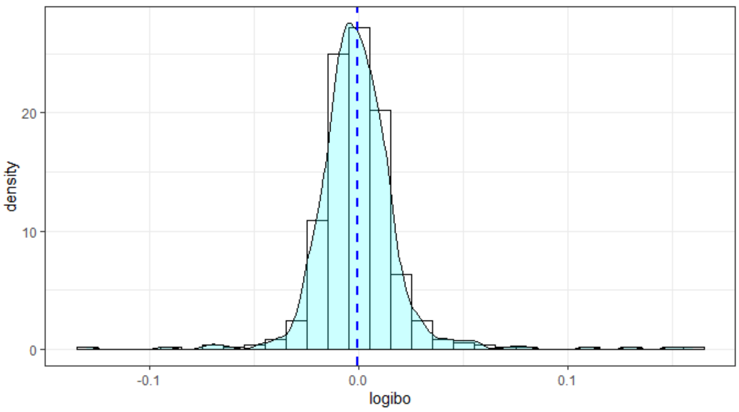

Figura 9: Diff(log(Bovespa))

Petrobras

Para hacer el calculo del rendimiento anualizado (μ_Y) se aplica la siguiente fórmula:

$$\mu_Y = \mu * T$$

donde:
μ: es el promedio de la serie
T: la temporalidad de la serie equivalente en años, en caso de trabajar con datos diarios seria 252.

Reemplazamos con los datos de Petrobras y tenemos:

$$\mu_Y = (0,0003348454) * (252)$$
$$\mu_Y = 0,08438103$$

El retorno anualizado de Petrobras es **0,08**.

Para el cálculo de la volatilidad anualizada (σ_Y), se aplica la siguiente fórmula:

$$\sigma_Y = \sigma_{SD} * \sqrt{T}$$

donde:

σ_{SD} : desviación estándar de la serie
T: Temporalidad de la serie equivalente en años, en caso de trabajar con datos diarios sería 252
Reemplazamos con nuestros datos y tenemos:

$$\sigma_Y = (0,04418266) * \sqrt{252}$$
$$\sigma_Y = 11,13403$$

La volatilidad anualizada de Petrobras es **11,13**.

Ibovespa

De la misma manera, se realiza el cálculo del rendimiento anualizado (μ_Y).

$$\mu_Y = \mu * T$$
$$\mu_Y = (-0,000417732) * (252)$$
$$\mu_Y = -0,1052685$$

El retorno anualizado de Ibovespa es **-0,105**.

Para hacer el cálculo de la volatilidad anualizada (σ_Y) se aplica la siguiente fórmula:

$$\sigma_Y = \sigma_{SD} * \sqrt{T}$$
$$\sigma_Y = (0,02201698) * \sqrt{252}$$
$$\sigma_Y = 5,54828$$

La volatilidad anualizada de Ibovespa es **5,55**.

5.4. d) Si A invirtiese $10.000 en el activo 1 y B la misma cantidad en el activo 2. En el comienzo del periodo de los datos, cual sería el valor de la inversión para A y B cinco años después? Note que el monto líquido del capital inicial C después de n años, a una taza anual de interés r es dado por M=Cexp(rxn)

Petrobras

La tasa de interés r para Petrobras será el retorno anual de la serie obtenido en el literal anterior.

$r = 0,08438103$
$n = 5$
Así, se tiene que:

$$M = 10000 * exp(0,08438103 * 5)$$
$$M = 15248,64$$

Bovespa

Para Bovespa, se realiza el mismo procedimiento tomando su retorno anualizado:
$r = -0,1052685$
$n = 5$
Así, se tiene que:

$$M = 10000 * exp(-0,1052685 * 5)$$
$$M = 5907,617$$

5.5. e) Considerando la ultima información disponible para cada activo. Cual es el proceso que explica el cambio de precio para cada activo en la siguiente semana? En las siguientes 2 semanas? Si tenemos una cartera compuesta por estos dos activos, verifique si los activos son independientes y adapte la simulación considerando la existencia de correlación

Para hacer el cálculo del movimiento geométrico Browniano aplicamos la siguiente ecuación:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta Z$$
$$\Delta S = S(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t})$$

Petrobras

El último dato de la serie Petrobras es de 11,34 dólares y corresponde al 13 de agosto de 2021. En este sentido, el proceso que explica el cambio de precio en la siguiente semana es:

$$\Delta S = 11,34\left(0,08438103\left(\frac{1}{52}\right) + 0,04418266\varepsilon\sqrt{\frac{1}{52}}\right)$$
$$\Delta S = 0,01840156 + 0,06948055\varepsilon$$

De la misma forma, pero para las 2 semanas siguientes, el proceso que explica el cambio de precio es:

$$\Delta S = 11,34\left(0,08438103\left(\frac{2}{52}\right) + 0,04418266\varepsilon\sqrt{\frac{2}{52}}\right)$$
$$\Delta S = 0,03680311 + 0,09826033\varepsilon$$

Bovespa

El último dato de la serie Bovespa es de 23.099,37 dólares y corresponde al 13 de agosto de 2021. En este sentido, el proceso que explica el cambio de precio en la siguiente semana es:

$$\Delta S = 23099,37\left(-0{,}1052685\left(\frac{1}{52}\right) + 0,02201698\varepsilon\sqrt{\frac{1}{52}}\right)$$
$$\Delta S = -46,7622314 + 70,52713\varepsilon$$

De la misma forma, pero para las 2 semanas siguientes, el proceso que explica el cambio de precio es:

$$\Delta S = 23099,37\left(-0{,}1052685\left(\frac{2}{52}\right) + 0,02201698\varepsilon\sqrt{\frac{2}{52}}\right)$$
$$\Delta S = -93,5244627 + 99,7404238\varepsilon$$

Cartera compuesta

Para la cartera compuesta, entiéndase a S1 como el último precio de la empresa Petrobras (11,34) y a S2 al precio de la empresa Bovespa (23.099,37).

$$\Delta S_{1,t} = S_{1,t-1}\mu_1 \Delta t + S_{1,t-1}\sigma_1 \epsilon_{1,t}\sqrt{\Delta t}$$
$$\Delta S_{2,t} = S_{2,t-1}\mu_2 \Delta t + S_{2,t-1}\sigma_2 \epsilon_{2,t}\sqrt{\Delta t}$$

Entonces:

$$\Delta S_{1,t} = 11,34(0{,}08438103)\left(\frac{1}{52}\right) + 11,34(0,04418266)\epsilon_{1,t}\left(\frac{1}{52}\right)$$

$$\Delta S_{2,t} = 23099,37(-0{,}1052685)\left(\frac{1}{52}\right) + 23099,37(0,02201698)\epsilon_{2,t}\left(\frac{1}{52}\right)$$

Es así que el proceso que explica el cambio de precio de la siguiente semana de la cartera compuesta es:

$$\Delta S_{1,t} = 0,01840156 + 0,00963522\epsilon_{1,t}$$

$$\Delta S_{2,t} = -46,7622314 + 9,78035322\epsilon_{2,t}$$

Además, la correlación entre los activos de las dos empresas es 0,4877335. Lo que nos permite concluir que:

Con $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2)$, donde $\epsilon_1 \sim N(0,1)$ y $\epsilon_2 \sim N(0,1)$

$$Var(\vec{\epsilon}) = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,49 \\ 0,49 & 1 \end{bmatrix} = R$$

$$\epsilon_1 = n_1$$

$$\epsilon_2 = 0,4877n_1 + (1 - 0,4877^2)^{\frac{1}{2}} n_2$$

5.6. f) Simule un camino, para cada activo con horizonte de tiempo de 200 pasos. Repita este proceso k veces y muestre la distribución generada para $S1_{200}$ y $S2_{200}$

En este caso para simular los precios S comenzamos con el precio actual y generamos una secuencia de variables aleatorias normales ϵ para $i = 1, 2, ..., n$. Donde los precios están descritos de la siguiente forma recursiva:

- $S_{t+1} = S_t + S_t(\mu + \sigma\sqrt{\Delta t_{\epsilon}})$

hasta alcanzar el horizonte de tiempo requerido ($S_{t+n} = S_T$).

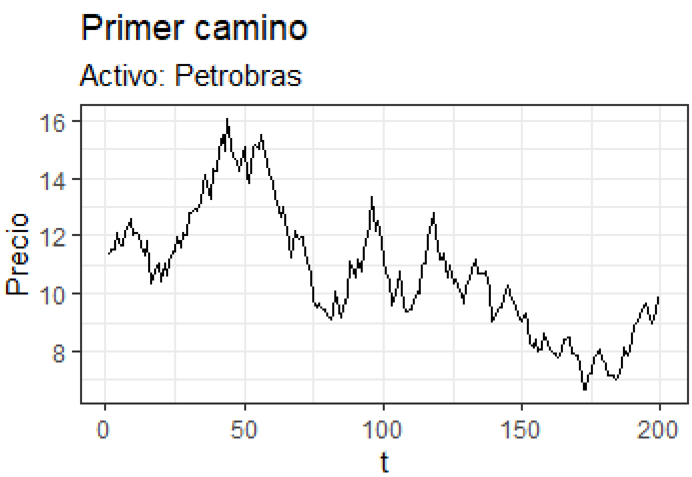

Figura 10: Primer Camino Petrobras

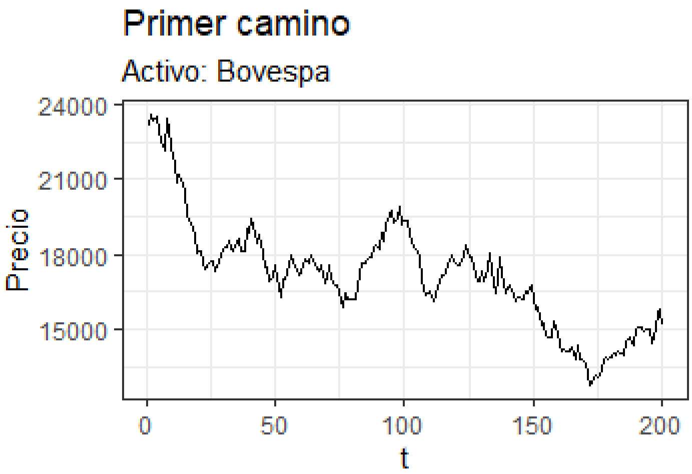

Figura 11: Primer Camino Bovespa

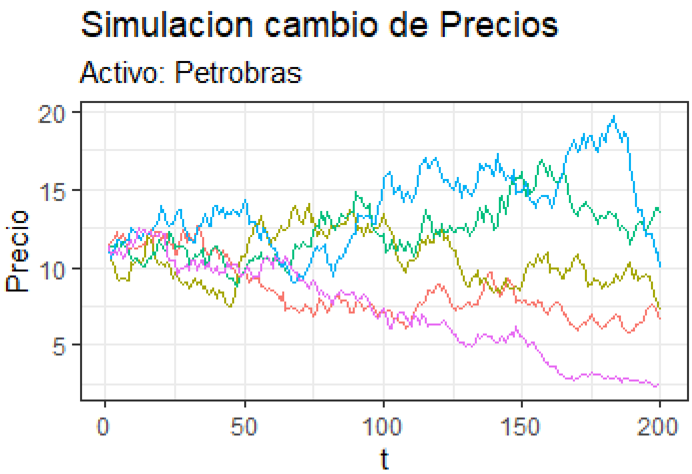

Figura 12

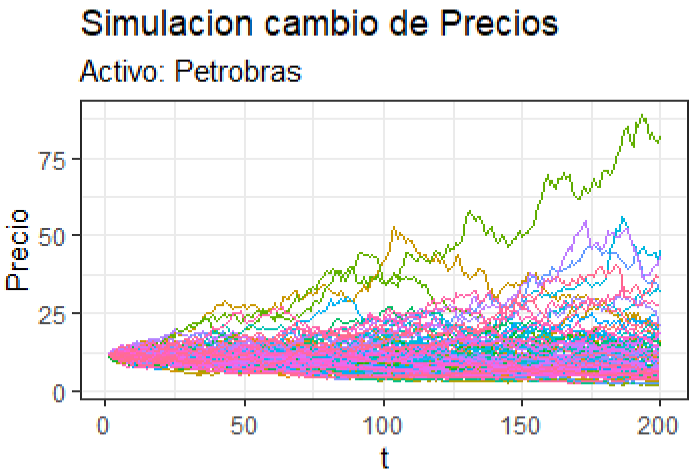

Figura 13

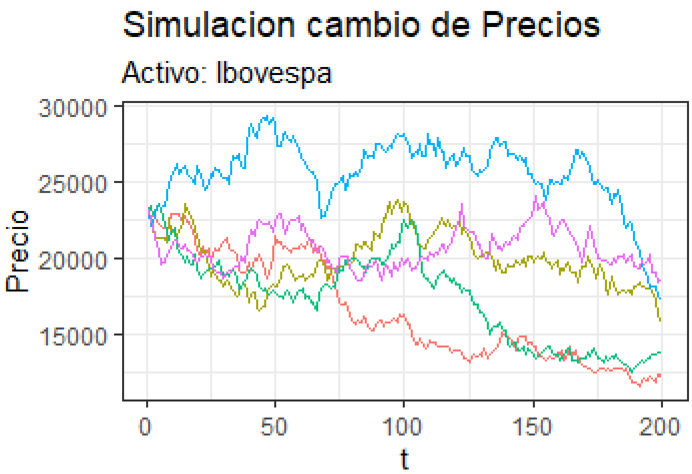

Figura 14

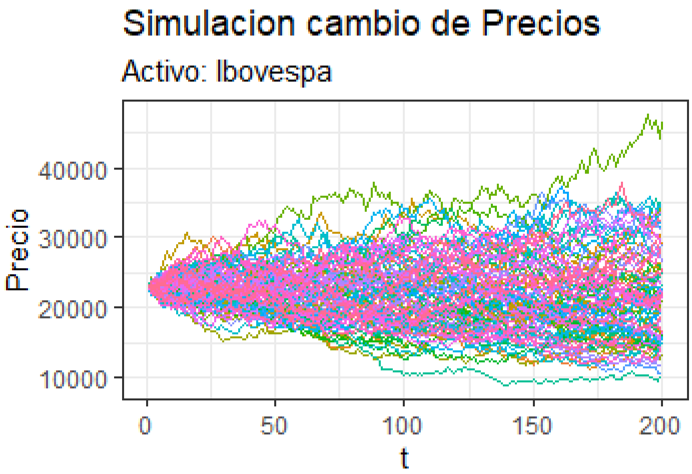

Figura 15

Simulando un camino para los activos se observa que no existe clara correlación entre los activos.

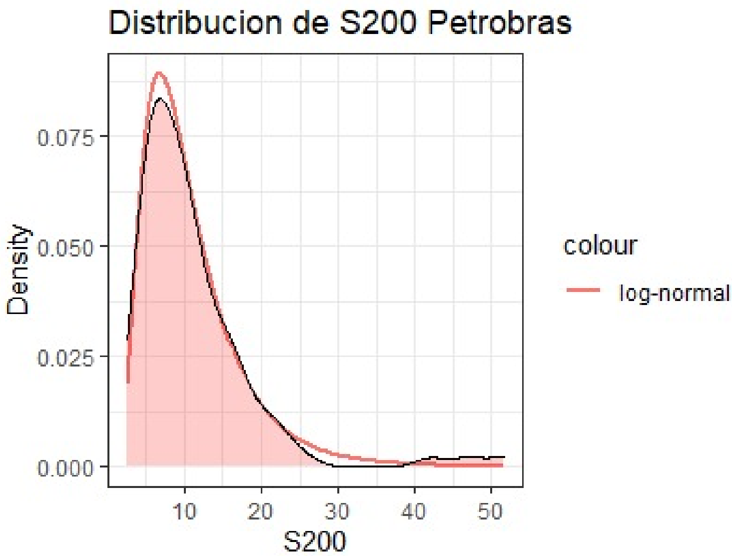

Figura 16

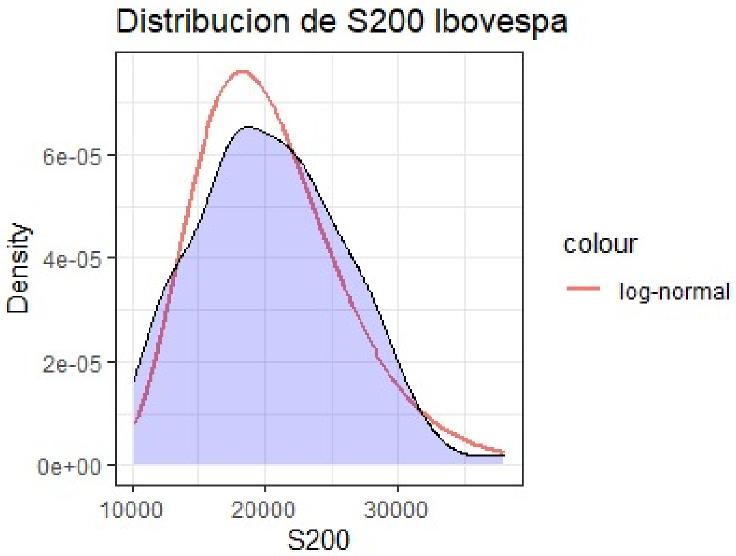

Figura 17

5.7. g) Calcule el valor de la cartera en el horizonte 200 (considere una cartera con estos dos activos)

$$W_t = \sum_{i=1}^{N} q_i.S_{i,t}$$

$$W_t = q_1.S_{1,t} + q_2.S_{2,t}$$

En este sentido, sea $t = 200$:

$$W_{200} = q_1.S_{1,200} + q_2.S_{2,200}$$

$$W_{200} = q_1.(18941{,}16) + q_2.(9{,}065597)$$

Y, sea $q_1 = q_2 = 1$; entonces el valor de la cartera en el horizonte 200 es:

$$W_{200} = 18950, 23$$

5.8. h) Repita este proceso K veces y estime el VaR de la cartera a 99 % y 95 %

En la distribución de las acciones de ambas empresas en el horizonte 200, se tomó a los cuantiles 95 y 99, ya que éstos equivalen al VaR de la cartera al 95 % y 99 %.

Para el cálculo del VaR se usará

$$VaR_c = \bar{W}_{200} - Q_c(W_{200})$$

Tenemos el VaR al 95 % de confianza

$$VaR_{0,95} = 24480, 428$$

Tenemos el VaR al 99 % de confianza

$$VaR_{0,99} = 33144, 50$$

6. Conclusiones

- Para la empresa Petrobras se obtuvo una rentabilidad de la inversión anual de 0,08 y una volatilidad anualizada de 11,13.
- Para el caso de Bovespa se obtuvo una rentabilidad de la inversión anual de -0,105 y una volatilidad anualizada de 5,55.
- En cuanto al Value at risk (VaR) de la cartera, se obtuvo que con un 95 % de confianza la pérdida máxima esperada no será mayor a 24.480.
- De la misma manera, con el Var(99 %) se obtuvo que hay una probabilidad del 1 % de que la perdida esperada supere el monto de 33.145.

Referencias

Referencias

[1] BBVA. *Sistema Bancario*. 2021.

[2] Holger Benalcázar. *Guía de estudio de estadística descriptiva*. 2020.

[3] Bernat. *Asimetría y curtosis*. https://www.universoformulas.com/estadistica/descriptiva/asimetria-curtosis/. 2014.

[4] Petrobras. *Perfil*. https://petrobras.com.br/en/about-us/profile/. 2020.

[5] S. *Estadistica*. https://www.significados.com/estadistica/. 2019.