Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Cálculo de Programas
Trabalho Prático (2023/24)

Lic. em Engenharia Informática

Grupo G14

a100594 João Manuel Machado Lopes
a100665 Tiago Nuno Magalhães Teixeira
a100693 Luís Vítor Lima Barros

janeiro 2024

Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em Haskell (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abodarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo A onde encontrarão as instruções relativas ao sofware a instalar, etc.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

Problema 1

Este problema, retirado de um *site* de exercícios de preparação para entrevistas de emprego, tem uma formulação simples:

> *Dada uma matriz de uma qualquer dimensão, listar todos os seus elementos rodados em espiral.*
>
> *Por exemplo, dadas as seguintes matrizes:*

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[d] \\
4 \arrow[r] & 5 & 6 \arrow[d] \\
7 \arrow[u] & 8 \arrow[l] & 9 \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[d] \\
5 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 7 & 8 \arrow[d] \\
9 \arrow[u] & 10 \arrow[l] & 11 \arrow[l] & 12 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

> *dever-se-á obter, respetivamente,* $[1,2,3,6,9,8,7,4,5]$ *e* $[1,2,3,4,8,12,11,10,9,5,6,7]$.
>
> $\square$

Valorizar-se-ão as soluções *pointfree* que empreguem os combinadores estudados na disciplina, e.g. $f \cdot g$, $\langle f, g \rangle$, $f \times g$, $[f, g]$, $f + g$, bem como catamorfismos e anamorfismos.

Recomenda-se a escrita de *pouco* código e de soluções simples e fáceis de entender. Recomenda-se que o código venha acompanhado de uma descrição de como funciona e foi concebido, apoiado em diagramas explicativos. Para instruções sobre como produzir esses diagramas e exprimir raciocínios de cálculo, ver o anexo D.

Problema 2

Este problema, que de novo foi retirado de um *site* de exercícios de preparação para entrevistas de emprego, tem uma formulação muito simples:

> *Inverter as vogais de um* string.

Esta formulação deverá ser generalizada a:

> *Inverter os elementos de uma dada lista que satisfazem um dado predicado.*

Valorizam-se as soluções tal como no problema anterior e fazem-se as mesmas recomendações.

Problema 3

Sistemas como chatGPT etc baseiam-se em algoritmos de aprendizagem automática que usam determinadas funções matemáticas, designadas *activation functions* (AF), para modelar aspectos não lineares do mundo real. Uma dessas AFs é a tangente hiperbólica, definida como o quociente do seno e coseno hiperbólicos,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{1}$$

podendo estes ser definidos pelas seguintes séries de Taylor:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh x \tag{2}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x$$

Interessa que estas funções sejam implementadas de forma muito eficiente, desdobrando-as em operações aritméticas elementares. Isso pode ser conseguido através da chamada programação dinâmica que, em Cálculo de Programas, é feita de forma *correct-by-construction* derivando-se ciclos-**for** via lei de recursividade mútua generalizada a tantas funções quanto necessário — ver o anexo E.

O objectivo desta questão é codificar como um ciclo-for (em Haskell) a função

$$snh\ x\ i = \sum_{k=0}^{i} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{3}$$

que implementa *sinh* x, uma das funções de *tanh* x (1), através da soma das i primeiras parcelas da sua série (8).

Deverá ser seguida a regra prática do anexo E e documentada a solução proposta com todos os cálculos que se fizerem.

Problema 4

Uma empresa de transportes urbanos pretende fornecer um serviço de previsão de atrasos dos seus autocarros que esteja sempre actual, com base em *feedback* dos seus paassageiros. Para isso, desenvolveu uma *app* que instala num telemóvel um botão que indica coordenadas GPS a um serviço central, de forma anónima, sugerindo que os passageiros o usem preferencialmente sempre que o autocarro onde vão chega a uma paragem.

Com base nesses dados, outra funcionalidade da *app* informa os utentes do serviço sobre a probabilidade do atraso que possa haver entre duas paragens (partida e chegada) de uma qualquer linha.

Pretende-se implementar esta segunda funcionalidade assumindo disponíveis os dados da primeira. No que se segue, ir-se-á trabalhar sobre um modelo intencionalmente *muito simplificado* deste sistema, em que se usará o mónade das distribuições probabilísticas (ver o anexo F). Ter-se-á, então:

- paragens de autocarro

  $$\mathbf{data}\ Stop = S0 \mid S1 \mid S2 \mid S3 \mid S4 \mid S5\ \mathbf{deriving}\ (Show, Eq, Ord, Enum)$$

  que formam a linha $[S0\mathinner{..}S5]$ assumindo a ordem determinada pela instância de $Stop$ na classe $Enum$;

- segmentos da linha, isto é, percursos entre duas paragens consecutivas:

  $$\mathbf{type}\ Segment = (Stop, Stop)$$

- os dados obtidos a partir da *app* dos passageiros que, após algum processamento, ficam disponíveis sob a forma de pares *(segmento, atraso observado)*:

  $$dados :: [(Segment, Delay)]$$

  (Ver no apêndice G, página 9, uma pequena amostra destes dados.)

A partir destes dados, há que:

- gerar a base de dados probabilística

  $$db :: [(Segment, \mathsf{Dist}\ Delay)]$$

  que regista, estatisticamente, a probabilidade dos atrasos ($Delay$) que podem afectar cada segmento da linha. Recomenda-se aqui a definição de uma função genérica

  $$mkdist :: Eq\ a \Rightarrow [a] \rightarrow \mathsf{Dist}\ a$$

  que faça o sumário estatístico de uma qualquer lista finita, gerando a distribuição de ocorrência dos seus elementos.

- com base em db, definir a função probabilística

  $$delay :: Segment \rightarrow \mathsf{Dist}\ Delay$$

  que dará, para cada segmento, a respectiva distribuição de atrasos.

Finalmente, o objectivo principal é definir a função probabilística:

$$pdelay :: Stop \rightarrow Stop \rightarrow \mathsf{Dist}\ Delay$$

$pdelay\ a\ b$ deverá informar qualquer utente que queira ir da paragem a até à paragem b de uma dada linha sobre a probabilidade de atraso acumulado no total do percurso $[a\mathinner{..}b]$.

Valorizar-se-ão as soluções que usem funcionalidades monádicas genéricas estudadas na disciplina e que sejam elegantes, isto é, poupem código desnecessário.

Anexos

A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

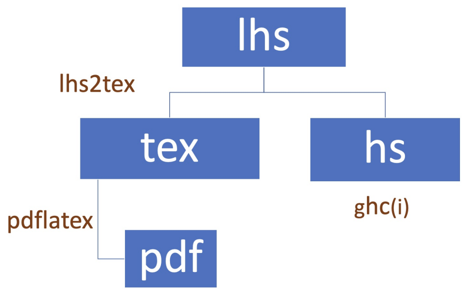
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [**?**], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2324t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp2324t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2324t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código Haskell que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do GHCi, serão necessários os executáveis pdflatex e lhs2TeX. Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do Docker tal como a seguir se descreve.

B Docker

Recomenda-se o uso do container cuja imagem é gerada pelo Docker a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2324t.zip`. Este container deverá ser usado na execução do GHCi e dos comandos relativos ao LaTeX. (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

[1] O sufixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

Após instalar o Docker e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2324t .
$ docker run -v ${PWD}:/cp2324t -it cp2324t
```

NB: O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o GHCi e os comandos relativos ao LaTeX. Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2324t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2324t` no container sejam partilhadas.

Pretende-se então que visualize/edite os ficheiros na sua máquina local e que os compile no container, executando:

```
$ lhs2TeX cp2324t.lhs > cp2324t.tex
$ pdflatex cp2324t
```

lhs2TeX é o pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que faz parte já do container. Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2324t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2324t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2324t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo GHCi para ser executado.

C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo H com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTeX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp2324t.aux
$ makeindex cp2324t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no container.)

No anexo G disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da programação literária para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo D que se segue.

D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte (lhs) do que está a ler[1] onde se obtém o efeito seguinte:[2]

$$
\begin{array}{ll}
& id = \langle f, g \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \text{ universal property } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \text{ identity } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[d, "(\!|g|\!)"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + (\!|g|\!)"] \\
B & 1 + B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
$$

E Regra prática para a recursividade mútua em $\mathbb{N}_0$

Nesta disciplina estudou-se como fazer programação dinâmica por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.[3]

Para o caso de funções sobre os números naturais ($\mathbb{N}_0$, com functor $\mathsf{F}\ X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado Cálculo de Programas. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema:

$$
\begin{array}{l}
fib\ 0 = 1 \\
fib\ (n+1) = f\ n \\
f\ 0 = 1 \\
f\ (n+1) = fib\ n + f\ n
\end{array}
$$

Obter-se-á de imediato

$$
\begin{array}{l}
fib' = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where} \\
\quad loop\ (fib, f) = (f, fib + f) \\
\quad init = (1, 1)
\end{array}
$$

usando as regras seguintes:

[1] Procure e.g. por `"sec:diagramas"`.

[2] Exemplos tirados de [?].

[3] Lei (3.95) em [?], página 110.

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.[1]
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável n.
- Em *init* coleccionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em $\mathbb{N}_0$. Seguindo o método estudado nas aulas[2], de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$
\begin{array}{l}
f\ 0 = c \\
f\ (n+1) = f\ n + k\ n \\
k\ 0 = a + b \\
k\ (n+1) = k\ n + 2\ a
\end{array}
$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$
\begin{array}{l}
f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where} \\
\quad loop\ (f, k) = (f + k, k + 2 * a) \\
\quad init = (c, a + b)
\end{array}
$$

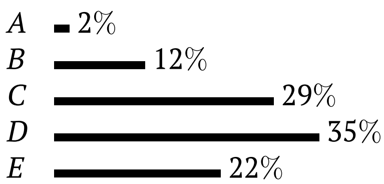
F O mónade das distribuições probabilísticas

Mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca Probability oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\mathbf{newtype}\ \mathsf{Dist}\ a = D\ \{unD :: [(a, ProbRep)]\} \tag{4}$$

em que $ProbRep$ é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: \mathsf{Dist}\ a$ indica que a probabilidade de a é p, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



será representada pela distribuição

$$
\begin{array}{l}
d1 :: \mathsf{Dist}\ Char \\
d1 = D\ [(\texttt{'A'}, 0.02), (\texttt{'B'}, 0.12), (\texttt{'C'}, 0.29), (\texttt{'D'}, 0.35), (\texttt{'E'}, 0.22)]
\end{array}
$$

que o GHCi mostrará assim:

[1] Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

[2] Secção 3.17 de [?] e tópico Recursividade mútua nos vídeos de apoio às aulas teóricas.

```
'D'  35.0%
'C'  29.0%
'E'  22.0%
'B'  12.0%
'A'   2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d2 = uniform\ (words\ \texttt{"Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é

```
     "Uma"  20.0%
   "cinco"  20.0%
      "de"  20.0%
   "frase"  20.0%
"palavras"  20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

$$d3 = normal\ [10\mathinner{\ldotp\ldotp}20]$$

etc.[1] Dist forma um **mónade** cuja unidade é $return\ a = D\ [(a,1)]$ e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g)\ a = [(y, q * p) \mid (x,p) \leftarrow g\ a, (y,q) \leftarrow f\ x]$$

em que $g : A \rightarrow \text{Dist}\ B$ e $f : B \rightarrow \text{Dist}\ C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica.

G Código fornecido

Problema 1

$$m1 = [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]$$
$$m2 = [[1,2,3,4],[5,6,7,8],[9,10,11,12]]$$
$$m3 = words\ \texttt{"Cristina Monteiro Carvalho Sequeira"}$$

$$test1 = matrot\ m1 \equiv [1,2,3,6,9,8,7,4,5]$$
$$test2 = matrot\ m2 \equiv [1,2,3,4,8,12,11,10,9,5,6,7]$$
$$test3 = matrot\ m3 \equiv \texttt{"CristinaooarieuqeSCMonteirhlavra"}$$

Problema 2

$$test4 = reverseVowels\ \texttt{""} \equiv \texttt{""}$$
$$test5 = reverseVowels\ \texttt{"ácidos"} \equiv \texttt{"ocidás"}$$
$$test6 = reverseByPredicate\ even\ [1\mathinner{\ldotp\ldotp}20] \equiv [1,20,3,18,5,16,7,14,9,12,11,10,13,8,15,6,17,4,19,2]$$

[1] Para mais detalhes ver o código fonte de Probability, que é uma adaptação da biblioteca PFP ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser saber mais recomenda-se a leitura do artigo [?].

Problema 3

Nenhum código é fornecido neste problema.

Problema 4

Os atrasos, medidos em minutos, são inteiros:

$$\mathbf{type}\ Delay = \mathbb{Z}$$

Amostra de dados apurados por passageiros:

$$\begin{aligned} dados = [&((S0, S1), 0), ((S0, S1), 2), ((S0, S1), 0), ((S0, S1), 3), ((S0, S1), 3),\\ &((S1, S2), 0), ((S1, S2), 2), ((S1, S2), 1), ((S1, S2), 1), ((S1, S2), 4),\\ &((S2, S3), 2), ((S2, S3), 2), ((S2, S3), 4), ((S2, S3), 0), ((S2, S3), 5),\\ &((S3, S4), 2), ((S3, S4), 3), ((S3, S4), 5), ((S3, S4), 2), ((S3, S4), 0),\\ &((S4, S5), 0), ((S4, S5), 5), ((S4, S5), 0), ((S4, S5), 7), ((S4, S5), -1)] \end{aligned}$$

"Funcionalização" de listas:

$$\begin{aligned} &mkf :: Eq\ a \Rightarrow [(a, b)] \to a \to Maybe\ b\\ &mkf = flip\ Prelude.lookup \end{aligned}$$

Ausência de qualquer atraso:

$$\begin{aligned} &instantaneous :: \text{Dist}\ Delay\\ &instantaneous = D\ [(0, 1)] \end{aligned}$$

H Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto ao anexo, bem como diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Importante: Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

Problema 1

Para este problema partimos o problema em duas partes. Sabemos que a travessia em espiral é resultante da consecutiva travessia e remoção das bordas da matriz (primeira linhas -> ultima coluna -> última linha ao contrario -> primeira coluna de baixo para cima). Sendo de destacar que este processo termina quando a matriz esitver vaiza, comportamento o qual que vai ser detetado pela função *outMat*. Dito isto, para a resolução deste problema, criamos uma função auxiliar que recebe uma matriz e devolve o par da lista correspondente à sua borda e a sua matriz interior. Para esta função funcionar, recorremos a uma função que determina quando uma matriz é vazia *isEmpty*, de forma a determinar o ponto de paragem. Tendo as funções auxiliares todas devidamente definidas, a função principal *matrot* vai recorrer ao anamorfismo de listas, construindo assim, apartir da matriz inicial, uma lista com todas as suas bordas, por fim junta todos estes valores com *concat* de modo ao resultado corresponder a uma lista única que representa a rotação em espiral.

Desenhando o diagrama da função principal, obtemos a seguinte firuga:

$$\begin{tikzcd}
A^* & & \\
A^{**} \arrow[u, "concat"] & & 1 + A^* x A^{**} \arrow[ll, "inList"'] \\
A^{**} \arrow[u, "(\![testBordas]\!)"] \arrow[r, "outMat"'] & 1 + A^{**} \arrow[r, "id+bordas"'] & 1 + A^* x A^{**} \arrow[u, "id+id\ x\ (\!|g|\!)"']
\end{tikzcd}$$

$matrot :: Eq\ a \Rightarrow [[a]] \to [a]$
$matrot = concat \cdot (\![\ testBordas\ ]\!)$

$testBordas = (id + bordas) \cdot outMat$

$outMat\ all@((\_ : \_) : \_) = i_2\ all$
$outMat\ \_ = i_1\ ()$

$isEmpty :: [[a]] \to Bool$
$isEmpty = [true, false] \cdot outMat$

$applyConcFirst = (\mathrm{conc} \times id) \cdot assocl$

$insertPair = (cons \times cons) \cdot assocr \cdot (assocl \times id) \cdot ((id \times swap) \times id) \cdot (assocr \times id) \cdot assocl$

$applyNotEmpty = isEmpty \to \langle nil, nil \rangle, \cdot$

$getLastColumn :: [[a]] \to ([a], [[a]])$
$getLastColumn = applyNotEmpty\ (\!|\ g\ |\!)$
  where $g = [\langle nil, nil \rangle, insertPair \cdot (\langle last, init \rangle \times id)]$

$getFirstColumnReversed :: [[a]] \to ([a], [[a]])$
$getFirstColumnReversed = (reverse \times id) \cdot (applyNotEmpty\ (\!|\ g\ |\!))$
  where $g = [\langle nil, nil \rangle, insertPair \cdot (\langle head, tail \rangle \times id)]$

$getLastReversed :: [[a]] \to ([a], [[a]])$
$getLastReversed = applyNotEmpty\ \langle reverse \cdot last, init \rangle$

$getFirstLine :: \quad [[a]] \to ([a], [[a]])$
$getFirstLine = \quad applyNotEmpty\ \langle head, tail \rangle$

$bordas :: [[a]] \to ([a], [[a]])$
$bordas = applyConcFirst \cdot (id \times getFirstColumnReversed) \cdot applyConcFirst \cdot (id \times getLastReversed) \cdot applyConcFi$

Problema 2

Face ao problema dado, começamos por fazer uma análise do mesmo e chegamos à conclusão de que a função *reverseVowels* é um caso específico da função *reverseByPredicate* cujo predicado se trata de uma função que avalia se um caracter é uma vogal. Logo, criamos a função *isVowel* e defenimos a primeira função através das duas funções mencionadas anteriormente.

Partindo então para a função genérica, começamos por inserir um indice da sua posição em cada elemento da lista de forma a manter informação das suas posições iniciais, resulando assim numa lista de pares: $(indice, valor)$. Posteriormente, separamos os elementos cujo valor respeita ou não o predicado , recorrendo assim à funcçao *splitByPredicate*, esta recebe uma função que avalia um elemento e uma lista, transofrmando esta num par de listas em que a primeira corresponde aos elementos que respeitam o predicado e a segunda os restantes. De seguida, invertemos a ordem dos valores da primeira lista , através da função *reverseP2*, e mantemos a outra inalterada. Por fim, juntamos as duas listas e reordenamos de acordo com os índices e retiramos os mesmos , recorrendo assim à função *sortOnAndRemoveP1*.

Diagrama da função *reverseP2*:

$$(A\ x\ B)^* \xrightarrow{unzip} A^*xB^* \xrightarrow{id\ x\ reverse} A^*xB^* \xrightarrow{\widehat{zip}} (A\ x\ B)^*$$

Diagrama da função *splitByPredicate*:

$$\begin{tikzcd}
 & A^* \arrow[dl, "filter\ p"'] \arrow[d, "splitByPredicate\ p"] \arrow[dr, "filter\ \neg\ p"] & \\
A^* & A^*xA^* \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & A^*
\end{tikzcd}$$

Diagrama da função principal:

$$\begin{tikzcd}
A^* \arrow[r, "zip"] \arrow[d, "reverseByPredicate\ p"'] & (\mathbb{N}_0\ x\ A)^* \arrow[rr, "splitByPredicate\ (p \cdot \pi_2)"] & & (\mathbb{N}_0\ x\ A)^* x\ (\mathbb{N}_0\ x\ A)^* \arrow[d, "reverseP2\ x\ id"] \\
A^* & & (\mathbb{N}_0\ x\ A)^* \arrow[ll, "sortOnAndRemoveP1"] & (\mathbb{N}_0\ x\ A)^* x\ (\mathbb{N}_0\ x\ A)^* * \arrow[l, "\mathrm{conc}"]
\end{tikzcd}$$

$reverseVowels :: String \to String$
$reverseVowels = reverseByPredicate\ isVowel$

$isVowel = flip\ elem$ "áàãaeéiouyÁÀAEÉIOUY"

$reverseByPredicate :: (a \to Bool) \to [a] \to [a]$
$reverseByPredicate\ p = sortOnAndRemoveP1 \cdot \mathrm{conc} \cdot (reverseP2 \times id) \cdot splitByPredicate\ (p \cdot \pi_2) \cdot zip\ nat0$

$reverseP2 = \widehat{zip} \cdot (id \times reverse) \cdot unzip$

$sortOnAndRemoveP1 = \mathrm{map}\ \ \pi_2 \cdot (sortOn\ \pi_1)$

$splitByPredicate\ p = \langle filter\ p, filter\ (\neg \cdot p) \rangle$

Problema 3

Para este problema, começamos por analisar as fórmulas matemáticas. Tanto no cosseno hiperbólico quanto no seno hiperbólico, é notável que a função objetivo apresenta uma forma semelhante.

Dito isto, se criarmos uma função auxiliar para ser aplicada a k, nomeadamente:

$$senhk(k) = 2k + 1 \quad (5)$$
$$coshk(k) = 2k \quad (6)$$

Dito isto, criamos uma função genérica para os dois casos:

$$f(x, j) = \frac{x^j}{j!} \quad (7)$$

Resultando assim nos seguintes somatórios:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(x, senhk(k)) = \sinh x \tag{8}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} f(x, coshk(k)) = \sinh x$$

De modo a simplificar os calculos é establecido um valor maximo que k pode atingir : i.

Dito isto, podemos partir qualquer um dos somatórios em duas casos diferentes, um caso de paragem quando temos $i = 0$, e um intermédio/inicial:

$$\sum_{k=0}^{0} f(x, senhk(k)) = f(x, senhk(0)) = f(x, 2*0+1) = f(x,1) = \frac{x^1}{1!} = x \tag{9}$$
$$\sum_{k=0}^{i} f(x, coshk(k)) = f(x, senhk(i)) + \sum_{k=0}^{i-1} f(x, coshk(k))$$

Partindo agora para a implementação em si, de modo a podermos utilizar o for preedefinido, as funçoes de paragem e intermédias devolvem uma par que corresponde: valor de i e o valor do sumatório para k de 0 até i. Tendo isto em conta, establecemos o valor do caso de paragem na função *start* e o caso intermédio através da função *loop* ,à qual acrescentamos como argumento a função *senhk*, de modo a este loop poder ser reutilizado para posteriormente construir a função do *cosh*.

Dito isto a função loop, além de receber o valor de x e a função a ser aplicada ao índice correspondente, vai receber também um par que corresponde ao valor do indice anterior e o sumatório até aquele instante. Com essas informações, incrementa o índice, utiliza a função f que representa a função objetivo para calcular a nova parcela e soma esta ao valor acumulado no sumatório até ao momento.

Terminado assim o ciclo, pretendemos apenas devolver ao utilizador o resultado do sumatório, ou seja o segundo elemento do par calculado, utilizando assim o *wrapper*.

$$
\begin{array}{l}
snh\ x = wrapper \cdot worker\ \textbf{where} \\
\quad worker = \mathsf{for}\ (loop\ x\ senhk)\ (start\ x\ senhk) \\
\quad wrapper = \pi_2 \\
senhk = \mathsf{succ}\ \cdot (*2) \\
incrementaIndice = (\mathsf{succ}\ \times id) \\
loop\ x\ func = (id \times myadd) \cdot assocr \cdot (\langle id, (f\ x) \cdot func \rangle \times id) \cdot incrementaIndice \\
myadd = \widehat{(+)} \\
f\ x = \widehat{(/)} \cdot (id \times fromInteger) \cdot \langle Nat.exp\ x, Nat.fac \rangle \\
start\ x\ func = (0, f\ x\ (func\ 0))
\end{array}
$$

Problema 4

Para este problema, começamos por criar a função *mkdist* que para uma dada lista, cria a sua distribuição, sendo as probabilidades determinadas apartir do número de vezes que um dado elemento encontra-se presente na lista. Para este efeito, a função começa por determinar a probabilidade de cada elemento da lista, sem ter em conta repetidos. De seguida, utiliza a função *insereProb*, passando como argumento o par da probabilidade de cada elemento e a lista. Esta função auxiliar recebe um par de um elemento qualquer e uma lista e devolve uma lista em que os seus elementos são os mesmos que a lista inicial, contudo dentro de um par em que o segundo elemento foi o elemento passado como argumento. Estando assim os pares de elementos e a sua probabilidade definidos, usamos a função *mkD*, responsável por criar a estrutura de dados desejada devidamente normalizada.

De modo a criar a base de dados *db*, passamos os dados como argumento à função *criarBase*, esta será responsável por agrupar os dados de acordo com os segmentos e criar as respetivas distribuições dos seus atrasos, devolvendo assim uma lista de pares de **Segment** e **Dist**.

A função *delay* procura na base de dados a distribuição correspondente ao segmento, caso não encontre nada sobre o mesmo, podemos assumir que não houve atrasos ou seja a probabilidade de o atraso ser 0 é igual a 1.

Analisando o problema, é visível que o atraso é acumulativo, ou seja, de modo a combinar dois segmentos o atraso no primeiro vai afectar o atraso no segundo. Dito isto esta combinação é realizada pela função *combinaDelays* responsável por combinar duas distribuições, sendo que os respetivos valores ão ser somados, representando assim a acumulação de atrasos. Seguindo o mesmo raciocínio, de modo a combinar uma lista de distribuições numa única distribuição, utilizamos a função *combinaListDelays* que corresponde ao catamorfismo de listas que calcula a distribuição final.

Por fim criamos uma função auxiliar *parteSegments* que determina todas as sequências intermédias entre dois **Enum** do mesmo tipo, obtendo assim o seguinte efeito para o nosso caso especifico, determinando todos os segmentos interiores entre duas paragens.

$$\mathit{parteSegments}(S1, S4) = [(S1, S2), (S2, S3), (S3, S4)]$$

Recorrendo assim às funções auxiliares mencionadas anteriormente, podemos finalmente construir a função *pdelay*, responsável por calcuar a distribuição de atrasos entre duas paragens, começando por criar a lista de segmentos seguida da transformação dos segmentos nas suas distribuições de atrasos. E por fim, combinar as distribuições da lista, utilizando assim a função *combinaListDelays*, utilizando a função curry de modo aos dois argumentos recebidos poderem ser passados como um par para a função *parteSegments* no início da sua composição.

$$\mathit{db} = \mathit{criaBase}\ \mathit{dados}$$
$$\mathit{criaBase} = (\mathsf{map}\ \ (\mathit{id} \times \mathit{mkdist})) \cdot (\mathsf{map}\ \ \langle \pi_1 \cdot \mathit{head}, (\mathsf{map}\ \ \pi_2) \rangle) \cdot (\mathit{groupBy}\ \overline{\mathit{equalFirst}})$$
$$\mathit{mkdist} = \mathit{mkD} \cdot \mathit{insereProb} \cdot \langle (1/) \cdot \mathit{fromIntegral} \cdot \mathit{length}, \mathit{id} \rangle$$
$$\mathit{insereProb} :: (b, [a]) \to [(a, b)]$$
$$\mathit{insereProb} = \widehat{\cdot}\ \$\ (\mathsf{map}\ \ \cdot \mathit{flip}\ (,))$$
$$\mathit{equalFirst} :: \mathit{Eq}\ a \Rightarrow ((a, b), (a, c)) \to \mathit{Bool}$$
$$\mathit{equalFirst} = \widehat{(\equiv)} \cdot (\pi_1 \times \pi_1)$$
$$\mathit{combinaListDelays} = (\!|\, [\underline{\mathit{instantaneous}}, \mathit{combinaDelays}] \,|\!)$$
$$\mathit{combinaDelays} = (\mathit{join}\widehat{\mathit{With}}\ (+))$$
$$\mathit{delay} = [\underline{\mathit{instantaneous}}, \mathit{id}] \cdot \mathit{outMaybe} \cdot (\mathit{mkf}\ \ \mathit{db})$$
$$\mathit{parteSegments} :: \mathit{Enum}\ a \Rightarrow (a, a) \to [(a, a)]$$
$$\mathit{parteSegments} = \widehat{\mathit{zip}} \cdot \langle \mathit{listEnums} \cdot (\mathit{id} \times \mathit{pred}), \mathit{listEnums} \cdot (\mathsf{succ}\ \ \times \mathit{id}) \rangle$$
$$\quad \textbf{where}\ \mathit{listEnums} = \widehat{\mathit{enumFromTo}}$$
$$\mathit{pdelay} = \overline{\mathit{combinaListDelays} \cdot (\mathsf{map}\ \ \mathit{delay})} \cdot \mathit{parteSegments}$$