IX Seminário de Iniciação Científica do IFNMG

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE MÉTODOS ITERATIVOS PARA A SOLUÇÃO NUMÉRICA DE SISTEMAS LINEARES VIA SOFTWARE MAXIMA

BARBOSA, L.M[1].; SOUZA, V.A.D.[2]; FARIAS, A.M.[3]

[1]Discente do curso de Bacharelado em Sistemas de Informação do IFNMG – campus Salinas; [2]Discente do curso de Licenciatura em Matemática do IFNMG – campus Salinas; [3]Docente do IFNMG – campus Salinas.

Palavras chaves: Códigos numéricos; Software matemático; Método de Gauss-Jacobi; Método de Gauss-Seidel

Introdução

Na grande maioria de soluções de problemas matemáticos aplicados nas diversas áreas do conhecimento, a resolução de sistemas lineares é uma etapa fundamental. Desse modo, a solução de sistema lineares torna-se um dos processos numéricos mais utilizados para simular situações do mundo real (LEAON, 2010).

Por outro lado, a solução de sistemas lineares é uma das fases que demanda a maior parte do tempo para resolver problemas reais de forma numérica. Isso se deve ao fato dos métodos de resolução utilizados gerarem sistemas lineares, de n equações e de n incógnitas, muitos extensos, de modo que se torna extremamente difícil e desanimador a busca da solução a partir de técnicas mais conhecidas tais como a Regra de Cramer. Com isso o uso de softwares matemáticos, tais como o MAXIMA, empregam uma grande vantagem, pois processam todos os cálculos e sem a enorme margem de erros, que são característicos em um processo manual.

De acordo com CAMPOS FILHO (2002), um fato importante na resolução de um sistema linear é a escolha da técnica adequada (método adequado) para resolvê-lo. Os métodos numéricos para resolução de sistemas lineares n x n podem ser divididos em dois grupos: métodos diretos e métodos iterativos. Métodos diretos são aqueles que, a menos de erros de arredondamento, fornecem a solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações. Métodos iterativos, objeto de estudo desse trabalho, geram uma sequência de vetores, $x^{(k)}$, a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$. Sob certas condições esta sequência converge para a solução exata x, caso ela exista.

Outrossim, os autores corroboram que mais importante do que simplesmente aplicar um método numérico, é obter conhecimentos teóricos ao seu respeito, e bem como de sua estrutura numérica. Uma maneira de se obter isso, é via implementação computacional do mesmo pelo próprio usuário. Além disso, o MAXIMA é um dos softwares matemáticos livres muito úteis na implementação e execução de códigos numéricos. O código fonte da implementação dos métodos será disponibilizado ao final do artigo. Até onde se sabe, não existe na literatura material com a apresentação do código fonte da implementação computacional dos métodos de resolução de sistemas lineares no MAXIMA.

Material e métodos /Metodologia

A metodologia utilizada foi de cunho investigativo referente a métodos numéricos para resolução de sistemas lineares, bem como as suas implementações computacionais via software MAXIMA. O trabalho iniciou-se com uma revisão bibliográfica de sistemas lineares e dos métodos iterativos para resolução de sistemas lineares n x n. Em seguida, fez-se um estudo sobre o

MAXIMA e a Implementação numérica, e algumas aplicações, dos métodos abordados.

Uma apresentação sucinta sobre os métodos iterativos estudados e bem como o algoritmo implementado são descritos a seguir. Consideraram-se sistemas lineares do tipo Ax = b, em que A é uma matriz n x n, b é um vetor n x 1 e x é o vetor das variáveis do sistema.

Método iterativo. Um método para resolver um sistema linear Ax = b é denominado iterativo quando fornece uma sequência de soluções aproximadas, $x^{(k)} = \left\{x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \dots,\ x_n^{(k)}\right\}$, em que cada solução aproximada é obtida da anterior pela aplicação de um mesmo processo iterativo. E o processo iterativo continua até atingirmos um certo critério de parada, que pode ser o número máximo de iterações ou o erro entre $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ (CAMPOS FILHO, 2002).

Método iterativo de Gauss-Jacobi. A partir de uma solução inicial $x^{(0)}$, o método de Gauss-Jacobi para resolver o sistema linear Ax = b, consiste em obter soluções aproximadas $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, …, $x^{(k)}$, … a partir do seguinte processo recursivo: para k = 1, 2, 3, …, calculam-se

$$x^{(k)} = D^{-1}b - D^{-1}(L + U)x^{(k-1)},$$

sendo D a matriz diagonal principal de A; L a matriz triangular inferior de A, com a diagonal nula; e U a matriz triangular superior de A, com a diagonal nula; tal que A = L + D + U.

Método iterativo de Gauss-Seidel. Considerando as mesmas matrizes anteriores, L, D e U, o método de Gauss-Seidel é escrito de forma equivalente ao de Gauss-Jacobi, porém ele difere-se pelo fato de usar os valores de $x_i^{(k)},\ i = 1, 2,.., n,$ do vetor $x^{(k)}$, que já foram encontrados nas operações anteriores no processo iterativo, tornando-se o método mais eficiente. Ou seja, a partir de uma solução inicial $x^{(0)}$, o método de Gauss-Seidel para resolver o sistema linear Ax = b, consiste em obter soluções aproximadas $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, …, $x^{(k)}$, … a partir do seguinte processo recursivo: para k = 1, 2, 3, …, calculam-se

$$x^{(k)} = D^{-1}b - D^{-1}Lx^{(k)} - D^{-1}\,Ux^{(k-1)}.$$

Garantia de convergência. A garantia de convergência dos métodos anteriores, independente da escolha da aproximação inicial $x^{(0)}$, é dada pelos seguintes critérios, conforme descrito em CAMPOS FILHO (2002): Critério das linhas, que garante a convergência dos dois métodos, e Critério de Sassenfeld, que garante a convergência do método de Gauss-Seidel.

Código computacional. Os códigos da implementação computacional dos métodos no MAXIMA, podem ser acessados através da hiperligação código fonte.

Resultados e discussão

As implementações feitas no MÁXIMA obtiveram resultados importantes. Por meio destas foi possível realizar as operações com os métodos iterativos de forma rápida e prática. Foram implementados os códigos para os métodos de Gauss-Jacobi, *Gauss_Jacobi(A, b, eps, kmax),* e Gauss-Seidel, *Gauss_Seidel(A, b, eps, kmax)*, os quais iniciam-se recebendo como parâmetros de entrada a matriz do sistema *A*, o vetor dos termos independentes *b*, a tolerância *eps* e o número máximo de iterações *kmax;* e como dados de saída tem-se o vetor da solução aproximada *x*, o número de iterações feitas *k* e o erro relativo *dr*.

A análise quanto à garantia de convergência dos métodos pode ser verificada por meio dos métodos *Criterio_Linhas(A)* e *Criterio_Sassenfeld(A)*, os quais verificam se a matriz *A* satisfaz, respectivamente, o Critério das Linhas e/ou o Critério de Sassenfeld.

Como aplicação numérica resolve-se um sistema 5x5, aplicando os dois métodos, considerando uma tolerância de 10^{-3} e uma quantidade máxima de iterações igual a 20, conforme Fig. 1. Primeiramente verificou-se que a matriz do sistema satisfaz o critério das linhas, ou seja, a convergência dos métodos está garantida. Observa-se que tanto o método de Gauss-Jacobi quanto o método de Gauss-Seidel apresentam uma solução aproximada com um erro relativo de magnitude $9{,}5 \times 10^{-4}$, aproximadamente. No entanto, enquanto no método de Gauss-Seidel foram necessárias 5 iterações, no método de Gauss-Jacobi foram necessárias; confirmando a eficiência do método de Gauss-Seidel. Além disso, pode-se observar, por meio do vetor resíduos r = b - Ax, sendo x a solução aproximada, que o método de Gauss-Seidel apresenta melhor resultado, cuja norma do máximo do vetor resíduo é aproximadamente 0, 019; enquanto que para o método de Gauss-Jacobi essa norma foi de, aproximadamente, 0,025.

Considerações finais

Por meio da implementação computacional dos métodos iterativos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel foi possível encontrar de forma simples as soluções de sistemas lineares. Vale ressaltar que até onde se sabe, não existe bibliografia com a apresentação do código fonte da implementação computacional dos métodos de resolução de sistemas lineares no MAXIMA. Sendo assim, esse trabalho promove a utilização de um software livre que satisfaz as necessidades fundamentais para implementação de códigos para resolver sistemas lineares.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao IFNMG pelo apoio financeiro - bolsa PIBIC.

Referências

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. 3a. ed. HARBRA, 1986.

CAMPOS FILHO, F. **Algoritmos Numéricos**. 2a ed. São Paulo: LTC, 2002.

LEON, S. J. **Linear Algebra: With Applications**. Dartmouth: Pearson, 8th ed., 2010.

ANEXO I

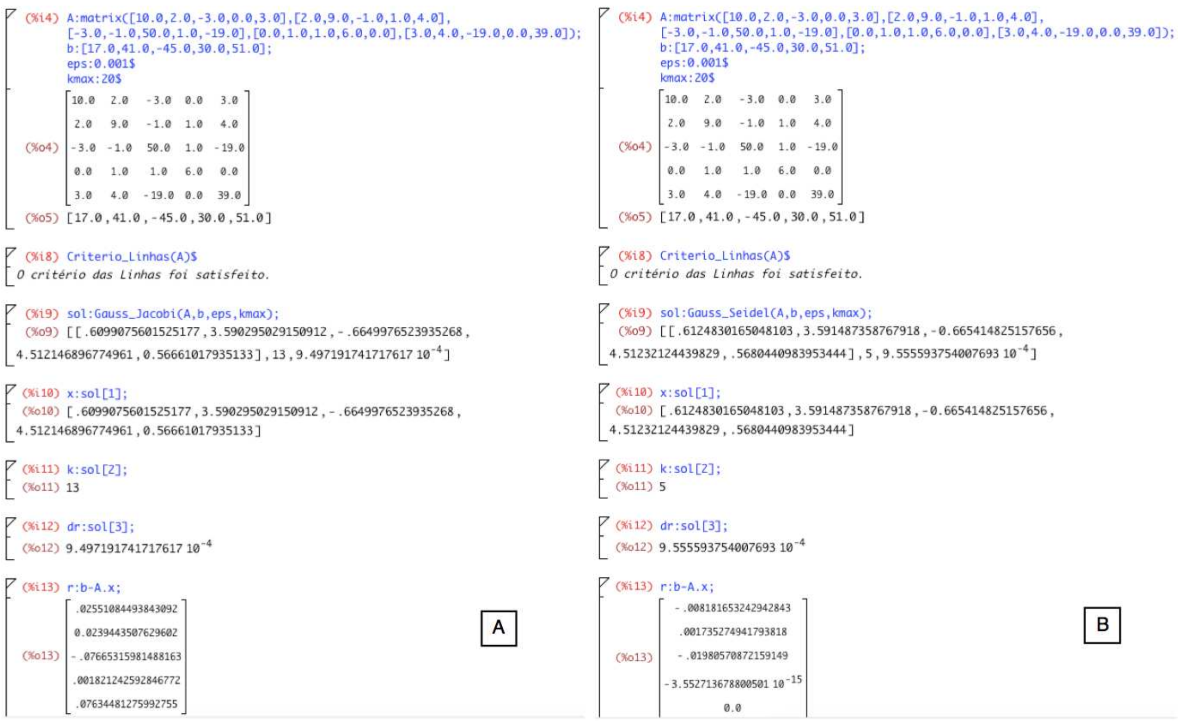

Figura 1. Aplicação dos métodos implementados no MAXIMA. **Fig. 1A.** Método de Gauss-Jacobi. **Fig. 1B.** Método de Gauss-Seidel. Fonte: Arquivo Pessoal (2021).