Solución de la tarea 3

Emmanuel Alcalá

3 de mayo de 2022

Respuesta 1

Las valuaciones tienen distribución $x_1, x_2, x_2 \sim$ uniforme$(0, 30)$ Los jugadores 2 y 3 pujan según

$$b_2(x_2) = \frac{3}{4}x_2$$
$$b_3(x_3) = \frac{4}{5}x_3$$

Jugador 1 gana si $b_1 > b_2$ **y** si $b_1 > b_3$. Por lo tanto, la probabilidad de ganar es

$$p(\text{ganar}) = p(b_1 > b_2) \times p(b_1 > b_3)$$

es decir

$$p(\text{ganar}) = p\left(x_2 < \frac{4}{3}b1\right) \times p\left(x_3 < \frac{5}{4}b1\right)$$

que es a su vez

$$p(\text{ganar}) = \frac{4}{3} \times \frac{b_1}{30} \times \frac{5}{4} \times \frac{b_1}{30}$$
$$p(\text{ganar}) = \frac{b_1^2}{540}$$

La utilidad esperada del jugador 1 si gana es

$$UE_1(b_1, b_2, b_3) = p(\text{ganar})(x_1 - b_1)$$

Sustituyendo $p(\text{ganar})$ tenemos

$$UE_1(b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{540} b_1^2 (x_1 - b_1)$$

dado que la condición de optimalidad es

$$b_1^* = \underset{b_1 \in [0, x_1]}{\operatorname{argmax}} UE_1(b_1, b_2, b_3)$$

se satisface con la CPO:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial UE_1(b_1, b_2, b_3)}{\partial b_1} &= 0 \\
\frac{1}{540} \frac{\partial (b_1^2 x_1 - b_1^3)}{\partial b_1} &= 0 \\
2b_1 x_1 - 3b_1^2 &= 0 \\
b_1(2x_1 - 3b_1) &= 0
\end{aligned}$$

del cual resultan dos soluciones:

1. $b_1 = 0$
2. $b_2 = \frac{2}{3} x_1$

Respuesta 2

1. $a = \frac{2}{3}$
2. El valor de a en equilibrio depende solo del número de jugadores, y no de sus pujas.

Respuesta 3

De la solución en clase de Subasta de sobre cerrado al primer precio con aversión al riesgo, con la función $u(w) = w^\alpha$, llegamos a la siguiente solución

$$b_1^* = \frac{1}{1 + \alpha} x_1$$

con lo que concluimos que, si la estrategia óptima del jugador es $b_1^* = ax_1$, entonces $a = \frac{1}{1+\alpha}$, por lo que el valor de α debe ser 0.5.

Respuesta 4

Los datos del problema son: $P(Q) = 10 - Q$ para la empresa 2 $c_A = 4$ con $p = 1/2, c_B = 0$ con $p = 1/2$, y para la empresa 1 $c = 0$.

1. La función de utilidad para el jugador 1 es

$$u_1(q_1; q_{2,A}, q_{2,B}) = \frac{1}{2}(10 - q_1 - q_{2,A})q_1 + \frac{1}{2}(10 - q_1 - q_{2,B})q_1$$

   Que simplificando queda

$$u_1(q_1; q_{2,A}, q_{2,B}) = \left(10 - q_1 - \frac{q_{2,B}}{2} - \frac{q_{2,A}}{2}\right) q_1$$

   La función de utilidad para el jugador 2 es

$$u_2(q_1, q_{2,t}) = \begin{cases} (10 - q_1 - q_{2,B})q_{2,B} & \text{si } t = B \\ (10 - q_1 - q_{2,A})q_{2,A} - 4q_{2,A} & \text{si } t = A \end{cases}$$

2. Las condiciones de optimización son

$$\begin{aligned} q_1^* &= \underset{0 \leqslant q_1 \leqslant \infty}{\text{argmax}}\, u_1(q_1; q_{2,A}, q_{2,B}) \\ q_{2,A}^* &= \underset{0 \leqslant q_{2,A} \leqslant \infty}{\text{argmax}}\, u_2(q_1, q_{2,A}) \\ q_{2,B}^* &= \underset{0 \leqslant q_{2,B} \leqslant \infty}{\text{argmax}}\, u_2(q_1, q_{2,B}) \end{aligned}$$

   y

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial u_{2,B}}{\partial q_{2,B}}, \quad \text{y } \frac{\partial u_{2,A}}{\partial q_{2,A}}$$

3. Para $\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0$ tenemos

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 10 - 2q_1 - \frac{1}{2}q_{2,B} - \frac{1}{2}q_{2,A} = 0$$

Para $\frac{\partial u_{2,B}}{\partial q_{2,B}} = 0$ y $\frac{\partial u_{2,A}}{\partial q_{2,A}} = 0$

$$\frac{\partial u_{2,B}}{\partial q_{2,B}} \longrightarrow q^*_{2,B} = \frac{10 - q_1}{2}$$

y

$$\frac{\partial u_{2,A}}{\partial q_{2,A}} \longrightarrow q^*_{2,A} = \frac{6 - q_1}{2}$$

Sustituyendo $q^*_{2,A}$ y $q^*_{2,B}$ en q^*_1, tenemos (luego de algunas manipulaciones):

$$q^*_1 = 4, q^*_{2,A} = 1 \text{ y } q^*_{2,B} = 3$$

4. $u_2(q_1, q_{2,A}) = (10 - q_1 - q_{2,A})q_{2,A} - 4q_{2,A} = (10 - 4 - 1)1 - 4 = 1$

Respuesta 5

Los datos del problema son: $P(Q) = 1 - Q$ para la empresa 2 c_A con probabilidad θ, c_B con probabilidad $1 - \theta$,y para la empresa 1 $c = 0$.

Las funciones de utilidad son

$$u_1(q_1; q_{2,A}, q_{2,B}) = \theta(1 - q_1 - q_{2,A})q_1 + (1 - \theta)(1 - q_1 - q_{2,B})q_1$$

$$u_2(q_1, q_{2,t}) = \begin{cases} (1 - q_1 - q_{2,B})q_{2,B} - c_B q_{2,B} & \text{si } t = B \\ (1 - q_1 - q_{2,A})q_{2,A} - c_A q_{2,A} & \text{si } t = A \end{cases}$$

1. Las condiciones de optimización son

$$q^*_1 = \underset{0 \leqslant q_1 \leqslant \infty}{\text{argmax}}\, u_1(q_1; q_{2,A}, q_{2,B})$$
$$q^*_{2,A} = \underset{0 \leqslant q_{2,A} \leqslant \infty}{\text{argmax}}\, u_2(q_1, q_{2,A})$$
$$q^*_{2,B} = \underset{0 \leqslant q_{2,B} \leqslant \infty}{\text{argmax}}\, u_2(q_1, q_{2,B})$$

y

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial u_{2,B}}{\partial q_{2,B}}, \quad \text{y } \frac{\partial u_{2,A}}{\partial q_{2,A}}$$

2. Resolviendo para $\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0$ nos da:

$$q_1* = \frac{1 - q_{2,B} - \theta q_{2,A} + \theta q_{2,B}}{2}, \text{ equivalente a } q_1^* = \frac{1}{2} - \frac{(1-\theta)q_{2,B} - \theta q_{2,A}}{2}$$

Y para $\frac{\partial u_{2,t}}{\partial q_{2,t}} = 0$

$$q_{2,t}^* = \begin{cases} \frac{1-q_1-c_A}{2} \text{ si } t = A \\ \frac{1-q_1-c_B}{2} \text{ si } t = B \end{cases}$$

Sustituyendo $q_{2,A}^*, q_{2,B}^*$ en q_1^*, y haciendo manipulaciones algebraicas, nos retorna

$$q_1^* = \frac{1 + (1-\theta)c_B + \theta c_A}{3} \text{ y sustituyendo en } q_{2,A}^*, q_{2,B}^*$$

$$q_{2,A}^* = \frac{2 - (1-\theta)c_B - \theta c_A - 3c_A}{6} \text{ o equivalentemente}$$

$$q_{2,A}^* = \frac{1 - 2c_A}{3} - \frac{(1-\theta)(c_B - c_A)}{6}$$

$$q_{2,B}^* = \frac{2 - (1-\theta)c_B - \theta c_A 3c_B}{6} \text{ o equivalentemente}$$

$$q_{2,B}^* = \frac{1 - 2c_B}{3} + \frac{\theta(c_B - c_A)}{6}$$

3. $\frac{\partial q_{2,A}^*}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial q_{2,B}^*}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial q_{2,A}^*}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1 - 2c_A}{3} - \frac{(1-\theta)(c_B - c_A)}{6}\right] = \frac{1}{6}(c_B - c_A)$$

$$\frac{\partial q_{2,B}^*}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1 - 2c_B}{3} + \frac{\theta(c_B - c_A)}{6}\right] = \frac{1}{6}(c_B - c_A)$$

La cantidad en equilibro en ambos costos depende de la diferencia de los costos. Dado que $c_A > c_B$ por definición, la cantidad en ambos casos decrece conforme θ crece.