Tarea 10

Luis Gerardo Hernández Román

November 2024

1 Ejemplo 6.1.1

```python
from random import random
from math import sqrt

N = 1000000
count = 0
for j in range(N):
    point = (random(), random(), random())
    if point[0]*point[0] + point[1]*point[1] + point[2]*point[2] < 1:
        count = count + 1
Answer = float(count) / float(N)
Answer = Answer * 4

print('''The volume of a hemisphere of radius 1 is
%0.4f +/- %0.4f.''' % (Answer, 4*sqrt(N) / float(N)))
```

1.1 Definición del problema

El objetivo es calcular el volumen de una semiesfera tridimensional ($x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$, con $r = 1$).

- La semiesfera está contenida dentro de un cubo tridimensional de lado $2r = 2$ y volumen 8.
- En lugar de calcular directamente el volumen de la semiesfera, se estima la proporción de puntos que caen dentro de la semiesfera.

1.2 Generación de puntos aleatorios

se generan $N = 1,000,000$ puntos en el cubo tridimensional unitario $[0, 1]^3$. Cada coordenada de un punto (x, y, z) se obtiene mediante la función 'random()', que genera números uniformemente distribuidos entre 0 y 1.

1.3 Prueba de inclusión

Para cada punto generado, se verifica si cae dentro de la semiesfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

Si la condición se cumple, el punto está dentro de la semiesfera y se incrementa el contador ‘count‘.

1.4 Estimación del volumen

La fracción de puntos que caen dentro de la semiesfera es:

$$P = \frac{P_s}{P_t}$$

donde; P es la proporción P_s los puntos dentro de la esfera P_t es el total de puntos generados Esta proporción se multiplica por el volumen del cubo de integración, que es 8, para obtener el volumen de la semiesfera.

El resultado final del volumen está dado por:

$$V = P \cdot 8$$

1.5 Cálculo de la incertidumbre

El error estándar del método Monte Carlo se calcula como:

$$E \sim \frac{V_c}{\sqrt{N}}$$

E es el error estándar y V_c el volumen del cubo En este caso, el volumen del cubo es 8, por lo que la incertidumbre se escala en función del número de puntos generados ($N = 1,000,000$).

2 Problema 6.0

```

from random import random
from math import sin, sqrt, pi

N = 1000000  # Número de puntos

# Contador para el promedio acumulado de sin(x)
sum_values = 0

# Generar puntos aleatorios y calcular sin(x)
for _ in range(N):
    x = random() * pi  # x en el intervalo [0, pi]
```

```python
    sum_values += sin(x)  # Acumular sin(x)

# Calcular el valor promedio de sin(x)
average_value = sum_values / N

# Escalar por el rango de integración (pi - 0)
result = pi * average_value

# Calcular la incertidumbre (desviación estándar)
uncertainty = pi / sqrt(N)  # Incertidumbre típica para Monte Carlo

print('''La integral de sin(x) de 0 a es %0.4f +/- %0.4f.''' % (result, uncertainty))
```

La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ puede interpretarse como el área bajo la curva de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. En el caso de Monte Carlo, se aproxima la integral utilizando puntos aleatorios dentro de ese intervalo.

La estimación de la integral se basa en:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a) \cdot \langle f(x) \rangle$$

donde: $(b - a)$ es el largo del intervalo y $\langle f(x) \rangle$ es el promedio de los valores de $f(x)$ evaluados en puntos aleatorios generados en $[a, b]$.

2.1 Generar puntos aleatorios

Se generan N puntos aleatorios x_i uniformemente distribuidos en el intervalo $[a, b]$. En este caso, el intervalo es $[0, \pi]$.

Cada punto aleatorio x_i se genera como:

$$x_i = a + \text{random}() \cdot (b - a)$$

donde random() genera un número aleatorio entre 0 y 1.

2.2 Evaluar la función en los puntos

Para cada punto x_i, se evalúa el valor de la función $f(x_i) = \sin(x_i)$.

2.3 Calcular el promedio de $f(x)$

El promedio de los valores de la función es:

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

2.4 Estimar la integral

La integral se estima como:

$$\text{Integral estimada} = (b - a) \cdot \langle f(x) \rangle$$

Para $[a, b] = [0, \pi]$, esto se convierte en:

$$\int_0^\pi \sin(x) dx \approx \pi \cdot \langle \sin(x) \rangle$$

2.5 Calcular la incertidumbre

La incertidumbre del método se estima como la desviación estándar de la media:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{Var}(f(x))}{N}}$$

donde la varianza $\text{Var}(f(x))$ es:

$$\text{Var}(f(x)) = \langle f(x)^2 \rangle - \langle f(x) \rangle^2$$

Por lo tanto, la incertidumbre en la integral es:

$$\text{Incertidumbre} = (b - a) \cdot \sigma$$

3 Problema 6.3

```python
from random import random
from math import sqrt, pi

# Número de puntos para Monte Carlo
N = 1000000

# Contador de puntos dentro de la 4-esfera
count_inside = 0

# Generar puntos aleatorios en 4 dimensiones
for _ in range(N):
    x, y, z, w = random(), random(), random(), random()  # Coordenadas en [0,1)
    if x**2 + y**2 + z**2 + w**2 <= 1:
        count_inside += 1

# Volumen estimado de la 4-esfera de radio 1
volume_4sphere = (2**4) * (count_inside / N)  # Escala por el volumen del hipercubo [0,2]^4

# Relación entre volumen y alpha
alpha = volume_4sphere / pi

```

```
# Incertidumbre (estimación del error estándar)
uncertainty = (2**4) * sqrt(count_inside * (N - count_inside)) / (N * sqrt(N))

print('''El valor estimado de alpha es  %0.4f +/- %0.4f.''' % (alpha, uncertainty))


```

El método de Monte Carlo utilizado en este problema es una técnica probabilística para estimar el volumen de la 4-esfera, basándose en la proporción de puntos aleatorios que caen dentro de ella.

3.1 Representación geométrica

La ecuación de la 4-esfera de radio $r = 1$ está dada por:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1$$

Esto define un hipervolumen contenido dentro de un hipercubo en 4 dimensiones, con cada coordenada $x, y, z, w \in [-1, 1]$.

3.2 Generar puntos aleatorios

- Se generan puntos aleatorios en el espacio 4-dimensional. Cada coordenada x, y, z, w se toma aleatoriamente en el rango $[0, 1]$ (luego se escala según corresponda al rango total $[-1, 1]$).
- Estos puntos representan posiciones en el espacio.

3.3 Comprobación de pertenencia

Para cada punto generado: - Se calcula la suma de los cuadrados de las coordenadas: $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$. - Si esta suma es menor o igual a 1, el punto está dentro de la 4-esfera. Si no, está fuera.

3.4 Estimación del volumen

La proporción de puntos que caen dentro de la 4-esfera en relación con el total de puntos generados se usa para estimar el volumen:

$$\text{Volumen estimado} = \text{Volumen del hipercubo} \times \frac{\text{Números de puntos dentro}}{\text{Total de puntos}}$$

En este caso, el volumen del hipercubo es (2^4), ya que cada dimensión tiene longitud 2.

3.5 Relación con α

El volumen de una 4-esfera está dado por:

$$V = \alpha \pi r^4$$

Dado que el radio $r = 1$, simplemente se divide el volumen estimado por π para encontrar α.

3.6 Incertidumbre

La incertidumbre se calcula como el error estándar del método Monte Carlo. Es proporcional a la desviación estándar de los puntos dentro de la esfera y disminuye con N (número de puntos totales):

$$\text{Incertidumbre} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$