UNIVERSIDAD AUTONOMA DE COAHUILA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Diferencias finitas

Luis Eduardo Sánchez González

8 de febrero de 2021

1. DIFERENCIAS FINITAS

En física computacional utilizamos diferencias finitas, en oposición a diferencias infinitesimales, esto se debe que muchas leyes físicas son descritas por ecuaciones diferenciales (EDO's). La aproximación de las derivadas por diferencias finitas desempeña un papel central para la resolución de estas ecuaciones diferenciales.

Para entender a que se refiere el cálculo de diferencias consideremos $f(x)$ una función continua en $[a,b]$. Si los valores de la función son dados de manera discreta, entonces definimos la función f como

$$f_k \equiv f(x_k), \qquad donde \qquad x_k = x_0 + k\Delta x, \qquad con \qquad k = 0,1,...,\frac{b-a}{\Delta x}$$

entonces, el término

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

es llamado ***diferencia progresiva o adelantada*** al punto x_k. Y una ***diferencia regresiva o atrasada*** al punto x_k es definida como

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1}$$

1.1. Diferencias finitas en ecuaciones diferenciales

Supongamos tener el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t),t) \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

El método más sencillo para resolver numéricamente un problema de valores inciales es el **método de Euler**, que consiste en aproximar la derivada $\dot{x}$ con una diferencia finita hacia adelante. Así, obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta f_h}{h} = \frac{x(t+h)-x(t)}{h} = f(x,t)$$

Despejando encontramos que

$$x(t+h) = x(t) + h\, f(x,t)$$

Es claro que, si conocemos $x(t_0) = x_0$ y t_0 esta regla nos permite calcular $x(t_0+h)$ y también t_0+h, posteriormente podemos calcular $x(t_0+2h)$ y así sucesivamente para obtener $x(t_0+kh)$ para cualquier k. Planteandolo en términos de una sucesión recursiva, sea $t_k = t+kh$ entonces $x_k := x(t_k)$, entonces la sucesión recursiva del método de Euler es

$$x_k = \begin{cases} x_0 & k=0 \\ \\ x_{k-1} + hf(x_{k-1},t_{k-1}) & k>0 \end{cases}$$

Notemos que esto solo nos dará los valores de $x(t)$ en un montón de tiempos discretos $t_k, k \in \mathbb{N}$. Todos los métodos numéricos para EDO regresan la solución como un conjunto de puntos discretos. Si nosotros insitieramos en querer conocer, en lugar de puntos discretos, la función completa, podriamos utilizar interpolación para convertir los puntos discretos en una función.

Referencias

[1] Franz J. Vesely (2001). Computational Physics: An introduction, 2da Ed. *Springer Science+Business Media*, 7-9.

[2] Burden, R. L., Faires, J. D., (2009). Análisis numérico., 7ma Ed. *CENGAGE Learning*, 256-259.