UNIVERSIDAD AUTONOMA DE COAHUILA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Ejemplo método de Euler

Luis Eduardo Sánchez González

31 de enero de 2021

1. EJEMPLO

Supongamos que empleamos el método de Euler para aproximar la solución al problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad 0 \leq t \leq 1, \qquad x(0) = 1$$

con $N = 10$. Entonces $h = 0{,}1$, $x_0 = 1$, $t_0 = 0$ y empleando el método de Euler

$$x_{k+1} = x_k + x_k h, \qquad t_{k+1} = t_k + h$$

para $k = 0, 1, .., 10$. La solución exacta a la ecuación diferencial se puede considerar un tanto trivial. Despejando x

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = 1$$

e integrando de ambos lados de la igualdad

$$\int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} dt = \int dt$$

Por lo tanto

$$\ln(x) = t + C$$

$$x(t) = De^t$$

dado que $x(0) = 1$, entonces $D = 1$, por lo tanto

$$x(t) = e^t$$

En la tabla 1.1, se muestra la comparación de los valores aproximados en t_i y los valores reales. Los cálculos realizados para la aproximación se encuentran en el Anexo.

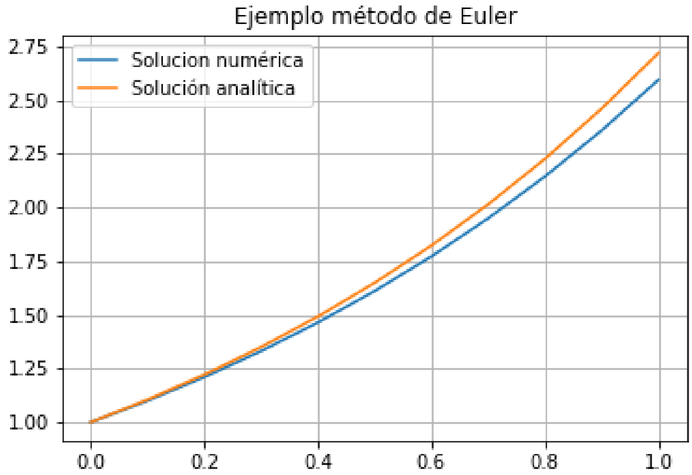

Figura 1.1

Tabla 1.1

k	t_k	x_k	e^{t_k}	$\lvert e^{t_k} - x_k \rvert$
0	0.0	1.0	1.0	0.0
1	0.1	1.1	1.10517092	0.00517092
2	0.2	1.21	1.22140276	0.01140276
3	0.3	1.331	1.34985881	0.01885881
4	0.4	1.4641	1.4918247	0.0277247
5	0.5	1.61051	1.64872127	0.03821127
6	0.6	1.771561	1.8221188	0.0505578
7	0.7	1.9487171	2.01375271	0.06503561
8	0.8	2.14358881	2.22554093	0.08195212
9	0.9	2.35794769	2.45960311	0.10165542
10	1.0	2.59374246	2.71828183	0.12453937

Podemos observar que el error crece un poco a medida que el valor de t aumenta. Incluso en la figura 1.1 se observa como a las curvas se van ”separando” cuando t crece. Este crecimiento controlado del error es consecuencia de la estabilidad del método de Euler, el cual implica que se espera que, en el peor de los casos, el error aumente de manera lineal.

1.1. Anexo (Cálculos)

$t_0 = 0{,}0; \qquad x_1 = x_0 + f(x_0, t_0)h = 1{,}0 + (1{,}0)(0{,}1) = 1{,}0$

$t_1 = 0{,}1; \qquad x_2 = x_1 + f(x_1, t_1)h = 1{,}1 + (1{,}1)(0{,}1) = 1{,}1$

$t_2 = 0{,}2; \qquad x_3 = x_2 + f(x_2, t_2)h = 1{,}21 + (1{,}21)(0{,}1) = 1{,}21$

$t_3 = 0{,}3; \qquad x_4 = x_3 + f(x_3, t_3)h = 1{,}331 + (1{,}331)(0{,}1) = 1{,}331$

$t_4 = 0{,}4; \qquad x_5 = x_4 + f(x_4, t_4)h = 1{,}4641 + (1{,}4641)(0{,}1) = 1{,}4641$

$t_5 = 0{,}5; \qquad x_6 = x_5 + f(x_5, t_5)h = 1{,}61051 + (1{,}61051)(0{,}1) = 1{,}61051$

$t_6 = 0{,}6; \qquad x_7 = x_6 + f(x_6, t_6)h = 1{,}771561 + (1{,}771561)(0{,}1) = 1{,}771561$

$t_7 = 0{,}7; \qquad x_8 = x_7 + f(x_7, t_7)h = 1{,}9487171 + (1{,}9487171)(0{,}1) = 1{,}9487171$

$t_8 = 0{,}8; \qquad x_9 = x_8 + f(x_8, t_8)h = 2{,}14358881 + (2{,}14358881)(0{,}1) = 2{,}14358881$

$t_9 = 0{,}9; \qquad x_10 = x_9 + f(x_9, t_9)h = 2{,}35794769 + (2{,}35794769)(0{,}1) = 2{,}35794769$

$t_{10} = 1{,}0; \qquad x_{11} = x_{10} + f(x_{10}, t_{10})h = 2{,}59374246 + (2{,}59374246)(0{,}1) = 2{,}59374246$