UNIVERSIDAD AUTONOMA DE COAHUILA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Primer problema numérico

Luis Eduardo Sánchez González

10 de febrero de 2021

Muchos problemas que se encuentran en física involucran ecuaciones diferenciales ordinarias. Mediante un problema que incolucra una ecuación diferencial de primer orden podemos introducir las técnica computacionales para resolver ecuaciones diferenciales, que se pueden extender para más problemas.

1. DECAIMIENTO RADIACTIVO

Es bien sabido que muchos núcleos son inestables. Un ejemplo típico es el isótopo nuclear ^{235}U (el núcleo de uranio que contiene 143 neutrones y 92 protones), el cual tiene una pequeña pero no insignificante probabilidad de descomponerse en dos núcleos de aproximadamente la mitad de su tamaño, junto con una variedad de protones, neutrones, electrones y partículas alfa. Una forma de describir tal proceso sería obtener el tiempo promedio de desintegración.

Si $N_U(t)$ es el numero de núcleos de uranio que están presentes en una muestra al tiempo t, la ecuación diferencial que modela este proceso es

$$\frac{dN_U}{dt} = -\frac{N_U}{\tau} \tag{1.1}$$

donde τ es el tiempo constante para el decaimiento. Se puede observar que la solución

$$N_U = N_U(0)e^{-t/\tau} \tag{1.2}$$

donde $N_U(0)$ es el número de núcleos presentes en el tiempo $t = 0$.

2. UNA APROXIMACIÓN NUMÉRICA

Podemos observar que la ecuación diferencial se puede resolver sin recurrir a un enfoque numérico. Sin embargo este problema es útil para introducir algunos métodos computacionales para resolver problemas similares. Dado el valor de N_U en un valor particular de t, queremos estimar su valor en momentos posteriores. Examinando la expansión Taylor para N_U

$$N_U(t) = N_U + \frac{dN_U}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2N_U}{dt^2}(\Delta t)^2 + ... \tag{2.1}$$

donde $N_U(0)$ es el valor de la función en el tiempo $t = 0$, $N_U(\Delta t)$ es el valor en $t = \Delta t$. Si tomamos Δt pequeño, entonces es una buena aproximación si se ignoran los términos que involucra potencias dos y mayores. De tal manera que

$$N_U(t) \approx N_U + \frac{dN_U}{dt}\Delta t \tag{2.2}$$

El mismo resultado puede ser obtenido mediante la definición de derivada y utilizando diferencias finitas.

$$\frac{dN_U}{dt} \approx \frac{N_U(t+\Delta t) - N_U(t)}{\Delta t} \tag{2.3}$$

donde se asume que Δt es pequeño pero distinto de cero. Despejando obtenemos

$$N_U(t+\Delta t) \approx N_U(t) + \frac{dN_U}{dt}\Delta t \tag{2.4}$$

esta última ecuación es equivalente a la ecuación (2.2). Es importante reconocer estas ecuaciones son aproximaciones. Los términos de error que se despreciarón son del orden de $(\Delta t)^2$ pero para otros problemas esto puede cambiar.

Tomando la ecuación diferencial encontrada (1.1) podemos sustituirla en la ecuación anterior de modo que

$$N_U(t+\Delta t) \approx N_U(t) - \frac{N_U}{\tau}\Delta t \tag{2.5}$$

esto forma la base para la solución numérica de nuestro problema de desintegración radiactiva. Debemos observar que el método que hemos utilizado no es más que el ***método de Euler***, el cual se presentó anteriormente.