2023

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Validación y Verificación de Software

Octavo Semestre

Integrantes:

Roberto Pilco (6893)

Fernanda Moreno (6884)

Luis López (6880)

Erika Villavicencio (6915)

Periodo:

Octubre 2023 – Marzo 2024

Entregado 23 de Octubre

Tabla de contenido

Problema:

Analizar una integral de una función polinómica cuando la función está dada de la siguiente manera:

$$\int_{-10}^{-10} f(x)\,dx \qquad\qquad f(x) = \begin{cases} x-1 & [-10, 3] \\ x^2 & [4, 9] \\ \frac{1}{x^3} & \geq 10 \end{cases}$$

Resolución al problema:

La integral dada es un ejemplo de una integral definida con una función por tramos. Para analizarla detalladamente, debemos dividirla en sus tres componentes según los intervalos especificados y luego calcular cada componente por separado.

La integral dada es:

$$\int_{-10}^{-10} \begin{cases} x-1 & [-10,3] \\ x^2 & [4,9] \\ \frac{1}{x^3} & \geq 10 \end{cases} dx$$

Aquí, hay tres tramos:

1. **Tramo 1:** Intervalo $[-10, 3]$ con $f(x) = x - 1$.
2. **Tramo 2:** Intervalo $[4, 9]$ con $f(x) = x^2$.
3. **Tramo 3:** Para $x \geq 10$, con $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Vamos a analizar cada uno de estos tramos por separado:

Tramo 1: $[-10, 3]$ con $f(x) = x - 1$.

1.1. Primero, calcula la integral indefinida de $f(x) = x - 1$:

$$\int (x-1)\,dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C_1$$

1.2. Luego, aplica los límites del intervalo $[-10, 3]$ para encontrar la integral definida en este tramo:

$$\int_{-10}^{3} (x-1)\,dx = \left(\frac{1}{2}(3)^2 - 3\right) - \left(\frac{1}{2}(-10)^2 - (-10)\right)$$

1.3. Calcula los valores numéricos:

$$\left(\frac{1}{2}(3)^2 - 3\right) - \left(\frac{1}{2}(-10)^2 - (-10)\right) = (4.5 - 3) - (50 + 10) = 1.5 - 60 = -58.5$$

Por lo tanto, la integral en el tramo 1 es igual a -58.5.

Tramo 2: $[4, 9]$ con $f(x) = x^2$.

2.1. Calcula la integral indefinida de $f(x) = x^2$:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C_2$$

2.2. Aplica los límites del intervalo $[4, 9]$ para encontrar la integral definida en este tramo:

$$\int_{4}^{9} x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}(9)^3\right) - \left(\frac{1}{3}(4)^3\right)$$

2.3. Calcula los valores numéricos:

$$\left(\frac{1}{3}(9)^3\right) - \left(\frac{1/3}{(}4)^3\right) = \left(\frac{1}{3}(729)\right) - \left(\frac{1}{3}(64)\right) = 243 - 21.333 \approx 221.667$$

Por lo tanto, la integral en el tramo 2 es aproximadamente 221.667.

Tramo 3: Para $x \geq 10$, con $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

3.1. Calcula la integral indefinida de $f(x) = \frac{1}{x^3}$:

$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2} + C_3$$

3.2. Como este tramo no tiene límite inferior, vamos a calcular la integral definida en el intervalo $[10, T]$, donde T es un valor muy grande (lo que significa que x tiende al infinito). Esto se hace porque la función $\frac{1}{x^3}$ no es integrable en el punto $x = 0$, por lo que se debe aproximar con un valor muy grande.

$$\int_{10}^{T} \frac{1}{x^3}\, dx = -\frac{1}{2T^2} - \left(-\frac{1}{2(10)^2}\right)$$

3.3. A medida que T tiende al infinito, el primer término tiende a cero, y el segundo término se mantiene constante:

$$\lim_{T\to\infty} \left(-\frac{1}{2T^2} - \left(-\frac{1}{2(10)^2}\right)\right) = 0 + \frac{1}{200} = \frac{1}{200}$$

Por lo tanto, la integral en el tramo 3 es igual a $\frac{1}{200}$.

Finalmente, para obtener el valor total de la integral definida en los tres tramos, sumamos los resultados de los tres tramos:

$$-58.5 + 221.667 + \frac{1}{200} \approx 163.667$$

Entonces, la integral definida original es aproximadamente 163.667.

Proceso ADIP

(Análisis, Diseño, Implementación y Pruebas)

Para la implementación de la integral definida por tramos en Python:

Análisis:

En esta fase, se comprende el problema y se definen los requisitos. Para este caso, el análisis implica entender que se trata de una integral definida con funciones por tramos en intervalos específicos. Los requisitos incluyen la comprensión de los tramos y sus funciones correspondientes.

En el análisis de esta fase, se deben tener en cuenta los siguientes puntos:

- **Naturaleza del problema:** Se debe entender que se trata de una integral definida, lo que implica encontrar la acumulación de una función en un intervalo específico. Además, la integral se calcula en función de tramos específicos, lo que significa que la función puede cambiar en diferentes intervalos.

- **Integral definida por tramos:** Se debe identificar que la integral a resolver involucra una función por tramos, lo que significa que la función y los intervalos en los que opera varían. Cada tramo tiene su propia función y límites.

- **Requisitos:** Los requisitos del problema incluyen la comprensión de los límites inferiores y superiores de cada tramo, así como la función asociada a cada tramo. Es importante entender que, en algunos casos, los límites pueden ser infinitos.

- **Metodología de solución:** Se debe definir una estrategia de solución que permita calcular las integrales definidas en cada tramo por separado y luego sumar los resultados para obtener la integral total.
    - Planificar cómo calcular las integrales definidas en cada tramo por separado.
    - Determinar cómo se sumarán los resultados para obtener la integral total.
    - Identificar las bibliotecas o herramientas que se utilizarán (por ejemplo, SymPy y NumPy en Python).

- **Interacción con el usuario**: Para mejorar la usabilidad, se puede permitir al usuario ingresar los valores de los tramos y las funciones. Esto hace que el programa sea más flexible y adaptable a diferentes situaciones.

Diseño:

En esta etapa, se decide cómo abordar el problema y se diseña la estructura del programa. Para el diseño:

1. Se elige usar las bibliotecas SymPy y NumPy para el cálculo simbólico y numérico.
2. Se define una función integral_por_tramos() que realizará el cálculo.
3. Se crea una lista de tramos con sus intervalos y funciones asociadas.
4. Se define un enfoque para tratar los límites infinitos, aproximándolos con un valor grande.
5. Se decide mostrar el resultado numérico en la consola.

Implementación:

En esta fase, se traduce el diseño en código Python. Aquí está el código que implementa la solución:

```
import sympy as sp

def integral_por_tramos():
    # Definir las variables simbólicas
    x = sp.symbols('x')

    # Obtener los valores de los tramos y las funciones desde el usuario
    tramos = []
    while True:

        inicio_str = input("Ingrese el límite inferior del tramo (o 'q' para 
salir): ")
        if inicio_str.lower() == 'q':
            break
```

```
        inicio = float(inicio_str)
        fin_str = input("Ingrese el límite superior del tramo ('inf' para
infinito): ")
        if fin_str.lower() == 'inf':
            fin = sp.oo  # Usar infinito de SymPy
        else:
            fin = float(fin_str)
        funcion_str = input("Ingrese la función (ejemplo: 'x**2' o '1/x**3'): ")
        funcion = sp.sympify(funcion_str)
        tramos.append((inicio, fin, funcion))

    resultados_tramos = []

    for inicio, fin, funcion in tramos:
        # Definir la integral simbólica
        integral = sp.integrate(funcion, (x, inicio, fin))

        resultado = integral
        resultados_tramos.append(resultado)

    resultado_total = sum(resultados_tramos)

    # Mostrar los resultados de cada tramo
    for i, resultado in enumerate(resultados_tramos):
        print(f"Resultado del tramo {i + 1}: {resultado}")

    print(f"Resultado total de la suma de tramos: {resultado_total}")

if __name__ == "__main__":
    print("Para ingresar valores infinitos escriba inf si es negativo -inf.")
    integral_por_tramos()
```

Código ejecutado:

```
PS C:\Users\Israel\Desktop\Python> py integral.py
Para ingresar valores infinitos escriba inf si es negativo -inf.
Ingrese el límite inferior del tramo (o 'q' para salir): -10
Ingrese el límite superior del tramo ('inf' para infinito): 3
Ingrese la función (ejemplo: 'x**2' o '1/x**3'): x-1
Ingrese el límite inferior del tramo (o 'q' para salir): 4
Ingrese el límite superior del tramo ('inf' para infinito): 9
Ingrese la función (ejemplo: 'x**2' o '1/x**3'): x**2
Ingrese el límite inferior del tramo (o 'q' para salir): 10
Ingrese el límite superior del tramo ('inf' para infinito): inf
Ingrese la función (ejemplo: 'x**2' o '1/x**3'): 1/x**3
Ingrese el límite inferior del tramo (o 'q' para salir): q
Resultado del tramo 1: -58.5000000000000
Resultado del tramo 2: 221.666666666667
Resultado del tramo 3: 0.00500000000000000
Resultado total de la suma de tramos: 163.171666666667
PS C:\Users\Israel\Desktop\Python>
```

Pruebas:

En esta fase, debes asegurarte de que el código funcione correctamente. Para ello, ejecuta el programa y comprueba si produce el resultado esperado. Verifica que la aproximación de los límites infinitos sea precisa. Puedes también realizar pruebas adicionales con diferentes funciones y tramos para validar el programa en diversos casos.

El proceso ADIP se enfoca en comprender, diseñar, implementar y probar la solución de un problema. A medida que el problema y los requisitos se vuelven más complejos, este enfoque ayuda a garantizar que el software cumpla con los objetivos y funcione correctamente.

Ejemplo 1: Tramo con límites finitos

- Tramo: [-2, 2]
- Función: x^2
- Resultado correcto: 16/3 (aproximadamente 5.33)

```
PS C:\Users\Israel\Desktop\Python> py integral.py
Para ingresar valores infinitos escriba inf si es negativo -inf.
Ingrese el límite inferior del tramo (o 'q' para salir): -2
Ingrese el límite superior del tramo ('inf' para infinito): 2
Ingrese la función (ejemplo: 'x**2' o '1/x**3'): x**2
Ingrese el límite inferior del tramo (o 'q' para salir): q
Resultado del tramo 1: 5.33333333333333
Resultado total de la suma de tramos: 5.33333333333333
PS C:\Users\Israel\Desktop\Python>
```

Ejemplo 2: Tramo con límites infinitos

- Tramo: [0, ∞]
- Función: 1/x
- Resultado correcto: +∞

```
PS C:\Users\Israel\Desktop\Python> py integral.py
Para ingresar valores infinitos escriba inf si es negativo -inf.
Ingrese el límite inferior del tramo (o 'q' para salir): 0
Ingrese el límite superior del tramo ('inf' para infinito): inf
Ingrese la función (ejemplo: 'x**2' o '1/x**3'): 1/x
Ingrese el límite inferior del tramo (o 'q' para salir): q
Resultado del tramo 1: oo
Resultado total de la suma de tramos: oo
PS C:\Users\Israel\Desktop\Python>
```

Ejemplo 3: Combinación de tramos

- Tramo 1: [-1, 1]
- Función: x^3
- Resultado correcto: 0
- Tramo 2: [1, 3]
- Función: 2x
- Resultado correcto: 8

```
PS C:\Users\Israel\Desktop\Python> py integral.py
Ingrese el límite inferior del tramo (o 'q' para salir): -1
Ingrese el límite superior del tramo ('inf' para infinito): 1
Ingrese la función (ejemplo: 'x**2' o '1/x**3'): x**3
Ingrese el límite inferior del tramo (o 'q' para salir): 1
Ingrese el límite superior del tramo ('inf' para infinito): 3
Ingrese la función (ejemplo: 'x**2' o '1/x**3'): 2*x
Ingrese el límite inferior del tramo (o 'q' para salir): q
Resultado del tramo 1: 0
Resultado del tramo 2: 8.00000000000000
Resultado total de la suma de tramos: 8.00000000000000
```

Ejemplo 4: Límite superior infinito en un tramo

- Tramo: [2, ∞]
- Función: 1/x^2
- Resultado correcto: 1/2 (0.5)

```
PS C:\Users\Israel\Desktop\Python> py integral.py
Para ingresar valores infinitos escriba inf si es negativo -inf.
Ingrese el límite inferior del tramo (o 'q' para salir): 2
Ingrese el límite superior del tramo ('inf' para infinito): inf
Ingrese la función (ejemplo: 'x**2' o '1/x**3'): 1/x**2
Ingrese el límite inferior del tramo (o 'q' para salir): q
Resultado del tramo 1: 0.500000000000000
Resultado total de la suma de tramos: 0.500000000000000
PS C:\Users\Israel\Desktop\Python>
```