



BUAP

Simulación de la actividad eléctrica de la ventrícula izquierda usando el modelo Fenton—Karma



L. Cervantes-Guevara y B. Bonilla-Capilla
FCFM, BUAP, AP 1152, 72000 Puebla, Pue.

Se pretende realizar la simulación de la actividad eléctrica del tejido ventricular utilizando el modelo Fenton-Karma de tres variables para células atriales y así evaluar el impacto que tiene el aumento de Na⁺, Ca²⁺ y K⁺ en la actividad eléctrica de la ventrícula izquierda. Dado que el modelo es capaz de reproducir una “reentrada” dentro de la vena pulmonar, éste se puede utilizar para tratar afecciones cardíacas como lo es la fibrilación ventricular. Se programa este modelo utilizando MATLAB y COMSOL Multiphysics.

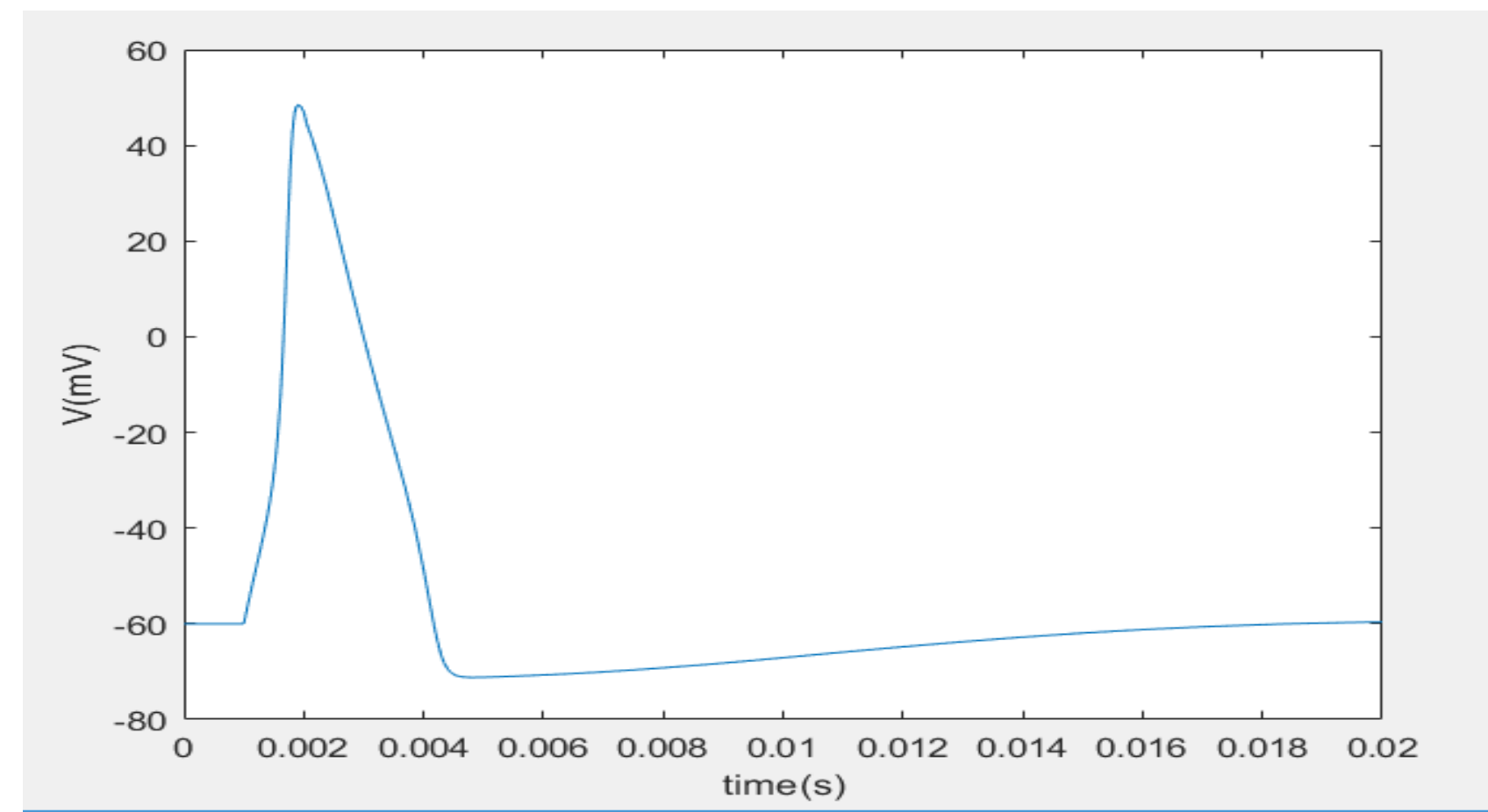
Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias han servido, desde su surgimiento a raíz de la creación del Cálculo hasta nuestros días, para modelar fenómenos de un sinfín de ámbitos (físicos, astronómicos, económicos, químicos, médicos).

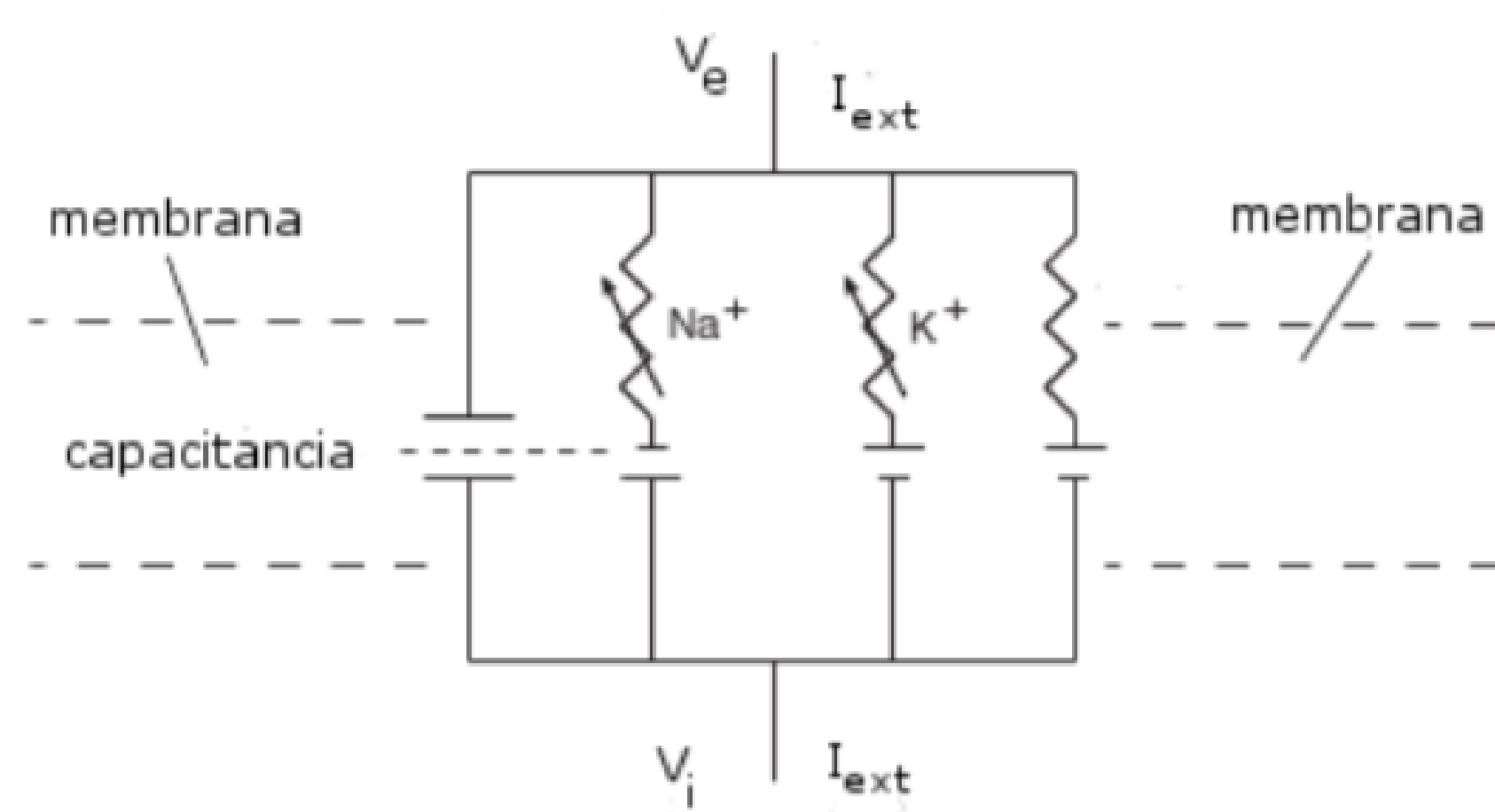
El primer antecedente que se tiene de modelado celular está en 1952, cuando Alan Hodgkin y Andrew Huxley propusieron un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciables no lineales para describir los mecanismos iónicos que subyacían a la iniciación y propagación de los potenciales de acción del axón gigante de un calamar.

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= -\frac{1}{C_m} [\bar{g}_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) + \bar{g}_K n^4 (V - V_K) + \bar{g}_L (V - V_L) - i_{stim}] \\ \frac{dn}{dt} &= \alpha_n (1 - n) - \beta_n n \\ \frac{dm}{dt} &= \alpha_m (1 - m) - \beta_m m \\ \frac{dh}{dt} &= \alpha_h (1 - h) - \beta_h h\end{aligned}$$

Modelo Hodgkin-Huxley



Los modelos que en las últimas décadas han surgido para describir la actividad eléctrica del corazón tienen en común el considerar todo el sistema cardíaco (membrana, canales iónicos, bombas) como un circuito eléctrico.



En este circuito, la membrana celular funge como una capacitancia, los canales iónicos (de Na⁺, Ca²⁺ y K⁺) como resistencias conectadas en paralelo

Además, la corriente está dada por:

$$I_{ext} = C_m \frac{\partial V_m}{\partial t} + I_{ion}$$

El cómo se define I_{ion} y las corrientes iónicas que la conforman, hace la distinción entre cada uno de los modelos que describen la actividad eléctrica del corazón.

El modelo Fenton-Karma

El modelo Fenton-Karma fue desarrollado en 1998 y consta de tres variables, una corriente lenta hacia adentro (Na⁺), una corriente rápida hacia adentro (Ca²⁺) y una corriente lenta hacia afuera (K⁺). Este modelo, a diferencia de muchos otros, es genérico.

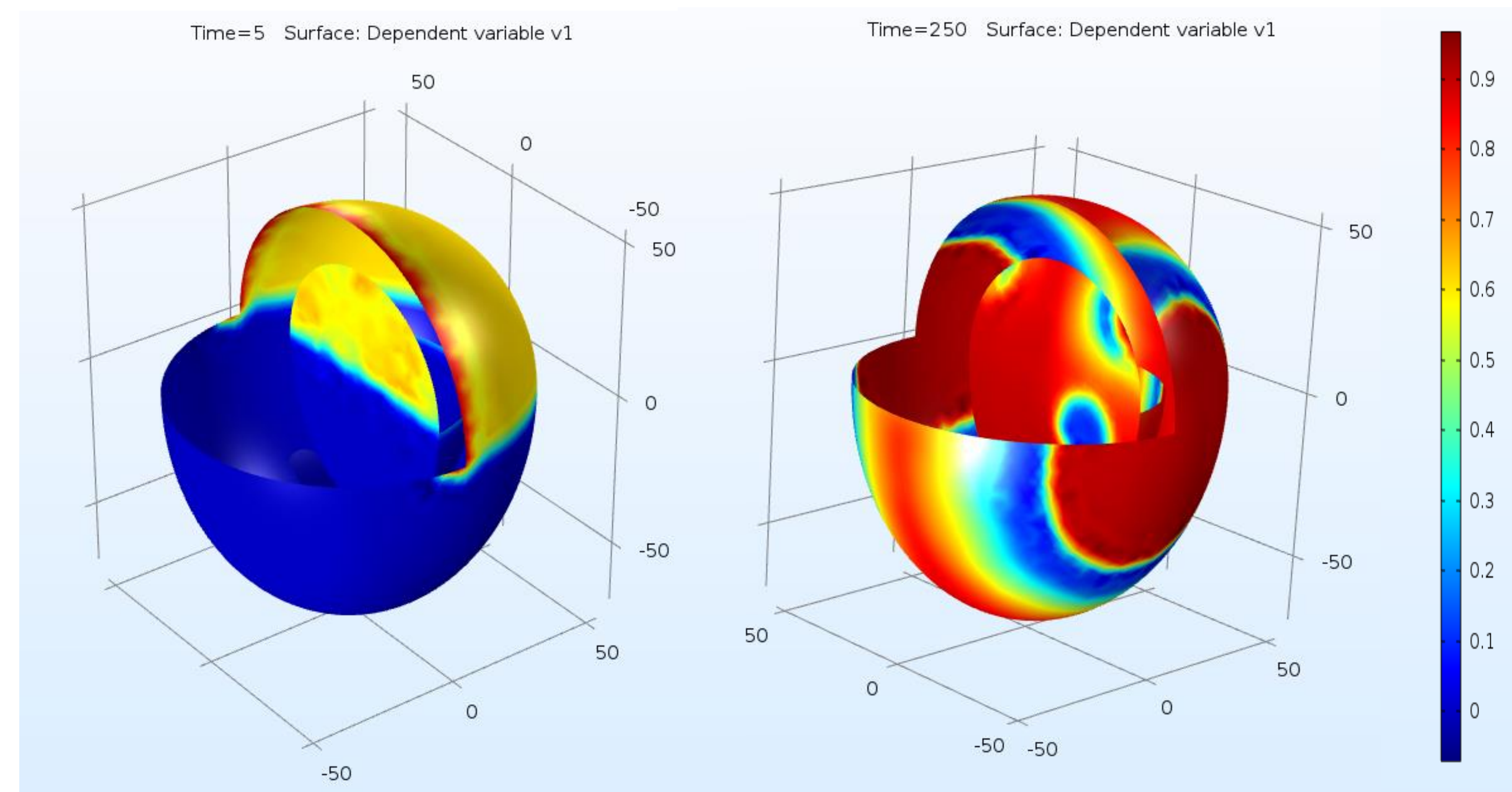
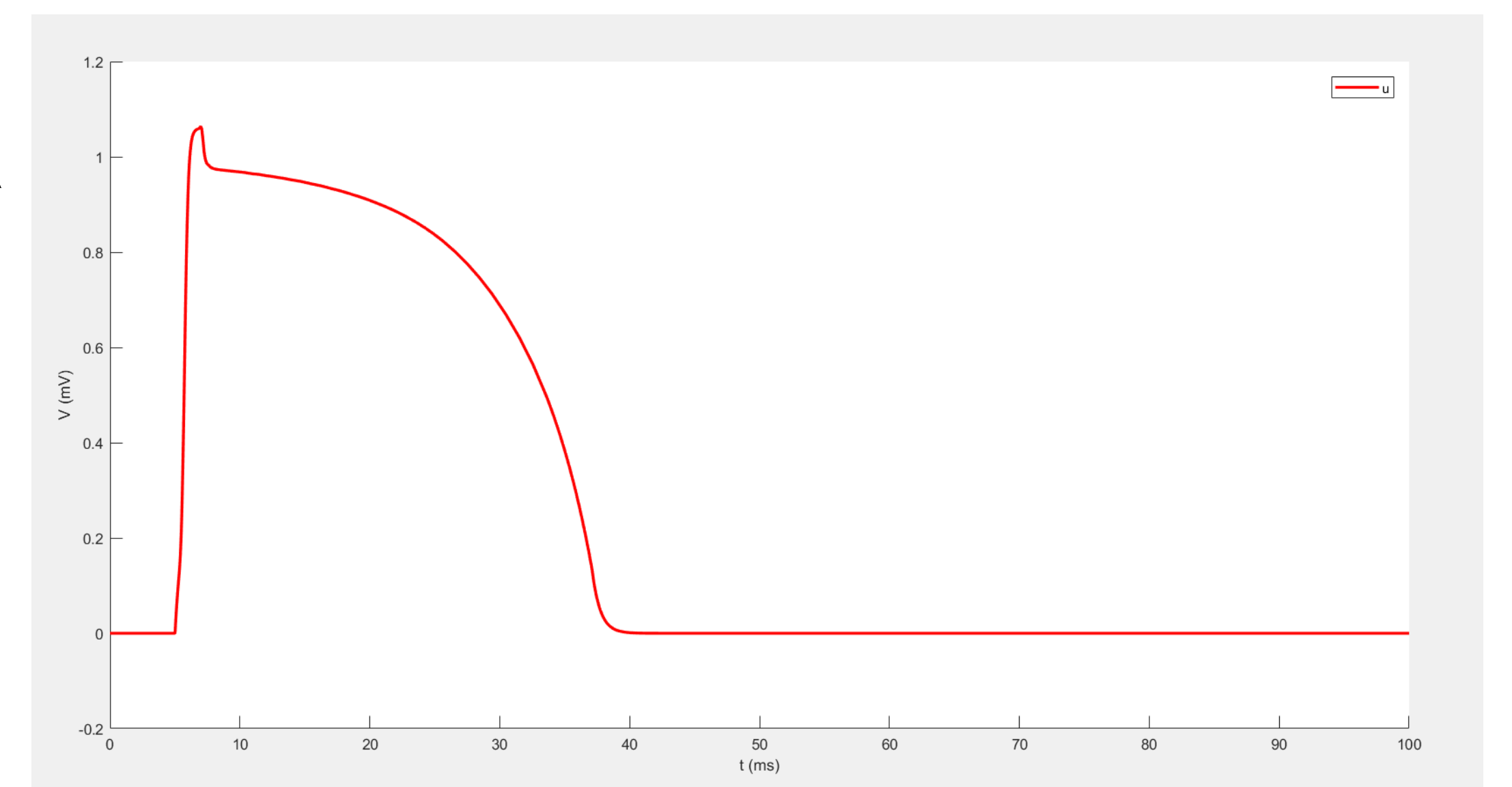
Las ecuaciones diferenciales parciales están dadas a continuación.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla \cdot (D \nabla u) - \frac{1}{C_m} (I_{fi} + I_{so} + I_{si}) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{\tau_v^-} \Theta(u_c - u) (1 - v) - \frac{1}{\tau_v^+} \Theta(u_c - u) v \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{1}{\tau_w} \Theta(u_c - u) (1 - w) - \frac{1}{\tau_w^+} \Theta(u_c - u) w \\ I_{fi} &= -\frac{v}{\tau_d} \Theta(u - u_c) (1 - u) (u - u_c) \\ I_{so} &= \frac{u}{\tau_o} \Theta(u_c - u) + \frac{1}{\tau_r} \Theta(u - u_c) \\ I_{si} &= -\frac{w}{2\tau_{si}} (1 + \tanh[k(u - u_c^{si})]) \\ \tau_v^-(u) &= \Theta(u - u_v) \tau_{v1}^- + \Theta(u_v - u) \tau_{v2}^-\end{aligned}$$

Resultados

Estas ecuaciones se programaron en MATLAB, para una sola célula ventricular, y en COMSOL Multiphysics, para el comportamiento de todo el corazón. En ambos casos, se propusieron unas condiciones iniciales de tal forma que a una sección del corazón se le suministrara un impulso eléctrico cuantificado (como cuando se realiza una desfibrilación) y así visualizar su propagación por todo el órgano.

Gráfica V-t de la excitación de una célula ventricular al recibir 0.5 mV durante 3 ms



Modelos 3D de un corazón al que se le aplica una corriente eléctrica, en el tiempo 5ms (izquierda) y 250ms (derecha).

Conclusiones

El tener la posibilidad de visualizar cómo se comporta el corazón al ser sometido a una descarga controlada (práctica común en los hospitales) puede facilitar el diagnóstico y tratamiento de afecciones cardíacas. Sin embargo, por simplicidad, este modelo considera a todas las células del corazón como ventrículos, hecho que no es verdad. Para descripciones más precisas de este órgano se tiene que trabajar en modelos que incluyan más de un tipo de célula.

Referencias

1. F. Fenton, A. Karma. *Vortex dynamics in three-dimensional continuous myocardium with fiber rotation: Filament instability and fibrillation*. Chaos **8**, 20 (1998).
2. Dokos, Socrates. *Modelling Organs, Tissues, Cells and Devices*. Springer: Australia. (2017).
3. Méndez, Roberto y Velazco, Lourdes. *Una pizca de Métodos Numéricos para EDO a partir de modelos de electrofisiología cardíaca*. UNAM: México. (2018).