36. Considere as matrizes
$$E_{21}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$
(a) Efectue os produtos $E_{21}(2)A$ e $AE_{21}(2)$.

(b) O que observa relativamente às linhas de $E_{21}(2)A$ e às colunas de $AE_{21}(2)$?

(c) O que observa relativamente às linhas de $E_{32}(2)A$ e às colunas de $AE_{32}(2)$ sendo
$$E_{32}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}?$$
(d) Generalize as observações efectuadas.

37. Para cada um dos seguintes pares de matrizes, encontre uma matriz elementar E tal que $EA = B$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

38. Para cada um dos seguintes pares de matrizes, encontre uma matriz elementar E tal que $AE = B$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

39. Efectue os seguintes produtos de matrizes

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

40. Usando o exercício anterior indique um sistema de equações lineares

(a) com três equações e três incógnitas que tenha $[-2 \quad 1 \quad -1]^T$ como solução;

(b) com duas equações e três incógnitas que tenha $[1 \quad -1 \quad 0]^T$ como solução;

(c) com três equações e três incógnitas que tenha $[1 \quad 1 \quad 1]^T$ como solução;

(d) com três equações e duas incógnitas que tenha $[1 \quad 2]^T$ como solução.

41. Resolva pelo método de eliminação de Gauss o sistema de equações
$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ x + 2y &= 6 \end{cases}$$
e desenhe no plano xy as duas rectas cujas equações são as indicadas. Desenhe também as rectas que aparecem no final da eliminação.

42. Resolva os seguintes sistemas, quando possíveis, usando o método de eliminação. Registe os pivots utilizados e as operações que efectuou com as equações.

(a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -7 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 23 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 30 \end{cases}$ (j) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 23 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 30 \end{cases}$

(k) Acrescente uma equação ao sistema da alínea (h) de modo a que o novo sistema seja

(i) possível e determinado; (ii) impossível.

43. Determine os valores de α para os quais o sistema

$$\begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$$

(i) não tem solução; (ii) tem uma solução; (iii) tem uma infinidade de soluções.

44. Considere o sistema de equações onde β é um parâmetro real:

$$\begin{cases} x + \beta y + \beta z = 0 \\ \beta x + y + z = 0 \\ x + y + \beta z = \beta^2 \end{cases}$$

(a) Discuta o sistema em função de β.

(b) Considere o sistema homogéneo associado a $\beta = 0$ e determine a solução (ou soluções) do sistema.

45. Considere o sistema de equações nos parâmetros reais a, b e c:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c \\ bx_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Determine a relação entre a, b e c de forma que sistema só tenha uma incógnita livre.