Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Mestrado Integrado em Eng. Electrotécnica e de Computadores

Ano lectivo 2013/2014 — Folha 1

1. Em cada caso escreva, por extenso, e classifique a matriz $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ onde:

   (a) $m = 2$, $n = 3$ e $a_{ij} = i + 2j$; (b) $m = 3$, $n = 3$ e $a_{ij} = i - j$;

   (c) $m = 3$, $n = 4$ e $a_{ij} = (-1)^{i+j}$; (d) $m = n = 4$ e $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i > j \\ i - 2j, & i = j \\ 2j, & i < j \end{cases}$.

2. Escolha duas matrizes da lista seguinte de tal forma que a sua soma esteja definida e calcule a matriz soma.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

   verifique que

   (a) $5A = 3A + 2A$; (b) $6A = 3(2A)$;

   (c) $A + B = B + A$; (d) $3(A + B) = 3A + 3B$.

4. Calcule os produtos AB e BA, quando definidos, nos seguintes casos:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 5 & 5/2 & 5/3 \end{bmatrix}$.

5. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Verifique que $AB = AC$ e $BD = CD$.

6. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Escolha uma maneira de as ordenar de tal modo que o produto das quatro matrizes esteja definido e calcule esse produto.

7. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) a segunda coluna de AB; (b) a primeira linha de BA;

(c) a terceira linha de A^2; (d) o elemento na posição (3,2) de $A^2 - AB + 3I_3$.

8. Sendo $A = [a_{ij}]_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,n}$ e $B = [b_{ij}]_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,n}$ duas matrizes do tipo $n \times n$.

(a) escreva o elemento da matriz $A^2 + B$ situado na linha i e na coluna j;

(b) escreva o elemento da matriz $A - BA + 2I_n$ situado na linha i e na coluna j.

9. Calcule:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$; (c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k$ $(k \in \mathbb{N})$;

(e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^k$ $(k \in \mathbb{N})$; (f) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^k$ $(\theta \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$; (g) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$.

10. Calcule A^2 e A^3 sendo

$$A = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}.$$

Que matriz será A^k? Generalize para uma matriz A de ordem n.

11. (a) Verifique que as identidades algébricas $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ e $(AB)^2 = A^2B^2$ nem sempre são verdadeiras quando A e B são matrizes. Considere, por exemplo, as matrizes seguintes:

$$\text{(i) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(ii)} A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -i & 1-i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -i & 2+i \\ 3i & 1-i \end{bmatrix}.$$

(b) Transforme os segundos membros daquelas identidades de forma a obter identidades sempre válidas para A e B matrizes quadradas quaisquer da mesma ordem.

(c) Mostre que se duas matrizes A e B verificam a primeira identidade algébrica referida em (a) então A e B também verificam as outras três identidades.

12. Considere as matrizes diagonais D_1 e D_2 e a matriz A

$$D_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

O que observa relativamente às matrizes AD_1 e D_2A? Generalize.

13. Prove que o produto de duas matrizes triangulares superiores (resp. inferiores) da mesma ordem é ainda uma matriz triangular superior (resp. inferior). A que são iguais os elementos diagonais neste caso?

14. Ache todas as matrizes permutáveis com A, sendo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

15. Prove que uma matriz que comute com uma matriz diagonal de elementos diagonais todos distintos tem de ser ela própria uma matriz diagonal.