Álgebra Linear e Geometria Analítica

Mestrado Integrado em Eng. Electrotécnica e de Computadores

Ano lectivo 2013/2014 Folha 7

103. Prove que a dependência ou independência linear de um conjunto de vectores não se altera se:
    (a) multiplicarmos um dos vectores do conjunto por um escalar não nulo;
    (b) somarmos a um dos vectores outro do conjunto multiplicado por um escalar; mais geralmente, se somarmos a um vector uma combinação linear de outros vectores do conjunto.

104. Seja $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$.
    (a) Prove que F é subespaço de $\mathbb{R}^3$.
    (b) Determine um conjunto gerador de F.
    (c) Diga se o conjunto encontrado na alínea (b) é linearmente independente.
    (d) Indique a dimensão e uma base de F.

105. Indique uma base de $\mathbb{R}^2$ que contenha o vector $v_1 = (1, 2)$.

106. Indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vectores $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $v_2 = (0, -1, 2, 1)$.

107. Considere os vectores $v_1 = (2, -3, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$ e $v_3 = (1, 1, -2)$ de $\mathbb{R}^3$.
    (a) Mostre que os vectores v_1, v_2 e v_3 constituem uma base de $\mathbb{R}^3$.
    (b) Determine as coordenadas do vector $(3, 2, 1)$ relativamente à base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

108. Determine a dimensão e indique duas bases diferentes para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 2, 3), (4, 5, 6)$ e $(7, 8, 9)$.

109. Para cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, prove que se trata de um subespaço, determine a sua dimensão e indique uma base:
    (a) o conjunto dos vectores com a primeira e a última coordenadas iguais;
    (b) o conjunto dos vectores cujas coordenadas de índice par são nulas;
    (c) o conjunto dos vectores cujas coordenadas de índice par são todas iguais;
    (d) o conjunto dos vectores da forma $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta, \dots)$.

110. Sendo $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais não todos nulos, determine a dimensão e indique uma base do subespaço de $\mathbb{R}^n$ definido pela equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$.

111. Determine a característica e uma base do espaço nulo das matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

112. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 2 \\ \alpha & -1 & 3\alpha - 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, onde α é um parâmetro real. Determine para que valores de α a característica de A é, respectivamente, 1, 2 e 3. Em cada caso, determine bases para o espaço das colunas, das linhas e para o espaço nulo de A.

113. O mesmo que no exercício anterior para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$.

114. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 & \alpha \\ -\alpha & \alpha & -1 & 0 \\ \alpha^2 & -1 & 1 & \alpha^2 \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Diga para que valores de α o espaço das colunas de A coincide com $\mathbb{R}^3$.

115. Considere os vectores $(1,\alpha,1), (1,\alpha-1,1), (1,\alpha+1,1)$ e $(\alpha,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais o subespaço gerado por estes quatro vectores tem dimensão 2.

116. Construa uma matriz cujo espaço nulo seja gerado pelo vector $(1,0,1)$.

117. Existirá uma matriz cujo espaço das linhas contenha o vector $(1,1,1)$ e cujo espaço nulo contenha o vector $(1,0,0)$?

118. Se A for uma matriz 64×17 com característica 11, quantos vectores linearmente independentes satisfazem $Ax = 0$? E quantos vectores linearmente independentes satisfazem $A^T y = 0$?

119. (a) Sendo A uma matriz qualquer, prove que $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A^T)$.
   (b) Será sempre verdade que $\mathrm{nul}(A) = \mathrm{nul}(A^T)$?

120. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$.

$$F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_3 \text{ e } x_4 = 2x_2\}, \quad G = \mathrm{ger}\{(1,0,1,0),(0,2,0,1),(-1,2,-1,1)\}.$$

Determine a dimensão e indique uma base para F, G e $F \cap G$.

121. Seja A $n \times n$. Prove que, se $A^2 = A$ e $\mathrm{car}(A) = n$, então $A = I$.

122. Prove que, se uma matriz quadrada A satisfizer $A^2 = A$, então $N(A) \cap C(A) = \{0\}$.

123. Sendo A $m \times n$ e B $p \times m$, prove que:
   (a) $\mathrm{car}(BA) \leq \mathrm{car}(B)$;
   (b) $\mathrm{nul}(A) \leq \mathrm{nul}(BA)$;
   (c) $\mathrm{car}(BA) \leq \mathrm{car}(A)$ (por dois processos: i) usando (b); ii) usando (a))

124. Em cada uma das alíneas seguintes, diga se a aplicação indicada é ou não linear:
   (a) $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com $(x,y) \mapsto (x+1,y)$;
   (b) $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com $(x,y) \mapsto (x,y^2)$;
   (c) $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com $(x,y,z) \mapsto (2x,y+z)$;
   (d) $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com $(x,y) \mapsto (x-y,1,x)$;
   (e) $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com $(x,y,z) \mapsto (x,3x-y+z,0)$.

125. Sejam T e P as aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definidas por $T(x,y) = (y,x)$ e $P(x,y) = (x,0)$.
   (a) Prove que T e P são lineares.
   (b) Descreva T e P geometricamente.

126. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(1,0,0) = (1,3), \quad T(0,1,0) = (3,1) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = (1,-1).$$

(a) Determine $T(1,2,3)$.

(b) Determine os vectores (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tais que $T(x,y,z) = (1,2)$.

127. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(1,1,1) = (1,2)$, $T(1,1,0) = (2,1)$ e $T(1,0,0) = (1,-1)$. Determine $T(1,-1,1)$ e $T(-1,1,-1)$.