46. Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & = & 16 \\ 5x_1 & -2x_2 & = & 4 \\ 3x_1 & ax_2 & = & 9 \\ 4x_1 & +bx_2 & = & -7 \end{cases}$$

Determine a e b de forma que o sistema seja possível e determine a solução nesse caso.

47. Seja A uma matriz qualquer. Mostre que, se b for uma coluna de A, então o sistema $Ax = b$ é possível e indique uma solução.

48. Determine os valores de a, b e c de tal modo que os pontos $(-1, 2)$, $(0, 0)$ e $(1, -2)$ pertençam ao gráfico da função $f(x) = a2^x + b2^{2x} + c2^{3x}$.

49. Considere as matrizes 3×3

$$E_{21}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{31}(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{32}(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule os produtos $E_{21}(\alpha)E_{31}(\beta)$, $E_{31}(\beta)E_{21}(\alpha)$, $E_{21}(\alpha)E_{32}(\gamma)$, $E_{32}(\gamma)E_{21}(\alpha)$, $E_{31}(\beta)E_{32}(\gamma)$, $E_{32}(\gamma)E_{31}(\beta)$, $E_{21}(\alpha)E_{31}(\beta)E_{32}(\gamma)$ e $E_{32}(\gamma)E_{31}(\beta)E_{21}(\alpha)$. O que é que observa em cada um deles? Procure generalizar essa observação para matrizes $n \times n$.

50. Seja E a matriz elementar 4×4 cujo efeito, quando multiplicada por uma matriz, é adicionar a primeira linha à terceira.

    (a) Qual é o efeito de E^{50}?

    (b) Escreva por extenso as matrizes E, E^{50} e $50E$.

51. Verifique que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa de $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

52. Verifique que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & -\gamma & 1 \end{bmatrix}$ <u>não é</u> a inversa de $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}$.

53. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^{-1}.

54. Ache as decomposições LU das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 18 \\ 5 & 18 & 30 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; (g) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

55. Mediante a resolução de sistemas triangulares resolva os sistemas $Ax = b_1$ e $Ax = b_2$ onde,

(a) A é a matriz da alínea (d) do exercício 54 e com $b_1 = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$;

(b) A é a matriz da alínea (f) do exercício 54 e com $b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$;

(c) A é a matriz da alínea (g) do exercício 54 e com $b_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 - 4 \end{bmatrix}^T$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}^T$.

56. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Determine a decomposição LU de A.

(b) Determine a matriz inversa de L e a matriz inversa de U.
(Sugestão: Escreva as matrizes L e U como produto de matrizes elementares.)

(c) Usando os resultados obtidos na alínea anterior calcule A^{-1}.

57. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix}$.

(a) Determine uma matriz de permutação P para a qual exista a decomposição LU de PA e determine os factores dessa decomposição.

(b) Resolva o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$.

58. Para cada uma das seguintes matrizes A,

- determine a factorização LU, onde L é triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada (se tal não for possível, faça-o para PA, onde P é uma matriz de permutação adequada);

- registe os pivots usados na eliminação;

- determine relativamente ao sistema $Ax = 0$, as incógnitas básicas e as incógnitas livres e escreva a solução geral:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) a transposta da matriz da alínea anterior.

59. Para as matrizes do exercício anterior, diga quais os vectores coluna b para os quais o sistema $Ax = b$ é possível e para esses escreva a solução geral do sistema.

60. Para cada um dos seguintes sistemas, escreva a solução geral como soma de uma solução particular, caso exista, com a solução geral do sistema homogéneo correspondente:

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$.