Álgebra Linear e Geometria Analítica

Mestrado Integrado em Eng. Electrotécnica e de Computadores

Ano lectivo 2013/2014 Folha 2

16. Em cada uma das alíneas dê exemplos de matrizes reais 2×2 com a propriedade indicada.
    (a) $A^2 = -I$.
    (b) $A^2 = 0$, sendo A não nula.
    (c) $AB = 0$, não tendo A nem B nenhum elemento nulo.

17. Designe-se por v_j a coluna j de $A_{m\times n}$, $j = 1, \ldots, n$. Dada a matriz-coluna $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, verifique que $Ax = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$.

18. Sejam A e B matrizes $m \times n$. Prove que, se $Av = Bv$ para todo o vector-coluna v $n\times 1$, então $A = B$. (**Sugestão:** Que conclusões tira se v for, por exemplo, o vector com a primeira componente igual a 1 e as restantes iguais a 0 ?)

19. Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Prove que
    (a) se A é invertível, então a sua inversa é única;
    (b) se A e B são ambas invertíveis, então a matriz produto AB também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
    (c) se A é invertível e a sua inversa é A^{-1}, então A^k ($k \in \mathbb{N}$) é invertível e $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;
    (d) se A é invertível e C é uma matriz $n \times p$ tal que $AC = 0_{n\times p}$ ($0_{n\times p}$ a matriz nula $n \times p$), então $C = 0_{n\times p}$;
    (e) se A é invertível e D é uma matriz $m \times n$ tal que $DA = 0_{m\times n}$, então $D = 0_{m\times n}$;
    (f) se A é invertível e $AC = AD$ (C e D matrizes $n \times p$), então $C = D$;
    (g) se A é invertível e $EA = FA$ (E e F matrizes $m \times n$), então $E = F$;
    (h) se A é invertível e α é um número não nulo, então a matriz αA é invertível e
    $$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}.$$

20. Calcule os produtos AB e BA nos seguintes casos:
    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$;
    (c) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

21. (a) Mostre que a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$.
    (b) Calcule $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5$ usando a igualdade
    $$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

22. Dê exemplos não triviais (isto é, $\neq I$ e $\neq -I$) de matrizes 2×2 que sejam inversas de si próprias.

23. Prove que, se A comuta com B e esta é invertível, então A também comuta com B^{-1}.

24. Suponha que A é uma matriz invertível e que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine X tal que: (a) $AX = 0_{3\times3}$; (b) $XA = 0_{2\times3}$; (c) $AX = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

25. Mostre que as seguintes matrizes não são invertíveis

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

26. Seja A uma matriz quadrada qualquer. Suponhamos que existe um número natural k tal que $A^k = 0$ (matriz nula). Mostre que, então $I - A$ é invertível tendo-se

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

27. Usando o exercício anterior, calcule $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

28. Considere as matrizes A, B e C tais que

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 10 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AC = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 0 \\ 14 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $(AC)^T$, B^TA^T e $(ACB^T)A^T$.

29. Sendo A quadrada, mostre que $A + A^T$ é simétrica. E $A - A^T$?

30. Seja A uma matriz $m\times n$. Prove que as matrizes A^TA e AA^T são simétricas. Dê um exemplo que mostre que estes dois produtos podem ser diferentes, mesmo que A seja quadrada.

31. Sejam A $n\times n$ e S $n\times m$, com A simétrica. Mostre que S^TAS é simétrica.

32. Mostre que a inversa de uma matriz simétrica invertível é também simétrica.

33. Uma matriz quadrada diz-se <u>ortogonal</u> se for invertível e a sua inversa coincidir com a sua transposta. Verifique que as seguintes matrizes reais são ortogonais:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \ (\theta \in \mathbb{R}).$$

(Observação: É possível mostrar que uma matriz ortogonal real 2×2 possui necessariamente uma das duas formas anteriores.)

34. Escreva todas as matrizes de permutação 3×3, incluindo $P = I$, e para cada uma identifique a sua inversa (que também é uma matriz de permutação).

35. Mostre que toda a matriz de permutação é ortogonal.