Preparation Activity PA06 – Regular Languages

1. Vamos tentar então utilizar o lema da bombagem para provar que a seguinte linguagem não é regular: L = $\{1^{n^2} \mid n>0\}$

   O lema da bombagem diz o seguinte:

   a) "Given an infinite regular language L
   b) there exists an integer p (critical length)
   c) for any string with length $w \in L$, $|w| \geq n$ we can write $w = x\, y\, z$ with
   $|xy| \leq n$,
   $|y| \geq 1$,
   $y \neq \varepsilon$,
   d) *such that: $x\, y^k\, z \in L$ for $k = 0,1, 2, \ldots$"*

   Para esta prova, vamos presumir inicialmente que L é regular, e, se não se conseguir aplicar o lema, concluir-se-á que na realidade o oposto daquilo que se assumiu é verdade e que, portanto, L não é regular.

   Aplicando o lema a esta situação, tem-se:

   a) L é uma linguagem claramente infinita, pois $n \in [0, +\infty[$ (sendo n o símbolo que aparece na definição da linguagem), podendo haver infinitos "1".

   b) Poderíamos considerar que o comprimento crítico, p, seria dois, pois, numa situação limite, seriam preciso dois estados num autómato para reconhecer a string, mesmo com p = 1, seria necessário um estado inicial que transita para o final com um símbolo "1" e depois aceita.

   c) Para cada string $w \in L$, $|w| \geq p$, vamos tentar escrever w como sendo x y z, tendo em conta $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$, $y \neq \varepsilon$. Teríamos algo do gênero:

c1) x = ε | y = 1 | z = 1^{n^2-1}
ou
c2) x = ε | y = 11 | z = 1^{n^2-2}
ou
c3) x = 1 | y = 1 | z = 1^{n^2-2}

Nota: para que cada uma destas strings tenha comprimento ≥ *p*, sendo que p = 2, logo, n ≥ 2.

c1) Representa os casos em que x é a string vazia, y é o primeiro "1" da string e z serão os restantes "1" para além de y.

c2) Representa os casos em que x é a string vazia, y são os dois primeiros 1 da string e z serão os restantes "1" para além dos que estão em y.

c3) Representa os casos em que x é o primeiro "1", y é o segundo "1" e z serão os restantes "1" menos aqueles dois.

Tendo em conta que $|xy| \leq 2$, $|y| \geq 1$, estes seriam os casos que se podem formar.

d) Ora, bombeando y em qualquer um destes casos, a string fica com um número de "1" desproporcional à regra, pois bombeando uma só vez seria o suficiente para que a string ficasse da seguinte forma: 1^{n^2+1} (no caso em que y = 1) ou até 1^{n^2+2} (no caso em que y = 11), que não é o que se pretende, a linguagem é L = {1^{n^2}| n>0} e $1^{n^2+1} \neq 1^{n^2}$ e $1^{n^2+2} \neq 1^{n^2}$. Por isso, não existirá nenhuma decomposição válida em que: $x\, y^k z \in L$ tendo em conta estas restrições todas anteriormente mencionadas.

2. A afirmação é falsa, pois, apesar de o facto de uma linguagem verificar o lema da bombagem ser uma condição necessária para a linguagem ser regular, não é uma condição suficiente para provar a sua regularidade. Nem todas as linguagens que verificam o lema são regulares, no entanto, para que se considerem regulares têm de o verificar, mas isso não é um critério bom o suficiente para provar que uma dada linguagem é regular, apenas serve para provar por contradição, como foi feito em cima, que não o é.