Tarea 1. Espacios Vectoriales

Careaga Carrillo Juan Manuel

22 de febrero de 2019

1. Sean $\mathbb{C}$ el campo de los números complejos, $\mathbb{R}$ el campo de los números reales y $\mathbb{Q}$ el campo de los números racionales. Determine cuál de los siguientes es un espacio vectorial, en caso de ser espacio vectorial obtenga una base. Argumente su respuesta.

    i. $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$
    ii. $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$
    iii. $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{C}$
    iv. $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$
    v. $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$
    vi. $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{Z}$ donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de números enteros.
    vii. $S = \left\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} \middle| a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$ sobre $\mathbb{Q}$.
    viii. $S = \left\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} \middle| a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$ sobre $\mathbb{R}$.
    ix. $S = \left\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} \middle| a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$ sobre $\mathbb{C}$.

2. Sea $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ el conjunto de todos los números reales positivos. Defina las siguientes operaciones:

$$x \boxplus y = xy \text{ para cualquiera } x, y \in \mathbb{R}^+$$

   y

$$a \boxdot x = x^a \text{ para } x \in \mathbb{R}^+ \text{ y } a \in \mathbb{R}$$

    i. Demuestre que $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \boxplus, \boxdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
    ii. Obtenga su dimensión y una base
    iii. Si se definiera $a \boxtimes x = a^x$ para $x \in \mathbb{R}^+$ y $a \in \mathbb{R}$ como la multiplicación por escalares, ¿$_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$?

3. Sea V un F espacio vectorial, $\{x, y, z\} \subseteq_F V$ un conjunto linealmente independiente. Determine el valor de $k \in F$ para el cual

$$\{y - x, kz - y, x - z\}$$

   es un conjunto linealmente independiente.

4. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base para el espacio vectorial $_FV$, con $n \geq 2$.

    a. Demuestre que

$$\left\{x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$

    es una base para $_FV$

    b. El conjunto

$$\{x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \ldots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1\}$$

    ¿es base para $_FV$?

    c. Si $\{x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \ldots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1\}$ es base para $_FV$, ¿$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es base para $_FV$?

5.