



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS**

**TRANSFERENCIA DE MOMENTO ANGULAR DE ELECTRONES RÁPIDOS A  
NANOPARTÍCULAS**

**TESIS**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**PRESENTA:**

**JORGE LUIS BRISEÑO GÓMEZ**

**TUTOR:**

**DR. ALEJANDRO REYES CORONADO**  
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

**MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:**

**DR. RUBÉN GERARDO BARRERA Y PÉREZ**  
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM  
**DR. RAÚL PATRICIO ESQUIVEL SIRVENT**  
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

**CIUDAD DE MÉXICO, JULIO DE 2023**

*A Any.*

*A mi madre, a Tita y a Robin.*

*«But still try, for who knows what is possible?»*

Michael Faraday.

*«De ilusiones así va uno viviendo.»*

Julio Cortázar.

---

# Índice general

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>5</b>
<b>Resumen</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>9</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
<b>2. Teoría y métodos</b>	<b>13</b>
2.0.1. Conservación del momento angular en electrodinámica . . . . .	13
2.0.2. Transferencia de momento angular de un electrón rápido a una nanopartícula . . .	20
2.0.3. Campos electromagnéticos esparcidos por la nanopartícula . . . . .	22
<b>3. Resultados y discusión</b>	<b>25</b>
<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>31</b>
<b>Apéndice A</b>	
Método del potencial escalar	<b>33</b>
<b>Referencias</b>	<b>39</b>



---

## Agradecimientos

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie

ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

---

## Resumen

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie

ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.



---

## Abstract

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie

ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## Introducción

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur

adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

En este capítulo se muestra el enfoque de la electrodinámica clásica empleado para describir la interacción de un electrón rápido y una nanopartícula (NP) esférica. En particular, se estudia la interacción a partir del momento angular transferido del electrón a la NP. Un trabajo de García de Abajo [1] justifica que bajo ciertas condiciones (Justificar las condiciones en la introducción), no es necesaria una descripción cuántica del fenómeno.

Las siguientes ecuaciones se encuentran en el sistema (cgs) Internacional; es decir, se proporciona en color **negro** la ecuación en sistema Internacional, y entre paréntesis y resaltado con color (magenta)<sup>1</sup> el factor necesario para expresar la ecuación en el sistema cgs. Por ejemplo, la fuerza entre dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  separadas una distancia  $r$  se escribiría como

$$\vec{\mathbf{F}} = (4\pi\epsilon_0) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}. \quad (2.1)$$

### 2.0.1. Conservación del momento angular en electrodinámica

Trabajando en el sistema (cgs) internacional, las ecuaciones de Maxwell se escriben como [2]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} &= (4\pi\epsilon_0) \frac{\rho_{\text{tot}}}{\epsilon_0}, & \nabla \times \vec{\mathbf{E}} &= - \left( \frac{1}{c} \right) \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} &= 0, & \nabla \times \vec{\mathbf{B}} &= \left( \frac{4\pi}{\mu_0 c} \right) \mu_0 \vec{\mathbf{J}}_{\text{tot}} + (c) \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

y pueden ser reescritas en términos de los potenciales  $\phi$  y  $\vec{\mathbf{A}}$  como [2]

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi(\vec{\mathbf{r}}, t) = - (4\pi\epsilon_0) \frac{\rho_{\text{tot}}}{\epsilon_0}(\vec{\mathbf{r}}, t), \quad (2.3)$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = - \left( \frac{4\pi}{\mu_0 c} \right) \mu_0 \vec{\mathbf{J}}_{\text{tot}}(\vec{\mathbf{r}}, t), \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Se utiliza el sistema **Internacional** para expresar las ecuaciones en su forma estándar de libro de texto, sin embargo, las expresiones el sistema (cgs) resultan naturales al realizar una descripción numérica del problema, lo cual se propone como trabajo a futuro.

trabajando en la norma de Lorentz, donde se satisface que  $\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} + (1/c)\partial_t\phi = 0$ , y los campos electromagnéticos se escriben en términos de los potenciales como

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\nabla\phi(\vec{\mathbf{r}}, t) - \left(\frac{1}{c}\right)\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t), \quad (2.5)$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t). \quad (2.6)$$

Luego, partiendo de la expresión para la conservación del momento lineal en electrodinámica [2]

$$\frac{\partial}{\partial t} [\vec{\mathbf{p}}^{\text{mec}}(\vec{\mathbf{r}}, t) + \vec{\mathbf{p}}^{\text{em}}(\vec{\mathbf{r}}, t)] = \nabla \cdot \vec{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}}, t), \quad (2.7)$$

donde  $\vec{\mathbf{p}}^{\text{mec}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  es la densidad de momento lineal mecánico,  $\vec{\mathbf{p}}^{\text{em}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  es la densidad de momento lineal electromagnético

$$\vec{\mathbf{p}}^{\text{em}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \left(\frac{c}{4\pi}\right)\frac{1}{c^2}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \times \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \quad (2.8)$$

y  $\vec{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  es el tensor de esfuerzos de Maxwell dado por [2]

$$T_{ij}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \left[ E_i(\vec{\mathbf{r}}, t) E_j(\vec{\mathbf{r}}, t) - \frac{\delta_{ij}}{2} E^2(\vec{\mathbf{r}}, t) \right] + \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)} \left[ H_i(\vec{\mathbf{r}}, t) H_j(\vec{\mathbf{r}}, t) - \frac{\delta_{ij}}{2} H^2(\vec{\mathbf{r}}, t) \right], \quad (2.9)$$

donde se ha asumido que  $T_{ij}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  es la entrada  $ij$  de  $\vec{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ ,  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  son la permitividad y permeabilidad del vacío respectivamente,  $E_i(\vec{\mathbf{r}}, t)$  es la  $i$ -ésima componente del campo eléctrico  $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ ,  $H_i(\vec{\mathbf{r}}, t)$  es la  $i$ -ésima componente del campo  $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

Partiendo de la Ec. (2.7), la conservación de momento angular se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathbf{l}}^{\text{mec}}(\vec{\mathbf{r}}, t) + \vec{\mathbf{l}}^{\text{em}}(\vec{\mathbf{r}}, t)) = \vec{\mathbf{r}} \times \nabla \cdot \vec{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}}, t), \quad (2.10)$$

donde  $\vec{\mathbf{l}}^{\text{mec}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}^{\text{mec}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  y  $\vec{\mathbf{l}}^{\text{em}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}^{\text{em}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  son las densidades volumétricas de momento angular mecánico y electromagnético respectivamente.

Si se define  $\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  —o usando notación de índices y convención de suma de Einstein  $M_{jk}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \epsilon_j^{li} r_l T_{ik}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ —y se calcula la divergencia de  $\vec{\mathbf{M}}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \left( \nabla \cdot \vec{\mathbf{M}} \right)_j &= \delta^{nk} \partial_n M_{jk} = \delta^{nk} \partial_n \epsilon_j^{li} r_l T_{ik} = \delta^{nk} \epsilon_j^{li} \partial_n r_l T_{ik}, \\ &= \delta^{nk} \epsilon_j^{li} (\delta_{nl} T_{ik} + r_l \partial_n T_{ik}) = \delta^{nk} \epsilon_j^{li} r_l \partial_n T_{ik}, \\ &= \delta^{nk} \epsilon_j^{li} r_l \partial_n T_{ik} = \epsilon_j^{li} r_l \partial^k T_{ik} = \epsilon_j^{li} r_l \left( \nabla \cdot \vec{\mathbf{T}} \right)_i, \\ \left( \nabla \cdot \vec{\mathbf{M}} \right)_j &= \left( \vec{\mathbf{r}} \times \nabla \cdot \vec{\mathbf{T}} \right)_j, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde se ha usado  $\delta^{nk} \delta_{nl} \epsilon_j^{li} T_{ik} = \epsilon_j^{ni} T_{in} = 0$ , porque el tensor de esfuerzos de Maxwell es simétrico ( $T_{in} = T_{ni}$ ) y el símbolo de Levi-Civita es antisimétrico ( $\epsilon_j^{ni} = -\epsilon_j^{in}$ ).

A partir de este resultado se puede escribir la conservación del momento angular como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\ell}^{\text{mec}}(\vec{r}, t) + \vec{\ell}^{\text{em}}(\vec{r}, t) \right) = \nabla \cdot \vec{\mathbf{M}}(\vec{r}, t), \quad (2.12)$$

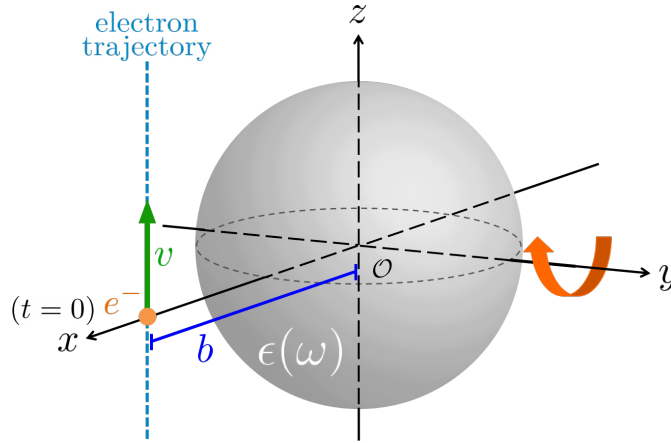
que es una ecuación local. Para escribir la conservación del momento angular de forma global, se debe integrar la Ec. (2.12) sobre un volumen  $V$  delimitado por una superficie  $S$  de la siguiente manera

**Conservación del momento angular global en electrodinámica**

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{\mathbf{L}}^{\text{mec}}(t) + \vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}(t) \right) = \oint_S \vec{\mathbf{M}}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{\mathbf{S}}, \quad (2.13)$$

donde se ha usado el teorema de la divergencia en la última igualdad, y se han definido

$$\vec{\mathbf{L}}^{\text{mec}}(t) = \int_V \vec{\ell}^{\text{mec}}(\vec{r}, t) dV, \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}(t) = \int_V \vec{\ell}^{\text{em}}(\vec{r}, t) dV. \quad (2.14)$$



**Figura 2.1:** Nanopartícula caracterizada por una respuesta dieléctrica homogénea  $\epsilon(\omega)$  centrada en el origen, junto a la trayectoria del electrón colocada en  $\vec{r} = (0, b, vt)$

Se define el sistema de estudio como el de una NP caracterizada por una respuesta dieléctrica homogénea  $\epsilon(\omega)$  centrada en el origen, interactuando con un electrón cuya trayectoria se describe a través de  $\vec{r} = (0, b, vt)$ , como se muestra en la Fig. 2.1. Para calcular la transferencia de momento angular del electrón a la NP ( $\Delta \vec{\mathbf{L}}$ ) se integra la Ec. (2.13) en el tiempo de la siguiente manera

$$\Delta \vec{\mathbf{L}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{L}}^{\text{mec}}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \oint_S \vec{\mathbf{M}}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{\mathbf{S}} dt - \Delta \vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}, \quad (2.15)$$

donde

$$\Delta \vec{\mathbf{L}}^{\text{em}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{L}}^{\text{em}} dt = \vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}(t \rightarrow \infty) - \vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}(t \rightarrow -\infty), \quad (2.16)$$

y

$$\vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}(t \rightarrow \pm\infty) = \epsilon_0 \mu_0 \int_V \vec{r} \times \left[ \vec{\mathbf{E}}(t \rightarrow \pm\infty) \times \vec{\mathbf{H}}(t \rightarrow \pm\infty) \right] dV, \quad (2.17)$$

donde este último término, para el sistema de estudio de este trabajo, es nulo porque en el tiempo

$t \rightarrow -\infty$  el electrón se encuentra infinitamente lejos y no ha interactuado con la NP, por lo que los campos electromagnéticos son nulos  $-\vec{\mathbf{E}}(t \rightarrow -\infty) = \vec{\mathbf{0}}$  y  $\vec{\mathbf{H}}(t \rightarrow -\infty) = \vec{\mathbf{0}}$ ; posteriormente, para cuando  $t \rightarrow \infty$ , el electrón se encontrará infinitamente lejos de la NP pero ya habrá interactuado con ella, por lo que se habrán inducido distribuciones de cargas y corrientes eléctricas dentro de la NP, que habrán desaparecido para cuando  $t \rightarrow \infty$  debido a procesos disipativos. Por tanto  $\vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}(t \rightarrow \pm\infty) = 0$ .

Entonces

$$\Delta \vec{\mathbf{L}} = \int_{-\infty}^{\infty} \oint_S \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \cdot d\vec{\mathbf{S}} dt, \quad (2.18)$$

o usando notación de índices

$$\Delta L_i = \int_{-\infty}^{\infty} \oint_S \epsilon_i^{lj} r_l T_{jk}(\vec{\mathbf{r}}, t) n^k dS dt, \quad (2.19)$$

donde  $n_i$  es la  $i$ -ésima componente del vector normal a la superficie de S.

Como la función dieléctrica  $\epsilon(\omega)$  se presenta usualmente en términos de la frecuencia, resulta conveniente expresar a los campos electromagnéticos en términos de  $\omega$ . Mediante la transformada de Fourier temporal se pueden expresar los campos electromagnéticos en función de la frecuencia, de la siguiente manera

$$\vec{\mathbf{F}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathbf{F}}(t) e^{i\omega t} dt \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{F}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathbf{F}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.20)$$

donde  $\vec{\mathbf{F}} \in \{\vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{H}}\}$  y para que  $\vec{\mathbf{F}}(t)$  sea una función de variable real se debe cumplir que  $\vec{\mathbf{F}}(\omega)^* = \vec{\mathbf{F}}(-\omega)$  con la convención de expresar al complejo conjugado de un número  $z$  como  $z^*$ . Además, para calcular la transferencia de momento angular a través de la Ec. (2.19) es importante notar que la dependencia en el tiempo está contenida únicamente en el tensor de esfuerzos de Maxwell  $\vec{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ . De esta forma se puede reescribir la integral en el tiempo de una pareja de campos eléctricos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} E_i(\vec{\mathbf{r}}, t) E_j(\vec{\mathbf{r}}, t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_i(\vec{\mathbf{r}}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_j(\vec{\mathbf{r}}, \omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \right] dt, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega')t} dt \right] E_i(\vec{\mathbf{r}}, \omega) E_j(\vec{\mathbf{r}}, \omega') d\omega d\omega', \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega') E_i(\vec{\mathbf{r}}, \omega) E_j(\vec{\mathbf{r}}, \omega') d\omega d\omega', \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_i(\vec{\mathbf{r}}, \omega) E_j(\vec{\mathbf{r}}, -\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_i(\vec{\mathbf{r}}, \omega) E_j^*(\vec{\mathbf{r}}, \omega) d\omega, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} [E_i(\vec{\mathbf{r}}, \omega) E_j^*(\vec{\mathbf{r}}, \omega)] d\omega \end{aligned} \quad (2.21)$$

y se puede realizar el proceso análogo para las componentes del campo  $\vec{\mathbf{H}}$ .

De esta manera se puede reescribir la Ec. (2.19) como

$$\Delta L_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \oint_S \epsilon_i^{lj} r_l T_{jk}(\vec{\mathbf{r}}, \omega) n^k dS d\omega, \quad (2.22)$$



donde se ha definido

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, \omega) = \text{Re} \left[ \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, \omega) \vec{\mathbf{E}}^*(\vec{r}, \omega) - \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \frac{\vec{\mathbf{I}}}{2} \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{\mathbf{E}}^*(\vec{r}, \omega) \right. \\ \left. + \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)} \vec{\mathbf{H}}_i(\vec{r}, \omega) \vec{\mathbf{H}}_j^*(\vec{r}, \omega) - \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)} \frac{\vec{\mathbf{I}}}{2} \vec{\mathbf{H}}(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{\mathbf{H}}^*(\vec{r}, t) \right], \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde  $\vec{\mathbf{I}}$  es el tensor identidad de rango 2. De esta forma se puede definir finalmente la «densidad espectral» de momento angular

$$\mathcal{L}_i(\omega) = \frac{1}{\pi} \oint_S \epsilon_i^{lj} r_l \mathcal{T}_{jk}(\vec{r}, \omega) n^k dS. \quad (2.24)$$

y calcular la transferencia de momento angular a través de

$$\Delta \vec{\mathbf{L}} = \int_0^\infty \vec{\mathcal{L}}(\omega) d\omega. \quad (2.25)$$

En coordenadas cartesianas la Ec. (2.24) puede ser escrita como

$$\mathcal{L}_x = \frac{1}{\pi} \left[ \oint_S y \mathcal{T}_{zk} dS^k - \oint_S z \mathcal{T}_{yk} dS^k \right], \quad (2.26)$$

$$\mathcal{L}_y = \frac{1}{\pi} \left[ \oint_S z \mathcal{T}_{xk} dS^k - \oint_S x \mathcal{T}_{zk} dS^k \right], \quad (2.27)$$

$$\mathcal{L}_z = \frac{1}{\pi} \left[ \oint_S x \mathcal{T}_{yk} dS^k - \oint_S y \mathcal{T}_{xk} dS^k \right]. \quad (2.28)$$

Debido a que el problema tiene simetría de reflexión con respecto al plano  $xz$ , por tanto no puede haber componente de momento lineal transferido en la dirección  $y$  [3]. De lo anterior se puede concluir que el momento angular transferido a la NP no puede tener componente  $x$  ni  $z$  [4]. Por tanto, solo es necesaria la contribución espectral  $\mathcal{L}_y$ . Se puede reescribir la componente espectral en términos de proyecciones esféricas en lugar de cartesianas, de la siguiente manera[4]

#### Componente espectral que contribuye a la transferencia de momento angular

$$\mathcal{L}_y = \frac{1}{\pi} \oint \sin \theta [\cos \varphi \mathcal{T}_{\theta r} - \cos \theta \sin \varphi \mathcal{T}_{\varphi r}] dS_r, \quad (2.29)$$

y

#### Componentes espectrales que no contribuyen a la transferencia de momento angular

$$\mathcal{L}_x = \frac{1}{\pi} \oint \sin \theta [\cos \varphi \mathcal{T}_{\theta r} - \cos \theta \sin \varphi \mathcal{T}_{\varphi r}] dS_r, \quad (2.30)$$

$$\mathcal{L}_z = \frac{1}{\pi} \oint \sin^2 \theta \mathcal{T}_{\varphi r} dS_r, \quad (2.31)$$

donde se ha asumido una superficie de integración esférica (radial).

Resulta adecuado separar la contribución eléctrica de la magnética de la densidad espectral de la Ec.(2.25). Para realizar esto se debe separar el tensor en la Ec. (2.23) en su contribución eléctrica y magnética de la siguiente manera

$$\vec{\mathcal{T}}(\vec{r}, \omega) = \vec{\mathcal{T}}^{\text{E}}(\vec{r}, \omega) + \vec{\mathcal{T}}^{\text{H}}(\vec{r}, \omega) \quad (2.32)$$

con

$$\vec{\mathcal{T}}^{\text{E}} = \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \text{Re} \left[ \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, \omega) \vec{\mathbf{E}}^*(\vec{r}, \omega) - \frac{\vec{\mathbf{I}}}{2} \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{\mathbf{E}}^*(\vec{r}, \omega) \right], \quad (2.33)$$

$$\vec{\mathcal{T}}^{\text{H}} = \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)} \text{Re} \left[ \vec{\mathbf{H}}(\vec{r}, \omega) \vec{\mathbf{H}}^*(\vec{r}, \omega) - \frac{\vec{\mathbf{I}}}{2} \vec{\mathbf{H}}(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{\mathbf{H}}^*(\vec{r}, \omega) \right]. \quad (2.34)$$

Si se elige una esfera como superficie de integración, y se denota a  $R$  como el radio de la superficie de integración esférica  $S$  y a  $\hat{r}_i$  como la  $i$ -ésima componente del vector unitario radial, es posible expresar a  $\mathcal{L}_i(\omega)$  de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_i(\omega) = \frac{R^2}{\pi} \int_0^{4\pi} \left[ \epsilon_i^{lj} r_l \mathcal{T}_{jk}^{\text{E}}(\vec{r}, \omega) n^k + \epsilon_i^{lj} r_l \mathcal{T}_{jk}^{\text{H}}(\vec{r}, \omega) n^k \right] d\Omega, \quad (2.35)$$

donde únicamente falta integral en el ángulo sólido  $\Omega$ . Se puede separar la contribución eléctrica de la magnética en la Ec. (2.35) de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_i^{\text{E}}(\omega) = \frac{R^2}{\pi} \int_0^{4\pi} \left[ \epsilon_i^{lj} r_l \mathcal{T}_{jk}^{\text{E}}(\vec{r}, \omega) n^k \right] d\Omega, \quad (2.36)$$

$$\mathcal{L}_i^{\text{H}}(\omega) = \frac{R^2}{\pi} \int_0^{4\pi} \left[ \epsilon_i^{lj} r_l \mathcal{T}_{jk}^{\text{H}}(\vec{r}, \omega) n^k \right] d\Omega. \quad (2.37)$$

Además, se pueden separar a los campos electromagnéticos  $\vec{\mathbf{E}}$  y  $\vec{\mathbf{H}}$  en sus contribuciones de campo externo (ext) y campo esparcido (scat) como

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}, \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{H}}_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{H}}_{\text{scat}}, \quad (2.38)$$

donde  $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$  y  $\vec{\mathbf{H}}_{\text{ext}}$  son los campos electromagnéticos externos —es decir, los producidos por el electrón—, y  $\vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}$  y  $\vec{\mathbf{H}}_{\text{scat}}$  son los campos esparcidos por la nanopartícula (NP). Mediante esta separación se puede

reescribir la componente eléctrica del tensor de la Ec. (2.23) como

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{T}}^E &= \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \text{Re} \left[ \left( \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}} \right) \left( \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}^* + \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}^* \right) - \frac{\vec{\mathbf{I}}}{2} \left( \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}} \right) \cdot \left( \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}^* + \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}^* \right) \right], \\ &= \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \text{Re} \left[ \left( \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}} \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}^* + \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}} \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}^* + \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}^* + \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}^* \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\vec{\mathbf{I}}}{2} \left( \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}^* + \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}^* + \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}^* + \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}^* \right) \right].\end{aligned}\quad (2.39)$$

Por medio de esta separación se puede escribir la componente eléctrica del tensor de esfuerzos como

$$\vec{\mathcal{T}}^E = \vec{\mathcal{T}}_{\text{ss}}^E + \vec{\mathcal{T}}_{\text{int}}^E + \vec{\mathcal{T}}_{\text{ee}}^E \quad (2.40)$$

en donde

$$\vec{\mathcal{T}}_{\text{ss}}^E = \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \text{Re} \left[ \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}} \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}^* - \frac{\vec{\mathbf{I}}}{2} \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}^* \right], \quad (2.41)$$

$$\vec{\mathcal{T}}_{\text{ee}}^E = \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \text{Re} \left[ \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}^* - \frac{\vec{\mathbf{I}}}{2} \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}^* \right], \quad (2.42)$$

$$\vec{\mathcal{T}}_{\text{int}}^E = \vec{\mathcal{T}}_{\text{se}}^E + \vec{\mathcal{T}}_{\text{es}}^E \quad (2.43)$$

con

$$\vec{\mathcal{T}}_{\text{es}}^E = \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \text{Re} \left[ \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}^* - \frac{\vec{\mathbf{I}}}{2} \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}^* \right], \quad (2.44)$$

$$\vec{\mathcal{T}}_{\text{se}}^E = \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \text{Re} \left[ \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}} \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}^* - \frac{\vec{\mathbf{I}}}{2} \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}^* \right]. \quad (2.45)$$

Análogamente al hacer la sustitución  $\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$  y  $\vec{\mathbf{E}} \rightarrow \vec{\mathbf{H}}$  en las Ecs. (2.39) a (2.45), se obtiene las contribuciones magnéticas al tensor  $\vec{\mathcal{T}}$ , denotadas por  $\vec{\mathcal{T}}_{ij}^H$  donde  $ij$  pueden tomar los valores  $\{e, s\}$ .

Se puede interpretar a  $\vec{\mathcal{T}}_{\text{int}}^E$  como la componente que está relacionada con la interacción del campo electromagnético del electrón con las cargas y corrientes inducidas en la NP. En el caso en que no exista NP, nada altera el movimiento del electrón, por lo que no pierde ni cede energía, momento lineal ni momento angular ( $\Delta L = 0$ ) [4]. Al no existir NP, los campos electromagnéticos esparcidos serían nulos, por lo que la única contribución al momento angular proviene de la componente  $\vec{\mathcal{T}}_{\text{ee}}^E$ . Por tanto, de manera general, se concluye que la contribución al momento angular transferido debido a  $\vec{\mathcal{T}}_{\text{ee}}^E$  es nula, por lo que no será considerada en los cálculos subsecuentes. También vale la pena mencionar que la componente  $\vec{\mathcal{T}}_{\text{ss}}^E$ ,

al depender únicamente de los campos electromagnéticos esparcidos por la NP, está relacionada con la interacción de la NP consigo misma, referida por algunos autores como reacción de radiación [2].

En la siguiente sección se presentan las expresiones analíticas de los campos electromagnéticos externos (producidos por el electrón) y de los esparcidos por la NP, para poder integrarlos dentro de la Ec. (2.35).

### 2.0.2. Transferencia de momento angular de un electrón rápido a una nanopartícula

El campo electromagnético externo producido por un electrón rápido, considerado como una partícula puntual de carga  $q = -e$ , viajando a velocidad  $\vec{v}$  constante a lo largo del eje  $z$  a lo largo de la trayectoria  $\vec{r} = (0, b, vt)$  [ver Fig. 2.1], se puede obtener mediante una transformación de Lorentz de un sistema de referencia en el que el electrón se encuentra en reposo, a un sistema de referencia en el que el electrón que se mueve a velocidad constante  $\vec{v}$ , obteniendo [2]

$$\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}, t) = (4\pi\epsilon_0) \frac{-e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma [\vec{R} + (z - vt)\hat{z}]}{[R^2 + \gamma^2(z - vt)^2]^{3/2}}, \quad (2.46)$$

$$\vec{H}_{\text{ext}}(\vec{r}, t) = (4\pi) \frac{-e}{4\pi} \frac{\gamma \vec{v} \times \vec{R}}{[R^2 + \gamma^2(z - vt)^2]^{3/2}}, \quad (2.47)$$

en donde  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ,  $\beta = v/c$ ,  $\vec{R} = (x - b)\hat{x} + y\hat{y}$ ,  $R = \sqrt{(x - b)^2 + y^2}$  y  $\vec{v} \times \vec{R} = v[(x - b)\hat{y} - y\hat{x}]$ . Se pueden calcular los campos electromagnéticos externos en función de la frecuencia mediante una transformada de Fourier de las Ecs. (2.46) y (2.47) que se expresan como [5]

$$\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}, \omega) = (4\pi\epsilon_0) \frac{-e}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\omega}{v^2\gamma} e^{i\omega(z/v)} \left\{ \text{sign}(\omega) K_1\left(\frac{|\omega|R}{v\gamma}\right) \hat{R} - \frac{i}{\gamma} K_0\left(\frac{|\omega|R}{v\gamma}\right) \hat{z} \right\}, \quad (2.48)$$

$$\vec{H}_{\text{ext}}(\vec{r}, \omega) = (4\pi) \frac{-e}{4\pi} \frac{2e}{vc\gamma} |\omega| e^{i\omega z/v} K_1\left(\frac{|\omega|R}{v\gamma}\right) \hat{v} \times \hat{R}, \quad (2.49)$$

que son expresiones cerradas con simetría cilíndrica. Como también se buscan los campos esparcidos por la NP, que tienen simetría esférica, conviene expresar a los campos electromagnéticos del electrón mediante una solución con simetría esférica.

El campo eléctrico producido por el electrón se puede obtener mediante la función de Green dependiente del tiempo [5]

$$\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}, \omega) = e \left( \nabla - i \frac{k\vec{v}}{c} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} G_0(\vec{r} - \vec{r}_t) dt, \quad (2.50)$$

donde la función de Green  $G_0(\vec{r} - \vec{r}_t)$  está dada por

$$G_0(\vec{r} - \vec{r}_t) = \frac{(4\pi\epsilon_0) e^{ik|\vec{r} - \vec{r}_t|}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_t|}, \quad (2.51)$$

con  $k = \omega/c$  el número de onda en el vacío,  $\vec{r}_t = \vec{r}_0 + \vec{v}t$  la posición del electrón al tiempo  $t$ . Al expandir la función de Green en base esférica se obtiene [6]

$$G_0(\vec{r} - \vec{r}_t) = \frac{(4\pi\epsilon_0)}{\epsilon_0} k \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} j_{\ell}(kr) h_{\ell}^{+}(kr_t) Y_{\ell,m}(\Omega_r) Y_{\ell,m}(\Omega_{r_t})^*, \quad (2.52)$$

donde  $Y_{\ell,m}$  son los armónicos esféricos escalares,  $h_\ell^+(x) = i h_\ell^1(x)$  es la función de Hankel esférica de orden  $\ell$  y  $j_\ell(x)$  es la función esférica de Bessel de orden  $\ell$  [7]. Sustituyendo la Ec. (2.52) en la Ec. (2.50), se obtiene

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \left( \nabla - i \frac{k \vec{\mathbf{v}}}{c} \right) \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} j_\ell(kr) Y_{\ell,m}(\Omega_r) \phi_{\ell,m} \quad (2.53)$$

donde

$$\phi_{\ell,m} = \frac{(4\pi\epsilon_0)}{\epsilon_0} k \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} h_\ell^+(kr_t) Y_{\ell,m}^*(\Omega_{r_t}) dt. \quad (2.54)$$

En el Apéndice A se muestran los detalles del cálculo analítico de la Ec. (2.54). Como se muestra también en el Apéndice A, es posible obtener expresiones para el campo electromagnético externo en representación multipolar esférica:

**Expansión multipolar del campo electromagnético externo producido por el electrón**

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} = \sum_{\ell,m} \left( \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{er}} \hat{\mathbf{r}} + \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{e}\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{e}\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \quad (2.55)$$

$$\vec{\mathbf{H}}_{\text{ext}} = \sum_{\ell,m} \left( \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{er}} \hat{\mathbf{r}} + \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{e}\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{e}\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \quad (2.56)$$

donde

$$\mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{er}} = e^{im\varphi} D_{\ell,m}^{\text{ext}} \ell(\ell+1) P_\ell^m(\cos\theta) \frac{j_\ell(k_0 r)}{k_0 r}, \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{e}\theta} = & -e^{im\varphi} C_{\ell,m}^{\text{ext}} \frac{m}{\sin\theta} j_\ell(k_0 r) P_\ell^m(\cos\theta) - e^{im\varphi} D_{\ell,m}^{\text{ext}} \left[ (\ell+1) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} P_\ell^m(\cos\theta) - \right. \\ & \left. \frac{(\ell-m+1)}{\sin\theta} P_{\ell+1}^m(\cos\theta) \right] \left[ (\ell+1) \frac{j_\ell(k_0 r)}{k_0 r} - j_{\ell+1}(k_0 r) \right], \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{e}\varphi} = & i e^{im\varphi} C_{\ell,m}^{\text{ext}} j_\ell(k_0 r) \left[ (\ell+1) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} P_\ell^m(\cos\theta) - \frac{\ell-m+1}{\sin\theta} P_{\ell+1}^m(\cos\theta) \right] \\ & + i e^{im\varphi} D_{\ell,m}^{\text{ext}} \frac{m}{\sin\theta} P_\ell(\cos\theta) \left[ (\ell+1) \frac{j_\ell(k_0 r)}{k_0 r} - j_{\ell+1}(k_0 r) \right], \end{aligned} \quad (2.59)$$

y

$$\mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{er}} = e^{im\varphi} C_{\ell,m}^{\text{ext}} \ell(\ell+1) P_\ell^m(\cos\theta) \frac{j_\ell(k_0 r)}{k_0 r}, \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{e}\theta} = & e^{im\varphi} D_{\ell,m}^{\text{ext}} \frac{m}{\sin\theta} j_\ell(k_0 r) P_\ell^m(\cos\theta) - e^{im\varphi} C_{\ell,m}^{\text{ext}} \left[ (\ell+1) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} P_\ell^m(\cos\theta) - \right. \\ & \left. \frac{(\ell-m+1)}{\sin\theta} P_{\ell+1}^m(\cos\theta) \right] \left[ (\ell+1) \frac{j_\ell(k_0 r)}{k_0 r} - j_{\ell+1}(k_0 r) \right], \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{e}\varphi} = & -i e^{im\varphi} D_{\ell,m}^{\text{ext}} j_\ell(k_0 r) \left[ (\ell+1) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} P_\ell^m(\cos\theta) - \frac{\ell-m+1}{\sin\theta} P_{\ell+1}^m(\cos\theta) \right] \\ & + i e^{im\varphi} C_{\ell,m}^{\text{ext}} \frac{m}{\sin\theta} P_\ell(\cos\theta) \left[ (\ell+1) \frac{j_\ell(k_0 r)}{k_0 r} - j_{\ell+1}(k_0 r) \right], \end{aligned} \quad (2.62)$$

donde  $k_0 = \omega/c$ ,  $P_\ell^m$  son las funciones asociadas de Legendre, y los coeficientes escalares  $C_{\ell,m}^{\text{ext}}$  y  $D_{\ell,m}^{\text{ext}}$  están dados por

$$C_{\ell,m}^{\text{ext}} = i^\ell \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \psi_{\ell,m}^{\text{M,ext}}, \quad (2.63)$$

$$D_{\ell,m}^{\text{ext}} = i^\ell \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \psi_{\ell,m}^{\text{E,ext}}, \quad (2.64)$$

con  $\psi_{\ell,m}^{\text{E,ext}}$  y  $\psi_{\ell,m}^{\text{M,ext}}$  los coeficientes de la representación esférica de los potenciales auxiliares definidos en el [Apéndice A](#).

### 2.0.3. Campos electromagnéticos esparcidos por la nanopartícula

Como se muestra en el [Apéndice A](#), los campos electromagnéticos satisfacen la ecuación de Helmholtz sin fuentes,

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}, \quad (2.65)$$

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{0}}, \quad (2.66)$$

donde  $k^2 = (c^{-2})\omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)$ . La solución de las Ecs. (2.65) y (2.66) puede ser escrita como [8]

$$\vec{\mathbf{E}} = \nabla\psi^{\text{L}} + \vec{\mathbf{L}}\psi^{\text{M}} - \frac{i}{k}\nabla \times \vec{\mathbf{L}}\psi^{\text{E}}, \quad (2.67)$$

$$\vec{\mathbf{H}} = -\frac{i}{k}\nabla \times \vec{\mathbf{L}}\psi^{\text{M}} - \vec{\mathbf{L}}\psi^{\text{E}}, \quad (2.68)$$

donde  $\vec{\mathbf{L}} = -i\vec{\mathbf{r}} \times \nabla$  es el operador de momento angular orbital. Las funciones escalares  $\psi^{\text{L}}$ ,  $\psi^{\text{E}}$  y  $\psi^{\text{M}}$ , a su vez, satisfacen la ecuación escalar de Helmholtz. Como el campo eléctrico externo es un campo solenoidal ( $\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0$ ), la función escalar  $\psi^{\text{L}}$  debe ser nula. Las funciones escalares  $\psi^{\text{E}}$  y  $\psi^{\text{M}}$ , del campo externo y del campo esparcido respectivamente, pueden ser expandidas en una base esférica definida a partir del sistema de coordenadas de la Fig. 2.1, como [6]

$$\psi^{\text{E,ext}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell j_\ell(kr) Y_{\ell,m}(\Omega_r) \psi_{\ell,m}^{\text{E,ext}}, \quad (2.69)$$

$$\psi^{\text{E,ext}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell j_\ell(kr) Y_{\ell,m}(\Omega_r) \psi_{\ell,m}^{\text{E,ext}}, \quad (2.70)$$

$$\psi^{\text{E,scat}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell h_\ell^+(kr) Y_{\ell,m}(\Omega_r) \psi_{\ell,m}^{\text{E,scat}}, \quad (2.71)$$

$$\psi^{\text{E,scat}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell h_\ell^+(kr) Y_{\ell,m}(\Omega_r) \psi_{\ell,m}^{\text{E,scat}}. \quad (2.72)$$

Aplicando las condiciones de frontera de los campos electromagnéticos, para una partícula esférica, se pueden calcular los potenciales escalares electromagnéticos esparcidos por la NP, en función de los potenciales

escalares electromagnéticos externos, de la siguiente manera [6]

$$\psi_{\ell,m}^{\text{E,scat}} = t_{\ell}^{\text{E}} \psi_{\ell,m}^{\text{E,ext}}, \quad (2.73)$$

$$\psi_{\ell,m}^{\text{M,scat}} = t_{\ell}^{\text{M}} \psi_{\ell,m}^{\text{M,ext}}. \quad (2.74)$$

Donde los coeficientes  $t_{\ell}^{\text{E}}$  y  $t_{\ell}^{\text{M}}$ , para el caso de partículas esféricas homogéneas, corresponden a los coeficientes de la solución de Mie: [9]

$$t_{\ell}^{\text{E}} = \frac{-j_{\ell}(x_0) [x_i j_{\ell}(x_i)]' + \epsilon_i j_{\ell}(x_i) [x_0 j_{\ell}(x_0)]'}{h_{\ell}^{+}(x_0) [x_i j_{\ell}(x_i)]' - \epsilon_i j_{\ell}(x_i) [x_0 h_{\ell}^{+}(x_0)]'}, \quad (2.75)$$

$$t_{\ell}^{\text{M}} = \frac{x_i j_{\ell}(x_0) j_{\ell}'(x_i) + x_0 j_{\ell}'(x_0) j_{\ell}(x_i)}{x_i h_{\ell}^{+}(x_0) j_{\ell}'(x_i) - x_0 h_{\ell}^{+}(x_0) j_{\ell}(x_i)}, \quad (2.76)$$

donde  $x_0 = ka$  y  $x_i = ka\sqrt{\epsilon_i}$ , con  $a$  el radio de la NP y  $\epsilon_i$  la función dieléctrica de la NP. La prima en las Ecs. (2.75) y (2.76) denota la derivada de la función. Sustituyendo los potenciales escalares esparcidos [Ecs. (2.73) y (2.74)] en las Ecs. (2.67) y (2.68) se obtiene

#### Expansión multipolar del campo electromagnético esparcido por la NP

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}} = \sum_{\ell,m} \left( \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{sr}} \hat{\mathbf{r}} + \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{s}\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{s}\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \quad (2.77)$$

$$\vec{\mathbf{H}}_{\text{scat}} = \sum_{\ell,m} \left( \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{sr}} \hat{\mathbf{r}} + \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{s}\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{s}\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \quad (2.78)$$

donde

$$\mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{sr}} = e^{im\varphi} D_{\ell,m}^{\text{scat}} \ell(\ell+1) P_{\ell}^m(\cos\theta) \frac{h_{\ell}^{+}(k_0 r)}{k_0 r}, \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{s}\theta} = & -e^{im\varphi} C_{\ell,m}^{\text{scat}} \frac{m}{\sin\theta} h_{\ell}^{+}(k_0 r) P_{\ell}^m(\cos\theta) - e^{im\varphi} D_{\ell,m}^{\text{scat}} \left[ (\ell+1) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} P_{\ell}^m(\cos\theta) - \right. \\ & \left. \frac{(\ell-m+1)}{\sin\theta} P_{\ell+1}^m(\cos\theta) \right] \left[ (\ell+1) \frac{h_{\ell}^{+}(k_0 r)}{k_0 r} - h_{\ell+1}^{+}(k_0 r) \right], \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{s}\varphi} = & i e^{im\varphi} C_{\ell,m}^{\text{scat}} h_{\ell}^{+}(k_0 r) \left[ (\ell+1) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} P_{\ell}^m(\cos\theta) - \frac{\ell-m+1}{\sin\theta} P_{\ell+1}^m(\cos\theta) \right] \\ & + i e^{im\varphi} D_{\ell,m}^{\text{ext}} \frac{m}{\sin\theta} P_{\ell}^m(\cos\theta) \left[ (\ell+1) \frac{h_{\ell}^{+}(k_0 r)}{k_0 r} - h_{\ell+1}^{+}(k_0 r) \right], \end{aligned} \quad (2.81)$$

y

$$\mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{sr}} = e^{im\varphi} C_{\ell,m}^{\text{scat}} \ell(\ell+1) P_{\ell}^m(\cos\theta) \frac{h_{\ell}^{+}(k_0 r)}{k_0 r}, \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{st}} = e^{im\varphi} D_{\ell,m}^{\text{scat}} \frac{m}{\sin\theta} h_{\ell}^{+}(k_0 r) P_{\ell}^m(\cos\theta) - e^{im\varphi} C_{\ell,m}^{\text{scat}} \left[ (\ell+1) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} P_{\ell}^m(\cos\theta) - \right. \\ \left. \frac{(\ell-m+1)}{\sin\theta} P_{\ell+1}^m(\cos\theta) \right] \left[ (\ell+1) \frac{h_{\ell}^{+}(k_0 r)}{k_0 r} - h_{\ell+1}^{+}(k_0 r) \right], \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{sf}} = -i e^{im\varphi} D_{\ell,m}^{\text{scat}} h_{\ell}^{+}(k_0 r) \left[ (\ell+1) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} P_{\ell}^m(\cos\theta) - \frac{\ell-m+1}{\sin\theta} P_{\ell+1}^m(\cos\theta) \right] \\ + i e^{im\varphi} C_{\ell,m}^{\text{scat}} \frac{m}{\sin\theta} P_{\ell}^m(\cos\theta) \left[ (\ell+1) \frac{h_{\ell}^{+}(k_0 r)}{k_0 r} - h_{\ell+1}^{+}(k_0 r) \right], \end{aligned} \quad (2.84)$$

donde los coeficientes escalares  $C_{\ell,m}^{\text{scat}}$  y  $D_{\ell,m}^{\text{scat}}$  están dados por

$$C_{\ell,m}^{\text{scat}} = i^{\ell} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} t_{\ell}^{\text{M}} \psi_{\ell,m}^{\text{M,ext}}, \quad (2.85)$$

$$D_{\ell,m}^{\text{scat}} = i^{\ell} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} t_{\ell}^{\text{E}} \psi_{\ell,m}^{\text{E,ext}}. \quad (2.86)$$

Una vez calculados el campo electromagnético total, es posible construir el tensor  $\vec{\mathcal{T}}$ , dado por la Ec. (2.23), y poder calcular la densidad espectral de transferencia de momento angular, dada por la Ec. (2.24):

$$\mathcal{L}_i(\omega) = \frac{1}{\pi} \oint_S \epsilon_i^{lj} r_l \mathcal{T}_{jk}(\vec{\mathbf{r}}, \omega) n^k dS.$$



## Resultados y discusión

Desarrollando las Ecs. (2.29), (2.30) y (2.31) se obtiene

$$\mathcal{L}_x = \frac{R^3}{\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta [\sin \varphi \mathcal{T}_{\theta r} + \cos \theta \cos \varphi \mathcal{T}_{\varphi r}] d\varphi d\theta, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{L}_y = \frac{R^3}{\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta [\cos \varphi \mathcal{T}_{\theta r} - \cos \theta \sin \varphi \mathcal{T}_{\varphi r}] d\varphi d\theta, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L}_z = \frac{R^3}{\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \mathcal{T}_{\varphi r} d\varphi d\theta, \quad (3.3)$$

donde

$$\mathcal{T}_{\theta r} = \text{Re} \left[ \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} E_\theta(\vec{\mathbf{r}}, \omega) E_r^*(\vec{\mathbf{r}}, \omega) + \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)} H_\theta(\vec{\mathbf{r}}, \omega) H_r^*(\vec{\mathbf{r}}, \omega) \right], \quad (3.4)$$

$$\mathcal{T}_{\varphi r} = \text{Re} \left[ \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} E_\varphi(\vec{\mathbf{r}}, \omega) E_r^*(\vec{\mathbf{r}}, \omega) + \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)} H_\varphi(\vec{\mathbf{r}}, \omega) H_r^*(\vec{\mathbf{r}}, \omega) \right]. \quad (3.5)$$

Se puede realizar la separación  $E_i = E_i^e + E_i^s$  y  $H_i = H_i^e + H_i^s$ , para desarrollar los términos  $E_\alpha(\vec{\mathbf{r}}, \omega) E_r^*(\vec{\mathbf{r}}, \omega)$  y  $H_\alpha(\vec{\mathbf{r}}, \omega) H_r^*(\vec{\mathbf{r}}, \omega)$  en función de las sumas multipolar expresada en la Ecs. (2.55) y (2.77) de la siguiente manera

$$E_\alpha^a(\vec{\mathbf{r}}, \omega) E_r^{b*}(\vec{\mathbf{r}}, \omega) = \sum_{\ell, m} \sum_{\ell', m'} \mathcal{E}_{\ell, m}^{a\alpha} \mathcal{E}_{\ell', m'}^{br*}, \quad (3.6)$$

$$H_\alpha^a(\vec{\mathbf{r}}, \omega) H_r^{b*}(\vec{\mathbf{r}}, \omega) = \sum_{\ell, m} \sum_{\ell', m'} \mathcal{H}_{\ell, m}^{a\alpha} \mathcal{H}_{\ell', m'}^{br*}, \quad (3.7)$$

donde  $a$  y  $b$  pueden tomar los valores de  $s$  (denotando componentes de campo esparcido) o de  $e$  (componentes de campo externo), y donde  $\alpha$  puede denotar la proyección en  $\hat{\theta}$  o en  $\hat{\varphi}$ .

Se procederá a desarrollar cada una de las componentes eléctricas  $\mathcal{E}_{\ell, m}^{a\alpha} \mathcal{E}_{\ell', m'}^{br*}$ , representadas por la Ec. (3.6), así como sus análogas para el campo  $\vec{\mathbf{H}}$  representadas por la Ec. (3.7). Posteriormente se integrarán cada una de las expresiones obtenidas de manera analítica, para obtener una expresión exacta para la contribución espectral de la transferencia de momento angular de cada multipolo, mediante las Ecs. (3.1),

(3.2) y (3.3).

El término  $\mathcal{E}_{\ell,m}^{a\theta} \mathcal{E}_{\ell',m'}^{\text{br}*}$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\ell,m}^{a\theta} \mathcal{E}_{\ell',m'}^{\text{br}*} = & \left\{ -C_{\ell,m}^a D_{\ell',m'}^{\text{b}*} \frac{Z_\ell^a Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 r} m \frac{P_\ell^m P_{\ell'}^{m'}}{\sin \theta} - D_{\ell,m}^a D_{\ell',m'}^{\text{b}*} \frac{f_\ell^a Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 r} \right. \\ & \times \left[ (\ell+1) \frac{P_\ell^m P_{\ell'}^{m'} \cos \theta}{\sin \theta} - (\ell-m+1) \frac{P_{\ell+1}^m P_{\ell'}^{m'}}{\sin \theta} \right] \Big\} \ell'(\ell'+1) e^{i(m-m')\varphi}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde  $Z_\ell^s = h_\ell^+(k_0 r)$  para el campo esparcido, y  $Z_\ell^e = j_\ell(k_0 r)$  para el campo externo, y se ha definido:

$$f_\ell^a = (\ell+1) \frac{Z_\ell^a}{k_0 r} - Z_{\ell+1}^a. \quad (3.9)$$

El término  $\mathcal{H}_{\ell,m}^{a\theta} \mathcal{H}_{\ell',m'}^{\text{br}*}$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\ell,m}^{a\theta} \mathcal{H}_{\ell',m'}^{\text{br}*} = & \left\{ D_{\ell,m}^a C_{\ell',m'}^{\text{b}*} \frac{Z_\ell^a Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 r} m \frac{P_\ell^m P_{\ell'}^{m'}}{\sin \theta} - C_{\ell,m}^a C_{\ell',m'}^{\text{b}*} \frac{f_\ell^a Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 r} \right. \\ & \times \left[ (\ell+1) \frac{P_\ell^m P_{\ell'}^{m'} \cos \theta}{\sin \theta} - (\ell-m+1) \frac{P_{\ell+1}^m P_{\ell'}^{m'}}{\sin \theta} \right] \Big\} \ell'(\ell'+1) e^{i(m-m')\varphi}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

Análogamente, el término  $\mathcal{E}_{\ell,m}^{a\varphi} \mathcal{E}_{\ell',m'}^{\text{br}*}$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\ell,m}^{a\varphi} \mathcal{E}_{\ell',m'}^{\text{br}*} = & \left\{ C_{\ell,m}^a D_{\ell',m'}^{\text{b}*} \frac{Z_\ell^a Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 r} \left[ (\ell+1) \frac{P_\ell^m P_{\ell'}^{m'} \cos \theta}{\sin \theta} - (\ell-m+1) \frac{P_{\ell+1}^m P_{\ell'}^{m'}}{\sin \theta} \right] \right. \\ & \left. + D_{\ell,m}^a D_{\ell',m'}^{\text{b}*} m \frac{f_\ell^a Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 r} \frac{P_\ell^m P_{\ell'}^{m'}}{\sin \theta} \right\} i \ell'(\ell'+1) e^{i(m-m')\varphi}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

y finalmente el término  $\mathcal{H}_{\ell,m}^{a\varphi} \mathcal{H}_{\ell',m'}^{\text{br}*}$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\ell,m}^{a\varphi} \mathcal{H}_{\ell',m'}^{\text{br}*} = & \left\{ -D_{\ell,m}^a C_{\ell',m'}^{\text{b}*} \frac{Z_\ell^a Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 r} \left[ (\ell+1) \frac{P_\ell^m P_{\ell'}^{m'} \cos \theta}{\sin \theta} - (\ell-m+1) \frac{P_{\ell+1}^m P_{\ell'}^{m'}}{\sin \theta} \right] \right. \\ & \left. + C_{\ell,m}^a C_{\ell',m'}^{\text{b}*} m \frac{f_\ell^a Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 r} \frac{P_\ell^m P_{\ell'}^{m'}}{\sin \theta} \right\} i \ell'(\ell'+1) e^{i(m-m')\varphi}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

Es útil calcular primero la integral en  $\varphi$ , teniendo en cuenta que

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} \cos \varphi d\varphi = \pi (\delta_{m+1,m'} + \delta_{m-1,m'}), \quad (3.13)$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} \sin \varphi d\varphi = i\pi (\delta_{m-1,m'} - \delta_{m+1,m'}), \quad (3.14)$$

y para calcular la integral en  $\theta$  se definen las siguientes cantidades

$$IM_{\ell,\ell'}^{m,m'} = \int_{-1}^1 P_{\ell}^m(x) P_{\ell'}^{m'}(x) x dx, \quad (3.15)$$

$$IU_{\ell,\ell'}^{m,m'} = \int_{-1}^1 P_{\ell}^m(x) P_{\ell'}^{m'}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (3.16)$$

$$IV_{\ell,\ell'}^{m,m'} = \int_{-1}^1 P_{\ell}^m(x) P_{\ell'}^{m'}(x) \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (3.17)$$

$$IW_{\ell,\ell'}^{m,m'} = \int_{-1}^1 P_{\ell}^m(x) P_{\ell'}^{m'}(x) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (3.18)$$

que pueden ser calculadas mediante cuadraturas Gaussianas [10], que dan resultados exactos al ser utilizadas para integrar polinomios<sup>1</sup>. Se debe tomar en cuenta la relación de ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre [7]

$$\int_{-1}^1 P_{\ell}^m(x) P_{\ell'}^m(x) dx = \Delta_{\ell\ell'} \quad \text{con} \quad \Delta_{\ell\ell'} = \frac{2(\ell+m)!}{(2\ell+1)(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}. \quad (3.19)$$

Con esto en mente se puede proceder a calcular las siguientes integrales

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} \mathcal{E}_{\ell,m}^{a\theta} \mathcal{E}_{\ell',m'}^{br*} \sin \varphi d\Omega &= i\pi (\delta_{m-1,m'} - \delta_{m+1,m'}) \left\{ -C_{\ell,m}^a D_{\ell',m'}^{b*} \frac{Z_{\ell}^a Z_{\ell'}^{b*}}{k_0 R} m IU_{\ell,\ell'}^{m,m'} - D_{\ell,m}^a D_{\ell',m'}^{b*} \frac{f_{\ell}^a Z_{\ell'}^{b*}}{k_0 R} \right. \\ &\quad \times \left. \left[ (\ell+1) IW_{\ell,\ell'}^{m,m'} - (l-m+1) IU_{\ell+1,\ell'}^{m,m'} \right] \right\} \ell'(\ell'+1), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} \mathcal{H}_{\ell,m}^{a\theta} \mathcal{H}_{\ell',m'}^{br*} \sin \varphi d\Omega &= i\pi (\delta_{m-1,m'} - \delta_{m+1,m'}) \left\{ D_{\ell,m}^a C_{\ell',m'}^{b*} \frac{Z_{\ell}^a Z_{\ell'}^{b*}}{k_0 R} m IU_{\ell,\ell'}^{m,m'} - C_{\ell,m}^a C_{\ell',m'}^{b*} \frac{f_{\ell}^a Z_{\ell'}^{b*}}{k_0 R} \right. \\ &\quad \times \left. \left[ (\ell+1) IW_{\ell,\ell'}^{m,m'} - (l-m+1) IU_{\ell+1,\ell'}^{m,m'} \right] \right\} \ell'(\ell'+1), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} \mathcal{E}_{\ell,m}^{a\theta} \mathcal{E}_{\ell',m'}^{br*} \cos \varphi d\Omega &= \pi (\delta_{m-1,m'} + \delta_{m+1,m'}) \left\{ -C_{\ell,m}^a D_{\ell',m'}^{b*} \frac{Z_{\ell}^a Z_{\ell'}^{b*}}{k_0 R} m IU_{\ell,\ell'}^{m,m'} - D_{\ell,m}^a D_{\ell',m'}^{b*} \frac{f_{\ell}^a Z_{\ell'}^{b*}}{k_0 R} \right. \\ &\quad \times \left. \left[ (\ell+1) IW_{\ell,\ell'}^{m,m'} - (l-m+1) IU_{\ell+1,\ell'}^{m,m'} \right] \right\} \ell'(\ell'+1), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} \mathcal{H}_{\ell,m}^{a\theta} \mathcal{H}_{\ell',m'}^{br*} \cos \varphi d\Omega &= \pi (\delta_{m-1,m'} + \delta_{m+1,m'}) \left\{ D_{\ell,m}^a C_{\ell',m'}^{b*} \frac{Z_{\ell}^a Z_{\ell'}^{b*}}{k_0 R} m IU_{\ell,\ell'}^{m,m'} - C_{\ell,m}^a C_{\ell',m'}^{b*} \frac{f_{\ell}^a Z_{\ell'}^{b*}}{k_0 R} \right. \\ &\quad \times \left. \left[ (\ell+1) IW_{\ell,\ell'}^{m,m'} - (l-m+1) IU_{\ell+1,\ell'}^{m,m'} \right] \right\} \ell'(\ell'+1), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} \mathcal{E}_{\ell,m}^{a\varphi} \mathcal{E}_{\ell',m'}^{br*} \cos \theta \sin \varphi d\Omega &= -\pi (\delta_{m-1,m'} - \delta_{m+1,m'}) \left\{ C_{\ell,m}^a D_{\ell',m'}^{b*} \frac{Z_{\ell}^a Z_{\ell'}^{b*}}{k_0 R} \left[ (\ell+1) IV_{\ell,\ell'}^{m,m'} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\ell-m+1) IW_{\ell+1,\ell'}^{m,m'} \right] + D_{\ell,m}^a D_{\ell',m'}^{b*} m \frac{f_{\ell}^a Z_{\ell'}^{b*}}{k_0 R} IW_{\ell,\ell'}^{m,m'} \right\} \ell'(\ell'+1), \end{aligned} \quad (3.24)$$

<sup>1</sup>Debe tenerse en cuenta que solo las funciones asociadas de Legendre  $P_{\ell}^m$  de orden  $m$  par son polinomios, por lo que solo las integrales pares en  $m$  se calcularán de forma exacta.

$$\int_0^{4\pi} \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{a}\varphi} \mathcal{H}_{\ell',m'}^{\text{br}*} \cos \theta \sin \varphi d\Omega = -\pi (\delta_{m-1,m'} - \delta_{m+1,m'}) \left\{ -D_{\ell,m}^{\text{a}} C_{\ell',m'}^{\text{b}*} \frac{Z_{\ell}^{\text{a}} Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 R} \left[ (\ell+1) IV_{\ell,\ell'}^{m,m'} - (\ell-m+1) IW_{\ell+1,\ell'}^{m,m'} \right] + C_{\ell,m}^{\text{a}} C_{\ell',m'}^{\text{b}*} m \frac{f_{\ell}^{\text{a}} Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 R} IW_{\ell,\ell'}^{m,m'} \right\} \ell'(\ell'+1), \quad (3.25)$$

$$\int_0^{4\pi} \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{a}\varphi} \mathcal{E}_{\ell',m'}^{\text{br}*} \cos \theta \cos \varphi d\Omega = i\pi (\delta_{m-1,m'} + \delta_{m+1,m'}) \left\{ C_{\ell,m}^{\text{a}} D_{\ell',m'}^{\text{b}*} \frac{Z_{\ell}^{\text{a}} Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 R} \left[ (\ell+1) IV_{\ell,\ell'}^{m,m'} - (\ell-m+1) IW_{\ell+1,\ell'}^{m,m'} \right] + D_{\ell,m}^{\text{a}} D_{\ell',m'}^{\text{b}*} m \frac{f_{\ell}^{\text{a}} Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 R} IW_{\ell,\ell'}^{m,m'} \ell'(\ell'+1) \right\}, \quad (3.26)$$

$$\int_0^{4\pi} \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{a}\varphi} \mathcal{H}_{\ell',m'}^{\text{br}*} \cos \theta \cos \varphi d\Omega = i\pi (\delta_{m-1,m'} + \delta_{m+1,m'}) \left\{ -D_{\ell,m}^{\text{a}} C_{\ell',m'}^{\text{b}*} \frac{Z_{\ell}^{\text{a}} Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 R} \left[ (\ell+1) IV_{\ell,\ell'}^{m,m'} - (\ell-m+1) IW_{\ell+1,\ell'}^{m,m'} \right] + C_{\ell,m}^{\text{a}} C_{\ell',m'}^{\text{b}*} m \frac{f_{\ell}^{\text{a}} Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 R} IW_{\ell,\ell'}^{m,m'} \ell'(\ell'+1) \right\}, \quad (3.27)$$

$$\int_0^{4\pi} \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{a}\varphi} \mathcal{E}_{\ell',m'}^{\text{br}*} \sin \theta d\Omega = i2\pi \delta_{mm'} \left\{ C_{\ell,m}^{\text{a}} D_{\ell',m'}^{\text{b}*} \frac{Z_{\ell}^{\text{a}} Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 R} \left[ (\ell+1) IM_{\ell,\ell'}^{m,m'} - (\ell-m+1) \Delta_{\ell+1,\ell'} \right] + D_{\ell,m}^{\text{a}} D_{\ell',m'}^{\text{b}*} m \frac{f_{\ell}^{\text{a}} Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 R} \Delta_{\ell\ell'} \right\} \ell'(\ell'+1), \quad (3.28)$$

$$\int_0^{4\pi} \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{a}\varphi} \mathcal{H}_{\ell',m'}^{\text{br}*} \sin \theta d\Omega = i2\pi \delta_{mm'} \left\{ -D_{\ell,m}^{\text{a}} C_{\ell',m'}^{\text{b}*} \frac{Z_{\ell}^{\text{a}} Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 R} \left[ (\ell+1) IM_{\ell,\ell'}^{m,m'} - (\ell-m+1) \Delta_{\ell+1,\ell'} \right] + C_{\ell,m}^{\text{a}} C_{\ell',m'}^{\text{b}*} m \frac{f_{\ell}^{\text{a}} Z_{\ell'}^{\text{b}*}}{k_0 R} \Delta_{\ell\ell'} \right\} \ell'(\ell'+1), \quad (3.29)$$

y definiendo las siguientes cantidades

$$IS_{\ell m \ell' m'}^{\text{a}\theta \text{br}} = \frac{R^3}{\pi} \int_0^{4\pi} \left( \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{a}\theta} \mathcal{E}_{\ell',m'}^{\text{br}*} + \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)} \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{a}\theta} \mathcal{H}_{\ell',m'}^{\text{br}*} \right) \sin \varphi d\Omega, \quad (3.30)$$

$$IC_{\ell m \ell' m'}^{\text{a}\theta \text{br}} = \frac{R^3}{\pi} \int_0^{4\pi} \left( \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{a}\theta} \mathcal{E}_{\ell',m'}^{\text{br}*} + \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)} \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{a}\theta} \mathcal{H}_{\ell',m'}^{\text{br}*} \right) \cos \varphi d\Omega, \quad (3.31)$$

$$ICS_{\ell m \ell' m'}^{\text{a}\varphi \text{br}} = \frac{R^3}{\pi} \int_0^{4\pi} \left( \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{a}\varphi} \mathcal{E}_{\ell',m'}^{\text{br}*} + \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)} \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{a}\varphi} \mathcal{H}_{\ell',m'}^{\text{br}*} \right) \cos \theta \sin \varphi d\Omega, \quad (3.32)$$

$$ICC_{\ell m \ell' m'}^{\text{a}\varphi \text{br}} = \frac{R^3}{\pi} \int_0^{4\pi} \left( \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{a}\varphi} \mathcal{E}_{\ell',m'}^{\text{br}*} + \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)} \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{a}\varphi} \mathcal{H}_{\ell',m'}^{\text{br}*} \right) \cos \theta \cos \varphi d\Omega, \quad (3.33)$$

$$IS_{\ell m \ell' m'}^{\text{a}\varphi \text{br}} = \frac{R^3}{\pi} \int_0^{4\pi} \left( \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)} \mathcal{E}_{\ell,m}^{\text{a}\varphi} \mathcal{E}_{\ell',m'}^{\text{br}*} + \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)} \mathcal{H}_{\ell,m}^{\text{a}\varphi} \mathcal{H}_{\ell',m'}^{\text{br}*} \right) \sin \theta d\Omega, \quad (3.34)$$

se pueden reescribir las Ecs. (3.1), (3.2) y (3.3) como

$$\mathcal{L}_x = \sum_{\ell,m} \sum_{\ell',m'} \left( IS_{\ell m \ell' m'}^{\text{a}\theta \text{br}} + ICC_{\ell m \ell' m'}^{\text{a}\varphi \text{br}} \right), \quad (3.35)$$

$$\mathcal{L}_y = \sum_{\ell,m} \sum_{\ell',m'} \left( IC_{\ell m \ell' m'}^{\text{a}\theta\text{br}} - IC_{\ell m \ell' m'}^{\text{a}\varphi\text{br}} \right), \quad (3.36)$$

$$\mathcal{L}_z = \sum_{\ell,m} \sum_{\ell',m'} IS_{\ell m \ell' m'}^{\text{a}\varphi\text{br}}. \quad (3.37)$$



---

## Conclusiones y perspectivas

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie

ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.



---

## Apéndice A

### Método del potencial escalar

---

Para construir la solución buscada se define ahora la transformada de Fourier espaciotemporal como

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{q}}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\text{T.E.}} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, t) e^{-i(\vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)} d^3r dt, \\ \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\text{T.E.R.}} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{q}}, \omega) e^{i(\vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)} d^3q d\omega,\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde T.E. significa integrar sobre todo el espacio y T.E.R. significa integrar sobre todo el espacio recíproco.

Si ahora calculamos solo la Transformada de Fourier temporal de las Ecuaciones de Maxwell, Ecs. (2.2), se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} &= (4\pi\epsilon_0) \frac{\rho_{\text{tot}}}{\epsilon_0}, & \nabla \times \vec{\mathbf{E}} &= i\omega \left(\frac{1}{c}\right) \vec{\mathbf{B}}, \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} &= 0, & \nabla \times \vec{\mathbf{B}} &= \left(\frac{4\pi}{\mu_0 c}\right) \mu_0 \vec{\mathbf{J}}_{\text{tot}} - i\omega \frac{(c)}{c^2} \vec{\mathbf{E}},\end{aligned}\tag{A.2}$$

al desacoplarlas, aplicando las relaciones constitutivas  $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon(\omega)\vec{\mathbf{E}}$  y  $\vec{\mathbf{B}} = \mu(\omega)\vec{\mathbf{H}}$ , y sin considerar las fuentes se obtiene

$$\begin{aligned}(\nabla^2 + k^2)\vec{\mathbf{E}} &= 0, \\ (\nabla^2 + k^2)\vec{\mathbf{H}} &= 0.\end{aligned}$$

en donde  $k^2 = (c^{-2})\omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)$ .

El campo eléctrico  $\vec{\mathbf{E}}$  puede ser descrito de la siguiente manera [8]

$$\vec{\mathbf{E}} = \nabla \frac{1}{\nabla^2} (\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}) + \vec{\mathbf{L}} \frac{1}{L^2} (\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{E}}) - (\vec{\mathbf{L}} \times \nabla) \frac{1}{L^2 \nabla^2} [(\vec{\mathbf{L}} \times \nabla) \cdot \vec{\mathbf{E}}],\tag{A.3}$$

en donde  $\vec{\mathbf{L}} = -i\vec{\mathbf{r}} \times \nabla$  es el operador de momento angular orbital. A partir de la Ec. (A.3) se pueden definir las funciones escalares: longitudinal, eléctrica y magnética: [8]

$$\psi^L = \frac{1}{\nabla^2} \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}, \quad (\text{A.4})$$

$$\psi^E = \frac{-ik}{L^2 \Delta^2} (\vec{\mathbf{L}} \times \nabla) \cdot \vec{\mathbf{E}}, \quad (\text{A.5})$$

$$\psi^M = \frac{1}{L^2} \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{E}}, \quad (\text{A.6})$$

en donde cada uno satisface la ecuación escalar de Helmholtz sin fuentes:

$$(\nabla^2 + k^2) \psi^{\{L,E,M\}} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Por tanto, los campos electromagnéticos se pueden escribir a partir de los potenciales escalares como<sup>2</sup>

$$\vec{\mathbf{E}} = \nabla \psi^L + \vec{\mathbf{L}} \psi^M - \frac{i}{k} \nabla \times \vec{\mathbf{L}} \psi^E, \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{(c)}{c} \left( -\frac{i}{k} \nabla \times \vec{\mathbf{L}} \psi^M - \vec{\mathbf{L}} \psi^E \right). \quad (\text{A.9})$$

En el problema de interés para este trabajo se considera al electrón viajando en vacío y a velocidad constante, por lo que los modos longitudinales no contribuyen ( $\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0$ ), es decir,  $\psi^L = 0$ . Las funciones escalares restantes se pueden expresar en términos de una base esférica de la siguiente manera [6]

$$\psi^{E,\text{ext}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (i)^\ell j_\ell(kr) Y_{\ell,m}(\Omega_r) \psi_{\ell,m}^{E,\text{ext}}, \quad (\text{A.10})$$

$$\psi^{M,\text{ext}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (i)^\ell j_\ell(kr) Y_{\ell,m}(\Omega_r) \psi_{\ell,m}^{M,\text{ext}}, \quad (\text{A.11})$$

donde  $j_\ell(x)$  son las funciones esféricas de Bessel de orden  $\ell$ ,  $Y_{\ell,m}$  son los armónicos esféricos escalares,  $(r, \Omega_r)$  son las coordenadas esféricas del vector  $\vec{\mathbf{r}}$ , y  $\psi_{\ell,m}^{E,\text{ext}}$  y  $\psi_{\ell,m}^{M,\text{ext}}$  son funciones escalares a determinar. Las Ecs. (A.10) y (A.11) son válidas en la región  $a < r < b$ , donde  $a$  es el radio de la NP y  $b$  es el parámetro de impacto del electrón medido desde el centro de la NP.

Aplicando ahora la transformada de Fourier a las Ecs. (2.3) y (2.4) se obtiene

$$\left( -q^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \phi(\vec{\mathbf{q}}, \omega) = - (4\pi\epsilon_0) \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{tot}}(\vec{\mathbf{q}}, \omega), \quad (\text{A.12})$$

$$\left( -q^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{q}}, \omega) = - \left( \frac{4\pi}{\mu_0 c} \right) \mu_0 \vec{\mathbf{J}}_{\text{tot}}(\vec{\mathbf{q}}, \omega), \quad (\text{A.13})$$

<sup>2</sup>En el trabajo original de García de Abajo, se hace la suposición de que los campos electromagnéticos están en el vacío; i.e.  $k = \omega/c$ .

y usando el hecho de que  $\vec{\mathbf{J}} = \rho \vec{\mathbf{v}}$  y  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$  se obtiene

$$\phi(\vec{\mathbf{q}}, \omega) = (4\pi\epsilon_0) \frac{1}{q^2 - \omega^2/c^2} \frac{\rho_{\text{tot}}(\vec{\mathbf{q}}, \omega)}{\epsilon_0}, \quad (\text{A.14})$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{q}}, \omega) = \left( \frac{4\pi}{\mu_0 c} \right) \frac{\mu_0}{q^2 - \omega^2/c^2} \vec{\mathbf{J}}_{\text{tot}}(\vec{\mathbf{q}}, \omega) = (c) \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c^2} \phi(\vec{\mathbf{q}}, \omega). \quad (\text{A.15})$$

Ahora, calculando la transformada de Fourier de la Ec. (2.5) se obtiene

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{q}}, \omega) = -i\vec{\mathbf{k}}\phi(\vec{\mathbf{q}}, \omega) + \left( \frac{1}{c} \right) i\omega \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{q}}, \omega). \quad (\text{A.16})$$

Sustituyendo la Ec. (A.15) en la Ec. (A.16) se obtiene

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{q}}, \omega) = i \left( -\vec{\mathbf{q}} + \frac{\omega}{c^2} \vec{\mathbf{v}} \right) \phi(\vec{\mathbf{q}}, \omega), \quad (\text{A.17})$$

y calculando la Transformada Inversa de Fourier en el espacio de la expresión anterior, se obtiene

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, \omega) = \left( -\nabla + i \frac{\omega}{c^2} \vec{\mathbf{v}} \right) \phi(\vec{\mathbf{r}}, \omega). \quad (\text{A.18})$$

Realizando el proceso análogo para calcular el campo magnético  $\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, \omega)$  se obtiene

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{q}}, \omega) = i\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{q}}, \omega) = (c) i\vec{\mathbf{k}} \times \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c^2} \phi(\vec{\mathbf{q}}, \omega), \quad (\text{A.19})$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, \omega) = (c) \nabla \phi(\vec{\mathbf{r}}, \omega) \times \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c^2}. \quad (\text{A.20})$$

Considerando la densidad de carga del electrón en movimiento es  $\rho_{\text{tot}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -e\delta(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_t)$ , donde  $\vec{\mathbf{r}}_t = (b, 0, vt)$  es el vector posición del electrón, y calculando la transformada de Fourier de la Ec. (2.3) se obtiene la Ec. de Helmholtz

$$\nabla^2 \phi(\vec{\mathbf{r}}, \omega) + k^2 \phi(\vec{\mathbf{r}}, \omega) = -(4\pi\epsilon_0) \frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \delta(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_t) dt, \quad (\text{A.21})$$

donde  $k = \omega/c$  es el número de onda en el vacío y la solución para  $\phi(\vec{\mathbf{r}}, \omega)$  se escribe como [5, 6, 11]

$$\phi(\vec{\mathbf{r}}, \omega) = -e \int_{\text{T.E.}} G_0(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}') \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \delta(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_t) dt d^3r', \quad (\text{A.22})$$

$$= -e \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \int_{\text{T.E.}} G_0(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}') \delta(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_t) d^3r' dt, \quad (\text{A.23})$$

$$= -e \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} G_0(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_t) dt, \quad (\text{A.24})$$

con

$$G_0(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_t) = \frac{(4\pi\epsilon_0) e^{ik|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_t|}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_t|}, \quad (\text{A.25})$$

la función de Green de la ecuación de Helmholtz. De esta forma, el campo eléctrico del electrón se puede escribir como

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}(\vec{\mathbf{r}}, \omega) = e \left( \nabla - i \frac{k\vec{\mathbf{v}}}{c} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} G_0(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_t) dt. \quad (\text{A.26})$$

Al reescribir la función de Green en una base esférica se obtiene [6]

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}_t) = \frac{(4\pi\epsilon_0)}{\epsilon_0} k \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} j_{\ell}(k r) h_{\ell}^{(+)}(k r_t) Y_{\ell,m}(\Omega_r) Y_{\ell,m}^*(\Omega_{r_t}), \quad (\text{A.27})$$

donde  $h_{\ell}^{(+)}(x) = i h_{\ell}^{(1)}(x)$  es la función esférica de Hankel de orden  $\ell$  [7]. Sustituyendo la Ec. (A.27) en la Ec. (A.26) se obtiene

$$\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}, \omega) = e \left( \nabla - i \frac{k \vec{v}}{c} \right) \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} j_{\ell}(k r) Y_{\ell,m}(\Omega_r) \phi_{\ell,m}, \quad (\text{A.28})$$

donde

$$\phi_{\ell,m} = \frac{(4\pi\epsilon_0)}{\epsilon_0} k \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} h_{\ell}^{+}(k r_t) Y_{\ell,m}^*(\Omega_{r_t}) dt. \quad (\text{A.29})$$

Para calcular las constantes  $\phi_{\ell,m}$  de la Ec. (A.29) se calcula la transformada de Fourier de la función de Green en el espacio de frecuencias [5]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_t|}}{|\vec{r}-\vec{r}_t|} dt = \frac{2}{v} K_0 \left( \frac{|\omega|R}{v\gamma} \right) e^{i\omega z/v}, \quad (\text{A.30})$$

donde  $R = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$ ,  $v$  la rapidez de electrón y  $K_0$  la función Bessel modificada del segundo tipo de orden cero. A partir de las Ecs. (A.26), (A.28) y (A.30) se puede obtener la ecuación

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} j_{\ell}(k r) Y_{\ell,m}(\Omega_r) \phi_{\ell,m} = \frac{(4\pi\epsilon_0)}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{v} K_0 \left( \frac{|\omega|R}{v\gamma} \right) e^{i\omega z/v}, \quad (\text{A.31})$$

y al usar la ortonormalidad de los armónicos esféricos se obtiene

$$\phi_{\ell,m} = \frac{(4\pi\epsilon_0)}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{v j_{\ell}(k r)} \int_0^{4\pi} Y_{\ell,m}^*(\Omega_r) K_0 \left( \frac{|\omega|R}{v\gamma} \right) e^{i\omega z/v} d\Omega_r. \quad (\text{A.32})$$

Al realizar la integral de la Ec. (A.32) se obtiene [6]

$$\phi_{\ell,m} = \frac{(4\pi\epsilon_0)}{\epsilon_0} k \frac{A_{\ell,m}^+}{\omega} K_m \left( \frac{\omega b}{v\gamma} \right), \quad (\text{A.33})$$

donde  $K_m$  es la función Bessel modificada del segundo tipo de orden  $m$ , y los coeficientes  $A_{\ell,m}^+$  están dados por

$$A_{\ell,m}^+ = \frac{1}{\beta^{\ell+1}} \sum_{j=m}^{\ell} \frac{i^{\ell-j} (2\ell+1)!! \alpha_{\ell,m}}{\gamma^j 2^j (l-j)! [(j-m)/2]! [(j+m)/2]!} I_{j,\ell-j}^{\ell,m}, \quad (\text{A.34})$$

con

$$\alpha_{\ell,m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (\text{A.35})$$

Los números  $I_{j,\ell-j}^{\ell,m}$  se calculan mediante la siguiente relación de recurrencia

$$(\ell - m)I_{i_1,i_2}^{\ell,m} = (2\ell - 1)I_{i_1,i_2+1}^{\ell-1,m} - (\ell + m - 1)I_{i_1,i_2}^{\ell-2,m}, \quad (\text{A.36})$$

con los valores iniciales  $I_{i_1,i_2}^{m-1,m} = 0$ ,  $I_{i_1,i_2}^{m-2,m} = 0$  y

$$I_{i_1,i_2}^{m,m} = \begin{cases} (-1)^m (2m-1)!! B\left(\frac{i_1+m+2}{2}, \frac{i_2+1}{2}\right), & \text{si } i_2 \text{ es par} \\ 0, & \text{si } i_2 \text{ es impar} \end{cases}, \quad (\text{A.37})$$

y donde  $B(x,y)$  es la función beta [7].

A partir de las Ecs. (A.10), (A.11), (A.28) y (A.33), se obtiene

$$\psi_{\ell,m}^{\text{E,ext}} = (4\pi\epsilon_0) \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2\pi(i)^{\ell-1}k}{c\gamma} \frac{B_{\ell,m}}{\ell(\ell+1)} K_m\left(\frac{\omega b}{v\gamma}\right), \quad (\text{A.38})$$

$$\psi_{\ell,m}^{\text{M,ext}} = (4\pi\epsilon_0) \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{-4\pi(i)^{\ell-1}kv}{c^2} \frac{B_{\ell,m}}{\ell(\ell+1)} K_m\left(\frac{\omega b}{v\gamma}\right), \quad (\text{A.39})$$

con

$$B_{\ell,m} = A_{\ell,m+1}^+ \sqrt{(\ell+m+1)(\ell-m)} - A_{\ell,m-1}^+ \sqrt{(\ell-m+1)(\ell+m)}. \quad (\text{A.40})$$

Finalmente, se pueden escribir los campos electromagnéticos externos como

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} = \sum_{\ell,m} \left( \mathcal{E}_{\ell,m}^{er} \hat{r} + \mathcal{E}_{\ell,m}^{e\theta} \hat{\theta} + \mathcal{E}_{\ell,m}^{e\varphi} \hat{\varphi} \right), \quad (\text{A.41})$$

$$\vec{\mathbf{H}}_{\text{ext}} = \sum_{\ell,m} \left( \mathcal{H}_{\ell,m}^{er} \hat{r} + \mathcal{H}_{\ell,m}^{e\theta} \hat{\theta} + \mathcal{H}_{\ell,m}^{e\varphi} \hat{\varphi} \right), \quad (\text{A.42})$$

en donde las componentes de los campos externos están mostradas en las Ecs. ... del texto principal.



---

## Referencias

---

- [1] F. J. G. de Abajo y V. D. Giulio. **Optical Excitations with Electron Beams: Challenges and Opportunities**. *ACS Photonics*, 8(4):945–974, 2021. [citado en la pág. 13.]
- [2] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2007. [citado en las págs. 13, 14 y 20.]
- [3] A. Reyes-Coronado, R. G. Barrera, P. E. Batson, P. M. Echenique, A. Rivacoba y J. Aizpurua. **Electromagnetic forces on plasmonic nanoparticles induced by fast electron beams**. *Phys. Rev. B*, 82(23):235429, 2010. [citado en la pág. 17.]
- [4] José Ángel Castellanos-Reyes. *Transferencia de momento angular de electrones rápidos a nanopartículas*. Tesis de doctorado, Facultad de Ciencias, UNAM, 2021. [citado en las págs. 17 y 19.]
- [5] C. Maciel-Escudero y A. Reyes-Coronado. **Electromagnetic fields produced by a swift electron: A source of white light**. *Wave Motion*, 86:137–149, 2019. [citado en las págs. 20, 35 y 36.]
- [6] F. J. García de Abajo. Relativistic energy loss and induced photon emission in the interaction of a dielectric sphere with an external electron beam. *Phys. Rev. B*, 59:3095–3107, Jan 1999. [citado en las págs. 20, 22, 23, 34, 35 y 36.]
- [7] M. Abramowitz, I. A. Stegun y R. H. Romer. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. American Association of Physics Teachers, 1988. [citado en las págs. 21, 27, 36 y 37.]
- [8] F. E. Low. *Classical Field Theory: Electromagnetism and Gravitation*. John Wiley & Sons, 2008. [citado en las págs. 22, 33 y 34.]
- [9] C. F. Bohren y D. R. Huffman. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. John Wiley & Sons, 2008. [citado en la pág. 23.]
- [10] D. Kahaner, C. Moler y S. Nash. *Numerical Methods and Software*. Prentice-Hall, Inc., 1989. [citado en la pág. 27.]

- [11] György Barton y Gabriel Barton. *Elements of Green's functions and propagation: potentials, diffusion, and waves*. Oxford University Press, 1989. [citado en la pág. 35.]