UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

TRANSFERENCIA DE MOMENTO ANGULAR DE ELECTRONES RÁPIDOS A NANOPARTÍCULAS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

JORGE LUIS BRISEÑO GÓMEZ

TUTOR:

DR. ALEJANDRO REYES CORONADO
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. RUBÉN GERARDO BARRERA Y PÉREZ
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM
DR. RAÚL PATRICIO ESQUIVEL SIRVENT
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, JULIO DE 2023

A Any.
A mi madre, a Tita y a Robin.

«*But still try, for who knows what is possible?*»
Michael Faraday.

«*De ilusiones así va uno viviendo.*»
Julio Cortázar.

Índice general

Agradecimientos

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie

ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie

ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie

ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Capítulo 1

Introducción

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Capítulo 2

Teoría y métodos

En este capítulo se muestra el enfoque de la electrodinámica clásica empleado para describir la interacción de un electrón rápido y una nanopartícula (NP) esférica. En partícular, se estudia la interacción a partir del momento lineal transferido del electrón a la NP. Un trabajo reciente de García de Abajo [1] justifica que bajo la condiciones establecidas en la introducción, no es necesaria una descripción cuántica del fenómeno.

Las siguientes ecuaciones se encuentran en el sistema (cgs) Internacional; es decir, se proporciona en color **negro** la ecuación en sistema Internacional, y entre paréntesis y resaltado con color (magenta) el factor necesario para expresar la ecuación en el sistema cgs. Por ejemplo, la fuerza entre dos cargas puntuales q_1 y q_2 separadas una distancia r se escribiría como

$$\vec{\mathbf{F}} = (4\pi\epsilon_0)\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} \tag{2.1}$$

2.0.1. Conservación del momento angular en electrodinámica

Trabajando en el sistema (cgs) internacional, las ecuaciones de Maxwell se escriben como [2]

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{\mathbf{E}} &= (4\pi\epsilon_0)\frac{\rho_{\mathrm{tot}}}{\epsilon_0}, & \nabla\times\vec{\mathbf{E}} &= -\left(\frac{1}{c}\right)\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\vec{\mathbf{B}} &= 0, & \nabla\times\vec{\mathbf{B}} &= \left(\frac{4\pi}{\mu_0 c}\right)\mu_0\vec{\mathbf{J}}_{\mathrm{tot}} + (c)\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

y pueden ser reescritas en términos de los potenciales ϕ y $\vec{\mathbf{A}}$ como [2]

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi\left(\vec{\mathbf{r}},t\right) = -(4\pi\epsilon_0)\frac{\rho_{\mathrm{tot}}}{\epsilon_0}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right), \tag{2.3}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{\mathbf{A}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right) = -\left(\frac{4\pi}{\mu_0 c}\right)\mu_0\vec{\mathbf{J}}_{\mathrm{tot}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right), \tag{2.4}$$

trabajando en la norma de Lorentz, donde se satisface que $\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} + (1/c)\partial_t \phi = 0$, y los campos electromagnéticos se escriben en términos de los potenciales como

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\nabla\phi(\vec{\mathbf{r}}, t) - \left(\frac{1}{c}\right)\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t), \tag{2.5}$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t). \tag{2.6}$$

Partiendo de la expresión para la conservación del momento lineal [2]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{\mathbf{p}}^{\text{mec}}(\vec{\mathbf{r}}, t) + \vec{\mathbf{p}}^{\text{em}}(\vec{\mathbf{r}}, t)\right] = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}}, t), \tag{2.7}$$

donde $\vec{\mathbf{p}}^{\text{mec}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ es la densidad de momento lineal mecánico, $\vec{\mathbf{p}}^{\text{em}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ es la densdad de momento lineal electromagnético

$$\vec{\mathbf{p}}^{\text{em}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \left(\frac{c}{4\pi}\right)\frac{1}{c^2}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \times \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \tag{2.8}$$

y $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ es el tensor de esfuerzos de Maxwell dado por [2]

$$T_{ij}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)}\left[E_i(\vec{\mathbf{r}}, t)\, E_j(\vec{\mathbf{r}}, t) - \frac{\delta_{ij}}{2}E^2(\vec{\mathbf{r}}, t)\right] + \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)}\left[H_i(\vec{\mathbf{r}}, t)\, H_j(\vec{\mathbf{r}}, t) - \frac{\delta_{ij}}{2}H^2(\vec{\mathbf{r}}, t)\right], \tag{2.9}$$

donde se ha asumido que $T_{ij}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ es la entrada ij de $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$, ϵ_0 y μ_0 son la permitividad y permeabilidad del vacío respectivamente, $E_i(\vec{\mathbf{r}}, t)$ es la i-ésima componente del campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$, $H_i(\vec{\mathbf{r}}, t)$ es la i-ésima componente del campo magnético $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Partiendo de la Ec. (2.7), la conservación de momento angular se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\boldsymbol{\ell}}^{\text{mec}}(\vec{\mathbf{r}}, t) + \vec{\boldsymbol{\ell}}^{\text{em}}(\vec{\mathbf{r}}, t)\right) = \vec{\mathbf{r}} \times \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}}, t), \tag{2.10}$$

donde $\vec{\boldsymbol{\ell}}^{\text{mec}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}^{\text{mec}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ y $\vec{\boldsymbol{\ell}}^{\text{em}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}^{\text{em}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ son las densidades volumétricas de momento angular mecánico y electromagnético respectivamente.

Si se define $\overleftrightarrow{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{r}} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ —o usando notación de índices y convención de suma de Einstein $M_{jk}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \epsilon_j{}^{li} r_l T_{ik}(\vec{\mathbf{r}}, t)$—y se calcula la divergencia de $\overleftrightarrow{\mathbf{M}}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\left(\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{M}}\right)_j &= \delta^{nk}\partial_n M_{jk} = \delta^{nk}\partial_n \epsilon_j{}^{li} r_l T_{ik} = \delta^{nk}\epsilon_j{}^{li}\partial_n r_l T_{ik}, \\
&= \delta^{nk}\epsilon_j{}^{li}\left(\delta_{nl}T_{ik} + r_l\partial_n T_{ik}\right) = \delta^{nk}\epsilon_j{}^{li} r_l \partial_n T_{ik}, \\
&= \delta^{nk}\epsilon_j{}^{li} r_l \partial_n T_{ik} = \epsilon_j{}^{li} r_l \partial^k T_{ik} = \epsilon_j{}^{li} r_l \left(\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}\right)_i, \\
\left(\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{M}}\right)_j &= \left(\vec{\mathbf{r}} \times \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}\right)_j,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

donde se ha usado $\delta^{nk}\delta_{nl}\,\epsilon_j{}^{li} T_{ik} = \epsilon_j{}^{ni} T_{in} = 0$, porque el tensor de esfuerzos de Maxwell es simétrico $(T_{in} = T_{ni})$ y el símbolo de Levi-Civita es antisimétirco $\left(\epsilon_j{}^{ni} = -\epsilon_j{}^{in}\right)$.

A partir de este resultado se puede escribir la conservación del momento angular como

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\boldsymbol{\ell}}^{\text{mec}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)+\vec{\boldsymbol{\ell}}^{\text{em}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\right)=\nabla\cdot\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right), \tag{2.12}$$

qe es una ecuación local. Para escribir la conservación del momento angular de forma global, se debe integrar la Ec. (2.12) sobre un volumen V delimitado por una superficie S de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{L}}^{\text{mec}}\left(t\right)+\vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}\left(t\right)\right)&=\int_V\nabla\cdot\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\,dV,\\ \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{L}}^{\text{mec}}\left(t\right)+\vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}\left(t\right)\right)&=\oint_S\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\,\cdot d\vec{\mathbf{S}},\end{aligned} \tag{2.13}$$

donde se ha usado el teorema de la divergencia en la última igualdad, y se han definido

$$\vec{\mathbf{L}}^{\text{mec}}\left(t\right)=\int_V\vec{\boldsymbol{\ell}}^{\text{mec}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\,dV,\qquad \text{y}\qquad \vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}\left(t\right)=\int_V\vec{\boldsymbol{\ell}}^{\text{em}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\,dV. \tag{2.14}$$

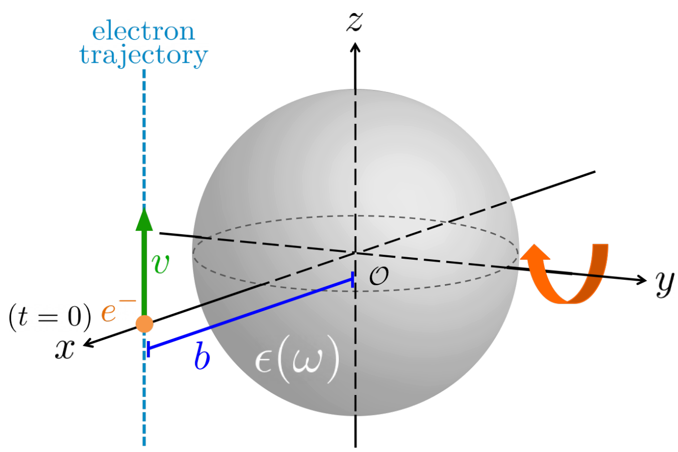

Figura 2.1: Nanopartícula caracterizada por una respuesta dieléctrica homogénea $\epsilon\left(\omega\right)$ centrada en el origen, junto a la trayectoria del electrón colocada en $\vec{\mathbf{r}}=(0,b,vt)$

Se define el sistema de estudio como el de una NP caracterizada por una respuesta dieléctrica homogénea $\epsilon\left(\omega\right)$ centrada en el origen, interactuando con un electrón cuya trayectoria se describe a través de $\vec{\mathbf{r}}=(0,b,vt)$, como se muestra en la Fig. 2.1. Para calcular la transferencia de momento angular del electrón a la NP ($\Delta\vec{\mathbf{L}}$) se integra la Ec. (2.13) en el tiempo de la siguiente manera

$$\Delta\vec{\mathbf{L}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{L}}^{\text{mec}}\left(t\right)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\oint_S\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\cdot d\vec{\mathbf{S}}\,dt-\Delta\vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}, \tag{2.15}$$

donde

$$\Delta\vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}\,dt=\vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}(t\to\infty)-\vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}(t\to-\infty), \tag{2.16}$$

y

$$\vec{\mathbf{L}}^{\text{em}}(t\to\pm\infty)=\epsilon_0\mu_0\int_V\vec{\mathbf{r}}\times\left[\vec{\mathbf{E}}\left(t\to\pm\infty\right)\times\vec{\mathbf{H}}\left(t\to\pm\infty\right)\right]dV, \tag{2.17}$$

donde este último término, para el sistema de estudio de este trabajo, es nulo porque en el tiempo $t\to-\infty$ el electrón se encuentra infinitamente lejos y no ha interactuado con la NP, por lo que los campos electromagnéticos son nulos —$\vec{\mathbf{E}}\,(t \to -\infty) = \vec{\mathbf{0}}$ y $\vec{\mathbf{H}}\,(t \to -\infty) = \vec{\mathbf{0}}$—; posteriormente, para cuando $t \to \infty$, el electrón se encontrará infinitamente lejos de la NP pero ya habrá interactuado con ella, por lo que se habrán inducido distribuciones de cargas y corrientes eléctricas dentro de la NP, que habrán desaparecido para cuando $t \to \infty$ debido a procesos disipativos. Por tanto $\vec{\mathbf{L}}^{\mathrm{em}}\,(t \to \pm\infty) = 0$.

Entonces

$$\Delta\vec{\mathbf{L}} = \int_{-\infty}^{\infty} \oint_S \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}}\,(\vec{\mathbf{r}}, t) \cdot d\vec{\mathbf{S}}\,dt, \tag{2.18}$$

o usando notación de índices

$$\Delta L_i = \int_{-\infty}^{\infty} \oint_S \epsilon_i{}^{lj} r_l T_{jk}\,(\vec{\mathbf{r}}, t)\, n^k\, dS\, dt, \tag{2.19}$$

donde n_i es la i-ésima componente del vector normal a la superficie de S.

Como la función dieléctrica $\epsilon\,(\omega)$ se presenta usualmente en términos de la frecuencia, resulta conveniente expresar a los campos electromagnéticos en términos de ω. Mediante la transformada de Fourier temporal se pueden expresar los campos electromagnéticos en función de la frecuencia, de la sigueinte manera

$$\vec{\mathbf{F}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathbf{F}}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,dt \qquad \text{y} \qquad \vec{\mathbf{F}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathbf{F}}(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,d\omega \tag{2.20}$$

donde $\vec{\mathbf{F}} \in \{\vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{H}}\}$ y para que $\vec{\mathbf{F}}(t)$ sea una función de variable real se debe cumplir que $\vec{\mathbf{F}}(\omega)^* = \vec{\mathbf{F}}(-w)$ con la convención de exprezar al complejo conjugado de un número z como z^*. Además, para calcular la transferencia de momento angular a través de la Ec. (2.19) es importante notar que la dependencia en el tiempo está contenida únicamente en el tensor de esfuerzos de Maxwell $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}\,(\vec{\mathbf{r}}, t)$. De esta forma se puede reescribir la integrar en el tiempo de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} E_i\,(\vec{\mathbf{r}}, t)\, E_j\,(\vec{\mathbf{r}}, t)\; dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_i\,(\vec{\mathbf{r}}, \omega)\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,d\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_j\left(\vec{\mathbf{r}}, \omega'\right)\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}\,d\omega'\right] dt, \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega+\omega')t}\,dt\right] E_i\,(\vec{\mathbf{r}}, \omega)\, E_j\left(\vec{\mathbf{r}}, \omega'\right)\; d\omega\, d\omega', \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega + \omega'\right) E_i\,(\vec{\mathbf{r}}, \omega)\, E_j\left(\vec{\mathbf{r}}, \omega'\right)\; d\omega\, d\omega', \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_i\,(\vec{\mathbf{r}}, \omega)\, E_j\,(\vec{\mathbf{r}}, -\omega)\; d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_i\,(\vec{\mathbf{r}}, \omega)\, E_j^*\,(\vec{\mathbf{r}}, \omega)\; d\omega, \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \mathrm{Re}\left[E_i\,(\vec{\mathbf{r}}, \omega)\, E_j^*\,(\vec{\mathbf{r}}, \omega)\right]\; d\omega
\end{aligned} \tag{2.21}$$

y se puede realizar el proceso análogo para las componentes del campo $\vec{\mathbf{H}}$.

De esta manera se puede reescribir la Ec. (2.19) como

$$\Delta L_i = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \oint_S \epsilon_i{}^{lj} r_l \mathcal{T}_{jk}\,(\vec{\mathbf{r}}, \omega)\, n^k\, dS\, d\omega, \tag{2.22}$$

donde se ha definido

$$\overleftrightarrow{\mathcal{T}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = \mathrm{Re}\Bigg[\frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},\omega)\,\vec{\mathbf{E}}^*(\vec{\mathbf{r}},\omega) - \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)}\frac{\overleftrightarrow{\mathbf{I}}}{2}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},\omega)\cdot\vec{\mathbf{E}}_j^*(\vec{\mathbf{r}},\omega) + \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)}\vec{\mathbf{H}}_i(\vec{\mathbf{r}},\omega)\,\vec{\mathbf{H}}_j^*(\vec{\mathbf{r}},\omega) - \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)}\frac{\overleftrightarrow{\mathbf{I}}}{2}\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},\omega)\cdot\vec{\mathbf{H}}^*(\vec{\mathbf{r}},t)\Bigg], \tag{2.23}$$

donde $\overleftrightarrow{\mathbf{I}}$ es el tensor identidad de rango 2. De esta forma se puede definir finalmente la «densidad espectral» de momento angular

$$\mathcal{L}_i(\omega) = \frac{1}{\pi}\oint_S \epsilon_i{}^{lj} r_l \mathcal{T}_{jk}(\vec{\mathbf{r}},\omega)\, n^k\, dS. \tag{2.24}$$

y calcular la transferencia de momento angular a través de

$$\Delta\vec{\mathbf{L}} = \int_0^\infty \vec{\mathcal{L}}(\omega)\; d\omega. \tag{2.25}$$

Resulta adecuado separar la contribución eléctrica de la magnética de la densidad espectral de la Ec.(2.25). Para realizar esto se debe separar

$$\overleftrightarrow{\mathcal{T}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = \overleftrightarrow{\mathcal{T}}^{\mathrm{E}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) + \overleftrightarrow{\mathcal{T}}^{\mathrm{H}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) \tag{2.26}$$

con

$$\overleftrightarrow{\mathcal{T}}^{\mathrm{E}} = \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},\omega)\,\vec{\mathbf{E}}^*(\vec{\mathbf{r}},\omega) - \frac{\overleftrightarrow{\mathbf{I}}}{2}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},\omega)\cdot\vec{\mathbf{E}}^*(\vec{\mathbf{r}},\omega)\right], \tag{2.27}$$

$$\overleftrightarrow{\mathcal{T}}^{\mathrm{H}} = \frac{\mu_0}{(4\pi\mu_0)}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},\omega)\,\vec{\mathbf{H}}^*(\vec{\mathbf{r}},\omega) - \frac{\overleftrightarrow{\mathbf{I}}}{2}\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},\omega)\cdot\vec{\mathbf{H}}^*(\vec{\mathbf{r}},\omega)\right]. \tag{2.28}$$

Si se elige una esfera como superficie de integración, y se denota a R como el radio de la superficie de integración esférica S y a $\hat{r}_i$ como la i-ésima componente del vector unitario radial, es posible expresar a $\mathcal{L}_i(\omega)$ de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_i(\omega) = \frac{R^2}{\pi}\int_0^{4\pi}\left[\epsilon_i{}^{lj} r_l \mathcal{T}^{\mathrm{E}}_{jk}(\vec{\mathbf{r}},\omega)\, n^k + \epsilon_i{}^{lj} r_l \mathcal{T}^{\mathrm{H}}_{jk}(\vec{\mathbf{r}},\omega)\, n^k\right] d\Omega, \tag{2.29}$$

donde únicamente falta integral en el ángulo sólido Ω. Se puede separar la contribución eléctrica de la magnética en la Ec. (2.29) de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_i^{\mathrm{E}}(\omega) = \frac{R^2}{\pi}\int_0^{4\pi}\left[\epsilon_i{}^{lj} r_l \mathcal{T}^{\mathrm{E}}_{jk}(\vec{\mathbf{r}},\omega)\, n^k\right] d\Omega, \tag{2.30}$$

$$\mathcal{L}_i^{\mathrm{H}}(\omega) = \frac{R^2}{\pi}\int_0^{4\pi}\left[\epsilon_i{}^{lj} r_l \mathcal{T}^{\mathrm{H}}_{jk}(\vec{\mathbf{r}},\omega)\, n^k\right] d\Omega. \tag{2.31}$$

Se pueden separar a los campos electromagnéticos $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{H}}$ en sus contribuciones de campo externo (ext) y campo esparcido (scat) como

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}, \qquad \text{y} \qquad \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{H}}_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{H}}_{\text{scat}}, \tag{2.32}$$

donde $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$ y $\vec{\mathbf{H}}_{\text{ext}}$ son los campos electromagnéticos externos —es decir, los producidos por el electrón—, y $\vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}$ y $\vec{\mathbf{H}}_{\text{scat}}$ son los campos esparcidos por la nanopartícula (NP). Mediante esta separación se puede reescribir la componente eléctrica del tensor de esfuerzos como

$$\begin{aligned}
\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}^{\text{E}} &= \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)}\text{Re}\left[\left(\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}\right)\left(\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}^*_{\text{scat}}\right) - \frac{\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}}{2}\left(\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}^*_{\text{scat}}\right)\right], \\
&= \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)}\text{Re}\Bigg[\left(\vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{scat}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{scat}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{ext}}\right) \\
&\quad - \frac{\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}}{2}\left(\vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}\cdot\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{scat}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}\cdot\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}\cdot\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{scat}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}\cdot\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{ext}}\right)\Bigg].
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Por medio de esta separación se puede escribir la componente eléctrica del tensor de esfuerzos como

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}^{\text{E}} = \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}^{\text{E}}_{\text{ss}} + \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}^{\text{E}}_{\text{int}} + \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}^{\text{E}}_{\text{ee}} \tag{2.34}$$

en donde

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}^{\text{E}}_{\text{ss}} = \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)}\text{Re}\left[\vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{scat}} - \frac{\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}}{2}\vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}\cdot\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{scat}}\right], \tag{2.35}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}^{\text{E}}_{\text{ee}} = \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)}\text{Re}\left[\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{ext}} - \frac{\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}}{2}\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}\cdot\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{ext}}\right], \tag{2.36}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}^{\text{E}}_{\text{int}} = \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}^{\text{E}}_{\text{se}} + \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}^{\text{E}}_{\text{es}} \tag{2.37}$$

con

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}^{\text{E}}_{\text{es}} = \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)}\text{Re}\left[\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{scat}} - \frac{\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}}{2}\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}\cdot\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{scat}}\right], \tag{2.38}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}^{\text{E}}_{\text{se}} = \frac{\epsilon_0}{(4\pi\epsilon_0)}\text{Re}\left[\vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{ext}} - \frac{\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}}{2}\vec{\mathbf{E}}_{\text{scat}}\cdot\vec{\mathbf{E}}^*_{\text{ext}}\right]. \tag{2.39}$$

Análogamente al hacer la sustitución $\epsilon_0 \to \mu_0$ y $\vec{\mathbf{E}} \to \vec{\mathbf{H}}$ en las Ecs. (2.33) a (2.39), se obtiene las contribuciones magnéticas al tensor $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}$, denotadas por $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}^{\text{H}}_{\text{ij}}$ donde ij pueden tomar los valores {e, s}.

Se puede interpretar a $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}_{\text{int}}$ como la componente que está relacionada con la interacción del campo electromagnético del electrón con las cargas y corrientes inducidas en la NP. En el caso en que no exista

NP, nada altera el movimiento del electrón, por lo que no pierde ni cede energía, momento lineal ni momento angular ($\Delta L = 0$) [3]. Al no existir NP, los campos electromagnéticos esparcidos serían nulos, por lo que la única contribución al momento angular proviene de la componente $\overleftrightarrow{\mathfrak{T}}_{\rm ee}$. Por tanto, de manera general, se concluye que la contribución al momento angular transferido debido a $\overleftrightarrow{\mathfrak{T}}_{\rm ee}$ es nula, por lo que no será considerada en los cálculos subsecuentes. También vale la pena mencionar que la componente $\overleftrightarrow{\mathfrak{T}}_{\rm ss}$, al depender únicamente de los campos electromagnéticos esparcidos por la NP, está relacionada con la interacción de la NP consigo misma, referida por algunos autores como reacción de radiación [2].

En la siguiente sección se presentan las expresiones analíticas de los campos electromagnéticos externos (producidos por el electrón) y de los esparcidos por la NP, para poder integrarlos dentro de la Ec. (2.29).

2.0.2. Transferencia de momento angular de un electrón rápido a una nanopartícula

El campo electromagnético externo producido por un electrón rápido, considerado como una partícula puntual de carga $q = -e$, viajando a velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ constante a lo largo del eje z [ver Fig. 2.1], se puede obtener mediante una transformación de Lorentz de un sistema de referencia en el que el electrón se encuentra en reposo, a un sistema de referencia en el que el electrón que se mueve a velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}$, obteniendo [2]

$$\vec{\mathbf{E}}_{\rm ext}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right) = (4\pi\epsilon_0)\frac{-e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma\left[\vec{\mathbf{R}}+(z-vt)\hat{z}\right]}{\left[R^2+\gamma^2(z-vt)^2\right]^{3/2}}, \tag{2.40}$$

$$\vec{\mathbf{H}}_{\rm ext}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right) = (4\pi)\frac{-e}{4\pi}\frac{\gamma\,\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{R}}}{\left[R^2+\gamma^2(z-vt)^2\right]^{3/2}}, \tag{2.41}$$

en donde $\gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$, $\beta = v/c$, $\vec{\mathbf{R}} = (x-b)\hat{x}+y\hat{y}$, $R = \sqrt{(x-b)^2+y^2}$ y $\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{R}} = v\left[(x-b)\hat{y}-y\hat{x}\right]$. Se pueden calcular los campos electromagnéticos externos en función de la frecuencia mediante una transformada de Fourier de las Ecs. (2.40) y (2.41) que se expresan como [4]

$$\vec{\mathbf{E}}_{\rm ext}\left(\vec{\mathbf{r}},\omega\right) = (4\pi\epsilon_0)\frac{-e}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\omega}{v^2\gamma}{\rm e}^{{\rm i}\omega(z/v)}\left\{{\rm sign}(\omega)K_1\left(\frac{|\omega|R}{v\gamma}\right)\hat{R}-\frac{\rm i}{\gamma}K_0\left(\frac{|\omega|R}{v\gamma}\right)\hat{z}\right\}, \tag{2.42}$$

$$\vec{\mathbf{H}}_{\rm ext}\left(\vec{\mathbf{r}},\omega\right) = (4\pi)\frac{-e}{4\pi}\frac{2e}{vc\gamma}\left|\omega\right|{\rm e}^{{\rm i}\omega z/v}K_1\left(\frac{|\omega|R}{v\gamma}\right)\hat{v}\times\hat{R}, \tag{2.43}$$

que son expresiones cerradas con simetría cilíndrica. Como también se buscan los campos esparcidos por la NP, que tienen simetría esférica, conviene expresar a los campos electromagnéticos del electrón mediante una solución con simetría esférica.

El campo eléctrico producido por el electrón se puede obtener mediante la función de Green dependiente del tiempo [4]

$$\vec{\mathbf{E}}_{\rm ext}\left(\vec{\mathbf{r}},\omega\right) = e\left(\nabla-{\rm i}\frac{k\vec{\mathbf{v}}}{c}\right)\int_{-\infty}^{\infty}{\rm e}^{{\rm i}\omega t}G_0\left(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t\right)\,dt, \tag{2.44}$$

donde la función de Green $G_0\left(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t\right)$ está dada por

$$G_0\left(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t\right) = \frac{(4\pi\epsilon_0)}{4\pi\epsilon_0}\frac{{\rm e}^{{\rm i}k|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t|}}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t|}, \tag{2.45}$$

con $k=\omega/c$ el número de onda en el vacío, $\vec{\mathbf{r}}_t=\vec{\mathbf{r}}_0+\vec{\mathbf{v}}t$ la posición del electrón al tiempo t. Al expandir la función de Green en base esférica se obtiene [5]

$$G_0(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t)=\frac{(4\pi\epsilon_0)}{\epsilon_0}k\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}j_\ell(kr)h_\ell^+(kr_t)Y_{\ell,m}(\Omega_r)Y_{\ell,m}(\Omega_{r_t})^*, \tag{2.46}$$

donde $Y_{\ell,m}$ son los armónicos esféricos escalares, $h_\ell^+(x)=\mathrm{i}h_\ell^1(x)$ es la función de Hankel esférica de orden ℓ y $j_\ell(x)$ es la función esférica de Bessel de orden ℓ [6]. Sustituyendo la Ec. (2.46) en la Ec. (2.44), se obtiene

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\left(\nabla-\mathrm{i}\frac{k\vec{\mathbf{v}}}{c}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}j_\ell(kr)Y_{\ell,m}(\Omega_r)\phi_{\ell,m} \tag{2.47}$$

donde

$$\phi_{\ell,m}=\frac{(4\pi\epsilon_0)}{\epsilon_0}k\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}h_\ell^+(kr_t)Y_{\ell,m}^*(\Omega_{r_t})\,dt. \tag{2.48}$$

En el Apéndice A se muestran los detalles del cálculo de la Ec. (2.48). Como se muestra también en el Apéndice A, es posible obtener expresiones para el campo electromagnético externo en representación multipolar esférica:

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}=\sum_{\ell,m}\left(\mathscr{E}_{\ell,m}^{\text{er}}\hat{r}+\mathscr{E}_{\ell,m}^{\text{e}\theta}\hat{\theta}+\mathscr{E}_{\ell,m}^{\text{e}\varphi}\hat{\varphi}\right) \tag{2.49}$$

$$\vec{\mathbf{H}}_{\text{ext}}=\sum_{\ell,m}\left(\mathscr{H}_{\ell,m}^{\text{er}}\hat{r}+\mathscr{H}_{\ell,m}^{\text{e}\theta}\hat{\theta}+\mathscr{H}_{\ell,m}^{\text{e}\varphi}\hat{\varphi}\right) \tag{2.50}$$

donde

$$\mathscr{E}_{\ell,m}^{\text{er}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}D_{\ell,m}^{\text{ext}}\ell(\ell+1)P_\ell^m(\cos\theta)\frac{j_\ell(k_0r)}{k_0r}, \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\ell,m}^{\text{e}\theta}=&-\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}C_{\ell,m}^{\text{ext}}\frac{m}{\sin\theta}j_\ell(k_0r)P_\ell^m(\cos\theta)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}D_{\ell,m}^{\text{ext}}\left[(\ell+1)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}P_\ell^m(\cos\theta)-\right.\\&\left.\frac{(\ell-m+1)}{\sin\theta}P_{\ell+1}^m(\cos\theta)\right]\left[(\ell+1)\frac{j_\ell(k_0r)}{k_0r}-j_{\ell+1}(k_0r)\right],\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\ell,m}^{\text{e}\varphi}=&\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}C_{\ell,m}^{\text{ext}}j_\ell(k_0r)\left[(\ell+1)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}P_\ell^m(\cos\theta)+\frac{\ell-m+1}{\sin\theta}P_{\ell+1}^m(\cos\theta)\right]\\&+\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}D_{\ell,m}^{\text{ext}}\frac{m}{\sin\theta}P_\ell(\cos\theta)\left[(\ell+1)\frac{j_\ell(k_0r)}{k_0r}-j_{\ell+1}(k_0r)\right],\end{aligned} \tag{2.53}$$

y

$$\mathscr{H}^{\mathrm{er}}_{\ell,m} = \mathrm{e}^{im\varphi} C^{\mathrm{ext}}_{\ell,m} \ell(\ell+1) P^m_\ell (\cos\theta) \frac{j_\ell(k_0 r)}{k_0 r}, \tag{2.54}$$

$$\mathscr{H}^{\mathrm{e}\theta}_{\ell,m} = \mathrm{e}^{im\varphi} D^{\mathrm{ext}}_{\ell,m} \frac{m}{\sin\theta} j_\ell(k_0 r) P^m_\ell(\cos\theta) - \mathrm{e}^{im\varphi} C^{\mathrm{ext}}_{\ell,m} \left[(\ell+1) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} P^m_\ell(\cos\theta) - \frac{(\ell-m+1)}{\sin\theta} P^m_{\ell+1}(\cos\theta) \right] \left[(\ell+1) \frac{j_\ell(k_0 r)}{k_0 r} - j_{\ell+1}(k_0 r) \right], \tag{2.55}$$

$$\mathscr{H}^{\mathrm{e}\varphi}_{\ell,m} = -\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{im\varphi} D^{\mathrm{ext}}_{\ell,m} j_\ell(k_0 r) \left[(\ell+1) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} P^m_\ell(\cos\theta) - \frac{\ell-m+1}{\sin\theta} P^m_{\ell+1}(\cos\theta) \right] + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{im\varphi} C^{\mathrm{ext}}_{\ell,m} \frac{m}{\sin\theta} P_\ell(\cos\theta) \left[(\ell+1) \frac{j_\ell(k_0 r)}{k_0 r} - j_{\ell+1}(k_0 r) \right], \tag{2.56}$$

donde $k_0 = \omega/c$, P^m_ℓ son las funciones asociadas de Legendre, y los coeficientes escalares $C^{\mathrm{ext}}_{\ell,m}$ y $D^{\mathrm{ext}}_{\ell,m}$ están dados por

$$C^{\mathrm{ext}}_{\ell,m} = \mathrm{i}^\ell \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \psi^{M,\mathrm{ext}}_{\ell,m}, \tag{2.57}$$

$$D^{\mathrm{ext}}_{\ell,m} = \mathrm{i}^\ell \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \psi^{E,\mathrm{ext}}_{\ell,m}, \tag{2.58}$$

con $\psi^{E,\mathrm{ext}}_{\ell,m}$ y $\psi^{M,\mathrm{ext}}_{\ell,m}$ los coeficientes de la representación esférica de los potenciales auxiliares definidos en el Apéndice A.

2.0.3. Campos electromagnéticos esparcidos por la nanopartícula

Como se muestra en el Apéndice A, los campos electromagnéticos satisfacen la ecuación de Helmholtz sin fuentes,

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}, \tag{2.59}$$

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{0}}, \tag{2.60}$$

donde $k^2 = (c^{-2}) \omega^2 \epsilon(\omega) \mu(\omega)$. La solución de las Ecs. (2.59) y (2.60) puede ser escrita como [7]

$$\vec{\mathbf{E}} = \nabla \psi^{\mathrm{L}} + \vec{\mathbf{L}} \psi^{\mathrm{M}} - \frac{\mathrm{i}}{k} \nabla \times \vec{\mathbf{L}} \psi^{\mathrm{E}}, \vec{\mathbf{H}} = -\frac{\mathrm{i}}{k} \nabla \times \vec{\mathbf{L}} \psi^{M} - \vec{\mathbf{L}} \psi^{\mathrm{E}}, \tag{2.61}$$

donde $\vec{\mathbf{L}} = -\mathrm{i}\vec{\mathbf{r}} \times \nabla$ es el operador de momento angular orbital. Las funciones escalares ψ^{L}, ψ^{E} y ψ^{M}, a su vez, satisfacen la ecuación escalar de Helmholtz. Como el campo eléctrico externo es un campo solenoidal ($\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0$), la función escalar ψ^{L} debe ser nula. Las funciones escalares ψ^{E} y ψ^{M} pueden ser expandidas en una base esférica definida a partir del sistema de coordenadas de la Fig. 2.1, como

$$\psi^{\mathrm{E,ext}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathrm{i}^{\ell} h_{\ell}^{+}(kr)\, Y_{\ell,m}(\Omega_r)\psi_{\ell,m}^{\mathrm{E,ext}}, \tag{2.62}$$

$$\psi^{\mathrm{E,ext}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathrm{i}^{\ell} h_{\ell}^{+}(kr)\, Y_{\ell,m}(\Omega_r)\psi_{\ell,m}^{\mathrm{E,ext}}. \tag{2.63}$$

Aplicando las condiciones de frontera, para una partícula esférica, se pueden calcular los potenciales escalares electromagnéticos esparcidos por la NP, en función de los potenciales escalares electromagnéticos externos, de la siguiente manera

$$\psi_{\ell,m}^{\mathrm{E,scat}} = t_{\ell}^{\mathrm{E}}\psi_{\ell,m}^{\mathrm{E,ext}}, \tag{2.64}$$

$$\psi_{\ell,m}^{\mathrm{M,scat}} = t_{\ell}^{\mathrm{M}}\psi_{\ell,m}^{\mathrm{M,ext}}. \tag{2.65}$$

Donde los coeficientes t_{ℓ}^{E} y t_{ℓ}^{M}, para el caso de partículas esféricas homogéneas, corresponden a los coeficientes de la solución de Mie: [8]

$$t_{\ell}^{\mathrm{E}} = \frac{-j_{\ell}(x_0)\,[x_i j_{\ell}(x_i)]' + \epsilon_i\, j_{\ell}(x_i)\,[x_0 j_{\ell}(x_0)]'}{h} \tag{2.66}$$

De este modo, sustituyendo la Ec. (**??**) en la Ec. (**??**) se obtiene que

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r_j} M_{kj} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\ell_k^{\mathrm{mec}} + \ell_k^{\mathrm{em}}\right),} \tag{2.67}$$

en donde

$$M_{kj} = \epsilon_{kli} r_l T_{ij}. \tag{2.68}$$

La Ec. (2.67) es la forma local de la conservación del momento angular. Integrando la Ec. (2.67) en el volumen interior V de alguna superficie diferenciable S, estática y cerrada, y utilizando el teorema de la divergencia, se encuentra que la forma global de la conservación del momento angular es [9]:

Conservación del momento angular en electrodinámica

$$\oint_S \overleftrightarrow{\boldsymbol{M}} \cdot d\vec{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{L}}^{\mathrm{mec}} + \vec{\mathbf{L}}^{\mathrm{em}}\right) \tag{2.69}$$

en donde

$$\vec{\mathbf{L}}^{\mathrm{mec}} = \int_V \vec{\boldsymbol{\ell}}^{\,\mathrm{mec}} dV \tag{2.70}$$

y

$$\vec{\mathbf{L}}^{\mathrm{em}} = \int_V \vec{\boldsymbol{\ell}}^{\,\mathrm{em}} dV. \tag{2.71}$$

Capítulo 3

Resultados y discusión

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Conclusiones y perspectivas

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie

ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Apéndice A
Método del potencial escalar

Para construir la solución buscada se define ahora la transformada de Fourier espaciotemporal como

$$\vec{\mathbf{F}}\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\text{T.E.}}\vec{\mathbf{F}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}-\omega t\right)}\,d^3r\,dt,$$
$$\vec{\mathbf{F}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\text{T.E.R.}}\vec{\mathbf{F}}\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}-\omega t\right)}\,d^3k\,d\omega, \tag{A.1}$$

donde T.E. significa integrar sobre todo el espacio y T.E.R. significa integrar sobre todo el espacio recíproco.

Si ahora calculamos solo la Transformada de Fourier temporal de las Ecuaciones de Maxwell, Ecs. (2.2), se obtiene

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{E}}=(4\pi\epsilon_0)\frac{\rho_{\text{tot}}}{\epsilon_0},\qquad \nabla\times\vec{\mathbf{E}}=\mathrm{i}\,\omega\left(\frac{1}{c}\right)\vec{\mathbf{B}},$$
$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{B}}=0,\qquad \nabla\times\vec{\mathbf{B}}=\left(\frac{4\pi}{\mu_0 c}\right)\mu_0\vec{\mathbf{J}}_{\text{tot}}-\mathrm{i}\,\omega\frac{(c)}{c^2}\vec{\mathbf{E}}, \tag{A.2}$$

al desacoplarlas, aplicando las relaciones constitutivas $\vec{\mathbf{D}}=\epsilon(\omega)\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}=\mu(\omega)\vec{\mathbf{H}}$, y sin considerar las fuentes se obtiene

$$(\nabla^2+k_\omega^2)\vec{\mathbf{E}}=0,$$
$$(\nabla^2+k_\omega^2)\vec{\mathbf{H}}=0.$$

en donde $k_\omega^2=\left(c^{-2}\right)\omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)$[1].

[1]Se coloca el subíndice ω para diferencia a k_ω con k de la Transformada de Fourier.

El campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ puede ser descrito de la siguiente manera [7]

$$\vec{\mathbf{E}} = \nabla \frac{1}{\nabla^2}\left(\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}\right) + \vec{\mathbf{L}}\frac{1}{L^2}\left(\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{E}}\right) - \left(\vec{\mathbf{L}} \times \nabla\right)\frac{1}{L^2\nabla^2}\left[\left(\vec{\mathbf{L}} \times \nabla\right) \cdot \vec{\mathbf{E}}\right], \tag{A.3}$$

en donde $\vec{\mathbf{L}} = -i\vec{\mathbf{r}} \times \nabla$ es el operador de momento angular orbital. A partir de la Ec. (A.3) se pueden definir las funciones escalares: longitudinal, eléctrica y magnética: [7]

$$\psi^{\mathrm{L}} = \frac{1}{\nabla^2}\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}, \tag{A.4}$$

$$\psi^{\mathrm{E}} = \frac{-ik_\omega}{L^2\Delta^2}\left(\vec{\mathbf{L}} \times \nabla\right) \cdot \vec{\mathbf{E}}, \tag{A.5}$$

$$\psi^{\mathrm{M}} = \frac{1}{L^2}\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{E}}, \tag{A.6}$$

en donde cada uno satisface la ecuación escalar de Helmholtz sin fuentes:

$$\left(\nabla^2 + k_\omega^2\right)\psi^{\{\mathrm{L,E,M}\}} = 0. \tag{A.7}$$

Por tanto, los campos electromagnéticos se pueden escribir a partir de los potenciales escalares como[2]

$$\vec{\mathbf{E}} = \nabla\psi^{\mathrm{L}} + \vec{\mathbf{L}}\psi^{\mathrm{M}} - \frac{i}{k_\omega}\nabla \times \vec{\mathbf{L}}\psi^{\mathrm{E}}, \tag{A.8}$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{(c)}{c}\left(-\frac{i}{k_\omega}\nabla \times \vec{\mathbf{L}}\psi^{\mathrm{M}} - \vec{\mathbf{L}}\psi^{\mathrm{E}}\right). \tag{A.9}$$

En el problema de interés para este trabajo se considera al electrón viajando en vacío y a velocidad constante, por lo que los modos longitudinales no contribuyen ($\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0$), es decir, $\psi^{\mathrm{L}} = 0$. Las funciones escalares restantes se pueden expresar en términos de una base esférica de la siguiente manera [5]

$$\psi^{\mathrm{E,ext}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}(i)^\ell j_\ell(kr)Y_{\ell,m}\left(\Omega_r\right)\psi_{\ell,m}^{\mathrm{E,ext}}, \tag{A.10}$$

$$\psi^{\mathrm{M,ext}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}(i)^\ell j_\ell(kr)Y_{\ell,m}\left(\Omega_r\right)\psi_{\ell,m}^{\mathrm{M,ext}}, \tag{A.11}$$

donde $j_\ell(x)$ son las funciones esféricas de Bessel de orden ℓ, $Y_{\ell,m}$ son los armónicos esféricos escalares, (r, Ω_r) son las coordenadas esféricxas del vector $\vec{\mathbf{r}}$, y $\psi_{\ell,m}^{\mathrm{E,ext}}$ y $\psi_{\ell,m}^{\mathrm{M,ext}}$ son funciones escalares a determinar. Las Ecs. (A.10) y (A.11) son válidas en la región $a < r < b$, donde a es el radio de la NP y b es el parámetro de impacto del electrón medido desde el centro de la NP.

Aplicando ahora la transformada de Fourier a las Ecs. (2.3) y (2.4) se obtiene

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\phi\left(\vec{\mathbf{k}}, \omega\right) = -\left(4\pi\epsilon_0\right)\frac{1}{\epsilon_0}\rho_{\mathrm{tot}}\left(\vec{\mathbf{k}}, \omega\right), \tag{A.12}$$

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{\mathbf{A}}\left(\vec{\mathbf{k}}, \omega\right) = -\left(\frac{4\pi}{\mu_0 c}\right)\mu_0\vec{\mathbf{J}}_{\mathrm{tot}}\left(\vec{\mathbf{k}}, \omega\right), \tag{A.13}$$

[2]En el trabajo original de García de Abajo, se hace la suposición de que los campos electromagnéticos están en el vacío; i.e. $k_\omega = \omega/c$.

y usando el hecho de que $\vec{\mathbf{J}} = \rho\vec{\mathbf{v}}$ y $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$ se obtiene

$$\phi\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right) = (4\pi\epsilon_0)\frac{1}{k^2-\omega^2/c^2}\frac{\rho_{\text{tot}}\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right)}{\epsilon_0}, \tag{A.14}$$

$$\vec{\mathbf{A}}\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right) = \left(\frac{4\pi}{\mu_0 c}\right)\frac{\mu_0}{k^2-\omega^2/c^2}\vec{\mathbf{J}}_{\text{tot}}\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right) = (c)\frac{\vec{\mathbf{v}}}{c^2}\phi\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right). \tag{A.15}$$

Ahora, calculando la transformada de Fourier de la Ec. (2.5) se obtiene

$$\vec{\mathbf{E}}\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right) = -\mathrm{i}\vec{\mathbf{k}}\phi\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right) + \left(\frac{1}{c}\right)\mathrm{i}\omega\vec{\mathbf{A}}\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right). \tag{A.16}$$

Sustituyendo la Ec. (A.15) en la Ec. (A.16) se obtiene

$$\vec{\mathbf{E}}\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right) = \mathrm{i}\left(-\vec{\mathbf{k}} + \frac{\omega}{c^2}\vec{\mathbf{v}}\right)\phi\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right), \tag{A.17}$$

y calculando la Transformada Inversa de Fourier en el espacio de la expresión anterior, se obtiene

$$\vec{\mathbf{E}}\left(\vec{\mathbf{r}},\omega\right) = \left(-\nabla + \mathrm{i}\frac{\omega}{c^2}\vec{\mathbf{v}}\right)\phi\left(\vec{\mathbf{r}},\omega\right). \tag{A.18}$$

Realizando el proceso análogo para calcular el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}\left(\vec{\mathbf{r}},\omega\right)$ se obtiene

$$\vec{\mathbf{B}}\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right) = \mathrm{i}\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{A}}\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right) = (c)\mathrm{i}\vec{\mathbf{k}}\times\frac{\vec{\mathbf{v}}}{c^2}\phi\left(\vec{\mathbf{k}},\omega\right), \tag{A.19}$$

$$\vec{\mathbf{B}}\left(\vec{\mathbf{r}},\omega\right) = (c)\nabla\phi\left(\vec{\mathbf{r}},\omega\right)\times\frac{\vec{\mathbf{v}}}{c^2}. \tag{A.20}$$

Considerando la densidad de carga del electrón en movimiento es $\rho_{\text{tot}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right) = -e\delta(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t)$, donde $\vec{\mathbf{r}}_t = (b,0,vt)$ es el vector posición del electrón, y calculando la transformada de Fourier de la Ec. (2.3) se obtiene la Ec. de Helmholtz

$$\nabla^2\phi\left(\vec{\mathbf{r}},\omega\right) + k^2\phi\left(\vec{\mathbf{r}},\omega\right) = -(4\pi\epsilon_0)\frac{e}{\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\delta(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t)\,dt, \tag{A.21}$$

donde $k = \omega/c$ es el número de onda en el vacío y la solución para $\phi\left(\vec{\mathbf{r}},\omega\right)$ se escribe como [4, 5, 10]

$$\phi\left(\vec{\mathbf{r}},\omega\right) = -e\int_{\text{T.E.}}G_0(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}\,')\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\delta(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t)\,dt\,d^3r', \tag{A.22}$$

$$= -e\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\int_{\text{T.E.}}G_0(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}\,')\delta(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t)\,d^3r'\,dt, \tag{A.23}$$

$$= -e\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}G_0\left(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t\right)\,dt, \tag{A.24}$$

con

$$G_0\left(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t\right) = \frac{(4\pi\epsilon_0)}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t|}}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t|}, \tag{A.25}$$

la función de Green de la ecuación de Helmholtz. De esta forma, el campo eléctrico del electrón se puede escribir como

$$\vec{\mathbf{E}}_{\rm ext}\left(\vec{\mathbf{r}},\omega\right) = e\left(\nabla - \mathrm{i}\frac{k\vec{\mathbf{v}}}{c}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} G_0\left(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t\right)\, dt. \tag{A.26}$$

Al reescribir la función de Green en una base esférica se obtiene [5]

$$G_0(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}_t) = \frac{(4\pi\epsilon_0)}{\epsilon_0} k \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} j_\ell(k\,r) h_\ell^{(+)}(k\,r_t) Y_{\ell,m}\left(\Omega_r\right) Y_{\ell,m}^{*}\left(\Omega_{r_t}\right), \tag{A.27}$$

donde $h_\ell^{(+)}(x) = \mathrm{i}\, h_\ell^{(1)}(x)$ es la función esférica de Hankel de orden ℓ [6]. Sustituyendo la Ec. (A.27) en la Ec. (A.26) se obtiene

$$\vec{\mathbf{E}}_{\rm ext}\left(\vec{\mathbf{r}},\omega\right) = e\left(\nabla - \mathrm{i}\frac{k\vec{\mathbf{v}}}{c}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} j_\ell(k\,r) Y_{\ell,m}\left(\Omega_r\right)\phi_{\ell,m}, \tag{A.28}$$

donde

$$\phi_{\ell,m} = \frac{(4\pi\epsilon_0)}{\epsilon_0} k \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} h_\ell^{+}(kr_t) Y_{\ell,m}^{*}(\Omega_{r_t})\, dt. \tag{A.29}$$

Para calcular las constantes $\phi_{\ell,m}$ de la Ec. (A.29) se calcula la transformada de Fourier de la función de Green en el espacio de frecuencias [4]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t|}}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_t|}\, dt = \frac{2}{v} K_0\left(\frac{|\omega| R}{v\gamma}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z/v}, \tag{A.30}$$

donde $R = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$, v la rapidez de electrón y K_0 la función Bessel modificada del segundo tipo de orden cero. A partir de las Ecs. (A.26), (A.28) y (A.30) se puede obtener la ecuaciación

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} j_\ell(k\,r) Y_{\ell,m}\left(\Omega_r\right)\phi_{\ell,m} = \frac{(4\pi\epsilon_0)}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{v} K_0\left(\frac{|\omega| R}{v\gamma}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z/v}, \tag{A.31}$$

y al usar la ortonormalidad de los armónicos esféricos se obtiene

$$\phi_{\ell,m} = \frac{(4\pi\epsilon_0)}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{v\, j_\ell(k\,r)}\int_0^{4\pi} Y_{\ell,m}^{*}(\Omega_r) K_0\left(\frac{|\omega| R}{v\gamma}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z/v}\, d\Omega_r. \tag{A.32}$$

Al realizar la integral de la Ec. (A.32) se obtiene [5]

$$\phi_{\ell,m} = \frac{(4\pi\epsilon_0)}{\epsilon_0} k \frac{A_{\ell,m}^{+}}{\omega} K_m\left(\frac{\omega b}{v\gamma}\right), \tag{A.33}$$

donde K_m es la función Bessel modificada del segundo tipo de orden m, y los coeficientes $A_{\ell,m}^{+}$ están dados por

$$A_{\ell,m}^{+} = \frac{1}{\beta^{\ell+1}}\sum_{j=m}^{\ell} \frac{\mathrm{i}^{\ell-j}(2\ell+1)!!\alpha_{\ell,m}}{\gamma^j 2^j (l-j)![(j-m)/2]![(j+m)/2]!} I_{j,\ell-j}^{\ell,m}, \tag{A.34}$$

con

$$\alpha_{\ell,m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{A.35}$$

Los números $I^{\ell,m}_{j,\ell-j}$ se calculan mediante la siguiente relación de recurrencia

$$(\ell-m)I^{\ell,m}_{i_1,i_2} = (2\ell-1)I^{\ell-1,m}_{i_1,i_2+1} - (\ell+m-1)I^{\ell-2,m}_{i_1,i_2}, \tag{A.36}$$

con los valores iniciales $I^{m-1,m}_{i_1,i_2} = 0$, $I^{m-2,m}_{i_1,i_2} = 0$ y

$$I^{m,m}_{i_1,i_2} = \begin{cases} (-1)^m(2m-1)!!B\left(\frac{i_1+m+2}{2}, \frac{i_2+1}{2}\right), & \text{si } i_2 \text{ es par} \\ 0, & \text{si } i_2 \text{ es impar} \end{cases}, \tag{A.37}$$

y donde B(x,y) es la función beta [6].

A partir de las Ecs. (A.10), (A.11), (A.28) y (A.33), se obtiene

$$\psi^{\mathrm{E,ext}}_{\ell,m} = (4\pi\epsilon_0)\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{-2\pi(i)^{\ell-1}k}{c\gamma}\frac{B_{\ell,m}}{\ell(\ell+1)}K_m\left(\frac{\omega b}{v\gamma}\right), \tag{A.38}$$

$$\psi^{\mathrm{M,ext}}_{\ell,m} = (4\pi\epsilon_0)\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{-4\pi(i)^{\ell-1}kv}{c^2}\frac{B_{\ell,m}}{\ell(\ell+1)}K_m\left(\frac{\omega b}{v\gamma}\right), \tag{A.39}$$

con

$$B_{\ell,m} = A^{+}_{\ell,m+1}\sqrt{(\ell+m+1)(\ell-m)} - A^{+}_{\ell,m-1}\sqrt{(\ell-m+1)(\ell+m)}. \tag{A.40}$$

Finalmente, se pueden escribir los campos electromagnéticos externos como

$$\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{ext}} = \sum_{\ell,m}\left(\mathscr{E}^{er}_{\ell,m}\hat{r} + \mathscr{E}^{e\theta}_{\ell,m}\hat{\theta} + \mathscr{E}^{e\varphi}_{\ell,m}\hat{\varphi}\right), \tag{A.41}$$

$$\vec{\mathbf{H}}_{\mathrm{ext}} = \sum_{\ell,m}\left(\mathscr{H}^{er}_{\ell,m}\hat{r} + \mathscr{H}^{e\theta}_{\ell,m}\hat{\theta} + \mathscr{H}^{e\varphi}_{\ell,m}\hat{\varphi}\right), \tag{A.42}$$

en donde las componentes de los campos externos están mostradas en las Ecs. ... del texto principal.

Referencias

[1] F. J. G. de Abajo y V. D. Giulio. Optical Excitations with Electron Beams: Challenges and Opportunities. *ACS Photonics*, 8(4):945–974, 2021. [citado en la pág. 13.]

[2] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2007. [citado en las págs. 13, 14 y 19.]

[3] José Ángel Castellanos-Reyes. *Transferencia de momento angular de electrones rápidos a nanopartículas*. Tesis de doctorado, Facultad de Ciencias, UNAM, 9 2021. [citado en la pág. 19.]

[4] C. Maciel-Escudero y A. Reyes-Coronado. Electromagnetic fields produced by a swift electron: A source of white light. *Wave Motion*, 86:137–149, 2019. [citado en las págs. 19, 29 y 30.]

[5] F. J. García de Abajo. Relativistic energy loss and induced photon emission in the interaction of a dielectric sphere with an external electron beam. *Phys. Rev. B*, 59:3095–3107, Jan 1999. [citado en las págs. 20, 28, 29 y 30.]

[6] M. Abramowitz, I. A. Stegun y R. H. Romer. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. American Association of Physics Teachers, 1988. [citado en las págs. 20, 30 y 31.]

[7] F. E. Low. *Classical Field Theory: Electromagnetism and Gravitation*. John Wiley & Sons, 2008. [citado en las págs. 21 y 28.]

[8] C. F. Bohren y D. R. Huffman. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. John Wiley & Sons, 2008. [citado en la pág. 22.]

[9] R. H. Good y T. J. Nelson. *Classical Theory of Electric and Magnetic Fields*. Academic Press, 2013. [citado en la pág. 22.]

[10] György Barton y Gabriel Barton. *Elements of Green's functions and propagation: potentials, diffusion, and waves*. Oxford University Press, 1989. [citado en la pág. 29.]